CALCOLI CON DENSITÀ DISCRETE

[In questa parte considero v.a. discrete multidimensionali, e quindi con le notazioni di vettore $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$. Poi se la dimensione è 1 (quindi $m=1$ nel caso citato qui) si recupera il caso "non multidimensionale" come caso particolare.]

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{X}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ una v.a. discreta m-dimensionale. Poi sia $f: A \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una funzione. Allora, se $S_{\underline{X}} \subset A$, la funzione $\underline{Y} = f \circ \underline{X}: \Omega \to \mathbb{R}^n$ è una v.a. n-dimensionale.

Inoltre per le densità discrete di $\underline{X}$ e $\underline{Y}$ vale la seguente uguaglianza:

$$p_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}} : f(\underline{x}) = \underline{y}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) \qquad \forall\, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$$

lettere minuscole

$\underline{Y}$ è detta trasformazione della v.a. $\underline{X}$

DIMOSTRAZIONE

Per ogni $\underline{y} \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$P_{\underline{Y}}(\underline{y}) = P(\underline{Y} = \underline{y}) = P\Bigg(\bigcup_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}}: \\ f(\underline{x}) = \underline{y}}} \{ \underline{X} = \underline{x} \} \Bigg) =$$

unione al più numerabile di eventi, disgiunti a due a due

lettere minuscole

$$= \sum_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}}: \\ f(\underline{x}) = \underline{y}}} P(\underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}}: \\ f(\underline{x}) = \underline{y}}} P_{\underline{X}}(\underline{x})$$

che è l'uguaglianza che volevamo ottenere.

ESEMPIO (con $m=3$ e $n=2$)

Sia $p_{\underline{X}}$ definita come segue:

$p_{\underline{X}}(0,0,0) = \frac{2}{8}$; $p_{\underline{X}}(0,0,1) = p_{\underline{X}}(0,1,0) = p_{\underline{X}}(1,0,0) = p_{\underline{X}}(1,0,1) = p_{\underline{X}}(1,1,0) = p_{\underline{X}}(0,1,1) = \frac{1}{8}$

Inoltre sia $\underline{Y} = f(\underline{X})$, dove $f(\underline{x}) = f(x_1, x_2, x_3) = (x_1+x_2, x_2 \cdot x_3)$ $\forall \underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

lettere minuscole

Vogliamo usare l'uguaglianza $p_{\underline{Y}}(\underline{y}) = \sum_{\underline{x}:\, f(\underline{x})=\underline{y}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$.

Osserviamo che $S_{\underline{Y}} \subset \{0,1,2\} \times \{0,1\}$.

Quindi calcoleremo $p_{\underline{Y}}(\underline{y})$ per $\underline{y} \in \{0,1,2\} \times \{0,1\}$ (sappiamo che $p_{\underline{Y}}(\underline{y}) = 0$ se $\underline{y} \notin S_{\underline{Y}}$).

Quindi:

$p_{\underline{Y}}(0,0) = p_{\underline{X}}(0,0,0) + p_{\underline{X}}(0,0,1) = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p_{\underline{Y}}(0,1) = 0$

SOMMA = 1
OK

$p_{\underline{Y}}(1,0) = p_{\underline{X}}(0,1,0) + p_{\underline{X}}(1,0,0) + p_{\underline{X}}(1,0,1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$

$p_{\underline{Y}}(1,1) = p_{\underline{X}}(0,1,1) = \frac{1}{8}$

$p_{\underline{Y}}(2,0) = p_{\underline{X}}(1,1,0) = \frac{1}{8}$

$p_{\underline{Y}}(2,1) = 0$

ESEMPIO (con $m=2$ e $n=1$)

Supponiamo di avere $p_{\underline{X}}(0,0)=\frac{2}{20}$ $\quad p_{\underline{X}}(0,1)=p_{\underline{X}}(1,0)=p_{\underline{X}}(1,1)=\frac{3}{20}$

$p_{\underline{X}}(0,2)=p_{\underline{X}}(2,0)=\frac{1}{20}$, $\quad p_{\underline{X}}(2,2)=\frac{7}{20}$

Sia $\underline{Y}=(X_1+X_2)^2$; allora $\mathcal{S}_{\underline{Y}}=\{0,1,4,16\}$, ed inoltre

$$p_{\underline{Y}}(0)=p_{\underline{X}}(0,0)=\frac{2}{20}$$

$$p_{\underline{Y}}(1)=p_{\underline{X}}(0,1)+p_{\underline{X}}(1,0)=\frac{3}{20}+\frac{3}{20}=\frac{6}{20}$$

$$p_{\underline{Y}}(4)=p_{\underline{X}}(1,1)+p_{\underline{X}}(0,2)+p_{\underline{X}}(2,0)=\frac{3}{20}+\frac{1}{20}+\frac{1}{20}=\frac{5}{20}$$

$$p_{\underline{Y}}(16)=p_{\underline{X}}(2,2)=\frac{7}{20}$$

SOMMA $=1$

ok

UNA CLASSE GENERALE DI ESEMPI (SOMME DI V.A.)

Vogliamo trattare il caso in cui $m = 1$ e $f(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$ $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Quindi si ha

$$p_Y(y) = \sum_{\substack{\underline{x} \in S_{\underline{X}} : \\ x_1 + \dots + x_n = y}} p_{\underline{X}}(\underline{x}).$$

lettere minuscole

Vedremo ora alcuni casi specifici con $n = 2$; in particolare, per alcuni casi tra questi, il passaggio da $n = 2$ a n generico sarà semplice procedendo per induzione.

CASO SPECIFICO 1 (lancio di due dadi equi)

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \frac{1}{36} \qquad \forall\, \underline{x} = (x_1, x_2) \in \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$$

$$Y = X_1 + X_2 \qquad S_Y = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$p_Y(y) = \sum_{\substack{\underline{x} \in \{1,\dots,6\}\times\{1,\dots,6\} \\ x_1 + x_2 = y}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \frac{\#\{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 = y\}}{36}$$

e recuperiamo i risultati già visti in passato:

$$p_Y(2) = p_Y(12) = \frac{1}{36}, \quad p_Y(3) = p_Y(11) = \frac{2}{36}, \quad p_Y(4) = p_Y(10) = \frac{3}{36}, \quad p_Y(5) = p_Y(9) = \frac{4}{36},$$

$$p_Y(6) = p_Y(8) = \frac{5}{36}, \quad p_Y(7) = \frac{6}{36}.$$

$$\boxed{\text{SOMMA} = 2\cdot\frac{1}{36} + 2\cdot\frac{2}{36} + 2\cdot\frac{3}{36} + 2\cdot\frac{4}{36} + 2\cdot\frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{2+4+6+8+10+6}{36} = \frac{36}{36} = 1 \quad \text{ok}}$$

CASO SPECIFICO 2 (SOMMA DI 2 BINOMIALI INDIPENDENTI CON LO STESSO PARAMETRO p)

$$X_1 \sim Bin(n_1, p), \quad X_2 \sim Bin(n_2, p) \quad \text{indip.} \implies p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) = \binom{n_1}{x_1} p^{x_1} (1-p)^{n_1 - x_1} \binom{n_2}{x_2} p^{x_2} (1-p)^{n_2 - x_2} =$$

$$= \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2} p^{x_1 + x_2} (1-p)^{n_1 + n_2 - (x_1 + x_2)}$$

$\forall (x_1, x_2) \in \{0, 1, \dots, n_1\} \times \{0, 1, \dots, n_2\}$.

$$S_Y = \{0, 1, \dots, n_1 + n_2\}$$

$$\boxed{p_Y(y)} = \sum_{\substack{(x_1, x_2):\\ x_1 + x_2 = y}} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2} p^{\underbrace{x_1 + x_2}_{=y}} (1-p)^{n_1 + n_2 - (x_1 + x_2)} = p^y (1-p)^{n_1 + n_2 - y} \underbrace{\sum_{\substack{(x_1, x_2):\\ x_1 + x_2 = y}} \binom{n_1}{x_1}\binom{n_2}{x_2}}_{= \binom{n_1 + n_2}{y} \text{ per formule viste per l'ipergeometrica}} = \boxed{\binom{n_1 + n_2}{y} p^y (1-p)^{n_1 + n_2 - y}}$$

$(\forall y \in S_Y)$

COMMENTO

$$Y = X_1 + X_2 \sim BIN(n_1 + n_2, p)$$

ALTRI COMMENTI (1ª parte)

Il risultato si estende al caso di m addendi indipendenti:

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim BIN(n_1, p) \\ \vdots \\ X_m \sim BIN(n_m, p) \end{cases}\right\} \text{indip.} \qquad X_1 + \dots + X_m \sim BIN(n_1 + \dots + n_m, p)$$

Il risultato non sorprende: ognuna delle v.a. X_i (per $i \in \{1, \dots, m\}$) conta il numero di successi su n_i prove indipendenti, tutte con probabilità di successo p; quindi, se consideriamo la somma, (e gli addendi sono indipendenti), è come se contassimo il numero di successi su $n_1 + \dots + n_m$ prove tutte con probabilità di successo p. Quindi è importante che il parametro p sia sempre lo stesso.

Senza questa ipotesi il risultato non è vero (vedere la prossima slide).

ALTRI COMMENTI (2ª parte) — un po' difficile

Un controesempio senza l'ipotesi di indipendenza è il seguente:

Sia $p\in(0,1)$, cioè $p\neq 0$ e $p\neq 1$, $m=2$, $X_1\sim BIN(n,p)$, $X_2=X_1$.

Quindi in particolare $X_2\sim BIN(n,p)$. Allora si ha:

$$\begin{cases} P(\{X_1=0\}\cap\{X_2=0\})=P(\{X_1=0\})=(1-p)^n \\ P(X_1=0)\,P(X_2=0)=(1-p)^n(1-p)^n=(1-p)^{2n} \end{cases}$$

diversi tra loro $\Longrightarrow$ X_1 e X_2 non sono indipendenti.

$X_1+X_2=2X_1$ e quindi $P(X_1+X_2\in\{\text{numeri dispari}\})=0$; quindi $X_1+X_2\sim BIN(\underbrace{n+n}_{=2n},p)$ è falsa perché tutti i valori in $\{0,1,2,\dots,2n-1,2n\}$ dovrebbero avere probabilità positiva.

CASO SPECIFICO 3 (SOMMA DI 2 POISSONIANE INDIPENDENTI)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \sim \text{POISSON}(\lambda_1) \\ X_2 \sim \text{POISSON}(\lambda_2) \end{array}\right\} \text{INDIP.} \implies p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2) = \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} e^{-\lambda_2}$$

$$= \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \quad \forall (x_1,x_2) \in \{0,1,2,\dots\} \times \{0,1,2,\dots\}.$$

$$S_Y = \{0,1,2,\dots\}$$

$$\boxed{p_Y(y)} = \sum_{\substack{(x_1,x_2):\\ x_1+x_2=y}} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{x_2}}{x_2!} \boxed{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{x_1=0}^{y} \frac{\lambda_1^{x_1}}{x_1!} \frac{\lambda_2^{y-x_1}}{(y-x_1)!} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} \sum_{x_1=0}^{y} \underbrace{\frac{y!}{x_1!\,(y-x_1)!}}_{=\binom{y}{x_1}} \lambda_1^{x_1} \lambda_2^{y-x_1}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{y!} (\lambda_1+\lambda_2)^y = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^y}{y!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

BINOMIO DI NEWTON

COMMENTO

$$Y = X_1 + X_2 \sim \text{POISSON}(\lambda_1+\lambda_2)$$

ALTRI COMMENTI

Il risultato si estende al caso di n addendi indipendenti:

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda_1) \\ \vdots \\ X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_n) \end{cases}\right\} \text{indip.} \qquad X_1 + \dots + X_n \sim \text{Poisson}(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)$$

Simile a quello per le Binomiali visto prima

Senza l'ipotesi di indipendenza il risultato non è vero in generale.

Un controesempio è il seguente: $n=2$, $X_1 \sim \text{Poisson}(\lambda)$ e $X_2 = X_1$. Allora $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda)$.

$$\begin{cases} P(\{X_1=0\} \cap \{X_2=0\}) = P(X_1=0) = e^{-\lambda} \\ P(X_1=0)\,P(X_2=0) = e^{-\lambda} \cdot e^{-\lambda} = e^{-2\lambda} \end{cases} \Longrightarrow X_1 \text{ e } X_2 \text{ non sono indipendenti.}$$

$X_1 + X_2 = 2X_1$ e quindi $P(X_1+X_2 \in \{\text{numeri dispari}\}) = 0$; quindi $X_1 + X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda+\lambda) = \text{Poisson}(2\lambda)$ è falsa perché tutti gli interi non negativi dovrebbero avere probabilità positive.

ESERCIZIO

Siano $p_1, p_2 \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta:

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = (1-p_2)^{x_2-1} (1-p_1)^{x_1-x_2} p_1 p_2 \qquad \text{per } x_1 \geq x_2 \geq 1 \text{ interi}$$

lettere minuscole

1) Verificare che la definizione di $p_{\underline{X}}$ è ben posta.

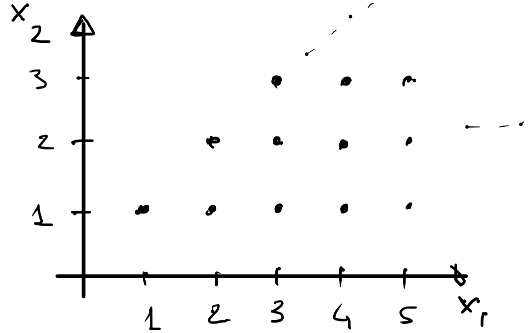
2) Calcolare la densità marginale di X_2

3) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

4) Calcolare $P(X_1 + X_2 \leq 4)$

5) Sia $p_1 = p_2 = p$. Calcolare la densità marginale di X_1.

SVOLGIMENTO



1) Si deve verificare che $\sum_{x_1 \geq x_2 \geq 1} p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = 1$.

Due possibilità:

→ fissare x_1 e sommare sulle verticali (variando x_2): $\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\sum_{x_2=1}^{x_1} p_{\underline{X}}(x_1,x_2)\right) = 1$

→ fissare x_2 e sommare sulle orizzontali (variando x_1): $\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\sum_{x_1=x_2}^{\infty} p_{\underline{X}}(x_1,x_2)\right) = 1$

Per usare le formule sulle serie geometriche meglio la seconda possibilità.

Quindi verificheremo che

$$\sum_{x_2=1}^{\infty} \sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} (1-p_1)^{x_1-x_2} p_1 p_2 = 1.$$

Si ha

$$p_1 p_2 \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} \underbrace{\sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_1)^{x_1-x_2}}_{\substack{\sum \text{ qui } h=x_1-x_2 \\ \text{per } x_2 \text{ fissato}}} = p_1 p_2 \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} (1-p_1)^h}_{= \frac{(1-p_1)^0}{1-(1-p_1)} = \frac{1}{p_1}} =$$

$$= p_1 p_2 \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} \cdot \frac{1}{p_1} = \cancel{p_1} p_2 \cdot \frac{1}{\cancel{p_1}} \sum_{x_2=1}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} = p_2 \cdot \frac{(1-p_2)^0}{1-(1-p_2)} = p_2 \cdot \frac{1}{\cancel{1}-\cancel{1}+p_2} = p_2 \cdot \frac{1}{p_2} = 1$$

Ok

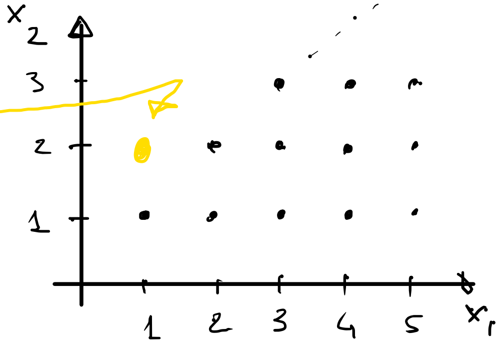
2) Per $x_2 \geq 1$ intero $p_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_2)^{x_2-1} (1-p_1)^{x_1-x_2} p_1 p_2 = p_1 p_2 (1-p_2)^{x_2-1} \underbrace{\sum_{x_1=x_2}^{\infty} (1-p_1)^{x_1-x_2}}_{= \sum_{h=0}^{\infty} (1-p_1)^h = \frac{1}{p_1}} =$

ancora $h = x_1 - x_2$ e stessi calcoli visti prima

$$= \cancel{p_1} p_2 (1-p_2)^{x_2-1} \cdot \frac{1}{\cancel{p_1}} = (1-p_2)^{x_2-1} p_2 .$$

<u>OSS</u>. $X_2 \sim \text{GeoTraslata}(p_2)$

3) I punti del grafico non costituiscono un prodotto cartesiano.



Ci sono infiniti "punti mancanti"; uno tra questi è (1,2)

e, a partire da questo, si vede che X_1 e X_2 __non__ sono indipendenti.

Infatti

$$\underbrace{p_{\underline{X}}(1,2)}_{\substack{=0 \\ \text{(ovvio)}}} \neq \underbrace{p_{X_1}(1)\, p_{X_2}(2)}_{\substack{\neq 0 \\ \text{perché}}}$$

$$p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) = (1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{1-1} p_1 p_2 = p_1 p_2 \neq 0$$

(perché $p_1 > 0$ e $p_2 > 0$)

$$p_{X_2}(2) = (1-p_2)^{2-1} p_2 = (1-p_2) p_2 \neq 0$$

Vedere risposta alla 2)

perché $0 < p_2 < 1$

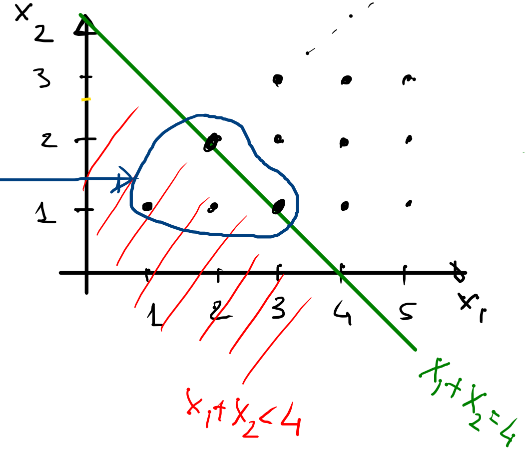
4) $P(X_1+X_2\le 4) = p_{\underline{X}}(1,1)+p_{\underline{X}}(2,1)+p_{\underline{X}}(3,1)+p_{\underline{X}}(2,2)=$

$=(1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{1-1}p_1p_2+(1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{2-1}p_1p_2+$

$+(1-p_2)^{1-1}(1-p_1)^{3-1}p_1p_2+(1-p_2)^{2-1}(1-p_1)^{2-2}p_1p_2=$

$=p_1p_2\left[1+1-p_1+(1-p_1)^2+1-p_2\right]$

$x_1+x_2\le 4$ in questi punti



5) In generale la marginale di X_1 è la seguente:

- per ogni $x_1\ge 1$ intero $p_{X_1}(x_1)=\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p_2)^{x_2-1}(1-p_1)^{x_1-x_2}p_1p_2= \underbrace{p_1p_2\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p_2)^{x_2-1}(1-p_1)^{x_1-x_2}}$.

Forse si può esplicitare ulteriormente ...

Nell'esercizio ci viene detto di considerare $p_1=p_2=p$; quindi si ha

- per ogni $x_1\ge 1$ intero $\boxed{p_{X_1}(x_1)} = p\cdot p\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p)^{\cancel{x_2}-1+x_1-\cancel{x_2}} = p^2\sum_{x_2=1}^{x_1}(1-p)^{x_1-1} = \boxed{p^2 x_1(1-p)^{x_1-1}}$.

l'addendo non dipende da x_2

OSSERVAZIONE

La densità $p_{X_1}(x_1) = p^2 x_1 (1-p)^{x_1 - 1}$ per $x_1 \geq 1$ intero non fa riferimento alle distribuzioni discrete notevoli che abbiamo visto. Ci si può chiedere: "Come verificare che $\sum_{x_1=1}^{\infty} p_{X_1}(x_1) = 1$?".

Procediamo così. Si sa che

$$\sum_{x_1=1}^{\infty} (1-p)^{x_1} = \frac{(1-p)^1}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{\cancel{1}-\cancel{1}+p} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1.$$

Possiamo derivare membro a membro rispetto a p: $\frac{d}{dp}\left(\sum_{x_1=1}^{\infty}(1-p)^{x_1}\right) = \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p} - 1\right)$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{x_1=1}^{\infty} x_1 (1-p)^{x_1-1}(-1) = -p^{-1-1}$$

per serie di potenze (nel raggio di convergenza) derivata della serie = serie delle derivate

$$\Longrightarrow -\sum_{x_1=1}^{\infty} x_1 (1-p)^{x_1-1} = -\frac{1}{p^2} \Longrightarrow p^2 \sum_{x_1=1}^{\infty} x_1 (1-p)^{x_1-1} = 1$$

$$\Longrightarrow \sum_{x_1=1}^{\infty} p^2 x_1 (1-p)^{x_1-1} = 1$$

Ok

ESERCIZIO

Consideriamo la seguente densità congiunta:

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = c \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} \qquad \text{per } x_1, x_2 \geq 1 \text{ interi}$$

dove $c > 0$ è una costante determinare.

1) Trovare il valore di c.

2) Calcolare $P(X_2 = 2X_1)$.

3) Calcolare $P(X_2 \geq 3X_1)$.

SVOLGIMENTO

1) Si deve avere $\sum_{x_1,x_2\geq 1} c \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} = 1$.

OSS. Si ha il prodotto tra due serie geometriche

Quindi si ha

$$1 = c \sum_{x_1,x_2\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} = c \sum_{x_1=1}^{\infty}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} = c \sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\sum_{x_2=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} =$$

$$= c\,\frac{(1/2)^1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{(3/4)^1}{1-\frac{3}{4}} = c\cdot\frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}\;\frac{3/4}{1/4} = c\cdot 3$$

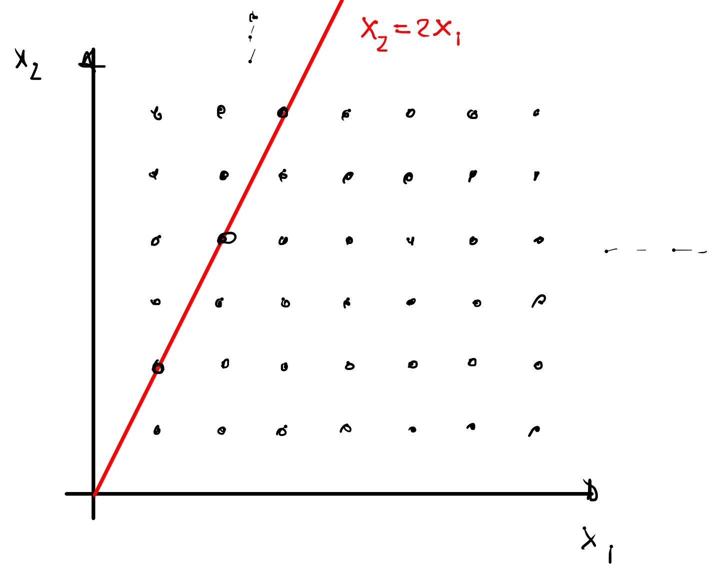
$$\Rightarrow\quad 3c = 1 \quad\Rightarrow\quad c = \frac{1}{3}$$

si sostituisce a c il valore trovato ora

OSS. Nelle prossime domande scriveremo $p_X(x_1,x_2) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}$ per $x_1,x_2\geq 1$ interi.

2) $P(X_2 = 2X_1) \overset{\triangledown}{=} \sum_{k=1}^{\infty} p_{\underline{X}}(k, 2k) =$

BISOGNA SOMMARE I VALORI DI $p_{\underline{X}}$ NEI PUNTI DELLA RETTA (SONO INFINITI)



$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3} \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{3}{4}\right)^{2k}} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^k =$$

$$= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2\right)^k = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{9}{32}\right)^k}_{1} =$$

$$= \frac{1}{3} \frac{(9/32)^1}{1 - \frac{9}{32}} = \frac{1}{3} \frac{9/32}{\frac{32-9}{32}} = \frac{1}{3} \frac{9/\cancel{32}}{23/\cancel{32}} = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{3} \cdot 23} = \frac{3}{23}$$

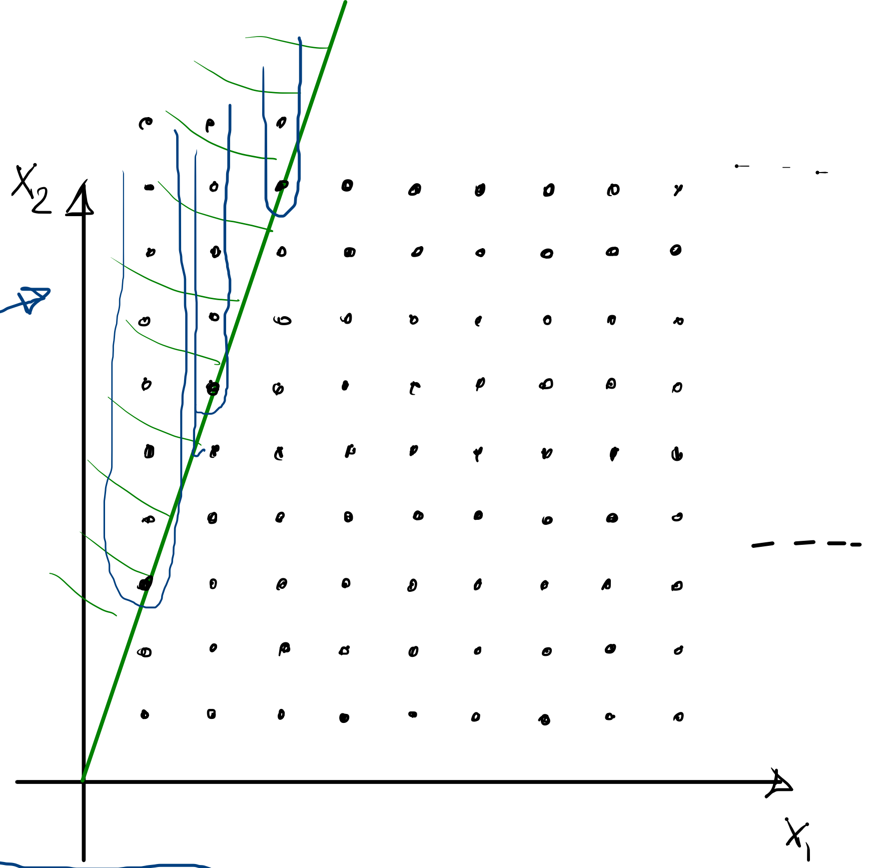
Oss. Qui compaiono due potenze. Bisogna fare dei passaggi per far comparire un'unica potenza come accade qui e poi si usa la formula della serie geometrica.

3) $P(X_2 \geq 3X_1) \stackrel{\triangle}{=}$

BISOGNA SOMMARE I VALORI DI p_X NEI PUNTI DEL SEMIPIANO "SOPRA" LA RETTA

$$= \sum_{x_1=1}^{\infty} \sum_{x_2=3x_1}^{\infty} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2}$$

SOMMIAMO "PRENDENDOLI IN VERTICALE" PER USARE LA FORMULA DELLA SERIE GEOMETRICA



$$= \frac{1}{3}\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\sum_{x_2=3x_1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_2} \stackrel{A}{=}$$

$$= \frac{1}{3}\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}\frac{(3/4)^{3x_1}}{1-\frac{3}{4}} \stackrel{A}{=}$$

BISOGNA PRIMA RISOLVERE LA SERIE "PIÙ INTERNA" QUELLA RISPETTO A X_2 PER X_1 FISSATO

$$= \frac{1/3}{1-\frac{3}{4}}\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^3\right)^{x_1}$$

BISOGNA AVERE UN'UNICA POTENZA

$$= \frac{1/3}{1/4}\sum_{x_1=1}^{\infty}\left(\frac{27}{128}\right)^{x_1} =$$

$$= \frac{4}{3}\,\frac{\left(27/128\right)^1}{1-\frac{27}{128}} = \frac{4}{3}\,\frac{27/128}{\frac{128-27}{128}} = \frac{4}{\cancel{3}}\,\frac{\overset{9}{\cancel{27}}/\cancel{128}}{101/\cancel{128}} = \frac{36}{101}.$$

ESERCIZIO

Consideriamo la seguente densità congiunta

$$P_{\underline{X}}(x_1, x_2) = \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1 - 1} \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} \qquad \text{per } x_1 \geq 1 \text{ e } x_2 \geq 0 \text{ interi.}$$

1) Calcolare $P(X_2 \leq X_1 - 1)$

2) Calcolare $P(X_1 \leq 2 \mid X_2 \leq X_1 - 1)$

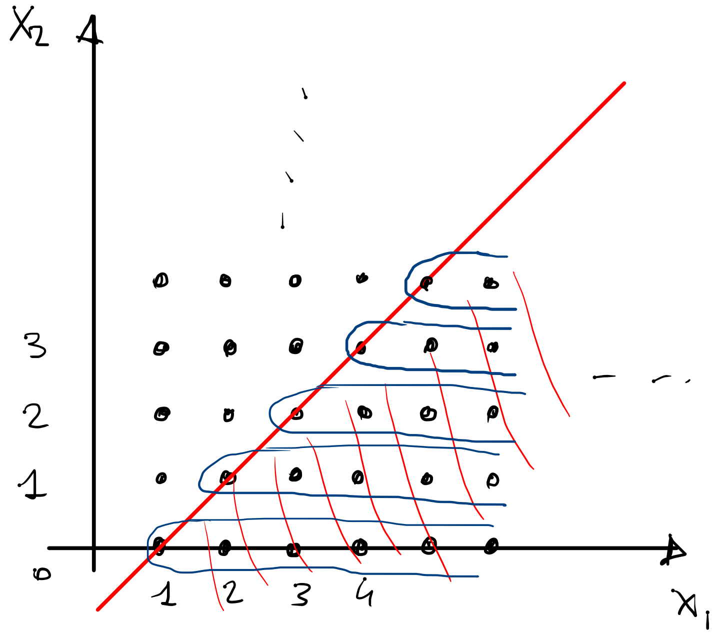
3) Trovare le densità marginali di X_1 e X_2 e dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

1) $P(X_2 \le X_1 - 1) =$

BISOGNA SOMMARE I VALORI DI p_X "SOTTO" LA RETTA

$$= \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_1=x_2+1}^{\infty} p_X(x_1, x_2)$$

CONVIENE "PRENDERLI IN ORIZZONTALE"



$$= \sum_{x_2=0}^{\infty} \sum_{x_1=x_2+1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4} \cdot \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} =$$

$$= \frac{e^{-2}}{4} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{2^{x_2}}{x_2!} \underbrace{\sum_{x_1=x_2+1} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1}}_{= \frac{(3/4)^{x_2}}{1-\frac{3}{4}}} = \frac{e^{-2}}{4} \sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{(3/4)^{x_2}}{1-\frac{3}{4}} =$$

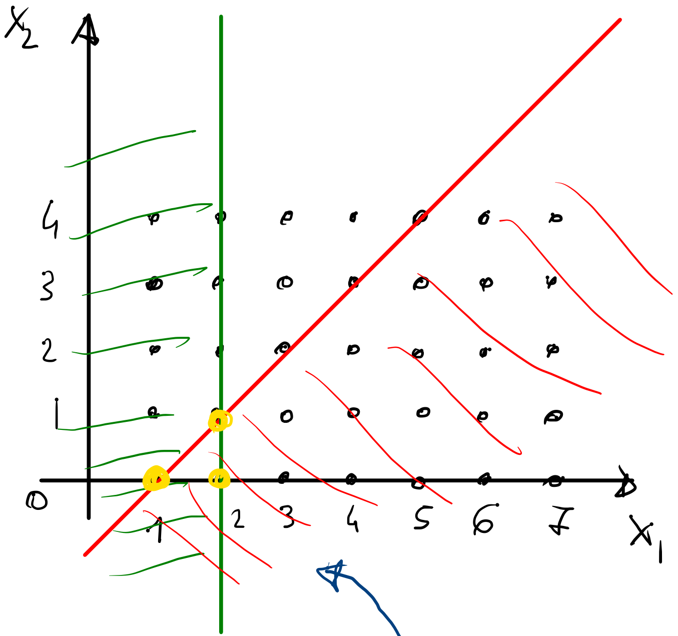
$$= \frac{e^{-2}}{4} \frac{1}{1-\frac{3}{4}} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{\left(2 \cdot \frac{3}{4}\right)^{x_2}}{x_2!}}_{= e^{3/2}} = \frac{e^{-2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\cancel{4}}} e^{3/2} = e^{-2} e^{3/2} = e^{-2+\frac{3}{2}} = e^{\frac{-4+3}{2}} = e^{-1/2}.$$

(serie esponenziale)

2) $P(X_1 \le 2 \mid X_2 \le X_1 - 1) =$

$$= \frac{P(\{X_1 \le 2\} \cap \{X_2 \le X_1 - 1\})}{P(X_2 \le X_1 - 1)} =$$

calcolata nella risposta precedente



L'intersezione è ristretta ai 3 punti in giallo

$$= \frac{p_X(1,0) + p_X(2,0) + p_X(2,1)}{e^{-1/2}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \frac{1}{4} \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} \frac{1}{4} \frac{2^0}{0!} e^{-2} + \left(\frac{3}{4}\right)^{2-1} \frac{1}{4} \frac{2^1}{1!} e^{-2}}{e^{-1/2}}$$

$$= \left(\frac{1}{4} e^{-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} e^{-2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2\, e^{-2}\right) \cdot e^{1/2} = \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{6}{16}\right) e^{-2} e^{1/2} = \frac{4+3+6}{16} e^{-2+\frac{1}{2}} = \frac{13}{16} e^{\frac{-4+1}{2}}$$

$$= \frac{13}{16} e^{-3/2}.$$

3) Per ogni $x_1 \geq 1$ intero

$$P_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=0}^{\infty} P_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \sum_{x_2=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4} \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} = \frac{e^{-2}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \underbrace{\sum_{x_2=0}^{\infty} \frac{2^{x_2}}{x_2!}}_{=e^2 \text{ (serie esponenziale)}} = \frac{\cancel{e^{-2}}}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \cancel{e^{2}}$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4}$$

<u>oss</u> $X_1 \sim \text{GeoTraslata}\left(p=\frac{1}{4}\right)$

Per ogni $x_2 \geq 0$ intero

$$P_{X_2}(x_2) = \sum_{x_1=1}^{\infty} P_{\underline{X}}(x_1,x_2) = \sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1} \frac{1}{4} \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2} = \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}}{4} \underbrace{\sum_{x_1=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{x_1-1}}_{=\frac{(3/4)^0}{1-\frac{3}{4}}} = \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{3}{4}} =$$

$$= \frac{2^{x_2}}{x_2!} \frac{e^{-2}}{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{1/4}} = \frac{2^{x_2}}{x_2!} e^{-2}$$

<u>oss</u> $X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda=2)$

Quindi si ha $P_{\underline{X}}(x_1,x_2) = P_{X_1}(x_1) P_{X_2}(x_2) \quad \forall (x_1,x_2)$. Allora X_1 e X_2 sono indipendenti.