PROPOSIZIONE

Sia $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ una v.a. m-dimensionale con densità congiunta $p_{\underline{X}}$ e con densità marginali $p_{X_1}, \dots, p_{X_m}$. Allora, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$, si ha

$$p_{X_i}(x_i) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$$

lettere minuscole

Quando si scrive $\underline{x}$ si pensa a $\underline{x} = (x_1, \dots, x_m)$ dove la coordinata i-sima x_i coincide con questo

Quindi, nota la congiunta, abbiamo una formula che consente di ottenere ciascuna delle m marginali.

DIMOSTRAZIONE

L'insieme $S_{\underline{X}}$ è al più numerabile e quindi si ha un'unione al più numerabile di eventi disgiunti a due a due

Per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ si ha

lettere minuscole

$$p_{X_i}(x_i) = P(X_i = x_i) = P\left(\bigcup_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} \{\underline{X} = \underline{x}\}\right) = P\left(\bigcup_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} \left(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_m = x_m\}\right)\right) =$$

$$= \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} P(\{X_1 = x_1\} \cap \dots \cap \{X_m = x_m\}) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} P(\underline{X} = \underline{x}) = \sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x}).$$

Ora presentiamo due diverse densità congiunte m-dimensionali, in particolare con $m = 2$, per cui si ha

$$\begin{cases} \text{"}p_{X_1}\text{ della 1ª congiunta" coincidente con "}p_{X_1}\text{ della 2ª congiunta"} \\ \text{"}p_{X_2}\text{ della 1ª congiunta" coincidente con "}p_{X_2}\text{ della 2ª congiunta".} \end{cases}$$

In entrambi i casi avremo $n=2$ (come anticipato)

$$S_{\underline{X}} = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}.$$

CONGIUNTA N. 1: $p_{\underline{X}}(0,0) = p_{\underline{X}}(0,1) = p_{\underline{X}}(1,0) = p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{4}$.

<u>oss</u>, È ben posta.

MARGINALI

$$\begin{bmatrix} p_{X_1}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) + p_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,0) + p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_{X_2}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) + p_{\underline{X}}(1,0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ p_{X_2}(1) = p_{\underline{X}}(0,1) + p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Quindi le marginali di X_1 e X_2 coincidono, cioè si ha $p_{X_1} = p_{X_2}$.

Inoltre in entrambi i casi si ha la distribuzione Bernoulliana di parametro $p = \frac{1}{2}$.

CONGIUNTA N. 2: $p_{\underline{X}}(0,0) = p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{3}$ e $p_{\underline{X}}(1,0) = p_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{6}$.

OSS. È ben posta.

MARGINALI

$$\begin{bmatrix} p_{X_1}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) + p_{\underline{X}}(0,1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \dots = \frac{1}{2} \\ p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,0) + p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} p_{X_2}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) + p_{\underline{X}}(1,0) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \dots = \frac{1}{2} \\ p_{X_2}(1) = p_{\underline{X}}(0,1) + p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \dots = \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Quindi abbiamo le stesse marginali che avevamo ottenuto con la congiunta precedente.

In conclusione abbiamo ottenuto ciò che volevamo: due scelte diverse per $p_{\underline{X}}$ per cui si ha

"p_{X_i} della 1ª congiunta" coincide con "p_{X_i} della 2ª congiunta" $\forall i = 1, \dots, n$.

(Poi nel caso specifico, dove $n = 2$, per entrambe le congiunte si ha $p_{X_1} = p_{X_2}$; questo non era richiesto).

Ora presentiamo un altro concetto collegato a questi argomenti.

DEFINIZIONE

Una famiglia finita di v.a. discrete $X_1, \dots, X_n$, con $n \geq 2$, è una famiglia di v.a. indipendenti se

$$\forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R} \quad P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_n \in A_n\}) = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_n \in A_n).$$

Una famiglia infinita di v.a. discrete è una famiglia di v.a. indipendenti se questo accade per qualsiasi sottofamiglia finita.

PROPOSIZIONE

Sia $X_1, \dots, X_m$, con $m \geq 2$, una famiglia finita di v.a. indipendenti.

Allora, per ogni $A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R}$, gli eventi $\{X_1 \in A_1\}, \dots, \{X_m \in A_m\}$ sono eventi indipendenti.

DIMOSTRAZIONE

$\forall \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$ con $k \geq 2$ si deve avere

$$P(\{X_{i_1} \in A_{i_1}\} \cap \dots \cap \{X_{i_k} \in A_{i_k}\}) = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdots P(X_{i_k} \in A_{i_k}).$$

Si vede subito che questo è vero se $k = m$ e quindi $\{i_1, \dots, i_k\} = \{1, \dots, m\}$.

Vediamo cosa succede nel caso in cui $2 \leq k \leq m-1$.

Sia $\{j_1, \dots, j_{m-k}\}$ il complementare di $\{i_1, \dots, i_k\}$; quindi

$$\underbrace{\{i_1, \dots, i_k\} \cup \{j_1, \dots, j_{m-k}\}}_{\text{intersezione vuota}} = \{1, \dots, m\}.$$

Allora

$$P(\{X_{i_1} \in A_{i_1}\} \cap \dots \cap \{X_{i_k} \in A_{i_k}\}) = P(\{X_{i_1} \in A_{i_1}\} \cap \dots \cap \{X_{i_k} \in A_{i_k}\} \cap \overbrace{\{X_{j_1} \in \mathbb{R}\}}^{=\Omega} \cap \dots \cap \overbrace{\{X_{j_{m-k}} \in \mathbb{R}\}}^{=\Omega})$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{per indip.} \\ \text{delle v.a.}}}{=} P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(X_{i_k} \in A_{i_k}) \underbrace{P(X_{j_1} \in \mathbb{R})}_{=P(\Omega)=1} \cdot \ldots \cdot \underbrace{P(X_{j_{m-k}} \in \mathbb{R})}_{=P(\Omega)=1} = P(X_{i_1} \in A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(X_{i_k} \in A_{i_k}),$$

che è l'uguaglianza desiderata. ∎

Ora presentiamo una condizione necessaria e sufficiente per l'indipendenza di famiglie finite di v.a. discrete.

PROPOSIZIONE

Sia $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ una v.a. m-dimensionale, con $m \geq 2$. Allora

lettere minuscole

$X_1, \dots, X_m$ è una famiglia di v.a. discrete indipendenti $\iff$ $p_{\underline{X}}(x_1, \dots, x_m) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_m}(x_m)$.

$\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$

COMMENTO: la congiunta è il prodotto delle marginali

DIMOSTRAZIONE

$(\Longrightarrow)$ Consideriamo la definizione di famiglia di v.a. indipendenti scegliendo, $\forall (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$,

$A_1 = \{x_1\}, \dots, A_m = \{x_m\}$. Allora, poiché si ha

lettere minuscole

$$\underbrace{P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\})}_{= P(\underline{X} = \underline{x}) = p_{\underline{X}}(\underline{x})} = \underbrace{P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_m \in A_m)}_{= P(X_1 = x_1) \cdots P(X_m = x_m) = p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_m}(x_m)},$$

abbiamo quanto desideravamo.

($\Leftarrow$) Supponiamo che la densità congiunta è uguale al prodotto delle densità marginali.

Allora $(\forall A_1, \dots, A_m \subset \mathbb{R})$

$$P(\{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_m \in A_m\}) = P((X_1, \dots, X_m) \in A_1 \times \dots \times A_m) =$$

$$= \sum_{\underline{x} \in (A_1 \times \dots \times A_m) \cap S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) = \sum_{\underline{x} \in (A_1 \times \dots \times A_m) \cap S_{\underline{X}}} p_{X_1}(x_1) \cdots p_{X_m}(x_m) \overset{?}{=}$$

in questa ipotesi si può supporre che $S_{\underline{X}} = S_{X_1} \times \dots \times S_{X_m}$ e quindi ...

lettere minuscole

$$= \underbrace{\sum_{x_1 \in A_1 \cap S_{X_1}} p_{X_1}(x_1)}_{= P(X_1 \in A_1)} \cdots \underbrace{\sum_{x_m \in A_m \cap S_{X_m}} p_{X_m}(x_m)}_{= P(X_m \in A_m)} = P(X_1 \in A_1) \cdots P(X_m \in A_m);$$

che è l'uguaglianza che volevamo per dire $X_1, \dots, X_m$ è una famiglia di v.a. discrete indipendenti ▨

ESERCIZIO

oss. E' ben posta.

Consideriamo la seguente densità congiunta: $\begin{cases} p_{\underline{X}}(1,1) = p_{\underline{X}}(1,2) = p_{\underline{X}}(1,3) = \frac{1}{12} \\ p_{\underline{X}}(2,1) = p_{\underline{X}}(2,2) = p_{\underline{X}}(2,3) = \frac{1}{4}. \end{cases}$

1) Trovare le densità marginali
2) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

SVOLGIMENTO

Marginale di X_1:

$$p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) + p_{\underline{X}}(1,2) + p_{\underline{X}}(1,3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$p_{X_1}(2) = p_{\underline{X}}(2,1) + p_{\underline{X}}(2,2) + p_{\underline{X}}(2,3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

SOMMA $= 1$

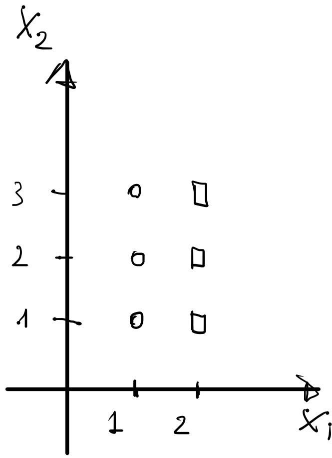
Marginale di X_2:

$$p_{X_2}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) + p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$p_{X_2}(2) = p_{\underline{X}}(1,2) + p_{\underline{X}}(2,2) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$p_{X_2}(3) = p_{\underline{X}}(1,3) + p_{\underline{X}}(2,3) = \frac{1}{12} + \frac{1}{4} = \frac{1+3}{12} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

SOMMA $= 1$



2) Per verificare se c'è indipendenza, vogliamo fare riferimento alla Proposizione dimostrata prima dell'esercizio (è una CNES). Si deve verificare se vale

lettere minuscole

$$p_{\underline{X}}(x_1,x_2) = p_{X_1}(x_1)\,p_{X_2}(x_2) \qquad \forall (x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2.$$

In realtà basta fare riferimento a $(x_1,x_2)\in\{1,2\}\times\{1,2,3\} = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$; in tutti gli altri casi si ha $0=0\cdot 0$ e quindi la condizione richiesta è verificata.

Ora (per i valori nel testo dell'esercizio e per le risposte alla domanda precedente) ci chiediamo:

per $(x_1,x_2)\in\{(1,1),(1,2),(1,3)\}$ $\quad \frac{1}{12} \overset{?}{=} \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad$ RISPOSTA: SI

per $(x_1,x_2)\in\{(2,1),(2,2),(2,3)\}$ $\quad \frac{1}{4} \overset{?}{=} \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$ $\quad$ RISPOSTA: SI.

CONCLUSIONE: X_1 e X_2 sono indipendenti perché vale la condizione richiesta per ognuno di questi 6 casi.

<u>OSS</u>. In generale, se c'è una sola coppia per cui non vale l'uguaglianza richiesta, allora non c'è indipendenza.

ESERCIZIO

oss. E' ben posta.

Consideriamo la seguente densità congiunta: $\begin{cases} p_{\underline{X}}(1,1)=\frac{10}{29},\ p_{\underline{X}}(1,2)=\frac{2}{29},\ p_{\underline{X}}(1,3)=\frac{7}{29} \\ p_{\underline{X}}(2,1)=p_{\underline{X}}(2,2)=\frac{5}{29}. \end{cases}$

1) Trovare le densità marginali

2) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti.

SVOLGIMENTO

Marginale di X_1:
$$\begin{cases} p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,1)+p_{\underline{X}}(1,2)+p_{\underline{X}}(1,3) = \frac{10}{29}+\frac{2}{29}+\frac{7}{29} = \frac{19}{29} \\ p_{X_1}(2) = p_{\underline{X}}(2,1)+p_{\underline{X}}(2,2)+p_{\underline{X}}(2,3) = \frac{5}{29}+\frac{5}{29} = \frac{10}{29} \end{cases}$$

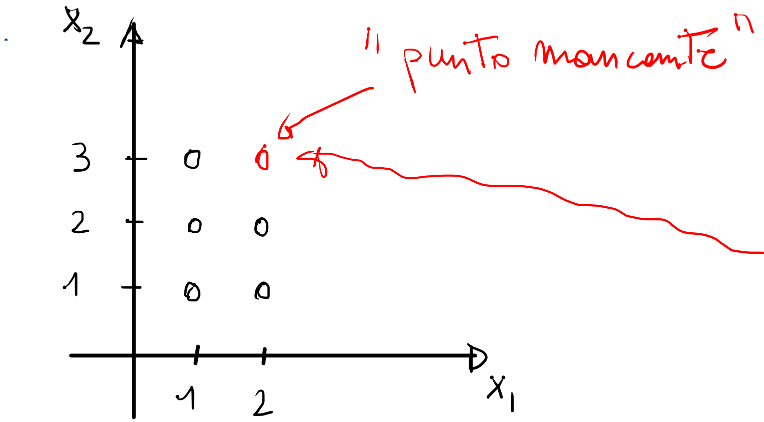
SOMMA $=1$

Marginale di X_2:
$$\begin{cases} p_{X_2}(1) = p_{\underline{X}}(1,1)+p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{10}{29}+\frac{5}{29} = \frac{15}{29} \\ p_{X_2}(2) = p_{\underline{X}}(1,2)+p_{\underline{X}}(2,2) = \frac{2}{29}+\frac{5}{29} = \frac{7}{29} \\ p_{X_2}(3) = p_{\underline{X}}(1,3) = \frac{7}{29} \end{cases}$$

SOMMA $=1$

2) Si vede subito che X_1 e X_2 non sono indipendenti.

Per capire questo riprendiamo i punti del piano cartesiano della slide precedente:



I 5 punti non costituiscono un prodotto cartesiano; però, se aggiungiamo il punto $(2,3)$, abbiamo 6 punti che costituiscono il prodotto cartesiano $\{1,2\} \times \{1,2,3\}$.

Allora il punto mancante fornisce un caso in cui la condizione

lettere minuscole

$$p_{\underline{X}}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)\, p_{X_2}(x_2)$$

non è verificata.

Nel caso specifico si ha

$$\underbrace{P_{\underline{X}}(2,3)}_{=0} \neq \underbrace{P_{X_1}(2)\,P_{X_2}(3)}_{\neq 0 \text{ perché } \begin{cases} P_{X_1}(2)\neq 0 \\ P_{X_2}(3)\neq 0\end{cases}} \quad (*)$$

In dettaglio

$P_{X_1}(2)=\frac{10}{29}$ e $P_{X_2}(3)=\frac{7}{29}$

come visto nella risposta alla prima domanda

COMMENTO GENERALE

lettere minuscole

Se l'insieme $\{(x_1,\dots,x_n): P_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)>0\}$ non è un prodotto cartesiano,

allora non c'è indipendenza.

In generale non vale il viceversa: cioè è possibile costruire esempi in cui non c'è indipendenza

ma l'insieme $\{(x_1,\dots,x_n): P_{\underline{X}}(x_1,\dots,x_n)>0\}$ è un prodotto cartesiano.

Vedere prossima slide

lettere minuscole

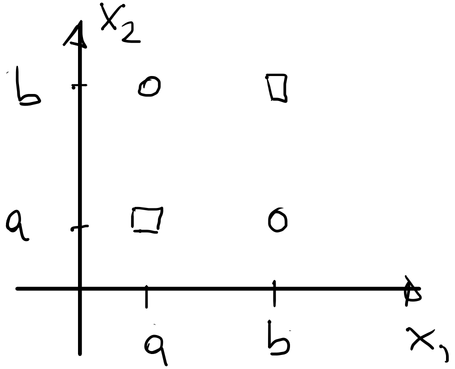
ESEMPIO

Consideriamo la seguente densità congiunta: presi $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia

$$p_{\underline{X}}(a,a) = p_{\underline{X}}(b,b) = \frac{1}{3}$$

OSS. È ben posta

$$p_{\underline{X}}(a,b) = p_{\underline{X}}(b,a) = \frac{1}{6}$$



Ora calcoliamo le marginali di X_1 e X_2:

$$\begin{cases} p_{X_1}(a) = p_{\underline{X}}(a,a) + p_{\underline{X}}(a,b) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ p_{X_1}(b) = p_{\underline{X}}(b,a) + p_{\underline{X}}(b,b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_{X_2}(a) = p_{\underline{X}}(a,a) + p_{\underline{X}}(b,a) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2+1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ p_{X_2}(b) = p_{\underline{X}}(a,b) + p_{\underline{X}}(b,b) = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1+2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Inoltre osserviamo che

$$\underbrace{p_{\underline{X}}(a,a)}_{=1/3} \neq \underbrace{p_{X_1}(a)\, p_{X_2}(a)}_{=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}}$$

Quindi X_1 e X_2 non sono indipendenti.

ESERCIZIO

Un'urna ha 4 palline con i numeri 0, 1, 1, 2. Si estraggono a caso 2 palline in blocco.

Consideriamo le seguenti v.a. $\begin{cases} X_1 = \text{somma dei due numeri estratti} \\ X_2 = \text{prodotto dei due numeri estratti} \end{cases}$

1) Trovare la densità congiunta di $\underline{X} = (X_1, X_2)$

2) Calcolare $P(\{X_1 \geq 2\} \cap \{X_2 \leq 1\})$

3) Calcolare $P(X_1 = 1 \mid X_2 = 0)$.

SVOLGIMENTO

Si tratta di fare riferimento all'insieme Ω che indica i possibili modi di estrarre le 2 palline in blocco: sono $\binom{4}{2} = 6$ casi equiprobabili (bisogna distinguere le due palline con il numero 1).

1) Vediamo, per ciascuno dei $\binom{4}{2}=6$ casi, come sono definite le v.a. X_1 e X_2:

ω	$\underline{X}(\omega)=(X_1(\omega), X_2(\omega))$
$\{0, 1_A\}$	$(0+1,\ 0\cdot 1)=(1,0)$
$\{0, 1_B\}$	$(0+1,\ 0\cdot 1)=(1,0)$
$\{0, 2\}$	$(0+2,\ 0\cdot 2)=(2,0)$
$\{1_A, 1_B\}$	$(1+1,\ 1\cdot 1)=(2,1)$
$\{1_A, 2\}$	$(1+2,\ 1\cdot 2)=(3,2)$
$\{1_B, 2\}$	$(1+2,\ 1\cdot 2)=(3,2)$

La densità congiunta richiesta è:

$$p_{\underline{X}}(1,0)=\frac{2}{6}, \quad p_{\underline{X}}(2,0)=\frac{1}{6}, \quad p_{\underline{X}}(2,1)=\frac{1}{6}, \quad p_{\underline{X}}(3,2)=\frac{2}{6}.$$

(2,0), (2,1) soddisfano l'evento
(1,0) No, perché $x_1<2$
(3,2) No, perché $x_2>1$

2) $P(\{X_1\geq 2\}\cap\{X_2\leq 1\}) \overset{!}{=} p_{\underline{X}}(2,0)+p_{\underline{X}}(2,1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

A denominatore si prendono le coppie (1,0) e (2,0); al contrario (2,1) e (3,2) non vanno prese perché si ha $x_2\neq 0$.

3) $P(X_1=1 \mid X_2=0)=\dfrac{P(\{X_1=1\}\cap\{X_2=0\})}{P(X_2=0)} \overset{!}{=} \dfrac{p_{\underline{X}}(1,0)}{p_{\underline{X}}(1,0)+p_{\underline{X}}(2,0)}=\dfrac{2/\cancel{6}}{\frac{2}{\cancel{6}}+\frac{1}{\cancel{6}}}=\dfrac{2}{3}$

ESERCIZIO

Sia $q \in (0,1)$. Consideriamo la seguente densità congiunta:

$p_{\underline{X}}(k,0) = q\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$ per $k \geq 0$ intero

$p_{\underline{X}}(h,1) = (1-q)\left(\frac{3}{4}\right)^{h-1}\frac{1}{4}$ per $h \geq 1$ intero

1) Calcolare $P(X_1 = X_2 \mid X_1 \geq 1)$

2) Dire se X_1 e X_2 sono indipendenti

3) Calcolare $P(X_1 \in D \mid X_2 = 0)$ dove $D = \{1,3,5,7,\dots\}$ è l'insieme dei numeri dispari

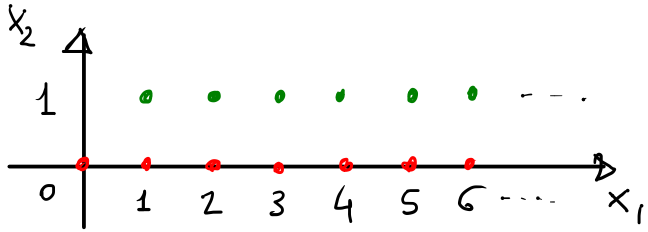
---

OSS È ben posta perché $\sum_{k=0}^{\infty} q\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} + \sum_{h=1}^{\infty}(1-q)\left(\frac{3}{4}\right)^{h-1}\frac{1}{4} = q\,\frac{(1/2)^1}{1-\frac{1}{2}} + \frac{1-q}{4}\,\frac{(3/4)^0}{1-\frac{3}{4}} = q \cdot \frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}} + \frac{(1-q)}{\cancel{4}}\,\frac{1}{\cancel{\frac{1}{4}}} =$

$= q + 1 - q = 1.$

SVOLGIMENTO

Iniziamo con il seguente grafico



• = punti del tipo $(h,1)$ con $h \geq 1$ intero

• = punti del tipo $(k,0)$ con $k \geq 0$ intero

1) $$P(X_1 = X_2 \mid X_1 \geq 1) = \frac{P(\{X_1 = X_2\} \cap \{X_1 \geq 1\})}{P(X_1 \geq 1)} = ?$$

- Le uniche coppie con "$x_1 = x_2$" sono $(0,0)$ e $(1,1)$; quindi il numeratore è $p_{\underline{X}}(1,1)$.
- $P(X_1 \geq 1) = 1 - P(X_1 < 1) = 1 - p_{\underline{X}}(0,0)$ — l'unico punto con "$x_1 < 1$" è $(0,0)$.

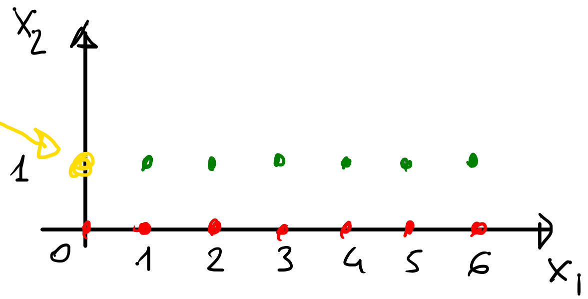
Quindi

$$P(X_1 = X_2 \mid X_1 \geq 1) = \frac{p_{\underline{X}}(1,1)}{1 - p_{\underline{X}}(0,0)} = \frac{(1-q)\left(\frac{3}{4}\right)^{1-1} \cdot \frac{1}{4}}{1 - q\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1}} = \frac{\frac{1-q}{4}}{1 - \frac{q}{2}} = \frac{\frac{1-q}{4}}{\frac{2-q}{2}} = \frac{1-q}{\cancel{4}_{2}} \, \frac{\cancel{2}}{2-q} = \frac{1-q}{2(2-q)}.$$

2) I punti dove $p_{\underline{X}}(x_1,x_2)>0$ (vedere i punti rossi e verdi del grafico)

non costituiscono un prodotto cartesiano perché c'è un "punto mancante"; si tratta del punto $(0,1)$

(e si ha $\{0,1,2,3,\dots\} \times \{0,1\}$).



Allora

$$\underbrace{p_{\underline{X}}(0,1)}_{=0} \neq \underbrace{p_{X_1}(0)\,p_{X_2}(1)}_{\neq 0}$$

(ovvio)

perché $p_{X_1}(0)\neq 0$ e $p_{X_2}(1)\neq 0$

Dettaglio:

$p_{X_1}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) = q\left(\frac{1}{2}\right)^{0+1} = \frac{q}{2}$ (ricordo che $q>0$);

$p_{X_2}(1) = \sum_{h=1}^{\infty}(1-q)\left(\frac{3}{4}\right)^{h-1}\frac{1}{4} = \frac{1-q}{4}\sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{h-1} = \frac{1-q}{4}\,\frac{(3/4)^0}{1-\frac{3}{4}} = \frac{1-q}{\cancel{4}}\cdot\frac{1}{1/\cancel{4}} = 1-q$ (ricordo che $q<1$).

3) $P(X_1 \in D \mid X_2 = 0) = \dfrac{P(\{X_1 \in D\} \cap \{X_2 = 0\})}{P(X_2=0)} = \dfrac{\sum_{k=1}^{\infty} p_{\underline{X}}(2k-1, 0)}{\sum_{k=0}^{\infty} p_{\underline{X}}(k,0)} =$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{\infty} q\left(\frac{1}{2}\right)^{2k\cancel{-1}\cancel{+1}}}{\sum_{k=0}^{\infty} q\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\cancel{q}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}{\cancel{q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}}{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\frac{(1/4)^1}{1-1/4}}{\frac{(1/2)^1}{1-1/2}} = \frac{\frac{1/\cancel{4}}{3/\cancel{4}}}{\frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}} = \frac{1}{3}.$$

<u>OSS</u>. Se volessimo calcolare $P(X_1 \in D^c \mid X_2 = 0)$, per la teoria e per il valore $\frac{1}{3}$ ottenuto possiamo dire che è uguale a $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. Infatti si ha

$$P(X_1 \in D^c \mid X_2=0) = \frac{P(\{X_1 \in D^c\} \cap \{X_2=0\})}{P(X_2=0)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} p_{\underline{X}}(2k,0)}{\sum_{k=0}^{\infty} p_{\underline{X}}(k,0)} = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}}{\sum_{k=0}^{\infty} q\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} =$$

$$= \frac{\cancel{q}\,\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^{k}}{\cancel{q}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{(1/4)^0}{1-1/4}}{\frac{(1/2)^1}{1-1/2}} = \frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{3/4}}{\frac{\cancel{1/2}}{\cancel{1/2}}} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{4}^{2}}{3} = \frac{2}{3}.$$