COMBINAZIONI LINEARI

Sia V uno spazio vettoriale, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ la combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con pesi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ è il vettore

$$\alpha_1 \cdot \underline{v}_1 + \alpha_2 \cdot \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$$

Esempio:

- $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_1, \underline{v}_2 \in \mathbb{R}^3$

$\alpha_1 = 2, \qquad \alpha_2 = -1$

la combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ con pesi $2, -1$ è:

$$2 \cdot \underline{v}_1 + (-1) \cdot \underline{v}_2 =$$

$$= 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

- $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1$

$$(-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -1$

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Def: V spazio vettoriale, $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$

lo spazio generato da $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è

$$\boxed{\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}} := \{ \underline{v} \in V \text{ tale che}$$

esistono $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \} =$$

= insieme di tutte le combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$

$\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \subseteq V$

OSS: $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ allora

- $\underline{v}_1 \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

  $\vdots$

- $\underline{v}_n \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$
- $\underline{0} \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

perché: $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$

$$1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \cdots + 0\,\underline{v}_n \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

$$\underline{v}_1 + \underline{0} + \cdots + \underline{0} = \underline{v}_1 \quad \Rightarrow \checkmark$$

similmente $\underline{v}_2 \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

$$\underline{v}_2 = 0 \cdot \underline{v}_1 + 1 \cdot \underline{v}_2 + \cdots + 0 \cdot \underline{v}_n$$

e ... $\underline{v}_n \in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

$\underline{0} = 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

Prop: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$. Allora

$\text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sottospazio di V.

Dim: dobbiamo e basta verificare che $\text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è chiuso rispetto alla somma e chiuso rispetto al prodotto per uno scalare.

1°) chiusura rispetto alla somma:

se $\underline{v}, \underline{w} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ allora

$\underline{v} + \underline{w} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

se $\underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ significa

$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n$ per qualche $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$\underline{w} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \Rightarrow \underline{w} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

per qualche $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$

$$\underline{v} + \underline{w} = (\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n) + (\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop.} \\ \text{associative}}}{=} \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop.} \\ \text{commut}}}{=}$$

$$= \alpha_1 \underline{v}_1 + \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n + \lambda_n \underline{v}_n$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{prop.} \\ \text{distributive}}}{=} (\alpha_1 + \lambda_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n + \lambda_n)\underline{v}_n \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

<u>OSS</u>: se $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con pesi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, se $\underline{w}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con pesi $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, allora

$\underline{v} + \underline{w}$ è combinazione lineare di

$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ con pesi $(\alpha_1 + \lambda_1), \ldots, (\alpha_n + \lambda_n)$

2°] chiusura rispetto al prodotto per uno scalare:

se $\underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$

allora $\lambda \underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

$\underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \Rightarrow \underline{v} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_n \underline{v}_n$

per qualche $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (\alpha_1 \underline{v}_1 + \cdots + \alpha_n \underline{v}_n) \overset{\text{prop. distrib.}}{=}$$

$$\lambda(\alpha_1 \underline{v}_1) + \cdots + \lambda(\alpha_n \underline{v}_n) =$$

$$= (\lambda \alpha_1) \underline{v}_1 + \cdots + (\lambda \alpha_n) \underline{v}_n \in \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

$\square$

OSS: se $\underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con pesi $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e se $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\lambda \cdot \underline{v}$ è combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ con pesi $\lambda\alpha_1, \dots, \lambda\alpha_n$

OSS: $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ sistema lineare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{12}\,x_2 \\ \vdots \\ a_{m2}\,x_2 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} a_{1n}\,x_n \\ \vdots \\ a_{mn}\,x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_1} + x_2 \underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_2} + \dots + x_n \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{\underline{a}_n}$$

$$= x_1 \underline{a}_1 + x_2 \underline{a}_2 + \dots + x_n \underline{a}_n$$

[$\underline{a}_j$ è il vettore di $\mathbb{R}^m$ formato dalle j-me colonne di A]

Dunque

il sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$

equivale a

$$x_1 \underline{a}_1 + \dots + x_n \underline{a}_n = \underline{b}$$

pertanto :

il sistema ha soluzione se e solo se

$\underline{b} \in \text{span}\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = -1 \end{cases}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{array}{ccc} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 \\ \left(\boxed{\begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix}}\right. & \boxed{\begin{matrix} 1 \\ 0 \end{matrix}} & \left.\boxed{\begin{matrix} -1 \\ 1 \end{matrix}}\right) \end{array}$$

$$\underline{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{a}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

il sistema ha soluzione se e solo se

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

OSS: $0 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$ e

dunque il sistema ha soluzione.

Esempio:

$$\operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } \underline{v} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ per } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ tali che } \underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}, \ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \mathbb{R}^2$$

Def: Uno spazio vettoriale V si dice finitamente generato se esistono $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$ tali che

$$V = \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$$

Esempio:

- $\mathbb{R}^n$ è finitamente generato.

$$\underline{e}_1 := \left.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}n, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n \in \mathbb{R}^n$$

$\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ allora $\underline{v} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_n \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$= \alpha_1 \underline{e}_1 + \dots + \alpha_n \underline{e}_n$

$\Rightarrow \quad \underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

$\Rightarrow \quad \mathbb{R}^n = \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$

- $V = \text{Pol}_{\leq 2}[x] = \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ tali che $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$

determinare se $p(x) = 1 + x$ appartiene a $\text{span}\{1-2x, \ 1+x^2\}$

$1+x \in \text{span}\{1-2x, \ 1+x^2\}$ se esistono $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$1+x = \alpha_1(1-2x) + \alpha_2(1+x^2)$

MA

$$\alpha_1(1-2x)+\alpha_2(1+x^2) = \alpha_1 - 2\alpha_1 x + \alpha_2 + \alpha_2 x^2$$

$$= (\alpha_1+\alpha_2) - 2\alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

quindi cerchiamo α_1, α_2 tali che

$$\boxed{1+x = (\alpha_1+\alpha_2) - 2\alpha_1 x + \alpha_2 x^2}$$

<u>OSS</u>: due polinomi

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \quad \text{e}$$

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_m x^m$$ sono <u>uguali</u>

se $m=n$ e $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$.

$$\begin{cases} 1 = \alpha_1 + \alpha_2 \\ 1 = -2\alpha_1 \\ 0 = \alpha_2 \end{cases}$$

(termini di grado 0
termini di grado 1
termini di grado 2

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ 1 = -2 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases}$$ ✗ IMPOSSIBILE

quindi $1+x \notin \text{span}\{1-2x, 1+x^2\}$

- Siano $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

sono vettori di $\mathbb{R}^3$. Dire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ $\underline{v}_1 \in \text{span}\{\underline{v}_2, \underline{v}_3\}$

Dobbiamo capire se dato $\alpha \in \mathbb{R}$ esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{v}_1 = \lambda \underline{v}_2 + \mu \underline{v}_3$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha = \mu \\ 1 = -\lambda \\ 0 = 0 \end{cases}$$

sempre vero!

- Per quali α, $\underline{v}_3 \in \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{\in} \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

devo trovare $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ x_1 - x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha x_1 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

pertanto la domanda può essere riformulata come:

dato il sistema lineare la cui matrice completa è:

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

il sistema ha soluzione?

Usiamo EG:

- $\alpha = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad R_1 \leftrightarrow R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

\# pivot della matrice completa è 2

\# pivot della matrice incompleta è 1

$\Rightarrow$ il sistema non ha soluzione e pertanto per $\alpha = 0$ $\underline{v}_3 \notin \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

- $\alpha \neq 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad R_2 \to R_2 - \frac{1}{\alpha} R_1$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} \alpha & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1/\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

\# pivot della matrice completa è 2 = \# pivot della matrice incompleta

$\Rightarrow$ il sistema ha soluzione e dunque $\underline{v}_3 \in \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ (se $\alpha \neq 0$).

In generale in $\mathbb{R}^m$ se $\underline{w} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \underline{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\underline{w} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ se e solo se esistono $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

$$\underline{w} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

ovvero

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$ dopo EG

ha un numero di pivot nella matrice incompleta = numero di pivot della matrice completa.

Esempio:

Dire se $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

EG

$R_2 \to R_2 + R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 + R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R_3 \to R_3 - \frac{1}{2} R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{NON APPARTIENE}$$

2 pivot
matrice incompleta

3 pivot
matrice completa