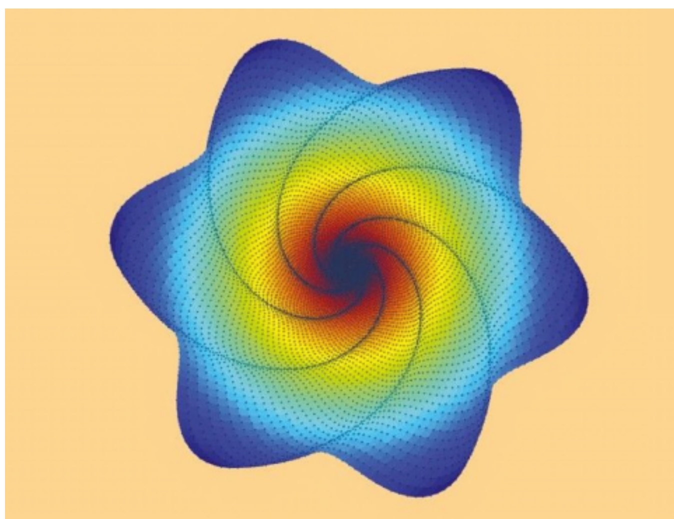
ECOLE NORMALE SUPERIEURE
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA
المدرسة العليا للأساتذة
جامعة الحسن الثانى بالدار البيضاء

DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUE ET INFORMATIQUE

MASTER 1 ANEDP

Projet : Programmation Du EF En MATLAB

Analyse Numérique : Méthode Des éléments Finis P1, P2 Et P3



Réalisé Par :
LAAZIRI Mohamed

Professeur :
RACHID ANAS

Table des matières

Introduction **2**

1 Formulation Variationnelle **3**

2 Programme MEF **4**

2.1 Élément fini $P1$ 4

2.1.1 Version 1 4

2.1.2 Version 2 :élément de référence 5

2.2 Élément fini $P2$ 6

2.2.1 Version 1 6

2.2.2 Version 2 :élément de référence 7

2.3 Élément fini $P3$ 7

2.3.1 Version 1 7

2.3.2 Version 2 :élément de référence 8

3 Validation Des Programmes **9**

3.1 Table de convergence 9

3.2 Résultats graphiques : 10

Conclusion **11**

Introduction

Les équations aux dérivées partielles (EDP) sont omniprésentes dans toutes les sciences, puisqu'elles apparaissent aussi bien en dynamique des structures, mécanique des fluides que dans les théories de la gravitation ou de l'électromagnétique (Exemple : les équations de Maxwell). Elles sont primordiales dans des domaines tels que la simulation aéronautique, la synthèse d'images, la prévision météorologique, la démographie, ou les finances. Enfin, les équations les plus importantes de la relativité générale et EDP de la mécanique quantique sont également des EDP . Ce sont des équations indispensables pour la résolution de presque la totalité des problèmes dans ces domaines.

Dans ce projet, on va résoudre le problème Dirichlet homogène en dimension 1 par la méthode des éléments finis P1 ,P2 et P3 suivant :

$$\alpha u'' + \beta u' + \gamma u = f$$

Avec les conditions aux bords $u(a) = 0 = u(b)$, et f est une fonction donner, α, β, γ sont des constantes.
On peut considérer ce problème comme une équation différentielle, et donc on peut le résoudre par des méthodes classiques, par exemple :
En particulier, notre problème avec α = -1, $\beta = 0$, et $\gamma = 0$, sur l'intervalle $]0;1[$
Et $f(x) = \sin(\pi x)$, et donc on obtient :

$$\begin{cases} -u''(x) = \sin(\pi x)\,, \quad x \in \,]0;1[\\ \quad u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

La solution analytique au problème est $u(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi^2}$

1 Formulation Variationnelle

Le principe de l'approche variationnelle pour la résolution des équations aux dérivées partielles est de remplacer l'équation par une formulation équivalente, dite variationnelle, obtenue en intégrant l'équation multipliée par une fonction quelconque, dite test. Comme il est nécessaire de procéder à des intégrations par parties dans l'établissement de la formulation variationnelle.
Soit :

$$\begin{cases} \alpha u''(x) + \beta u'(x) + \gamma u(x) = f(x)\,, \quad x \in \Omega \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Avec $\Omega =]0;1[$
En multipliant l'équation par une fonction test v, et on intégrant :

$$\alpha \int_\Omega u''vdx + \beta \int_\Omega u'vdx + \gamma \int_\Omega u \cdot vdx = \int_\Omega f \cdot vdx$$

En utilisant l'intégration par parties, on obtient :

$$-\alpha \int_\Omega u'v'dx + [u'v]_0^1 - \beta \int_\Omega u \cdot v'dx + [uv]_0^1 + \gamma \int_\Omega u \cdot vdx = \int_\Omega f \cdot vdx$$

En tenant compte de la condition aux bords,

$$-\alpha \int_\Omega u'v'dx - \beta \int_\Omega u \cdot v'dx + \gamma \int_\Omega u \cdot vdx = \int_\Omega f \cdot vdx$$

En général, on utilisant la formule de green pour une dimension plus élevée. Donc, (1) est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} Trouver \quad u \in V \\ -\alpha \int_\Omega u'v'dx - \beta \int_\Omega u \cdot v'dx + \gamma \int_\Omega u \cdot vdx = \int_\Omega f \cdot vdx \qquad \forall v \in V \end{cases}$$

Avec $V = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \quad sur \quad \partial\Omega\}$
On prend $V_h = vect(\phi_1....\phi_N)$, avec dim $V_h = N$ Où, les ϕ_i forment une base appelés des fonctions formes.
Le problème approchée sera :

$$\begin{cases} Trouver \quad u_h \in V_h \\ -\alpha \int_\Omega u_h'v_h'dx - \beta \int_\Omega u_h \cdot v_h'dx + \gamma \int_\Omega u_h \cdot v_hdx = \int_\Omega f \cdot v_hdx \qquad \forall v_h \in V_h \end{cases}$$

Choix :

- $u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_i\phi_i(x)$
- $v_h(x) = \phi_j(x) \qquad j = 0, ..., N$

Et donc :

$$\begin{cases} Trouver \quad u_h \in V_h \\ -\alpha \sum_{i=0}^{N} u_i \int_\Omega \phi_i'\phi_j'dx - \beta \sum_{i=0}^{N} u_i \int_\Omega \phi_i \cdot \phi_j'dx + \gamma \sum_{i=0}^{N} u_i \int_\Omega \phi_i \cdot \phi_jdx = \int_\Omega f \cdot \phi_jdx \; \forall j = 0, ..., N \end{cases}$$

2 Programme MEF

2.1 Élément fini $P1$

2.1.1 Version 1

Dans La MEF, on commence d'abord avec le maillage, la fonction prend comme entrer le pas et les bords et elle retourne X, la table des coordonnés, et T la table de connectivité, puisqu'on travaille par EF P1, alors chaque élément contient deux noeuds, ce qui nous permet d'utiliser deux fonctions de formes, qui vérifient la condition de la base de Lagrange :

$$\begin{array}{ll} \Phi_1(x1) = 1 & \Phi_1(x2) = 0 \\ \Phi_2(x1) = 0 & \Phi_2(x2) = 1 \end{array}$$

Les matrices élémentaires :
D'après l'équation qu'on a, on va obtenir 3 matrices élémentaires : K_i, M_i et N_i.
Soit T_i les éléments du maillage où $i = 1, ..., 2$

$$K_i = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{T_i} \phi_1' \cdot \phi_1' & \displaystyle\int_{T_i} \phi_1' \cdot \phi_2' \\ \displaystyle\int_{T_i} \phi_2' \cdot \phi_1' & \displaystyle\int_{T_i} \phi_2' \cdot \phi_2' \end{bmatrix} \qquad M_i = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{T_i} \phi_1 \cdot \phi_1 & \displaystyle\int_{T_i} \phi_1 \cdot \phi_2 \\ \displaystyle\int_{T_i} \phi_2 \cdot \phi_1 & \displaystyle\int_{T_i} \phi_2 \cdot \phi_2 \end{bmatrix}$$

N.B : ces deux matrices sont symétriques .

$$N_i = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{T_i} \phi_1' \cdot \phi_1 & \displaystyle\int_{T_i} \phi_1' \cdot \phi_2 \\ \displaystyle\int_{T_i} \phi_2' \cdot \phi_1 & \displaystyle\int_{T_i} \phi_2' \cdot \phi_2 \end{bmatrix}$$

N.B : cette dernière ne l'est pas.
Pour calculer ces matrices, on est besoin de calculer chaque fonction de forme et leur dérivée, ensuite on calcule l'intégrale par la méthode de **quadrature de Simpson**, et son valeur sur les noeuds par les deux fonctions **Polyval** et **Polyder**.
Quadrature de Gauss :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b P(x)dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

Second membre :
On construit la matrice du second membre en faisant appel au fonctions **int_phi**. La matrice du second membre est :

$$\begin{bmatrix} \displaystyle\int_{T_i} \phi_1 \cdot f \\ \displaystyle\int_{T_i} \phi_2 \cdot f \end{bmatrix}$$

Assemblage :
On va maintenant chercher à assembler numériquement (relation de Chasles) la matrice globale. Pour cela, on fait une boucle sur les éléments, pour chaque élément on remplit la matrice avec les points correspondant à cet élément.
Pour des matrices :
POUR k = 1 : N FAIRE ! boucle sur les éléments
POUR i = 1 : 2 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
POUR j = 1 : 2 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
I = k + i - 1 ! numéros globaux
J = k + j - 1 ! numéros globaux
G(I ; J) = G(I ; J) + K(i ; j) ! B : matrice globale, K : matrice élémentaire
FIN DES 3 BOUCLES
Pour second membre :
POUR k = 1 : N FAIRE ! boucle sur les éléments
POUR i = 1 : 2 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
I = k + i - 1 ! numéros globaux
F (I) = F (I) + l(i) ! F : matrice globale, l : Second membre élémentaire
FIN DES 2 BOUCLES
Résolution :
Dans cette étape ,on utilise les conditions aux limites dans un programme qui permet de résoudre le système KU =F.
Main :
On choisit une fonction qui vérifie les conditions au bord, et On construit le problème, puis On fait appel à la fonction de maillage et celle de la résolution. La figure de la solution exacte et approché est tracée sur un graphe ainsi que celle de l'analyse de l'erreur.

2.1.2 Version 2 :élément de référence

Dans cette version,on reste sur le même principe sauf pour les fonctions de formes on utilise un changement de variable $F_i(t) = F\left(\frac{a+b}{2} + \frac{(b-a)t}{2}\right)$ *pour* $t \in [-1; 1]$
les fonctions de formes s'expriment donc à l'aide des deux fonctions suivantes définies sur $[-1; 1]$:

$$\phi_1(t) = \frac{-t+1}{2} \qquad \phi_2(t) = \frac{t+1}{2}$$

et d'après le quadrature de Gauss $\int_{-1}^{1} f(x) \simeq \sum_i \omega_i f(x_i)$ avec ω_i définis les Poids d'intégration et x_i les points d'intégrations . Donc on obtient les matrices élémentaires constantes à l'aide des calcules formels simples sur Maple suivantes :
$M_i = \frac{h_k}{2}\cdot$ (matrice constante), $K_i = \frac{2}{h_k}\cdot$(matrice constante), N_i=(matrice constante),

et pour le second membre on obtient : $F_i = \frac{h_k}{2}\cdot$ (matrice qui dépend de chaque f).

2.2 Élément fini $P2$

2.2.1 Version 1

La fonction Maillage même que $P1$, sauf qu'on ajoute un point intermédiaire sur chaque élément, ce qui nous donne trois noeuds, et alors trois fonctions de formes qui vérifient aussi la Base de Lagrange :

$$\begin{array}{lll} \Phi_1(x1) = 1 & \Phi_1(x2) = 0 & \Phi_1(x3) = 0 \\ \Phi_2(x1) = 0 & \Phi_2(x2) = 1 & \Phi_2(x3) = 0 \\ \Phi_3(x1) = 0 & \Phi_3(x2) = 0 & \Phi_3(x3) = 1 \end{array}$$

Les matrices élémentaires :
Les matrices élémentaires de $P2$ ont devenu de dimension $3 * 3$
$K_i = \left(\int_{T_i} \Phi_i'\Phi_j'\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ $M_i = \left(\int_{T_i} \Phi_i\Phi_j\right)_{1\leq i,j\leq 3}$ $N_i = \left(\int_{T_i} \Phi_i'\Phi_j\right)_{1\leq i,j\leq 3}$

Le calcul de la matrice élémentaire est de même principe que $P1$.
Second membre
On construit la matrice du second membre en faisant appel au fonctions **int_phi**. La matrice du second membre est :

$$\begin{bmatrix} \int_{T_i} \phi_1 \cdot f \\ \int_{T_i} \phi_2 \cdot f \\ \int_{T_i} \phi_3 \cdot f \end{bmatrix}$$

Assemblage :
Concernant cette fonction, l'algorithme est le suivant :
POUR k = 1 : N FAIRE ! boucle sur les éléments
POUR i = 1 : 3 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
POUR j = 1 : 3 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
I = 2*k + i - 2 ! numéros globaux
J = 2*k + j - 2 ! numéros globaux
G(I ; J) = G(I ; J) + K(i ; j) ! B : matrice globale, K : matrice élémentaire
FIN DES 3 BOUCLES
Pour second membre :POUR k = 1 : N FAIRE ! boucle sur les éléments
POUR i = 1 : 3 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
I = 2*k + i - 2 ! numéros globaux
F (I) = F (I) + l(i) ! F : matrice globale, l : Second membre élémentaire
FIN DES 2 BOUCLES

Résolution :
Dans cette étape ,on utilise les conditions aux limites dans un programme qui permet de résoudre le système KU =F.
Main :
On choisit une fonction qui vérifie les conditions au bord, et On construit le problème, puis On fait appel à la fonction de maillage et celle de la résolution. La figure de la solution exacte et approché est tracée sur un graphe ainsi que celle de l'analyse de l'erreur.

2.2.2 Version 2 :élément de référence

Pour l'élément de référence $P2$, c'est le même que $P1$ version 2 sauf qu'on a trois fonctions définies sur $[-1;1]$:

$$\phi_1(t) = \frac{t(t-1)}{2} \qquad \phi_2(t) = -t^2 + 1 \qquad \phi_3(t) = \frac{t(t+1)}{2}$$

Pour appliquer la méthode de Gauss il suffit de prendre le cas $n = 3$.

2.3 Élément fini $P3$

2.3.1 Version 1

La fonction Maillage même que les autres , sauf qu'on ajoute deux point intermédiaire sur chaque élément, ce qui nous donne quatre noeuds, et alors quatre fonctions de formes qui vérifient aussi la Base de Lagrange :

$$\begin{array}{llll}
\Phi_1(x1) = 1 & \Phi_1(x2) = 0 & \Phi_1(x3) = 0 & \Phi_1(x4) = 0 \\
\Phi_2(x1) = 0 & \Phi_2(x2) = 1 & \Phi_2(x3) = 0 & \Phi_2(x4) = 0 \\
\Phi_3(x1) = 0 & \Phi_3(x2) = 0 & \Phi_3(x3) = 1 & \Phi_3(x4) = 0 \\
\Phi_4(x1) = 0 & \Phi_4(x2) = 0 & \Phi_4(x3) = 0 & \Phi_4(x4) = 1
\end{array}$$

Les matrices élémentaires :
Les matrices élémentaires de $P3$ ont devenu de dimension $4 * 4$

$$K_i = \left(\int_{T_i} \Phi_i' \Phi_j' \right)_{1 \leq i,j \leq 4} \qquad M_i = \left(\int_{T_i} \Phi_i \Phi_j \right)_{1 \leq i,j \leq 4} \qquad N_i = \left(\int_{T_i} \Phi_i' \Phi_j \right)_{1 \leq i,j \leq 4}$$

Le calcul de la matrice élémentaire est de même principe que $P1$ et $P2$.
Second membre
On construit la matrice du second membre en faisant appel au fonctions **int_phi**. La

matrice du second membre est :

$$\begin{bmatrix} \int_{T_i} \phi_1 \cdot f \\ \int_{T_i} \phi_2 \cdot f \\ \int_{T_i} \phi_3 \cdot f \\ \int_{T_i} \phi_4 \cdot f \end{bmatrix}$$

Assemblage :
Concernant cette fonction, l'algorithme est le suivant :
POUR k = 1 : N FAIRE ! boucle sur les éléments
POUR i = 1 : 4 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
POUR j = 1 : 4 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
I = 3*k + i - 3 ! numéros globaux
J = 3*k + j - 3 ! numéros globaux
G(I ; J) = G(I ; J) + K(i ; j) ! B : matrice globale, K : matrice élémentaire
FIN DES 3 BOUCLES
Pour second membre :
POUR k = 1 : N FAIRE ! boucle sur les éléments
POUR i = 1 : 4 FAIRE ! boucle sur les numéros locaux
I = 3*k + i - 3 ! numéros globaux
F (I) = F (I) + l(i) ! F : matrice globale, l : Second membre élémentaire
FIN DES 2 BOUCLES
Résolution main :
Même principe que $P1$ et $P2$

2.3.2 Version 2 :élément de référence

Pour l'élément de référence $P3$, c'est le même que $P1$ et $P2$ version 2 sauf qu'on a quatre fonctions définies sur $[-1; 1]$:

$$\phi_1(t) = \frac{1}{16}(t-1)(1-9t^2) \qquad \phi_2(t) = \frac{9}{16}(1-3t)(1+t)(1-t)$$

$$\phi_3(t) = \frac{9}{16}(1+t)(3t+1)(1-t) \qquad \phi_4(t) = \frac{1}{16}(1+t)(3t+1)(3t-1)$$

Pour appliquer la méthode de Gauss il suffit de prendre le cas $n = 4$.

Commentaire : Dans ce travail, on a traité les EF $P1, P2$ et $P3$ avec ses deux versions, et on remarque que les deux versions ,donnent les mêmes résultats sauf que la méthodologie de programmer est différente, la deuxième version ou bien EF avec élément de référence est plus simple que l'autre car il y a des matrices constantes simples a calculer une seule fois qui permet de diminuer le nombre des itérations.

3 Validation Des Programmes

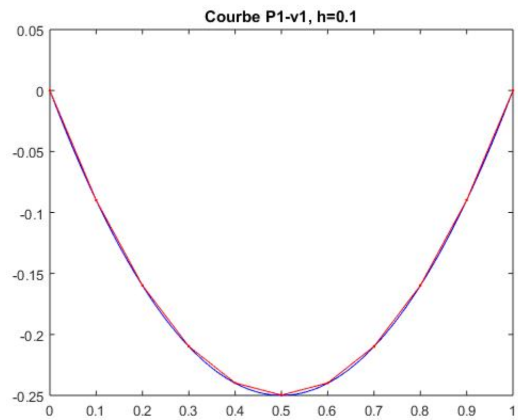
Dans cette étape on a considéré $f(x)= x^2 + x + 1$et la solution exacte $U_e = x(x-1)$, et voilà on a trouvé les résultats suivants :

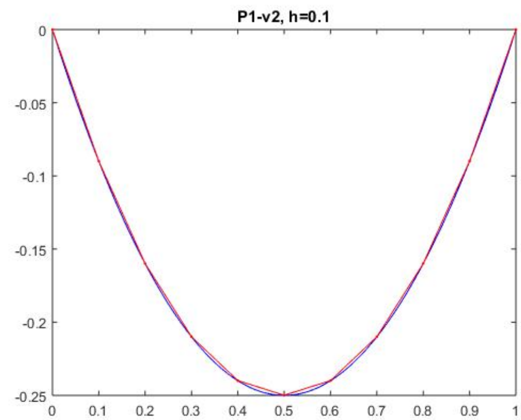
3.1 Table de convergence

	Le Pas h	**P1**	**P2**	**P3**
Version 1	**0.2**	**0.0015**	**0.0000003735**	**0.038**
	0.1	**0.096**	**0.0000010613**	**0.024**
	0.01	**0.011**	**0.0000064606**	**0.00106**
	0.001	**0.004**	**0.0000635554**	**0.0028**
Version 2	**0.2**	**0.136**	**0.032**	**0.000158**
	0.1	**0.04**	**0.010**	**0.000222**
	0.01	**0.002**	**0.000124**	**0.0001899**
	0.001	**0.000239**	**0.000327**	**0.0002**

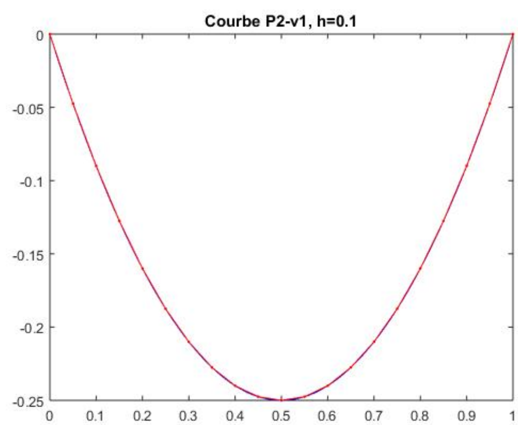
3.2 Résultats graphiques :

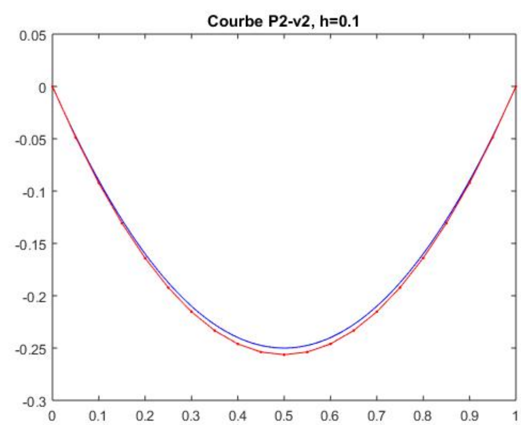
<u>EF P1 :</u>



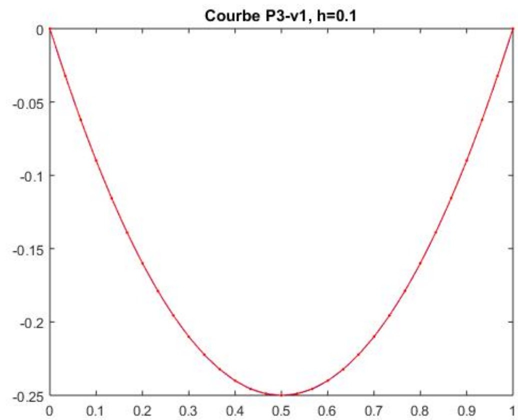


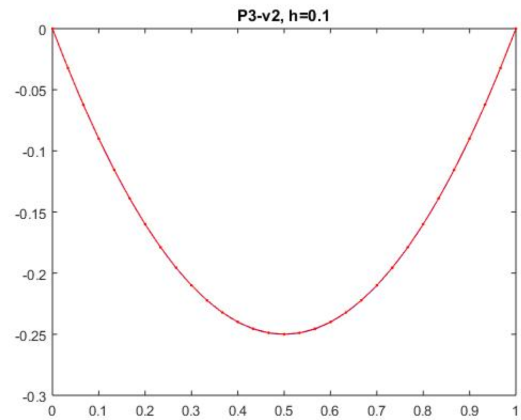
<u>EF P2 :</u>





EF P3 :





Conclusion

Ce travail a pour but l'étude et la résolution des équations aux dérivées partielles elliptiques qui interviennent très souvent dans la modélisation des phénomènes stationnaires (c-à-d n'évoluant pas au cours du temps),

Pour résoudre numériquement cette équation on a utilisé la méthode de résolution, Éléments Finis. Ce premier projet sur Matlab nous a énormément aidés à comprendre la notion et l'ordonnancement des étapes de résolution en éléments finis en 1D pour P1, P2 et P3.