eq. parametrica di una retta affine in $\mathbb{R}^3$

$$r: \begin{cases} x = a + \alpha\lambda \\ y = b + \beta\lambda \\ z = c + \gamma\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

$$\neq$$

$$\underline{0}$$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^3$ appartiene a r

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ è un vettore tangente a r

(ovvero una base di T_r)

COORDINATE AFFINI

$\mathbb{A}$ spazio affine, $T\mathbb{A}$ spazio tangente (sp. vettoriale)

$[\mathbb{A} = \underline{x_0} + T\mathbb{A}]$

DEF: un sistema di coordinate affini (riferimento) di $\mathbb{A}$ è dato da un punto $O \in \mathbb{A}$ (che si dice origine) e una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di $T\mathbb{A}$

Fissiamo $(O; \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\})$ un sistema di riferimento affine di $\mathbb{A}$.

$P \in \mathbb{A}$

$P - O \in T\mathbb{A}$

quindi esistono unici $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ t.c.

$$P - O = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

$(x_1, \dots, x_n)$ si dicono le coordinate (affini) di P nel sistema di riferimento affine

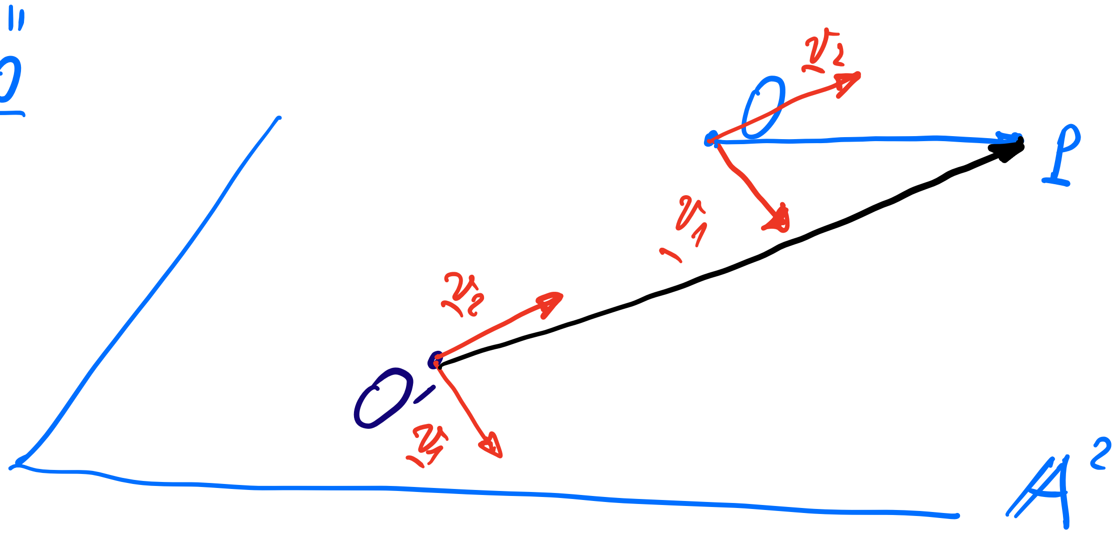
$$(O; \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\})$$

<u>OSS</u>: nel sistema di rif. affine

$(O; \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\})$ O (l'origine)

ha coordinate $(0, \dots, 0)$

$$\underbrace{O - O}_{= \underline{0}} = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$$



Esempio: in $\mathbb{A}^2$ $\quad T\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$

Sia $O = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{A}^2$ $\quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Sia $P = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

determinare le coordinate affini di P nel sistema di riferimento affine

$$(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$$

$$P - O = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = x_1 \underline{v}_1 + x_2 \underline{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = -2 + x_1 \\ 2x_1 - 2 + x_1 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Quindi le coordinate affini di P nel sistema di rif. affine $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$ sono $(0, -2)$

Esempio: in $\mathbb{A}^2$

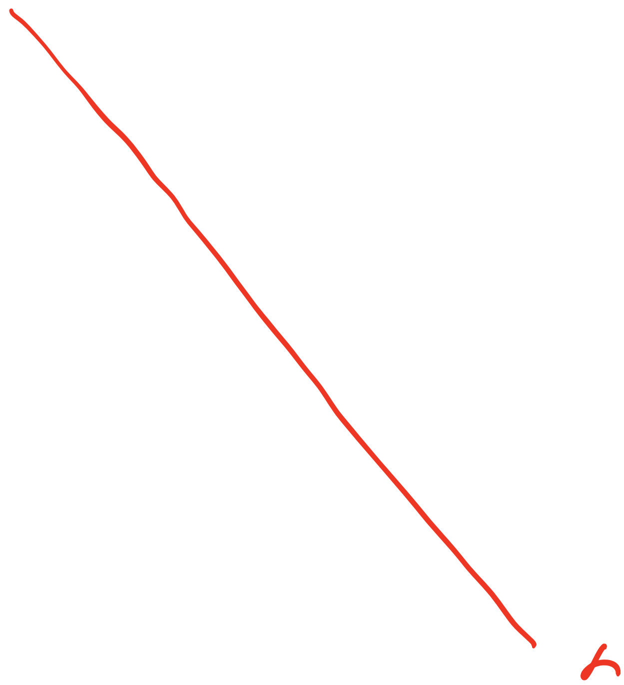
Sia r la retta affine

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

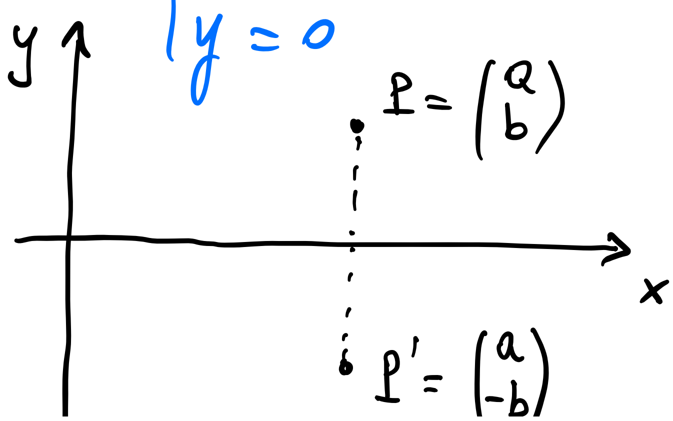
Sia $P \in \mathbb{A}^2$ il punto $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

determinare la posizione di P dopo il

ribaltamento di $\mathbb{A}^2$ lungo r.



OSS: se dobbiamo ribaltare rispetto "all'asse delle x" (ovvero la retta $y=0$, $\begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \end{cases}$ $\lambda \in \mathbb{R}$)



P' è il ribaltamento di P rispetto alla retta $y=0$

scegliamo un sistema di riferimento affine in cui la retta r sia "l'asse delle x"

- dobbiamo scegliere l'origine $O \in r$ ad esempio $O = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (vedi eq. parametrica)
- dobbiamo scegliere $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ base di $\mathbb{R}^2$ tale che $\mathrm{span}\{\underline{v}_1\} = T_r$

$$r = \begin{cases} x = a + \lambda \alpha \\ y = b + \lambda \beta \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

sia $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$ un sistema di riferimento affine t.c.

$O \in r$ $\quad$ $\text{span}\{\underline{v}_1\} = T_r$

determinare l'equazione parametrica di r in $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$

chiamo (x', y') le coordinate affini in $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$

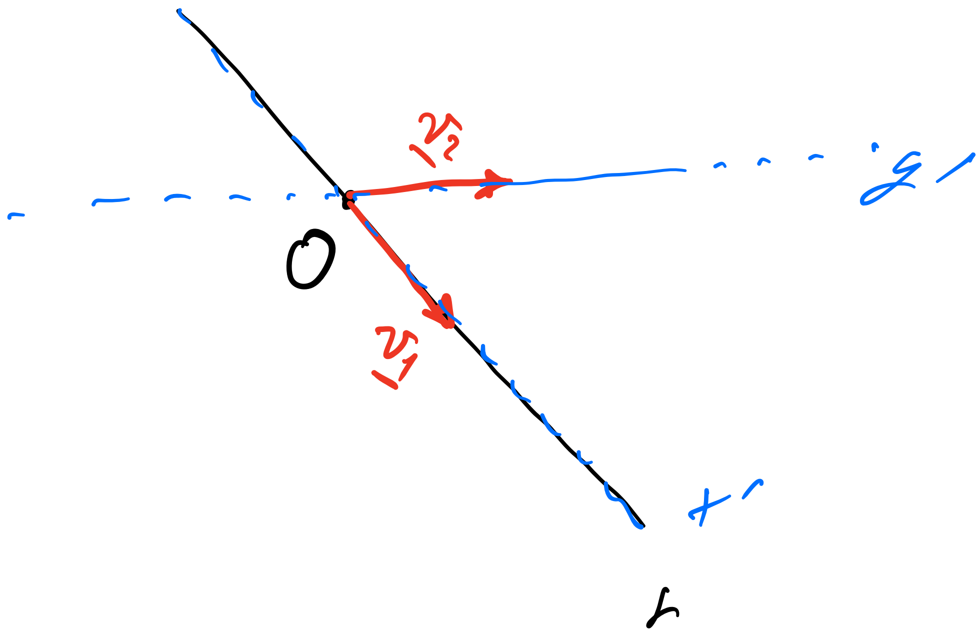
$$P \in r \Rightarrow \boxed{\underbrace{P-O}_{\parallel \atop \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}} = \lambda \underline{v}_1} \quad \text{(eq. parametrica)}$$

sono le coord. affini di P in $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$

$P-O = x'\underline{v}_1 + y'\underline{v}_2$ $\quad$ ma se $P \in r$

$\Rightarrow P-O = \lambda \underline{v}_1$ $\quad$ ovvero:

$$r: \begin{cases} x' = \lambda \\ y' = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$



scegliamo $\{\underline{v_1}, \underline{v_2}\}$ base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ t.c. $\mathrm{span}\{\underline{v_1}\} = Tr$ dell'eq. parametrica

$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ è un vettore tangente a r

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

per trovare $\underline{v}_2$: $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

$$0 = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\rangle =$$

$$= \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \beta \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}$$

scegliendo $\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$:

$$\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \beta \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 0$$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$\| \underline{v}_2 \| = 1$

$$\left(\underbrace{(3,-1)}_{O} \, ; \, \left\{ \overbrace{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}}^{\underline{v}_1}, \overbrace{\begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}}^{\underline{v}_2} \right\} \right)$$ è

un sistema di rif. affine di $\mathbb{A}^2$,

$O \in r$, $\quad T r = \operatorname{span}\{\underline{v}_1\}$

chiamiamo (x', y') le coordinate affini in questo sistema di rif.

$$r: \begin{cases} x' = \lambda \\ y' = 0 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ troviamo le coordinate di P

nel $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$

$$P - O = x' \underline{v_1} + y' \underline{v_2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = x' \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ -1/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}} \\ \frac{2x'}{\sqrt{5}} - \frac{y'}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \frac{x'}{\sqrt{5}} + \frac{2y'}{\sqrt{5}} = -3 \\ \frac{2x'}{\sqrt{5}} - \frac{y'}{\sqrt{5}} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x' = -3\sqrt{5} - 2y' \\ \end{cases}$$

$$\frac{2\left(-3\sqrt{5} - 2y'\right)}{\sqrt{5}} - \frac{y'}{\sqrt{5}} = 1$$

$$-6 - \sqrt{5}\, y' = 1$$

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{7}{\sqrt{5}} \\ x' = -3\sqrt{5} + \dfrac{14}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

il ribaltamento di P attraverso r è

$$P = \begin{pmatrix} -3\sqrt{5} + \dfrac{14}{\sqrt{5}} \\ -\dfrac{7}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \longrightarrow P' = \begin{pmatrix} -3\sqrt{5} + \dfrac{14}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{7}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

sono le coordinate nel sistema di riferimento $(O; \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\})$

Ma come tornare al riferimento iniziale?

$\mathbb{A}$ spazio affine, $(T\mathbb{A}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$
spazio metrico

Dati $P, Q \in \mathbb{A}$

DEF: la distanza tra P e Q

$$\mathrm{dist}(P,Q) := \| \underbrace{P - Q}_{\in\, T\mathbb{A}} \|$$

OSS: $P, Q, R \in \mathbb{A}$

$$\mathrm{dist}(P,Q) \leq \mathrm{dist}(P,R) + \mathrm{dist}(R,Q)$$

disuguaglianza triangolare

DEF A spazio affine, $(TA, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio metrico

un sistema di riferimento affine (normale) $(O; \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\})$ si dice **ortogonale** se

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base ortonormale di TA $\left[\begin{array}{l} \|\underline{v}_j\| = 1 \\ \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0 \quad i \neq j \\ \qquad i, j \in \{1, \dots, n\} \end{array} \right.$

EQUAZIONE CARTESIANA DI UN SOTTOSPAZIO AFFINE

Sia A spazio affine, $(TA, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ spazio metrico e fissiamo un sistema di riferimento affine ortogonale $(O; \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\})$

e siano $(x_1, \ldots, x_n)$ le coordinate in questo sistema di riferimento.

$\lceil$ - $\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ base ortonormale di $T\mathbb{A}$

- $P \in \mathbb{A}$ le coordinate di P sono $(x_1, \ldots, x_n)$ se

$$P - O = x_1 \underline{v}_1 + \ldots + x_n \underline{v}_n \rfloor$$

Sia $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ un sottospazio affine.

Sia $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ una base di

$$(T\mathbb{B})^\perp$$

$$T\mathbb{A} = T\mathbb{B} \oplus (T\mathbb{B})^\perp$$

Sia

$P_0 \in \mathbb{B}$

Sappiamo che $P \in \mathbb{A}$ appartiene a $\mathbb{B}$ (cioè $\underline{P} \in \mathbb{B}$) se e solo se

$$\underline{P} - \underline{P}_0 \in T\mathbb{B}$$

ovvero: per ogni $\underline{w} \in (T\mathbb{B})^{\perp}$

$$< \underline{P} - \underline{P}_0, \underline{w} > = 0$$

che è equivalente a:

$$(*) \quad \boxed{\begin{cases} < \underline{P} - \underline{P}_0, \underline{w}_1 > = 0 \\ \vdots \\ < \underline{P} - \underline{P}_0, \underline{w}_m > = 0 \end{cases}}$$

equazione cartesiana di $\mathbb{B}$

nel sistema di riferimento $(O; \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\})$

$$\underline{w}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \quad \dots \quad \underline{w}_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

(coordinate di $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m$ nella base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$)

$$P - P_0 = (P-O) - (P_0 - O) = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{P-O} - \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{P_0-O} = \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n - \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\langle P - P_0, \underline{w}_1 \rangle \underset{\uparrow}{=} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 - \alpha_1 \\ \vdots \\ x_n - \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \right\rangle_{st} =$$

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base ortonormale

prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$

$$= a_{11}(x_1 - \alpha_1) + \dots + a_{n1}(x_n - \alpha_n)$$

lo stesso per $\underline{w}_2, \dots, \underline{w}_m$.

Pertanto (*)

$$\mathbb{B} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ t.c. } \begin{cases} a_{11}(x_1-\alpha_1)+\dots+a_{n1}(x_n-\alpha_n)=0 \\ \vdots \\ a_{1m}(x_1-\alpha_1)+\dots+a_{nm}(x_n-\alpha_n)=0 \end{cases} \right.$$

Esempio:

$\mathbb{A}^2$, $T\mathbb{A}^2 = \mathbb{R}^2$ $\quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{st}$ prodotto scalare standard

$\left(O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}\right)$ sistema di rif. affine ortogonale.

- determinare l'equazione cartesiana della retta r passante per $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$
- determinare l'equazione parametrica della retta s ortogonale a r e passante per $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$(T_r \perp T_s)$

$$- \quad \underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}} \qquad \begin{pmatrix} -(-2) \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$T_r = \operatorname{span}\{\underline{v}\} \qquad \underset{\text{dim } 2}{\mathbb{R}^2} = \underset{\text{dim } 1}{T_r} \oplus \underset{\text{dim } 1}{(T_r)^\perp}$$

$$(T_r)^\perp = \operatorname{span}\{\underline{w}\}$$

$$\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

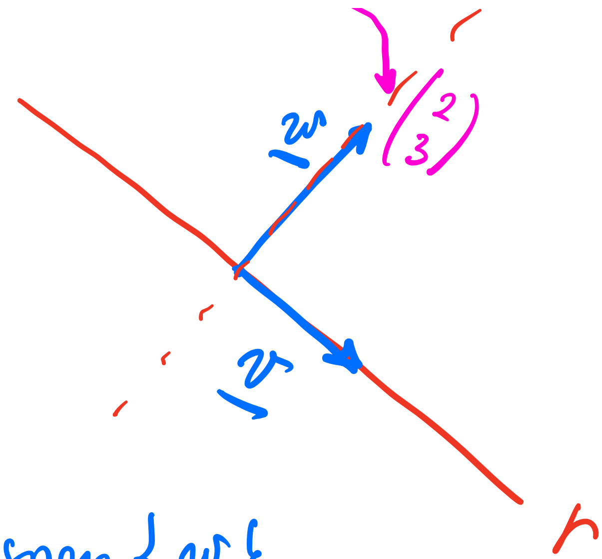
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in r \iff \left\langle \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\iff 2(x-1) + 3(y-1) = 0$$

$$\boxed{2x + 3y - 5 = 0}$$

eq. cartesiana di r

's



$T_S = \operatorname{span}\{\underline{w}\}$

$$s := \begin{cases} x = 0 + 2\lambda \\ y = 0 + 3\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$