DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA (e BINOMIALE NEGATIVA TRASLATA)

Vogliamo considerare una generalizzazione di quel che abbiamo visto per la geometrica (e la geometrica traslata) facendo riferimento al "successo r-simo", dove $r \geq 1$ è un intero fissato. Nel caso $r=1$ si dovrà recuperare quel che abbiamo visto come caso particolare.

Quindi consideriamo ancora una successione di prove indipendenti con probabilità di successo $p \in (0,1]$ e di fallimento $1-p \in [0,1)$. Siamo interessati alle due seguenti v.a.:

$$\begin{cases} X = \#\text{ fallimenti prima di avere il successo } r\text{-simo} \quad (\text{è a valori in } \{0,1,2,\dots\}); \\ Y = \#\text{ prove per avere il successo } r\text{-simo} \quad (\text{è a valori in } \{r, r+1, r+2, \dots\}). \end{cases}$$

In analogia a quanto visto in passato, si ha $X = Y - r$ e $Y = X + r$.

ESEMPIO SPECIFICO CON $r=4$

S F F F S S F F F F S

1° succ. 2° succ. 3° succ. 4° succ.

Abbiamo 7 simboli "F" e 11 simboli in totale.

Quindi si ha $X=7$ e $Y=11$

(questi valori sono in accordo con $\begin{cases} X=Y-r \\ Y=X+r \end{cases}$, dove $r=4$).

Quindi useremo le seguenti terminologie:

$\begin{cases} X \text{ ha distribuzione Binomiale Negativa con parametri } r \text{ e } p \; (X \sim \text{BIN-NEG}(r,p)); \\ Y \text{ ha distribuzione Binomiale Negativa Traslata con parametri } r \text{ e } p \; (Y \sim \text{BIN-NEG-TRASLATA}(r,p)). \end{cases}$

- In altri libri le terminologie potrebbero essere scambiate.
- Per evitare ambiguità possiamo distinguere i due casi con riferimento al fatto che X parte da zero e Y parte da r.

OSSERVAZIONI

- Il caso $p=0$ si esclude per i motivi visti nel caso della geometrica e della geometrica traslata (in generale si avrà certamente fallimento in ogni prova, e quindi non si arriverà mai al successo r-simo).
- Il caso $p=1$ è consentito ma è banale. Infatti si avrà certamente successo in ogni prova, e quindi $P(X=0)=1$ e $P(Y=r)=1$.

$\underbrace{S, \ldots\ldots, S}_{r \text{ volte}}$

$X=0$ perché non c'è nessuna F

$Y=r$ perché la "stringa" ha r simboli in totale.

CALCOLO DELLE DENSITÀ DISCRETE DI X e Y.

Iniziamo da $p_X(k) = P(X=k)$ per $k \geq 0$ intero.

Consideriamo la sequenza $(\underbrace{F, \dots, F}_{k \text{ volte}}, \underbrace{S, \dots, S}_{r \text{ volte}})$; è un caso particolare dell'evento che ci interessa.

Per indipendenza delle prove la probabilità di questa sequenza è $p^r(1-p)^k$.

Ci si convince che, ogni altra sequenza con k volte "F" e r volte "S"

ha la stessa probabilità. Quindi

$$p_X(k) = \underbrace{p^r(1-p)^k + \dots + p^r(1-p)^k}_{b_{r,k} \text{ volte}} = b_{r,k}\, p^r (1-p)^k \qquad (\forall k \geq 0 \text{ intero}),$$

dove $b_{r,k}$ = # sequenze con k volte "F" e r volte "S", e che finiscono con "S".

Dobbiamo calcolare $b_{r,k}$ e consideriamo la seguente corrispondenza biunivoca:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{stringhe con } k \text{ volte "F" e} \\ r \text{ volte "S" che finiscono con "S"} \end{array} \right\} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{i sottoinsiemi di } \{1, \dots, k+r-1\} \text{ con } r-1 \\ \text{elementi, che indicano i posti delle "S"} \end{array} \right\}$

(esclusa l'ultima "S").

$(\underbrace{\_, \_, \dots\dots, \_,}_{k+r-1 \text{ simboli}} S)$

$\{i_1, \dots, i_{r-1}\}$

$\left\{ \begin{array}{l} k \text{ volte "F"} \\ r-1 \text{ volte "S"} \end{array} \right.$

Questo insieme ha $\binom{k+r-1}{r-1}$ elementi

Questo insieme ha $b_{r,k}$ elementi

Quindi $b_{r,k} = \binom{k+r-1}{r-1} = \binom{k+r-1}{k}$ per proprietà dei coeff. binomiali.

In conclusione

$$\boxed{p_X(k) = \binom{k+r-1}{r-1} p^r (1-p)^k = \binom{k+r-1}{k} p^r (1-p)^k \quad \forall k \geq 0 \text{ intero}}$$

oppure

ESEMPIO DELLA CORRISPONDENZA BIUNIVOCA DELLA SLIDE PRECEDENTE

Prendiamo $r = 3$ e $k = 2$ $\qquad$ $k+r-1 = 2+3-1 = 4, \quad r-1 = 2$

$$
\left[
\begin{array}{l}
(F,F,S,S,S) \\
(F,S,F,S,S) \\
(F,S,S,F,S) \\
(S,F,F,S,S) \\
(S,F,S,F,S) \\
(S,S,F,F,S)
\end{array}
\right]
\begin{array}{c}
\longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow \\
\longleftrightarrow
\end{array}
\left[
\begin{array}{c}
\{3,4\} \\
\{2,4\} \\
\{2,3\} \\
\{1,4\} \\
\{1,3\} \\
\{1,2\}
\end{array}
\right]
$$

$$\binom{k+r-1}{r-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$\binom{k+r-1}{k} = \binom{4}{2} = 6$$

6 elementi

Sequenze con 2 volte "F"
e 3 volte "S" che finiscono con "S".

La densità discreta di Y si può ottenere con un ragionamento simile, oppure a partire dalla densità discreta di X (questo è quello che faremo di seguito):

$\forall h \geq r$ intero $\quad p_Y(h) = P(Y=h) = P(X+r=h) = P(X=h-r) = p_X(h-r) \stackrel{*}{=}$

oss. $h-r \geq 0$ intero

FORMULA OTTENUTA PRIMA con $k=h-r$

$$\stackrel{*}{=} \binom{h-\cancel{r}+\cancel{r}-1}{r-1} p^r (1-p)^{h-r} = \binom{h-1}{r-1} p^r (1-p)^{h-r}$$

oppure

$$\stackrel{*}{=} \binom{h-\cancel{r}+\cancel{r}-1}{h-r} p^r (1-p)^{h-r} = \binom{h-1}{h-r} p^r (1-p)^{h-r}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_Y(h) = \binom{h-1}{r-1} p^r (1-p)^{h-r} \stackrel{\text{oppure}}{=} \binom{h-1}{h-r} p^r (1-p)^{h-r} \quad \forall h \geq r \text{ intero.}}$$

COMMENTO:
Si può verificare che $\sum_{k=0}^{\infty} p_X(k) = 1$ e $\sum_{h=r}^{\infty} p_Y(h) = 1$,

Non daremo dettagli su come si verificano.

CASO $r=1$: RECUPERO DELLA GEOMETRICA E GEOMETRICA TRASLATA

Per ogni $k \geq 0$ intero

$$p_X(k) = \binom{k+1-1}{1-1} p^1 (1-p)^k = (1-p)^k p$$

oppure

$$p_X(k) = \binom{k+1-1}{k} p^1 (1-p)^k = (1-p)^k p$$

Per $h \geq 1$ intero

$$p_Y(h) = \binom{h-1}{1-1} p^1 (1-p)^{h-1} = (1-p)^{h-1} p$$

oppure

$$p_Y(h) = \binom{h-1}{h-1} p^1 (1-p)^{h-1} = (1-p)^{h-1} p$$

ESERCIZIO

Si lancia ripetutamente un dado equo fino a quando esce per la 3^a volta il numero 4.

1) Calcolare la probabilità che escano 5 numeri diversi da 4.

2) Calcolare la probabilità che escano almeno 2 numeri diversi da 4.

SVOLGIMENTO

Abbiamo prove indipendenti tutte con probabilità di successo (l'uscita del 4) $p = \frac{1}{6}$.

Dovremo considerare una v.a. $X \sim \text{BIN-NEG}(\underbrace{r=3}_{R}, p=\frac{1}{6})$; in effetti conta il numero di fallimenti (numeri diversi da 4) prima del terzo successo.

Le probabilità richieste sono $P(X=5)$ e $P(X \geq 2)$.

1) Si ha

$$P(X=5) = p_X(5) = \binom{5+3-1}{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^5 = \underbrace{\binom{7}{2}}_{=21}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 21\cdot\frac{5^5}{6^8} = \dots$$

$$\dots = \frac{21875}{279936}$$

2) $$P(X\geq 2) = \sum_{k=2}^{\infty} \underbrace{P(X=K)}_{=p_X(k)} = \sum_{k=2}^{\infty}\binom{k+3-1}{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^k$$ difficile da trattare.

Il problema si aggira come segue:

$$P(X\geq 2) = 1-P(X<2) = 1-P(X\leq 1) = 1-\left(p_X(0)+p_X(1)\right)$$

$$= 1-\left\{\binom{0+3-1}{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^0+\binom{1+3-1}{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\frac{1}{6}\right)^1\right\}$$

$$= 1-\left\{\left(\frac{1}{6}\right)^3+\underbrace{\binom{3}{2}}_{=3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}\right\} = 1-\left(\frac{1}{6}\right)^3\left\{1+\cancel{3}\cdot\frac{5}{\cancel{6}_2}\right\} = 1-\frac{7}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3 = \dots$$

$$\dots = \frac{1275}{1296}.$$

COMMENTO

Nei calcoli per rispondere alla 2ª domanda abbiamo visto che

$$P_X(0) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 \quad e \quad P_X(1) = 3\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \frac{5}{6}$$

In effetti questi valori si possono controllare "a mano":

$$P_X(0) = P((4,4,4)) = \left(\frac{1}{6}\right)^3$$

$$P_X(1) = P((4^c,4,4,4)) + P((4,4^c,4,4)) + P((4,4,4^c,4)) =$$

$$= \frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\,\frac{5}{6}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6} = 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\frac{5}{6}.$$

ESERCIZIO

Si lancia ripetutamente una moneta equa.

Calcolare la probabilità di ottenere testa per la 5ª volta al 7° lancio.

RISPOSTA

Consideriamo la v.a. $Y = \#$ di lanci per avere per la 5ª volta testa.

Allora $Y \sim \text{BIN-NEG-TRASLATA}\left(r=5, p=\frac{1}{2}\right)$ e la probabilità richiesta è

$$P(Y=7) = p_Y(7) = \binom{7-1}{5-1}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(1-\frac{1}{2}\right)^{7-5} = \underbrace{\binom{6}{4}}_{=15}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{15}{128}.$$

ESERCIZIO

Un'urna ha 2 palline bianche e 3 nere.

Si estraggono palline a caso, una alla volta e <u>con</u> reinserimento.

Calcolare la probabilità di ottenere la sequenza (B, N, B) nelle prime tre estrazioni

sapendo che la 2^a pallina nera viene estratta alla 4^a estrazione.

RISPOSTA

Sia E l'evento "esce la sequenza (B, N, B) nelle prime tre estrazioni"; inoltre sia

$Y = \#$ estrazioni necessarie per avere per la 2^a volta una pallina nera.

Viene richiesta $P(E \mid Y=4)$. Si ha

$$P(E \mid Y=4) = \frac{P(E \cap \{Y=4\})}{P(Y=4)} = \frac{P(\text{esce la sequenza } (B,N,B,N))}{\underbrace{\binom{4-1}{2-1}}_{=\binom{3}{1}=3}\left(\frac{3}{5}\right)^2\left(1-\frac{3}{5}\right)^{4-2}} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{2}{5}} \cdot \cancel{\frac{3}{5}} \cdot \cancel{\frac{2}{5}} \cdot \cancel{\frac{3}{5}}}{3 \cdot \cancel{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \cancel{\left(\frac{2}{5}\right)^2}} = \frac{1}{3}.$$

COMMENTO

Si potrebbero considerare le sequenze $(B,B,N) \to F$ e $(N,B,B) \to G$ al posto della sequenza $(B,N,B) \to E$ come nel testo dell'esercizio. In corrispondenza si può verificare che

$$P(F \mid Y=4) = P(G \mid Y=4) = \frac{1}{3}.$$ Quindi $P(E \mid Y=4) + P(F \mid Y=4) + P(G \mid Y=4) = 1$

e questo non sorprende perché $\{Y=4\} = (E \cap \{Y=4\}) \cup (F \cap \{Y=4\}) \cup (G \cap \{Y=4\})$ ed inoltre E, F, G sono disgiunti a due a due.

ESERCIZIO (TEORICO)

Consideriamo una successione di prove indipendenti, tutte con probabilità di successo $p \in (0,1]$.

Inoltre siano Z_1 e Z_2 le due v.a. così definite:

$$Z_j = \#\text{ prove per avere il } j\text{-esimo successo} \qquad (j=1 \text{ e } j=2).$$

Calcolare $P(Z_1=k \mid Z_2=n)$ per $n \geq 2$ e $1 \leq k \leq n-1$.

(cioè la probabilità di avere il 1° successo alla k^a prova sapendo che il 2° successo accade alla n^a prova).

RISPOSTA

$$P(Z_1=k \mid Z_2=n) = \frac{P(\{Z_1=k\} \cap \{Z_2=n\})}{P(Z_2=n)} = ?$$

$$\{Z_1=k\} \cap \{Z_2=n\} = \{(F, \ldots, F, \underset{k^\circ \text{ posto}}{S}, F, \ldots, F, \underset{n^\circ \text{ posto}}{S})\}$$

$$Z_2 \sim \text{BIN-NEG-TRASLATA}(r=2, p)$$

Allora

$$P(Z_1=k \mid Z_2=n) = \frac{P(\{(F,\dots,F,S,F,\dots,F,S)\})}{P_{Z_2}(n)} = \frac{\cancel{(1-p)^{n-2}}\,\cancel{p^2}}{\binom{n-1}{2-1}\cancel{p^2}\cancel{(1-p)^{n-2}}} = \frac{1}{\binom{n-1}{1}} = \frac{1}{n-1}.$$

per ogni $k \in \{1,\dots,n-1\}$.

COMMENTI

1) I valori $k \in \{1,\dots,n-1\}$ sono tutti equiprobabili (tutte le probabilità sono uguali a $\frac{1}{n-1}$) e il risultato non dipende da p. Questo sembra essere non sorprendente per le proprietà di mancanza di memoria.

2) Nel caso $n=2$ è certo che il 1° successo è alla 1ª prova; infatti $P(Z_1=1 \mid Z_2=2)=1$

3) Se $p=1$ si deve avere $n=2$; infatti per $n \geq 3$ $P(Z_2=n)=0$ e "non si può condizionare".

ESERCIZIO (sulle geometrice traslate e argomenti passati)

Si lancia un dado equo e sia X la v.a. che indica il numero ottenuto.

Poi si lancia X volte una moneta equa.

Si vince il gioco se esce almeno una volta testa.

1) Calcolare la probabilità di vincere il gioco.

2) Calcolare la probabilità che sia uscito il numero k nel lancio del dado sapendo di aver vinto il gioco.

3) Supponiamo di ripetere il gioco più volte. Calcolare la probabilità di vincere il gioco ad un tentativo dispari (il primo, il terzo, il quinto, ecc.).

SVOLGIMENTO

Sia $V = \{\text{vincere il gioco}\}$. Le probabilità richieste sono:

1) $P(V)$

2) $P(X=k \mid V)$ per $k \in \{1,2,3,4,5,6\}$.

3) Sia $Y \sim \text{Geo Traslata}\,(p = P(V))$ e si calcoli $P(Y \in \{1,3,5,\dots\})$

1) $$P(V) = \sum_{k=1}^{6} \underbrace{P(V \mid X=k)}_{1-P(\underbrace{c,\dots,c}_{k\text{ volte}}) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k} \underbrace{P(X=k)}_{=\frac{1}{6}} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} = \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{2} + 1-\frac{1}{4} + 1-\frac{1}{8} + 1-\frac{1}{16} + 1-\frac{1}{32} + 1-\frac{1}{64}\right) =$$

PROB. TOTALI

$$= \frac{1}{6}\left(\underbrace{1+\dots+1}_{6\text{ volte}} - \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(6 - \frac{32+16+8+4+2+1}{64}\right) = \frac{1}{6}\cdot 6 - \frac{1}{\cancel{6}_{2}} \cdot \frac{\cancel{63}^{21}}{64} = 1 - \frac{21}{128} = \frac{107}{128}.$$

2) $$P(X=k|V) \underset{\text{BAYES}}{=} \frac{P(V|X=k)\,P(X=k)}{P(V)} = \frac{\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\cdot\frac{1}{6}}{\frac{107}{128}} = \left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^k\right)\frac{1}{\cancel{6}_{3}}\cdot\frac{\cancel{128}^{64}}{107} =$$

$\frac{107}{128}$ ← valore ottenuto nella risposta alla domanda precedente

$$= \begin{cases} \dfrac{32}{321} & \text{per } k=1 \\[2mm] \dfrac{48}{321} & \text{per } k=2 \\[2mm] \dfrac{56}{321} & \text{per } k=3 \\[2mm] \dfrac{60}{321} & \text{per } k=4 \\[2mm] \dfrac{62}{321} & \text{per } k=5 \\[2mm] \dfrac{63}{321} & \text{per } k=6 \end{cases}$$

SOMMA = 1
in accordo con la teoria perché
gli eventi $\{X=1\}, \{X=2\}, \{X=3\}, \{X=4\}, \{X=5\}, \{X=6\}$
formano una partizione

<u>OSS</u>.

$P(X=k|V)$ è crescente rispetto a k perché
$P(V|X=k) = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^k$ è crescente rispetto a k.

3) Dobbiamo calcolare $P(Y \in \{1,3,5,\dots\})$ con $Y \sim$ Geo Traslata $(p = P(V))$.

Per il momento uso p generico e poi sostituisco $p = P(V) = \frac{107}{128}$ alla fine.

Si ha

$$P(Y \in \{1,3,5,\dots\}) = \sum_{h=1}^{\infty} p_Y(2h-1) = \sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{2h-1-1} p = p \sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{2h-2} = p \sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{2(h-1)} = \dots$$

Da qui propongo due modi di procedere.

1° modo $\dots = \frac{p}{(1-p)^2} \sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{2h} = \frac{p}{\cancel{(1-p)^2}} \frac{\cancel{(1-p)^2}}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p}{\cancel{1}-\cancel{1}+2p-p^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}$

2° modo $\dots = p \sum_{J=0}^{\infty} (1-p)^{2J} = p \frac{(1-p)^0}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-(1-2p+p^2)} = \frac{p}{\cancel{1}-\cancel{1}+2p-p^2} = \frac{p}{2p-p^2} = \frac{1}{2-p}$

$J = h-1$

uguali (ok)

Il risultato è $\frac{1}{2-\frac{107}{128}} = \frac{1}{\frac{256-107}{128}} = \frac{128}{149}$

CENNO ALLE V.A. MULTIDIMENSIONALI

In questo corso tratteremo solo il caso discreto.

Date n v.a. discrete (come quelle viste finora) $X_1, \dots, X_n$ definite su uno stesso spazio di probabilità, quindi $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ con opportune proprietà, vogliamo considerare la funzione $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ così definita:

$$\underline{X}(\omega) = (X_1(\omega), \dots, X_n(\omega)) \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

L'insieme dei valori assunti dalla v.a. $\underline{X}$, che indicheremo con $S_{\underline{X}}$ soddisfa la seguente condizione:

$$S_{\underline{X}} \subset S_{X_1} \times \dots \times S_{X_n}$$

prodotto cartesiano di insiemi finiti o numerabili.

Quindi l'insieme $S_{\underline{X}}$ è finito o numerabile.

La funzione $\underline{X}: \Omega \to \mathbb{R}^m$ che abbiamo considerato nella slide precedente è una v.a. MULTIDIMENSIONALE (anzi m-DIMENSIONALE) discreta $\longleftrightarrow$ (perché $S_{\underline{X}}$ è finito o numerabile).

ESEMPIO

Si lanciano due dadi e sia $\Omega = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$.

(Se i dadi sono equi si ha $P(A) = \frac{\# A}{36} \quad \forall A \subset \Omega$).

Vogliamo considerare la v.a. di dimensione 2 che indica la somma e il prodotto dei due numeri ottenuti. Allora avremo

$$\underline{X}(\omega) = \underline{X}(\omega_1, \omega_2) = (\underbrace{\omega_1 + \omega_2}_{= X_1(\omega_1, \omega_2)}, \underbrace{\omega_1 \cdot \omega_2}_{= X_2(\omega_1, \omega_2)}) \qquad \forall \omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega.$$

- Spesso, quando tratteremo le v.a. discrete multidimensionali, avremo a che fare con sommatorie con più indici.
- Nel caso continuo (dove in generale avremo integrali al posto di sommatorie) si dovrebbe fare riferimento agli integrali multipli*; per questo motivo tratteremo il caso multidimensionale solo nel discreto, mentre tratteremo solo le v.a. continue unidimensionali.

* in realtà non sempre, ma nei "casi facili" è così.

A questo punto possiamo definire la densità discreta di $\underline{X}$ come si fa per le v.a. discrete unidimensionali:

$$p_{\underline{X}} : \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,1] \qquad p_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(\underline{X} = \underline{x}) \qquad \text{dove } \underline{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$$

lettere minuscole

lettere minuscole

La densità discreta di $\underline{X} = (X_1, \dots, X_m)$ è detta congiunta perché descrive congiuntamente il comportamento delle v.a. $X_1, \dots, X_m$.

Per le v.a. $X_1, \dots, X_m$, e per le loro densità discrete, si usa il termine marginali.

Per la densità congiunta $p_{\underline{X}}$ si mantengono alcune proprietà viste per il caso unidimensionale:

- Se $\underline{x} \notin S_{\underline{X}}$, allora $p_{\underline{X}}(\underline{x}) = 0$

  minuscolo   minuscolo

- per ogni $A \subset \mathbb{R}^m$
$$P(\underline{X} \in A) = \sum_{\underline{x} \in A \cap S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x})$$
  minuscole

da cui (ponendo $A = \mathbb{R}^m$) si ottiene

$$\sum_{\underline{x} \in S_{\underline{X}}} p_{\underline{X}}(\underline{x}) = 1$$

minuscole

OSS.
ovviamente qui la sommatoria può essere ristretta ai vettori $\underline{x}$ per cui $p_{\underline{X}}(\underline{x}) > 0$

minuscole

Nella prossima lezione approfondiremo il legame tra la densità congiunta $p_{\underline{X}}$ e le densità marginali $p_{X_1}, \dots, p_{X_m}$.

Come vedremo, note le congiunte, si possono ricavare le marginali.
Al contrario, note le marginali, non è possibile ricavare la congiunta.
Questo per certi versi non sorprende:
le marginali descrivono il comportamento di $X_1, \dots, X_m$ prese separatamente;
la congiunta descrive il comportamento congiunto delle v.a. $X_1, \dots, X_m$ e contiene più informazioni delle marginali.