# CAPITOLO 4: MODELLI CONTINUI

DEFINIZIONE Una v.a. $X$ è una <u>v.a. continua</u> se esiste una funzione $f_X$ tale che

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx \qquad (\forall t \in \mathbb{R}). \qquad (\square)$$

minuscole.

In tal caso la funzione $f_X$ è detta <u>densità continua</u>.

OSSERVAZIONI

- In generale $f_X$ non è unica; possiamo avere un'altra $g_X$ che realizza la condizione $(\square)$ un po' diversa da $f$. Vedremo questa cosa successivamente.

- In generale $f_X$ non è continua (vedremo esempi specifici). Però, se vale la condizione $(\square)$, allora $F_X$ è continua.

- È possibile costruire casi per cui $F_X$ è continua ma la condizione $(\square)$ non è verificata; la costruzione va oltre gli scopi di questo corso.

OSSERVAZIONE

In generale $F_X$ è derivabile in "quasi tutti i punti" perchè $F_X$ è una funzione non decrescente. L'insieme dei punti dove $F_X$ non è derivabile è un insieme "trascurabile" (spesso negli esercizi è un insieme finito o numerabile).

Nei punti t dove $F_X$ è derivabile si ha $F_X'(t) = f_X(t)$.

In conclusione si ha $F_X'(t) = f_X(t)$ in "quasi tutti i punti $t \in \mathbb{R}$".

Le affermazioni fatte con le virgolette si potrebbero precisare ma con strumenti matematici che vanno oltre gli scopi del corso.

# ANALOGIE E DIFFERENZE TRA DENSITÀ DISCRETE E CONTINUE

**ANALOGIE**

$$F_X(t) = P(X \leq t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{x_k \in S_X \\ x_k \leq t}} p_X(x_k) & \text{caso discreto} \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx & \text{caso continuo} \end{cases}$$

lettere minuscole

| CASO DISCRETO | | CASO CONTINUO |
|---|---|---|
| $p_X(x) \geq 0$ | $\longleftrightarrow$ | $f_X(x) \geq 0$ |
| $\displaystyle\sum_{x_k \in S_X} p_X(x_k) = 1$ | $\longleftrightarrow$ | $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ |
| $\displaystyle P(X \in A) = \sum_{x_k \in A \cap S_X} p_X(x_k)$ $(\forall A \subset \mathbb{R})$ | $\longleftrightarrow$ | $\displaystyle P(X \in A) = \int_A f_X(x)\,dx$ $(\forall A \subset \mathbb{R}$ per cui ha senso l'integrale$)$ |

lettere minuscole

# DIFFERENZE

CASO DISCRETO

lettere minuscole

$P(X=x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

falsa

(non è vera per $x \in S_X$ o un suo sottoinsieme non vuoto)

CASO CONTINUO

lettere minuscole

$P(X=x)=0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

vera

Quindi $P(a \leq X \leq b)$, $P(a \leq X < b)$, $P(a < X \leq b)$ e $P(a < X < b)$ possono essere diverse tra loro,

Quindi

$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b)$

(sono sempre uguali tra loro)

$p_X$ definita in maniera univoca

$f_X$ <u>non</u> è definita in maniera univoca

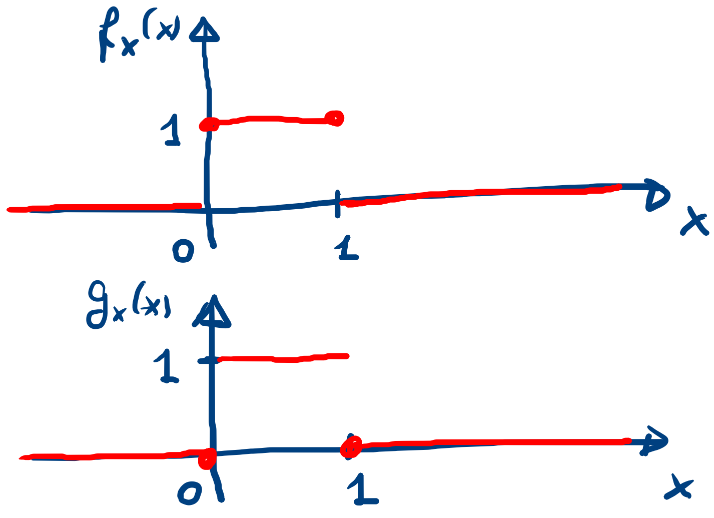
(vedere prossime slides).

In generale, se $f_X$ è una densità continua, lo è anche una qualsiasi altra funzione $g_X$ per cui si ha che $\{x \in \mathbb{R} : f_X(x) \neq g_X(x)\}$ è finito o numerabile. (si potrebbe dire una cosa più precisa ma accontentiamoci di questo)

ESEMPIO:

$$f_X(x) = 1_{[0,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in [0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$g_X(x) = 1_{(0,1)}(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in (0,1) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

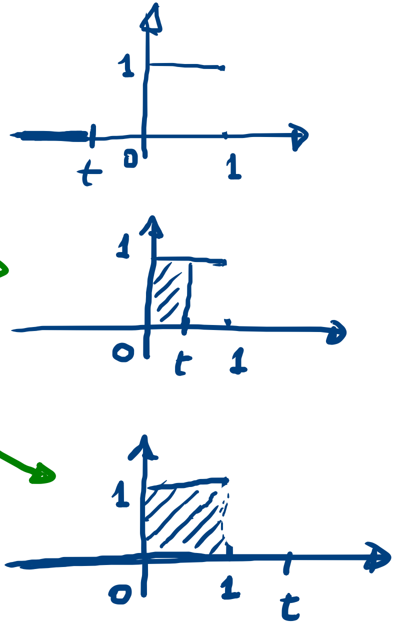


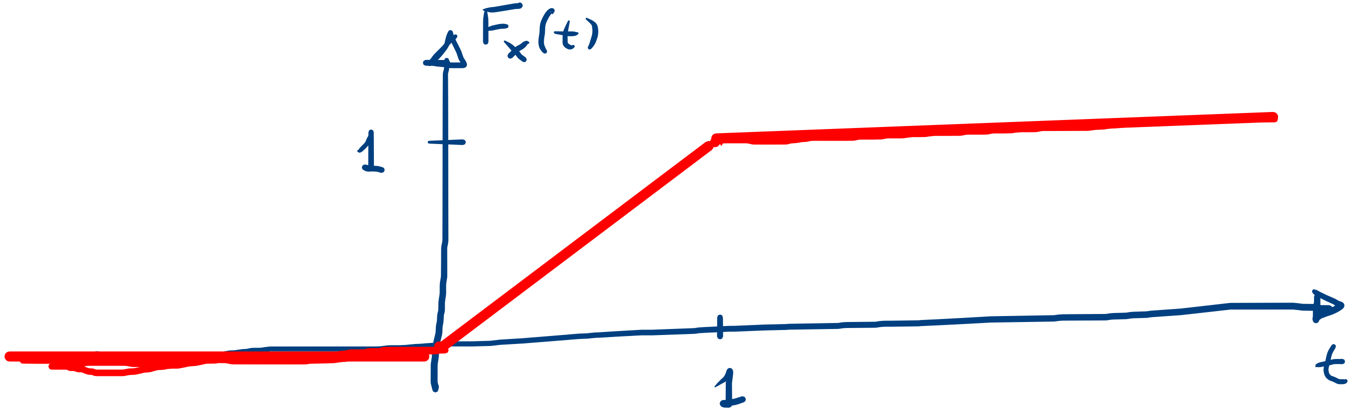

Quindi:

$$\{x : g_X(x) \neq f_X(x)\} = \{0, 1\}.$$

In corrispondenza si vede che

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t} g_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ t & \text{per } 0\le t\le 1 \\ 1 & \text{per } t>1 \end{cases}$$




In entrambi i casi si ottiene la stessa $F_X$ perché contano le aree disegnate e non i valori di $f_X$ e $g_X$ per $x=0$ e $x=1$.

In effetti $F_X$ è una funzione di distribuzione di una v.a.: non decrescente, $\begin{cases} F_X(x)\to 1 & \text{per } x\to+\infty \\ F_X(x)\to 0 & \text{per } x\to-\infty \end{cases}$, continua (e quindi continua a destra)

In conclusione si parla di densità continua $f_X(x)$ di una v.a. $X$ continua per "abuso di linguaggio". In realtà ci sono infinite versioni della densità continua (che differiscono in insiemi trascurabili di punti) che definiscono la stessa $F_X$.

In questo esempio $f_X$ non è continua (discontinuità per $x=0$ e $x=1$); lo stesso si può dire per $g_X$.

Ora introduciamo i primi esempi di distribuzioni notevoli continue: <u>uniforme</u> ed <u>esponenziale</u>.

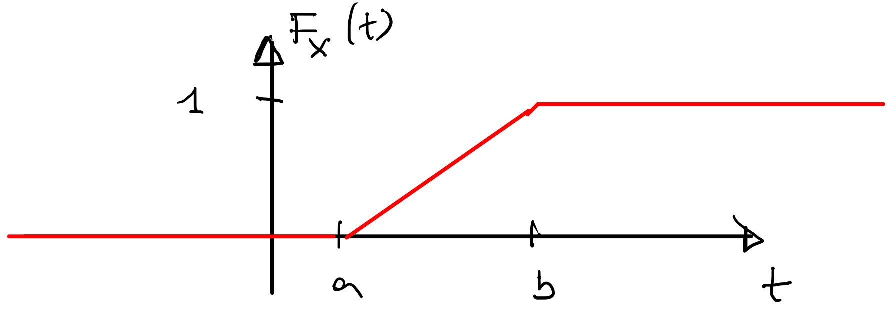
Poi ne vedremo altri: distribuzione Gamma e distribuzione Normale (o Gaussiana).

<u>OSS</u>. Le distribuzioni notevoli continue vengono definite a partire dalle espressioni di $F_X$ e $f_X$; questo è un po' diverso dal caso discreto dove si trae ispirazione da qualche "caso pratico".

# DISTRIBUZIONE UNIFORME (CONTINUA)

Una v.a. $X$ ha distribuzione uniforme continua su un intervallo limitato $(a,b)$ se si ha

$$F_X(t)=\begin{cases} 0 & \text{per } t<a \\ \dfrac{t-a}{b-a} & \text{per } a\leq t\leq b \\ 1 & \text{per } t>b \end{cases}$$



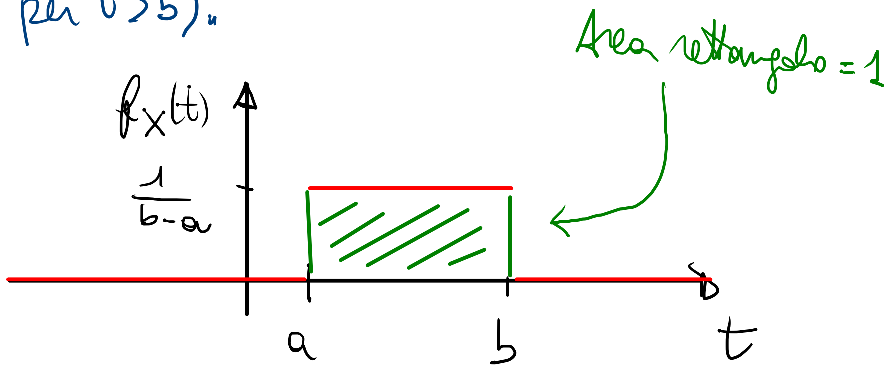

In simboli scriveremo $X\sim U(a,b)$.

La funzione $F_X$ non è derivabile per $t=a$ e per $t=b$. Negli altri punti lo è e si ha

$$F_X'(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{per } a<t<b \\ 0 & \text{altrimenti (per } t<a \text{ e per } t>b). \end{cases}$$

Quindi possiamo dire ad esempio che

$$f_X(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{se } a<t<b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



Se introduciamo la notazione $1_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$ (dove $A \subset \mathbb{R}$)

possiamo scrivere in maniera più compatta

$$f_X(t) = \frac{1}{b-a} 1_{(a,b)}(x) \quad \text{anziché} \quad f_X(t) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{se } t \in (a,b) \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

<u>oss</u>. Qui si poteva anche mettere $[a,b]$, oppure $[a,b)$, oppure $(a,b]$, ecc.

<u>oss</u>. Verifichiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (e quindi $\frac{1}{b-a}$ può essere vista come una costante di normalizzazione)

Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{a} \underbrace{f_X(x)}_{=0} dx}_{=0} + \int_a^b f_X(x)\,dx + \underbrace{\int_b^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{=0} dx}_{=0} = \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \left[\frac{x}{b-a}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b-a}{b-a} = 1$$

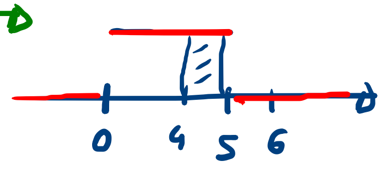
Questo è in accordo con il fatto che l'area del rettangolo della slide precedente è uguale a 1.

# ESERCIZIO

Sia $X \sim U(0,5)$. Calcolare $P(4 \le X \le 6)$ e $P(2 \le X \le 4 \mid 1 \le X \le 3)$.

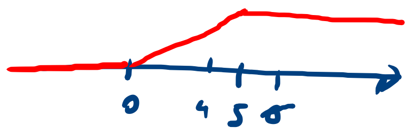
SVOLGIMENTO

$$P(4\le X\le 6) = \int_4^6 f_X(x)\,dx = \int_4^6 \frac{1}{5-0}\, 1_{(0,5)}(x)\,dx = \int_4^5 \frac{1}{5}\,dx = \frac{1}{5}\,[x]_{x=4}^{x=5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$$



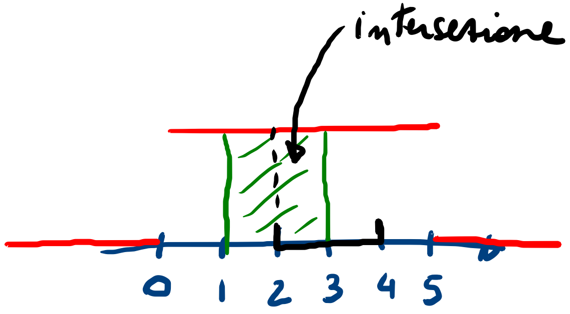
oppure

$$P(4\le X\le 6) = F_X(6) - F_X(4) = 1 - \frac{4-0}{5-0} = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}.$$



$$P(2\le X\le 4 \mid 1\le X\le 3) = \frac{P(\{2\le X\le 4\}\cap\{1\le X\le 3\})}{P(\{1\le X\le 3\})} = \frac{P(2\le X\le 3)}{P(1\le X\le 3)} =$$

$$= \frac{\int_2^3 \frac{1}{5-0}\,dx}{\int_1^3 \frac{1}{5-0}\,dx} = \frac{\cancel{\frac{1}{5}}\int_2^3 dx}{\cancel{\frac{1}{5}}\int_1^3 dx} = \frac{[x]_{x=2}^{x=3}}{[x]_{x=1}^{x=3}} = \frac{3-2}{3-1} = \frac{1}{2}$$



COMMENTO

I risultati dell'esercizio precedente possono essere ottenuti anche senza fare troppi calcoli, con un procedimento che può essere adattato a tutti i casi con distribuzione uniforme.

Infatti:

$X \sim U(0,5)$ ; $\quad P(4 \leq X \leq 6) = \dfrac{\text{lunghezza}\left(\underbrace{(4,6)\cap(0,5)}_{=(4,5)}\right)}{\text{lunghezza }(0,5)} = \dfrac{1}{5}$

$$P(2 \leq X \leq 4 \mid 1 \leq X \leq 3) = \frac{\text{lunghezza}\left((2,4)\cap(1,3)\cap(0,5)\right) / \cancel{\text{lunghezza }(0,5)}}{\text{lunghezza}\left((1,3)\cap(0,5)\right) / \cancel{\text{lunghezza }(0,5)}} =$$

$$= \frac{\text{lunghezza }(2,3)}{\text{lunghezza }(1,3)} = \frac{1}{2}.$$

1.

Un altro esercizio/esempio è il seguente.

Sia $X \sim U(3,10)$. Calcolare $P(6 \leq X \leq 11)$ e $P(6 \leq X \leq 11 \mid 5 \leq X \leq 9)$.

Allora $$P(6 \leq X \leq 11) = \frac{\text{lunghezza}\,(\overbrace{(6,11) \cap (3,10)}^{=(6,10)})}{\text{lunghezza}\,(3,10)} = \frac{10-6}{10-3} = \frac{4}{7}$$

e $$P(6 \leq X \leq 11 \mid 5 \leq X \leq 9) = \frac{P(\{6 \leq X \leq 11\} \cap \{5 \leq X \leq 9\})}{P(5 \leq X \leq 9)} =$$

$$= \frac{\text{lunghezza}\,((6,11) \cap (5,9) \cap (3,10)) / \cancel{\text{lunghezza}\,(3,10)}}{\text{lunghezza}\,((5,9) \cap (3,10)) / \cancel{\text{lunghezza}\,(3,10)}} = \frac{\text{lunghezza}\,(6,9)}{\text{lunghezza}\,(5,9)} = \frac{3}{4}$$

Del resto, con il metodo tradizionale si ha:

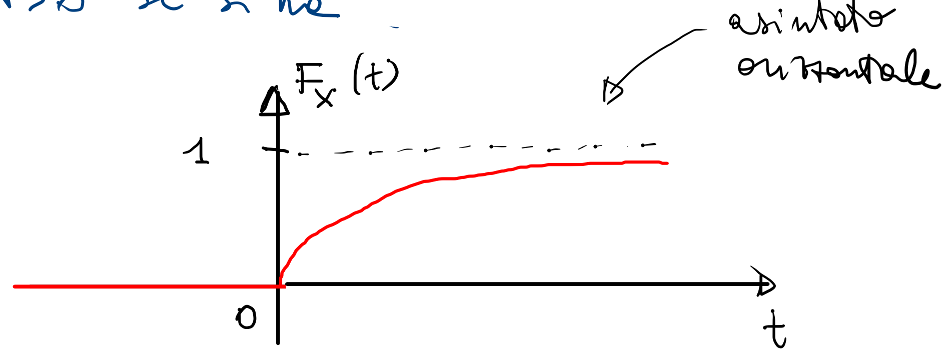
$$P(6 \leq X \leq 11) = \int_6^{11} \frac{1}{10-3} 1_{(3,10)}(x)\, dx = \frac{1}{7} \int_6^{10} dx = \frac{1}{7} \Big[x\Big]_{x=6}^{x=10} = \frac{10-6}{7} = \frac{4}{7}$$

$$P(6 \leq X \leq 11 \mid 5 \leq X \leq 9) = \frac{P(\{6 \leq X \leq 11\} \cap \{5 \leq X \leq 9\})}{P(5 \leq X \leq 9)} = \frac{P(6 \leq X \leq 9)}{P(5 \leq X \leq 9)} = \frac{\int_6^9 \frac{1}{10-3}\, dx}{\int_5^9 \frac{1}{10-3}\, dx} = \frac{\cancel{\frac{1}{7}} \Big[x\Big]_{x=6}^{x=9}}{\cancel{\frac{1}{7}} \Big[x\Big]_{x=5}^{x=9}} = \frac{9-6}{9-5} = \frac{3}{4}.$$

# DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Una v.a. $X$ ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ se si ha

$$F_X(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{per } t < 0 \end{cases}$$



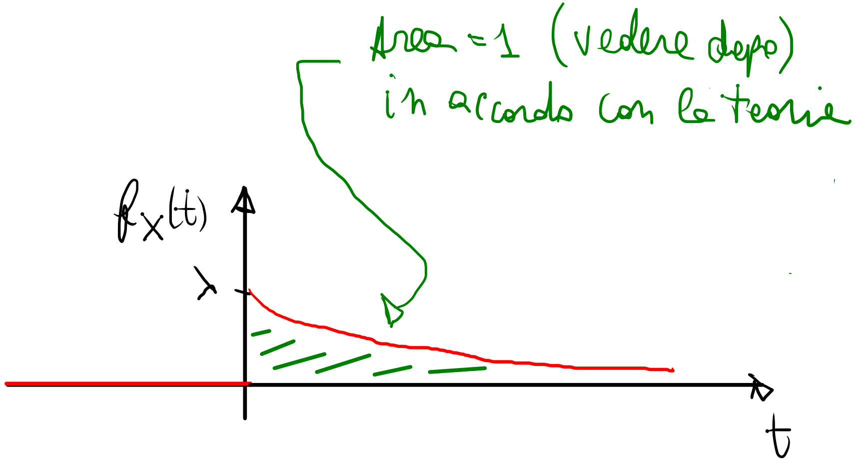

In simboli scriveremo $X \sim Exp(\lambda)$.

La funzione $F_X$ non è derivabile per $t = 0$. Negli altri punti lo è e si ha

$$F_X'(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti (per } t < 0) \end{cases}$$

Quindi possiamo dire ad esempio che

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} = \lambda e^{-\lambda t} 1_{(0,\infty)}(t).$$



OSS. Abbiamo detto che

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{oppure} \quad f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t).$$

Si potrebbe anche dire che

$$f_X(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t \geq 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}, \quad \text{oppure} \quad f_X(t) = \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t).$$

OSS. Verifichiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$ (e quindi $\lambda$ può essere vista come una costante di normalizzazione)

Si ha

ABUSO DI NOTAZIONE

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_X(x)}_{=0}\,dx}_{=0} + \int_{0}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=\infty} = -\underbrace{e^{-\infty}}_{=0} - (-\underbrace{e^{0}}_{=1}) = 0 + 1 = 1.$$

## PROPRIETÀ DI MANCANZA DI MEMORIA

Sia $X \sim Exp(\lambda)$. Allora $P(X>t+s \mid X>s) = P(X>t)$ per ogni $t, s>0$.

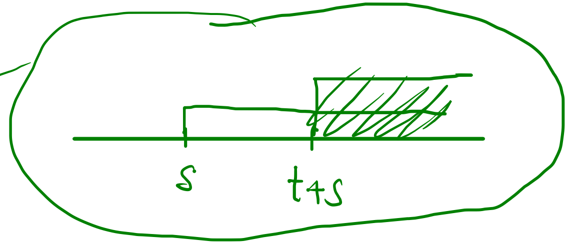
COMMENTO

Se $X$ rappresenta un tempo di funzionamento, possiamo dire: se c'è funzionamento al tempo $s$, la probabilità di funzionare per un ulteriore tempo $t$ è la stessa che si avrebbe all'inizio (contando il tempo $t$ da zero). Quindi ci si può dimenticare di sapere che è trascorso il tempo $s$.

## DIMOSTRAZIONE

Osserviamo che

$$P(X>r) = 1 - \underbrace{P(X\le r)}_{=1-e^{-\lambda r}} = e^{-\lambda r} \quad \text{per } r>0.$$




Allora

$$P(X>t+s \mid X>s) = \frac{P(\{X>t+s\}\cap\{X>s\})}{P(X>s)} = \frac{P(X>t+s)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X>t).$$

∎

**OSS.**

La distribuzione esponenziale è l'unica distribuzione continua su $(0,\infty)$ che soddisfa la proprietà di mancanza di memoria.

ESERCIZIO

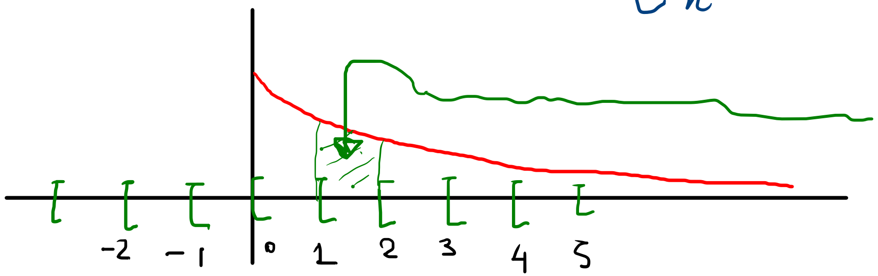
Sia $X \sim Exp(\lambda)$ e poniamo $Y = [X]$, dove $[x] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$ è la "parte intera di $x$".
(Quindi $Y$ assume valori in un insieme al più numerabile). Trovare la densità discreta di $Y$.

RISPOSTA

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\{Y = k\} = \{k \le X < k+1\}$ (anche se $X$ avesse una distribuzione diversa).

Allora (per ogni $k \in \mathbb{Z}$)

$$p_Y(k) = P(k \le X < k+1) = \int_k^{k+1} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \le -1 \\ \int_k^{k+1} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_{x=k}^{x=k+1} = -e^{-\lambda(k+1)} - (-e^{-\lambda k}) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} & \text{se } k \ge 0 \end{cases}$$




Area $= p_Y(1) = \int_1^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

ecc.

In conclusione si ha

$$p_Y(k) = e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} \qquad \forall k \geq 0 \text{ intero.}$$

<u>OSS.</u> Se poniamo $p = 1 - e^{-\lambda}$, si ha $1-p = e^{-\lambda}$; quindi

$$p_Y(k) = e^{-\lambda k}(1-e^{-\lambda}) = (1-p)^k p \qquad \forall k \geq 0.$$

Quindi $Y \sim Geo(p = 1-e^{-\lambda})$.

---

In altri termini si ha

$$\underbrace{X \sim Exp(\lambda)}_{\text{con proprietà di mancanza di memoria}} \Longrightarrow \underbrace{[X] \sim Geo(p = 1-e^{-\lambda})}_{\text{con proprietà di mancanza di memoria}}$$

ESERCIZIO

Sia $X$ una v.a. continua con densità continua $f_X(x) = c\,x(1-x)\,1_{(0,1)}(x)$, dove $c>0$ è una costante di normalizzazione. Trovare il valore di $c$.

RISPOSTA

Si deve trovare il valore di $c$ per cui si ha $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$.

Allora $1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} \underbrace{f_X(x)}_{=0}\,dx}_{=0} + \int_0^1 f_X(x)\,dx + \underbrace{\int_1^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{=0}\,dx}_{=0} = \int_0^1 c\,x(1-x)\,dx = c\int_0^1 x - x^2\,dx$

$= c\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=1} = c\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right] = c\,\frac{3-2}{6} = \frac{c}{6}.$

Quindi $\frac{c}{6} = 1$

da cui segue $c = 6$.

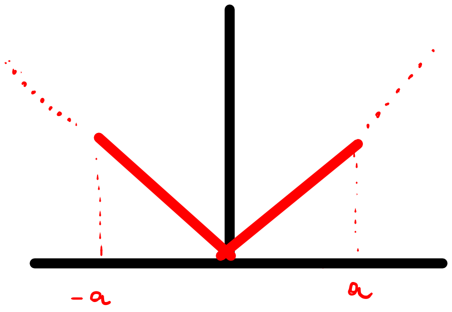
# ESERCIZIO

Sia $X$ una v.a. continua con densità $f_X(t) = b|t|\,\mathbb{1}_{(-a,a)}(t)$ per $a,b>0$.

1) Dire quanto vale la costante di normalizzazione $b$ come funzione di $a$.

2) Si verifichi che in ogni caso si ha $P(X>0) = 1/2$.

3) Calcolare $P(X>\frac{1}{2})$ per $a=1$.




# SVOLGIMENTO

1) Si deve avere $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = 1$. Allora

$$1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{-a} f_X(t)\,dt}_{=0} + \int_{-a}^{a} f_X(t)\,dt + \underbrace{\int_{a}^{+\infty} f_X(t)\,dt}_{=0} = \int_{-a}^{a} b|t|\,dt = b\int_{-a}^{a} |t|\,dt =$$

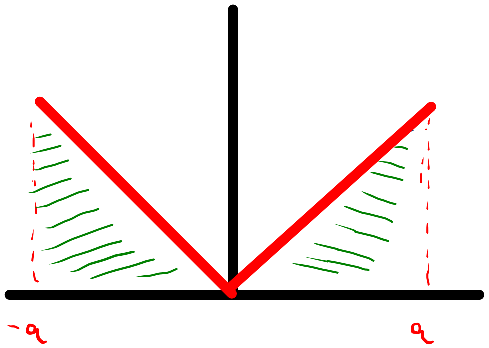
$$= b\left(\int_{-a}^{0} \underbrace{|t|}_{=-t}\,dt + \int_{0}^{a} \underbrace{|t|}_{=t}\,dt\right) = b\left(-\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=-a}^{t=0} + \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=a}\right) = b\left(-\left(\frac{0-(-a)^2}{2}\right) + \left(\frac{a^2-0^2}{2}\right)\right) = b\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right) = ba^2$$

$\rightarrow$ da cui segue $\boxed{b = \frac{1}{a^2}}$

## PROCEDIMENTO ALTERNATIVO (da un certo punto in poi)

Abbiamo imposto $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(t)\,dt = 1$ e, ad un certo punto, si ottiene $1 = b\int_{-a}^{a} |t|\,dt$.

Poi abbiamo tenuto conto della definizione di $|t|$ per $t \geq 0$ e per $t < 0$.




In maniera alternativa si poteva tenere conto del fatto che:

→ $|t|$ è una funzione pari ($|t| = |-t|$);

→ l'intervallo di integrazione $(-a, a)$ è simmetrico rispetto all'origine.

Allore

area dei due triangoli = 2· Area triangolo a destra

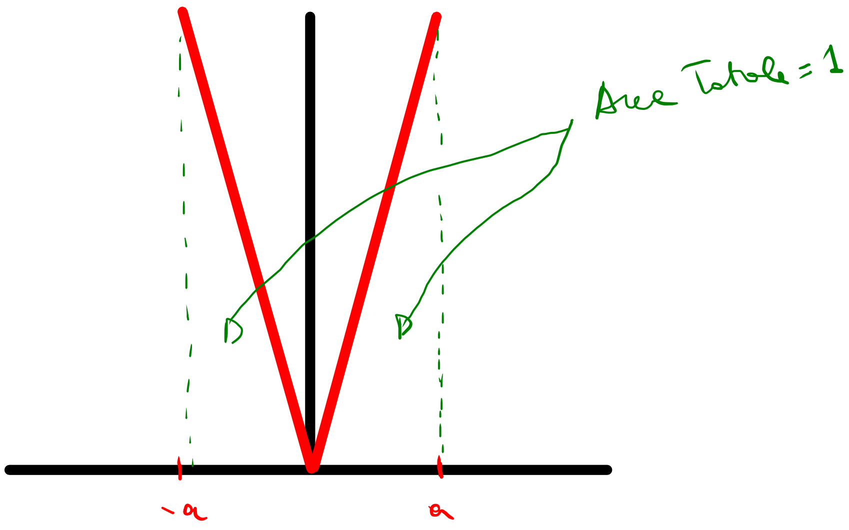
$$b\int_{-a}^{a} |t|\,dt = 2b\int_{0}^{a} |t|\,dt = 2b\int_{0}^{a} t\,dt = \cancel{2}b\left[\frac{t^2}{\cancel{2}}\right]_{t=0}^{t=a} = b(a^2 - 0^2) = ba^2$$

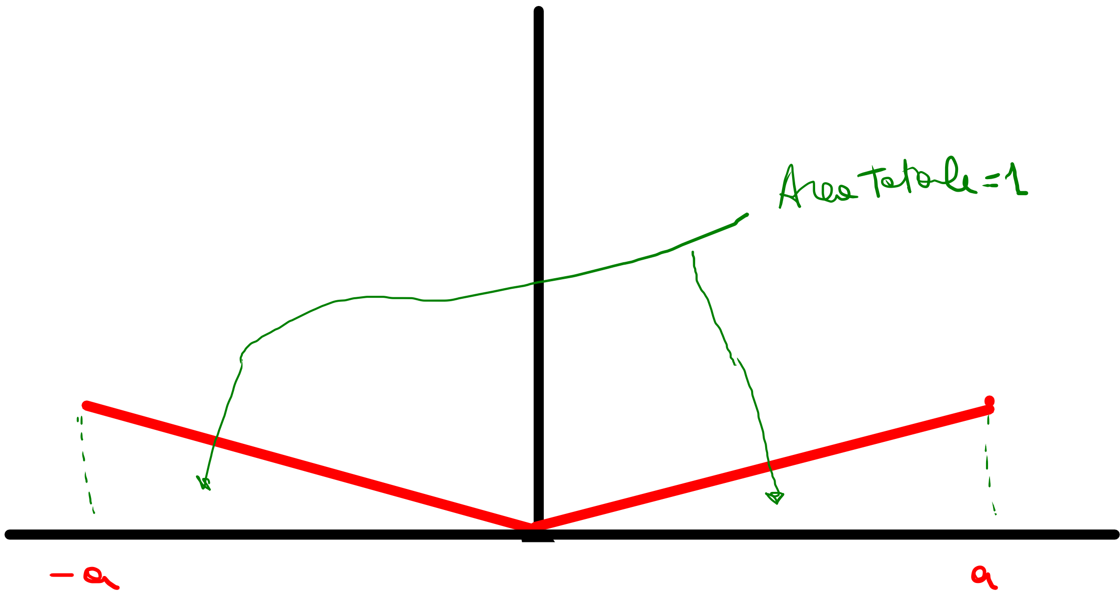
e quindi $b\int_{-a}^{a} |t|\,dt = 1 \Rightarrow ba^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = 1/a^2}$

# COMMENTO SULL'ESPRESSIONE $b = 1/a^2$

Non sorprende che, secondo la formula ottenuta, si ha

b grande per a piccolo e b piccolo per a grande



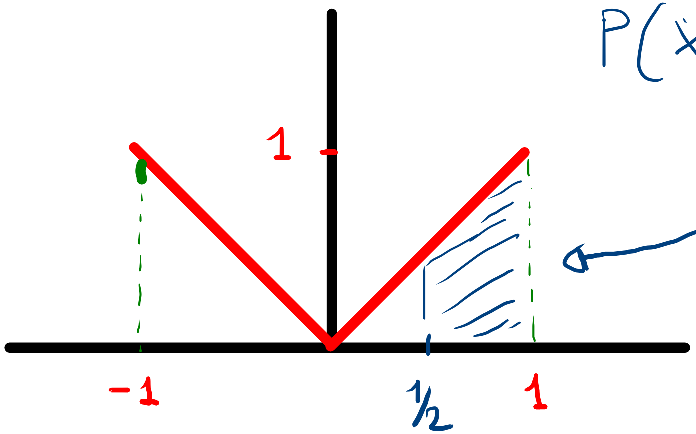



2) $$P(X>0) = \int_0^\infty f_X(t)\,dt = \int_0^a \underbrace{f_X(t)}_{=\frac{1}{a^2}|t| = \frac{t}{a^2}}\,dt + \underbrace{\int_a^\infty \underbrace{f_X(t)}_{=0}\,dt}_{=0} = \int_0^a \frac{t}{a^2}\,dt = \frac{1}{a^2}\left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=0}^{t=a} = \frac{1}{a^2}\,\frac{a^2-0^2}{2} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$$

Qualunque sia il valore di $a$, il grafico di $f_X$ è costituito da due triangoli rettangoli con la stessa area, e la somma delle due aree è uguale a 1. Quindi $P(X>0)$ deve essere uguale a $\frac{1}{2}$ perché è l'area del "triangolo di destra".

3) In questo caso, essendo $a=1$, si ha $b = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{1^2} = 1$. Quindi i due triangoli di cui abbiamo parlato sono isosceli.

$P(X>\frac{1}{2}) = \text{Area}$




Allora $P(X>\frac{1}{2}) = \int_{1/2}^{\infty} f_X(t)\,dt = \int_{1/2}^{1} \underbrace{|t|}_{=t}\,dt + \underbrace{\int_{1}^{\infty} 0\,dt}_{=0} = \int_{\frac{1}{2}}^{1} t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_{t=1/2}^{t=1} =$

$= \frac{1}{2}\left(1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right) =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{8}.$