ESERCIZIO (TEORICO, UN PO' DIFFICILE)

Sia $N \sim Poisson(\lambda)$ per qualche $\lambda > 0$. Si lancia una moneta N volte: per ogni lancio di moneta esce testa con probabilità $p \in (0,1)$, ed esce croce con probabilità $1-p$.

Sia X la v.a. che conta il numero di teste ottenute.

1) Trovare la densità discreta di X

2) Calcolare $P(N=n \mid X=k)$ per $n \geq k \geq 0$.

<u>OSS</u>.

- Si escludono i casi $p=0$ e $p=1$ per evitare casi banali.
- Se si verifica l'evento $\{N=0\}$ (non si lanciano monete), allora si verifica $\{X=0\}$ (non escono teste).

SVOLGIMENTO

1) La v.a. X assume valori interi non negativi. Conviene fare riferimento alla formula delle probabilità totali con la partizione $\{\{N=n\} : n \geq 0\}$:

$\forall k \geq 0$ (intero) $$p_X(k) = P(X=k) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(X=k \mid N=n)}_{(*)} \underbrace{P(N=n)}_{=\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}}$$

dove

$$(*) = P(X=k \mid N=n) = \begin{cases} 0 & \text{se } k > n \\ \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & \text{se } 0 \leq k \leq n \end{cases}$$

Quindi

$$\boxed{p_X(k)} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\cancel{n!}}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} = \ldots$$

$$\dots = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \lambda^{n-k+k} = e^{-\lambda} \frac{p^k}{k!} \lambda^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\lambda^{n-k}(1-p)^{n-k}}{(n-k)!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!}} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p))^h}{h!} = e^{-\lambda} \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{\lambda(1-p)} =$$

si può pensare al cambio di indice $h = n-k$

$$= \boxed{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}}$$

<u>OSS</u>. Possiamo dire che $X \sim \text{POISSON}(\lambda p)$.

2) Per calcolare $P(N=n \mid X=k)$ usiamo la formula di Bayes perché conosciamo $P(X=k \mid N=n)$ (vedere uguaglianza con $(*)$ nella slide precedente).

Quindi (per $n \geq k$, n intero)

formula con (*), IPOTESI $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $P(X=k)$ è $p_X(k)$ della domanda precedente

$$P(N=n \mid X=k) = \frac{P(X=k \mid N=n)\,P(N=n)}{P(X=k)} \stackrel{!}{=}$$

$$= \frac{\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}}{\frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}} = \frac{\frac{\cancel{n!}}{\cancel{k!}\,(n-k)!} \cancel{p^k} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{\cancel{n!}} e^{-\lambda}}{\frac{\lambda^k \cancel{p^k}}{\cancel{k!}} e^{-\lambda p}} = \frac{(1-p)^{n-k}}{(n-k)!} \lambda^{n-k} e^{-\lambda+\lambda p} =$$

$$= \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)}.$$

OSS.

Possiamo dire che $p(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda(1-p))^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\lambda(1-p)} & \text{per } n \geq k \text{ intero} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$ è la densità discreta

di $Z+k$ dove $Z \sim \text{Poisson}(\lambda(1-p))$.

DISTRIBUZIONE GEOMETRICA (E DISTRIBUZIONE GEOMETRICA TRASLATA).

Supponiamo di avere una successione di prove indipendenti, tutte con probabilità di successo $p \in (0,1]$.

Siamo interessati all'istante del "1° successo" e, per questo motivo, escludiamo il caso $p=0$.

Consideriamo le seguenti v.a.:

$X = \#$ fallimenti prima del "1° successo" (assume valori in $\{0,1,2,\dots\}$);

$Y = \#$ successi per avere il "1° successo" (assume valori in $\{1,2,3,\dots\}$).

Queste v.a. sono legate tra loro perchè $Y = X+1$ e $X = Y-1$.

<u>Esempio</u>: se si ha la sequenza di risultati $F, F, S, \dots$, si verificano gli eventi

$\{X=2\}$ e $\{Y=3\}$.

Si considera la seguente terminologia:

X ha distribuzione geometrica di parametro p

Y ha distribuzione geometrica traslata di parametro p

(in simboli scriveremo $X \sim Geo(p)$ e $Y \sim GeoTraslata(p)$).

In alcuni libri la terminologia delle due distribuzioni è scambiata. Quella che usiamo noi è in minoranza. Comunque, per non confonderci, si potrebbe dire che:

X ha distribuzione Geometrica "che parte da zero" (di parametro p);

Y ha distribuzione Geometrica "che parte da uno" (di parametro p).

OSSERVAZIONI

- Abbiamo detto si esclude il caso $p=0$. Infatti non si avrebbe mai il "1° successo" perché si avrebbe sempre fallimento. Per aggirare il problema si potrebbe considerare questa situazione:

$X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (anziché $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$) e $P(X=\infty)=1$;

$Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (anziché $Y: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$) e $P(Y=\infty)=1$.

- Nel caso $p=1$ non ci sono problemi; però possiamo dire che abbiamo sempre successo e quindi $P(X=0)=1$ e $P(Y=1)=1$.

CALCOLO DELLE DENSITÀ DISCRETE DI X E Y.

- Per $k \geq 0$ intero si ha $p_X(k) = P(\underbrace{F \cdots F}_{k \text{ volte}} S) \overset{\text{prove indipendenti}}{=} \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{k \text{ volte}} p = (1-p)^k p$ (vale banalmente anche per $k=0$)

- Per $h \geq 1$ intero si ha

$$p_Y(h) = P(\underbrace{F \cdots F}_{h-1 \text{ volte}} S) = \underbrace{(1-p) \cdots (1-p)}_{h-1 \text{ volte}} p = (1-p)^{h-1} p$$

(vale banalmente anche per $h=1$)

oppure, a partire da p_X, $p_Y(h) = P(Y=h) = P(Y-1 = h-1) = P(X = h-1) = p_X(h-1) = (1-p)^{h-1} p$

essendo $h \geq 1$, si ha $h-1 \geq 0$

OSS. (spiegazione del termine "geometrica").

Per $k \geq 0$ intero $\dfrac{p_X(k+1)}{p_X(k)} = \dfrac{(1-p)^{k+1} p}{(1-p)^k p} = 1-p$ costante rispetto a k;

Per $h \geq 1$ intero $\dfrac{p_Y(h+1)}{p_Y(h)} = \dfrac{(1-p)^{h+1-1} p}{(1-p)^{h-1} p} = 1-p$ costante rispetto ad h.

FORMULA DELLA SERIE GEOMETRICA

Per ogni $h \geq 0$ intero e per ogni r tale che $|r|<1$ (cioè $-1<r<1$) si ha

$$\boxed{\sum_{k=h}^{\infty} r^k = \frac{r^h}{1-r}}.$$

OSS. Spesso la useremo per $0 \leq r < 1$.

DIMOSTRAZIONE

$$\sum_{k=h}^{\infty} r^k = r^h + r^{h+1} + r^{h+2} + \dots \overset{(*)}{=} r^h(1+r+r^2+\dots) = \,?$$

Inoltre si ha $\quad 1-r^k = (1-r)(1+r+r^2+\dots+r^{k-1})$ (basta fare i prodotti a 2° membro)

da cui segue $\quad 1+r+r^2+\dots+r^{k-1} = \dfrac{1-r^k}{1-r} \xrightarrow[k\to\infty]{} \dfrac{1}{1-r}$ perché $|r|<1$.

Allora, poiché la serie è il limite delle somme parziali, si ha

$$\sum_{k=h}^{\infty} r^k \underset{(*)}{=} r^h \lim_{k\to\infty}(1+\dots+r^{k-1}) = r^h \cdot \frac{1}{1-r} = \frac{r^h}{1-r}.$$

FORMULA PER LA "CODA" DI UNA V.A. GEOMETRICA (E PER LA TRASLATA)

• Sia $X \sim Geo(p)$. Allora, per $J \geq 0$, si ha

formula serie geom. con $r = 1-p$

$$P(X \geq J) = \sum_{k=J}^{\infty} p_X(k) = \sum_{k=J}^{\infty} (1-p)^k p = p \sum_{k=J}^{\infty} (1-p)^k = p \, \frac{(1-p)^J}{1-(1-p)} = \cancel{p} \, \frac{(1-p)^J}{\cancel{p}} = (1-p)^J$$

<u>OSS</u>. In particolare

$J=0$

$$P(X \geq 0) = (1-p)^0 = 1$$ in accordo con quanto ci si aspetta dalla teoria.

• Sia $Y \sim GeoTraslata(p)$. Allora, per $J \geq 1$, si ha

$$P(Y \geq J) = \sum_{h=J}^{\infty} p_Y(h) = \sum_{h=J}^{\infty} (1-p)^{h-1} p = \frac{p}{1-p} \sum_{h=J}^{\infty} (1-p)^h = \frac{p}{\cancel{1-p}} \, \frac{(1-p)^{\cancel{J}\; J-1}}{1-(1-p)} = \cancel{p} \, \frac{(1-p)^{J-1}}{\cancel{p}} = (1-p)^{J-1}$$

<u>OSS</u>. In particolare

$J=1$

$$P(Y \geq 1) = (1-p)^{1-1} = (1-p)^0 = 1$$ in accordo con quanto ci si aspetta e con la teoria.

PROPRIETÀ DELLA "MANCANZA DI MEMORIA"

Per ogni $k, h \geq 0$ interi si ha $P(X=k+h \mid X \geq h) = P(X=k)$

COMMENTO

Sapendo di aver avuto h fallimenti, la probabilità di avere altri k fallimenti prima del 1° successo è la stessa di avere k fallimenti prima del 1° successo partendo dall'inizio (cioè senza condizionare).

DIMOSTRAZIONE

per il denominatore usiamo la formula per la coda vista prima

$$P(X=k+h \mid X \geq h) = \frac{P(\{X=k+h\} \cap \{X \geq h\})}{P(X \geq h)} \overset{\uparrow}{=} \frac{P(X=k+h)}{P(X \geq h)} \overset{*}{=} \frac{(1-p)^{k+h}\, p}{(1-p)^h} = (1-p)^k p = P(X=k).$$

$\{X=k+h\} \subset \{X \geq h\}$

COMMENTI

- La proprietà di mancanza di memoria mette in guardia dalle teorie sui NUMERI RITARDATARI per le estrazioni dei numeri al lotto.

- Si può dimostrare che, se X ha una v.a. a valori in $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ e soddisfa la proprietà di mancanza di memoria, allora X ha distribuzione geometrica.

- Si può dare un enunciato analogo per la v.a. Y. Infatti, per $k, h \geq 1$ interi, si ha

$$P(Y=k+h \mid Y>h) = \frac{P(\{Y=k+h\} \cap \{Y>h\})}{P(Y>h)} = \frac{P(Y=k+h)}{P(Y \geq h+1)} = \frac{(1-p)^{k+h-1}\, p}{(1-p)^{\cancel{h+1-1}}} = (1-p)^{k-1} p = P(Y=k).$$

$\{Y=k+h\} \subset \{Y>h\}$

FORMULA PER LA CODA VISTA PRIMA

ESERCIZIO

Si lancia ripetutamente un dado equo.

1) Calcolare la probabilità di avere per la 1ª volta un numero ≤ 2 nei primi 3 lanci.

2) Calcolare la probabilità di avere per la 1ª volta il numero 5 dopo il 3° lancio (dal 4° in poi).

3) Calcolare la probabilità di avere per la 1ª volta un numero ≤ 4 ad un lancio pari.

SVOLGIMENTO

In ogni risposta si può fare riferimento ad una opportuna v.a. geometrica traslata.

1) $Y \sim \text{GeoTraslata}\left(p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}\right) \qquad P(X \leq 3) = ?$

$$P(Y \leq 3) = \sum_{k=1}^{3} (1-p)^{k-1} p = p\left\{(1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2\right\} = \frac{1}{3}\left\{1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9}\right\} = \frac{1}{3}\,\frac{9+6+4}{9} = \frac{19}{27}$$

oss. la prob. richiesta è anche uguale a $P(Z \geq 1) = 1 - P(Z=0)$ con $Z \sim BIN\left(n=3, p=\frac{1}{3}\right)$

e quindi $P(Z \geq 1) = 1 - \binom{3}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^0\left(1-\frac{1}{3}\right)^{3-0} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{27-8}{27} = \frac{19}{27}$.

2) $Y \sim GeoTraslata\left(p = \frac{1}{6}\right)$. $P(Y \geq 4) = ?$

$P(Y \geq 4) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{4-1} = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$

oss. Potete verificare che $P(Y \geq 4) = 1 - P(Y < 4)$

$= 1 - \sum_{k=1}^{3} P(Y=k) = 1 - \left(p_Y(1) + p_Y(2) + p_Y(3)\right)$

$= \ldots$

3) $Y \sim GeoTraslata\left(p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}\right)$. $P(Y \in \{2,4,6,8,\ldots\}) = ?$

$P(Y \in \{2,4,6,8,\ldots\}) = \sum_{h=1}^{\infty} p_Y(2h) = \sum_{h=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{3}\right)^{2h-1}\frac{2}{3} = \frac{2/\cancel{3}}{1/\cancel{3}} \sum_{h=1}^{\infty}\left(1/3\right)^{2h} = 2\sum_{h=1}^{\infty}\left(1/9\right)^h =$

$= 2\,\frac{(1/9)^1}{1 - 1/9} = \frac{2/\cancel{9}}{8/\cancel{9}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

ESERCIZIO

Abbiamo un'urna con 5 palline numerate da 1 a 5. Si estraggono palline a caso, una alla volta e con reinserimento.

1) Calcolare la probabilità di estrarre per la 1ª volta il numero 4 alla 3ª estrazione

2) Calcolare la probabilità di estrarre per la 1ª volta un numero dispari ad una estrazione pari dalla quarta in poi.

3) Calcolare la probabilità di estrarre due numeri dispari alle prime due estrazioni sapendo di aver estratto per la 1ª volta il numero 5 alla 3ª estrazione.

SVOLGIMENTO

In ogni risposta si può fare riferimento ad una v.a. geometrica traslata.

1) $Y \sim \text{GeoTraslata}\left(p=\frac{1}{5}\right)$ $\qquad P(Y=3)=?$

$$P(Y=3)=p_Y(3)=(1-p)^{3-1}p=\left(1-\frac{1}{5}\right)^{3-1}\frac{1}{5}=\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\frac{1}{5}=\frac{16}{125}$$

2) $X \sim \text{Geo Traslata}\left(p=\frac{3}{5}\right)$ $\qquad P(X\in\{4,6,8,10,\dots\})=?$

$$P(X\in\{4,6,8,10,\dots\})=\sum_{h=2}^{\infty}p_Y(2h)=\sum_{h=2}^{\infty}(1-p)^{2h-1}p=\sum_{h=2}^{\infty}\left(1-\frac{3}{5}\right)^{2h-1}\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\sum_{h=2}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{2h-1}=$$

$$=\frac{3/\cancel{5}}{2/\cancel{5}}\sum_{h=2}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{2h}=\frac{3}{2}\sum_{h=2}^{\infty}\left(\frac{4}{25}\right)^{h}=\frac{3}{2}\,\frac{(4/25)^2}{1-\frac{4}{25}}=\frac{3}{2}\cdot\frac{16/625}{21/25}=\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\overset{8}{\cancel{16}}}{\underset{25}{\cancel{625}}}\cdot\frac{\cancel{25}}{\underset{7}{\cancel{21}}}=\frac{8}{175}$$

3) $E = \{$due numeri dispari nelle prime due estrazioni$\}$

$F = \{$esce 5 per la 1ª volta alla 3ª estrazione$\}$

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{P((1 \text{ o } 3, 1 \text{ o } 3, 5))}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^{3-1}\frac{1}{5}} = \frac{\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\cancel{\frac{1}{5}}}{\left(\frac{4}{5}\right)^2\cdot\cancel{\frac{1}{5}}} = \frac{\frac{4}{\cancel{25}}}{\frac{16}{\cancel{25}}} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

<u>oss</u>.

Rispetto alla probabilità condizionata $P(\cdot|F)$ per le prime due estrazioni abbiamo 4 casi: $\underbrace{(\text{dispari}, \text{dispari})}_{\text{evento } E}$, (dispari, pari), (pari, dispari), (pari, pari).

Tutti questi casi hanno probabilità $\frac{1}{4}$ perchè $\begin{cases} \text{dispari} \longleftrightarrow 1 \text{ o } 3 \\ \text{pari} \longleftrightarrow 2 \text{ o } 4 \end{cases}$

ESERCIZIO

Si considerino lanci ripetuti di due dadi equi.

1) Calcolare la probabilità che esca per la prima volta una coppia di numeri minori o uguali a 3 ad un lancio dispari, dal terzo in poi.

2) Calcolare la probabilità che esca per la 1ª volta "somma 7" al k° lancio (per $k \in \{1,2,3\}$) sapendo che questo accade in uno dei primi tre lanci.

3) Calcolare la probabilità che esca per la 1ª volta (dispari, dispari) ad un lancio multiplo di 3 sapendo che è questo è accaduto ad un lancio pari.

SVOLGIMENTO

1) $Y \sim \text{GeoTraslata}\left(p = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\right)$

<u>OSS</u>. Sono le coppie $(1,1),(1,2),(1,3)$
$(2,1),(2,2),(2,3)$
$(3,1),(3,2),(3,3)$

Quindi sono 9 coppie su 36, tutte con prob. $\frac{1}{36}$, da cui segue $p = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$$P(Y \in \{3,5,7,\ldots\}) = ?$$

$$P(Y \in \{3,5,7,\ldots\}) = \sum_{h=2}^{\infty} p_Y(2h-1)$$

$$= \sum_{h=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{2h-1-1} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2h-2} =$$

$$= \frac{1}{4} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2(h-1)} = \frac{1}{4} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{h-1} =$$

$$= \frac{1/4}{9/16} \sum_{h=2}^{\infty} \left(\frac{9}{16}\right)^{h} = \frac{1}{4} \cdot \frac{16}{9} \, \frac{(9/16)^2}{1 - \frac{9}{16}} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \cancel{\frac{16}{9}} \left(\frac{9}{16}\right)^{\cancel{2}} \cdot \frac{16}{7} = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{\cancel{16}} \cdot \frac{\cancel{16}}{7} = \frac{9}{28}$$

2) $Y \sim \text{Geo Traslata}\left(p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\right)$

$\boxed{\text{Somma 7 in 6 casi su 36 tutti con probabilità } \frac{1}{36}: (1,6), (6,1), (2,5), (5,2), (3,4), (4,3)}$

$P(Y=k \mid Y \leq 3) = ?$

$\{X=k\} \subset \{X \leq 3\}$ perché $k \in \{1,2,3\}$

$$P(Y=k \mid Y \leq 3) = \frac{P(\{Y=k\} \cap \{Y \leq 3\})}{P(Y \leq 3)} =$$

$$= \frac{P(Y=k)}{P(Y \leq 3)} = \frac{(1-p)^{k-1} \cancel{p}}{\sum_{J=1}^{3} (1-p)^{J-1} \cancel{p}} = \frac{(1-p)^{k-1}}{(1-p)^0 + (1-p)^1 + (1-p)^2}$$

$$= \begin{cases} k=1 & \dfrac{1}{1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \dfrac{36}{91} \\ k=2 & \dfrac{5/6}{1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \dfrac{30}{91} \\ k=3 & \dfrac{(5/6)^2}{1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \dfrac{25}{91} \end{cases}$$

SOMMA = 1
ok
in accordo
con
la teoria

3) $Y \sim$ GeoTraslata $\left(p = \frac{1}{4}\right)$

$$P(Y \in \{\text{multipli di } 3\} \mid Y \in \underbrace{\{\text{numeri pari}\}}_{\text{multipli di } 2}) = ?$$

Qui si ragiona come per la 1ª domanda con le 9 coppie
(1,1), (1,3), (1,5),
(3,1), (3,3), (3,5),
(5,1), (5,3), (5,5).

$$P(Y \in \{\text{multipli di } 3\} \mid Y \in \{\text{multipli di } 2\}) =$$

$$= \frac{P(\{Y \in \{3,6,9,12,\dots\}\} \cap \{Y \in \{2,4,6,8,10,12,\dots\}\})}{P(Y \in \{2,4,6,\dots\})}$$

multipli di $2 \cdot 3 = 6$

$$= \frac{P(Y \in \{6,12,18,\dots\})}{P(Y \in \{2,4,6,\dots\})} =$$

$$= \frac{\sum_{h=1}^{\infty} p_Y(6h)}{\sum_{h=1}^{\infty} p_Y(2h)} = \frac{\sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{6h-1} \cancel{p}}{\sum_{h=1}^{\infty} (1-p)^{2h-1} \cancel{p}} = \frac{\frac{1}{\cancel{1-p}} \frac{(1-p)^6}{1-(1-p)^6}}{\frac{1}{\cancel{1-p}} \frac{(1-p)^2}{1-(1-p)^2}} = \frac{(1-p)^{\cancel{6}\,4}}{1-(1-p)^6} \cdot \frac{1-(1-p)^2}{\cancel{(1-p)^2}} = \left(1-\frac{1}{4}\right)^4 \frac{1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}{1-\left(1-\frac{1}{4}\right)^6} =$$

$$= \frac{81}{256} \cdot \frac{1-\frac{9}{16}}{1-\frac{729}{4096}} = \frac{81}{\cancel{256}} \cdot \frac{7}{\cancel{16}} \cdot \frac{\cancel{4096}}{3367} = \frac{567}{3367}$$