$A\underline{x} = \underline{b}$

OSS: se $\underline{y}_0$, $\underline{y}_1$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo $A\underline{x} = \underline{0}$
[ovvero $A\underline{y}_0 = \underline{0}$, $A\underline{y}_1 = \underline{0}$]
allora per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ il vettore $\lambda \underline{y}_0 + \mu \underline{y}_1$ è soluzione di $A\underline{x} = \underline{0}$

perché: $A(\lambda \underline{y}_0 + \mu \underline{y}_1) \underset{\text{prop. distrib.}}{=}$

$$= A(\lambda \underline{y}_0) + A(\mu \underline{y}_1) =$$

$$= \lambda \underbrace{(A\underline{y}_0)}_{= \underline{0}} + \mu \underbrace{(A\underline{y}_1)}_{= \underline{0}} = \lambda \underline{0} + \mu \underline{0}$$

$$= \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$$ $\square$

Quindi: $A\underline{x} = \underline{b}$

1°] trovare (se esiste) una soluzione $\underline{y}_0$

2°] trovare tutte le soluzioni di

$A\underline{x} = \underline{0}$

- Le soluzioni di $A\underline{x} = \underline{b}$ sono date da $\underline{y}_0 + \underline{z}$ $\quad (A\underline{z} = \underline{0})$

- Come si trovano le soluzioni di un sistema lineare?

$\underline{Es}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

si ricava che $x_3 = 1$

sostituiamo $x_3 = 1$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 1 = 3 \\ x_2 + 1 = 2 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 1 = 2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

è più complesso da risolvere

ELIMINAZIONE DI GAUSS

Data una matrice $m \times n$ sono ammesse le seguenti operazioni

1°] scambiare 2 righe

2°] sostituire una riga R_j con $R_j + kR_i$ dove $k \in \mathbb{R}$, $j, i = 1, \dots, m$, $j \neq i$

3°] sostituire una riga R_j con $k \cdot R_j$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ $\quad j = 1, \dots, m$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ \boxed{a_{j1} \quad \dots \quad a_{jn}} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \longrightarrow R_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$$

Esempi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

scambio la R_1 con R_3

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sostituire "$R_4 \to R_4 + R_2$"
(sostituire la 4 riga con la 4 riga + seconda riga)

$R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$R_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$R_4 + R_2 = \begin{pmatrix} 1+(-1) & 0+0 & 0+0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$R_4 \longrightarrow \frac{1}{3} \cdot R_4$$

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{3} R_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 + 4R_1$$

$$R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 + 4R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

DEF MATRICI A SCALA

Una matrice $m \times n$ si dice a scala se è della forma

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & * & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & 0 & 0 & \cdots 0 & p_2 & * & \cdots & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots 0 & p_3 & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & \cdots \\ 0 & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \end{pmatrix}$$

$p_1 \neq 0 \quad p_2 \neq 0 \quad p_3 \neq 0, \ldots \; p_i \neq 0$

sono i $\boxed{\text{PIVOT}}$

Esempi:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è a scala

i pivot sono 1 e 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è a scala

1, 1, 3 sono i pivot

3×4

3 pivot

$\min\{3,4\} = 3$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

è a scala

2 pivot (1 e 3)

3×5

$2 \leq \min\{3,5\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

è a scala

3 pivot (1, 1, 3)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ è a scala

3 pivot $(1, 1, 1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ a scala

4 pivot $(1, 1, 1, 1)$

OSS: il numero di pivot di una matrice a scala è $\leq$ del minimo tra il numero di righe e il numero di colonne della matrice.

ovvero se A è una matrice a scala con k pivot, $A \in Mat(m \times n)$ allora $k \leq \min\{m, n\}$

- ELIMINAZIONE DI GAUSS (EG) e RIDUZIONE A SCALA

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ non è a scala

utilizziamo EG per ridurla a scala

$R_1 \longleftrightarrow R_2$ (scambio R_1 con R_2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$R_3 \longrightarrow R_3 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a scala

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

EG

$$R_2 \longleftrightarrow R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1^{=p_1} & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

$$R_3 \longrightarrow R_3 + k R_1$$

in modo che

$$k \cdot p_1 = -2$$

$$R_3 + (-2 \cdot R_1)$$

$$\Rightarrow \overset{\overset{\shortparallel}{1}}{k} = -2$$

$$=$$

$$R_3 \to R_3 - 2R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

SISTEMI LINEARI E EG

$$\underline{A} \cdot \underline{x} = \underline{b} \rightsquigarrow (A \,\vdots\, \underline{b})$$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

sistema
n incognite
$x_1, \dots, x_n$
m equazioni

$$\downarrow$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad A \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (A \,\vdots\, \underline{b})$$

EG 1°

scambiare 2 equazioni — scambiare 2 righe

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - x_2 = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R_1 \longleftrightarrow R_2$$

$$\longleftarrow \left(\begin{array}{cc:c} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 2 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

Pertanto scambiare 2 righe nella matrice completa del sistema da luogo ad un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni)

EG 2

$$A\underline{x} = \underline{b} \qquad (A \,\vdots\, \underline{b})$$

$$R_j \longrightarrow R_j + k R_i$$

$$(*) \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = b_1 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} \alpha & \beta & b_1 \\ \gamma & \delta & b_2 \end{pmatrix}$$

$$R_2 \longrightarrow R_2 + k R_1$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta & b_1 \\ \gamma + k\alpha & \delta + k\beta & b_2 + k b_1 \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = b_1 \\ (\gamma + k\alpha) x_1 + (\delta + k\beta) x_2 = b_2 + k b_1 \end{cases}$$

$$(**) \begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = b_1 \\ (\gamma x_1 + \delta x_2) + k(\alpha x_1 + \beta x_2) = b_2 + k b_1 \end{cases}$$

- se x_1, x_2 è soluzione di $(*)$

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = b_1 \\ \underbrace{\underbrace{(\gamma x_1 + \delta x_2)}_{= b_2} + k(\overbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}^{= b_1})}_{b_2 + k b_1} = b_2 + k b_1 \end{cases}$$

allora x_1, x_2 è soluzione anche di $(**)$

• Viceversa se x_1, x_2 è soluzione di $(**)$ allora è anche soluzione di $(*)$

perchè se x_1, x_2 è soluz. di $(**)$

allora
$$\begin{cases} \underbrace{\alpha x_1 + \beta x_2}_{= b_1} = b_1 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 + k(\alpha x_1 + \beta x_2) = b_2 + k b_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha x_1 + \beta x_2 = b_1 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 + \cancel{k b_1} = b_2 + \cancel{k b_1} \end{cases}$$

Pertanto sostituire $R_j \to R_j + k R_i$ ($i \neq j$) nella matrice completa del sistema da luogo ad un sistema equivalente (cioè con le stesse soluzioni)