TEOREMA SPETTRALE (REALE)

"Versione semplice": Se A è una matrice $n \times n$ simmetrica (cioè se $A = A^t$) allora esiste una base ortonormale (rispetto al prodotto scalare standard) formata da autovettori di A.

In particolare A è diagonalizzabile.

A matrice $n \times n$ ⇝ autovettori ($A\underline{x} = \lambda \underline{x}$ $\underline{x} \neq \underline{0}$)
⇝ autovalori
⇝ diagonalizzazione

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\underline{x} \longmapsto A\underline{x}$$

DEF: $L : V \longrightarrow V$ lineare

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio metrico

L si dice **autoaggiunto** se

per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$

$$\langle L(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, L(\underline{w}) \rangle$$

OSS: Sia $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale di V. Sia A la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}$

$$\underline{v} \rightsquigarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{coord. di } \underline{v} \text{ in } \mathcal{B}$$

$$\underline{w} \rightsquigarrow \underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{coord. di } \underline{w} \text{ in } \mathcal{B}$$

$$L(\underline{v}) \rightsquigarrow A\underline{x} \quad \text{coord. di } L(\underline{v}) \text{ in } \mathcal{B}$$

$$L(\underline{w}) \rightsquigarrow A\underline{y}$$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{x}^t \cdot \underline{y} \quad \left(= \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_{st} \right.$$

prodotto scalare standard in $\mathbb{R}^n$)

$n = 2$

$$\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2, y_1 \underline{v}_1 + y_2 \underline{v}_2 \rangle =$$

$$x_1 \langle \underline{v}_1, y_1 \underline{v}_1 + y_2 \underline{v}_2 \rangle + x_2 \langle \underline{v}_2, y_1 \underline{v}_1 + y_2 \underline{v}_2 \rangle$$

$$= x_1 y_1 \overbrace{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_1 \rangle}^{=1} + x_1 y_2 \overbrace{\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle}^{=0} + x_2 y_1 \underbrace{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_1 \rangle}_{=0}$$

$$+ x_2 y_2 \overbrace{\langle \underline{v}_2, \underline{v}_2 \rangle}^{=1} = x_1 y_1 + x_2 y_2 =$$

$$(x_1 \ x_2) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_{st}$$

$$\left.\begin{aligned} \langle L(\underline{v}), \underline{w} \rangle &= (A\underline{x})^t \cdot \underline{y} = \underline{x}^t \cdot A^t \cdot \underline{y} \\ \langle \underline{v}, L(\underline{w}) \rangle &= \underline{x}^t \cdot (A\underline{y}) = \underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{y} \end{aligned}\right\} (1)$$

L autoaggiunto (per def. $\langle L(\underline{v}), \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, L(\underline{w}) \rangle$)

$$\Longrightarrow \boxed{\underline{x}^t A^t \cdot \underline{y} = \underline{x}^t \cdot A \cdot \underline{y}} \quad (*)$$

per ogni $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ prendendo

$\underline{x} = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n \qquad \underline{y} = \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n$

$$\underline{e}_j^t \cdot \underbrace{A \cdot \underline{e}_k}_{\underline{c}_k} = a_{jk}$$

$$A = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \underline{r}_1 \\ \\ \underline{r}_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} \underline{c}_1 & \qquad & \underline{c}_n \end{array} & \end{array} \qquad \underline{e}_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \leftarrow k \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\underline{e}_j^t \cdot \underbrace{A^t \cdot \underline{e}_k}_{\underline{r}_k^t} = a_{kj}$$

$$(*) \Longrightarrow a_{jk} = a_{kj} \qquad j, k = 1, \dots, n$$

ovvero $A = A^t$ (cioè A è simmetrica)

e viceversa da (1)

Prop: $L : V \to V$, $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ è autoaggiunto se e solo se la matrice associata a L in una qualunque base ortonormale di V (stessa base in arrivo e in partenza) è simmetrica.

Teorema spettrale: $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sp. metrico

se $L : V \to V$ è autoaggiunto allora esiste una base ortonormale di V formata da autovettori di L

(in particolare L è diagonalizzabile)

OSS: se L è autoaggiunto e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$\lambda \neq \mu$ sono autovalori di L allora

$$V_\lambda \perp V_\mu$$

(cioè $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$ per ogni $\underline{v} \in V_\lambda$
$\underline{w} \in V_\mu$)

Dim: $\underline{v} \in V_\lambda$, $\underline{w} \in V_\mu$ $\quad L(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$, $\quad L(\underline{w}) = \mu \underline{w}$

$$\lambda \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \lambda \underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle L(\underline{v}), \underline{w} \rangle$$

$$\underset{L \text{ autoaggiunto}}{=} \langle \underline{v}, L(\underline{w}) \rangle = \langle \underline{v}, \mu \underline{w} \rangle$$

$$= \mu \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$$

$$\Rightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\neq 0} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0 \Rightarrow \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0$$

$\blacksquare$

OSS: $A^{n \times n}$ matrice diagonalizzabile.

Significa che esiste C $n \times n$ invertibile t.c.

$$C A C^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$A = C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} C$$

$$\det A = \det \left(C^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} C \right) \overset{\text{Binet}}{=}$$

$$\underbrace{\det(C^{-1})}_{= \frac{1}{\cancel{\det C}}} \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cancel{\det C}$$

$$= \det \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

ma $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono gli autovalori di A

Pertanto:

Se A è diagonalizzabile allora

$\det A$ = prodotto degli autovalori di A

- lineare dip./indip./basi
- formula di Grassmann
- operatori lineari (Ker, Im, teo della dimensione, matrice associata)
- sistemi lineari e interpretazione in termini di algebra lineare ($A_{m\times n} \rightsquigarrow L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)
  Rouché-Capelli
- det / matrici invertibili / rango / Cramer
- spazi metrici (prodotto scalare / Gram-Schmidt)

proiezioni ortogonali / somme dirette ortogonali
spazio ortogonale ad un sottospazio $U^\perp$

- spazi affini $(\mathbb{A}^2, \mathbb{A}^3)$
  - rette affini $\begin{cases} \text{eq. parametrica} \\ \text{eq. cartesiana} \end{cases}$
  - piani affini

  (distanze, parallelismo, ortogonalità)
  aree di triangoli $\leftrightarrow$ prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$

- Autovalori e autovettori (polinomio caratteristico e diagonalizzazione, teorema spettrale)

- $T: V \to W$ per ogni $\underline{v} \in V$ esiste un unico $\underline{w} \in W$ tale che $T(\underline{v}) = \underline{w}$.

è la definiz. di funzione
(no biunivoca
no iniettiva
no suriettiva)

biunivoca. iniettiva.

$\mathbb{A}^3$

- $S: \begin{cases} x = 1 + 3\lambda - 2\mu \\ y = 2 \\ z = 3 + 6\lambda - 4\mu \end{cases}$ $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

retta affine

$$\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right\} = TS$$

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} = 1$$

$$S: \begin{cases} x = 1 + 3\overbrace{\left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)}^{t} \\ y = 2 \\ z = 3 + 6\underbrace{\left(\lambda - \frac{2}{3}\mu\right)}_{t} \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$t = \lambda - \frac{2}{3}\mu$$

$$S: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 \\ z = 3 + 6t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\downarrow$ eq. cartesiane

$$t = \frac{x-1}{3}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ z = 3 + 2(x-1) \end{cases}$$

$\mathbb{A}^3$ $x = z$ piano eq. cartesiana

-

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

- $\begin{cases} x - 1 = z \\ y = 2x - z \end{cases}$ retta $\left[\begin{cases} z = x - 1 \\ y = x + 1 \end{cases}\right.$

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + 1 \\ z = \lambda - 1 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$x = z + 1 = \lambda$ $\quad \lambda = z + 1 \longrightarrow z = \lambda - 1$

$$y = 2x - z$$
$$2\lambda - \lambda + 1 = \lambda + 1$$

- $$\begin{cases} 2x + y - 3z = 2 \\ 6x + 3y - 3z = 6 \end{cases}$$

$\mathbb{A}^3$

<u>piano</u>: $3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

- A matrice $n \times n$

0 è un autovalore di A

A è invertibile ?

$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$\operatorname{Ker} L_A = V_0$ se 0 è autovalore $\iff \dim V_0 \geq 1$

$\Rightarrow \operatorname{Ker} L_A$ ha $\dim \geq 1 \Rightarrow L_A$ <u>non</u>

è iniettiva, quindi non è invertibile
e dunque A non è invertibile.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A è invertibile?

$\det A \neq 0$ $\underline{\text{sì}}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

EG $\quad R_3 \to R_3 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 \longrightarrow R_2 - R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 \longrightarrow R_1 + R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$n = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{tr} A = 1 + 1 = 2 \qquad \det A = -3$

troviamo gli autovalori di A

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda - \lambda_1)\cdot(\lambda - \lambda_2)$$

$$= \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) + \lambda_1\lambda_2$$

(polinomio caratteristico A $n \times n$

$$p_A(\lambda) = \lambda^n + \dots + (-\mathrm{tr}A)\lambda + \det A \;)$$

$\mathrm{tr}A$ = somma autovalori di A

$\det A$ = prodotto degli autovalori

$$\left[\ \mathrm{tr}(C^{-1}AC) = \mathrm{tr}A\ \right]$$