GEOMETRIA AFFINE

Def: V spazio vettoriale,
$A \subset V$ sottoinsieme si dice uno
spazio affine di dimensione n
se esistono $\underline{v}_0 \in V$ e $W \subseteq V$ sottospazio
tali che $\dim W = n$

$$A = \{ \underline{v} \in V \text{ t.c. } \underline{v} - \underline{v}_0 \in W \}$$

ovvero

$$A = W + \underline{v}_0 = \{ \underline{v} \in V \text{ t.c. } \underline{v} = \underline{w} + \underline{v}_0, \ \underline{w} \in W \}$$

Esempi: A matrice $m \times n$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$
sia $\mathcal{A} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } A\underline{x} = \underline{b} \}$

es: $\begin{cases} x+y=2 \\ x+y-z=1 \end{cases}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\not{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } \begin{cases} x+y=2 \\ x+y-z=1 \end{cases} \right\}$$

Abbiamo visto:

$$S = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \text{ t.c. } A\underline{x} = 0 \}$$ soluzioni del sistema lineare omog. associato

- S è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ di dimensione: $n - \operatorname{rg} A$

- data una soluzione $\underline{x}_0$ di $A\underline{x} = \underline{b}$ ovvero $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ tale che $A\underline{x}_0 = \underline{b}$ (se esiste!) allora ogni altra soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$ è della forma

$$\underline{x}_0 + \underline{y} \qquad \text{con} \quad \underline{y} \in S$$

ovvero:

$$\mathbb{A} = \underline{x}_0 + S$$

quindi $\mathbb{A}$ è uno spazio affine di dimensione $n - \mathrm{rg}A$.

Esempio:

$$\mathbb{A}^n := \mathbb{R}^n \quad \text{(come insieme)}$$

$$\mathbb{A}^n = \underbrace{\mathbb{R}^n}_{\substack{\text{spazio} \\ \text{vettoriale di dim } n}} + \underline{0}$$

Def: se $\mathbb{A}$ è uno spazio affine $\mathbb{A} = \underline{v}_0 + W$ allora W si
spazio vettoriale
dice lo spazio tangente ad $\mathbb{A}$ e si indica con $T\mathbb{A}$

Def: Sia $\mathbb{A}$ uno spazio affine di dim n e sia $T\mathbb{A}$ lo spazio tangente un sottoinsieme $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ si dice un sottospazio affine di $\mathbb{A}$ se esistono $\underline{y}_0 \in \mathbb{B}$ e un sottospazio $W \subseteq T\mathbb{A}$ tali che

$$\mathbb{B} = \underline{y}_0 + W$$

(ovvero $\mathbb{B}$ è uno spazio affine contenuto in $\mathbb{A}$)

- se $\dim W = 1$ $\mathbb{B}$ si dice una retta affine
- se $\dim W = 2$ $\mathbb{B}$ si dice un piano affine
- se $\dim W = \dim T\mathbb{A} - 1$ $\mathbb{B}$ si dice un iperpiano affine

DEF: gli elementi di uno spazio affine si dicono punti

V sp. vett. $\mathbb{A} \subseteq V$
$T\mathbb{A} \subseteq V$, $\underline{v_0} \in V$

OSS: se $P, Q \in \mathbb{A}$ allora per definizione esistono $\underline{v}, \underline{w} \in T\mathbb{A}$ e $\underline{v_0}$ tali che $P = \underline{v_0} + \underline{v}$ $Q = \underline{v_0} + \underline{w}$

$$\underbrace{P - Q}_{\text{è la somma in } V} = (\underline{v_0} + \underline{v}) - (\underline{v_0} + \underline{w}) =$$

del vettore $P \in V$

$-Q \in V$

$P + (-Q)$

$$= \cancel{\underline{v}_0} + \underline{v} - \cancel{\underline{v}_0} + \underline{w} = \underset{\substack{\cap \\ T/A}}{\underline{v}} + \underset{\substack{\cap \\ T/A}}{\underline{w}} \in T/A$$

<u>mentre</u> $$P + Q = \underbrace{\underline{v}_0 + \underline{v} + \underline{v}_0 + \underline{w}}_{\substack{\cap \\ V}} \overset{?}{\notin} T/A$$

più precisamente:

$$\underline{v}_0 + \underline{v} + \underline{v}_0 + \underline{w} = 2\underline{v}_0 + \underline{v} + \underline{w} \in T/A$$

se e solo se $\underline{v}_0 \in T/A$

(perché se $\underbrace{2\underline{v}_0 + \underline{v} + \underline{w}}_{\substack{\parallel \\ \underline{u}}} \in T/A$ si ha

$$2\underline{v}_0 = \underbrace{\underset{\substack{\cap \\ T/A}}{\underline{u}} - \underset{\substack{\cap \\ T/A}}{\underline{v}} - \underset{\substack{\in \\ T/A}}{\underline{w}}}_{T/A}$$

$I\!A$

Pertanto è ben definita:

$$\boxed{\begin{aligned} I\!A \times I\!A &\longrightarrow TI\!A \\ (P, Q) &\longmapsto P-Q \end{aligned}}$$

$$\underset{\substack{\cap \\ I\!A}}{P} = \underset{\substack{\cap \\ I\!A}}{Q} + \underset{\substack{\cap \\ TI\!A}}{\underbrace{(P-Q)}}$$

RETTE AFFINI

$I\!A$ spazio affine di dim n.

$r \subseteq I\!A$ retta affine:

$Tr \subseteq TI\!A$, $\dim Tr = 1$

pertanto esiste $\underline{v} \in TI\!A$ tale che

$Tr = \text{span}\{\underline{v}\}$

$P_0 \in r$

$r := \{ P \in \mathbb{A} \text{ t.c. } P - P_0 \in T_r \}$

poiché ogni $\underline{w} \in T_r$ è

$\underline{w} = \lambda \cdot \underline{v} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\boxed{r = \{ P \in \mathbb{A} \text{ t.c. } P - P_0 = \lambda \underline{v}, \ \lambda \in \mathbb{R} \}}$$

equazione parametrica

$\underline{v}$ è un vettore tangente alla retta

$\begin{pmatrix} \# \\ \underline{0} \end{pmatrix}$

Esempio: $\mathbb{A}^3 \qquad T\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3 \quad (\mathbb{A}^3 = \mathbb{R}^3 + \underline{0})$

sia $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Trovare l'equazione parametrica della

retta affine in $\mathbb{A}^3$ passante per P_0 e tangente a $\underline{v}$.

$$r = \left\{ P \in \mathbb{A}^3 \text{ t.c. } P - P_0 = \lambda \underline{v}, \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3 \text{ t.c. } \begin{cases} x - 1 = \lambda \\ y = \lambda \\ z + 1 = \lambda \end{cases} \ \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Domanda: il punto $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in r$?

dobbiamo sostituire $x=0$, $y=0$, $z=0$
e risolvere (se possibile)

$$\begin{cases} 0 = 1+\lambda \\ 0 = \lambda \\ 0 = -1+\lambda \end{cases} \qquad \begin{cases} 0=1 \\ \lambda = 0 \\ 0-1 \end{cases} \quad \lightning$$

non esiste λ che risolve e

quindi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin r$.

Esempio: in $\mathbb{A}^3$ determinare l'equazione parametrica della retta affine che passa (= che contiene) per i punti $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$P_0 := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $P_1 := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

se $P_0, P_1 \in r \implies P_0 - P_1 \in Tr$

$$\implies P_0 - P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in Tr$$

ma $\dim Tr = 1 \implies$

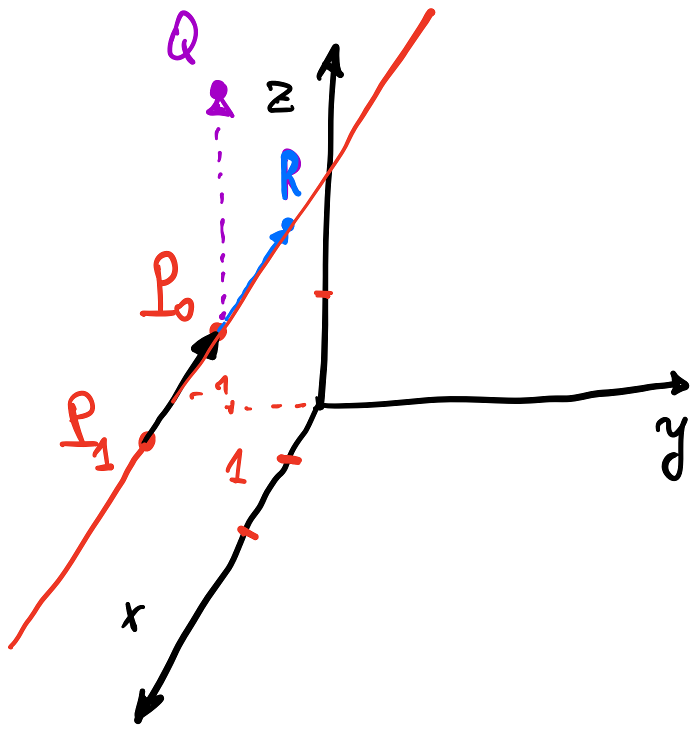
$$Tr = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

pertanto

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3 \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3 \text{ t.c. } \begin{cases} x - 1 = -\lambda \\ y + 1 = -\lambda \\ z - 1 = 0 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$



DEF: $\mathbb{A}$ spazio affine, $\mathbb{B}_1$, $\mathbb{B}_2$ sottospazi affini. $\mathbb{B}_1$ e $\mathbb{B}_2$ sono **paralleli** se $T\mathbb{B}_1 \subseteq T\mathbb{B}_2$ oppure $T\mathbb{B}_2 \subseteq T\mathbb{B}_1$

Esempio: sia r la retta di $\mathbb{A}^3$ passante per $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Sia $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Determinare la retta parallela ad r e passante per Q.

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \in Tr$$

$$\Rightarrow Tr = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Sia s la retta parallela a r passante per Q.

$$\dim Ts = 1 \quad \Rightarrow \quad Tr = Ts$$

$$\Rightarrow Ts = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$s: \begin{cases} x = \boxed{0} + \lambda \boxed{(-1)} \\ y = 0 + \lambda (-1) \\ z = 2 + \lambda\, 2 \end{cases}$$

Q base di T_S

$$s = \begin{cases} x = -\lambda \\ y = -\lambda \\ z = 2 + 2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Esempio: sia

$$r = \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

determinare:

1) la retta affine s parallela a r passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $r = s$?

3) Dire se $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$

1) $Tr = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\} = Ts$

perché $r = \begin{cases} x = 0 + \lambda \cdot 0 \\ y = 1 + \lambda \cdot 1 \\ z = 0 + \lambda \cdot 1 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

è una base di Tr

$s = \begin{cases} x = 0 + \lambda \cdot 0 \\ y = 0 + \lambda \cdot 1 \\ z = 0 + \lambda \cdot 1 \end{cases}$ $s = \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

2) $s = r$?

I) $r = \left\{\begin{pmatrix}0\\1+\lambda\\\lambda\end{pmatrix}\right\}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

$s = \left\{\begin{pmatrix}0\\\mu\\\mu\end{pmatrix}\right\}$ $\mu \in \mathbb{R}$

se $r = s$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ deve esistere μ tale che

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1+\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mu \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 1+\lambda = \mu \\ \lambda = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} 0 = 0 \\ 1 = 0 \\ \lambda = \mu \end{cases} \quad \times\times$$