V spazio vett. $\quad \mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ base

$\underline{w} \in V \qquad \underline{w} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ coordinate di $\underline{w}$ nella base $\mathcal{B}$

ovvero $\quad \underline{w} = x_1 \underline{v}_1 + \cdots + x_n \underline{v}_n$ (unica scrittura)

CAMBIAMENTO DI BASE

Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$ e

$$\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n\}$$

due basi di uno spazio vettoriale V

$\underline{u} \in V$

$\underline{u} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \underline{x}$ coordinate di $\underline{u}$ nella base $\mathcal{B}$

$\underline{u} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \underline{y}$ coordinate di $\underline{u}$ nella base $\mathcal{B}'$

Che relazione c'è tra $\underline{x}$ e $\underline{y}$?

$$\boxed{x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n = \underline{u} = y_1 \underline{w}_1 + \dots + y_n \underline{w}_n} \quad (*)$$

Poichè $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base e $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n \in V$

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{w}_1 &= a_{11} \underline{v}_1 + a_{21} \underline{v}_2 + \dots + a_{n1} \underline{v}_n \\ \underline{w}_2 &= a_{12} \underline{v}_1 + a_{22} \underline{v}_2 + \dots + a_{n2} \underline{v}_n \\ &\vdots \\ \underline{w}_n &= a_{1n} \underline{v}_1 + a_{2n} \underline{v}_2 + \dots + a_{nn} \underline{v}_n \end{aligned}} \quad (**)$$

(scrittura è unica)

Sostituiamo $(**)$ in $(*)$

$$\boxed{x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n} = \underline{u} = y_1 \underline{w}_1 + \dots + y_n \underline{w}_n =$$

$$= y_1 (a_{11} \underline{v}_1 + a_{21} \underline{v}_2 + \dots + a_{n1} \underline{v}_n) + \dots$$

$$+ y_n (a_{1n} \underline{v}_1 + a_{2n} \underline{v}_2 + \dots + a_{nn} \underline{v}_n)$$

$$= y_1 a_{11} \underline{v_1} + y_1 a_{21} \underline{v_2} + \dots + y_1 a_{n1} \underline{v_n} +$$

$$\dots + y_n a_{1n} \underline{v_1} + y_n a_{2n} \underline{v_2} + \dots + y_n a_{nn} \underline{v_n}$$

$$= \boxed{(y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{1n}) \underline{v_1} + (y_1 a_{21} + \dots + y_n a_{2n}) \underline{v_2} + \dots + (y_1 a_{n1} + \dots + y_n a_{nn}) \underline{v_n}}$$

$\Longrightarrow$

$$[x_1 - (y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{1n})] \underline{v_1} + \dots + [x_n - (y_1 a_{n1} + \dots + y_n a_{nn})] \underline{v_n} = \underline{0}$$

$\{\underline{v_1}, \dots, \underline{v_n}\}$ sono lin. indip.

$\Longrightarrow$

$$\begin{cases} x_1 - (y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{1n}) = 0 \\ \vdots \\ x_n - (y_1 a_{n1} + \dots + y_n a_{nn}) = 0 \end{cases}$$

ovvero

$$\boxed{\begin{cases} x_1 = y_1 a_{11} + \dots + y_n a_{1n} \\ \vdots \\ x_n = y_1 a_{n1} + \dots + y_n a_{nn} \end{cases}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}$$

OSS: La matrice

sono le coord. di $\underline{w_2}$ nella base $\mathcal{B}$

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ \\ a_{n2} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ \\ a_{nn} \end{matrix}} \end{pmatrix}$$

sono le coordinate di $\underline{w_n}$ in $\mathcal{B}$

sono le coordinate di $\underline{w_1}$ nella base $\mathcal{B}$

(infatti $\underline{w}_1 = a_{11}\underline{v}_1 + \dots + a_{n1}\underline{v}_n$)

La matrice A si dice la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$

$$\underline{x}_{\mathcal{B}} = A \cdot \underline{y}_{\mathcal{B}'}$$

<u>Esempio</u>: Sia $\mathcal{B} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ base canonica di $\mathbb{R}^2$. Sia $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Verificare che $\mathcal{B}'$ è una base di $\mathbb{R}^2$, trovare la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Determinare le coordinate del vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}'$.

- $\mathcal{B}'$ è base:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad EG \quad R_2 \to R_2 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2 pivot $= \dim \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ è una base.

- matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1)\underline{e}_1 + (1)\cdot \underline{e}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono le coordinate nella base canonica $\mathcal{B}$ del primo vettore della base $\mathcal{B}'$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_1 + 1\cdot \underline{e}_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono le coordinate nella base $\mathcal{B}$ del secondo vettore della base $\mathcal{B}'$

$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ è la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$

OSS: le coordinate di $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ nella base $\mathcal{B}'$ sono: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$

[in una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ le coordinate di $\underline{v}_1$ sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ perché $\underline{v}_1 = 1 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0\,\underline{v}_n$]

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

[sono le coord. in $\mathcal{B}$]

- Determinare le coordinate di $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nella base $\mathcal{B}'$

Occorre determinare la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{B}'$

per farlo: dobbiamo determinare le coordinate di $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} = \mathcal{B}$ nella base $\mathcal{B}'$.

$$\underline{e}_1 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{e}_2 = \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \leftarrow$$ matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha + 2\beta \\ \alpha + \beta \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\gamma + 2\delta \\ \gamma + \delta \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + \beta = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -\gamma + 2\delta = 0 \\ \gamma + \delta = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x+2y = \dots \\ x+y = \dots \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

EG

$R_2 \rightarrow R_2 + R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 \rightarrow R_1 - \frac{2}{3} R_2$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 \rightarrow (-1) \cdot R_1$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad R_2 \to \frac{1}{3} R_2$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right)$$

Pertanto $M = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

e dunque il vettore $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ha coordinate in $\mathcal{B}'$ pari a

$$\begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

OSS: Siano $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n\}$ basi di uno spazio vettoriale V.

Siano A $\overset{n \times n}{\leftarrow}$ la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e B $\overset{n \times n}{\leftarrow}$ la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

Allora

$$\boxed{A \cdot B = B \cdot A = I}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

In altri termini, A e B sono invertibili e $B = A^{-1}$ $(A = B^{-1})$

<u>dim</u> (per $n=2$)

$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2\} = \mathcal{B}$ $\quad \{\underline{w}_1, \underline{w}_2\} = \mathcal{B}'$

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \alpha \underline{w}_1 + \beta \underline{w}_2 \\ \underline{v}_2 = \gamma \underline{w}_1 + \delta \underline{w}_2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

camb. di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$$\begin{cases} \underline{w}_1 = a \underline{v}_1 + b \underline{v}_2 \\ \underline{w}_2 = c \underline{v}_1 + d \underline{v}_2 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

camb. di base da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$$1 \underline{v_1} + 0 \cdot \underline{v_2}$$

$$\boxed{\underline{v_1}} = \alpha \underline{w_1} + \beta \underline{w_2} = \alpha \left(a \underline{v_1} + b \underline{v_2} \right) +$$

$$+ \beta \left(c \underline{v_1} + d \underline{v_2} \right) =$$

$$= \alpha a \underline{v_1} + \alpha b \underline{v_2} + \beta c \underline{v_1} + \beta d \underline{v_2} =$$

$$\boxed{= (\alpha a + \beta c) \underline{v_1} + (\alpha b + \beta d) \underline{v_2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha a + \beta c = 1 \\ \alpha b + \beta d = 0 \end{cases}}$$

$$0 \cdot \underline{v_1} + 1 \cdot \underline{v_2} = \underline{v_2} = \gamma \underline{w_1} + \delta \underline{w_2} =$$

$$= \gamma \left(a \underline{v_1} + b \underline{v_2} \right) + \delta \left(c \underline{v_1} + d \underline{v_2} \right) =$$

$$= (\gamma a + \delta c) \underline{v_1} + (\gamma b + \delta d) \underline{v_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} \gamma a + \delta c = 0 \\ \gamma b + \delta d = 1 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow BA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a\alpha + c\beta & a\gamma + c\delta \\ b\alpha + d\beta & b\gamma + d\delta \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

similmente si verifica $AB = I$ ∎

Esempio: siano $\{1, x, x^2\} = \mathcal{B}$ e $\{1+x, x+x^2, 1-x^2\} = \mathcal{B}'$ basi di $Pol_{\leq 2}[x]$.

- verificare che effettivamente $\mathcal{B}'$ è una base
- determinare le matrici di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ e da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$

$1+x = 1 \cdot 1 + 1 \cdot x + 0 \cdot x^2$

quindi

$1+x$ ha coordinate $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ nella base $\mathcal{B}$

$$x+x^2 = 0\cdot 1 + 1\cdot x + 1\cdot x^2$$

$$x+x^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$1-x^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\| $$

$$1\cdot 1 + 0\cdot x + (-1)\cdot x^2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

EG

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2 pivot $\neq$

$\dim Pol_{\leq 2}[x] = 3$

NON è una base!

$$\mathcal{B}' = \{1+x,\ x+x^2,\ 1-x+x^2\}$$

$$1+x \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$x+x^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$1-x+x^2 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{EG} \qquad R_2 \to R_2 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3 pivot $\Rightarrow$ OK è una base.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

è la matrice di cambiamento di base dalla base $\mathcal{B}'$ alla base $\mathcal{B}$

$B = A^{-1}$ è la matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Come trovare A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

EG

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to R_3 - R_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_2 \to R_2 + \frac{2}{3} R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_1 \to R_1 - \frac{1}{3} R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/3 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$R_3 \to \frac{1}{3} R_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$