SPAZI VETTORIALI

<u>Def</u>: Un insieme V si dice uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ se esistono 2 operazioni:

$+ : V \times V \longrightarrow V$ (somma)

$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$ (prodotto per uno scalare)

che soddisfano le seguenti proprietà:

1) per ogni $\underline{v}, \underline{w}, \underline{u} \in V$

$$(\underline{v} + \underline{w}) + \underline{u} = \underline{v} + (\underline{w} + \underline{u})$$ [prop. associativa]

2) esiste $\underline{0} \in V$ (detto <u>vettore nullo</u>) tale che per ogni $\underline{v} \in V$

$$\underline{v} + \underline{0} = \underline{v}$$

3) per ogni $\underline{v}, \underline{w} \in V$

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{w} + \underline{v}$$ [prop. commutativa]

4] per ogni $\underline{v} \in V$ esiste $\underline{w} \in V$ tale che

$$\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$$

[esistenza dell'inverso]

($\underline{w}$ si denota con $-\underline{v}$)

[OSS: un insieme V con una operazione $+ : V \times V \longrightarrow V$ che verifica 1], 2], 4] si dice un gruppo.
Se inoltre verifica 3] V si dice un gruppo commutativo o gruppo Abeliano]

5] per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{v}, \underline{w} \in V$

$$\lambda \cdot (\underline{v} + \underline{w}) = \lambda \cdot \underline{v} + \lambda \underline{w}$$

[prop. distrib.]

6] per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$

$$(\lambda + \mu) \cdot \underline{v} = \lambda \cdot \underline{v} + \mu \cdot \underline{v}$$

[prop. distrib.]

somma tra numeri reali

somma in V

7] per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V$

$$\underbrace{(\lambda \cdot \mu)}_{\text{prodotto tra numeri reali}} \cdot \underline{v} = \lambda \cdot (\mu \cdot \underline{v})$$

prodotto per uno scalare

prodotto per uno scalare

[prop. associativa del prodotto]

8] per ogni $\underline{v} \in V$

$$1 \cdot \underline{v} = \underline{v} \quad , \quad 0 \cdot \underline{v} = \underline{0}$$

ESEMPI:

(a) $V = \mathbb{R}$

$+$ = usuale somma tra numeri reali

$\cdot$ = usuale prodotto tra numeri reali

$\underline{0} = 0$

(b) $V = \mathrm{Mat}(m \times n)$

$$\underline{0} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}}_{n} \left.\vphantom{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}\right\} m$$

$+$: è la somma tra matrici

$\cdot$: è il prodotto di uno scalare per una matrice

(c) $V := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funzioni} \}$

(una funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è una legge che prende un elemento di $\mathbb{R}$ (numero reale) e restituisce un numero reale)

$$\begin{array}{ccc} x & \rhd\boxed{\text{funzione } f} \rightarrow & f(x) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$f(x) = \sin x$, | $f(x) = x^7 + 3x^5$

$f(1) = 1^7 + 3 \cdot 1^5 = 4$

Definiamo una operazione

$$+_V : V \times V \longrightarrow V$$

somma "tra funzioni"

$$f, g \in V \longrightarrow f +_V g$$

somma tra numeri reali

$$(f +_V g)(\underset{\mathbb{R}}{x}) := \underbrace{f(x)}_{\mathbb{R}} + \underbrace{g(x)}_{\mathbb{R}}$$

$f(x) = x^5 \qquad g(x) = \sin x$

$(f +_V g)(x) = x^5 + \sin x$

Definiamo

$$\cdot_V : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V$$

prodotto tra numeri reali

$$(\underset{\mathbb{R}}{\lambda} \cdot_V \underset{V}{f})(x) = \underset{\mathbb{R}}{\lambda} \cdot \underbrace{f(x)}_{\mathbb{R}}$$

$\underline{0}(x) :\equiv 0$ $\qquad$ $\underline{0} : x \longmapsto 0$ funzione costante zero.

<u>Esercizio</u>: verificare che $(V, +_V, \cdot_V)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

<u>Def</u>: gli elementi di uno spazio vettoriale V si dicono <u>vettori</u>.

<u>Def</u>: $\mathbb{R}^n := \mathrm{Mat}(n \times 1)$

$$\underline{v} \in \mathbb{R}^n, \qquad \underline{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

<u>OSS</u>: • $\underline{0}$ è unico

• dato $\underline{v}$ esiste <u>unico</u> $-\underline{v}$

<u>Dim</u>: • se $\underline{0}, \underline{0}'$ sono vettori nulli allora

$$\underline{0} = \underline{0} + \underline{0}' = \underline{0}'$$

$\underline{0}$ è vettore

$\underline{0}'$ è $\quad\quad\quad\quad$ nullo

vettore nullo

- sia $\underline{v} \in V$ supponiamo che

$\underline{v} + \underline{w} = \underline{0}$ e $\underline{v} + \underline{w}' = \underline{0}$

allora

somma è associativa

$$\underline{w} = \underline{w} + \underline{0} = \underline{w} + (\underline{v} + \underline{w}') =$$

$$= (\underline{w} + \underline{v}) + \underline{w}' = (\underline{v} + \underline{w}) + \underline{w}' =$$

commutativa

$$= \underline{0} + \underline{w}' = \underline{w}'$$

$\square$

Def: Sia $(V, +, \cdot)$ uno spazio vettoriale
Un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice
un sottospazio di V se
$(W, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale.

significa che: $W \subseteq V$ quindi
$\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ allora $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in V$
e dunque è ben definito $\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in V$
e se $\lambda \in \mathbb{R}$ è ben definito $\lambda \cdot \underline{w}_1 \in V$
W è un sottospazio di V se

A) per ogni $\underline{w}_1, \underline{w}_2 \in W$ si ha

$$\underline{w}_1 + \underline{w}_2 \in W$$

[chiusura rispetto alla somma]

B) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{w} \in W$ si ha

$\lambda \cdot \underline{w} \in W$ [chiusura rispetto al prodotto per uno scalare]

C] $(W, +, \cdot)$ soddisfano le proprietà 1) – 8) della definizione di spazio vettoriale

Prop: $(V, +, \cdot)$ spazio vettoriale, $W \subseteq V$ (non vuoto)
W è un sottospazio di V se e solo se valgono A] e B]

(ovvero A] + B] $\Longrightarrow$ C])

Dim: 1) ✓ (vale già in V e quindi anche in W, perchè $W \subseteq V$)

2) $\underline{0} \in W$?

Sia $\underline{w} \in W$ $\quad \underbrace{0 \cdot \underline{w}}_{\in W \;\leftarrow\; B]} = \underline{0}$ (prop. 8 della def. di spazio vett.)

$\Longrightarrow \underline{0} \in W$

3] ✓

4] Sia $\underline{w} \in W$ dobbiamo verificare che

$$-\underline{w} \in W$$

(a priori $-\underline{w} \in V$)

$$\underset{\mathbb{R}}{(-1)} \cdot \underset{W}{\underline{w}} \underset{B]}{\in} W$$

$$\underline{w} + (-1 \cdot \underline{w}) \overset{\text{prop } 8}{=} 1 \cdot \underline{w} + (-1 \cdot \underline{w}) =$$

$$= 1 \cdot \underline{w} + (-1) \cdot \underline{w} \underset{\text{prop. } 6}{=} (1 + (-1)) \cdot \underline{w}$$

$$= 0 \cdot \underline{w} \overset{\text{prop. } 8}{=} \underline{0}$$

($\Longrightarrow (-1 \cdot \underline{w})$ è l'inverso di $\underline{w}$)

$$\Longrightarrow \boxed{(-1) \cdot \underline{w} = -\underline{w}}$$

$$\Longrightarrow -\underline{w} \in W$$

5], 6], 7], 8] ✓ (seguono da $W \subseteq V$) ■

ESEMPI:

a) Sia (*) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$

un sistema lineare omogeneo con n incognite $x_1, \dots, x_n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$$

(*) $\iff A \cdot \underline{x} = \underline{0}$

Allora l'insieme delle soluzioni di (*) è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$.

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ tali che } A \cdot \underline{x} = \underline{0} \right\}$$

Per verificarlo basta far vedere che S è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per uno scalare, ovvero:

A) se $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\underline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ verificano

$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$, $A \cdot \underline{y} = \underline{0}$ allora

$A(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{0}$ ✓

$\parallel$

$A \cdot \underline{x} + A\underline{y} = \underline{0} + \underline{0} = \underline{0}$

B) se $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tale che $A \cdot \underline{x} = \underline{0}$

e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $A(\lambda \underline{x}) = \underline{0}$

$\parallel$

$$\lambda \cdot (A \cdot \underline{x}) = \lambda \cdot \underline{0} = \underline{0} \checkmark$$

b) $V = \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ , funzione} \}$

$+_V$, $\cdot_V$

$W := \{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \}$

W è un sottospazio di V

[- la somma di 2 funzioni continue è continua $\Rightarrow$ A)

- il prodotto di un numero per una funzione continua è una funzione continua $\Rightarrow$ B)]

$$Pol_{\leq n}[x] := \{ a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \text{ tali che } a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$$

$Pol_{\leq n}[x] \subseteq W \subseteq V$

è un sottospazio di W (e di V)