[Teo dimensione: $T: V \longrightarrow W$ lineare

$\dim V = \dim \operatorname{Ker} T + \operatorname{rg} T$]

$\operatorname{Ker} T \subseteq V$

$\operatorname{Ker} T = \{ \underline{v} \in V \text{ t.c. } T(\underline{v}) = \underline{0} \} = T^{-1}(\underline{0})$

Corollario: V, W sp. vettoriali

$T: V \longrightarrow W$ lineare

1) • T è iniettiva se e solo se

• $\operatorname{Ker} T = \{\underline{0}\}$ se e solo se

• $\operatorname{rg} T = \dim V$

2) T è suriettiva se e solo se

• $\operatorname{Im} T = W$ se e solo se

$\operatorname{rg} T = \dim W$

<u>Dim</u>: 1) se T è iniettiva allora [$T^{-1}(\underline{0})$ contiene al più un elemento]

vettore nullo in W

ma $[\, T(\underline{0}) = T(0 \cdot \underline{0}) = 0 \cdot T(\underline{0}) = \underline{0} \,]$

vettore nullo in V

T lineare

vettore nullo in W

[se T è lineare $T(\underline{0}) = \underline{0}$]

dunque $\underline{0} \in T^{-1}(\underline{0})$

vettore nullo in V

vettore nullo in W

$$\stackrel{\text{iniettiva}}{\Longrightarrow} \quad T^{-1}(\underline{0}) = \{\underline{0}\} \quad \Longrightarrow \quad \dim \operatorname{Ker} T = 0$$

$$T^{-1}(\underline{0}) = \operatorname{Ker} T$$

dal teorema della dimensione:

$$\dim V = \underbrace{\dim \operatorname{Ker} T}_{= 0} + \operatorname{rg} T$$

Viceversa se $\dim V = \operatorname{rg} T$, dalla teo della dimensione $\Longrightarrow \dim \operatorname{Ker} T = 0$

$\Longrightarrow \ker T = \{\underline{0}\}$

verifichiamo che T è iniettiva:

siano $\underline{v}, \underline{v}' \in V$ tali che $T(\underline{v}) = T(\underline{v}')$

vogliamo provare che, se $\ker T = \{\underline{0}\}$,

allora $\underline{v} = \underline{v}'$ ($\Rightarrow T$ iniettiva):

da $T(\underline{v}) = T(\underline{v}') \Longrightarrow T(\underline{v}) - T(\underline{v}') = \underline{0}$

$$\xRightarrow{T \text{ lineare}} T(\underline{v} - \underline{v}') = \underline{0}$$

cioè $\underline{v} - \underline{v}' \in \ker T$

ma $\ker T = \{\underline{0}\}$

$$\Longrightarrow \underline{v} - \underline{v}' = \underline{0} \Rightarrow \underline{v} = \underline{v}' \quad \blacksquare$$

2) T suriettiva $\Longleftrightarrow \operatorname{Im} T = W$

poiché $\operatorname{Im} T \underset{\text{sottosp.}}{\subseteq} W$

$$\Longleftrightarrow \dim \underbrace{\operatorname{Im} T}_{} = \dim W \quad \blacksquare$$

rg$^{\underline{\text{o}}}$ T

DEF: $A \in Mat(m \times n)$.

Il rango di A è

$$\mathrm{rg}\, A := \dim \mathrm{Im}\, L_A =: \mathrm{rg}\, L_A$$

dove

$$L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

$$L_A(\underline{x}) := A \cdot \underline{x}$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{rg}\, A = ?$

$A \in Mat(2 \times 3)$

$$L_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$L_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x + 2y + z \\ -x - 2y - z \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} L_A$$

$$\operatorname{Im} L_A \underset{\uparrow}{=} \operatorname{span} \{ L_A(\underline{e}_1), L_A(\underline{e}_2), L_A(\underline{e}_3) \}$$

lezione precedente

($T : V \to W$ lineare, $\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ base di V

$\Rightarrow \operatorname{Im} T = \operatorname{span} \{ T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n) \}$)

OSS: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\underline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \qquad \underline{e}_j \in \mathbb{R}^n$

$$L_A(\underline{e}_j) := A \cdot \underline{e}_j =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mj} & & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$

$\underline{e}_2$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

per trovare la dimensione di

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

EG

$R_2 \to R_2 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{Im} L_A = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Im} L_A = 1 \Rightarrow \operatorname{rg} A = 1.$$

$$\Big[\ \underbrace{\dim \mathbb{R}^3}_{\substack{\parallel \\ 3}} = \dim \operatorname{Ker} L_A + \underbrace{\operatorname{rg} A}_{\substack{\parallel \\ 1}}$$

$$\Rightarrow \dim \operatorname{Ker} L_A = 2 \ \Big]$$

Corollario: Sia $A \in Mat(m \times n)$

allora

$\operatorname{rg} A$ = numero di pivot di una qualunque riduzione a scala tramite "EG" di A.

Dim: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\underbrace{\phantom{a_{m1}}}_{\underline{a}_1} \quad \underbrace{\phantom{a_{mn}}}_{\underline{a}_n}$

$\operatorname{rg} A = \dim \operatorname{Im} L_A =$

$= \dim \operatorname{span}\{L_A(\underline{e}_1), \ldots, L_A(\underline{e}_n)\}$

$= \dim \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n\}$

$=$ # pivot di riduzione a scala tramite EG di $(\underline{a}_1 \ldots \underline{a}_n) = A$

$\blacksquare$

SISTEMI LINEARI

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $x_1, \_, x_n$ sono le incognite

$a_{11}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{R}$, $b_1, \_, b_m$ sono

i termini noti.

$$A = \begin{array}{c} \\ \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \dots & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{pmatrix} \\ \quad \underline{a}_1 \qquad\qquad \underline{a}_n \end{array} \qquad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$(*) \iff A\underline{x} = \underline{b}$$

$$\iff \underline{b} \in \operatorname{Im} L_A$$

più precisamente, se S è l'insieme delle soluzioni di (*), allora

$$\boxed{S = L_A^{-1}(\underline{b})}$$

il sistema ha soluzione se e solo se

OSS. 1 $\underline{b} \in \operatorname{Im} L_A = \operatorname{span}\{L_A(\underline{e}_1), \dots, L_A(\underline{e}_n)\}$

$$= \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}$$

il sistema (*) ha soluzione se e solo se

$$\underbrace{\dim \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n\}}_{\overset{\shortparallel}{\operatorname{rg} A}} = \underbrace{\dim \operatorname{span}\{\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n, \underline{b}\}}_{\overset{\shortparallel}{\operatorname{rg}(A')}}$$

$$A' = (A \mid \underline{b})$$

OSS 2: se $\underline{b} = \underline{0}$, ovvero il sistema è omogeneo, $A\underline{x} = \underline{0}$,

$$S = L_A^{-1}(\underline{0}) = \ker L_A$$

$$\Rightarrow \dim S = \dim \ker L_A \underset{\uparrow}{=} \dim \mathbb{R}^n - \operatorname{rg} L_A$$

teo delle dimensione $[L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m]$

$$= \underbrace{n}_{\text{numero di incognite}} - \operatorname{rg} A$$

Corollario: il sistema lineare omogeneo

$$A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

ha la sola soluzione $\underline{x} = \underline{0}$ se e solo se il numero di incognite è uguale al rango di A

TEOREMA DI ROUCHÉ - CAPELLI

Sia

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

un sistema lineare con incognite $x_1, \dots, x_n$.

Sia

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

la matrice incompleta del sistema

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

la matrice completa del sistema

Allora:

il sistema ha soluzione se e solo se

$$\mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, A'$$

inoltre se il sistema ha soluzione, le soluzioni sono del tipo

$$\underline{x}_0 + \underline{y}$$

dove $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ è una soluzione di $A\underline{x} = \underline{b}$

e $\underline{y}$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato $A\,\underline{x} = \underline{0}$.

Inoltre la dimensione dello spazio delle soluzioni di $A\,\underline{x} = \underline{0}$ è $n - \mathrm{rg}\, A$.

(si scrive che il sistema $A\,\underline{x} = \underline{b}$ ha $\infty^{n-\mathrm{rg}A}$ soluzioni)

Corollario: Il sistema $A\underline{x} = \underline{b}$ ha una unica soluzione se e solo se

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A' = n$$

n = numero delle incognite

A' = matrice completa del sistema.

Esempio: discutere le soluzioni del seguente sistema in dipendenza del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - \alpha y + z = \alpha \\ x - 2y - \alpha z = 0 \end{cases}$$

—

3 incognite x, y, z

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 \\ 1 & -2 & -\alpha \end{pmatrix}$$

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

usiamo l'EG per determinare rg A, rg A'

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 1 & \alpha \\ 1 & -2 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & \alpha-1 \\ 0 & -3 & -\alpha-1 & -1 \end{pmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -\alpha-1 & -1 \\ 0 & -\alpha-1 & 0 & \alpha-1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \longrightarrow R_3 - \frac{\alpha+1}{3} R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -\alpha-1 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{(\alpha+1)^2}{3} & (\alpha-1) + \frac{\alpha+1}{3} \end{pmatrix}$$

- se $\alpha+1 \neq 0$ cioè $\alpha \neq -1$

$$rg\, A = rg\, A' = 3$$

dunque il sistema ammette una unica soluzione. (dal corollario precedente)

- se $\alpha+1 = 0$, cioè $\alpha = -1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad rg\, A = 2$$

$$rg\, A' = 3$$

dunque $rg\, A \neq rg\, A' \Rightarrow$ non esiste soluzione.

TEOREMA $A \in Mat(m \times n)$

$$\boxed{rg\, A = rg\, A^t}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad rg\, A = 2$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{rg} A^t = 2$$

OSS: $\operatorname{rg} A \leq \min\{m, n\}$

$A \in Mat(m \times n)$

OSS 2: il teorema precedente permette di svolgere l'EG per COLONNE invece che per righe (ai fini del calcolo del rango)