OSS: V, W sp. vett. $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$T, S : V \longrightarrow W$ applicazioni lineari.

Allora $T = S$ se e solo se

$$T(\underline{v}_j) = S(\underline{v}_j) \qquad j = 1, \dots, n$$

In altri termini ogni applicazione lineare è determinata dal suo valore sugli elementi di una qualunque base di V

Dim: $\underline{v} \in V$ generico

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

T linearità rispetto alla somma

$$T(\underline{v}) = T(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) =$$

$$= T(\lambda_1 \underline{v}_1) + \dots + T(\lambda_n \underline{v}_n) =$$

T linearità rispetto al prodotto per uno scalare

$$= \lambda_1 T(\underline{v}_1) + \dots + \lambda_n T(\underline{v}_n)$$

$$= \lambda_1 S(\underline{v}_1) + \dots + \lambda_n S(\underline{v}_n) \overset{S \text{ lineare}}{=}$$

$T(\underline{v}_j) = S(\underline{v}_j)$

$$= S(\lambda_1 \underline{v}_1) + \dots + S(\lambda_n \underline{v}_n) =$$

$$= S(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) = S(\underline{v}) \qquad \square$$

DEF V, W sp. vettoriali

$T : V \longrightarrow W$ applicazione lineare

1) il **nucleo** (o **kernel**) di T è:

$$\operatorname{Ker} T := \{ \underline{v} \in V \text{ tali che } T(\underline{v}) = \underline{0} \} = T^{-1}(\underline{0})$$

vettore nullo in W

$$[\operatorname{Ker} T \subseteq V]$$

2) l'**immagine** di T è:

$$\operatorname{Im} T := \{ \underline{w} \in W \text{ tali che esiste } \underline{v} \in V \text{ t.c. } T(\underline{v}) = \underline{w} \} = T(V)$$

$[\operatorname{Im} T \subseteq W]$

(T lineare)

Prop: - $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio di V

- $\operatorname{Im} T$ è un sottospazio di W

Dim: Per dimostrare che $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio di V dobbiamo verificare che

1) se $\underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in \operatorname{Ker} T$ allora $\underline{v} + \underline{\tilde{v}} \in \operatorname{Ker} T$

2) se $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in \operatorname{Ker} T$ allora $\lambda \cdot \underline{v} \in \operatorname{Ker} T$

verifichiamo 1):

$\underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in \operatorname{Ker} T \implies T(\underline{v}) = T(\underline{\tilde{v}}) = \underline{0}$

$\underline{v} + \underline{\tilde{v}} \in \operatorname{Ker} T$ se $T(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) = 0$

ma $T(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearità di } T}}{=} T(\underline{v}) + T(\underline{\tilde{v}}) = \underline{0} + \underline{0}$

$= \underline{0}$ ✓

2) $\underline{v} \in \ker T \Longrightarrow T(\underline{v}) = \underline{0}$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \cdot \underline{v} \in \ker T$ se $T(\lambda \underline{v}) = \underline{0}$

ma $T(\lambda \underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{linearità di } T}}{=} \lambda \cdot T(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0}$ ✓

- Verifichiamo che $\operatorname{Im} T$ è un sottospazio di W.

1) $\underline{w}, \underline{\tilde{w}} \in \operatorname{Im} T \overset{?}{\Longrightarrow} \underline{w} + \underline{\tilde{w}} \in \operatorname{Im} T$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{w} \in \operatorname{Im} T \overset{?}{\Longrightarrow} \lambda \cdot \underline{w} \in \operatorname{Im} T$

1) $\underline{w}, \underline{\tilde{w}} \in \operatorname{Im} T$ significa che esistono $\underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{w}$ e $T(\underline{\tilde{v}}) = \underline{\tilde{w}}$.

Quindi

$$\underline{w} + \underline{\tilde{w}} = T(\underline{v}) + T(\underline{\tilde{v}}) \underset{}{\overset{\substack{T \text{ lineare} \\ \downarrow}}{=}} T(\underline{v} + \underline{\tilde{v}})$$

e quindi $\underline{w} + \underline{\hat{w}} \in \operatorname{Im} T$ ✓

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{w} \in \operatorname{Im} T$ ($\Rightarrow$ esiste $\underline{v} \in V$ tale che $T(\underline{v}) = \underline{w}$)

$$\lambda \cdot \underline{w} = \lambda \cdot T(\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ T \text{ lineare}}}{=} T(\lambda \cdot \underline{v})$$

$\Rightarrow \lambda \cdot \underline{w} \in \operatorname{Im} T$ ✓

$\blacksquare$

<u>OSS</u>: $T: V \to W$ lineare, $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V. Allora

(*) $$\boxed{\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}}$$

in altri termini lo spazio $\operatorname{Im} T$ è generato dalle immagini di una qualunque base di V

ATTENZIONE: $T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)$ sono un sistema di generatori di $\operatorname{Im} T$ ma non è detto che siano una base, ovvero potrebbero non essere linearmente indipendenti.

Dim formula (*):

se $\underline{w} \in \operatorname{Im} T$ allora esiste $\underline{v} \in V$ tale che $T(\underline{v}) = \underline{w}$

ma $\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$ (perché $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base di V). Ma allora

$$\underline{w} = T(\underline{v}) = T(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) \overset{T \text{ lineare}}{=}$$

$$= \lambda_1 T(\underline{v}_1) + \dots + \lambda_n T(\underline{v}_n)$$

$$\Rightarrow \underline{w} \in \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$$

$\Longrightarrow \operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$

Viceversa se $\underline{w} \in \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$

allora $\underline{w} = \mu_1 T(\underline{v}_1) + \dots + \mu_n T(\underline{v}_n)$

$$\overset{T \text{ lineare}}{=} T(\mu_1 \underline{v}_1 + \dots + \mu_n \underline{v}_n)$$

$\Longrightarrow \underline{w} \in \operatorname{Im} T \Longrightarrow \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\} \subseteq \operatorname{Im} T$

$\Longrightarrow \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\} = \operatorname{Im} T$ ☒

DEF: $T : V \longrightarrow W$ lineare

il rango di T è

$$\operatorname{rg} T := \dim \operatorname{Im} T$$

OSS: se $\dim V = n$ allora $\operatorname{rg} T \leq n$

perchè se $\dim V = n$, sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V. Allora $\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ pertanto da $\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ si può estrarre una base di $\operatorname{Im} T$, che avrà al più n elementi. Pertanto

$$\underset{\substack{\parallel \\ \operatorname{rg} T}}{\dim \operatorname{Im} T} \leq n$$

<u>OSS 2</u>: se $\dim V = n$ allora $\operatorname{rg} T = n$ se e solo se $\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ sono linearmente indipendenti.

<u>Es</u>: $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ lineare, $\dim V = 3$

$$\underset{\substack{\parallel \\ V}}{\mathbb{R}^3} \qquad \underset{\substack{\parallel \\ W}}{\mathbb{R}}$$

$n = 3$

$$\operatorname{rg} T = \dim \underset{\substack{\cap\!\shortmid \\ \mathbb{R}}}{\operatorname{Im} T} \leq 1$$

$\mathbb{R} \leftarrow$ ha dim 1

TEOREMA DELLA DIMENSIONE

V, W spazi vettoriali, $\dim V = n$

$T : V \to W$ lineare.

Allora:

$$\boxed{\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \operatorname{rg} T}$$

OSS: • $\dim \operatorname{Ker} T \leq \dim V$ $[\operatorname{Ker} T \subseteq V]$

• $\operatorname{rg} T \leq \dim W$ $[\operatorname{Im} T \subseteq W]$

DIM: Sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ base di $\operatorname{Ker} T$

$k \leq n$ (perché $\operatorname{Ker} T$ è un sottospazio di V e $\dim V = n$) $[\dim \operatorname{Ker} T = k]$

Completiamo $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ ad una base

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k, \underline{v}_{k+1}, \dots, \underline{v}_n\}$ di V [teo del completam. delle base]

Per provare la formula: $\operatorname{rg} T = n-k$.

Per farlo dimostriamo che $\underbrace{\{T(\underline{v}_{k+1}), \dots, T(\underline{v}_n)\}}_{n-k}$ è una base di $\operatorname{Im} T$.

Sappiamo che:

$v_1, \dots, v_k \in \operatorname{Ker} T$

$$\operatorname{Im} T = \operatorname{span}\{\underbrace{T(\underline{v}_1)}_{=\underline{0}}, \dots, \underbrace{T(\underline{v}_k)}_{=\underline{0}}, T(\underline{v}_{k+1}), \dots, T(\underline{v}_n)\}$$

$$= \operatorname{span}\{T(\underline{v}_{k+1}), \dots, T(\underline{v}_n)\}$$

$\Longrightarrow \{T(\underline{v}_{k+1}), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ sono un sistema di generatori di $\operatorname{Im} T$

Quindi basta verificare che $\{T(\underline{v}_{k+1}), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ sono lin. indip. ($\Rightarrow$ formano una base di $\operatorname{Im} T$ essendo l.i. e sist. di generatori)

$$\lambda_{k+1} T(\underline{v}_{k+1}) + \dots + \lambda_n T(\underline{v}_n) = \underline{0}$$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0$$

Ma

$$\underline{0} = \lambda_{k+1} T(\underline{v}_{k+1}) + \dots + \lambda_n T(\underline{v}_n) \overset{\substack{T \text{ lineare} \\ \downarrow}}{=}$$

$$= T(\lambda_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \lambda_n \underline{v}_n)$$

ovvero $\lambda_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \in \operatorname{Ker} T$

ma $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\}$ è base di $\operatorname{Ker} T$

quindi esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\lambda_{k+1} \underline{v}_{k+1} + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_k \underline{v}_k$$

$$\Longrightarrow$$

$$(-\lambda_1)\underline{v}_1 + \dots + (-\lambda_k)\underline{v}_k + \lambda_{k+1}\underline{v}_{k+1} + \dots$$

$$\dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

ma $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono base di V, quindi

lin. indip. $\Longrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_k = \boxed{\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_n = 0}$ ■

ESEMPI:

$tr : Mat(2\times 2) \longrightarrow \mathbb{R}$ traccia

Determinare il rango di tr, una base di Ker tr, Im tr.

$$tr\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := a+d$$

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 1 \in Im\, tr$$

$$\Rightarrow \dim Im\, tr \geq 1$$

$Im\, tr \subseteq \underset{\substack{\uparrow \\ \dim 1}}{\mathbb{R}}$

$\Downarrow$

$\dim Im\, tr \leq 1$

$\Rightarrow \dim Im\, tr = 1$

$$\Longrightarrow rg\, tr = 1. \quad (\Rightarrow Im\, tr = \mathbb{R})$$

una base di Im tr è una qualunque base di $\mathbb{R}$, ad esempio, 1.

troviamo una base di Ker Tr.

notiamo che dim Ker tr = 3

dal teo delle dimensione

$$\overbrace{\dim V}^{=4} = \dim \mathrm{Ker}\, tr + \overbrace{rg\, Tr}^{=1}$$

$$\| \quad Mat(2\times 2)$$

per trovare una base di Ker tr, dobbiamo trovare 3 vettori (matrici 2×2) lin. indip. con traccia nulla.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}\, tr \iff a+d=0$$

ovvero $d = -a$

$$\mathrm{Ker}\, tr = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix},\ a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\right.$$

$a, b, c \in \mathbb{R}\} =$

$$= \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Quindi $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ è

un sistema di generatori (formato da 3 elementi) di $\operatorname{Ker} tr$ che ha dim. 3

quindi formano una base.

<u>Esempio</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A \in Mat(2 \times 3)$$

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + y + z \end{pmatrix}$$

determinare il rango di L_A, una base di $\operatorname{Ker} L_A$ e $\operatorname{Im} L_A$.

- $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ base canonica di $\mathbb{R}^3$

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{span}\{L_A(\underline{e}_1), L_A(\underline{e}_2), L_A(\underline{e}_3)\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ A\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

quindi per estrarre una base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

EG

$R_2 \to R_2 - 2R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad 2 \text{ pivot}$$

quindi $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di $\operatorname{Im} L_A \Rightarrow \operatorname{rg} L_A = \dim \operatorname{Im} L_A = 2$

$\Rightarrow \operatorname{rg} L_A = \dim \mathbb{R}^2$ ($\Rightarrow L_A$ è suriettiva)

$\Rightarrow \operatorname{Im} L_A = \mathbb{R}^2$

quindi una base di $\operatorname{Im} L_A$ è una qualunque base di $\mathbb{R}^2$.

- $\operatorname{Ker} L_A$

$$\dim \operatorname{Ker} L_A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{teo della} \\ \text{dimensione}}}{=} \overset{\overset{3}{\shortparallel}}{\dim \mathbb{R}^3} - \overset{\overset{2}{\shortparallel}}{\operatorname{rg} L_A} = 1$$

$$\ker L_A = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tali che } A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tali che } \begin{pmatrix} x - z \\ 2x + y + z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ soluzioni del sistema lineare omogeneo } \begin{cases} x - z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tali che } \begin{cases} z = x \\ y = -3x \end{cases} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -3x \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } x \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ t.c. } x \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

e dunque $\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}$ è una base di $\ker L_A$.

<u>OSS</u>: $A \in Mat(m \times n)$

sistema lin. omogeneo

$$A\underline{x} = \underline{0}$$

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $\quad \underline{0} \in \mathbb{R}^m$

$$L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

spazio delle soluzioni S $\equiv$ $\ker L_A$

per il teo della dimensione

$$\dim S = n - rg\, L_A$$

$\dim S = \dim \ker L_A$, $\quad n = \dim \mathbb{R}^n$

e $\quad \operatorname{rg} L_A = \#$ pivot di una qualunque riduzione a scala di A tramite EG.