II appello 15/7/22 — Geometria e Algebra per Informatica
Prof. F. Bracci — A.A. 2021-22

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Siano v, w, u tre vettori non nulli di V.

(a) Se $\langle v, w \rangle = 0$ e $\langle v, u \rangle = 0$ allora $\dim \operatorname{span}\{v, w, u\} = 1$.
(b) Se $\dim \operatorname{span}\{v, w, u\} = 1$ allora $\langle v, w \rangle \neq 0$, $\langle u, w \rangle \neq 0$ e $\langle v, u \rangle \neq 0$.
(c) L'ortogonale a $\operatorname{span}\{v, w, u\}$ ha dimensione $n - 3$.
(d) Se u, w, u sono a due a due ortogonali allora $\operatorname{span}\{v, w, u\}$ ha dimensione 3.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ \log 145 & e^{34} & 0 \\ -25\pi & \sqrt{1456} & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per $\beta \neq 0$.
(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è 3 per $\beta = 1$.
(c) Per $\beta = 0$ e $\alpha \neq 0$ il sistema lineare omogeneo $(C^{-1}A_{\alpha,\beta}C)\underline{x} = \underline{0}$ ammette solo la soluzione nulla.
(d) Per $\alpha = 0$ e $\beta = 0$ la matrice $A_{\alpha,\beta}$ è invertibile.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, con $n, m \geq 1$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Per $\lambda \in \mathbb{R}$ l'operatore lineare $T_\lambda : V \to W$ definito da $T(v) = T(\lambda v)$ è lineare.
(b) Se $\dim \ker T > 0$ allora $\dim \operatorname{Im} T > 0$.
(c) Se $n = \dim \operatorname{Im} T$ allora T è suriettivo.
(d) Se T è iniettivo allora $n \leq m$.

Q4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare e sia $\underline{0}$ il vettore nullo di V.

(a) Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Se T non è suriettivo, allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che $\lambda_1 T(v_1) + \ldots + \lambda_n T(v_n) = \underline{0}$.
(b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è un autovalore di T, allora per ogni $v \in V$, $v \neq \underline{0}$, vale $T(v) = \lambda v$.
(c) Se esiste $\lambda \neq 0$ tale che $T(v) - \lambda v \neq \underline{0}$ per ogni $v \in V$, allora T è un isomorfismo.
(d) Se T non ha autovalori (reali) allora T è un isomorfismo.

Q5) Sia A una matrice 3×3 con entrate reali e siano c_1, c_2, c_3 i tre vettori (di $\mathbb{R}^3$) colonna di A.

(a) Se A ha determinante non nullo allora $\dim \operatorname{span}\{c_1, c_2, c_3\} = 3$.
(b) Se $\dim \operatorname{span}\{c_1, c_2\} = 2$ allora esiste almeno un minore 2×2 di A con determinante non nullo.
(c) Se $\det A = 0$ allora $\dim \operatorname{span}\{c_1, c_2\} = 1$ oppure $\dim \operatorname{span}\{c_1, c_3\} = 1$ oppure $\dim \operatorname{span}\{c_2, c_3\} = 1$.
(d) Se $\{c_1, c_2, c_3\}$ sono linearmente indipendenti allora 0 è una autovalore di A.

Q6) Siano $1 \leq n < m$. Sia A una matrice $m \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^m$. Sia A' la matrice $m \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$ allora b è il vettore nullo.
(b) Se il rango della matrice A' è m, allora il sistema lineare omogeneo $Ax = \underline{0}$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ha una unica soluzione [$\underline{0}$ è il vettore nullo in $\mathbb{R}^m$].
(c) Il sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$, non ammette mai una unica soluzione per ogni $1 \leq n < m$.
(d) Se il sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette una unica soluzione, allora il sistema $Ax = b$ ammette soluzione.

Q7) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 2\lambda - \mu, y = 0, z = \lambda - \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) S è una retta affine di equazione $x = 2z, x = z$.
(b) lo spazio ortogonale a TS è generato dal vettore $(0, -1, 0)$.
(c) Il punto $(\frac{2}{\log 45}, 0, \sqrt{65\pi})$ appartiene ad S.
(d) S è ortogonale al piano $y = 1$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta $x - y = 1$.

(a) La distanza di r da $(0, 0)$ è 1.
(b) l'equazione parametrica di r è $x = \lambda, y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) Siano s la retta ortogonale a r e passante per $(0, 0)$. L'equazione cartesiana di s è $2x + 2y = 0$.
(d) lo spazio ortogonale allo spazio tangente Tr è generato dal vettore $(1, 1)$.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Sia $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \rangle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

dove $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^2$.

(1) Provare che T è lineare.
(2) Determinare, in funzione di a e b, la dimensione di $\ker T$ e di $\mathrm{Im}\, T$ e, in caso di dimensioni positive, trovare una base di $\ker T$ e di $\mathrm{Im}\, T$.
(3) Determinare la matrice associata a T nella base canonica di $\mathbb{R}^2$ (in partenza e in arrivo).
(4) Per $a = b \neq 0$, determinare gli autovalori di T, una base degli autospazi associati e dire se T è diagonalizzabile.

(1) segue subito dal fatto che il prodotto scalare è bilineare, quindi lineare nella prima entrata.

(2) Poiché $\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \rangle = ax + by$ e $\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \rangle = bx + ay$,

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)(x+y) \\ (b-a)x + (a-b)y \end{pmatrix} \quad (A)$$

Pertanto per trovare il nucleo poniamo $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ovvero

$$\begin{pmatrix} (a+b)(x+y) \\ (b-a)x + (a-b)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{ovvero}$$

$$(*) \begin{cases} (a+b)(x+y) = 0 \\ (b-a)x + (a-b)y = 0 \end{cases}$$

distinguiamo alcuni casi:

i) $a+b \neq 0$, ovvero $a \neq -b$.

dalla prima equazione di $(*)$ si ha $y=-x$

e sostituendo nella seconda:

$2(b-a)x=0$.

a) se $b-a \neq 0$, ovvero $b \neq a$, allora $x=0$

e dunque essendo $y=-x$ si ha $y=0$,

ovvero, per $a \neq \pm b$ $\ker T = \{\underline{0}\}$ e,

dal teorema della dimensione, $\operatorname{Im} T = \mathbb{R}^2$.

b) se $a=b$ $(\neq 0)$ la $2(b-a)x=0$.

è soddisfatta per ogni x, pertanto

$\ker T = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y=-x \right\} =$

$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ e $\dim \ker T = 1$ e $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ è base.

$\dim \operatorname{Im} T = 1$ e una base è data

da un qualunque vettore di $\mathbb{R}^2$ non nullo

che appartiene a $\operatorname{Im} T$, ad esempio:

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a\\0\end{pmatrix}=2a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$ quindi:

per $a=b$: $\dim \ker T=\dim \operatorname{Im} T=1$,

$\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$ è base di $\ker T$

$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$ è base di $\operatorname{Im} T$

ii) $a+b=0$, ovvero $a=-b$ $(\neq 0)$

la prima equazione di $(*)$ è sempre soddisfatta e la seconda diventa:

$$-2ax+2ay=0, \quad \text{ovvero} \quad y=x.$$

da cui

$$\ker T=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \text{ t.c. } y=x\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\},$$

$\dim \ker T=\dim \operatorname{Im} T=1$, $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right\}$ è base di $\ker T$

e $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2a\end{pmatrix}=-2a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ è base di $\operatorname{Im} T$.

(3) dalla (A) si ottiene subito che la matrice associata a T nelle basi canoniche è

$$\begin{pmatrix} a+b & a+b \\ b-a & a-b \end{pmatrix}$$

(4) per $a=b$ la matrice associata a T di cui al punto (3) è

$$\begin{pmatrix} 2a & 2a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui si vede subito che gli autovalori sono 0 e $2a$.

Inoltre $V_0 = \operatorname{Ker} T = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$ (da (2))

mentre $V_{2a} = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$