Prop: Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Allora ogni base di V è formata dallo stesso numero di vettori. Ovvero se $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ e $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ sono due basi di V, allora $n = m$.

Dim: $n = 2$, $m = 3$ (per assurdo)

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base di V

$\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ base di V

Poiché $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è base:

$$\underline{w}_1 = a_{11}\underline{v}_1 + a_{12}\underline{v}_2$$

$$\underline{w}_2 = a_{21}\underline{v}_1 + a_{22}\underline{v}_2$$

$$\underline{w}_3 = a_{31}\underline{v}_1 + a_{32}\underline{v}_2$$

Poiché $\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3\}$ è base (in particolare sono lin. indip.):

$$\lambda_1 \underline{w}_1 + \lambda_2 \underline{w}_2 + \lambda_3 \underline{w}_3 = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

$$\lambda_1 (a_{11} \underline{v}_1 + a_{12} \underline{v}_2) + \lambda_2 (a_{21} \underline{v}_1 + a_{22} \underline{v}_2) +$$
$$\lambda_3 (a_{31} \underline{v}_1 + a_{32} \underline{v}_2) = \underline{0}$$

$$\lambda_1 a_{11} \underline{v}_1 + \lambda_1 a_{12} \underline{v}_2 + \lambda_2 a_{21} \underline{v}_1 + \lambda_2 a_{22} \underline{v}_2 +$$
$$+ \lambda_3 a_{31} \underline{v}_1 + \lambda_3 a_{32} \underline{v}_2 = \underline{0}$$

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31}) \underline{v}_1 + (\lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} +$$
$$+ \lambda_3 a_{32}) \underline{v}_2 = \underline{0}$$

ma $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono lin. indip. $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \lambda_3 a_{31} = 0 \\ \lambda_1 a_{12} + \lambda_2 a_{22} + \lambda_3 a_{32} = 0 \end{cases}$$

3 incognite $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 2 equazioni

(i pivot della matrice incompleta del sistema lineare omogeneo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \end{pmatrix}$ sono al più 2 $\Rightarrow$ il sistema ammette soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ non tutte nulle!)

$\swarrow$ (contraddizione) ■

DEF (DIMENSIONE DI UNO SP. VETT.)

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V allora

$$\dim V = n$$

OSS: Ogni base di V ha lo stesso numero di elementi, pertanto la definiz. è ben posta.

<u>Esempio</u>:

- $\dim \mathbb{R}^n = n$

$\underbrace{\{\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n\}}_{n}$ base canonica di $\mathbb{R}^n$

<u>esempio</u>: in $\mathbb{R}^3$:

- 4 vettori non possono essere una base
- 5 vettori di $\mathbb{R}^3$ possono essere lin. indip.? NO

perchè se $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_5\}$ sono vettori di $\mathbb{R}^3$ lin. indip. per il teorema del completamento della base esistono $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k \in \mathbb{R}^3$ tali che

$\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_5, \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_k\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$ MA allora avremmo una base di $\mathbb{R}^3$ con $5+k \not\geq 3$ elementi!

- in $\mathbb{R}^5$, 3 vettori $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ possono essere un sistema di generatori? (cioè: $\text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\} = \mathbb{R}^5$?) <u>NO</u>

perché se fossero un sistema di generatori se ne potrebbe estrarre una base di $\mathbb{R}^5$ ma allora avremmo una base con ≤ 3 elementi di $\mathbb{R}^5$.

<u>OSS</u>: V sp. vett. $\dim V = n$

- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset V$ lin. indip. allora

$m \leq n$ ($m = n$ se e solo se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono una base) [completam. della base]

- $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_m\} \subset V$ sistema di generatori

allora $m \geq n$ ($m = n$ se e solo se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono una base) [sistema di gen. si estrae una base]

OSS: Se V sp. vett. $\dim V = n$ e $W \subseteq V$ sottospazio allora

$$\dim W \leq \dim V$$

$(\dim W = \dim V$ se e solo se $V = W)$

[perché $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ base di W si estende ad una base di V e dunque $\dim W \leq \dim V$]

- $\dim \mathrm{Mat}(m \times n) = m \times n$

perché $\{E_{11}, \ldots, E_{1n}, \ldots, E_{mn}\}$ è una base composta da $m \times n$ elementi

- $\dim \mathrm{Pol}_{\leq n}[x] = n+1$

base $\{\underbrace{1, x, \ldots, x^n}_{n+1}\}$

ESEMPIO: Dati $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\1\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

determinare se sono lin. indipendenti e, in caso, estenderli ad una base di $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\\-1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}$$

EG

$R_3 \longrightarrow R_3 + R_1$

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 1\\0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

2 pivot = # vettori $\overset{\#\text{ colonne}}{=}$

e quindi i 2 vettori sono lin. indip.

per estenderli ad una base di $\mathbb{R}^4$ prendiamo una base di $\mathbb{R}^4$, ad esempio la base canonica $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

$$\begin{array}{cccccc} & & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \text{primo vettore} & \text{secondo vettore} & & & & \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EG

$R_3 \to R_3 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(a scale)

i vettori che corrispondono alle colonne dove stanno i pivot formano una base di $\mathbb{R}^4$

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ è base di $\mathbb{R}^4$

DEF: (COORDINATE DI UN VETTORE RISPETTO AD UNA BASE)

Sia V sp. vett. sia $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ una base di V. Dato $\underline{w} \in V$, le coordinate di $\underline{w}$ nella base $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ sono date dal vettore $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ tale che

$$\underline{w} = x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_n \underline{v}_n$$

OSS: ogni vettore $\underline{w} \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$. Pertanto, se

$$\underline{w} = x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_n \underline{v}_n$$

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ sono univocamente determinati

OSS $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ base di V

$\underline{w}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}$

$\underline{u}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}$

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Allora $\lambda \underline{w} + \mu \underline{u}$ ha coordinate:

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix}$$

in $\mathcal{B}$

Perché: $\underline{w} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$, $\underline{u} = y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n$

$$\lambda \underline{w} + \mu \underline{u} =$$

$$\lambda (x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n) + \mu (y_1 \underline{v}_1 + \dots + y_n \underline{v}_n) =$$

$$(\lambda x_1 + \mu y_1) \underline{v}_1 + \dots + (\lambda x_n + \mu y_n) \underline{v}_n$$

e pertanto

$\lambda \underline{w} + \mu \underline{u}$ ha coordinate in $\mathcal{B}$ date da

$$\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n + \mu y_n \end{pmatrix}$$

Esempio: 1) provare che $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$

2) determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ in tale base.

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ EG $R_3 \to R_3 - R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ $R_3 \to R_3 + R_2$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 3 pivot $= \#$ vettori $= \dim \mathbb{R}^3$

$\Rightarrow$ sono una base.

2) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 + x_3\\ x_2 + x_3\\ x_1 - x_2 + x_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 - x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ 1 - x_3 + x_3 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = -1 \end{cases}$$

dunque le coordinate di $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ nella base $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$ sono $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

ATTENZIONE: le coordinate dipendono dalla base scelta

OSS: Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di uno spazio vettoriale V.

- Le coordinate di $\underline{v}_1$ in $\mathcal{B}$ sono:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \underline{e}_1$$

$$\left[\ \underline{v}_1 = 1\cdot\underline{v}_1 + 0\cdot\underline{v}_2 + \dots + 0\,\underline{v}_n\ \right]$$

$\vdots$

le coordinate di $\underline{v}_j$ in $\mathcal{B}$

$$\begin{array}{c c} & \\ & \\ j \rightarrow & \\ & \\ & \end{array}\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \underline{e}_j$$

- le coordinate di $\underline{0}$ in $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$[\underline{0} = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n]$

OSS: $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base di V (dim V)

$\{\underline{v}_2, \underline{v}_1\}$ è ancora una base di V

MA le coordinate rispetto alle 2 basi sono diverse.

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ di $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \left\{ \overset{\underline{v}_1}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}}, \overset{\underline{v}_2}{\overset{\parallel}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}} \right\}$$

le coordinate di $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}$ sono:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$