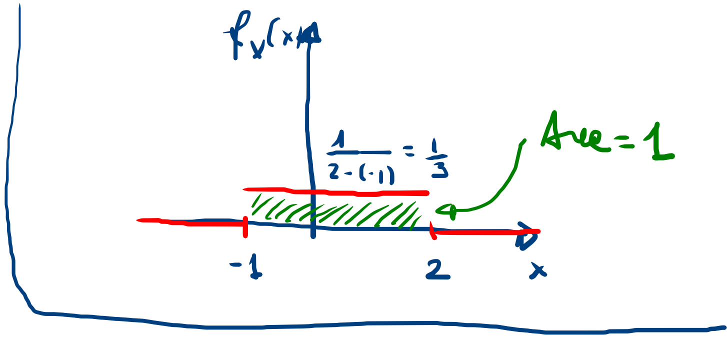
ESERCIZIO

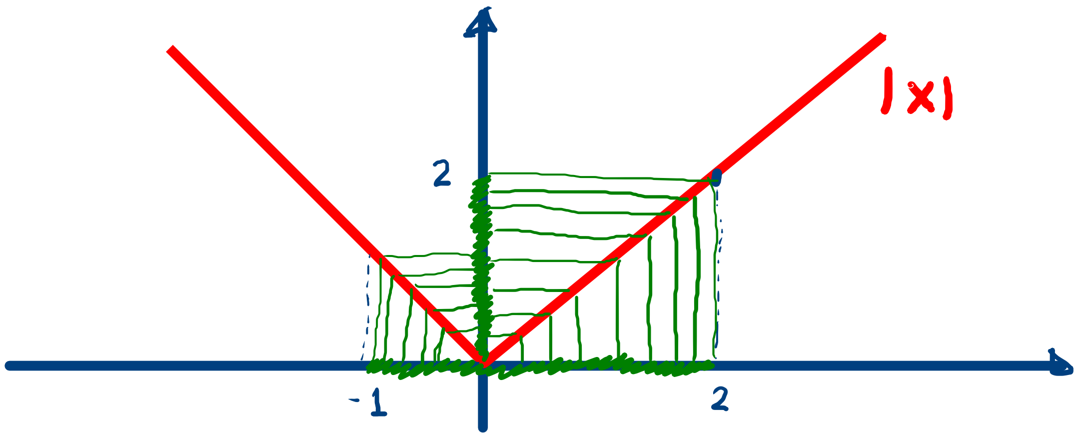
Sia $X \sim U(-1,2)$. Trovare la densità continua di $Y = |X|$.



RISPOSTA

Abbiamo $Y = f(X)$ con f non monotona. La funzione f non è monotona neanche in un insieme S tale che $P(X \in S) = 1$.

Si ha



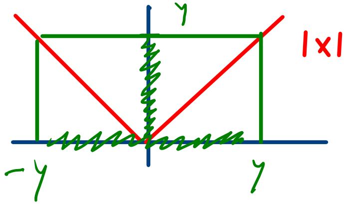
Il grafico mostra che

$P(Y \in U) = 1$

dove $U = (0,2)$

da cui segue ....

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 0 \\ \circledast & \text{per } y \in (0,2) \\ 1 & \text{per } y \ge 2 \end{cases}$$



$\{|X| \le y\} = \{-y \le X \le y\}$

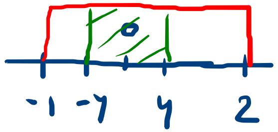
per $y \ge 0$

Inoltre

$$\circledast = P(Y \le y) = P(|X| \le y) = P(-y \le X \le y) = \int_{-y}^{y} f_X(x)\,dx = \int_{-y}^{y} \frac{1}{\underbrace{2-(-1)}_{=1/3}} \mathbb{1}_{(-1,2)}(x)\,dx =$$

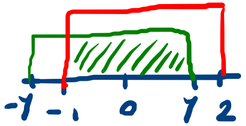
Abbiamo due sottocasi:

1) $y \in (0,1] \Rightarrow$



$$\Rightarrow \circledast = \int_{-y}^{y} \frac{1}{3}\,dx = \left[\frac{x}{3}\right]_{x=-y}^{x=y} = \frac{y-(-y)}{3} = \frac{2y}{3}$$

2) $y \in (1,2) \Rightarrow$



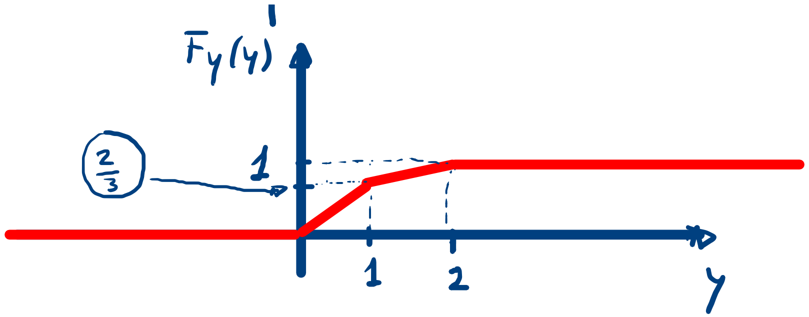
$$\Rightarrow \circledast = \int_{-1}^{y} \frac{1}{3}\,dx = \left[\frac{x}{3}\right]_{x=-1}^{x=y} = \frac{y-(-1)}{3} = \frac{y+1}{3}$$

OSS. In altri casi "senza monotonia" avevamo sfruttato alcune proprietà di simmetria. In questo caso non è possibile farlo e abbiamo dovuto considerare due sottocasi per calcolare $\circledast$.

Ricapitolando si ha

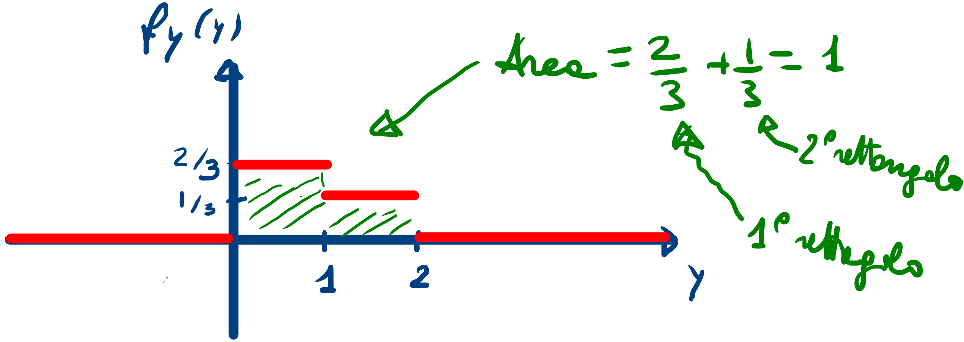
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y \le 0 \\ \frac{2y}{3} & \text{per } y \in (0,1] \\ \frac{y+1}{3} & \text{per } y \in (1,2) \\ 1 & \text{per } y \ge 2 \end{cases}$$

Si ha una funzione "continua a tratti" (addirittura lineare a tratti) che si raccorda per continuità nei punti dove cambia la definizione ($y=0$, $y=1$ e $y=2$):



Infine derivando F_Y (la funzione F_Y non è derivabile per $y=0$, $y=1$ e $y=2$) si ha

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{per } y < 0 \\ 2/3 & \text{per } 0 < y < 1 \\ 1/3 & \text{per } 1 < y < 2 \\ 0 & \text{per } y > 2 \end{cases} = \frac{2}{3} 1_{(0,1)}(y) + \frac{1}{3} 1_{(1,2)}(y)$$



COMMENTO. Abbiamo visto un esercizio in cui $Y = aX + b$ (con $a \neq 0$) con $X \sim U(0,1)$; Y ha distribuzione uniforme. Lo stesso vale per X uniforme qualsiasi. Qui abbiamo $Y = |X|$ in cui si hanno due rette diverse e abbiamo una situazione "con due uniformi su due intervalli diversi".

INDIPENDENZA PER V.A. CONTINUE

Si ha una definizione simile a quella per v.a. discrete. In questo caso non possiamo dire che $X_1, \dots, X_m$ sono indipendenti se

$$\forall A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R} \qquad P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\}) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_m \in A_m).$$

[In questo caso basta richiedere la condizione con $A_1, \dots, A_m$ intervalli della retta limitati:

$A_1 = (a_1, b_1), \dots, A_m = (a_m, b_m)$ con $a_1, b_1, \dots, a_m, b_m \in \mathbb{R}$ e $a_1 < b_1, \dots, a_m < b_m$.]

A partire da questa condizione, si può dimostrare che possiamo prendere anche insiemi $A_1, \dots, A_m$ che sono intervalli non limitati e quindi

$a_i = -\infty$ per qualche $i = 1, \dots, m$ (anche più di un indice)

e/o

$b_i = +\infty$ per qualche $i = 1, \dots, m$ (anche più di un indice).

Si potrebbe anche fare riferimento al concetto di "densità congiunta continua" per poi dire che (in maniera analoga a quanto accade nel discreto) che

$X_1, \dots, X_n$ indip. $\Longleftrightarrow$ densità congiunta = "prodotto densità marginali".

[Non trattiamo questo approccio perchè va oltre gli obiettivi del corso (si dovrebbero considerare gli integrali multipli come analogo continuo delle somme con più indici viste nel caso discreto).]

Abbiamo però le seguenti differenze:

$X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ discrete $\Rightarrow$ $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ discreta (n-dimensionale)

$X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ continue in generale non implica che $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ continua (n-dimensionale)

La spiegazione di questo va oltre gli scopi del corso.

MASSIMI e MINIMI DI V.A. CONTINUE INDIPENDENTI

Per semplicità tratteremo il caso di 2 v.a. X_1 e X_2. Alcuni ragionamenti si estendono...

In questa parte, per quel che abbiamo visto (e per quel che vedremo dopo), dobbiamo supporre che le v.a. X_1 e X_2 sono indipendenti.

Poniamo:

$$\begin{cases} Z = \max\{X_1, X_2\} \\ W = \min\{X_1, X_2\} \end{cases}$$

Qui procediamo adattando alcune cose viste per il caso discreto:

- $\{Z \le z\} = \{X_1 \le z\} \cap \{X_2 \le z\}$ indipendenza

$$\Rightarrow F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X_1 \le z) P(X_2 \le z)$$
$$= F_{X_1}(z) F_{X_2}(z)$$

- $\{W > w\} = \{X_1 > w\} \cap \{X_2 > w\}$

$$\Rightarrow 1 - F_W(w) = (1 - F_{X_1}(w))(1 - F_{X_2}(w)) = 1 - F_{X_1}(w) - F_{X_2}(w) + F_{X_1}(w) F_{X_2}(w)$$

$$\Rightarrow F_W(w) = F_{X_1}(w) + F_{X_2}(w) - F_{X_1}(w) F_{X_2}(w)$$

Allora derivando si ha:

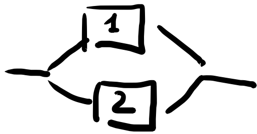
$$f_Z(z) = f_{X_1}(z) F_{X_2}(z) + F_{X_1}(z) f_{X_2}(z) = F_{X_2}(z) f_{X_1}(z) + F_{X_1}(z) f_{X_2}(z)$$

$$f_W(w) = f_{X_1}(w) + f_{X_2}(w) - \left\{ f_{X_1}(w) F_{X_2}(w) + F_{X_1}(w) f_{X_2}(w) \right\}$$

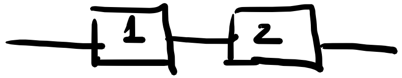
$$= \left(1 - F_{X_2}(w)\right) f_{X_1}(w) + \left(1 - F_{X_1}(w)\right) f_{X_2}(w)$$

<u>Oss.</u> Queste formule sono utili nel caso in cui X_1 e X_2 sono i tempi di funzionamento di due dispositivi e, sotto l'ipotesi di indipendenza, si ha:

Z = tempo di funzionamento del sistema con dispositivi in parallelo



W = Tempo di funzionamento del sistema con dispositivi in serie



ESERCIZIO / ESEMPIO

$X_1 \sim Exp(\lambda_1)$, $X_2 \sim Exp(\lambda_2)$. Si ha

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0 & \text{per } z \leq 0 \\ \underbrace{(1-e^{-\lambda_2 z})\lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + (1-e^{-\lambda_1 z})\lambda_2 e^{-\lambda_2 z}}_{= \lambda_1 e^{-\lambda_1 z} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 z} - (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2) z}} & \text{per } z > 0 \end{cases}$$

$$f_W(w) = \begin{cases} 0 & \text{per } w \leq 0 \\ \underbrace{(\cancel{1}-(\cancel{1}-e^{-\lambda_2 w}))\lambda_1 e^{-\lambda_1 w} + (\cancel{1}-(\cancel{1}-e^{-\lambda_1 w}))\lambda_2 e^{-\lambda_2 w}}_{= \lambda_1 e^{-\lambda_1 w} e^{-\lambda_2 w} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 w} e^{-\lambda_1 w} = (\lambda_1+\lambda_2) e^{-(\lambda_1+\lambda_2) w}} & \text{per } w > 0 \end{cases}$$

<u>OSS</u>. Si ha $W = \min\{X_1, X_2\} \sim Exp(\lambda_1+\lambda_2)$. Al contrario Z non ha distribuzione esponenziale, e nessuna tra le distribuzioni notevoli continue che vedremo.

DISTRIBUZIONE NORMALE (o GAUSSIANA)

Abbiamo due definizioni: il caso standard, e il caso generale.
Il caso standard è un caso particolare al quale ci si può sempre ricondurre a partire da una distribuzione Normale qualsiasi (del caso generale).

- DEFINIZIONE

Una v.a. X ha distribuzione Normale standard (in simboli $X \sim N(0,1)$) se ha densità continua

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- DEFINIZIONE

Sia Y una v.a. così definita: $Y = \sigma X + \mu$, dove $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, e $X \sim N(0,1)$.
Allora si dice che Y ha distribuzione Normale con parametri μ e σ^2 (in simboli $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$).

In corrispondenza, per la formula già vista per v.a. del tipo $Y = aX+b$ (trasformazione affine) con $\begin{cases} a = \sigma \\ b = \mu \end{cases}$, si ha

$$f_Y(y) = \frac{1}{|\sigma|} f_X\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$\boxed{\begin{array}{l}\sigma > 0 \\ X \sim N(0,1)\end{array}}$

OSS. Ponendo $\mu = 0$ e $\sigma = 1$ si ottiene il caso standard come caso particolare:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} = f_X(y)$$

con $\mu = 0$ e $\sigma = 1$

PROPOSIZIONE

Sia $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$ e $Y^* = \frac{Y-\mu}{\sigma}$. Allora $Y^* \sim N(0,1)$.

DIMOSTRAZIONE

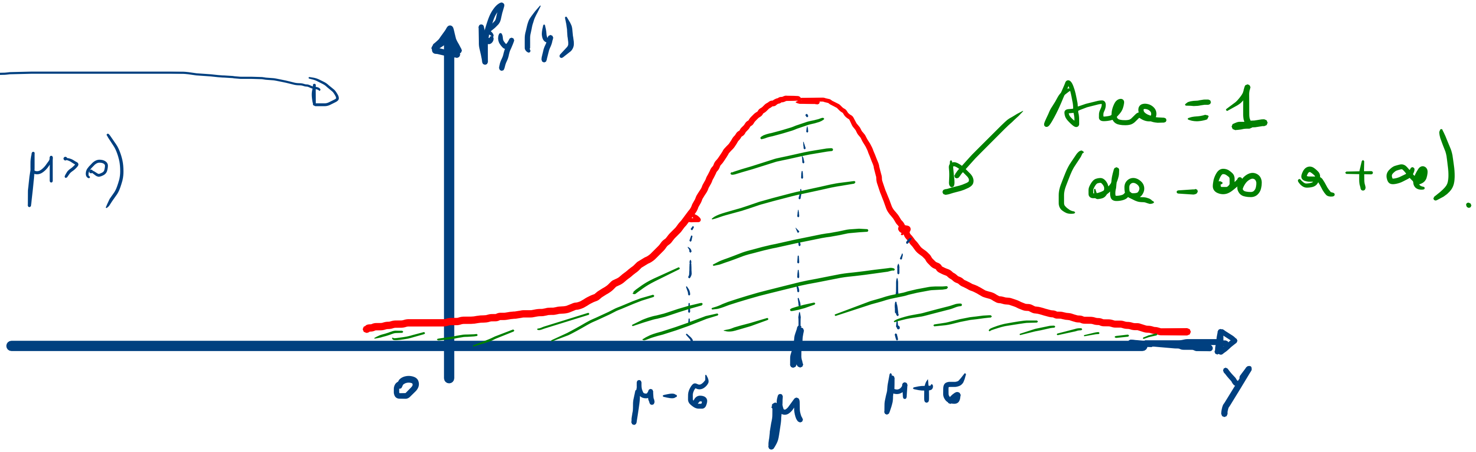
Si usa ancora la formula per la trasformazione affine con $a = \frac{1}{\sigma}$ e $b = -\frac{\mu}{\sigma}$. Si ottiene

$$f_{Y^*}(x) = \frac{1}{\left|1/\sigma\right|} f_Y\left(\frac{x + \frac{\mu}{\sigma}}{1/\sigma}\right) \overset{\sigma>0}{=} \sigma \cdot f_Y(\sigma x + \mu) = \frac{\cancel{\sigma}}{\sqrt{2\pi\cancel{\sigma^2}}} e^{-\frac{(\cancel{\sigma} x + \cancel{\mu} - \cancel{\mu})^2}{2\cancel{\sigma^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

che è la densità di una v.a. con distribuzione $N(0,1)$.

GRAFICO DI f_Y QUANDO $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

(In questo caso specifico si ha $\mu > 0$)



In generale $f_Y(y)$ è simmetrica rispetto a $y = \mu$.

Si ha $f_Y(y) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ dove $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ è una costante di normalizzazione.

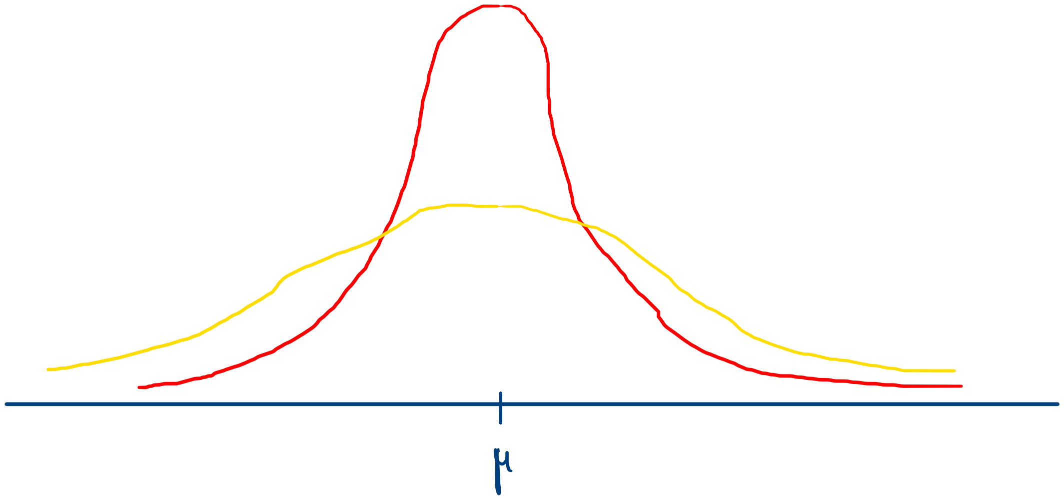
In generale, con σ che si avvicina a zero, la curva si concentra maggiormente attorno a $y = \mu$ (vedere prossime slide)

Questo sarà ancora più chiaro quando vedremo che μ e σ^2 rappresentano media e varianza della v.a. $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Prendiamo due densità di due Normali con lo stesso parametro μ e due diversi valori σ_1^2 e σ_2^2:

$N(\mu, \sigma_1^2)$

$N(\mu, \sigma_2^2)$



dove $\sigma_1 < \sigma_2$
(e quindi $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$).

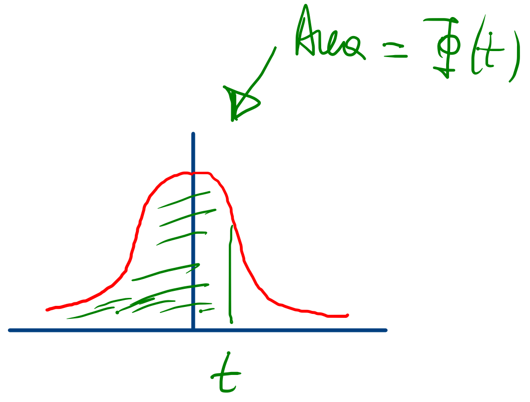
L'area sotto ciascuna delle due curve è uguale a 1.

NOTAZIONE CHE USEREMO DURANTE IL CORSO

Φ (lettera greca "phi" maiuscola)

per la funzione di distribuzione di $X \sim N(0,1)$:

per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $\Phi(t) = P(X \le t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\, dx$



Poi, presa una Normale generale, cioè presa $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$, si ha

$$F_Y(t) = P(Y \le t) = P(\sigma X + \mu \le t) = P(\sigma X \le t - \mu) = P\left(X \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Quindi, preso un qualsiasi caso generale, ci si può ricondurre al caso standard.

La funzione Φ ha le proprietà desiderate che deve avere la funzione di distribuzione di una v.a. continua.

Infatti

- Φ è crescente (e quindi non decrescente)
- $\lim_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$
- $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$
- Φ è continua, e anzi è derivabile per ogni $t \in \mathbb{R}$ e si ha

$$\Phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

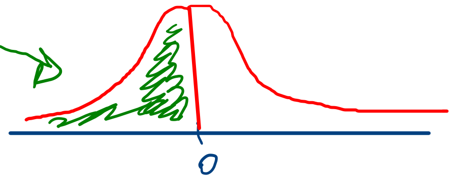
Però c'è un problema: non si riesce ad esprimere le primitive di $\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$ tramite funzioni elementari, e quindi non si ha un'espressione per $\Phi(t)$.

In generale i valori di $\Phi(t)$ si ottengono da opportune Tavole (e sono approssimati).

Solo per $t=0$ abbiamo un valore esatto: si ha

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

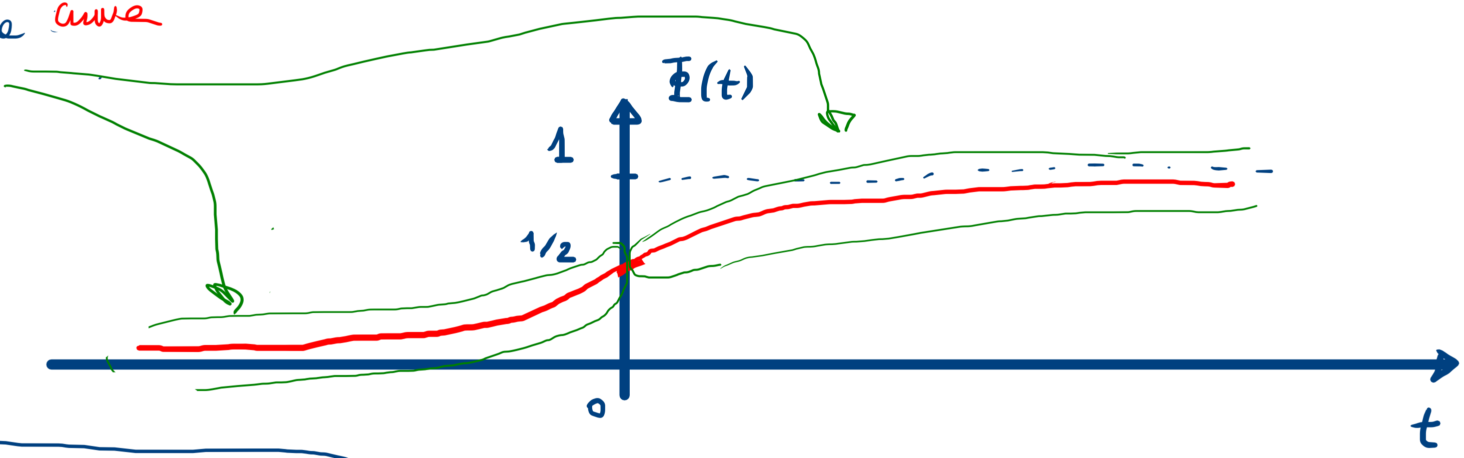
perché Area $= \frac{1}{2}$



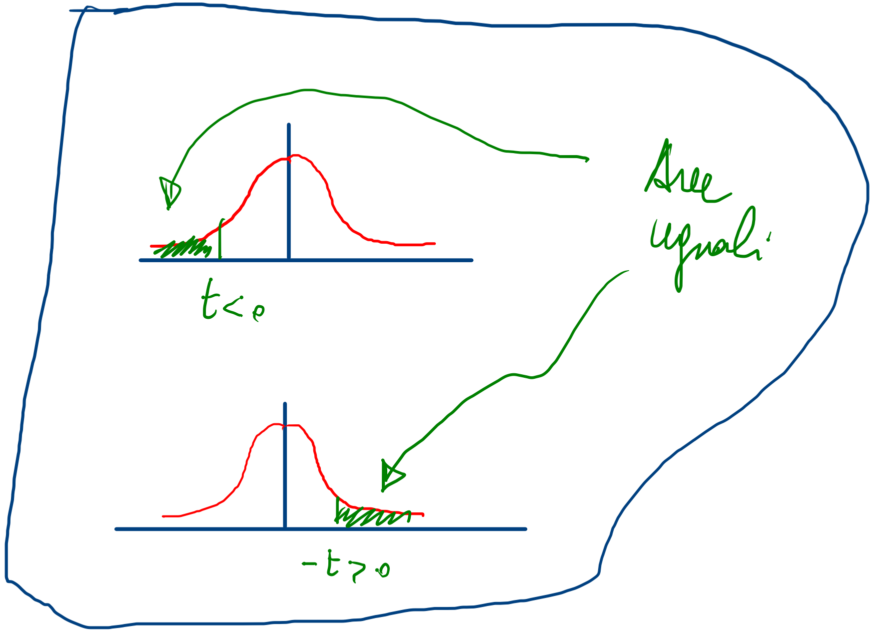
Per maggiore chiarezza possiamo dire che graficamente abbiamo questa situazione:

OSS.

I due tratti della curva sono simmetrici



Queste simmetrie si spiega osservando che



$$\Longrightarrow \quad \Phi(t) = 1 - \Phi(-t) \quad \text{per } t<0$$

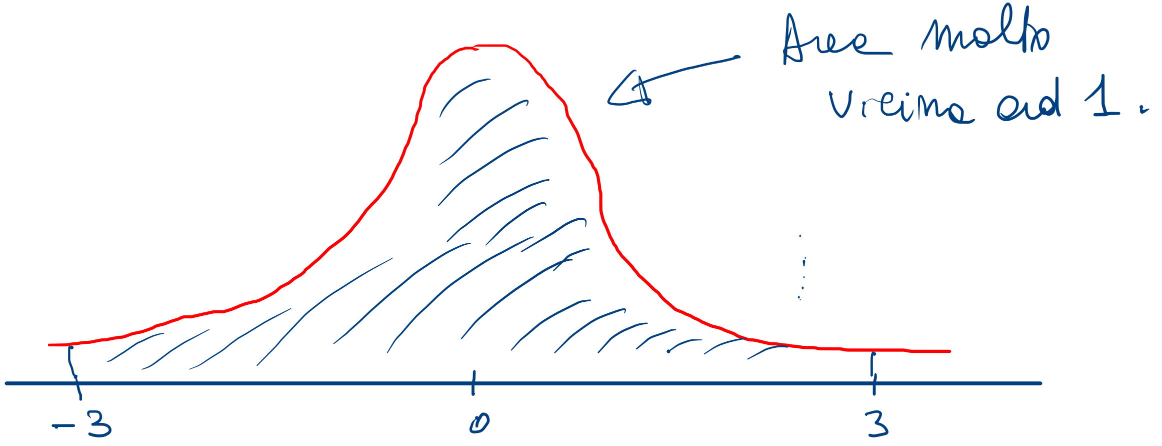
(il valore di $\Phi(t)$ con $t<0$ segue da quello di $\Phi(-t)$ con $-t>0$; nelle tavole si considera solo il caso di argomenti positivi).

I valori di $\Phi(t)$ per $t>0$ sono tabulati (cenno all'uso delle tavole nelle prossime slide).

Ovviamente sono valori approssimati.

Si prendono valori $\Phi(t)$ per $0 \le t \le 2.99$. Quando $t = 2.99$ abbiamo un valore molto vicino a 1, e a maggior ragione vale lo stesso per $\Phi(t)$ con $t > 2.99$.

In altri termini si ha



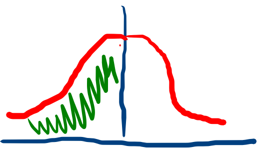
ISTRUZIONI SULL'USO DELLE TAVOLE

Esempio: Calcolo di $\Phi(1,27)$

	0.00	...	0.07	0.08	0.09
0.0	0.50000				
0.1					
⋮					
1.1					
1.2			0.89796		
1.3					
⋮					
2.9					

Questo è l'unico caso per cui si ha un valore esatto di $\Phi(t)$

In effetti si ha



0

Area $= \frac{1}{2}$

Inoltre, per quanto abbiamo detto,

$\Phi(-1,27) = 1 - \Phi(1,27)$

$= 1 - 0,89796 =$

$= 0,10204.$

Inoltre da questa tavola si possono dedurre i valori approssimati dei quantili.

Ad esempio si vede che $\Phi(1.96) = 0.97500$ e quindi $q_{0.975} = 1.96$

si ricorda che non sono uguaglianze esatte

Oppure

$q_{0.5} = 0$ (la mediana è zero)

e questa è una uguaglianza esatta

PER L'ESAME: Da qualche anno non viene più richiesto l'uso delle tavole. Si richiede solamente di esprimere il risultato tramite la funzione Φ. Talvolta si richiede che questo si debba fare con un argomento di Φ positivo. Quindi, ad esempio, se si arrivasse a dimostrare che la probabilità richiesta è uguale a $\Phi(-1)$, si dovrebbe poi scrivere che è uguale a $1 - \Phi(1)$.

ESERCIZIO

1) Sia $X \sim N(0,1)$. Calcolare $P(|X|>2)$ usando la funzione Φ.

2) Sia $Y \sim N(\mu=3, \sigma^2=25)$. Calcolare $P(1 \leq Y \leq 4)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.

SVOLGIMENTO

1) $P(|X|>2) = P(\{X>2\} \cup \{X<-2\}) = \underbrace{P(X>2)}_{=1-\Phi(2)} + \underbrace{P(X<-2)}_{=\Phi(-2) = 1-\Phi(2)} = 1-\Phi(2) + 1-\Phi(2) = 2(1-\Phi(2))$.

regola

Oppure:

$P(|X|>2) = 1-P(|X|\leq 2) = 1-P(-2\leq X \leq 2) = 1-(\Phi(2)-\Phi(-2)) = 1-\Phi(2)+\underbrace{\Phi(-2)}_{=1-\Phi(2)} = 2(1-\Phi(2))$.

2) $P(1\leq Y \leq 4) = P\left(\frac{1-\mu}{\sigma} \leq \underbrace{\frac{Y-\mu}{\sigma}}_{=Y^* \sim N(0,1)} \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\underbrace{\frac{4-\mu}{\sigma}}_{=\frac{4-3}{\sqrt{25}}}\right) - \Phi\left(\underbrace{\frac{1-\mu}{\sigma}}_{=\frac{1-3}{\sqrt{25}}}\right) = \Phi\left(\frac{1}{5}\right) - \underbrace{\Phi\left(-\frac{2}{5}\right)}_{=1-\Phi\left(\frac{2}{5}\right)} = \Phi\left(\frac{1}{5}\right)+\Phi\left(\frac{2}{5}\right)-1$.