III appello 6/9/22 — Geometria e Algebra per Informatica
Prof. F. Bracci — A.A. 2021-22

Nome e Cognome (in stampatello e leggibile): ____________________

PARTE I: Rispondere alle seguenti domande barrando con una crocetta tutte e sole le risposte ritenute corrette. *Non sono ammesse cancellature.* Ogni domanda contiene **almeno una (talvolta anche più di una!)** risposta corretta su 4 possibili scelte. Ogni quiz è considerato corretto se sono state indicate tutte e sole le risposte corrette.

Q1) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n, munito di un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e sia $L : V \to V$ una applicazione lineare. Siano v, u due vettori non nulli di V.

(a) Se $\{L(v), L(u)\}$ sono linearmente indipendenti, allora $\{v, u\}$ sono linearmente indipendenti.
(b) Se $\{v, u\}$ sono linearmente indipendenti, allora $\{L(v), L(u)\}$ sono linearmente indipendenti.
(c) Se $L(v), L(u)$ non sono nulli e $\langle L(v), L(u) \rangle = 0$ allora v, u sono ortogonali.
(d) Se $\langle v, u \rangle = 0$ allora $L(v), L(u)$ sono ortogonali.

Q2) Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Siano

$$A_{\alpha,\beta} := \begin{pmatrix} \alpha+\beta & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ \tan 45 & 1 & 0 \\ -25\pi & \sqrt{1456} & -3 \end{pmatrix}.$$

(a) La matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è invertibile per $\beta \neq 0$.
(b) Il rango di $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è sempre 3.
(c) Per $\alpha = \beta = 1$ la matrice $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ non è diagonalizzabile.
(d) Se $CA_{\alpha,\beta}C^{-1}$ è diagonalizzabile, allora non è invertibile.

Q3) Siano V, W due spazi vettoriali, $\dim V = n$ e $\dim W = m$, con $n, m \geq 1$. Sia $T : V \to W$ un operatore lineare.

(a) Per $\lambda \in \mathbb{R}$ l'operatore $T_\lambda : V \to W$ definito da $T(v) = \lambda T(\lambda v)$ è lineare.
(b) Se T è suriettiva, allora $n \geq m$.
(c) Se $n > m$ allora T è suriettiva.
(d) Se $n < m$ allora T è iniettiva.

Q4) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 2$. Sia $T : V \to V$ un operatore lineare e sia $\underline{0}$ il vettore nullo di V.

(a) Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Se T è suriettivo, allora non esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che $\lambda_1 T(v_1) + \ldots + \lambda_n T(v_n) = \underline{0}$.
(b) Se $v \neq \underline{0}$ è un autovettore di T, allora $\dim \ker T \geq 1$.
(c) Se T è un isomorfismo allora T è diagonalizzabile.
(d) Se 0 non è un autovalore di T allora T è suriettivo.

Q5) Sia A una matrice 3×3 non nulla con entrate reali e siano c_1, c_2, c_3 i tre vettori (di $\mathbb{R}^3$) colonna di A.

(a) Se $\dim \operatorname{span}\{c_1, c_2, c_3\} = 3$ allora A^t è invertibile.
(b) Se tutti i minori 2×2 di A hanno determinante non nullo, allora $\dim \operatorname{span}\{c_1, c_2, c_3\} = 3$.
(c) Se A è invertibile, allora $\{c_1, c_2, c_3\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.
(d) Se 0 è un autovalore di A allora $\{c_1, c_2, c_3\}$ sono linearmente indipendenti.

Q6) Siano $n \geq 1$. Sia A una matrice $n \times n$ e sia $b \in \mathbb{R}^n$. Sia A' la matrice $n \times (n+1)$ ottenuta aggiungendo la colonna b alla matrice A.

(a) Se A ha rango $k < n$ allora il sistema $Ax = b$ ammette $n - k$ soluzioni.
(b) Il rango della matrice A' è sempre uguale al rango di A.
(c) Se non esistono soluzioni al sistema $Ax = b$, per $x \in \mathbb{R}^n$ allora $\det A = 0$.
(d) Se il sistema $Ax = 0$, per $x \in \mathbb{R}^n$, ammette infinite soluzioni, allora il sistema $Ax = b$ ammette soluzione.

Q7) Nello spazio affine $\mathbb{A}^3$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortonormale con coordinate affini (x, y, z). Sia S l'insieme definito da $x = 2 + \lambda, y = 0, z = \lambda - \mu$ al variare di $\mu, \lambda \in \mathbb{R}$.

(a) S non contiene il punto $(\pi, 0, \sqrt{1345})$.
(b) lo spazio ortogonale a TS è generato dal vettore $(1, 0, 1)$.
(c) Il piano $y = 2$ è parallelo a S.
(d) S contiene la retta $x + y - z = 0, x - z = 0$.

Q8) Nel piano affine $\mathbb{A}^2$ sia fissato un sistema di riferimento affine ortogonale con coordinate affini (x, y). Sia r la retta $2x - y = 2$.

(a) r è ortogonale alla retta $2x + y = 2$.
(b) l'equazione parametrica di r è $x = 2 + 2\lambda, y = 2 + 4\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$.
(c) Siano s la retta ortogonale a r e passante per $(0,0)$. L'equazione cartesiana di s è $x + 2y = 0$.
(d) lo spazio ortogonale allo spazio tangente Tr è generato dal vettore $(1, 2)$.

PARTE II: Risolvere il seguente problema, scrivendo le soluzioni, ben motivate, sui fogli bianchi spillati alla fine del compito.

Siano Mat(2×2) lo spazio vettoriale delle matrici 2×2 con entrate reali e $\mathrm{Pol}_{\leq 3}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi in x di grado ≤ 3 con coefficienti reali. Sia $L : \mathrm{Mat}(2 \times 2) \to \mathrm{Pol}_{\leq 3}[x]$ definita da

$$L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a+d) + ax + (a-d)x^2 + (b+c)x^3.$$

(1) Provare che L è lineare.
(2) Determinare la dimensione di $\ker L$ e di $\mathsf{Im}\, L$ e trovare una base di $\ker L$ e di $\mathsf{Im}\, L$.
(3) Fissare una base di Mat(2×2) e una base di $\mathrm{Pol}_{\leq 3}[x]$ e determinare la matrice associata a L in tali basi.
(4) Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dire, motivando la risposta, se A o B possono essere matrici associate a L per una opportuna scelta di una base di Mat(2×2) e una base di $\mathrm{Pol}_{\leq 3}[x]$.

(1) si tratta di verificare che, date $A, B \in \mathrm{Mat}(2\times 2)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, vale

- $L(A+B) = L(A) + L(B)$
- $L(\lambda A) = \lambda L(A$

verifichiamo la prima, la seconda essendo simile.

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}$

$$L\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ \tilde{c} & \tilde{d} \end{pmatrix}\right) = L\begin{pmatrix} a+\tilde{a} & b+\tilde{b} \\ c+\tilde{c} & d+\tilde{d} \end{pmatrix} =$$

$$((a+\tilde{a}) + (d+\tilde{d})) + (a+\tilde{a})x + [(a+\tilde{a}) - (d+\tilde{d})]x^2 +$$

$$+ [(b+\tilde{b}) + (c+\tilde{c})]x^3 =$$

$$= \left[(a+d) + ax + (a-d)x^2 + (b+c)x^3\right] +$$

$$\left[(\tilde{a}+\tilde{d}) + \tilde{a}x + (\tilde{a}-\tilde{d})x^2 + (\tilde{b}+\tilde{c})x^3\right] = L(A) + L(B).$$

(2) $A \in \ker L \Rightarrow L(A) = \underline{0}$ ($\underline{0}$ = polinomio nullo, ovvero $\underline{0}(x) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$).

Dunque,

$A \in \ker L \Rightarrow$

$(a+d) + ax + (a-d)x^2 + (b+c)x^3 = \underline{0}$, ovvero

$$\begin{cases} a+d=0 \\ a=0 \\ a-d=0 \\ b+c=0 \end{cases}$$

da cui, $a=d=0$, $b=-c$. Pertanto,

$$\ker L = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ b \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ b \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

da cui segue che $\dim \mathrm{Ker} = 1$ e $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è una base di $\mathrm{Ker}\, L$.

Per il teorema della dimensione,

$$\underbrace{\dim \mathrm{Mat}(2\times 2)}_{\overset{\shortparallel}{4}} = \underbrace{\dim \mathrm{Ker}\, L}_{\overset{\shortparallel}{1}} + \dim \mathrm{Im}\, L$$

pertanto $\dim \mathrm{Im}\, L = 3$.

Per trovare una base, sappiamo che

$$\mathrm{Im}\, L = \mathrm{span}\left\{ L(E_1), L(E_2), L(E_3), L(E_4) \right\}$$

dove $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ è una base di $\mathrm{Mat}(2\times 2)$, ad esempio, $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$L(E_1) = 1 + x + x^2$

$L(E_2) = x^3$ (A)

$L(E_3) = x^3$

$L(E_4) = 1 - x^2$

Poichè $L(E_2) = L(E_3)$ e sappiamo che $\dim \operatorname{Im} L = 3$, abbiamo che

$\{1+x+x^2, x^3, 1-x^2\}$ è una base di $\operatorname{Im} L$.

(3) Nelle basi $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ di $Mat(2\times 2)$ e $\{1, x, x^2, x^3\}$ di $Pol_{\leq 3}[x]$, utilizzando (A) si ha che la matrice associata è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(4) Poichè $\dim \operatorname{Im} L = 3$, ne segue che il rango di ogni matrice associata a L (in qualunque base) ha rango 3. Ciò implica che B <u>non</u> può essere la matrice associata a L in alcuna base.

A invece ha rango 3. Abbiamo già visto che $\{L(E_1), L(E_2), L(E_4)\}$ sono una base di $\mathrm{Im}\, L$, mentre $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è base di $\mathrm{Ker}\, L$.

Pertanto, se $\mathcal{B} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{E_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{E_3}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$

e $\tilde{\mathcal{B}} = \{ \underbrace{1 + x + x^2}_{L(E_1)}, \underbrace{x^3}_{L(E_2)}, \underbrace{1 - x^2}_{L(E_3)}, p(x) \}$ con

$p(x)$ scelto in modo che $\tilde{\mathcal{B}}$ sia base di $\mathrm{Pol}_{\leq 3}[x]$, risulta che la matrice associata a L in $\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}}$ è A.