Logica e Reti Logiche
(Episodio 5: Correttezza e completezza del metodo dei *tableaux*)

Francesco Pasquale

30 marzo 2023

Nell'episodio precedente abbiamo introdotto il metodo dei *tableaux* e abbiamo descritto cosa vuol dire che una formula è *dimostrabile* tramite questo metodo. In questo episodio vedremo che tutte e sole le formule della logica proposizionale dimostrabili con il metodo dei *tableaux* sono le tautologie.

Per capire questi appunti è necessario conoscere il significato dei termini introdotti nell'Episodio 3 e bisogna aver acquisito una certa dimestichezza con il metodo dei *tableaux* (se siete in grado di risolvere facilmente tutti gli esercizi dell'Episodio 4, allora probabilmente avete acquisito una dimestichezza adeguata).

1 Insiemi soddisfacibili e correttezza del metodo

Diciamo che una formula $\mathcal{F}$ è *soddisfacibile* se esiste una interpretazione in cui è `T` (osservate che una formula è soddisfacibile se e solo se è o una tautologia o una contingenza). Diciamo che un insieme S di formule è soddisfacibile, se esiste una interpretazione in cui tutte le formule di S sono `T`.

Esercizio 1. Dire se il seguente insieme S di formule è soddisfacibile, motivando adeguatamente la risposta

$$S = \{p \to q,\ p \to \neg q,\ q \to p\}$$

Nell'episodio precedente abbiamo visto che una formula $\mathcal{F}$ della logica proposizionale può essere soltanto di due tipi: una α-formula o una β-formula (con una eccezione, l'equivalenza $\equiv$, che però abbiamo visto che può essere spezzata a sua volta in due formule, una di tipo β e una di tipo α)

α	α_1	α_2
$X \wedge Y$	X	Y
$\neg(X \vee Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$\neg(X \to Y)$	X	$\neg Y$

β	β_1	β_2
$X \vee Y$	X	Y
$\neg(X \wedge Y)$	$\neg X$	$\neg Y$
$X \to Y$	$\neg X$	Y

Se $\mathcal{F}$ è una α-formula (rispettivamente, β-formula) chiamiamo le formule α_1 e α_2 (rispettivamente, β_1 e β_2) le *componenti* della formula $\mathcal{F}$.

Esercizio 2. Sia S il seguente insieme di formule

$$S = \{\neg(p \vee q),\ p \to q\}$$

1. Verificare che S è soddisfacibile;
2. Osservare che la prima formula $[\neg(p \vee q)]$ è una α-formula, mentre la seconda $[p \to q]$ è una β-formula;
3. Verificare che l'insieme S' che otteniamo da S aggiungendo entrambe le componenti della α-formula è ancora soddisfacibile

$$S' = S \cup \{\neg p,\ \neg q\} = \{\neg(p \vee q),\ p \to q,\ \neg p,\ \neg q\}$$

4. Verificare che almeno uno dei due insiemi S'_1 e S'_2 che otteniamo da S aggiungendo rispettivamente la prima e la seconda componente della β-formula è soddisfacibile

$$\begin{array}{rcl} S'_1 & = & S \cup \{\neg p\} = \{\neg(p \vee q),\ p \to q,\ \neg p\} \\ S'_2 & = & S \cup \{q\} = \{\neg(p \vee q),\ p \to q,\ q\} \end{array}$$

Quello che abbiamo illustrato con un esempio nell'esercizio precedente. Vale in realtà in generale.

Esercizio 3. Sia S un insieme soddisfacibile e sia $\mathcal{F} \in S$ una formula. Dimostrare che

1. Se $\mathcal{F}$ è una α-formula, l'insieme $S' = S \cup \{\alpha_1, \alpha_2\}$ è ancora soddisfacibile.
2. Se $\mathcal{F}$ è una β-formula, almeno uno dei due insiemi $S'_1 = S \cup \{\beta_1\}$ e $S'_2 = S \cup \{\beta_2\}$ è soddisfacibile.

Ricordiamo che con il metodo dei *tableaux* quello che facciamo è costruire una sequenza $T_0, T_1, T_2, \ldots$ di *tableaux*, in cui ogni T_i è ottenuto "estendendo" il precedente T_{i-1} tramite una "regola α" o una "regola β"

$$\begin{array}{ccc} \text{Regola } \alpha & \qquad & \text{Regola } \beta \\ \dfrac{\alpha}{\begin{array}{c}\alpha_1\\ \alpha_2\end{array}} & & \begin{array}{ccc} & \beta & \\ \swarrow & & \searrow \\ \beta_1 & & \beta_2 \end{array} \end{array}$$

a seconda che la formula che si sta espandendo sia una α-formula o una β-formula.

Per esempio, con riferimento al caso visto in dettaglio nella prima parte dell'episodio precedente, dove abbiamo applicato il metodo dei *tableaux* alla formula $\mathcal{F} = ((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee (q \to r))$, il primo *tableau* T_0 è la negazione di $\mathcal{F}$

$$\neg\,[((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee (q \to r))] \qquad (1)$$

Siccome la (1) è una α-formula, T_1 è ottenuto estendendo T_0 tramite una regola α

$$\underline{\neg\,[((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee (q \to r))]} \qquad (1)$$

$$\begin{array}{cc} (p \wedge q) \to r & \quad (2) \\ \neg\,(\neg p \vee (q \to r)) & \quad (3) \end{array}$$

Siccome la (2) è una β-formula, T_2 è ottenuto estendendo T_1 tramite una regola β

$$
\begin{array}{c}
\underline{\neg\left[((p \wedge q) \to r) \to (\neg p \vee (q \to r))\right]} \qquad (1) \\
\\
\underline{(p \wedge q) \to r} \qquad (2) \\
\neg\left(\neg p \vee (q \to r)\right) \qquad (3) \\
\swarrow \qquad\qquad \searrow \\
\neg(p \wedge q) \quad (4) \qquad\qquad r \quad (5)
\end{array}
$$

Ad ogni "ramo" θ di un *tableau* possiamo associare l'insieme S_θ di tutte le formule che compaiono su quel ramo. Per esempio, nel *tableau* qui sopra ci sono due rami, uno contiene le formule $(1), (2), (3)$ e (4), l'altro contiene le formule $(1), (2), (3)$ e (5).

Diciamo che un ramo θ è soddisfacibile se l'insieme S_θ delle sue formule è soddisfacibile. Diciamo che un *tableau* T è soddisfacibile, se almeno uno dei suoi rami è soddisfacibile.

Esercizio 4. Dimostrare che se T è un *tableau* soddisfacibile e T' è ottenuto da T applicando una regola α o una regola β, allora anche T' è soddisfacibile.

Diciamo che un ramo è *chiuso* se contiene sia una formula $\mathcal{F}$ sia la sua negata $\neg\mathcal{F}$. In caso contrario diciamo che è *aperto*. Diciamo che un *tableau* è chiuso se tutti i suoi rami sono chiusi.

Esercizio 5. Osservare che un tableau chiuso non è soddisfacibile.

Ricordiamo che una formula $\mathcal{F}$ si dice *dimostrabile* con il metodo dei *tableaux* se c'è un *tableau* T chiuso per $\neg\mathcal{F}$. In questo caso diciamo anche che il *tableau* T è una *dimostrazione* di $\mathcal{F}$ e che $\mathcal{F}$ è un *teorema* nel sistema dei *tableaux*.

A questo punto possiamo facilmente dimostrare che ogni formula della logica proposizionale dimostrabile col metodo dei *tableaux* è una tautologia.

Teorema 1.1 (Correttezza)**.** Se $\mathcal{F}$ è dimostrabile con il metodo dei *tableaux* allora è una tautologia.

Dimostrazione. Se $\mathcal{F}$ non fosse una tautologia, allora $\neg\mathcal{F}$ sarebbe soddisfacibile. Quindi ogni *tableau* che si ottiene da $\neg\mathcal{F}$ dovrebbe essere soddisfacibile (per l'Esercizio 4). Ma questo è assurdo perchè per ipotesi $\mathcal{F}$ è dimostrabile col metodo dei *tableaux*, quindi c'è un *tableau* chiuso per $\neg\mathcal{F}$. $\square$

2 Insiemi di Hintikka e completezza del metodo

Per dimostrare la correttezza del metodo abbiamo usato la definizione di insiemi di formule soddisfacibili. Per dimostrarne la completezza introduciamo un'altra classe di insiemi di formule, che chiamiamo *insiemi di Hintikka* dal nome del filosofo che li ha utilizzati per primo.

Definizione 2.1 (Insiemi di Hintikka)**.** Un insieme di formule S per cui valgono le tre proprietà seguenti si chiama insieme di Hintikka:

H_0 : S non contiene sia una variabile p che la sua negata $\neg p$;

H_1 : Se S contiene una α-formula, allora S contiene anche entrambe le sue componenti α_1 e α_2;

H_2 : Se S contiene una β-formula allora S contiene anche almeno una delle sue componenti β_1 e β_2.

Esercizio 6. Dimostrare che se S è un insieme di Hintikka allora S è soddisfacibile. *(Suggerimento: Se in S compare una variabile p assegnarle valore* T*, se compare $\neg p$, assegnarle valore* F*. Dimostrate, per induzione sul numero di simboli delle formule, che tutte le formule in S sono soddisfatte da questa assegnazione di verità)*

Diciamo che un *tableau* è *completo* se è chiuso, oppure se ogni formula $\mathcal{F}$ (che non sia una variabile o una variabile negata) sui rami aperti del tableau è stata espansa. Per esempio, il *tableau* in alto nella pagina precedente non è completo, perché le formule (3) e (4) non sono state espanse.

Esercizio 7. Sia T un tableaux completo che non è chiuso, sia θ un ramo aperto e sia S_θ l'insieme delle formule sul ramo θ. Dimostrare che S è un insieme di Hintikka.

A questo punto abbiamo tutto quello che ci serve per dimostrare che ogni tautologia è dimostrabile col metodo dei *tableaux*.

Teorema 2.2 (Completezza)**.** Se $\mathcal{F}$ è una tautologia allora è dimostrabile con il metodo dei *tableaux*.

Dimostrazione. Se non fosse dimostrabile allora partendo da $\neg\mathcal{F}$ ed espandendo tutte le formule si otterrebbe un *tableau* completo con almeno un ramo aperto θ. L'insieme delle formule sul ramo θ quindi sarebbe un insieme di Hintikka (per l'Esercizio 7). Ma ogni insieme di Hintikka è soddisfacibile (per l'Esercizio 6). Quindi in particolare sarebbe soddisfacibile la formula $\neg\mathcal{F}$, che è assurdo perché per ipotesi $\mathcal{F}$ è una tautologia. □

3 Conclusioni

L'insieme delle tautologie è definito in termini *semantici* (una tautologia è una formula "vera" in ogni interpretazione). In questo episodio abbiamo analizzato il metodo dei *tableaux* e abbiamo visto che, facendo soltanto operazioni *sintattiche* sulle formule (applicazioni delle regole α e β), ci consente di decidere se una data formula è una tautologia oppure no. Perchè questo è importante per noi informatici? Beh, osservate che è difficile spiegare a un computer come distinguere ciò che è vero da ciò che è falso, ma è facile fargli eseguire delle istruzioni. . .

Il metodo dei *tableaux* è un metodo di *refutazione*: per dimostrare che $\mathcal{F}$ è una tautologia, partiamo da $\neg\mathcal{F}$ e verifichiamo che non è soddisfacibile (si noti l'analogia con le *dimostrazioni per assurdo*).

Bonus Track

Il metodo dei *tableaux* non è l'unico metodo automatico che ci consente di decidere se una formula X è una tautologia. Vediamone sinteticamente un altro, che si applica a formule X in *forma normale.*

A Forme normali e il metodo *resolution*

Una formula si dice in *forma normale congiuntiva (CNF)*[1] se è una congiunzione di *clausole disgiuntive* (dette anche semplicemente *clausole*) $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ dove ogni clausola è una disgiunzione di *letterali* $D_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \cdots \vee \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r)$$

è in forma normale congiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente[2] a X in forma normale congiuntiva.

Esercizio 8. Trovare un metodo che, data una formula X, vi consenta di trovare una formula Y in forma normale congiuntiva equivalente a X.

Resolution. Considerate il seguente metodo che trasforma una formula $D_1 \wedge D_2 \wedge \cdots \wedge D_n$ in forma normale congiuntiva in una nuova formula in forma normale congiuntiva (oppure la lascia com'è):

1. Eliminate ogni clausola D_i che contiene sia una variablile x che la sua negata $\neg x$;

2. Per ogni coppia di clausole D_i e D_j in cui una contiene una variabile x e l'altra contiene la sua negata $\neg x$ aggiungete una nuova clausola $Z_{i,j;x}$ con tutti i letterali in D_i e D_j esclusi x e $\neg x$. Per esempio, se $D_i = (p \vee \neg q \vee r)$ e $D_j = (p \vee q \vee \neg s)$, siccome in D_i compare $\neg q$ e in D_j compare q dovete aggiungere la clausola $(p \vee r \vee \neg s)$;[a]

3. Eliminate tutte le clausole D_i, D_j coinvolte nel punto precedente.

[a](Nota bene: questo significa anche che, se per esempio $D_i = (p)$ e $D_j = (\neg p)$, dovete aggiungere una clausola () *vuota*)

Esercizio 9. Sia X una formula in forma normale congiuntiva e sia Y la formula ottenuta da X eseguendo i punti 1, 2 e 3 qui sopra. Dimostrare che X è soddisfacibile[3] se e soltanto se Y è soddisfacibile.

[1] *Conjunctive Normal Form*

[2] Ricorda che in logica proposizionale due formule X e Y sono *equivalenti* se hanno la stessa tabella di verità

[3] Ricorda che una formula si dice *soddisfacibile* se esiste almeno una interpretazione che la rende vera

Esercizio 10. Prendete una formula X in forma normale congiuntiva, costruire la formula X_1 ottenuta applicando i tre punti di *Resolution* a X, poi X_2 ottenuta applicando *Resolution* a X_1 e così via fino a raggiungere una formula X_k che non viene più modificata da *Resolution*. In quali casi arrivate ad ottenere almeno una clausola vuota? Che cosa potete concludere sulla formula X di partenza quando durante queste iterazioni arrivate ad ottenere una formula che contiene una clausola vuota?

Una formula si dice in *forma normale disgiuntiva (DNF)*[4] se è una disgiunzione di *clausole congiuntive* $C_1 \vee C_2 \vee \cdots \vee C_n$ dove ogni clausola è una congiunzione di *letterali* $C_i = \ell_{i,1} \wedge \ell_{i,2} \wedge \cdots \wedge \ell_{i,k_i}$ e ogni letterale è una variabile oppure una variabile negata. Per esempio,

$$(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r)$$

è in forma normale disgiuntiva. Data una formula X esiste sempre una formula Y equivalente a X in forma normale disgiuntiva.

Esercizio 11. Trovare un metodo che, data una formula X, vi consenta di trovare una formula Y in forma normale disgiuntiva equivalente a X.

Esercizio 12. Riflettere sulla relazione che c'è fra il metodo dei *tableaux* e la forma normale disgiuntiva.

[4] *Disjunctive Normal Form*