$L : V \longrightarrow W$ lineare

$\mathcal{B}_V = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ base di V $(\dim V = n)$

$\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ base di W $(\dim W = m)$

A matrice $m \times n$ associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

$$L(\underline{v}_1) = a_{11}\underline{w}_1 + \cdots + a_{m1}\underline{w}_m$$

$$\vdots$$

$$L(\underline{v}_n) = a_{1n}\underline{w}_1 + \cdots + a_{mn}\underline{w}_m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- se $\underline{v} \in V$ e $\underline{v}$ ha coordinate $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ in $\mathcal{B}_V$ allora $L(\underline{v})$ ha coordinate $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}_W$.

Esempio:

$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- verificare che L è lineare
- determinare la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$

- L è lineare:
  - $L(\underline{x} + \underline{y}) = L(\underline{x}) + L(\underline{y})$ $\qquad \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^3$
  - $L(\lambda \underline{x}) = \lambda L(\underline{x})$ $\qquad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{y} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

$$L\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} x+\alpha \\ y+\beta \\ z+\gamma \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (x+\alpha)+(y+\beta) \\ (x+\alpha)-(y+\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x+y)+(\alpha+\beta) \\ (x-y)+(\alpha-\beta) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha+\beta \\ \alpha-\beta \end{pmatrix} = L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + L\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \checkmark$$

$$L\left(\lambda\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x + \lambda y \\ \lambda x - \lambda y \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(x+y) \\ \lambda(x-y) \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} = \lambda L\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \checkmark$$

Quindi L è lineare.

OSS: $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se $L\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$

dove $f_j(x_1, \dots, x_n) = a_{j1} x_1 + \dots + a_{jn} x_n$

(cioè le entrate sono polinomi omogenei di grado 1)

- matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

è la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$

Se $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono le coordinate di $\underline{x}$ in $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3}$

$L(\underline{x})$ ha coordinate in $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ date da

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$$

ovvero $L = L_A$ [perché abbiamo scelto la base canonica in partenza e in arrivo]

<u>Esempio</u>: Sia $tr : Mat(2\times 2) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$tr\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha + \delta$$

Sia $\mathcal{B}_{Mat(2\times2)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

base di $Mat(2\times 2)$.

Sia $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1\}$

Trovare la matrice associata a tr nelle basi $\mathcal{B}_{Mat(2\times2)}$, $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$

$$tr\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 = 1\cdot 1$$

$$tr\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 = 0\cdot 1$$

$$tr\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0 = 0\cdot 1$$

$$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 = 1 \cdot 1$$

$$A = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

- Nella base $\mathcal{B}_{Mat(2\times2)}$ una matrice

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}$ sono le coordinate di M nella base $\mathcal{B}_{Mat(2\times2)}$

$\mathrm{tr}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ ha coordinate nella base $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \{1\}$

date da

$$A \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \alpha + \delta.$$

<u>Esempio:</u> $L: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

Siano $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\tilde{\mathcal{B}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

- verificare che $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$
- Determinare la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$
- Dato $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ determinare le coordinate di $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base $\tilde{\mathcal{B}}$.

verifichiamo che $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ sono basi di $\mathbb{R}^2$

- $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ EG $R_2 \to R_2 - R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ EG $R_2 \to R_2 - 2R_1$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$

$$L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + 2y \end{pmatrix}$$

matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$:

$$L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-1\\1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}a-b\\2a-b\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b = 1 \\ 2a-b = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1+b \\ 2+2b-b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$L\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix} = c\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + d\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c-d\\2c-d\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c-d = 3 \\ 2c-d = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 3 + d \\ 6 + 2d - d = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c = -4 \\ d = -7 \end{cases}$$

$$L\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-7) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}$$ matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$

- Per trovare le coordinate di $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\tilde{\mathcal{B}}$:

a) $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \alpha - \beta \\ 2\alpha - \beta \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = 2 \\ 2\alpha - \beta = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = 2 + \beta \\ 4 + \beta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -3 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sono le coordinate di $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base $\tilde{\mathcal{B}}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ troviamo le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda - \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ \lambda = \mu \end{cases}$$

le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}$ sono

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Quindi le coordinate di $L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ nella base

$\tilde{\mathcal{B}}$ sono date da:

$$A\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}2 & -4\\1 & -7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$$

OSS: V spazio vettoriale, $\dim V = n$

$id : V \longrightarrow V \quad id(\underline{v}) = \underline{v}$ identità

fissate 2 basi $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

e $\tilde{\mathcal{B}} = \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n\}$ di V

allora la matrice associata a id nelle basi $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\tilde{\mathcal{B}}$.

perché: $\underline{v} \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ coordinate in $\mathcal{B}$

$\underline{v} \longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\widetilde{\mathcal{B}}}$ coordinate in $\widetilde{\mathcal{B}}$

la matrice A associata a id in $\mathcal{B}, \widetilde{\mathcal{B}}$

$$
\begin{tikzcd}
A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \arrow[r, phantom, "="] & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
\underline{v} \arrow[u] \arrow[r, mapsto, "id"] & \underline{v} \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

OSS 2: $L: V \longrightarrow W$ lineare

$\mathcal{B}_V = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ base di V

$\mathcal{B}_W = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ base di W

A = matrice $m \times n$ associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

$$\operatorname{Ker} L := \{\underline{v} \in V \text{ t.c. } L(\underline{v}) = \underline{0}\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_V} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

= soluzioni del sistema lineare omogeneo di cui A è la matrice incompleta

$$\mathrm{Im}\, L := \{ \underline{w} \in W \text{ t.c. esiste } \underline{v} \in V \text{ t.c. } L(\underline{v}) = \underline{w} \} =$$

$$= \mathrm{span} \{ L(\underline{v}_1), \ldots, L(\underline{v}_n) \}$$

$$= \mathrm{span} \{ A \cdot \underline{e}_1, \ldots, A \cdot \underline{e}_n \} =$$

(coordinate in $\mathcal{B}_W$)

$$= \mathrm{span} \{ \underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_m \}$$

dove $A = \begin{pmatrix} | & & | \\ \underline{a}_1 & \cdots & \underline{a}_m \\ | & & | \end{pmatrix}$

$\underline{a}_j$ = colonna j-ma di A

OSS 3: Se $L : V \longrightarrow W$ lineare

$T : W \longrightarrow U$ lineare

$\mathcal{B}_V$ = base di V

$\mathcal{B}_W$ = base di W

$\mathcal{B}_U$ = base di U

A = matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

B = matrice associata a T nelle basi $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U$

Allora la matrice associata a

$T \circ L : V \longrightarrow U$

è: $\boxed{B \cdot A}$

(la dimostrazione è una verifica diretta)

Corollario: se $L: V \longrightarrow W$ è isomorfismo

$\mathcal{B}_V$ = base di V

$\mathcal{B}_W$ = base di W

A matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

allora $L^{-1}: W \longrightarrow V$ ha come matrice associata nelle basi $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_V$ la matrice A^{-1}

$$\begin{tikzcd}
\underset{\in V}{\underline{v}} \arrow[r, mapsto] \arrow[d] & \underset{\in W}{L(\underline{v})} \arrow[r] \arrow[d, dashed] & \underset{\in V}{L^{-1}(L(\underline{v})) = \underline{v}} \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_V} \arrow[r] & \underbrace{A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}} \arrow[r] & \underset{\text{matrice associata}}{\underset{\uparrow}{B}} \cdot A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

coordinate in B_W

e L^{-1} in B_W, B_V

$B \cdot A$ $n \times n$ t.c. $(BA)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ per ogni $x_1, \dots, x_n$

- se $M = \begin{pmatrix} a_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{nn} \end{pmatrix}$ t.c.

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{per ogni } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow M = I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} a x_1 + b x_2 \\ c x_1 + d x_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

per $x_1 = 1,\ x_2 = 0$ otteniamo

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

per $x_1 = 0,\ x_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \rfloor$$

$\Rightarrow B \cdot A = I$ cioè $B = A^{-1}$.

Prop: Sia $A \in Mat(n \times n)$. Allora sono equivalenti:

1) A è invertibile (cioè esiste A^{-1} t.c. $A^{-1} \cdot A = I$)

2) $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ è isomorfismo
$L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$

3) il sistema lineare omogeneo

$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$ ha la sola soluzione $\underline{x} = \underline{0}$

4) $rg(A) = n$

<u>DIM</u>: 1) $\Rightarrow$ 2) Sia $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$

se A è invertibile:

$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ha matrice associata

nelle basi $\mathcal{E}, \mathcal{E}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$L_A(\underline{e}_1) := A \cdot \underbrace{\underline{e}_1}_{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}\underline{e}_1 + \dots + a_{n1}\underline{e}_n$$

$\vdots$

$$L_A(\underline{e_n}) = A \cdot \underline{e_n} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix} = a_{1n}\underline{e_1} + \dots + a_{nn}\underline{e_n}$$

$$\underline{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata a L_A nelle basi $\mathcal{E},\mathcal{E}$ è A

A invertibile, quindi possiamo definire

$$L_{A^{-1}} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

la matrice associata a $L_{A^{-1}}$ in $\mathcal{E},\mathcal{E}$ è A^{-1}

$L_{A^{-1}} \circ L_A$ ha matrice associata in $\mathcal{E},\mathcal{E}$

$$A^{-1} \cdot A = id$$

pertanto $L_{A^{-1}} \circ L_A$ è l'identità

$\Longrightarrow L_A$ è isomorfismo.

$2) \Rightarrow 3)$ (OSS 2)

$3) \Rightarrow 4)$ Teo della dimensione

$$\underset{\substack{\| \\ n}}{\dim \mathbb{R}^n} = \underset{\substack{\| \\ \dim \left\{ \begin{array}{l}\text{spazio delle soluzioni} \\ \text{di } A \cdot \underline{x} = \underline{0}\end{array} \right\}}}{\dim \ker L_A} + \overset{\substack{rg A \\ \|}}{rg L_A}$$

$\| \leftarrow$ se $\underline{x} = 0$

0 è la sola soluz.

$4) \Rightarrow 1)$ $rg A = n$ dal teo della dimensione $\Rightarrow$ $\ker L_A = \{\underline{0}\}$

$\operatorname{Im} L_A = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow L_A$ è isomorfismo.

A è la matrice associata a L_A

in $\mathcal{E}, \mathcal{E}$ e dunque è invertibile $\blacksquare$