ESERCIZIO

Sia $X \sim N(\mu=2, \sigma^2=9)$.

1) Calcolare $P(X \leq 1)$, esprimendo il risultato con la funzione Φ con argomento positivo.

2) Dire per quale valore di z si ha $P(X \geq z) = 1-\Phi(3/4)$

3) Confrontare $P(2X \leq 6)$ e $P(-2X \leq 4)$

4) Calcolare $P(X \leq 1 \mid X \geq -1)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.

SVOLGIMENTO

1) $P(X \leq 1) = P\Big(\overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{=X^* \sim N(0,1)} \leq \frac{1-\mu}{\sigma}\Big) = \Phi\left(\frac{1-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{1-2}{\sqrt{9}}\right) = \Phi(-1/3) = 1-\Phi(1/3)$.

2) $P(X \geq z) = P\Big(\overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{=X^* \sim N(0,1)} \geq \frac{z-\mu}{\sigma}\Big) = 1-\Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right) = 1-\Phi\left(\frac{z-2}{\sqrt{9}}\right)$. Allora $\frac{z-2}{\sqrt{9}} = \frac{3}{4}$, $z-2 = 3 \cdot \frac{3}{4}$, $z = \frac{9}{4}+2 = \frac{9+8}{4} = \frac{17}{4}$.

3) $P(2X \le 6) = P\left(\frac{\cancel{2}X}{\cancel{2}} \le \frac{\cancel{6}^{\,3}}{\cancel{2}}\right) = P(X \le 3)$

$= P\left(X^* \le \underbrace{\frac{3-\mu}{\sigma}}_{\frac{3-2}{\sqrt{9}} = 1/3}\right) = \Phi(1/3)$

$P(-2X \le 4) = P\left(\frac{\cancel{-2}X}{\cancel{-2}} \ge \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{-2}}\right) = P(X \ge -2)$

$= P\left(X^* \ge \underbrace{\frac{-2-\mu}{\sigma}}_{=\frac{-2-2}{\sqrt{9}} = -\frac{4}{3}}\right) = 1 - P\left(X^* < -\frac{4}{3}\right) = 1 - \Phi(-4/3)$

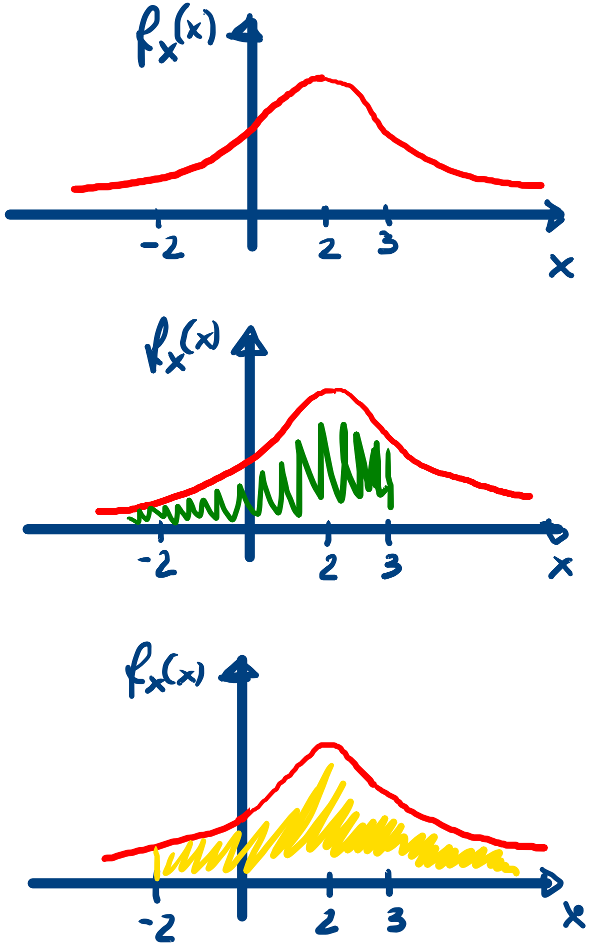
$= 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{4}{3}\right)\right)$

$= \cancel{1} - \cancel{1} + \Phi\left(\frac{4}{3}\right) = \Phi\left(\frac{4}{3}\right)$

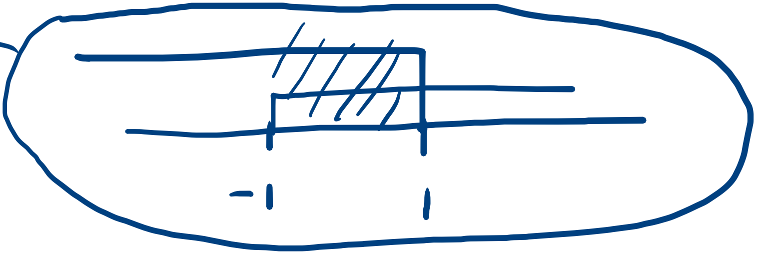
CONCLUSIONE: $P(-2X \le 4) > P(2X < 6)$

cioè la 2ª è maggiore della 1ª

Del resto



4) $$P(X\le 1 \mid X\ge -1) = \frac{P(\{X\le 1\}\cap\{X\ge -1\})}{P(X\ge -1)} \overset{*}{=}$$



$$= \frac{P(-1\le X\le 1)}{P(X\ge -1)} = \frac{P\left(\frac{-1-\mu}{\sigma}\le X^*\le \frac{1-\mu}{\sigma}\right)}{\underbrace{P\left(X^*\ge \frac{-1-\mu}{\sigma}\right)}_{=1-P\left(X^*<\frac{-1-\mu}{\sigma}\right)}} = \frac{\Phi(-\frac{1}{3})-\Phi(-1)}{1-\Phi(-1)} = \dots$$

se volessimo argomenti positivi

$$\frac{-1-\mu}{\sigma} = \frac{-1-2}{\sqrt{9}} = -\frac{3}{3} = -1$$

$$\frac{1-\mu}{\sigma} = \frac{1-2}{\sqrt{9}} = -\frac{1}{3}$$

$$\dots = \frac{1-\Phi(1/3)-(1-\Phi(1))}{1-(1-\Phi(1))} =$$

$$= \frac{\cancel{1}-\Phi(1/3)-\cancel{1}+\Phi(1)}{\cancel{1}-\cancel{1}+\Phi(1)} = \frac{\Phi(1)-\Phi(1/3)}{\Phi(1)}$$

ESERCIZIO

Sia $X \sim N(\mu=-2, \sigma^2=16)$.

1) Calcolare $P(X \geq 0)$ esprimendo il risultato con la funzione Φ.

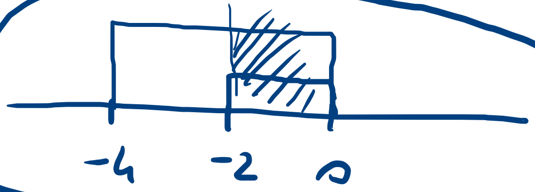
2) Calcolare $P(-2 \leq X \leq 0 \mid -4 \leq X \leq 0)$.

SVOLGIMENTO

1) $$P(X \geq 0) = P\Big(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{= X^* \sim N(0,1)} \geq \frac{0-\mu}{\sigma}\Big) = 1 - \Phi\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = 1 - \Phi\left(-\frac{-2}{\sqrt{16}}\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{2}{4}\right) = 1 - \Phi(1/2).$$

2) $$P(-2 \le X \le 0 \mid -4 \le X \le 0) = \frac{P(\{-2 \le X \le 0\} \cap \{-4 \le X \le 0\})}{P(-4 \le X \le 0)} =$$



$$= \frac{P(-2 \le X \le 0)}{P(-4 \le X \le 0)} = \frac{P\left(\frac{-2-\mu}{\sigma} \le X^* \le \frac{0-\mu}{\sigma}\right)}{P\left(\frac{-4-\mu}{\sigma} \le X^* \le \frac{0-\mu}{\sigma}\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0)}{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{2}\right)} =$$

$$\frac{-2-\mu}{\sigma} = \frac{-2-(-2)}{\sqrt{16}} = 0$$

$$\frac{-4-\mu}{\sigma} = \frac{-4-(-2)}{\sqrt{16}} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{0-\mu}{\sigma} = \frac{0-(-2)}{\sqrt{16}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

ci si potrebbe fermare qui, ma proseguo osservando che $\Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)$

$$= \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0)}{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \left(1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0)}{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1 + \Phi\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= \frac{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0)}{2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1}.$$

Allora ricordando che $\Phi(0) = 0.5 = \frac{1}{2}$ si ha

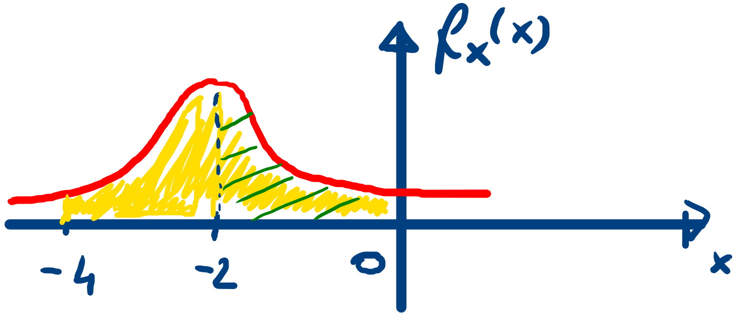
$$\frac{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - \Phi(0)}{2\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{\cancel{\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 0.5}}{2\cancel{\left(\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 0.5\right)}} = \frac{1}{2}$$

In conclusione abbiamo dimostrato (senza usare le tavole ed è un valore non approssimato) che

$$P(-2 \le X \le 0 \mid -4 \le X \le 0) = \frac{1}{2}$$

COMMENTO

Ricordiamo che $X \sim N(\mu = -2, \sigma^2 = 16)$



Quindi, come indicato dal grafico, la probabilità condizionata richiesta è il rapporto tra l'area "con tratti verdi" e l'area "in giallo" che è il doppio; quindi il rapporto deve essere uguale a $1/2$.

ESERCIZIO

Sia $X \sim N(\mu = 9, \sigma^2 = 4)$. Trovare, se esiste, un valore $z < 9$ tale che

$$P(9 < X < 10 \mid z < X < 10) = \frac{1}{2}.$$

RISPOSTA

Si ha

essendo $z < 9$ si ha $\{9 < X < 10\} \subset \{z < X < 10\}$ e quindi

$$\frac{1}{2} = P(9 < X < 10 \mid z < X < 10) = \frac{P(\{9 < X < 10\} \cap \{z < X < 10\})}{P(z < X < 10)} = \frac{P(9 < X < 10)}{P(z < X < 10)} =$$

$$= \frac{P\left(\frac{9-\mu}{\sigma} < \overbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}^{= X^* \sim N(0,1)} < \frac{10-\mu}{\sigma}\right)}{P\left(\frac{z-\mu}{\sigma} < \underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{= X^* \sim N(0,1)} < \frac{10-\mu}{\sigma}\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{10-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{9-\mu}{\sigma}\right)}{\Phi\left(\frac{10-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{z-\mu}{\sigma}\right)} = \frac{\Phi\left(\frac{10-9}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{9-9}{\sqrt{4}}\right)}{\Phi\left(\frac{10-9}{\sqrt{4}}\right) - \Phi\left(\frac{z-9}{\sqrt{4}}\right)} = \frac{\Phi(1/2) - \Phi(0)}{\Phi(1/2) - \Phi\left(\frac{z-9}{2}\right)}$$

Quindi

$$\frac{1}{2} = \frac{\Phi(1/2) - 0{,}5}{\Phi(1/2) - \Phi\left(\frac{z-9}{2}\right)} \Longrightarrow \Phi(1/2) - \Phi\left(\frac{z-9}{2}\right) = 2\left(\Phi(1/2) - 0{,}5\right)$$

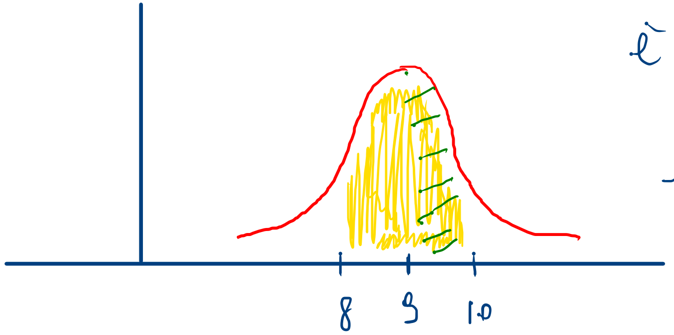
$$\Longrightarrow \Phi(1/2) - \Phi\left(\frac{z-9}{2}\right) = 2\,\Phi(1/2) - 1$$

$$\Longrightarrow 1 - \Phi(1/2) = \Phi\left(\frac{z-9}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \Phi(-1/2) = \Phi\left(\frac{z-9}{2}\right) \Longrightarrow -\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{z-9}{\cancel{2}} \Longrightarrow z = 9-1 \Longrightarrow z = 8$$

COMMENTO

Effettivamente $P(9 < X < 10 \mid 8 < X < 10) = \frac{1}{2}$ perchè la probabilità condizionata richiesta è il rapporto tra l'area "con i tratti verdi" e l'area "in giallo" che è il doppio; quindi il rapporto deve essere uguale a $\frac{1}{2}$.



ESERCIZIO

Sia $X \sim N(0,1)$. Trovare $z \in (-1,1)$ tale che $P(X > z \mid -1 < X < 1) = 1/2$.

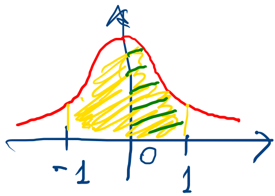
RISPOSTA

Si ha
$$\frac{1}{2} = P(X>z \mid -1<X<1) = \frac{P(\{X>z\} \cap \{-1<X<1\})}{P(-1<X<1)} = \frac{P(z<X<1)}{P(-1<X<1)} =$$

$$= \frac{\Phi(1)-\Phi(z)}{\Phi(1)-\Phi(-1)} = \frac{\Phi(1)-\Phi(z)}{\Phi(1)-(1-\Phi(1))} = \frac{\Phi(1)-\Phi(z)}{2\Phi(1)-1} = \frac{\Phi(1)-\Phi(z)}{2(\Phi(1)-0,5)}.$$

Quindi

$$\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{\Phi(1)-\Phi(z)}{\cancel{2}(\Phi(1)-0,5)} \Longrightarrow \cancel{\Phi(1)} - \Phi(z) = \cancel{\Phi(1)} - 0,5 \Longrightarrow \Phi(z) = 0,5 \Longrightarrow z = 0.$$



OSS. Anche in questo caso si ha una interpretazione grafica tipo quella degli esercizi precedenti.

DISTRIBUZIONE GAMMA

Una v.a. X ha distribuzione Gamma di parametri $\alpha, \beta > 0$ (in simboli $X \sim \text{Gamma}(\alpha,\beta)$) se ha densità continua

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x),$$

dove $\Gamma : (0,\infty) \to (0,\infty)$ è la <u>funzione Gamma</u> così definita

$$\Gamma(y) = \int_0^\infty z^{y-1} e^{-z} \, dz.$$

Ovviamente la funzione di distribuzione è la seguente:

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t f_X(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \, dx & \text{per } t > 0. \end{cases}$$

COMMENTI.

1) Verifichiamo che $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = 1$. Si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{z}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-z}\,\frac{dz}{\beta} = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \frac{z^{\alpha-1}e^{-z}}{\beta^{\alpha-1+1}}\,dz = \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{1}{\cancel{\beta^\alpha}}\int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-z}\,dz$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} = 1.$$

$$\boxed{\beta x = z \Rightarrow x = \frac{z}{\beta} \Rightarrow dx = \frac{dz}{\beta}}$$

Quindi $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$ è una costante di normalizzazione.

2) Per $\alpha=1$ abbiamo la distribuzione $Exp(\beta)$ come caso particolare.

Infatti

$$f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}1_{(0,\infty)}(x) = \frac{\beta^1}{\Gamma(1)}x^{1-1}e^{-\beta x}1_{(0,\infty)}(x) = \beta e^{-\beta x}1_{(0,\infty)}(x)$$

1

perché $\Gamma(1) = \int_0^\infty z^{1-1}e^{-z}\,dz = \int_0^\infty e^{-z}\,dz = \left[-e^{-z}\right]_{z=0}^{z=\infty} = -e^{-\infty}-(-e^0) = 0+1 = 1$.

3) In generale non si ha un valore esplicito di $\Gamma(y)$.

Valori espliciti si hanno per y intero $(1,2,3,4,\ldots)$ e y semi intero $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2},\frac{7}{2},\ldots\right)$.

Per dimostrare questo osserviamo che vale la seguente relazione:

$$\forall y>1 \qquad \Gamma(y) = \int_0^{\infty} z^{y-1} e^{-z}\, dz = \left[z^{y-1}(-e^{-z})\right]_{z=0}^{z=\infty} - \int_0^{\infty} -e^{-z}(y-1)\, z^{y-2}\, dz =$$

$$= 0-0+(y-1)\int_0^{\infty} z^{y-2} e^{-z}\, dz = (y-1)\int_0^{\infty} z^{y-1-1} e^{-z}\, dz = (y-1)\,\Gamma(y-1).$$

Allora, ricordando che $\Gamma(1)=1$, per $y>1$ intero si ha

$$\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1) = (y-1)(y-2)\Gamma(y-2) = \cdots = (y-1)(y-2)\cdots 2\cdot 1 = (y-1)!$$

Inoltre, come vedremo, $\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}$. Allora, se y è SEMI-INTERO, cioè $y=\frac{k}{2}$ con k intero dispari $(k>0)$, si ha

$$\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1) = (y-1)(y-2)\Gamma(y-2) = \cdots = \frac{k-2}{2}\cdot\frac{k-4}{2}\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ESEMPI: $\Gamma(3/2)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $\Gamma\left(\frac{9}{2}\right)=\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ ecc.

Per i motivi per cui non si ha sempre un'espressione esplicita di $\Gamma(y)$, non si ha sempre un'espressione esplicita di

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ \int_0^t \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx & \text{per } t > 0 . \end{cases}$$

Ad esempio abbiamo un'espressione esplicita nel caso in cui α è intero.

In tal caso, ponendo $\alpha = n$, integrando per parti $n-1$ volte si ottiene la seguente espressione

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

In particolare per $n = 1$ si ha

$$F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\beta t} & \text{per } t > 0 \end{cases}$$

in accordo con il fatto che $X \sim Exp(\beta)$

Ora calcoliamo per completezza $\Gamma(1/2)$. Si ha

$$\Gamma(1/2)=\int_0^{\infty} \tau^{\frac{1}{2}-1} e^{-\tau}\, d\tau$$

e consideriamo il seguente cambio di variabile:

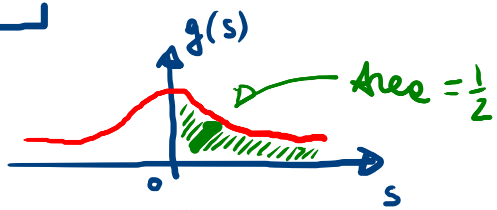
$$\boxed{\tau=\frac{s^2}{2}} \iff s=\sqrt{2\tau} \qquad \boxed{d\tau = s\, ds}$$

Allora

$$\Gamma(1/2)=\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-\tau}\, d\tau =$$

$$=\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{s^2/2}}\, e^{-s^2/2}\, s\, ds = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{2}}{\cancel{s}}\, e^{-s^2/2}\, \cancel{s}\, ds = \sqrt{2}\int_0^{\infty} e^{-s^2/2}\, ds =$$

$$=\sqrt{2}\,\underbrace{\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}}}_{=1}\int_0^{\infty} e^{-s^2/2}\, ds = \underbrace{\sqrt{2}\,\sqrt{2\pi}}_{=2\sqrt{\pi}} \cdot \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-s^2/2}\, ds}_{=\frac{1}{2} \text{ perché}} = \cancel{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{\cancel{2}} = \sqrt{\pi}$$



dove la funzione g è la densità di una $N(0,1)$.

PROPOSIZIONE (senza dimostrazione; utile in vista del Processo di Poisson)

Siano $X_1, \dots, X_n$ $n \geq 1$ v.a. aleatorie tali che

$$\left.\begin{cases} X_1 \sim \text{Gamma}(\alpha_1, \beta) \\ \vdots \\ X_n \sim \text{Gamma}(\alpha_n, \beta) \end{cases}\right\} \text{indipendenti} \qquad \text{per } \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta > 0.$$

Allore $\quad X_1 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(\alpha_1 + \dots + \alpha_n, \beta).$

CONSEGUENZA (COROLLARIO)

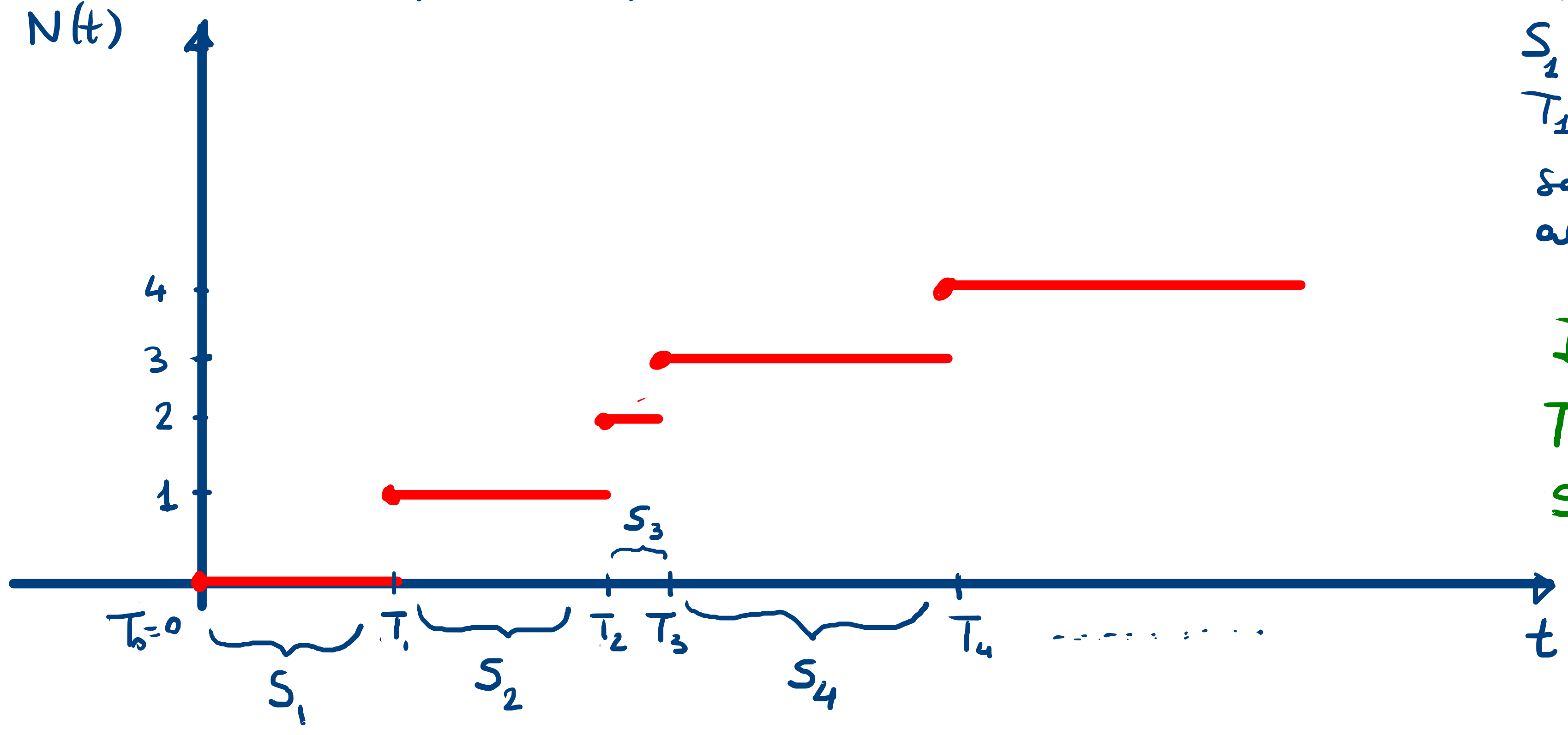
Se $X_1, \dots, X_n$ sono indipendenti e tutte con distribuzione $\text{Exp}(\beta)$, allora

$$X_1 + \dots + X_n \sim \text{Gamma}(n, \beta)$$

DIM. Segue dalla proposizione in alto con $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1.$

PROCESSO DI POISSON

Talvolta è utile modellizzare il numero di eventi che accadono nel tempo con un processo di conteggio, dato da una famiglia di v.a. $\{N(t) : t \geq 0\}$ che descrive un grafico aleatorio di questo tipo:



Ovviamente $S_1, S_2, S_3, \ldots$ $T_1, T_2, T_3, \ldots$ sono variabili aleatorie.

In generale si ha:

$$T_n = S_1 + \ldots + S_n$$

$$S_n = T_n - T_{n-1}$$

(quindi per $n=1$ si ha $T_1 = S_1$ perché $T_0 = 0$).

In generale è utile fare riferimento a queste notazione

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n \leq t\}} = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{S_1 + \dots + S_n \leq t\}}$$

Il processo di Poisson è un caso particolare di processo di conteggio e si riferisce alla seguente situazione:

$$\boxed{\{S_n : n \geq 1\} \text{ v.a. indipendenti tutte con distribuzione } Exp(\lambda).}$$

In tal caso si parla di processo di Poisson di intensità $\lambda > 0$.

In corrispondenza, ricordando il corollario enunciato poco fa, possiamo dire che

$$T_n \sim Gamma(n, \lambda) \qquad \forall n \geq 1.$$

Quindi, se ricordiamo la funzione di distribuzione di una Gamma con parametro α detta precedentemente, si ha

$$F_{T_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} & \text{per } t > 0 \end{cases} \qquad \forall n \geq 1 .$$

Inoltre possiamo osservare che, per ogni $n \geq 1$ intero e per ogni $t > 0$, abbiamo la seguente uguaglianza tra eventi:

$$\{T_n \leq t\} = \{N(t) \geq n\}$$

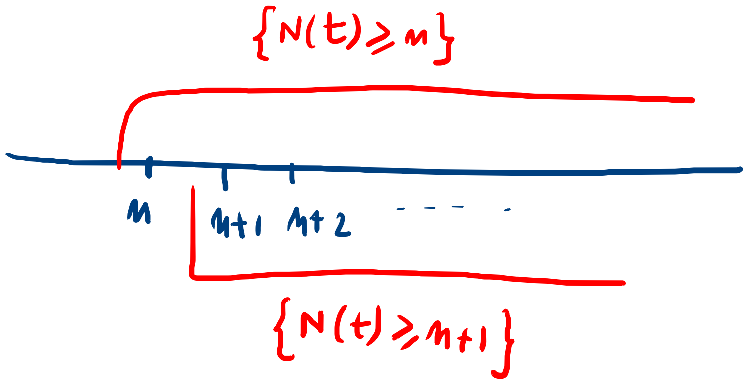
(in realtà si estende anche al caso $n = 0$ perché si ha $\{T_n \leq 0\} \overset{\text{essendo } T_0 = 0}{=} \Omega$ e $\{N(t) \geq 0\} = \Omega$)

Questo è utile per studiare la v.a. discreta $N(t)$ per $t > 0$ fissato. Si ha

$$P(T_n \leq t) = P(N(t) \geq n), \quad F_{T_n}(t) = P(N(t) \geq n), \quad \text{e quindi}$$

$$P(N(t)=n) = P(N(t)\geq n) - P(N(t)\geq n+1) = F_{T_n}(t) - F_{T_{n+1}}(t)$$

$$F_{T_0}(t) = P(T_0 \leq t) = 1$$



$$= \begin{cases} \text{se } n=0 & 1 - F_{T_1}(t) = 1-(1-e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t} \\ \text{se } n\geq 1 & 1 - e^{-\lambda t}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \left\{1 - e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n+1-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\right\} \\ & = \cancel{1} - e^{-\lambda t}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(\lambda t)^k}{k!} - \cancel{1} + e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{n+\cancel{1-1}}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!} \end{cases}$$

In conclusione la densità discreta di $N(t)$ è

$$p_{N(t)}(n) = P(N(t)=n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!}e^{-\lambda t} \quad \text{per } n\geq 0 \text{ intero}$$

Quindi $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$.

ESERCIZIO

Sia $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{\{T_n \le t\}}$ un processo di Poisson di intensità $\lambda = 3$.

1) Calcolare $P(N_2 = 1)$.

2) Calcolare $P(N_4 \geq 1)$.

3) Calcolare $P(T_3 \geq 10)$.

4) Calcolare $P(N_2 = k \mid N_2 \le 2)$ per $k \in \{0, 1, 2\}$.

NOTAZIONE

In questo esercizio ho usato la notazione N_t al posto di $N(t)$, notazione delle slides precedenti

SVOLGIMENTO

1) $P(N_2 = 1) = \frac{6^1}{1!} e^{-6} = 6e^{-6}$.

$N_2 \sim \text{Poisson}(\underbrace{\lambda \cdot 2}_{= 3 \cdot 2 = 6})$

2) $P(N_4 \geq 1) = 1 - P(N_4 < 1) = 1 - P(N_4 = 0)$

$= 1 - \frac{12^0}{0!} e^{-12} = 1 - e^{-12}$.

$\lambda = 3$ $N_4 \sim \text{Poisson}(\lambda \cdot 4)$

$\Rightarrow N_4 \sim \text{Poisson}(12)$

3) $P(T_3 \geq 10) = 1 - P(T_3 < 10) = 1 - F_{T_3}(10) = 1 - \left(1 - e^{-3\cdot 10} \sum_{k=0}^{3-1} \frac{(3\cdot 10)^k}{k!}\right) =$

$T_3 \sim Gamma(3, \lambda) = Gamma(3,3)$

$= \cancel{1} - \cancel{1} + e^{-30}\left(\frac{30^0}{0!} + \frac{30^1}{1!} + \frac{30^2}{2!}\right) = (1 + 30 + 450)\, e^{-30} = 481\, e^{-30}$

<u>oss</u>. Procedimento alternativo basato su alcuni passaggi di teoria:

$P(T_3 \geq 10) = 1 - P(T_3 < 10) = 1 - P(N(10) \geq 3) = 1 - (1 - P(N(10) < 3)) = P(N(10) < 3)$

$= P(N(10) \leq 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{(3\cdot 10)^k}{k!} e^{-3\cdot 10} = (1 + 30 + 450)\, e^{-30} = 481 \cdot e^{-30}.$

4) Per $k \in \{0,1,2\}$

$\{N_2 = k\} \subset \{N_2 \leq 2\}$

$P(N_2 = k \mid N_2 \leq 2) = \frac{P(\{N_2 = k\} \cap \{N_2 \leq 2\})}{P(N_2 \leq 2)} = \frac{P(N_2 = k)}{P(N_2 \leq 2)} = \frac{\frac{(3\cdot 2)^k}{k!} \cancel{e^{-3\cdot 2}}}{\sum_{j=0}^{2} \frac{(3\cdot 2)^j}{j!} \cancel{e^{-3\cdot 2}}} = \begin{cases} k=0 & \frac{1}{1+6+18} = \frac{1}{37} \\ k=1 & \frac{6}{1+6+18} = \frac{6}{37} \\ k=2 & \frac{18}{1+6+18} = \frac{18}{37} \end{cases}$

SOMMA $= 1$ ok

ESERCIZIO

Sia $X \sim Gamma(\alpha, \beta)$. Sia $r > 0$ una costante. Verificare che $Y = rX \sim Gamma(\alpha, \beta/r)$.

SVOLGIMENTO

Prendiamo la formula della v.a. ottenuta come trasformazione affine, cioè $Y = aX + b$ (con $a = r$ e $b = 0$):

$$f_Y(y) = \frac{1}{|r|} f_X\left(\frac{y-0}{r}\right) = \frac{1}{r} f_X\left(\frac{y}{r}\right) = \frac{1}{r} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{y}{r}\right)^{\alpha-1} e^{-\beta \frac{y}{r}} \mathbb{1}_{(0,\infty)}\left(\frac{y}{r}\right).$$

$|r| = r$ perché $r > 0$

Ovviamente $\mathbb{1}_{(0,\infty)}(y/r) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y)$ perché $y/r > 0 \iff y > 0$ (essendo $r > 0$).

Allora
$$f_Y(y) = \frac{1}{\cancel{r}} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{r^{\alpha \cancel{-1}}} y^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{r} y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y) = \frac{(\beta/r)^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\frac{\beta}{r} y} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(y).$$