

Ora consideriamo l'indipendenza tra più eventi.

DEFINIZIONE

Sia $\{A_i\}_{i \in I}$ una famiglia di eventi.

Allora si ha una famiglia di eventi indipendenti se:

→ se le famiglie è finita (es. $\{A_1, \dots, A_n\}$)

ogni sottofamiglia di almeno due elementi $\{A_{i_1}, \dots, A_{i_k}\}$ con $k \geq 2$

$$\text{si ha } P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$$

→ se le famiglie è infinita, ogni sottofamiglia finita lo è
in accordo con quanto detto sopra.

ESEMPIO (FAMIGLIA DI 3 EVENTI NON INDEPENDENTI, MA INDEPENDENTI A DUE A DUE)

Consideriamo tre eventi $\{A_1, A_2, A_3\}$. Allora c'è indipendenza se

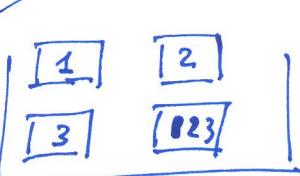
$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3)$$

$$P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$\text{e } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

Consideriamo la seguente ~~situazione~~ ^{situazione}.



Un'urna ha 4 carte numerate come segue

Consideriamo gli eventi

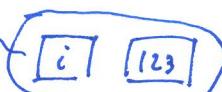
« estrarre una carta a caso »

$A_i = \{ \text{la carta estratta ha il numero } i \}$

$$i = 1, 2, 3$$

Allora

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$



$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_3) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$



$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}$$

$$\text{in tutti i casi } \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{Quindi: } P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2), P(A_1 \cap A_3) = P(A_1)P(A_3), P(A_2 \cap A_3) = P(A_2)P(A_3)$$

$$\text{e } P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \neq P(A_1)P(A_2)P(A_3) \quad (\text{where } \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8})$$

CONCLUSIONE:
Eventi non indipendenti
ma indipendenti a due a due

PROPOSIZIONE (senza dim.)

Se $\{A_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di eventi indipendenti, allora lo è anche qualsiasi altra famiglia ottenuta considerando il complementare di alcuni (o tutti) gli eventi.

COMPROVATO (con esempio)

L'ipotesi di indipendenza spesso segue dal modello di esame.

Ad esempio si hanno eventi indipendenti nel caso di eventi legati a diverse forme di monete, diverse forme di dadi, diverse estrazioni da un insieme di oggetti (come con palline, carte di carte, ecc.) con rientrimento.

In altri casi gli eventi indipendenti sono fuori da misurare. Sorprendente perché i valori si ~~combinano~~ combinano in maniera opportuna.

Consideriamo il seguente esempio.

Si lanciano 3 monete equi e consideriamo i seguenti eventi:

$$A = \{\text{esce Testa al 1° lancio}\}$$

$$B = \{\text{escono } \underline{\text{entrambe}} \text{ Teste consecutive}\}$$

L'universo di riferimento è

$$\Omega = \{(T, T, T), (T, T, c), (T, c, T), (T, c, c), (c, T, T), (c, T, c), (c, c, T), (c, c, c)\}$$

Ognuno di questi 8 elementi ha prob. $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

perché i lanci di moneta sono indipendenti.

$$\text{Si ha } P(A) = P(\{(T, T, T), (T, T, c), (T, c, T), (T, c, c)\}) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \quad \begin{array}{l} \text{Quindi} \\ \text{Spazio di} \\ \text{prob. uniforme} \\ \text{oltre} \end{array}$$

$$\text{e } P(B) = P(\{(T, T, c), (c, T, T)\}) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \quad \text{Inoltre}$$

$$P(A \cap B) = P(\{(T, T, c)\}) = \frac{1}{8} \quad \text{e } P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$$

Quindi A e B sono indipendenti e le cose non era prevedibile a priori.

CENNI DI CALCOLO COMBINATORIO

Consideriamo un insieme di $n \geq 1$ elementi; senza perdere di generalità supponiamo che sia l'insieme $\{1, \dots, n\}$.

Siamo interessati al seguente insieme:

$$\{D_{m,n} = \{(i_1, \dots, i_n)\} \text{ sequenze ordinate di elementi in } \{1, \dots, n\}, \text{ senza ripetizioni, di lunghezza } k \text{ con } k \in \{1, \dots, n\}\}$$

DISPOSIZIONI
SIMPLICI

Ci si chiede quanto vale $\#D_{m,n}$

RISPOSTA: Si hanno n scelte per i_1 , $n-1$ scelte per i_2, \dots , fino ad avere $n-(k-1)$ scelte per i_k . Quindi:

$$\#D_{m,n} = n(n-1) \dots (n-(k-1)) = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{m!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n-k)!}$$

Se vogliamo fare riferimento al fattoriale si ha

$$\#D_{m,n} = n(n-1) \dots (n-k+1) \frac{(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Nel caso ~~$n >$~~ $k=n$ si ha

$$\#D_{m,n} = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

In questo caso gli elementi di $D_{m,n}$ vengono dette PERMUTAZIONI DI $\{1, \dots, n\}$.

Ora considereremo il seguente insieme:

$$C_{m,n} = \{ \{i_1, \dots, i_k\} \}$$

sottraendomi ~~duplicati~~ di $\{1, \dots, n\}$, di k elementi (ovviamente tutti diversi)

COMBINAZIONI
SIMPLICI

Ci si chiede quanto vale

$$\# C_{m,n}$$

In questo caso $k \in \{1, \dots, n\}$.

Si ha $C_{m,0} = \{ \emptyset \} \Rightarrow \# C_{m,0} = 1$

e $C_{m,m} = \{ \{1, \dots, m\} \} \Rightarrow \# C_{m,m} = 1.$

Ora consideriamo k con $k \in \{1, \dots, m-1\}$.

Allora:

pero un sottoinsieme $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, considerando tutte le permutazioni di $\{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ ottemmo ovvero k particolari sequenze ordinate (in $D_{m,k}$); gli elementi di $D_{m,k}$ possono essere visti come una particolare permutazione di $\#$ elementi di un certo insieme.

Per fissare le idee consideriamo un esempio.

$$n=4, k=2$$

$$C_{4,2} = \{ \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\} \}$$

Questi sono gli elementi di $D_{4,2}$

$(1,2)$	$(1,3)$	$(1,4)$	$(2,3)$	$(2,4)$	$(3,4)$
$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$(4,3)$

$k! = 2! = 2$ permutazioni per ogni elemento di $C_{4,2}$

$$\text{In effetti } \# D_{4,2} = \frac{4!}{(4-2)!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12.$$

A partire da questo esempio poniamo che

$$\# C_{m,k} \cdot k! = \# D_{m,k}$$

che ci segue

$$\# C_{m,k} = \frac{\# D_{m,k}}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

L'espressione ottenuta è il coefficiente binomiale e si usa la notazione $\binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$. Questa formula vale anche per $k=0$ e $m=k$.

Qui faccio alcuni commenti sul coefficiente binomiale.

In generale si ha

$$\binom{m}{k} = \binom{m}{m-k}$$

perché

$$\binom{m}{m-k} = \frac{m!}{(m-k)! (m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)! k!} = \binom{m}{k}$$

ad ogni sottoinsieme di k elementi corrisponde il suo complemento di $m-k$ elementi quindi $\# C_{m,k} = \# C_{m,m-k}$

In particolare per $k=0$ e $k=1$ si ha

$$\binom{m}{0} = \binom{m}{m} = \frac{m!}{m! (m-m)!} = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1$$

con 0 elementi
(ci sono solo \emptyset)
con m elementi (ci sono $\{1, -1, \dots, m\}$)

$$\binom{m}{1} = \binom{m}{m-1} = \frac{m!}{1! (m-1)!} = \frac{m (m-1)!}{1 \cdot (m-1)!} = m$$

con 1 elemento ci sono $\{1, 2, \dots, m\}$

con $m-1$ elementi ci sono i loro complementi

~~Osservazione~~ SPIEGAZIONE DEL TERMINE "COEFFICIENTE BINOMIALE"

Possiamo dire che ~~il nome~~ il nome coefficiente binomiale segue dalla formula del binomio di Newton:

$$(a+b)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^k b^{m-k}$$

Infatti:

$$(a+b)^m = \underbrace{(a+b) \cdots (a+b)}_{m \text{ volte}}$$

e per ogni $k \in \{0, 1, \dots, m\}$ abbiamo termini del tipo $a^k b^{m-k}$;

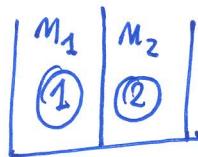
Se vogliamo contare quanti ce ne sono si vede che dipende il coefficiente binomiale.

APPLICAZIONE

DI FORMULE DI CALCOLO COMBINATORIO:

ESTRAZIONI CASUALI IN Blocco

Abbiamo oggetti di due tipi: m_1 di tipo 1, m_2 di tipo 2



Si estraggono a caso un blocco (cioè contemporaneamente)

n oggetti, dove $n < m_1 + m_2$.

Quanto vale le probabilità di estrarre k oggetti di tipo 1?

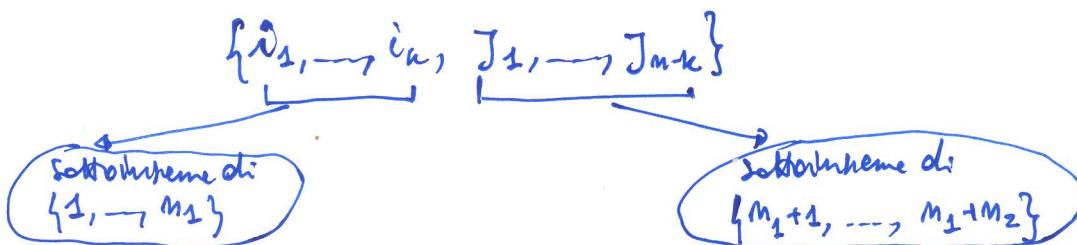
(quando contemporaneamente si estraggono $n-k$ oggetti di tipo 2).

Indichiamo questa probabilità con P_n e si ha

$$P_n = \begin{cases} 0 & \text{se } k > m_1 \text{ oppure se } n-k > m_2 \\ \text{"da calcolare"} & \text{se } \begin{cases} 0 \leq k \leq m_1 \\ 0 \leq n-k \leq m_2 \end{cases} \end{cases}$$

Bisogna osservare che in generale abbiamo $\binom{m_1+m_2}{n}$ casi possibili e tutti equiprobabili dati da tutti i sottosinsiemi di n elementi a partire da m_1+m_2 elementi.

I casi favorevoli all'evento "estrae k oggetti (1) e $n-k$ oggetti (2)" devono essere pensati come sottosinsiemi del tipo



Abbiamo $\binom{m_1}{k}$ scelte per $\{i_1, \dots, i_n\}$ e $\binom{m_2}{n-k}$ scelte per $\{J_1, \dots, J_{n-k}\}$.

In conclusione il numero di casi favorevoli è dato dal prodotto $\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$ e quindi:

$$P_n = \frac{\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}}{\binom{m_1+m_2}{n}}$$

OSSERVAZIONE

Questa formula vale anche se $k > m_1$ oppure $n-k > m_2$ usando la convenzione che $\binom{a}{b} = 0$ quando $b > a$.

ESEMPIO

$$M_1 = \frac{3}{3}, M_2 = \frac{2}{3}, M = 3$$

$$\binom{M_1 + M_2}{M} = \binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$$

3	2
①	②

convenzione $\begin{cases} ① & 1, 2, 3 \\ ② & 4, 5 \end{cases}$

In quel che segue scrivo i $\binom{5}{3} = 10$ sottosettemi e indica accanto il numero di elementi di tipo ①:

$$\begin{aligned} \{1, 2, 3\} &\rightarrow 3 \\ \{1, 2, 4\} &\rightarrow 2 \\ \{1, 2, 5\} &\rightarrow 2 \\ \{1, 3, 4\} &\rightarrow 2 \\ \{1, 3, 5\} &\rightarrow 2 \\ \{1, 4, 5\} &\rightarrow 1 \\ \{2, 3, 4\} &\rightarrow 2 \\ \{2, 3, 5\} &\rightarrow 2 \\ \{2, 4, 5\} &\rightarrow 1 \\ \{3, 4, 5\} &\rightarrow 1 \end{aligned}$$

Quindi: $P_0 = 0$, $P_1 = \frac{3}{10}$, $P_2 = \frac{6}{10}$, $P_3 = \frac{1}{10}$
(perché i 10 casi hanno tutta probabilità $\frac{1}{10}$).

Questi valori sono in accordo con le formule

$$P_k = \frac{\binom{3}{k} \binom{2}{3-k}}{\binom{5}{3}} = \frac{\binom{3}{k} \binom{2}{3-k}}{10} = \begin{cases} k=0 & 0 \quad \text{perché } \binom{2}{3}=0 \\ k=1 & \frac{3 \cdot 1}{10} = \frac{3}{10} \\ k=2 & \frac{3 \cdot 2}{10} = \frac{6}{10} \\ k=3 & \frac{1 \cdot 1}{10} = \frac{1}{10} \end{cases}$$

del resto almeno un elemento di tipo ① deve essere estratto

ESTENSIONE AL CASO CON PIÙ DI 2 TIPI

Supponiamo di avere



e di estrarre ^{a caso} n oggetti in blocco con $M < M_1 + M_2 + \dots + M_r$.

Quanto vale la probabilità di estrarre $\begin{cases} k_1 \text{ oggetti } ① \\ \vdots \\ k_r \text{ oggetti } ② \end{cases}$, dove $k_1 + \dots + k_r = n$?

Con ragionamenti simili si vede che

$$P_{k_1, \dots, k_r} = \frac{\binom{m_1}{k_1} \cdots \binom{m_r}{k_r}}{\binom{m_1 + \dots + m_r}{n}}$$

con le solite convenzioni
 $\binom{a}{b} = 0$ per $b > a$.

ESERCIZI DI RIEPILOGO DEL CAPITOLO

Esercizio

Un'urna ha 3 palline bianche e 4 nere. Si estraggono 2 palline a caso, una alla volta e ~~con~~^{con} reinsegnamento.

- 1) Calcolare le probabilità di estrarre due colori uguali.
- 2) Calcolare le probabilità di estrarre almeno una pallina nera.

Svolgimento

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$B_k = \{k\text{-sima estratta bianca}\}$$

$$N_k = \{k\text{-sima estratta nera}\}$$

$$\left(\text{quindi } B_k = N_k^c \text{ e } N_k = B_k^c \right)$$

EVENTI con le cui avvenimenti sono indipendenti perché le estrazioni sono con reinsegnamento

1) La prob. richiesta è

$$P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) \stackrel{\text{inclusione vuota tra } B_1 \cap B_2 \text{ e } N_1 \cap N_2}{=} P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_1)P(B_2) + P(N_1)P(N_2) = \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} + \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{9+16}{49} = \frac{25}{49}$$

$P(B_1) = P(B_2)$ perché l'urna è composta sempre nello stesso modo prima di ogni estrazione
 $P(N_1) = P(N_2)$

2) ~~Calcolare~~ le prob. richiesta è $P(N_1 \cup N_2)$.

$$\begin{aligned} 1^{\circ} \text{ modo: } P(N_1 \cup N_2) &= P(N_1) + P(N_2) - \underbrace{P(N_1 \cap N_2)}_{= P(N_1)P(N_2)} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \\ &= \frac{8}{7} - \frac{16}{49} = \frac{56-16}{49} = \frac{40}{49} \end{aligned}$$

$$2^{\circ} \text{ modo: } P(N_1 \cup N_2) = 1 - P((N_1 \cup N_2)^c) \stackrel{\text{TASSETTA DI DE MORGAN}}{=} 1 - P(N_1^c \cap N_2^c)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - P(B_1 \cap B_2) = 1 - P(B_1)P(B_2) = 1 - \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{7} = 1 - \frac{9}{49} \\ &= \frac{49-9}{49} = \frac{40}{49} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Rispondiamo alle stesse domande nel caso di estrazioni sensu resampling.

~~Qui non si ha indipendenza per eventi di estrazioni diverse.~~ Si ha

$$P(B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(B_2|B_1^c)P(B_1^c) \Leftrightarrow \boxed{\text{oss. } \{B_2, N_2\} \text{ è una partizione}}$$

$$\text{Formula Prob. Totale} = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6+12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

(quindi $P(B_1) = P(B_2)$; questo accade sempre e non perché si ha questo tipo diurna)
 $\Rightarrow P(N_2) = 1 - P(B_2) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$.

Allora

$$1) P((B_1 \cap B_2) \cup (N_1 \cap N_2)) = P(B_1 \cap B_2) + P(N_1 \cap N_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) + P(N_2|N_1)P(N_1)$$

$$= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} + \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{6+12}{42} = \frac{18}{42} = \frac{3}{7}$$

$$2) P(N_1 \cup N_2) = P(N_1) + P(N_2) - \underbrace{P(N_1 \cap N_2)}_{= P(N_2|N_1)P(N_1)} = \frac{4}{7} + \frac{4}{7} - \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} =$$

$$= \frac{8}{7} - \frac{12}{42} = \frac{48-12}{42} = \frac{36}{42} = \frac{6}{7} \quad (1^\circ \text{ modo})$$

$$P(N_1 \cup N_2) = 1 - P((N_1 \cup N_2)^c) = 1 - P(N_1^c \cap N_2^c) = 1 - P(B_1 \cap B_2)$$

$$= 1 - P(B_2|B_1)P(B_1) = 1 - \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} = 1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7} \quad (2^\circ \text{ modo})$$

Ulteriore commento:

Qui faccio una anticipazione sul fatto che la distribuzione ipergeometrica può essere usata anche per estrazioni casuali sensu resampling

(come quelle di queste ~~osservazioni~~).

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_2|B_1)P(B_1) = \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7} \quad \text{coincide con } \frac{\binom{3}{2}\binom{4}{0}}{\binom{7}{2}} = \frac{3 \cdot 1}{21} = \frac{1}{7}$$

$$P(N_1 \cap N_2) = P(N_2|N_1)P(N_1) = \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{7} = \frac{2}{7} \quad \text{coincide con } \frac{\binom{3}{0}\binom{4}{2}}{\binom{7}{2}} = \frac{1 \cdot 6}{21} = \frac{2}{7}$$