

FORMULE LEGATE ALLE PROBABILITÀ CONDIZIONATE

- 1) REGOLA DEL PRODOTTO (o FORMULA INVERSA)
- 2) FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI
- 3) FORMULA DI BAYES

OSS. Vale anche per $P(B)=0$
può si presentare bloccato.
 $A \cap B \subset B \Rightarrow P(A \cap B)=0$
e quindi $0=0$ anche se
 $P(A|B)$ è indeterminato

→ 1) A partire da $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si ottiene

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

Questo formula è utile quando la probabilità condizionata segue dal problema e la probabilità dell'intersezione è la grandezza da calcolare.

Questa formula può essere usata anche per l'intersezione di più di due eventi. Ad esempio, nel caso di 3 eventi, si ha $P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B \cap C)$

e quindi

$$P(A \cap B \cap C) = P(A|B \cap C)P(B \cap C)P(C)$$

ESEMPI

Un'urna contiene 2 palline bianche, 3 rosse e 4 nere.

Si estraggono 3 palline a caso, una alle volte e senza rimbalzo.

- 1) Calcolare le probabilità di ottenere la sequenza (rosso, non rosso) nelle prime due estrazioni.
- 2) Calcolare le probabilità di ottenere la sequenza (rosso, bianco, rosso).

RISPOSTE

In questi casi si deve scegliere bene quali sono gli eventi per applicare le formule; infatti, se si scelgono male, otterremo ragionevoli ma non utili per ottenere i valori numerici che ~~cerchiamo~~ cerchiamo.

Tipicamente si fa riferimento al "condizionamento rispetto alle estrazioni precedenti".

$$1) P(R_1 \cap R_2^c) = P(R_2^c|R_1)P(R_1) = \frac{6}{8} \cdot \frac{3}{9} = \dots = \frac{1}{4}$$

$$2) P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(R_3|R_1 \cap B_2)P(B_2|R_1)P(R_1) = \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{9} = \dots = \frac{1}{42}$$

OSSERVAZIONI

a) Supponiamo di "seguire male" gli eventi. Ad esempio possiamo scrivere

$$P(R_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(R_3 | B_2 \cap R_1) \underbrace{P(R_1 | B_2)}_{= P(R_1 \cap B_2)} P(B_2),$$

Questa uguaglianza è vera ma non è direttamente utilizzabile poiché non sappiamo dare un valore numerico per $P(R_1 | B_2)$ e per $P(B_2)$ in maniera diretta.

b) le probabilità di certe sequenze di risultati non cambiano se cambiemo un ordine diverso dei risultati stessi.

Ad esempio calcoliamo la probabilità di ottenere le sequenze di colori (bianco, rosso, nero) e (nero, bianco, rosso). Allora:

$$P(B_1 \cap R_2 \cap N_3) = P(N_3 | B_1 \cap R_2) P(R_2 | B_1) P(B_1) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{9} = \dots = \frac{1}{21}$$

$$P(N_1 \cap B_2 \cap R_3) = P(R_3 | N_1 \cap B_2) P(B_2 | N_1) P(N_1) = \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{8} \cdot \frac{4}{9} = \dots = \frac{1}{21}$$

FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Supponiamo di avere una partizione di eventi finita e numerabile

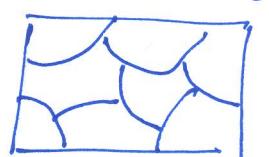
$$\{E_i : i \in I\} \quad \left(I = \{1, \dots, n\} \text{ oppure } I = \{1, 2, 3, \dots\} \right)$$

per formare le sole

~~partizioni~~

Questo significa che $\bigcup_{i \in I} E_i = \Omega$ e che $E_i \cap E_j = \emptyset$ per $i \neq j$

Inoltre sia A un altro evento.



Si usa queste formule per calcolare $P(A)$ quando si conoscono $\{P(E_i)\}_{i \in I}$ e $\{P(A | E_i)\}_{i \in I}$

per i valori per cui
 $P(A | E_i) \neq 0$
 (in ogni caso le cose vengono)

PD

Allora

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Sigma \\ P(A) &\stackrel{\text{def}}{=} P(A \cap \Sigma) = P\left(A \cap \left(\bigcup_{i \in I} E_i\right)\right) \stackrel{\text{proprietà distributiva}}{=} P\left(\bigcup_{i \in I} (A \cap E_i)\right) \\ &= \sum_{i \in I} P(A \cap E_i) \end{aligned}$$

$$(A \cap E_i) \cap (A \cap E_j) = \emptyset$$

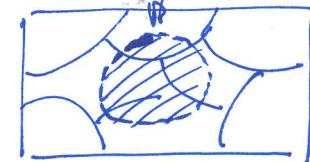
per i $i \neq j$

Ora per ciascun addendo
per cui $P(E_i) \neq 0$ se ha

$$P(A \cap E_i) = P(A|E_i) P(E_i)$$

In conclusione

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|E_i) P(E_i)$$



oss.

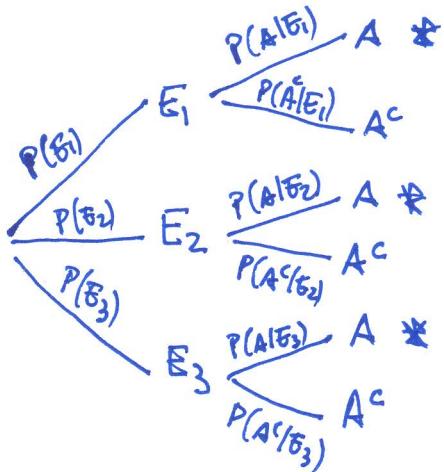
In ogni caso, se fosse
 $P(E_i) = 0$, si avrebbe
 $P(A \cap E_i) = 0$
e vale l'uguaglianza
anche se
 $P(A|E_i)$ non è
ben definita

Un caso particolare è quello in cui la partizione è costituita da due

eventi: $\begin{cases} E_1 = E \\ E_2 = E^c \end{cases}$. Allora $P(A) = P(A|E)P(E) + P(A|E^c)P(E^c)$.

~~Diagramma ad albero~~ DIAGRAMMA AD ALBERO ASSOCIAZIONE ALLA FORMULA DELLE PROBABILITÀ TOTALI

Si può costruire un diagramma ad albero associato dove ogni diramazione fa riferimento ad una partizione (ogni diramazione considera tutti i casi possibili). Ad ogni ramo si associa una probabilità. Per fissare le idee consideriamo il caso $I = \{1, 2, 3\}$



Siamo interessati a tutte le foglie che fanno con A indicate da un asterisco *.

Si deve considerare le somme dei pesi dei cammini che fanno con A ottenuti con i prodotti dei pesi dei rami:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|E_1)P(E_1) + P(A|E_2)P(E_2) \\ &\quad + P(A|E_3)P(E_3). \end{aligned}$$

ESEMPIO

Un'urne ha 2 palline bianche e 1 nera.

Si lancia un dado equo:

- Se esce il numero 1 si mettono 2 palline bianche nell'urne.
- Se escono i numeri 2 e 3 si mettono nell'urna 1 pallina bianca e 1 nera.
- Se escono i numeri 4, 5 e 6 si mettono 2 palline nere nell'urne.

Poi si estrae una pallina e caso dall'urne.

Calcolare le probabilità di estrarre una pallina bianca.

RISPOSTA

Siamo interessati all'evento $B = \{\text{estratta pallina bianca}\}$.

Permettendo calcolare le probabilità ~~dell'urna~~ di B se conosciamo quale dei 3 "caso" si è verificato. I tre "caso" costituiscono una partizione

$$E_1 = \{\text{esce } \boxed{1}\} \quad E_2 = \{\text{esce } \boxed{2} \circ \boxed{3}\} \quad E_3 = \{\text{esce } \boxed{4} \circ \boxed{5} \circ \boxed{6}\}$$

e che:

$P(\bar{E}_1) = \frac{1}{6}$	$P(\bar{E}_2) = \frac{2}{6}$	$P(\bar{E}_3) = \frac{3}{6}$	(ovvio perché il dado è equo)
$P(B E_1) = \frac{4}{5}$	$P(B \bar{E}_2) = \frac{3}{5}$	$P(B \bar{E}_3) = \frac{2}{5}$	
$\boxed{4} \boxed{1} \boxed{ }$	$\boxed{3} \boxed{2} \boxed{N }$	$\boxed{2} \boxed{3} \boxed{N }$	

Per la formula delle prob. totali

In conclusione: $P(B) = P(B|E_1)P(E_1) + P(B|\bar{E}_2)P(\bar{E}_2) + P(B|\bar{E}_3)P(\bar{E}_3) =$

$$= \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4+6+6}{30} = \frac{16}{30} = \frac{8}{15}$$

OSSERVAZIONE

Sappiamo che le prob. di estrarre nera è $P(B^c) = 1 - P(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$.

Quanto illustrato si ottiene ancora con le formule delle prob. totali:

$$P(B^c) = P(B^c|E_1)P(E_1) + P(B^c|\bar{E}_2)P(\bar{E}_2) + P(B^c|\bar{E}_3)P(\bar{E}_3)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6} \\ &= \frac{1+4+9}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15} \end{aligned}$$

13

FORMULA DI BAYES

Sappiamo che $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ con l'ipotesi $P(B) \neq 0$.

Inoltre ~~$A \cap B$~~ e $B \cap A$ sono lo stesso evento; quindi:

$$\cancel{P(A \cap B)} = P(B|A) \cdot A = P(B|A) P(A).$$

↑ regola del prodotto

Quindi, sostituendo nelle formule iniziali, si ha

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) P(A)}{P(B)}$$

Questa formula si usa quando viene chiesto una probabilità condizionata $P(A|B)$ e le probabilità condizionate $P(B|A)$

- Condizionate $P(A|B)$ e le probabilità condizionate $P(B|A)$ (cioè quelle in cui A e B si cambiano) si calcola facilmente, e comunque questo è più agevole rispetto a valutare l'evento intersezione $A \cap B$.

Prima di procedere con alcuni esempi, si vuole sottolineare che negli esercizi tabellati (oltre sempre) queste formule si usano combinandole con le formule delle probabilità totali per calcolare il denominatore $P(B)$.

In altri termini negli esercizi si potranno fare riferimento ad una partizione $\{E_n\}_{n \in I}$ finita e numerabile, sapendo calcolare facilmente $P(B|E_n)$ per $n \in I$, e venire chiesto di calcolare probabilità condizionate del tipo

$$P(E_n|B) \quad \text{sempre per } n \in I.$$

Quindi tipicamente si sarà

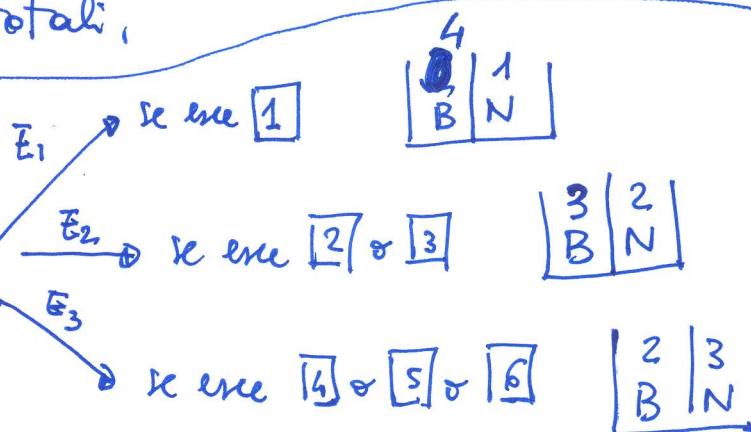
$$P(E_n|B) = \frac{P(B|E_n) P(E_n)}{\sum_{i \in I} P(B|E_i) P(E_i)} \quad \text{per } n \in I$$

ESEMPIO

Consideriamo ancora l'esempio che abbiamo visto per le formule delle probabilità totali.

Si lancia un dado equo
(universale)

2	1
B	N



Supponiamo che venga chiesto di calcolare le seguenti probabilità condizionate.

Calcolare le probabilità che sia uscito 2 o 3 nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca.
|| Con riferimento alle notazioni viste precedentemente ||

viene chiesto di calcolare $P(E_2|B)$.

Ricordiamo che, come conseguenze dirette del testo, si ha:

$$\begin{cases} P(E_1) = \frac{1}{6}, P(\bar{E}_1) = \frac{5}{6}; \\ P(B|E_1) = \frac{4}{5}, P(B|\bar{E}_1) = \frac{1}{5}, P(B|E_2) = \frac{3}{5}, P(B|\bar{E}_2) = \frac{2}{5}, P(B|E_3) = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Quindi si calcola ugualmente (immediatamente) dal testo $P(B|E_2)$ e viene chiesta $P(E_2|B)$. Allora si usa le formule di Bayes!

$$\begin{aligned}
 P(E_2|B) &= \frac{P(B|E_2) P(E_2)}{P(B)} = \frac{P(B|E_2) P(E_2)}{P(B|E_1) P(E_1) + P(B|E_2) P(E_2) + P(B|E_3) P(E_3)} \\
 &= \frac{\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6}} = \dots = \frac{6}{4+6+6} = \frac{3}{8}.
 \end{aligned}$$

QUI FORTUNA
PRE-BAYESI

Altre domande possibili sono le seguenti:

Calcolare le prob. che sia usata 1 secondo di aver estratto una pallina bianca.

Calcolare le probabilità che siano usate 4 o 5 o 6 secondo di aver estratto una pallina bianca.

In questi due casi le probabilità richieste sono $P(E_1|B)$ e $P(E_3|B)$. In corrispondenza si ha

$$P(\bar{E}_1|B) = \frac{P(B|\bar{E}_1)P(\bar{E}_1)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6}} = \dots = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{E}_3|B) = \frac{P(B|\bar{E}_3)P(\bar{E}_3)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6}}{\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6}} = \dots = \frac{3}{8}$$

con stesso denominatore
 delle domande precedente

OSSERVAZIONE

Abbiamo ottenuto che $P(\bar{E}_i|B) = \begin{cases} 2/8 & \text{per } i=1 \\ 3/8 & \text{per } i=2 \\ 3/8 & \text{per } i=3 \end{cases}$.

Quindi $\cancel{P(E_1|B)+P(E_2|B)+P(E_3|B)=1}$.

Questo è in accordo con il fatto che la somma delle probabilità degli eventi di una partizione è sempre uguale a 1 (infatti ad esempio $P(E_1)+P(E_2)+P(E_3) = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = 1$) e che

$P(\cdot|B)$ è una misura di probabilità.

Considereremo altre possibili domande.

Calcolare le probabilità che sia uscito $\boxed{2}$ o $\boxed{3}$ sapendo di aver estratto una pallina nera.

Calcolare le probabilità che esca un numero dispari nel lancio del dado sapendo di aver estratto una pallina bianca.

Nel primo caso si chiede di calcolare $P(\bar{E}_2 | B^c)$.

Si ha

$$P(\bar{E}_2 | B^c) = \frac{P(B^c | \bar{E}_2) P(\bar{E}_2)}{P(B^c)}.$$

Sotto $\boxed{\text{B}}$ l'urne è così composta: $\begin{array}{c|c} 3 & 2 \\ \hline B & N \end{array}$

Quando si ha

$$P(B^c | \bar{E}_2) = \frac{2}{5} \quad (\text{del resto } P(B^c | \bar{E}_2) = 1 - P(B | \bar{E}_2))$$

$$= 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5})$$

$P(\cdot | \bar{E}_2)$
è una
di probabilità.

$P(B^c)$ è stata calcolata precedentemente:

$$1 - P(B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15} \quad \text{oppure} \quad P(B^c) = \sum_{k=1}^3 P(B^c | \bar{E}_k) P(\bar{E}_k) = \dots = \frac{7}{15}$$

L.F. Prob. Totale,

Quindi

$$P(\bar{E}_2 | B^c) = \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6}}{\frac{7}{15}} = \frac{4}{30} \cdot \frac{15}{7} = \frac{2}{7}.$$

OSSERVAZIONE In genere non è vero che $P(\bar{E}_2 | B) + P(\bar{E}_2 | B^c) = 1$.

$$\text{Infatti } P(E_2 | B) + P(E_2 | B^c) = \frac{3}{8} + \frac{2}{7} = \frac{21 + 16}{56} = \frac{37}{56}.$$

Nel secondo caso (prob. che esca almeno un numero pari di numeri bianchi) le partizioni $E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2, 3\}$, $E_3 = \{4, 5, 6\}$ non ci è di aiuto per risolvere il problema.

E' più opportuno considerare la seguente partizione:

$$\{F_1, \dots, F_6\} \quad \text{dove} \quad F_k = \{\text{esce } k \text{ nel lancio del dado}\}.$$

$$\text{Allora } P(F_1) = \dots = P(F_6) = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Inoltre } P(B|F_k) = \begin{cases} P(B|E_1) = \frac{4}{5} & \text{per } k=1 \\ P(B|E_2) = \frac{3}{5} & \text{per } k=2, 3 \\ P(B|E_3) = \frac{2}{5} & \text{per } k=4, 5, 6 \end{cases} \quad (*)$$

La probabilità richiesta è

$$P(D|B), \quad \text{dove } D = F_1 \cup F_3 \cup F_5.$$

COMMENTO

Questa uguaglianza è vera ma poco utile:

$$P(D|B) = \frac{P(B|D)P(D)}{P(B)}$$

Infatti non
sappiamo calcolare
facilmente $P(B|D)$

Allora procediamo così:

$$P(D|B) = P(F_1 \cup F_3 \cup F_5 | B) = P(F_1 | B) + P(F_3 | B) + P(F_5 | B).$$

Poi calcoliamo $P(F_k | B)$ per $k=1, \dots, 6$.

Sì ha

$$P(F_k | B) = \frac{P(B|F_k)P(F_k)}{P(B)} = \frac{1}{6}$$

$\hookrightarrow = \frac{8}{15}$ già calcolato.

OSS.

Il valore di $P(B)$
si recupera
come segue:

$$P(B) = \sum_{k=1}^6 P(B|F_k)P(F_k)$$

Allora

$$\begin{aligned} P(F_k|B) &= \frac{P(B|F_k) \cdot \frac{1}{6}}{\frac{8}{15}} = P(B|F_k) \cdot \frac{1}{\frac{8}{15}} \cdot \frac{15}{8} = \\ &= P(B|F_k) \cdot \frac{5}{16} = \underbrace{\left\{ \begin{array}{ll} \frac{4}{8} \cdot \frac{5}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} & \text{per } k=1 \\ \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{16} = \frac{3}{16} & \text{per } k=2,3 \\ \frac{2}{8} \cdot \frac{5}{16} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8} & \text{per } k=4,5,6 \end{array} \right.}_{\text{Sostituendo i valori in (*)}} \end{aligned}$$

OSS:

$$\sum_{k=1}^6 P(F_k|B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4+6+6+2+2+2}{16} = \frac{16}{16} = 1$$

in accordo con la Teoria ($\{F_1, \dots, F_6\}$ è una partizione)

In conclusione

$$\begin{aligned} P(D|B) &= P(F_1|B) + P(F_3|B) + P(F_5|B) = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{1}{8} = \\ &= \frac{4+3+2}{16} = \frac{9}{16}. \end{aligned}$$

OSS.

che esca
la probabilità ~~dell'estrazione di un numero pari~~ significa che
è stata estratta una pallina bianca e

$$P(D^c|B) = 1 - P(D|B) = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}.$$

$P(\cdot|B)$ è una misura di probabilità

Del resto

$$\begin{aligned} P(D^c|B) &= P(F_2|B) + P(F_4|B) + P(F_6|B) = \frac{3}{16} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \\ &= \frac{3+2+2}{16} = \frac{7}{16} \end{aligned}$$

INDIPENDENZA TRA EVENTI

Iniziamo con il caso di due eventi:

~~Definizione di indipendenza tra A e B~~

Siamo interessati al caso in cui

$$P(A|B) = P(A) \quad \text{se } P(B) \neq 0 \quad \begin{pmatrix} \text{"e si potrebbe dire} \\ \text{"A indipendente da B"} \end{pmatrix}$$

eppure al caso

$$P(B|A) = P(B) \quad \text{se } P(A) \neq 0 \quad \begin{pmatrix} \text{"e si potrebbe dire} \\ \text{"B indipendente da A"} \end{pmatrix}$$

In questo senso abbiamo due concetti apparentemente diversi. Inoltre ~~sembra~~ sembra che si debbano escludere in qualche caso gli eventi di probabilità zero.

In realtà la trattazione è più semplice e consideriamo la seguente definizione dove gli eventi di probabilità zero sono consentiti.

DEFINIZIONE (indipendenza fra due eventi)

A, B & C sono indipendenti se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

OSS

Se A e B sono indipendenti, allora lo sono anche B e A.
Infatti $A \cap B = B \cap A$ e il prodotto fra due numeri è comutativo.

Quindi quello che si dimostra per A e B in un certo ordine,
si dimostra anche per ~~B~~ A e B presi in ordine inverso.

PROPOSITIONE

~~DEFINIZIONE~~ Sono A, B & t con $P(B) \neq 0$. Allora

\Rightarrow A e B sono indipendenti $\Leftrightarrow P(A|B) = P(A)$.

DIMOSTRAZIONE

Si ha

$$\text{A e B indipendenti} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} P(A \cap B) = P(A)P(B) \stackrel{\text{s. chiuso per } P(B)}{\Leftrightarrow} \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)}$$

$$\Leftrightarrow P(A|B) = P(A).$$

\uparrow def. di prob. condizionate.

□

~~DEFINIZIONE~~ sulle simmetrie tra A e B nella definizione di indipendenza,
Per quanto osservato prima si ha anche la seguente
propostione che si dimostra in maniera analoga.

PROPOSITIONE

Sono A, B & t con $P(A) \neq 0$. Allora

A e B sono indipendenti $\Leftrightarrow P(B|A) = P(B)$.

CONSEGUENZE

1) Se un evento ha probabilità zero, allora è indipendente
da qualunque altro. Infatti, se ~~presumiamo~~ A, B & t con
 $P(A)=0$, si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0 \\ \uparrow \qquad \qquad \uparrow \\ \text{ovvi} \qquad A \cap B \subset A \\ P(A)P(B) = 0 \cdot P(B) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow P(A \cap B) = 0$$

e quindi

$$P(A \cap B) = \underbrace{P(A)}_{=0} \underbrace{P(B)}_{=0}$$

2) Supponiamo che A e B siano indipendenti.

Allora, se uno dei due eventi, o entrambi, vengono complementati, allora abbiamo ancora eventi indipendenti:

A^c, B sono indipendenti

A, B^c sono indipendenti

A^c, B^c sono indipendenti.

~~Infatti~~ ~~sappiamo~~ ^{riferimento} Verifichiamo la prima \checkmark .

- Si ha $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ per ipotesi.

Allora

$$\boxed{P(A^c \cap B)} = P(B) - P(A \cap B) \xrightarrow{\text{ipotesi}} P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A))$$

\uparrow

$$P(A \cap B) + P(A^c \cap B) = P(B)$$

$$\xrightarrow{\quad} \frac{P(B)P(A^c)}{P(A^c)P(B)}$$

- L'uguaglianza $P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$

si dimostra in maniera analoga (del resto dato che si può scombinare il ruolo di A e B per simmetria nella definizione, quel che accade solo il primo evento vale anche complementando il secondo evento).

- Inoltre

$A \cap B$ sono indipendenti $\Rightarrow A \cap B^c$ sono indipendenti

$\Rightarrow A^c \cap B^c$ sono indipendenti.

3) Mettendo insieme 1) e 2) si ha che

Se un evento ha probabilità 1, allora è indipendente da qualunque altro. Del resto abbiamo già visto in precedenza

che $\boxed{P(B) = 1 \Rightarrow P(A|B) = P(A)}.$