A matrice $n \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A_{ij} = minore $(i;j)$ = matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta da A rimuovendo la i-ma riga e la j-ma colonna.

$$\boxed{\begin{aligned} \det A &= a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \det A_{11} + \cdots \\ &+ a_{1j} (-1)^{1+j} \det A_{1j} + \cdots + a_{1n} (-1)^{1+n} \det A_{1n} \end{aligned}}$$

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & & \\ + & & & & & \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

Sviluppo di Laplace:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1k} & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{j1} & a_{j2} \cdot & \vdots & \cdots a_{jn} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & - & a_{nk} \cdot & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\det A = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} + \cdots + (-1)^{j+m} a_{jm} \det A_{jm} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{j+n} a_{jn} \det A_{jn}$$

$j = 1, \ldots, n$ [sviluppo per righe]

$$\det A = (-1)^{1+k} a_{1k} \det A_{1k} + \cdots + (-1)^{m+k} a_{mk} \det A_{mk}$$
$$+ \cdots + (-1)^{n+k} a_{nk} \det A_{nk}$$

$k = 1, \ldots, n$ [sviluppo per colonne]

Esempio:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} + & - & + & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

sviluppiamo rispetto alla 3ª colonna

$$\det A = 0 \cdot \cancel{\det\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} + (-1)^{2+3} \cdot 1 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{+ (-1)^{3+3} \cdot 0 \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}} + (-1)^{4+3}\, \cancel{0 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = \cancel{1} + \cancel{2} + (\cancel{-2}) - (\cancel{-2}) - \cancel{2} - \cancel{1} = 0.$$

[⇒ i vettori colonna sono lin. dip. (vedi dopo)]

<u>OSS</u>: $(A^t)_{ij} = A_{ji}$

Quindi dallo sviluppo di Laplace per righe e per colonne:

$$\boxed{\det A = \det A^t}$$

Determinante e l'EG:

$\boxed{EG:}$

(1) $R_i \leftrightarrow R_j \qquad i \neq j$

(2) $R_i \to R_i + k R_j$

(3) $R_i \to k R_i \qquad k \neq 0.$

$$\det A := \det(\underline{r}_1, \_\_, \underline{r}_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \underline{r}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{pmatrix} \qquad \underline{r}_n = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Con (1) $\qquad A \xrightarrow[R_i \leftrightarrow R_j]{EG} A'$

$$\boxed{\det A = - \det A'}$$

$$\det A = \det(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_i, \dots, \underline{r}_j, \dots, \underline{r}_n)$$

$$\det A' = \det(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_j, \dots, \underline{r}_i, \dots, \underline{r}_n)$$

es: $i = 1 \quad j = 2$

$$\underset{\overset{\|}{\det A}}{\det(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \dots, \underline{r}_n)} = -\underset{\overset{\|}{\det A'}}{\det(\underline{r}_2, \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n)}$$

$i = 1 \quad j = 3$

$$\det(\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3, \dots, \underline{r}_n) \overset{\overset{\det A}{\|}}{} = -\det(\underline{r}_2, \underline{r}_1, \underline{r}_3, \dots)$$

$$= \det(\underline{r}_2, \underline{r}_3, \underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n) = -\underset{\overset{\|}{\det A'}}{\det(\underline{r}_3, \underline{r}_2, \underline{r}_1, \dots)}$$

Con (2) $\quad R_j \to R_j + k R_i$

$$A \xrightarrow[EG]{} A'$$

$$\det A = \det(\underline{r}_1, \dots, \underline{r}_n)$$

$$\det A' = \det(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_j + k\,\underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_n)$$

$$\underset{\text{multilineare}}{=} \det(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_j, \ldots, \underline{r}_n) + \underbrace{\det(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_i, \ldots, k\,\underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_n)}_{=0}$$

$$= \det(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n) = \det A$$

Con (2)

$$\boxed{\det A = \det A'}$$

Con (3) $\quad R_i \to k R_i \quad k \neq 0 \quad A \xrightarrow{(3)} A'$

$$\det A' = \det(\underline{r}_1, \ldots, k\,\underline{r}_i, \ldots, \underline{r}_n) \overset{\text{multilin.}}{=} k \det(\underline{r}_1, \ldots, \underline{r}_n) = k \det A$$

$$\boxed{\det A = \frac{1}{k} \det A'}$$

Corollario: se A è matrice $n \times n$ e S è la matrice triangolare superiore ottenuta da A tramite EG (1) e (2)

$$S = \begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$$

$$\det A = \pm \det S = \pm\, p_1 \cdots p_n$$

segno è + se il numero di scambi di righe è 0 o pari.

Dim: Abbiamo già visto che

$$\det A = \pm \det S$$

calcoliamo

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$$

Utilizziamo lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna:

$$\det\begin{pmatrix} p_1 & * & * & * \\ 0 & p_2 & * & \vdots \\ \vdots & 0 & p_3 & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & p_n \end{pmatrix} = p_1 \cdot \det\begin{pmatrix} p_2 & * & \cdots & * \\ 0 & p_3 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\text{Laplace}\\ \text{rispetto alla}\\ \text{prima colonna}}}{=} p_1 \cdot p_2 \det\begin{pmatrix} p_3 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & & & p_n \end{pmatrix} = \cdots = p_1 \cdots p_n$$

$\blacksquare$

Esempio:

Calcolare il determinante della matrice:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_1$

(il determin.$^{(2)}$ non cambia)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_2 \leftrightarrow R_3$

(il$^{(1)}$ determinante cambia segno)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to R_4 - \frac{1}{2} R_2$

($^{(2)}$ non cambia il det)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

$R_4 \to R_4 + \frac{1}{2} R_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \det A = -4$

Teorema (BINET)

Se A, B sono matrici $n \times n$

Allora
$$\boxed{\det(A \cdot B) = (\det A)(\det B)}$$

Dim (cenno)

se $\det B \neq 0$ definiamo

$$f(A) := \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)}$$

occorre provare che la funzione f è multilineare, alternante e $f(\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n) = 1$ (omesso). L'unicità della funzione determinante $\Rightarrow \det A = \dfrac{\det(AB)}{\det B}$.

OSS: [vedi più avanti]

Se $\det B = 0 \overset{\Rightarrow \operatorname{rg} B < n}{}$ allora esiste

$\underline{v} = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{v} \neq \underline{0}$ e $B \cdot \underline{v} = \underline{0}$.

data per buona l'osservazione,

se $\det B = 0$ allora esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$

t.c. $B\underline{v} = \underline{0}$ ma allora

$$(AB) \cdot \underline{v} = \underline{0} \quad , \quad \text{dunque}$$

$$\overset{\shortparallel}{A(B\underline{v})} = A \cdot \underline{0}$$

il sistema lineare omogeneo

$(AB)\underline{x} = \underline{0}$ ha soluzioni non nulle

pertanto $\operatorname{rg}(AB) < n$; (da Rouché Capelli)

$\Rightarrow rg((AB)^t) = rg(AB) < n$

$\Rightarrow$ i vettori colonne di $(AB)^t$ sono lin. dip. $\Rightarrow$ i vettori riga di AB sono lin. dip $\Rightarrow \det(AB) = 0$.

[<u>OSS</u>: Se $\det B = 0$ allora $\det(AB) = 0$ per ogni A]

Già visto:

- A matrice $n \times n$, $rg A < n$ $\Rightarrow \det A = 0$.
- A $n \times n$, $A \xrightarrow[(1)\text{ e }(2)]{EG} S$ matrice triangolare superiore

$$|\det A| = |\det S| = |p_1 \cdots p_n|$$

dove $S = \begin{pmatrix} p_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & p_n \end{pmatrix}$

$$\operatorname{rg} A = n \iff p_1 \neq 0, \dots, p_n \neq 0$$
$$\iff |p_1 \cdots p_n| \neq 0$$
$$\iff |\det A| \neq 0.$$

Oss: $\det A \neq 0 \iff \operatorname{rg} A = n \iff A$ invertibile

A $n \times n$

Corollario: se A $n \times n$ invertibile ($\iff \det A \neq 0$) allora

$$\boxed{\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}}$$

Dim: $I = A \cdot A^{-1}$

$$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{\det I} = \det(A \cdot A^{-1}) \underset{\text{Binet}}{=} (\det A)\cdot(\det A^{-1})$$

Corollario: TEOREMA DI CRAMER

Sia A $n \times n$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (*)$$

Se $\det A \neq 0$ allora l'unica soluzione del sistema lineare $(*)$ è data da

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

dove

$$v_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

$$B_j = \left(\underline{a}_1 \cdots \underline{a}_{j-1} \ \overset{\substack{j\text{-ma colonna} \\ \downarrow}}{\underline{b}} \ \underline{a}_{j+1} \cdots \underline{a}_n \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{a}_1 \qquad \underline{a}_n$$

Esempio:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -2$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det B_1 = -5$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \det B_2 = -1$$

la soluzione è $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ dove

$$v_1 = \frac{\det B_1}{\det A} = \frac{5}{2} \qquad v_2 = \frac{\det B_2}{\det A} = \frac{1}{2}$$

la soluzione è $x = \frac{5}{2}$ $y = \frac{1}{2}$

<u>Dim</u> (Cramer):

$$X_j = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_{j-1} \ \underline{v} \ \underline{e}_{j+1} \dots \underline{e}_n)$$

$$A X_j = (\underline{e}_1 \dots \underline{e}_{j-1} \ \overset{=\,b}{A \cdot \underline{v}} \ \underline{e}_{j+1} \dots \underline{e}_n)$$

$$= B_j \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\det(A \cdot X_j) = \det B_j$$

$\parallel$ Binet

$$(\det A)(\det X_j) \Longrightarrow \det X_j = \frac{\det B_j}{\det A}$$

$$\det X_j = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & 0 & b_j & & \vdots \\ 0 & 0 & b_n & & 1 \end{pmatrix} = b_j$$

/

Esercizio

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 & 0 \\ 0 & 1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & 1 \end{pmatrix} = b_3$$

Teorema degli orlati

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

calcolare il rango:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0$$

le sottomatrici ottenute "orlando"

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sono $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

entrambe con $\det = 0$

$\Rightarrow \operatorname{rg} A = 2$

<u>Teorema degli orlati</u>: A $m \times n$

allora $\mathrm{rg}\, A = k$ se esiste una sottomatrice B $k \times k$ di A ottenuta rimuovendo $m-k$ righe e $n-k$ colonne da A con $\det B \neq 0$, e ogni altra sottomatrice $(k+1) \times (k+1)$ contenente B (ed ottenuta da A rimuovendo $m-(k+1)$ righe e $n-(k+1)$ colonne) ha determinante 0.

<u>Es</u>

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

$\det = 2 \neq 0$

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ è contenuto in

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} = 0$$

$$\xRightarrow[\text{degli orlati}]{\text{teo}} \quad \operatorname{rg} A = 2.$$