FILIPPO BRACCI

fbracci@mat.uniroma2.it

www.mat.uniroma2.it/~fbracci

ALGEBRA LINEARE

Marco Abate "Geometria" McGraw-Hill

"Algebra lineare"

$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ numeri naturali

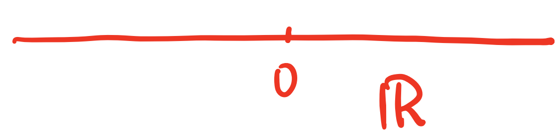
$\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$ numeri interi

$1, -1$

appartiene

$\mathbb{Q} := \{ \frac{p}{q}, \; p, q \in \mathbb{Z}, \; q \neq 0 \}$ numeri razionali

$\mathbb{R} :=$ numeri reali



$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$

MATRICI

Def: una matrice $\overset{\text{numero righe}}{m} \times \underset{\text{numero colonne}}{n}$ è una tabella con m righe e n colonne le cui entrate sono numeri reali.

Es:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & \pi & 5 \\ -2 & 3 & \sqrt{7} \end{pmatrix} \quad \text{matrice } 2\times 3$$

II riga

I colonna

l'entrata di posto $(2,3)$ è $\sqrt{7}$

l'entrata di posto (i,j) corrisponde all'elemento della matrice che sta sulla i-ma riga e j-ma colonna.

OPERAZIONI CON LE MATRICI

$Mat(m \times n)$ = matrici $m \times n$ (ad entrate $\mathbb{R}$)

$Mat(1 \times 1) = \mathbb{R}$

(x) $x \in \mathbb{R}$

SOMMA TRA MATRICI

$A, B \in Mat(m \times n)$

stesso numero di righe e stesso numero di colonne

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

entrata $(2,3)$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A+B \underbrace{:=}_{\text{definizione}} \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1}+b_{m1} & & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Oss: $A, B \in Mat(m \times n)$ $\quad C \in Mat(m \times n)$

- $A+B = B+A$ commutativa
- $(A+B)+C = A+(B+C)$ associativa

- $$\underline{0} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$ <u>matrice nulla</u> $(m \times n)$

$$A + \underline{0} = A$$

- Data $A \in Mat(m \times n)$ esiste (unica) una matrice $-A$ tale che

$$A + (-A) = \underline{0}$$

$-A$ si dice la matrice opposta o inversa di A

se $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$-A := \begin{pmatrix} -a_{11} & \cdots & -a_{1n} \\ \vdots & & \\ -a_{m1} & \cdots & -a_{mn} \end{pmatrix}$$

<u>Es</u>: $$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$-A := \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A+(-A)=\begin{pmatrix} 2+(-2) & -3+3 \\ 1+(-1) & 4+(-4) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}=\underline{0}$$

PRODOTTO PER UNO SCALARE

$A \in Mat(m\times n)$ $\quad \lambda \in \mathbb{R}$ ("scalare")

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\lambda\cdot A:=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{m1} & & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m\times n)$$

<u>Es</u>: $\lambda=2 \qquad A=\begin{pmatrix} 4 & \sqrt{2} & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$2\cdot A=\begin{pmatrix} 2\cdot 4 & 2\cdot\sqrt{2} & 2\cdot 3 \\ 2\cdot(-1) & 2\cdot 0 & 2\cdot 1 \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 2\sqrt{2} & 6 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A \in Mat(m \times n)$ $\qquad \lambda = -1$

$(-1) \cdot A = -A$

<u>Es</u>: $2 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$$- \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} := (-1) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$0 \cdot A = \underline{0}$

- $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$ proprietà distributiva del prodotto per uno scalare rispetto alla somma di matrici

matrici $m \times n$

<u>DIM</u>

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\lambda(A+B) = \lambda \begin{pmatrix} \alpha + a & \beta + b \\ \gamma + c & \delta + d \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda(\alpha + a) & \lambda(\beta + b) \\ \lambda(\gamma + c) & \lambda(\delta + d) \end{pmatrix} =$$

proprietà distributive in $\mathbb{R}$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\alpha + \lambda a & \lambda\beta + \lambda b \\ \lambda\gamma + \lambda c & \lambda\delta + \lambda d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \lambda\alpha & \lambda\beta \\ \lambda\gamma & \lambda\delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ \lambda c & \lambda d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= \lambda A + \lambda B \qquad \blacksquare$$

PRODOTTO RIGHE PER COLONNE

$A \in Mat(m \times k)$ $\quad$ m righe $\underline{k \text{ colonne}}$

$B \in Mat(k \times n)$ $\quad$ $\underline{k \text{ righe}}$ n colonne

definisco $A \cdot B \in Mat(m \times n)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & & a_{mk} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & & \\ \vdots & & \\ b_{k1} & \cdots & b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$:= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} b_{21} + \cdots + a_{1k} b_{k1} & \cdots & a_{11} b_{1n} + \cdots + a_{1k} b_{kn} \\ & & \\ \cdots & & \cdots \end{pmatrix}$$

Es:

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}} \longrightarrow 2\times 2 \quad =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + 2\cdot 1 & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 & 3\cdot(-1) + 1\cdot 1 + 2\cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento di $A\cdot B$ di posto (i,j) si ottiene "moltiplicando" la i-ma riga di A per la j-ma colonna di B.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+t \\ y-z+t \end{pmatrix}$$

SISTEMA LINEARE

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - z = 2 \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+y+z \\ x-z \end{pmatrix}$$

Def: una matrice $m \times 1$ si dice un **vettore colonna**

Dato un sistema lineare

$$(*)\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

dove $x_1, \dots, x_n$ sono le incognite,

$b_1, \dots, b_m$ i termini noti

e a_{ij} sono i coefficienti.

Definiamo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

si dice <u>matrice incompleta</u> del sistema lineare $(*)$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ & & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

<u>matrice completa</u> del sistema lineare

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$A \cdot \underline{x} = \underline{b}$ è equivalente a (*)

<u>Es</u>: $\begin{cases} x_1 + x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

la matrice incompleta del sistema lineare è:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ x_1 \quad\quad\quad\quad\quad\quad \end{array}$$

la matrice completa del sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\overline{\underline{Es}}$:

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x + z = -1 \\ y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ matrice incompleta del sistema

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc:c} \sqrt{2} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \end{array}\right)$$ matrice completa

$$A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,x + 0 \cdot y + 1 \cdot z \\ 0\,x + 1 \cdot y + 1 \cdot z \\ 2 \cdot x + 1 \cdot y + (-2) \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}\,x + z \\ y + z \\ 2x + y - 2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\Updownarrow$ (equivalente)

$$\begin{cases} \sqrt{2}\,x + z = -1 \\ y + z = 0 \\ 2x + y - 2z = 3 \end{cases}$$