

ESERCIZIO

Gli elementi dei prodotti di una fabbrica possono avere due tipi di difetti:

il difetto 1 con probabilità $\frac{3}{100}$; il difetto 2 con probabilità $\frac{7}{100}$.

La presenza dei due difetti può essere considerate indipendente una dall'altra.

Si sceglie un elemento prodotto a caso.

1) Calcolare le probabilità che siano presenti entrambi i difetti

2) Calcolare le probabilità che l'elemento sia difettoso (sia presente almeno uno dei due difetti)

3) Calcolare la probabilità che l'elemento abbia il difetto 1 sapendo che è difettoso

4) Calcolare la probabilità che l'elemento abbia un solo difetto sapendo che i difetti sono

Svolgimento

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$D_k = \{ \text{l'elemento ha il difetto } k \} \quad \text{con } k=1,2.$$

Allora D_1 e D_2 sono indipendenti; $P(D_1) = \frac{3}{100}$ e $P(D_2) = \frac{7}{100}$.

$$1) P(D_1 \cap D_2) = P(D_1)P(D_2) = \frac{3}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{21}{10000}$$

$$2) P(D_1 \cup D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1 \cap D_2) = P(D_1) + P(D_2) - P(D_1)P(D_2) = \\ = \frac{3}{100} + \frac{7}{100} - \frac{3}{100} \cdot \frac{7}{100} = \frac{300 + 700 - 21}{10000} = \frac{979}{10000}$$

Metodo alternativo

$$\left[\begin{aligned} P(D_1 \cup D_2) &= 1 - P((D_1 \cup D_2)^c) = 1 - P(D_1^c \cap D_2^c) \xrightarrow{\text{indip.}} 1 - P(D_1^c)P(D_2^c) = 1 - \left(1 - \frac{3}{100}\right)\left(1 - \frac{7}{100}\right) \\ &= 1 - \frac{97 \cdot 93}{10000} = \frac{10000 - 9021}{10000} = \frac{979}{10000} \end{aligned} \right]$$

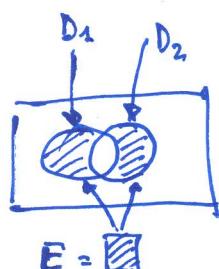
$$3) P(D_1 | D_1 \cup D_2) = \frac{P(D_1 \cap (D_1 \cup D_2))}{P(D_1 \cup D_2)} \xrightarrow{D_1 \subset D_1 \cup D_2}$$

$$= \frac{P(D_1)}{P(D_1 \cup D_2)} = \frac{3/100}{979/10000} = \frac{3}{100} \cdot \frac{10000}{979} = \frac{300}{979}$$

$$4) P(E | D_1 \cup D_2) = \frac{P(E \cap (D_1 \cup D_2))}{P(D_1 \cup D_2)} \xrightarrow{E \subset D_1 \cup D_2}$$

$$= \frac{P(E)}{P(D_1 \cup D_2)} = \frac{P(D_1 \cup D_2) - P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1 \cup D_2)} = 1 - \frac{P(D_1 \cap D_2)}{P(D_1 \cup D_2)} =$$

$$\boxed{P(D_1 \cup D_2) = P(E) + P(D_1 \cap D_2)} \quad = 1 - \frac{21/10000}{979/10000} = 1 - \frac{21}{979} = \frac{979 - 21}{979} = \frac{958}{979}$$



ESEMPIO

Un'urna ha 3 tipi di monete:

M_1 monete con due teste

M_2 monete con due croci

M_3 monete con una testa e una croce.

Si sceglie una moneta ^{a caso} si scopre una faccia ^{a caso} della moneta ed è testa.

Calcolare la probabilità che \bullet l'altra faccia delle monete non scoperte
è testa.

Svolgimento

Introduciamo le seguenti notazioni:

$$T_1 = \{ \text{le facce delle monete scelte è testa} \}$$

$$T_2 = \{ \text{le facce delle monete scelte è testa} \}$$

Viene chiesto di calcolare $P(T_2 | T_1)$: Si ha

$$P(T_2 | T_1) = \frac{P(T_2 \cap T_1)}{P(T_1)} = \frac{P(T_1 \cap T_2)}{\sum_{k=1}^3 P(T_1 | M_k) P(M_k)}$$

oss.
 $M_1 = T_1 \cap T_2$

qui
si considera le formule delle prob. totali e denominatore rispetto alle
partizione di eventi M_1, M_2, M_3 , dove $M_i = \{ \text{scelte le monete di tipo } i \}$

$$\begin{aligned} &= \frac{M_1 / (M_1 + M_2 + M_3)}{1 \cdot \frac{M_1}{M_1 + M_2 + M_3} + 0 \cdot \frac{M_2}{M_1 + M_2 + M_3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{M_3}{M_1 + M_2 + M_3}} = \\ &= \frac{\frac{M_1}{M_1 + 0 + \frac{M_3}{2}}}{\frac{2M_1}{2M_1 + M_3}} \quad \begin{array}{l} \text{Si semplifica} \\ M_1 + M_2 + M_3 \end{array} \\ &\quad \begin{array}{l} \text{Si moltiplica numeratore e denominatore per 2} \end{array} \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Il risultato $P(T_2 | T_1) = \frac{2M_1}{2M_1 + M_3}$ ha la seguente interpretazione:

è il rapporto tra il "numero di facce testa delle monete del tipo 1"
e il "numero di facce testa totali".

ESEMPIO

Abbriemo un'urne con 90 palline numerate da 1 a 90.

Un giocatore gioca il terno 1, 2, 3, nel caso di estrazione ~~casuale~~ di 5 palline d'allegra.

- 1) Calcolare le probabilità di fare terno
- 2) Calcolare le probabilità di fare terno con l'urne truccata aggiungendo 3 palline con i numeri 1, 2, 3.
- 3) Calcolare le probabilità che il trucco venga scoperto.

Svolgimento (METODO ~~DEI~~ i CALCOLI DEI COEFF. BINOMIALI)

$$1) \text{ Si ha } P(\text{terno senza trucco}) = \frac{\binom{3}{3} \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} \rightarrow = \frac{87 \cdot 43}{\binom{90}{5}}$$

oppure $P(\text{terno senza trucco}) = \frac{\binom{2}{2} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}}$

$$2) \text{ Si ha } P(\text{terno con trucco}) = \frac{\binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{2}{1} \binom{87}{2}}{\binom{93}{5}} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 87 \cdot 43}{\binom{93}{5}}$$

Oss. Dai valori numerici si vede che con l'urne truccate la probabilità aumenta anche se è comunque piccola

- 3) Introduciamo gli eventi

$$E_k = \{\text{estratte le due palline con il numero } k\} \quad \text{per } k=1, 2, 3.$$

Venne chiesto $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ e si ha

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

$$\rightarrow P(E_1) = \frac{\binom{2}{2} \binom{91}{3}}{\binom{93}{5}} ; \text{ inoltre } P(E_2) = P(E_1) \text{ e } P(E_3) = P(E_1)$$

$$\rightarrow P(E_1 \cap E_2) = \frac{\binom{4}{4} \binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} = \frac{89}{\binom{93}{5}} \text{ oppure } P(E_1 \cap E_2) = \frac{\binom{2}{2} \binom{2}{2} \binom{89}{1}}{\binom{93}{5}} = \frac{89}{\binom{93}{5}};$$

$$\text{Inoltre } P(E_1 \cap E_3) = P(E_1 \cap E_2) \text{ e } P(E_2 \cap E_3) = P(E_1 \cap E_2).$$

$$\rightarrow P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \text{ poiché } E_1 \cap E_2 \cap E_3 = \emptyset \quad (\text{si doverebbe estrarre 6 palline e invece ne vengono estratte 5})$$

Quindi:

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = 3 \frac{\binom{91}{3}}{\binom{93}{5}} - 3 \frac{89}{\binom{93}{5}} = \frac{3}{\binom{93}{5}} \left[\binom{91}{3} - 89 \right].$$

ESERCIZIO

Abbiamo 3 urne inizialmente vuote e n palline.

Ogni pallina sceglie a caso una delle tre urne dove andare, ognuna indipendentemente dalle altre.

Calcolare la probabilità che almeno un'urna resti vuota (dopo che tutte le palline hanno scelto l'urna dove andare).

Svolgimento

Consideriamo i seguenti eventi

$$E_k = \{ \text{l'urna } k \text{ resta vuota} \} \quad \text{per } k=1, 2, 3.$$

Viene chiesto $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3)$ e si ha

$$P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3).$$

Osserviamo che:

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \underbrace{\frac{2}{3} \dots \frac{2}{3}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1 \cap E_3) = P(E_2 \cap E_3) = \underbrace{\frac{1}{3} \dots \frac{1}{3}}_{n \text{ volte}} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = 0 \quad (\text{non può accadere che tutte le urne restino vuote})$$

$$\begin{aligned} \text{Allora } P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n + 0 \\ &= 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]. \end{aligned}$$

OSSERVAZIONE

Il risultato dipende da n come è giusto che sia.

Ad esempio, anche senza fare calcoli, già sappiamo che certamente si ha un'urna vuota per $n=1$ e per $n=2$. In effetti possiamo verificare questo risultato usando le formule ottenute:

$$\text{per } n=1 \longrightarrow 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^1 - \left(\frac{1}{3}\right)^1 \right] = 3 \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right] = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1$$

$$\text{per } n=2 \longrightarrow 3 \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right] = 3 \left[\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \right] = 3 \cdot \frac{3}{9} = 1$$

ESERCIZIO

Un'urna ha 2 palline rosse e 4 nere.

Si estraggono a caso palline, urne alle volte e senza rimettere, fino a svuotare l'urna.

1) Calcolare le probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa

2) Calcolare le probabilità che l'ultima pallina estratta sia rossa
sapendo che la prima estratta è rossa.

3) Calcolare le probabilità che prima e ultime estratte siano rosse.

SOLIMENTO

Conviene fare riferimento al seguente spazio di prob. uniforme

$$\Omega = D_{6,6} = \{w = (w_1, \dots, w_6) : w_1, \dots, w_6 \in \{1, \dots, 6\}\}$$

con $w_i \neq w_j$ per $i \neq j$

$$\text{con } P(\{w\}) = \frac{1}{\#D_{6,6}} = \frac{1}{6!}$$

La convenzione è la seguente: $\begin{cases} 1, 2 \rightarrow \text{palline rosse} \\ 3, 4, 5, 6 \rightarrow \text{palline nere.} \end{cases}$

1) $P(\{w \in \Omega : w_6 = 1\} \cup \{w \in \Omega : w_6 = 2\})$ è l'urna obbligata

$$= P(\{w \in \Omega : w_6 = 1\}) + P(\{w \in \Omega : w_6 = 2\}) = \frac{5!}{6!} + \frac{5!}{6!} = \frac{5!}{6 \cdot 5!} + \frac{5!}{6 \cdot 5!} =$$

$$\left(\text{nel 1° addendo } \underbrace{(-, -, -, -, -)}_{\substack{\text{permutazioni} \\ \text{di } 2, 3, 4, 5, 6}}, 1 \text{; nel 2° addendo } \underbrace{(-, -, -, -, -)}_{\substack{\text{permutazioni} \\ \text{di } 1, 3, 4, 5, 6}}, 2 \right) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

OSSERVAZIONE

La probabilità che abbiamo ottenuto coincide con la probabilità che la 1^a estratta sia rossa e cioè $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

In generale si può dimostrare che la probabilità che la i-sima estratta sia rossa è sempre la stessa, cioè $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

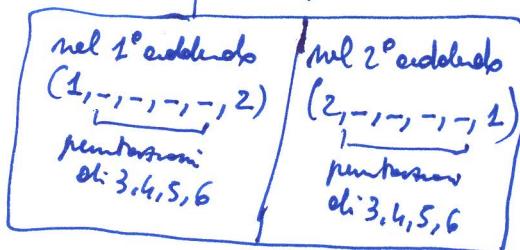
2) Abbiamo una probabilità condizionata → evento intersezione

$$P(\text{ultima rosse} \mid 1^{\circ} \text{ rosse}) = \frac{P(\{1^{\circ} \text{ e ultima rosse}\})}{P(1^{\circ} \text{ rosse})} = \frac{P(\{1^{\circ} \text{ e ultime rosse}\})}{12/60}.$$

$$P(\{1^{\circ} \text{ e ultime rosse}\}) = P(\{w_6 \in \mathbb{R} : w_1=1 \text{ e } w_6=2\} \cup \{w_6 \in \mathbb{R} : w_1=2 \text{ e } w_6=1\})$$

$$= P(\{w_6 \in \mathbb{R} : w_1=1 \text{ e } w_6=2\}) + P(\{w_6 \in \mathbb{R} : w_1=2 \text{ e } w_6=1\}) =$$

$$\begin{aligned} \text{unione disgiunta} &= \frac{4!}{6!} + \frac{4!}{6!} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4!} + \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4!} \\ &= \frac{1}{30} + \frac{1}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} \end{aligned}$$



Quindi si ha

$$P(\text{ultima rosse} \mid 1^{\circ} \text{ rosse}) = \frac{1/15}{1/3} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

OSSERVAZIONE

Il valore ottenuto può essere interpretato come segue: estratte le 1^a rosse, resta ~~una~~¹ ~~una~~ pallina rosse su 5 totali e quindi, tenendo conto quanto abbiamo osservato dopo la risposta precedente, è naturale aspettarsi che venga $\frac{1}{5}$.

3) Le prob. richieste sono state calcolate durante le risposte alle domande precedente e si ha

$$P(\{1^{\circ} \text{ e ultime rosse}\}) = \frac{1}{15}.$$

OSSERVAZIONE

Il valore ottenuto può essere interpretato come segue: tutte le possibili posizioni delle due palline rosse sono date ~~dalle~~^{da} 6 elementi che sottoinsiemi di 2 elementi dell'insieme $\{1, \dots, 6\}$; il loro numero è $\binom{6}{2} = \frac{6!}{2!4!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{2 \cdot 4!} = 15$ e tutti questi insiemi sono equiprobabili; noi abbiamo il sottoinsieme $\{1, 6\}$ e quindi si ha la probabilità $\frac{1}{15}$.

ESERCIZIO

Un'urna contiene m palline numerate da 1 a m , con $m \geq 2$. Si estraggono a caso due palline, una alle volte e senza rimettere.

Calcolare le probabilità di estrarre due numeri consecutivi.

Svolgimento

Propongo due modi per risolvere l'esercizio. Indico con E l'evento di interesse.

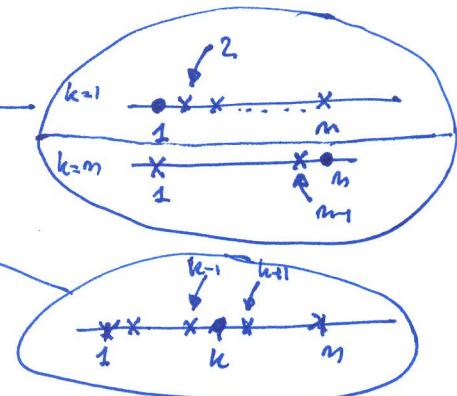
1^o modo

Consideriamo le seguenti partizioni: $\{E_1, \dots, E_m\}$ dove

$$E_k = \{\text{il 1° numero estratto è } k\} \quad k=1, \dots, m.$$

Allora $P(E_1) = \dots = P(E_m) = \frac{1}{m}$. Inoltre

$$P(E|E_k) = \begin{cases} \text{per } k=1 \text{ e } k=m & \frac{1}{m-1} \\ \text{per } k=2, \dots, k=m-1 & \frac{2}{m-1} \end{cases}$$



Quindi per le formule delle prob. totale si ha

$$P(E) = \sum_{k=1}^m P(E|E_k) \cdot P(E_k) = \sum_{k=1}^m P(E|E_k) \cdot \frac{1}{m} =$$

$$\stackrel{1 \text{ esce fuori dalla sommatoria}}{\Rightarrow} \frac{1}{m} \left(\underbrace{\frac{1}{m-1} + \frac{2}{m-1} + \dots + \frac{2}{m-1}}_{m-2 \text{ volte}} + \frac{1}{m-1} \right) = \frac{2(m-2) + 1 + 1}{m(m-1)} =$$

$$= \frac{2(m-2) + 2}{m(m-1)} = \frac{2(m-2+1)}{m(m-1)} = \frac{2(m-1)}{m(m-1)} = \frac{2}{m}.$$

2^o modo

Tutte le sequenze ordinate di elementi di $1, \dots, m$ ~~sense~~^{sense} ripetizioni sono $m(m-1)$ e tutte equiprobabili (spazio uniforme discreto...). Quindi

$$\begin{aligned} P(E) &= \frac{\#E}{m(m-1)} = \frac{\#\{(1,2), (2,1), (2,3), (3,2), \dots, (m-1,m), (m,m-1)\}}{m(m-1)} = \\ &= \frac{2(m-1)}{m(m-1)} = \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

ESEMPIO

Si considera il lancio di due dadi (due volte lo stesso dardo, o anche due dardi diversi; non c'è differenza).

- 1) Calcolare le probabilità di ottenere due numeri minori o uguali a 4.
- 2) Calcolare le probabilità dello stesso evento delle domande precedente sapendo che la somma dei due numeri ottenuti è uguale a 7.

Svolgimento

1) ~~Indipendenza~~ In questi casi gli eventi ~~di~~ lanci di dadi diversi sono indipendenti. In generale per $(w_1, w_2) \in S = \{1, \dots, 6\} \times \{1, \dots, 6\}$ si ha

$$P(\{w\}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}; \text{ quindi, essendo } \#S=36, \text{ si ha uno spazio di probabilità uniforme discinto.}$$

$$\text{Quindi } P(A) = \frac{\#\{A\}}{36} = \frac{\#\{(w_1, w_2) : w_1, w_2 \leq 4\}}{36} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

(1,1), (1,2), (1,3), (1,4)
(2,1), (2,2), (2,3), (2,4)
(3,1), (3,2), (3,3), (3,4)
(4,1), (4,2), (4,3), (4,4)

OSS. Possiamo anche ragionare così: Consideriamo gli eventi

$$A_n = \{ \text{il } n^{\text{o}} \text{ dardo} \leq 4 \text{ nel lancio del } k^{\text{o}} \text{ dardo} \} \quad k=1,2.$$

Allora $A = A_1 \cap A_2$, con A_1 e A_2 indipendenti; quindi:

$$P(A) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}.$$

2) Sia $E = \{ \text{la somma dei due valori ottenuti è } 7 \}$. Allora

$$P(A|E) = \frac{\#(A \cap E)}{\#E} = \frac{\#\{(3,4), (4,3)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)\}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

OSS. Sappiamo che A_1 e A_2 sono indipendenti. Ci si chiede se lo sono anche sotto l'evento E , cioè $P(A_1 \cap A_2 | E) = P(A_1 | E)P(A_2 | E)$?

Abbiamo appena visto che $P(A|E) = P(A_1 \cap A_2 | E) = \frac{1}{3}$. Inoltre

$$P(A_1 | E) = \frac{\#(A_1 \cap E)}{\#E} = \frac{\#\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_2 | E) = \frac{\#(A_2 \cap E)}{\#E} = \frac{\#\{(6,1), (5,2), (4,3), (3,4)\}}{\#\{(1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (4,3), (3,4)\}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1 | E)P(A_2 | E) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Quindi la risposta è NO. 4