Logica e Reti Logiche
(Episodio 6: Sistemi assiomatici per la logica proposizionale)

Francesco Pasquale

3 aprile 2023

Negli episodi precedenti abbiamo introdotto la logica proposizionale e abbiamo studiato il *metodo dei tableaux*. In questo episodio introduciamo i sistemi assiomatici con i relativi concetti di "teorema", "dimostrazione" e "derivazione".

1 Sistemi assiomatici: pronti, partenza, ...

Una sistema formale consiste in *schemi di assiomi* e *regole di inferenza*, oltre che dell'insieme dei simboli che vengono usati e delle definizioni che stabiliscono quali sequenze di simboli sono "formula". Nel caso della logica proposizionale gli schemi di assiomi sono un insieme di formule ben formate e le regole di inferenza sono relazioni di formule di questo tipo: "*Dalle formule* $X_1, \ldots, X_n$ *segue la formula* Y". Vediamo subito un esempio. Consideriamo i due assiomi seguenti[1]

$$\begin{aligned} A_1 : &\quad X \to (Y \to X) \\ A_2 : &\quad (X \to (Y \to Z)) \to ((X \to Y) \to (X \to Z)) \end{aligned}$$

Esercizio 1. Verficare che A_1 e A_2 sono tautologie.

La regola di inferenza che usiamo si chiama *Modus Ponens*: "Dalle formule X e $X \to Y$ segue la foruma Y". In simboli la scriviamo così

$$\frac{X, X \to Y}{Y}$$

In questi episodio chiamerò $\mathcal{S}_0$ il *sistema assiomatico* costituito dagli assiomi in A_1 e A_2 e dalla regola di inferenza Modus Ponens.

[1]Per essere rigoroso dovrei chiamare questi "schemi di assiomi", ma per il momento la considero sottigliezza e mettiamola da parte

Esercizio 2. Date due formule X e Y, verificare che se X e $X \to Y$ sono tautologie, allora anche Y è una tautologia.

Diciamo che una formula $\mathcal{F}$ è un'*istanza* di un assioma, se si ottiene da uno schema di assioma, sostituendo ad ogni lettera dello schema una formula. Per esempio, la formula $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ è un'istanza dell'assioma A_1, perché si ottiene da A_1 sostituendo $(q \to r)$ alla lettera X e p alla lettera Y.

Esercizio 3. Verificare che la formula $(q \to r) \to (p \to (q \to r))$ è una tautologia.

Esercizio 4. Osservare che se un certo assioma A è una tautologia, allora ogni istanza dell'assioma A è una tautologia.

2 Teoremi e dimostrazioni

Abbiamo iniziato questo corso ponendoci la domanda *"Cos'è una dimostrazione?"*. Nell'ambito di un sistema assiomatico, possiamo darne una definizione precisa.

Definizione 2.1 (Dimostrazione)**.** In un sistema assiomatico $\mathcal{S}$, una dimostrazione è una sequenza di formule $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ tale che ogni formula $\mathcal{F}_i$

1. O è un'istanza di un assioma;
2. Oppure si ottiene dalle formule precedenti della sequenza tramite una regola di inferenza.

Esempio. Consideriamo il nostro sistema $\mathcal{S}_0$. Nel seguito la indicheremo con *M.P.* la regola di inferenza *Modus Ponens*.

$$\begin{array}{lll} (1) & p \to (q \to p) & [A_1 \text{ con } X = p,\ Y = q] \\ (2) & (p \to (q \to p)) \to ((p \to q) \to (p \to p)) & [A_2 \text{ con } X = p,\ Y = q,\ Z = p] \\ (3) & (p \to q) \to (p \to p) & [(1), (2) \text{ e } M.P.] \end{array}$$

La sequenza di formule (1), (2) e (3) qui sopra è una dimostrazione secondo la Definizione 2.1. Infatti, le formule (1) e (2) sono istanze di assiomi, e la formula (3) si ottiene dalle due formule precedenti usando la regola di inferenza Modus Ponens, dove abbiamo posto $X = (p \to (q \to p))$ e $Y = (p \to q) \to (p \to p)$.
A questo punto possiamo anche dire cos'è un *teorema* in un sistema assiomatico.

Definizione 2.2 (Teorema)**.** In un sistema assiomatico, un *teorema* è l'ultima formula di una dimostrazione.

Esercizio 5. La formula $p \to p$ è un teorema del sistema $\mathcal{S}_0$.
(Suggerimento: Instanziare l'assioma A_1 con $X = p$ e $Y = (p \to p)$, l'assioma A_2 con $X = p$, $Y = (p \to p)$, e $Z = p$ e usare Modus Ponens. Poi instanziare A_1 con ...)

3 Derivazioni e il Teorema di Deduzione

Un concetto che estende quello di dimostrazione è quello che chiamiamo *derivazione*.

Definizione 3.1 (Derivazione)**.** Sia $\mathcal{S}$ un sistema assiomatico, sia $\mathcal{F}$ una formula e sia Γ un insieme di formule. Diciamo che $\mathcal{F}$ *deriva* da Γ nel sistema $\mathcal{S}$ se esiste una sequenza di formule $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ tali che $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ e ognuna delle $\mathcal{F}_i$, per $i = 1, \ldots n$,

1. O è un'istanza di un assioma;
2. O si ottiene dalle formule precedenti della sequenza tramite una regola di inferenza;
3. Oppure è una delle formule dell'insieme Γ.

La sequenza $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ si chiama *derivazione* di $\mathcal{F}$ da Γ. Le formule in Γ sono le *ipotesi* della derivazione.

Introduciamo anche un po' di simboli. Quando una formula $\mathcal{F}$ deriva da un insieme Γ in un sistema assiomatico $\mathcal{S}$ scriviamo $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \mathcal{F}$. Quando il sistema $\mathcal{S}$ di cui stiamo parlando è chiaro dal contesto lo omettiamo e scriviamo semplicemente $\Gamma \vdash \mathcal{F}$.

Esempio. Consideriamo sempre il nostro sistema $\mathcal{S}_0$ e facciamo vedere che la formula $p \to r$ deriva dalle formule $p \to q$ e $q \to r$. In simboli

$$p \to q,\, q \to r \ \vdash p \to r\,.$$

Chiamiamo $p \to q$ e $q \to r$ rispettivamente *Ipotesi 1* e *Ipotesi 2*.

(1)	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	$[A_2 \text{ con } X = p,\ Y = q,\ Z = r]$
(2)	$(q \to r) \to (p \to (q \to r))$	$[A_1 \text{ con } X = (q \to r),\ Y = p]$
(3)	$q \to r$	[Ipotesi 2]
(4)	$p \to (q \to r)$	$[(3), (2) \text{ e } M.P.]$
(5)	$(p \to q) \to (p \to r)$	$[(4), (1) \text{ e } M.P.]$
(6)	$p \to q$	[Ipotesi 1]
(7)	$p \to r$	$[(6), (5) \text{ e } M.P.]$

La sequenza di formule (1), ..., (7) qui sopra è una derivazione della formula $p \to r$ dall'insieme di formule $\{p \to q,\, q \to r\}$. Le formule (1) e (2) sono istanze di assiomi, (3) e (6) sono le ipotesi, (4), (5) e (7) seguono da formule precedenti tramite Modus Ponens.

Adesso, direi che tocca a voi fare un po' di pratica...

Esercizio 6. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}_0$

$$p \to (q \to r),\, q \ \vdash p \to r$$

Se confrontate le definizioni di dimostrazione e teorema con quella di derivazione, potete osservare che una dimostrazione di $\mathcal{F}$ è una derivazione di $\mathcal{F}$ con $\Gamma = \emptyset$. Per indicare che una formula $\mathcal{F}$ è un teorema nel sistema $\mathcal{S}$ perciò scriveremo $\vdash \mathcal{F}$.

Esercizio 7. Sia $\mathcal{F}$ una formula qualunque. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}_0$

$$\vdash \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

E adesso qualcosa di più impegnativo.

Esercizio 8. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due formule. Dimostrare che se in $\mathcal{S}_0$ si può derivare $\mathcal{G}$ da $\mathcal{F}$, allora $\mathcal{F} \to \mathcal{G}$ è un teorema. In simboli, se $\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$ allora $\vdash \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.
(Suggerimento: Sia $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n$ una derivazione di $\mathcal{G}$ da $\mathcal{F}$. Dimostrare, per induzione su i, che $\vdash \mathcal{F} \to \mathcal{F}_i$ per ogni $i = 1, \ldots, n$)

L'esercizio precedente si può generalizzare un po', ottenendo quello che si chiama Teorema di deduzione.

Teorema 3.2 (Teorema di deduzione)**.** Sia Γ un insieme di formule e siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due formule. Nel sistema $\mathcal{S}_0$ se $\Gamma \cup \{\mathcal{F}\} \vdash \mathcal{G}$ allora $\Gamma \vdash \mathcal{F} \to \mathcal{G}$.

Esercizio 9. Dimostrare il teorema di deduzione.

4 Conclusioni

In questo episodio abbiamo introdotto i *sistemi assiomatici* per la logica proposizionale. Osservate che dall'Esercizio 2 segue che in un qualunque sistema assiomatico in cui gli schemi di assiomi sono tautologie e la regola di inferenza è Modus Ponens, tutti i teoremi sono tautologie. Il nostro sistema $\mathcal{S}_0$ quindi è *corretto*. Sarà anche *completo*? Così com'è adesso, no, non è completo. Ma è sufficiente aggiungere uno schema di assioma per rendelo completo, per esempio questo:

$$A_3 : \quad (\neg X \to \neg Y) \to ((\neg X \to Y) \to X)$$

Se chiamiamo $\mathcal{S}_1$ il sistema assiomatico formato dagli assiomi A_1, A_2, e A_3 e dalla regola di inferenza Modus Ponens, si può infatti dimostrare che ogni tautologia è un teorema nel sistema $\mathcal{S}_1$. Ma per il momento non ci addentriamo in questo discorso.

Per finire, un paio di esercizi sul sistema $\mathcal{S}_1$.

Esercizio 10. Siano $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$ due formule. Dimostrare che nel sistema $\mathcal{S}_1$

1. $\neg\mathcal{F} \to (\mathcal{F} \to \mathcal{G})$
2. $(\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F}) \to (\mathcal{F} \to \mathcal{G})$

Suggerimento: Es 1. Dimostrare prima che $\neg\mathcal{F}, \mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$, quindi dal Teorema di deduzione seguirà che $\neg\mathcal{F} \vdash \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ e poi, usando ancora il Teorema di deduzione, ...
Es.2. Dimostrare prima che $\neg\mathcal{G} \to \neg\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \vdash \mathcal{G}$ e poi usare due volte il Teorema di deduzione