AUTOVALORI E AUTOVETTORI

V spazio vettoriale

$L : V \longrightarrow V$ lineare

Def: un vettore $\underline{v} \neq \underline{0}$ si dice un **autovettore** per L se esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$L(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$$

il numero λ si dice un **autovalore** di L

[in altri termini $\lambda \in \mathbb{R}$ si dice un **autovalore** di L se esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$ tale che $L(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$]

Def: sia $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{V_\lambda := \{ \underline{v} \in V \text{ tali che } L(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \}}$$

$\underline{\text{OSS}}$: • $\underline{0} \in V_\lambda$ per ogni λ

• V_λ è un sottospazio di V

$\underline{\text{dim}}$: V_λ è chiuso rispetto alla $\underline{\text{somma}}$ e al prodotto per uno scalare.

$$\underline{v}, \underline{w} \in V_\lambda \overset{?}{\Longrightarrow} \underline{v} + \underline{w} \in V_\lambda$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \downarrow$$

$$L(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \qquad\qquad L(\underline{v}+\underline{w}) \overset{?}{=} \lambda(\underline{v}+\underline{w})$$

$$L(\underline{w}) = \lambda \underline{w} \qquad\qquad \| \; L \text{ lineare}$$

$$L(\underline{v}) + L(\underline{w}) =$$

$$= \lambda \underline{v} + \lambda \underline{w} =$$

$$= \lambda(\underline{v}+\underline{w}). \qquad \blacksquare$$

$\underline{\text{OSS}}$:

- se λ è autovalore di L, esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $L(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \Rightarrow \underline{v} \in V_\lambda$
$\Rightarrow \dim V_\lambda \geq 1$
- viceversa, se $\dim V_\lambda \geq 1$ allora esiste $\underline{v} \neq \underline{0}$ t.c. $\underline{v} \in V_\lambda$ cioè $L(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$ e quindi λ è autovalore per L.

$$\boxed{\begin{gathered} \lambda \in \mathbb{R} \text{ è autovalore di } L \\ \Updownarrow \\ \dim V_\lambda \geq 1 \end{gathered}}$$

Inoltre $\underline{v} \neq \underline{0}$ è un autovettore di L (con autovalore λ, $L(\underline{v}) = \lambda \underline{v}$)

se e solo se $\underline{v} \in V_\lambda$.

DEF: Se $\dim V_\lambda \geq 1$ allora V_λ si dice un autospazio di L

Esempio: • $id: V \to V$

$\lambda = 1$ è l'unico autovalore di id

e $V_1 = V$

(perché per ogni $\underline{v} \in V$ $id(\underline{v}) = \underline{v}$)

• se L non è iniettiva (equivalentem. L non è suriettiva / L non è isomorfismo)

[$L: V \to V$ teo delle dim:
$\dim V = \dim \mathrm{Ker}\, L + \mathrm{rg}\, L$]

allora 0 è un autovalore di L

e $\quad V_0 = \operatorname{Ker} L$

$\Big[$ L non iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\dim \operatorname{Ker} L > 0$

$\operatorname{Ker} L = \{ \underline{v} \in V \text{ t.c. } L(\underline{v}) = \underline{0} = 0 \cdot \underline{v} \}$

$= V_0$ $\Big]$

Prop: se $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq \mu$ allora

$$V_\lambda \cap V_\mu = \{ \underline{0} \}$$

Dim: Sia $\underline{v} \in V_\lambda \cap V_\mu$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \underline{v} \in V_\lambda}}{\lambda \underline{v} =} L(\underline{v}) \underset{\substack{\uparrow \\ \underline{v} \in V_\mu}}{=} \mu \underline{v}$$

$\Longrightarrow \lambda \underline{v} = \mu \underline{v}$ cioè $(\overbrace{\lambda - \mu}^{\neq 0}) \cdot \underline{v} = \underline{0}$

$\Rightarrow \underline{v} = \underline{0}$ ■

DEF: $L : V \longrightarrow V$ lineare, (V sp. vettoriale $\dim V = n$) L si dice **diagonalizzabile** se esiste una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V **composta da autovettori** di L, ovvero

$$L(\underline{v}_j) \in \operatorname{span}\{\underline{v}_j\} \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\Updownarrow$$

$$L(\underline{v}_j) = \lambda \underline{v}_j \quad \text{per qualche } \lambda \in \mathbb{R}$$

PROP

L è diagonalizzabile se e solo se detti $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ gli autovalori di L risulta

$$V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_m} = V$$

equivalentemente

$$\dim V_{\lambda_1} + \ldots + \dim V_{\lambda_m} = n$$

ES: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\underline{x} \longmapsto A \cdot \underline{x}$$

determinare autovalori e autospazi di L_A e dire se L_A è diagonalizzabile.

$\lambda \in \mathbb{R}$ autovalore se esiste $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$
$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ t.c.

$$L_A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ ovvero

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y \\ 2y \\ -z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ 2y = \lambda y \\ \underbrace{-z = \lambda z} \end{cases}$$

- se $\underbrace{\lambda = -1}$

$-z = -z$

$$\begin{cases} 2x+y=-x \\ 2y=-y \\ -z=-z \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=z \end{cases}$$

$\lambda=-1$ è autovalore $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ è autovettore

$$V_{-1} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- se $\lambda = 2$

$$\begin{cases} 2x+y=2x \\ 2y=2y \\ -z=2z \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ y=y \\ z=0 \end{cases}$$

$\lambda = 2$ è autovalore e $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è autovettore

$$V_2 = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

- se $\lambda \neq -1, 2$

$$\begin{cases} 2x + y = \lambda x \\ 2y = \lambda y \\ -z = \lambda z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = \lambda x \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

ovvero $\lambda \neq -1, 2$ non è autovalore

$\dim V_{-1} = 1$

$\dim V_2 = 1$

$1 + 1 \neq 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow L_A$ <u>non</u> è diagonalizzabile.

ES: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad L_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

determinare autovalori e autospazi e dire se è diagonalizzabile.

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = \lambda x \\ 2x - y = \lambda y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1-\lambda) x + 2y = 0 \\ 2x + (-1-\lambda) y = 0 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix}$$

Per Rouché–Capelli questo sistema

lineare ammette la sola soluzione $x=y=0$ quando la matrice incompleta del sistema ha rango massimo ovvero determinante $\neq 0$.

Pertanto a noi interessano i $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\shortparallel$$

$$(1-\lambda)(-1-\lambda) - 4$$

$$\shortparallel$$

$$(\lambda-1)(\lambda+1) - 4$$

$$\lambda^2 - 1 - 4$$

$$\lambda^2 - 5 = 0 \qquad \lambda = \pm\sqrt{5}$$

gli autovalori di L_A sono $\sqrt{5}$ e $-\sqrt{5}$

per calcolare gli autospazi:

- $\lambda = \sqrt{5}$

$$\begin{cases} (1-\lambda)x + 2y = 0 \\ 2x + (-1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} (1-\sqrt{5})\,x + 2y = 0 \\ 2x - (1+\sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}\,y \\ \underbrace{-\dfrac{4}{1-\sqrt{5}}\,y - (1+\sqrt{5})\,y = 0}_{} \end{cases}$$

$$\left[\frac{-4-(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})}{1-\sqrt{5}}\right] y = 0$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\overset{\shortparallel}{0}}$$

$$\begin{cases} x = -\dfrac{2}{1-\sqrt{5}}\, y \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$V_{\sqrt{5}} = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} \frac{-2}{1-\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$-\lambda = -\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} (1+\sqrt{5})x + 2y = 0 \\ 2x - (1-\sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{-2}{1+\sqrt{5}}\, y \\ \underbrace{\dfrac{-4}{1+\sqrt{5}}\, y - (1-\sqrt{5})\, y}_{0=0} = 0 \end{cases}$$

$$V_{-\sqrt{5}} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim V_{\sqrt{5}} = 1$$

$$\dim V_{-\sqrt{5}} = 1$$

$$1+1 = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow L_A$ è diagonalizzabile

una base di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di L_A è:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice associata a L_A nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ è:

$$L_A \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{5} \begin{pmatrix} -\frac{2}{1-\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L_A \begin{pmatrix} \frac{-2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix} = -\sqrt{5} \begin{pmatrix} -\frac{2}{1+\sqrt{5}} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Quindi la matrice associata a L_A in $\mathcal{B}, \mathcal{B}$ è:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & -\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

OSS: se $L: V \to V$ è diagonalizzabile e B è una base di V composta dai autovettori di L allora la matrice associata a L nella B, B è una matrice diagonale.

$$L(\underline{v}_1) = \lambda_1 \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \, \underline{v}_n$$

$$\vdots$$

$$L(\underline{v}_n) = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

$$B = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$$

$$\to \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Sia $L : V \longrightarrow V$ fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ di V

sia A la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}, \mathcal{B}$

$$\boxed{P_L(\lambda) := \det(A - \lambda \cdot I)}$$

$P_L(\lambda)$ è un polinomio in λ di grado n

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$P_L(\lambda) = \det \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & \cdots & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

$p_L(\lambda)$ si dice il polinomio caratteristico di L

OSS: se $\mathcal{B}' = \{\underline{\tilde{v}}_1, ---, \underline{\tilde{v}}_n\}$ è un'altra base di V allora la matrice $\tilde{A}$ associata a L nella basi $\mathcal{B}', \mathcal{B}'$ è

$$\boxed{\tilde{A} = C^{-1} A C}$$

[C = matrice di cambiam. di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

dunque

$$\det(\tilde{A}-\lambda I) = \det(C^{-1}AC-\lambda I)$$

$$= \det(C^{-1}AC-\lambda C^{-1}C) =$$

$$= \det[C^{-1}(AC-\lambda C)]$$

$$= \det[C^{-1}(A-\lambda I)C]$$

$$\overset{\text{Binet}}{=} (\det C^{-1}) \cdot \det(A-\lambda I)(\det C)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\det C}} \cdot \det(A-\lambda I) \cdot \cancel{(\det C)}$$

$$= \det(A-\lambda I).$$

Gli autovalori di L sono tutte e sole le radici di p_L

$\underline{v} \neq \underline{0} \longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ è un autovettore

per L con autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ se

e solo se

$$L(\underline{v}) = \lambda \underline{v} \iff A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\iff (A - \lambda I) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

per Rouché-Capelli $\iff$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$p_L(\lambda) = 0$$

DEF: λ_1 autovalore per L

- la molteplicità algebrica $^{ma(\lambda_1)}$ di λ_1 è la molteplicità di λ_1 come radice di $p_L(\lambda)$

[se $p_L(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^m \cdot q(\lambda)$ con $q(\lambda_1) \neq 0$ allora moltep. algebrica è m]

- la molteplicità geometrica $^{mg(\lambda_1)}$ di λ_1 è $\dim V_{\lambda_1}$

- $mg(\lambda_1) \leq ma(\lambda_1)$

- L è diagonalizzabile se e solo se
($\lambda_1, \dots, \lambda_m$ autovalori)

$$ma(\lambda_1) + \dots + ma(\lambda_m) = n$$

e $ma(\lambda_j) = mg(\lambda_j)$