• Una matrice $n \times n$ si dice una matrice quadrata [numero righe = numero colonne]

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 2×2 matrice quadrata

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$ non è una matrice quadrata.

• Una matrice $n \times 1$ $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ si dice vettore colonna

• Una matrice $1 \times n$ $(a_1, \dots, a_n)$ si dice vettore riga

---

in $\mathbb{R}$ $\quad a \cdot (b+c) = ab + ac \quad a, b, c \in \mathbb{R}$

proprietà distributiva

$a(bc) = (ab) \cdot c$ proprietà associativa

$a \cdot b = b \cdot a$ proprietà commutativa

OSS: $A \in Mat(m \times k)$ $\quad A \cdot B$

$B \in Mat(k \times n)$ $\quad B \cdot A$

è ben definito se $m = n$

per definire AB e BA occorre

$A \in Mat(m \times k)$ $\qquad B \in (k \times m)$

in generale $AB \neq BA$

Es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\#$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Prop:

prop. distrib.

- $A(B+C) = A\cdot B + AC$ $\qquad$ $A \in Mat(m \times k)$, $B, C \in Mat(k \times n)$

- $A(BC) = (AB)\cdot C$ $\qquad$ $A \in Mat(m \times k)$, $B \in Mat(k \times q)$, $C \in Mat(q \times n)$

prop. associativa

$\lambda(A\cdot B) = A(\lambda B)$ $\qquad$ $A \in Mat(m \times k)$, $B \in Mat(k \times n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Dim $\longrightarrow$ ESEMPIO $\qquad$ $m = 1 \quad k = 2 \quad n = 3$

$A \in Mat(1 \times 2)$ $\qquad$ $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \end{pmatrix}$

$B, C \in Mat(2 \times 3)$ $\qquad$ $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$

$$C = \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & z \end{pmatrix}$$

$$A \cdot (B+C) = (\alpha \quad \beta) \cdot \left[\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & z \end{pmatrix} \right]$$

$$= (\alpha \quad \beta) \cdot \begin{pmatrix} a+r & b+s & c+t \\ d+u & e+v & f+z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha(a+r)+\beta(d+u) & \alpha(b+s)+\beta(e+v) & \alpha(c+t)+\beta(f+z) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a+\alpha r+\beta d+\beta u & \alpha b+\alpha s+\beta e+\beta v & \alpha c+\alpha t+\beta f+\beta z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha a+\beta d)+(\alpha r+\beta u) & (\alpha b+\beta e)+(\alpha s+\beta v) & (\alpha c+\beta f)+(\alpha t+\beta z) \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha a+\beta d \quad \alpha b+\beta e \quad \alpha c+\beta f) +$$
$$(\alpha r+\beta u \quad \alpha s+\beta v \quad \alpha t+\beta z)$$

$$= (\alpha \ \ \beta) \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} +$$

$$(\alpha \ \ \beta) \begin{pmatrix} r & s & t \\ u & v & z \end{pmatrix} =$$

$$= AB + AC \qquad \square$$

DEF:

$n \times n$ $\quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots \ 0 & \end{pmatrix}$ $\quad a_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$

matrice identica (o matrice identità)

Es: $\quad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_1 = (1)$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

OSS: $A \in Mat(n \times n)$ (per ogni A)

$$A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 & \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 \\ \gamma \cdot 1 + \delta \cdot 0 & \gamma \cdot 0 + \delta \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\alpha + 0 \cdot \gamma & 1 \cdot \beta + 0 \cdot \delta \\ 0 \cdot \alpha + 1 \cdot \gamma & 0 \cdot \beta + 1 \cdot \delta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

TRASPOSIZIONE

$A \in Mat(m \times n)$

A^t = trasposta di A, $A^t \in Mat(n \times m)$

se $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ allora

$$A^t := \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Es: $\cdot\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \sqrt{2} & \pi & 1 \end{pmatrix}$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ 0 & \pi \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\cdot\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Prop: • $(A^t)^t = A$

• $(AB)^t = B^t A^t$ $\qquad$ $A \in Mat(m \times k)$
$B \in Mat(k \times n)$

(oss: $B^t \in Mat(n \times k)$
$A^t \in Mat(k \times m)$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + \beta c & \alpha b + \beta d \\ \gamma a + \delta c & \gamma b + \delta d \end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B)^t = \begin{pmatrix} \alpha a+\beta c & \gamma a+\delta c \\ \alpha b+\beta d & \gamma b+\delta d \end{pmatrix}$$

$$B^t\cdot A^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI

$a, b \in \mathbb{R}$

$ax = b$

se $a = 0$
- $b = 0$ esistono "infinite soluzioni"
- $b \neq 0$ non esistono soluzioni

se $a \neq 0 \Rightarrow$ esiste una unica soluzione $x = \frac{b}{a}$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b} \qquad (*)$$

E' un sistema lineare con n incognite

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad e \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

e m equazioni

(*) equivale (lezione precedente)

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

Def: una n-ple di numeri $q_1, \dots, q_n$ è soluzione di (*) se

$$A \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \underline{b}$$

Def: dato il sistema lineare $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ il sistema lineare omogeneo $A \cdot \underline{x} = \underline{0} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\}m$ si dice sistema lineare omogeneo associato a $A \underline{x} = \underline{b}$

Es:
$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

il sistema lineare omogeneo associato è

$$A \cdot \underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

OSS: • $A\underline{x} = \underline{0}$ $\qquad x_1 = \dots = x_n = 0$

è sempre una soluzione

• $A\underline{x} = \underline{b}$ se $\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ è una soluzione (cioè $A \cdot \underline{y}_0 = \underline{b}$) allora ogni altra soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ è della forma $\underline{y}_0 + \underline{z}$ dove $A\underline{z} = \underline{0}$

DIM: 1°] $\underline{y}_0 + \underline{z}$ è soluzione,

$(A\underline{y}_0 = \underline{b}, \quad A\underline{z} = \underline{0})$

essere soluzione significa $A(\underline{y}_0 + \underline{z}) = \underline{b}$

ma $A(\underline{y}_0 + \underline{z}) \underset{\text{prop. distrib.}}{=} \overset{=\underline{b}}{A \cdot \underline{y}_0} + \overset{=\underline{0}}{A \cdot \underline{z}} =$

$$= \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$$

II°] se $\underline{y}_1$ è un'altra soluzione (cioè se $A\,\underline{y}_1 = \underline{b}$) allora esiste $\underline{z}$ tale che $A\cdot\underline{z} = \underline{0}$ e tale che

$$\underline{y}_1 = \underline{y}_0 + \underline{z}$$

Sia $\underline{z} := \underline{y}_1 + \underbrace{(-\underline{y}_0)}_{= -1\cdot(\underline{y}_0)}$

con questa scelta $\underline{y}_1 = \underline{y}_0 + \underline{z}$

(perché $\underline{y}_0 + \underline{z} = \underline{y}_1 + \cancel{(-\underline{y}_0)} + \cancel{\underline{y}_0}$)

resta da verificare che

$$A\cdot\underline{z} \overset{?}{=} \underline{0}$$

$$A\underline{z} = A(\underline{y}_1 + (-1\cdot \underline{y}_0)) \overset{\uparrow}{=}$$
prop. distrib.

$$= \underbrace{A\cdot \underline{y}_1}_{\underline{b}} + \underbrace{A\cdot(-1\cdot \underline{y}_0)}_{= -1\cdot(\underbrace{A\cdot \underline{y}_0}_{\underline{b}})} =$$

$$= \underline{b} + (-1)\cdot \underline{b} = \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{0}.$$

$\square$

OSS: se $A\underline{x} = \underline{b}$ ha soluzione e il sistema $A\underline{x} = \underline{0}$ ammette la sola soluzione $\underline{x} = \underline{0}$

$\Longrightarrow$ $A\underline{x} = \underline{b}$ ha una unica soluzione.

Esempi:

a)
$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 1 + x_2 + x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 1 + x_2 \\ 2x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 = -x_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_2 = x_1 = -x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2 = 0.$$

b) (1) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ 3 incognite
2 equazioni

$x_1 = 1, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$ è soluzione

$\underline{y}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è soluzione.

cerchiamo le soluzioni del sistema lineare omogeneo associato:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = -x_2 \end{cases}$$

se $x_2 = \lambda \in \mathbb{R}$ si ha che

$x_1 = \lambda, \ x_2 = \lambda, \ x_3 = -\lambda$ è soluzione del sistema lineare omog.

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} \quad \text{al variare di } \lambda \in \mathbb{R}$$

quindi tutte e sole le soluzioni di (1) sono date da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+\lambda \\ \lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$

(ovvero $x_1 = 1+\lambda$, $x_2 = \lambda$, $x_3 = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$)