$A\underline{x} = \underline{b} \quad (*)$

<u>EG</u>

M

1) scambiare righe
2) $R_j \to R_j + kR_i \quad i \neq j$
3) $R_j \to kR_j \quad k \neq 0$

$\to$ MATRICE A SCALA

Abbiamo visto che applicando 1) e 2) alla matrice completa del sistema $(A \ \underline{b})$ otteniamo un sistema lineare che ha le stesse soluzioni di $(*)$

La stessa cosa vale anche 3)

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = a \\ \gamma x + \delta y = b \end{cases} \leadsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta & a \\ \gamma & \delta & b \end{pmatrix}$$

$R_1 \longrightarrow kR_1 \qquad k \neq 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha k & \beta k & a k \\ \gamma & \delta & b \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (\alpha k) x + (\beta k) y = a k \\ \gamma x + \delta y = b \end{cases}$$

$k \neq 0$

$$\begin{cases} \cancel{k} (\alpha x + \beta y) = a \cancel{k} \\ \gamma x + \delta y = b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x + \beta y = a \\ \gamma x + \delta y = b \end{cases}$$

OSS: $A\underline{x} = \underline{b}$

$(A\ \underline{b}) \underset{EG}{\searrow}$ matrice a scala con k pivot

$A \underset{EG}{\searrow}$ matrice a scala con h pivot

$$\boxed{h \leq k \leq h+1}$$

$$(A\ \underline{b}) \xrightarrow{EG} \left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & \cdots & & \\ & & p_2 & \\ 0 & \cdots & 0 & * \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{array}\right)$$

[Il sistema lineare $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione se e solo se $h = k$]

Infatti se $k = h+1$

$$(A\ \underline{b}) \xrightarrow{EG} \begin{pmatrix} p_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & p_h & & \\ \boxed{0 & \cdots & 0 & & p_k} \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq 0$

sistema lineare associato

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \dots = * \\ \quad \ddots \\ \quad p_h x_h + \dots = * \\ 0 \cdot x_1 + 0 x_2 + \dots + 0 x_n = p_k \end{cases}$$

$\Rightarrow 0 = p_k$

IMPOSSIBILE

ESEMPI : incognite x, y, z, t

$$\begin{cases} x - y + t = 1 \\ x + y - t = 0 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

la matrice completa del sistema lineare:

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

EG

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \longrightarrow R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$R_3 \longrightarrow R_3 - \frac{1}{2} R_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

il numero di pivot è 3 (sia per la matrice completa che incompleta)

$$\begin{cases} x - y + t = 1 \\ 2y - 2t = -1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y - t + 1 = -\frac{1}{2} + t - t + 1 = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = 1/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{2} + t \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} + \lambda \\ \frac{1}{2} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

al variare di $t \in \mathbb{R}$

le soluzioni sono ∞ (dipendenti da 1 parametro)

<u>OSS</u>: - il numero delle incognite è 4

- il numero dei pivot (della matrice completa e incompleta) è 3
- ci sono ∞ soluzioni dipendenti da

$4 - 3 = 1$ parametri.

OSS: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ è una soluzione particolare del sistema

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

sono tutte e sole le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato

$$\begin{cases} x - y + t = \cancel{1}\ 0 \\ x + y - t = \cancel{0}\ 0 \\ x + z = \cancel{1}\ 0 \end{cases}$$

ESEMPIO:

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ \alpha z = 3 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

Trovare le soluzioni al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

la matrice completa del sistema è:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha & 3 \end{array}\right)$$

è a scala

il numero dei pivot della matrice incompleta è

$$\begin{cases} 3 & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 2 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}$$

il numero di pivot della matrice completa è 3 per ogni α

quindi

- se $\alpha = 0$ il sistema non ammette soluzioni
- se $\alpha \neq 0$ il sistema ha soluzione

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ \alpha z = 3 \end{cases}$$

$\alpha = 0 \rightsquigarrow 0 = 3$ IMPOSSIBILE

$\alpha \neq 0 \quad z = \frac{3}{\alpha}$

quindi il sistema per $\alpha \neq 0$ ammette una unica soluzione, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \frac{3}{\alpha} \end{pmatrix}$

OSS: • numero di incognite = 3

• se $\alpha \neq 0$ il numero di pivot della matrice completa e incompleta è 3

• la soluzione dipende da $3 - 3 = 0$ parametri (cioè è unica)

ESEMPIO: incognite x, y, z

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \alpha y + z = 1 \\ x + \beta y + z = 0 \end{cases}$$

Trovare le soluzioni al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ matrice completa

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \beta & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$\boxed{1°}$ caso $\alpha \neq 0$ (α è un pivot)

$R_3 \to R_3 - \dfrac{(\beta-1)}{\alpha} R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-\frac{(\beta-1)}{\alpha} & -4-\frac{(\beta-1)}{\alpha} \end{array}\right)$$

- se $1 - \dfrac{(\beta-1)}{\alpha} \neq 0$ allora è un pivot

$\Leftrightarrow \alpha - \beta + 1 \neq 0$

in questo caso il numero di pivot della matrice incompleta è 3
= numero di pivot della matrice completa

. se $\alpha \neq 0$ e $\alpha - \beta + 1 \neq 0$ allora il sistema ammette soluzione:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ \alpha y + z = 1 \\ \left[1 - \frac{(\beta-1)}{\alpha}\right] z = -4 - \frac{(\beta-1)}{\alpha} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ y = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} z \\ z = -\frac{4\alpha - \beta + 1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{\alpha - \beta + 1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-4\alpha - \beta + 1}{\alpha - \beta + 1}\right) \\ y = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{-4\alpha - \beta + 1}{\alpha - \beta + 1}\right) \\ z = \frac{-4\alpha - \beta + 1}{\alpha - \beta + 1} \end{cases}$$

$$\boxed{\text{se } \alpha \neq 0 \text{ e } \alpha - \beta + 1 \neq 0 \Rightarrow \text{il sistema ha una unica soluzione}}$$

se $\alpha \neq 0$ e $\alpha - \beta + 1 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \alpha & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 - \frac{(\beta - 1)}{\alpha} \end{array}\right)$$

$$-4 - \frac{(\beta-1)}{\alpha} = \frac{-4\alpha - \beta + 1}{\alpha}$$

- la matrice incompleta ha 2 pivot
- il numero di pivot della matrice completa:

è 2 se $-4\alpha-\beta+1=0$

altrimenti è 3

sappiamo che $\alpha-\beta+1=0$

ovvero $\alpha=\beta-1$

quindi

$$-4\alpha-\beta+1=-4(\beta-1)-\beta+1=$$

$$=-4\beta+4-\beta+1=$$

$$=-5\beta+5=5(1-\beta)$$

dunque $-4\alpha-\beta+1=0$ se $\boxed{\beta=1}$

$\beta=1$ dato che $\alpha=\beta-1$

$\Rightarrow \alpha=0$ MA $\underline{\alpha\neq 0}$

$\Rightarrow$ se $\alpha\neq 0$ e $\alpha-\beta+1=0$
la matrice completa ha 3 pivot

quindi # pivot matrice completa $=3$

pivot matrice incompleta $=2$

NON ESISTONO SOLUZIONI

(nel caso $\alpha\neq 0$ e $\alpha-\beta+1=0$)

$\boxed{\text{Caso } \alpha=0}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \alpha = 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 & -4 \end{array}\right) \qquad \alpha = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \beta-1 & 1 & -4 \end{array}\right)$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \beta-1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

se $\beta - 1 \neq 0$ (cioè $\beta \neq 1$) allora è a scala allora # pivot della matrice completa = 3 = # pivot della matrice incompleta $\Rightarrow$ esiste soluzione

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ (\beta-1)y + z = -4 \\ z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 - y = 4 + \frac{5}{\beta-1} \\ y = \frac{-4}{\beta-1} - \frac{1}{\beta-1} = -\frac{5}{\beta-1} \\ z = 1 \end{cases}$$

la soluzione è unica

CASO $\alpha = 0, \quad \beta = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & \beta - 1 \overset{=}{}{}^{0} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 - R_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

pivot della matrice completa $= 3$

pivot della matrice incompleta $= 2$

$\Longrightarrow$ NON CI SONO SOLUZIONI.