PROBABILITÀ CONDIZIONATA

ES: Calcolare la probabilità di estrarre un numero maggiore di 5 sapendo che è stato estratto un numero pari:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{dove } P(x) = \frac{\# X}{n}$$

oppure

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$$ FORMULA INVERSA

E' utile quando la PROBABILITÀ CONDIZIONATA segue dal testo dell'esercizio e la PROBABILITÀ D'INTERSEZIONE è la grandezza da calcolare

$$P(A) = \sum_{i \in I} P(A|E_i) \cdot P(E_i)$$ PROBABILITÀ TOTALI

Caso particolare: partizione costituita da due eventi (ES 2)

$$P(A) = P(A|E) \cdot P(E) + P(A|E^c) \cdot P(E^c)$$

Supponiamo $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$ con $P(B) \neq 0$. Inoltre $A \cap B$ e $B \cap A$ sono lo stesso evento quindi: $P(A \cap B) = P(B \cap A)$

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot (P(A))}{P(B)}$$ FORMULA DI BAYES

Formula che si usa quando viene chiesta una probabilità condizionata $P(A|B)$ e $P(B|A)$ dove A e B si scambiano

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Si usa per la v.a. che conta il numero di successi su n prove indipendenti, con probabilità di successo p in ogni prova (probabilità di fallimento $1-p$). ESEMPI

- n lanci di moneta (o n monete dello stesso tipo) ed il risultato è "esce testa" o "croce"
- n lanci di dado (o n dadi dello stesso tipo) ed il successo è "esce un numero in S" $S \subset 1,2,3,4,5,6$
- n estrazioni casuali una alla volta con reinserimento da un insieme di n_1 oggetti di tipo 1 e n_2 di tipo 2, il successo è "estratto tipo 1" o 2.

$$p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

n = prove
k = successi
p = prob. successo

$Var[X] = np(1-p)$ e $E[X] = np$.

DISTRIBUZIONE IPERGEOMETRICA

Si estraggono a caso m oggetti (dove $m < M_1 + M_2$) uno alla volta e senza reinserimento.

Successo $\iff$ "estrazione oggetto di tipo 1"
Fallimento $\iff$ "estrazione oggetto di tipo 2"

$$p_X(k) = \cancel{\binom{m}{k}} \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M_2}{m-k}}{\binom{M_1+M_2}{m}\cancel{\binom{m}{k}}} = \frac{\binom{M_1}{k}\binom{M_2}{m-k}}{\binom{M_1+M_2}{m}}$$

$$Var[X] = mp(1-p)\,\frac{M_1+M_2-m}{M_1+M_2-1} \quad e \quad E[X] = mp$$

ES: Abbiamo un'urna con 3 bianche e 4 nere. Si estraggono 2 palline con/senza reinserimento. Sia X la v.a. che conta il numero di bianche estratte. Calcolare $E[X]$ e $Var[X]$.

	$E[X]$	$Var[X]$
CON	$mp = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$	$mp(1-p) = 2 \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{24}{49}$
SENZA	$mp = 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{7}$	$mp(1-p) \cdot \frac{M_1+M_2-m}{M_1+M_2-1} = \frac{24}{49} \cdot \frac{7-2}{7-1} = \frac{20}{49}$

DISTRIBUZIONE BERNOULLIANA

Si usa questo termine quando $S_X = \{0,1\}$
Talvolta è utile pensare ad un evento $B \in A_0$ tale che
$X = 1 \iff$ l'evento si verifica
$X = 0 \iff$ l'evento non si verifica

$$p_X(1) = P(X=1) = P(B)$$
$$p_X(0) = P(X=0) = P(B^c)$$

$$Var[X] = p(1-p) \quad e \quad E[X] = p$$

DISTRIBUZIONE DI POISSON

Una v.a. ha distribuzione di Poisson con parametro $\lambda > 0$ se si ha

$$p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad \forall k \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Var[X] = \lambda \quad e \quad E[X] = \lambda$$

ES: Sia $X \sim Poisson(\lambda = 4)$:

1 Calcolare $P(X \geq 2)$

2 Calcolare $P(X = k \mid X \leq 2)$ $\forall k \geq 0$ intero

SVOLGIMENTO

1 Per eventi di questo tipo si passa alla probabilità dell'evento complementare:

$$P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - \sum_{k=0}^{2} p_X(k) =$$

$$= 1 - \left(\frac{4^0}{0!} e^{-4} + \frac{4^1}{1!} e^{-4} + \frac{4^2}{2!} e^{-4} \right) =$$

$$= 1 - (1 + 4 + 8) e^{-4} = 1 - 13 e^{-4}$$

2 $$P(X = k \mid X \leq 2) = \frac{P(\{X = k\} \cap \{X \leq 2\})}{P(X \leq 2)} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{P(X = k)}{P(X \leq 2)} & \text{per } k \in \{0, 1, 2\} \\ 0 & \text{per } k \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{P(X = k)}{P(X \leq 2)} = \frac{p_X(k)}{\sum_{j=0}^{2} p_X(j)} = \frac{\frac{4^k}{k!} \cancel{e^{-4}}}{\left(\frac{4^0}{0!} + \frac{4^1}{1!} + \frac{4^2}{2!} \right) \cancel{e^{-4}}}$$

$\frac{1}{13}$ per $k = 0$

$\frac{4}{13}$ per $k = 1$

$\frac{8}{13}$ per $k = 2$

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA

Supponiamo di avere una successione di prove indipendenti, tutte con probabilità di successo $p \in (0,1]$

Consideriamo le seguenti v.a:

X = # fallimenti prima del 1° successo $(0,1,2,3,\dots)$

Y = # successi per avere il 1° successo $(1,2,3,\dots)$

Sono legate perché $Y = X+1$ e $X = Y-1$

$p_X(k) = (1-p)^k p$ GEOMETRICA

$p_Y(h) = (1-p)^{h-1} p$ GEOMETRICA TRASLATA

$Var[X] = \frac{1-p}{p^2}$ e $E[X] = \frac{1}{p} - 1$, $Var[X] = Var[Y]$

$E[Y] = \frac{1}{p}$

- Sia $X \sim Geo(p)$. Allora per $j \geq 0$, si ha

$p(X \geq j) = (1-p)^j$

- Sia $Y \sim GeoTraslata(p)$. Allora per $j \geq 1$, si ha

$p(Y \geq j) = (1-p)^{j-1}$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE NEGATIVA

Generalizzazione della geometrica: riferimento al successo r-esimo.

Consideriamo le seguenti v.a:

X = # fallimenti prima di avere il successo r-esimo $(0,1,2,3\dots)$

Y = # prove per avere il successo r-esimo $(1,2,3,\dots)$

$p_X(k) = b_{r,k}\, p^r (1-p)^k$ BINOMIALE NEGATIVA

$$b_{r,k} = \binom{k+r-1}{k}$$

$p_Y(h) = \binom{h-1}{r-1} p^r (1-p)^{h-r}$ BIN. NEGATIVA TRASLATA

$E[X] = r\left(\frac{1}{p} - 1\right)$, $E[Y] = \frac{r}{p}$ $Var[X] = Var[Y]$

COVARIANZA

1. $Cov(X_1, X_2) = E[X_1 X_2] - E[X_1]\, E[X_2]$
2. $Cov(X_1, X_2) = Cov(X_2, X_1)$
3. $Cov(X, X) = Var[X]$

RETTA DI REGRESSIONE

Supponiamo di avere una v.a. bidimensionale $\underline{X} = (X_1, X_2)$ si vuole trovare la retta che approssima meglio possibile il legame tra X_1 e X_2:

→ regressione di X_2 rispetto a X_1: $r_{21} | X_2 = aX_1 + b$

→ regressione di X_1 rispetto a X_2: $r_{12} | X_1 = cX_2 + d$

Si ha

$$\begin{cases} a = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{Var[X_1]} \\ b = E[X_2] - \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{Var[X_1]} \cdot E[X_1] \end{cases}$$

Stessa cosa per trovare c e d.

Es: Consideriamo la seguente densità congiunta discreta:

$$p_{\underline{X}}(0,0) = p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{1}{6} \; ; \; p_{\underline{X}}(1,1) = p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{3}$$

Trovare le rette di regressione $X_2 = aX_1 + b$ e $X_1 = cX_2 + d$

SVOLGIMENTO

$p_{X_1}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) = \frac{1}{6}$ $\quad E[X_1] = 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{2}$

$p_{X_1}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) = \frac{1}{3}$

$p_{X_1}(2) = p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{3}$ $\quad Var[X_1] = E[X_1^2] - E^2[X_1] =$

$p_{X_1}(3) = p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{1}{6}$ $\quad = 0^2 \cdot \frac{1}{6} + 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 2^2 \cdot \frac{1}{3} + 3^2 \cdot \frac{1}{6} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{11}{12}$

NO NO NO NO NO NO NO NO

$p_{X_2}(0) = p_{\underline{X}}(0,0) = \frac{1}{6}$ $\quad E[X_2] = \dots = 1$

$p_{X_2}(1) = p_{\underline{X}}(1,1) + p_{\underline{X}}(2,1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$p_{X_2}(2) = p_{\underline{X}}(3,2) = \frac{1}{6}$ $\quad Var[X_2] = \dots = \frac{1}{3}$

NO NO NO NO NO NO NO NO

$$Cov(X_1, X_2) = E[X_1, X_2] - E[X_1]\,E[X_2] = 2 - \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$E[X_1, X_2] = 0 \cdot 0 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{6} = \dots = 2$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{Var[X_1]} = \dfrac{6}{11} \\ b = E[X_2] - aE[X_1] = \dfrac{2}{11} \end{cases} \qquad \begin{cases} c = \dfrac{Cov(X_1, X_2)}{Var[X_2]} = \dfrac{3}{2} \\ d = E[X_1] - cE[X_2] = 0 \end{cases}$$

$$r_{21} : X_2 = \frac{6}{11} X_1 + \frac{2}{11} \qquad r_{12} : X_1 = \frac{3}{2} X_2$$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

Una v.a. X ha distribuzione uniforme continua su un intervallo limitato (a,b) se si ha

$$F_X(t) \begin{cases} 0 & \text{per } t<a \\ \frac{t-a}{b-a} & \text{per } a\le t\le b \\ 1 & \text{per } t>b \end{cases} \qquad E[X] = \frac{b+a}{2}$$

In simboli: $X \sim U(a,b)$. F_X non è derivabile per $t=a$ e $t=b$

Negli altri punti si ha

$$F'_X(t) \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{per } a<t<b \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad Var[X] = \frac{(b-a)^2}{12}$$

ES: Sia $X \sim U(0,5)$. Calcolare $P(4 \le X \le 6)$ e $P(2 \le X \le 4 \mid 1 \le X \le 3)$

SVOLGIMENTO

$$P(4 \le X \le 6) = F_X(6) - F_X(4) = 1 - \frac{4-0}{5-0} = \frac{1}{5}$$

$$P(2 \le X \le 4 \mid 1 \le X \le 3) = \frac{P(\{2\le X\le 4\} \cap \{1 \le X \le 3\})}{P(\{1 \le X \le 3\})} =$$

$$= \frac{P(2 \le X \le 3)}{P(1 \le X \le 3)} = \frac{\frac{2}{5} - \frac{3}{5}}{\frac{1}{5} - \frac{3}{5}} = \frac{-\frac{1}{5}}{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{2}$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

Una v.a. X ha distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$ se si ha

$$F_X(t) \begin{cases} 1-e^{-\lambda t} & \text{per } t \ge 0 \\ 0 & \text{per } t<0 \end{cases} \qquad E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

In simboli: $X \sim Exp(\lambda)$. F_X non è derivabile per $t=0$.

Negli altri punti si ha

$$F'_X(t) \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & \text{per } t>0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \qquad Var[X] = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(X > t+s \mid X > s) = P(X>t)$$

ES: Sia $X \sim Exp(\lambda)$, poniamo $Y = [X]$. Dove $[X] = \max\{k \in \mathbb{Z} : k \le x\}$

Trovare densità discreta di Y.

SVOLGIMENTO

Per ogni $k \in \mathbb{Z}$ si ha $\{Y=k\} = \{k \le X < k+1\}$

$$p_Y(k) = P(k \le X < k+1) = \int_k^{k+1} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{se } k \le -1 \\ e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k+1)} & \text{se } k \ge 0 \end{cases}$$

DISTRIBUZIONE NORMALE (O GAUSSIANA)

Sia Y una v.a. così definita: $Y = \sigma X + \mu$ dove $\sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ e $X \sim N(0,1)$. Allora si dice che Y ha distribuzione normale con parametri μ e σ^2 ($Y \sim N(\mu, \sigma^2)$)

Φ (lettera greca phi) per la funzione di distribuzione di $X \sim (0,1)$:

per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha

$$\Phi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

PROPRIETÀ DI Φ:

- Φ è crescente
- $\lim_{t \to -\infty} \Phi(t) = 0$
- $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 1$
- Φ è continua, quindi derivabile per ogni $t \in \mathbb{R}$.

$E[X] = 0$

$Var[X] = 1$

Se si arrivasse a dimostrare che la probabilità richiesta è uguale a $\Phi(-1)$, si dovrebbe poi scrivere che è uguale a $1 - \Phi(1)$

ES: 1 Sia $X \sim N(0,1)$. Calcolare $P(|X| > 2)$ usando Φ.

2 Sia $Y \sim N(\mu = 3, \sigma^2 = 25)$. Calcolare $P(1 \leq Y \leq 4)$ esprimendo il risultato con Φ.

SVOLGIMENTO

1 $P(|X| > 2) = P(\{X > 2\} \cup \{X < -2\}) = P(X > 2) + P(X < -2) =$

$= 1 - \Phi(2) + \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) + 1 - \Phi(2) = 2(1 - \Phi(2))$

2 $P(1 \leq Y \leq 4) = P\left(\frac{1-\mu}{\sigma} \leq \frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right)$

$= \Phi\left(\frac{1}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{2}{5}\right) = \Phi\left(\frac{1}{5}\right) + \Phi\left(\frac{2}{5}\right) - 1$

DISTRIBUZIONE GAMMA

Una v.a. X ha distribuzione gamma di parametri $\alpha, \beta > 0$ (in simboli $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$).

La funzione di distribuzione è la seguente:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\,dx & t > 0 \end{cases}$$

dove

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} z^{y-1} e^{-z}\,dz$$

$$E[X] = \frac{\alpha}{\beta} \quad e \quad Var[X] = \frac{\alpha}{\beta^2}$$