Def: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, V sp. vettoriale si dicono un sistema di generatori di V se

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = V$$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dire per quali valori di α questi 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^3$.

Per essere un sistema di generatori occorre che per ogni $\underline{v} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ esistono

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \alpha\lambda_2 - \lambda_3 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

$$(*) \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = b_1 \\ \alpha\lambda_2 - \lambda_3 = b_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice incompleta del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & \alpha & -1 & b_2 \\ -1 & 0 & 1 & b_3 \end{array}\right)$$ matrice completa

$\downarrow$ EG riduzione a scala

$$\left(\begin{array}{ccc|c} p_1 & * & * & \tilde{b}_1 \\ 0 & p_2 & * & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & p_3 & \tilde{b}_3 \end{array}\right)$$

il sistema (*) ha soluzione per ogni b_1, b_2, b_3 se e solo se la matrice incompleta ridotta a scala ha 3 pivot

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \leftrightarrow R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & -1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 - \alpha R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1-\alpha \end{pmatrix}$$

se $-1-\alpha \neq 0$, ovvero $\alpha \neq -1$ allora la matrice incompleta ha 3 pivot e poiché la matrice completa è 4×3 (quindi può avere al più 3 pivot) e deve avere almeno lo stesso numero di pivot della matrice incompleta, cioè 3 ne segue che il numero di pivot della matrice completa $= 3 = \#$ pivot della matrice incompleta $\Rightarrow$ il sistema ha sempre soluzione e pertanto i 3 vettori per $\alpha \neq -1$ sono un sistema di generatori.

se $\alpha = -1$ la matrice incompleta ha 2 pivot ed è

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{2\ \text{pivot}} \;\Bigg|\; \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{matrix}}^{3\ \text{pivot}}$$

con queste scelte

il sistema lineare non ha soluzione e pertanto i 3 vettori non sono un sistema di generatori.

Esempio: • Dire se i seguenti vettori formano un sistema di generatori di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

questa è una matrice a scala

2 pivot $\Rightarrow$ è un sistema di generatori.

• Dire se i vettori

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sono un sistema di generatori di $\mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

NON sono un sistema di generatori

infatti il vettore $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

In generale per verificare se n vettori di $\mathbb{R}^m$ sono un sistema di generatori:

- scriviamo la matrice le cui colonne sono i vettori

- EG $\searrow$ scala
- se il # di pivot $= \begin{cases} m & \boxed{\text{SI}} \text{ sono un sistema di gen.} \\ < m & \boxed{\text{NO}} \end{cases}$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \ldots, \underline{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \searrow EG$$

<u>OSS</u>: se n (= numero vettori di $\mathbb{R}^m$ che consideriamo) è $<$ m allora i vettori non possono essere un sistema di generatori

(perché la matrice A è $m \times n$

e il # pivot è $\leq \min\{m, n\} = n \lneq m$)

LINEARE DIPENDENZA/INDIPENDENZA

Def: $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, V spazio vettoriale

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dicono lineamente dipendenti se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli (cioè $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \dots + \lambda_n^2 > 0$) tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ si dicono linearmente indipendenti se non sono linearmente dipendenti, ovvero se l'unica combinazione lineare

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

è quella con $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$.

Esempio:

dire se i seguenti 3 vettori di $\mathbb{R}^3$ sono linearm. dipendenti:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dobbiamo vedere se $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ è l'unica soluzione oppure no.

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \\ 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} 2(-2\lambda_2+\lambda_3)+\lambda_2+\lambda_3=0 \\ \lambda_1 = -2\lambda_2+\lambda_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3\lambda_2+3\lambda_3=0 \\ \lambda_1=-2\lambda_2+\lambda_3 \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda_2=\lambda_3 \\ \lambda_1=-\lambda_3 \end{cases}$$

se scegliamo $\lambda_3 = 1$ allora

$$\lambda_2 = \lambda_3 = 1 \qquad \lambda_1 = -1$$

$$(-1)\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2+1+1 \\ 0 \\ -1+2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ questi 3 vettori sono lin. dip.

OSS: dati n vettori di $\mathbb{R}^m$

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \underline{v}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

per dire se sono lin. dip. o lin. indip.

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \underline{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \underline{0} = \left.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right\} m$$

$$A \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}$$

equivalenti (cioè hanno le stesse soluzioni)

$\xrightarrow{EG}$ $S \cdot \underline{\lambda} = \underline{0}$ $\qquad$ S a scala

$$S = m\left\{\begin{pmatrix} p_1 & & & * \\ 0 & p_2 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & p_j \; * \\ 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix}\right.$$
$\underbrace{\qquad\qquad}_{n}$

$p_j \neq 0$

$$\begin{cases} p_1\lambda_1 + \dots = 0 \\ \quad p_2\lambda_2 + \dots = 0 \\ \quad\quad \ddots \\ \quad\quad p_j\lambda_j + \dots = 0 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

se $\boxed{j = n}$ allora

$$\begin{cases} p_1\lambda_1 + \dots = 0 \\ \quad p_2\lambda_2 + \dots = 0 \\ \quad\quad \dots p_{n-1}\lambda_{n-1} + *\lambda_n = 0 \\ \quad\quad\quad p_n\lambda_n = 0 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \lambda_n = 0$

$\Rightarrow p_{n-1}\lambda_{n-1} = 0 \Rightarrow \lambda_{n-1} = 0$

$\lambda_1 = 0$

[Se il numero di pivot è $= n$
allora i vettori sono lin. indip.]

[Se il numero di pivot è $\lneq n$
allora i vettori sono lin. dip.]

Esempio: Dire se i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono lin. indip.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 + R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_4 \to R_4 - R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 \to R_3 + R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_4 \to R_4 - R_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 3 \text{ pivot} = \# \text{ vettori}$$

quindi i 3 vettori sono lin. indip.

b) $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$

sono lin. dip. perchè

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

è una matrice con 2 righe e

pertanto i pivot sono al più 2.

abbiamo 4 vettori $\Rightarrow$ $4 \neq 2$ lin. dip.

OSS: n vettori di $\mathbb{R}^m$ con $n \gneq m$

sono linearmente dipendenti.

Prop: Siano $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \in V$, V spazio vettoriale. Supponiamo $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ siano lin. dipendenti: $\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$ con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ non tutti nulli.

Supponiamo $\lambda_j \neq 0$. $(j \in \{1, \ldots, n\})$

Allora

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_j, \ldots, \underline{v}_n\} =$$

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{j-1}, \underline{v}_{j+1}, \ldots, \underline{v}_n\}$$

Dim: $j = n$

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \qquad \text{e} \qquad \lambda_n \neq 0$$

$$\underline{v}_n = \frac{1}{\lambda_n}\left(-\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + (-\lambda_{n-1} \underline{v}_{n-1})\right) \quad (*)$$

chiaramente (SEMPRE VERO):

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\} \subseteq \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}, \underline{v}_n\}$$

dobbiamo verificare che in questo caso:

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \subseteq \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\}$$

$$\left(\Rightarrow \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} = \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_{n-1}\} \right)$$

sia $\underline{w} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\}$

$$\Rightarrow \underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1} + \alpha_n \underline{v}_n$$

$$\overset{(*)}{=} \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1} + \frac{\alpha_n}{\lambda_n} \left(-\lambda_1 \underline{v}_1 + \ldots + -\lambda_{n-1} \underline{v}_{n-1} \right)$$

$$= \alpha_1 \underline{v}_1 + \ldots + \alpha_{n-1} \underline{v}_{n-1} - \frac{\lambda_1 \alpha_n}{\lambda_n} \underline{v}_1 + \ldots$$

$$+ \left(-\frac{\lambda_{n-1} \alpha_n}{\lambda_n} \underline{v}_{n-1} \right) =$$

$$= \left(\alpha_1 - \frac{\lambda_1 \alpha_n}{\lambda_n}\right)\underline{v}_1 + \dots + \left(\alpha_{n-1} - \frac{\lambda_{n-1}\alpha_n}{\lambda_n}\right)\underline{v}_{n-1}$$

$$\in \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_{n-1}\}$$

$\blacksquare$