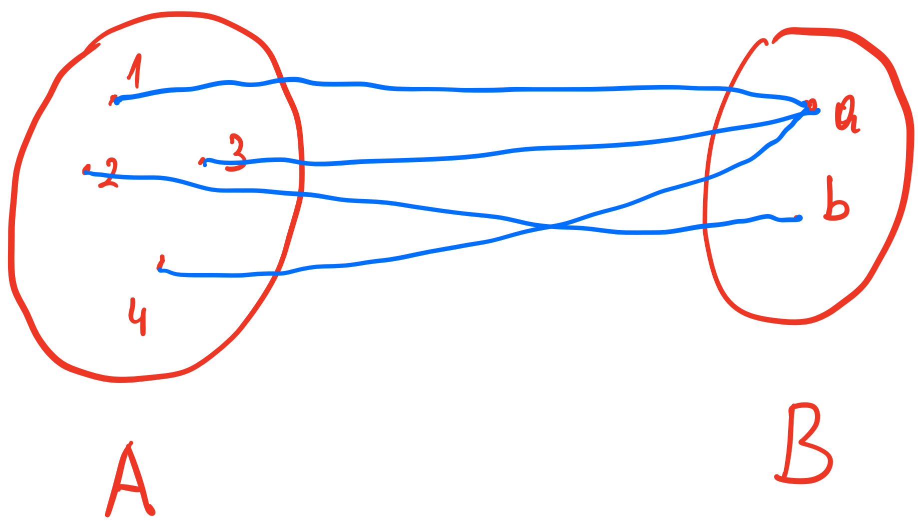
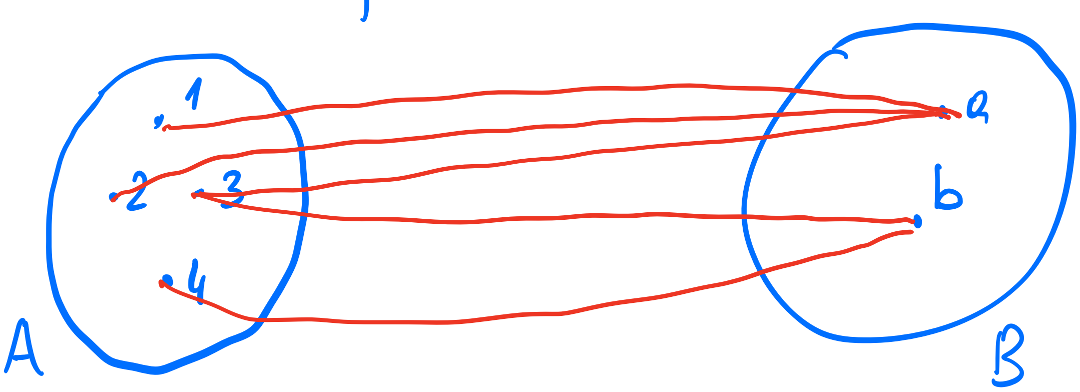
APPLICAZIONI LINEARI

A, B insiemi

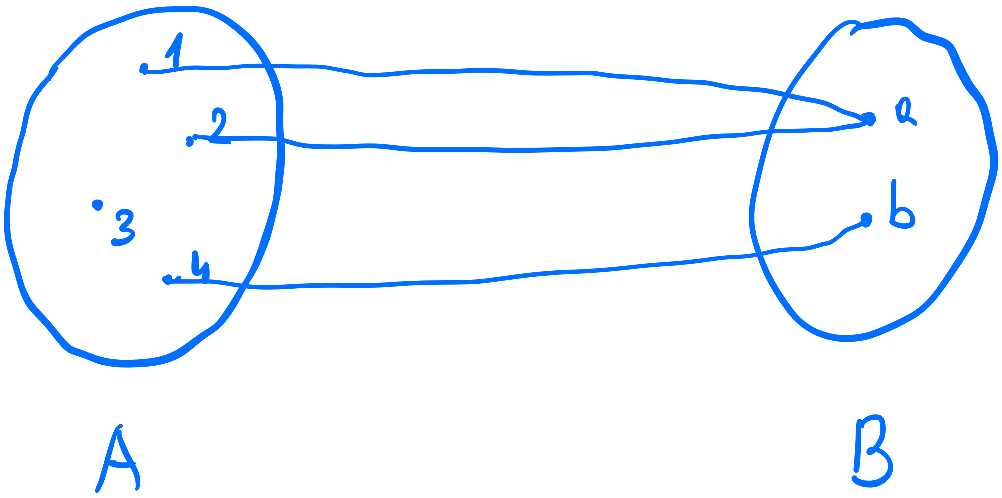
$f : A \to B$ una funzione è una qualunque legge che ad ogni elemento di A associa un unico elemento di B.



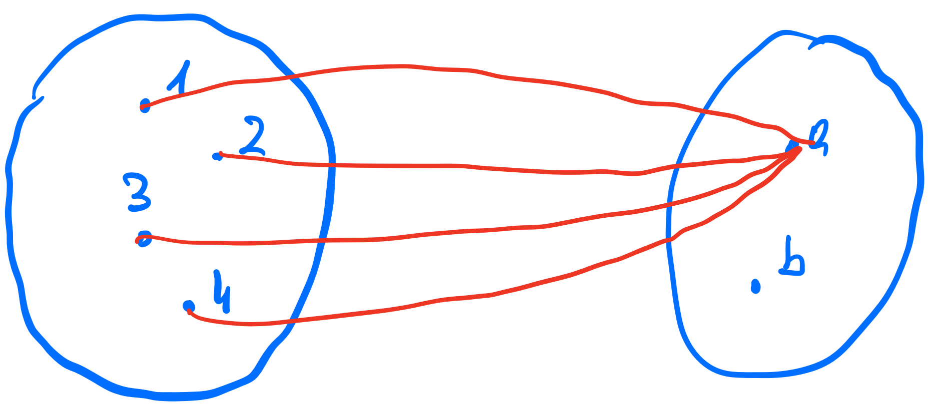
è una funzione!



NON è una funzione perché a 3 corrispondono 2 elementi diversi.



NON è una funzione (da A a B) perché 3 non corrisponde a nessun elemento di B

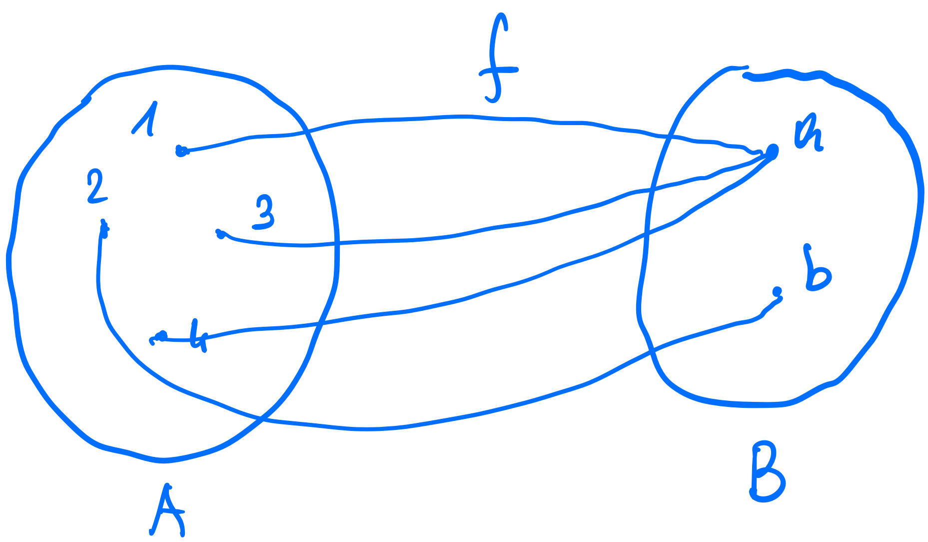


è una funzione.

Def: $f : A \to B$ funzione, A, B insiemi

- se $b \in B$ la preimmagine (controimmagine) di b tramite f è

$$f^{-1}(b) := \{ a \in A \text{ t.c. } f(a) = b \}$$



$$f^{-1}(a) = \{1, 3, 4\} \qquad f^{-1}(b) = \{2\}$$

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

è una funzione (che ad un numero reale x associa il suo quadrato)

$$f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$$

$f^{-1}(0) = \{0\}$

$f^{-1}(-1) = \emptyset$ INSIEME VUOTO

- f è iniettiva se per ogni $b \in B$ $f^{-1}(b)$ contiene 0 o 1 elemento

ovvero se ogni elemento di B è in corrispondenza con al più un elemento di A

equivalentemente:
se $a, a' \in A$ e $f(a) = f(a')$ allora $a = a'$

- f è suriettiva se per ogni $b \in B$ esiste $a \in A$ tale che $f(a) = b$

(in altri termini, per ogni $b \in B$ $f^{-1}(b) \neq \emptyset$)

$$\mathrm{Im} f = \{ b \in B \text{ tali che esiste } a \in A,\ f(a) = b \}$$

f è suriettiva se e solo se
$$\mathrm{Im} f = B$$

- f è bijettiva (o bigettiva) se f è iniettiva e suriettiva.

- $f : A \longrightarrow B$

dominio di f (A)

codominio di f (B)

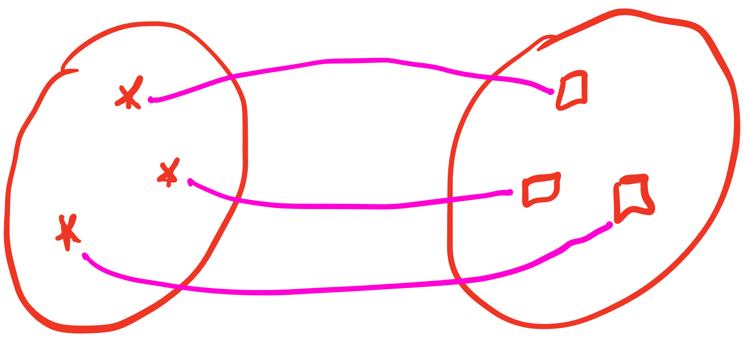
Es: $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$

è una funzione non iniettiva ($f(1) = f(-1) = 1$)

non è suriettiva ($f^{-1}(-1) = \emptyset$)

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+,\ f(x)=x^2 \quad \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \text{ t.c. } x \geq 0\}$

è iniettiva e suriettiva.

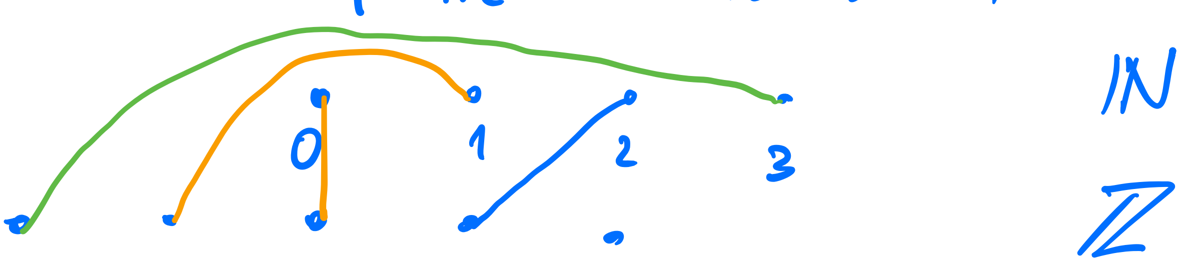
• 

$\exists$ ~ tutti gli insiemi con "3 elementi"

• Esiste una funzione bijettiva tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$
naturali razionali

• $f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bijettiva

$$f(n) = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ m & \text{se } n = 2m \\ -m & \text{se } n = 2m+1 \end{cases}$$



$-2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2$

(Cantor): non esiste una funzione biunivoca tra $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$.

COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

$f: A \longrightarrow B$, $\quad g: B \longrightarrow C$ funzioni

A, B, C insiemi

definiamo la composizione $g \circ f$ come la funzione:

$$g \circ f : A \longrightarrow C$$

$$(g \circ f)(\underset{\substack{\Uparrow \\ A}}{a}) = \underbrace{g(f(\underset{\substack{\Uparrow \\ B}}{a}))}_{\substack{\Uparrow \\ C}}$$

__Esercizio:__ • se $f : A \to B$ è bijettiva,
se $g : B \to C$ è bijettiva, allora
$g \circ f : A \to C$ è bijettiva.

Def:
Siano V, W spazi vettoriali.
Una funzione $T : V \to W$ si dice
lineare (o applicazione lineare o operatore lineare) se:

(i) per ogni $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ vale:

$$T(\underbrace{\underline{v} + \underline{v}'}_{\text{somma in } V}) = \underbrace{T(\underline{v}) + T(\underline{v}')}_{\text{somma in } W}$$

(ii) per ogni $\underline{v} \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$ vale:

$$T(\lambda \cdot \underline{v}) = \lambda \cdot T(\underline{v})$$

prodotto per uno scalare in V prodotto per uno scalare in W

Esempi: 1) $a \in \mathbb{R}$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad f(x) := a \cdot x$

è lineare:

i) $f(x+y) = a \cdot (x+y) = ax + ay =$
$x, y \in \mathbb{R}$ $\qquad = f(x) + f(y)$

ii) $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f(\lambda x) = a \cdot (\lambda x) = \lambda \cdot (a \cdot x) = \lambda f(x).$$

Oss: se $a \neq 0$ $\quad f$ è bijettiva

se $a = 0$ $\quad f(x) \equiv 0$ non è bijettiva

(né suriettiva, né iniettiva)

2) FONDAMENTALE

$A \in Mat(m \times n)$

$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$L_A(\underline{x}) = A \cdot \underline{x}$

prodotto righe per colonne

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$

è una funzione lineare.

i) $L_A(\underline{x}+\underline{y}) = A(\underline{x}+\underline{y}) = A\cdot\underline{x} + A\cdot\underline{y}$

$\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ $= L_A(\underline{x}) + L_A(\underline{y})$

ii) $L_A(\lambda \cdot \underline{x}) = A \cdot (\lambda \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot (A \cdot \underline{x}) =$

$\lambda \in \mathbb{R}, \ \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ $= \lambda L_A(\underline{x})$

ad esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 3)$$

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$L_A : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2x + y \\ -x + y + z \end{pmatrix}$$

OSS: sia

$$(*) \begin{cases} x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

la matrice incompleta del sistema lineare è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y+z \end{pmatrix}$$

Dunque trovare le soluzioni di (*) corrisponde a determinare

$$(L_A)^{-1} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.c. } A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>Esempio:</u>

$V = \mathrm{Mat}(n \times n)$ sp. vettoriale

$tr : V \longrightarrow \mathbb{R}$ traccia

$$\mathrm{tr}: \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \longrightarrow a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

<u>Esempio</u>:

$$\mathrm{tr} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 1 + (-1) + 5$$

tr è una applicazione lineare:

(i) $A, B \in Mat(n \times n)$

$$\mathrm{tr}(A+B) \overset{?}{=} \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \operatorname{tr}\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1}+b_{n1} & & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= (a_{11}+b_{11}) + \dots + (a_{nn}+b_{nn}) =$$

$$= (a_{11}+\dots+a_{nn}) + (b_{11}+\dots+b_{nn}) =$$

$$= \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$$

ii) verificare che $\lambda \in \mathbb{R}$, $A \in Mat(n \times n)$
$\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$.

Def: Sia V spazio vett. , $U, W \subseteq V$ sottosp.
supponiamo che $V = U \oplus W$
la proiezione di V su U lungo W è
definita $\pi_{U,W} : V \longrightarrow U$

$\underline{v} \in V \implies \underline{v} = \underset{\underset{U}{\cap}}{\underline{u}} + \underset{\underset{W}{\cap}}{\underline{w}}$ (in modo unico)

$$\pi_{U,W}(\underline{v}) = \underline{u}$$

OSS: è una funzione perché c'è unicità della scrittura $\underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$.

Prop: $\pi_{U,W}$ è lineare.

DIM:

(1) se $\underline{v}, \tilde{\underline{v}} \in V$ allora

$\underline{v} = \underset{\underset{U}{\cap}}{\underline{u}} + \underset{\underset{W}{\cap}}{\underline{w}} \Rightarrow \pi_{U,W}(\underline{v}) = \underline{u}$ $\qquad$ $\tilde{\underline{v}} = \underset{\underset{U}{\cap}}{\tilde{\underline{u}}} + \underset{\underset{W}{\cap}}{\tilde{\underline{w}}} \to \pi_{U,W}(\tilde{\underline{v}}) = \tilde{\underline{u}}$

$$\pi_{U,W}(\underline{v} + \tilde{\underline{v}}) = \pi_{U,W}\left((\underline{u} + \underline{w}) + (\tilde{\underline{u}} + \tilde{\underline{w}}) \right)$$

$$= \pi_{U,W}\left(\underbrace{(\underline{u} + \tilde{\underline{u}})}_{\in U} + \underbrace{(\underline{w} + \tilde{\underline{w}})}_{\in W} \right) = \underline{u} + \tilde{\underline{u}}$$

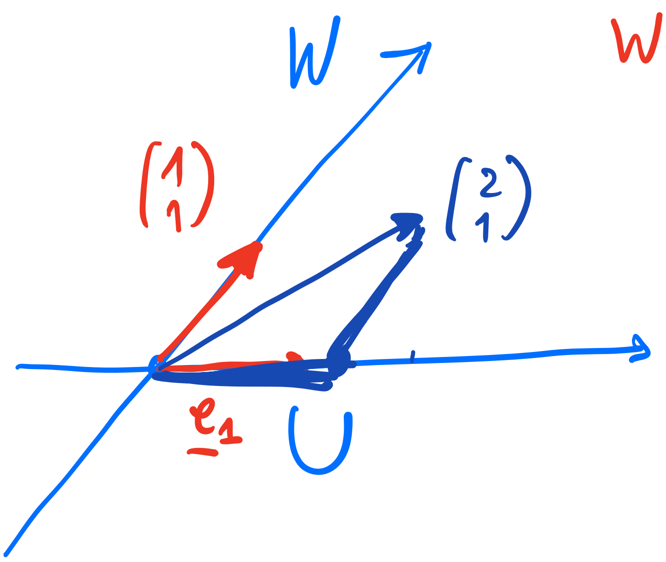
$$= \pi_{U,W}(\underline{v}) + \pi_{U,W}(\underline{\hat{v}})$$

ii) $\underline{v} \in V, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$$\underline{v} = \underset{\substack{\Uparrow \\ U}}{\underline{u}} + \underset{\substack{\Uparrow \\ W}}{\underline{w}} \qquad \pi_{U,W}(\underline{v}) = \underline{u}$$

$$\lambda \cdot \underline{v} = \lambda(\underline{u} + \underline{w}) = \underbrace{\lambda \underline{u}}_{\substack{\Uparrow \\ U}} + \underbrace{\lambda \underline{w}}_{\substack{\Uparrow \\ W}}$$

$$\pi_{U,W}(\lambda \underline{v}) = \lambda \underline{u} = \lambda\, \pi_{U,W}(\underline{v}). \quad \boxtimes$$



$W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right\}$

$U = \text{span}\{\underline{e_1}\}$

Esercizio

Sia $U = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\right\}$ in $\mathbb{R}^3$

(i) trovare un sottospazio $W \subseteq \mathbb{R}^3$ tale che

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W$$

(ii) determinare la proiezione di $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ su U lungo W.

$\dim U = 2$ (perché $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ sono lin. indip.)

cerchiamo W. Quale è la dimensione di W?

Grassmann:

$$3 = \underset{\substack{\| \\ \mathbb{R}^3}}{\dim (U+W)} = \underset{\substack{\| \\ 2}}{\dim U} + \dim W - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{\substack{\| \\ 0}}$$

$(U \cap W = \{\underline{0}\})$

$\Rightarrow \dim W = 1$

per determinare W estendiamo la base di U ad una base di $\mathbb{R}^3$ e W sarà lo spazio generato dal vettore che aggiungeremo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EG $\quad R_3 \to R_3 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

dunque $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ sono una base di $\mathbb{R}^3$.

$$W = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \quad \Rightarrow \mathbb{R}^3 = U \oplus W$$

(ii) $\pi_{U,W}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = ?$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underset{\substack{\cap \\ U}}{\underline{u}} + \underset{\substack{\cap \\ W}}{\underline{w}} \qquad \pi_{U,W}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underline{u}$$

$$\underline{u} \in U \Rightarrow \underline{u} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\underline{w} \in W \Rightarrow \underline{w} = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda_1 + \lambda_2 + \alpha\\ -\lambda_2\\ \lambda_1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = z \\ \lambda_2 = -y \\ \alpha = x - \lambda_1 - \lambda_2 = x - z + y \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - y \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{(x+y-z) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} z-y \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{pmatrix} x+y-z \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in W}$$

$$\pi_{U,W} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z-y \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= L_{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$