Teo (del rango) $A \in Mat(m \times n)$

$$rg A = rg A^t$$

Dim: $L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad A^t \in Mat(n \times m)$

$$\underline{x} \longmapsto A \cdot \underline{x}$$

$$L_{A^t} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\underline{y} \longmapsto A^t \cdot \underline{y}$$

$$\ker L_A, \operatorname{Im} L_{A^t} \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \ker L_{A^t}, \operatorname{Im} L_A \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$(*) \quad \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{Im} L_A \cap \ker L_{A^t} = \{\underline{0}\} \\ \operatorname{Im} L_{A^t} \cap \ker L_A = \{\underline{0}\} \end{array}}$$

Supponiamo che $(*)$ sia vera.

Grassmann: $\dim(\operatorname{Im} L_A + \ker L_{A^t}) =$

$$= \underbrace{\dim \operatorname{Im} L_A}_{rg A} + \dim \ker L_{A^t} \qquad (A)$$

Inoltre $\operatorname{Im} L_A + \operatorname{Ker} L_{A^t} \subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow$

$$\dim(\operatorname{Im} L_A + \operatorname{Ker} L_{A^t}) \leq \dim \mathbb{R}^m = m \qquad (B)$$

teo della dimensione:

$$\dim \operatorname{Ker} L_{A^t} = \dim \mathbb{R}^m - \operatorname{rg}(L_{A^t}) =$$

$$= m - \operatorname{rg} A^t \qquad (C)$$

(A) + (B) + (C) $\Rightarrow$

$$m \overset{(B)}{\geq} \dim(\operatorname{Im} L_A + \operatorname{Ker} L_{A^t}) \overset{(A)}{=}$$

$$= \operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} L_{A^t} \overset{(C)}{=} \operatorname{rg} A + m - \operatorname{rg} A^t$$

da cui

$$\cancel{m} \geq \operatorname{rg} A + \cancel{m} - \operatorname{rg} A^t$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{rg} A^t \geq \operatorname{rg} A}$$

Quindi per ogni matrice B vale

$$\operatorname{rg} B^t \geq \operatorname{rg} B$$

prendendo $B = A^t$ e poiché $(A^t)^t = A$ si ha

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A^t)^t \geq \operatorname{rg} A^t$$

$$\Rightarrow \operatorname{rg} A = \operatorname{rg} A^t.$$

verifichiamo $(*)$

$$\operatorname{Im} L_A \cap \operatorname{Ker} L_{A^t} = \{\underline{0}\}$$

$$\underset{m\times 1}{\underline{a} \in \mathbb{R}^m} \qquad \underset{n\times 1}{\underline{b} \in \mathbb{R}^n}$$

$$\underbrace{\underbrace{\big(\underbrace{\underbrace{A^t}_{n\times m}\ \underbrace{\underline{a}}_{m\times 1}}_{n\times 1}\big)^t}_{1\times n} \cdot \underbrace{\underline{b}}_{n\times 1}}_{1\times 1} = \left(\underline{a}^t \cdot A\right) \cdot \underline{b} = \underline{a}^t \cdot (A \cdot \underline{b})$$

$$(M \cdot N)^t = N^t \cdot M^t$$

se $\underline{a} \in \ker L_{A^t} \Rightarrow L_{A^t}(\underline{a}) = A^t \cdot \underline{a} = \underline{0}$

dunque

$$0 = (A^t \cdot \underline{a})^t \cdot \underline{b} = \underline{a}^t \cdot (A \cdot \underline{b})$$

se $\underline{a} \in \ker L_{A^t} \cap \operatorname{Im} L_A$, in particolare esiste $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ t.c. $\underline{a} = L_A(\underline{b}) = A \cdot \underline{b}$

$$\Longrightarrow \quad 0 = \underline{a}^t \cdot \underbrace{(A \cdot \underline{b})}_{\underline{a}} = \underline{a}^t \cdot \underline{a}$$

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

$$0 = \underline{a}^t \cdot \underline{a} = (a_1 \ \dots \ a_m) \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} =$$

$$= a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_m^2$$

$\Longrightarrow \quad a_1 = a_2 = \dots = a_m = 0$

ovvero $\underline{a} = \underline{0}$ ■

OSS: $f : A \longrightarrow B$ funzione.

insiemi

f iniettiva se per ogni $b \in B$ esiste al più un $a \in A$ t.c. $f(a) = b$, (ϕ)

ovvero $\# f^{-1}(b) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$

f è suriettiva se per ogni $b \in B$ esiste un $a \in A$ tale che $f(a) = b$

f è bijettiva (o biunivoca) se è iniettiva e suriettiva, ovvero per ogni $b \in B$ esiste un unico $a \in A$ t.c. $f(a) = b$.

- Se V, W sono spazi vettoriali

e $T: V \to W$ applicazione lineare

T iniettiva $\Longleftrightarrow$ $\ker T = \{\underline{0}\}$

T suriettiva $\Longleftrightarrow$ $\operatorname{rg} T = \dim W$ (ovvero $\operatorname{Im} T = W$)

<u>OSS</u>: U, V, W spazi vettoriali

$T: V \to W$ lineare

$S: W \to U$ lineare

allora $S \circ T : V \longrightarrow U$ è lineare

$$\underbrace{(S \circ T)(\underset{\substack{\cap \\ V}}{\underline{v}}) := S(\underbrace{T(\underline{v})}_{\substack{\cap \\ W}})}$$

$$S(T(\underline{v})) \in U$$

<u>DIM</u> (verifica diretta per ESERCIZIO) ■

- $\underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V \overset{?}{\Longrightarrow} (S \circ T)(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) = (S \circ T)(\underline{v}) + (S \circ T)(\underline{\tilde{v}})$

- $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{v} \in V \Rightarrow (S \circ T)(\lambda \underline{v}) = \lambda \cdot (S \circ T)(\underline{v})$

OSS: Se V è uno spazio vettoriale definiamo

$$id_V : V \to V \quad \text{IDENTITÀ}$$

$$id_V(\underline{v}) := \underline{v}$$

(id_V è biunivoca).

DEF: Siano V, W spazi vettoriali. $T : V \to W$ lineare si dice un **ISOMORFISMO** se esiste $S : W \to V$ lineare tale che

$$S \circ T = id_V$$

e

$$T \circ S = id_W$$

[OSS: se T è isomorfismo allora T è biunivoca (verifica per esercizio)]

Due spazi vettoriali si dicono isomorfi se esiste un isomorfismo tra i due spazi.

Prop: V, W spazi vettoriali.
$T : V \to W$ lineare e biunivoca.
Allora T è un isomorfismo.

OSS: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^3$ è derivabile, con derivate continue, infinite volte è biunivoca e l'inversa è

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ che non è derivabile in $x=0$.

OSS: se $T : V \to W$ è biunivoca, si può sempre definire "l'inversa"

$$T^{-1} : W \to V$$

$$T^{-1}(\underset{\underset{W}{\uparrow}}{\underline{w}}) := \underset{\underset{V}{\uparrow}}{\underline{v}} \qquad \text{se } \underline{v} \in V \text{ è}$$

l'unico elemento di V tale che $T(\underline{v}) = \underline{w}$.

- l'inversa è unica

perchè se $S \circ T(\underline{v}) = \underline{v}$

$$T^{-1} \circ T(\underline{v}) = \underline{v}$$

preso $\underline{w} \in W$ esiste unico $\underline{v} \in V$ t.c.

$T(\underline{v}) = \underline{w}$. Pertanto

$$S(\underline{w}) = S(T(\underline{v})) = \underline{v} = T^{-1}(T(\underline{v}))$$
$$= T^{-1}(\underline{w})$$

dunque $S = T^{-1}$.

Quindi la proposizione precedente è equivalente a:

se $T: V \to W$ è lineare e biunivoca

allora $T^{-1}: W \to V$ è lineare.

Verifichiamolo:

- $\underline{w}, \underline{\tilde{w}} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} T^{-1}(\underline{w} + \underline{\tilde{w}}) = T^{-1}(\underline{w}) + T^{-1}(\underline{\tilde{w}})$
- $\lambda \in \mathbb{R}, \underline{w} \in W \overset{?}{\Longrightarrow} T^{-1}(\lambda \cdot \underline{w}) = \lambda T^{-1}(\underline{w})$

vediamo la prima:

$\underline{w}, \underline{\tilde{w}} \in W$. Dunque esistono unici $\underline{v}, \underline{\tilde{v}} \in V$ tali che $T(\underline{v}) = \underline{w}$ e $T(\underline{\tilde{v}}) = \underline{\tilde{w}}$. [perché T biunivoca]

Inoltre T è lineare, quindi

$$T(\underline{v} + \underline{\tilde{v}}) = T(\underline{v}) + T(\underline{\tilde{v}}) = \underline{w} + \underline{\tilde{w}}.$$

Dunque, per definizione di T^{-1},

$$\left.\begin{aligned} T^{-1}(\underline{w} + \underline{\tilde{w}}) &= \underline{v} + \underline{\tilde{v}} \\ T^{-1}(\underline{w}) &= \underline{v} \\ T^{-1}(\underline{\tilde{w}}) &= \underline{\tilde{v}} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow T^{-1}(\underline{w} + \underline{\tilde{w}}) = T^{-1}(\underline{w}) + T^{-1}(\underline{\tilde{w}})$$

$\square$

OSS: Sia V spazio vett. $\dim V = n$.
Allora V è isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

[**ATTENZIONE:** l'isomorfismo dipende dalla scelta di una base di V]

Per definire l'isomorfismo, fissiamo una base $\mathcal{B} = \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V.

Per ogni $\underline{v} \in V$ possiamo associare in modo unico le sue coordinate $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ nella base $\mathcal{B}$.

$$T : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$\underline{v} \longmapsto \underline{x}$$

[$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ se

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$$]

T è lineare

[Abbiamo visto che se $\underline{x}$ sono le coordinate di $\underline{v} \in V$ in $\mathcal{B}$, $\underline{y}$ sono le coordinate di $\underline{w}$ in $\mathcal{B}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ allora

$\underline{v} + \underline{w}$ ha coordinate $\underline{x} + \underline{y}$

$\lambda \underline{v}$ ha coordinate $\lambda \cdot \underline{x}$]

T è biunivoca.

T iniettiva perchè c'è unicità della scrittura $(\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n)$

T suriettiva, perchè preso $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

allora $\underline{v} := x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$

$$T(\underline{v}) = \underline{x}$$

$\Rightarrow T$ è un isomorfismo.

OSS: Se $T: V \to W$ è isomorfismo

e $S: W \to U$ è isomorfismo

allora $S \circ T: V \to U$ è un

isomorfismo.

perchè se T, S sono biunivoche allora

$S \circ T$ è biunivoca.

Inoltre T, S lineari $\overset{\text{prop.}}{\Longrightarrow}$ $S \circ T$ è lineare

Quindi $S \circ T$ è lineare e biunivoca

e dunque è un isomorfismo ■

Corollario: V, W spazi vettoriali,

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

Allora V e W sono isomorfi se e

solo se $n = m$.

se $n = m$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[dr, "\cong"', "T \text{ isomorfismo}"'] \arrow[rr, bend right] & & W \arrow[dl, "\cong", "S \text{ isomorfismo}"] \\
& \mathbb{R}^n &
\end{tikzcd}$$

$S^{-1} \circ T : V \longrightarrow W$ isomorfismo.

se $T : V \longrightarrow W$ è un isomorfismo
e $\mathcal{B} = \{ \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \}$ è base di V
allora $\{ T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n) \}$ è base di W

(quindi, in particolare, $\dim V = \dim W$)

Dim: Sia $\underline{w} \in W$. Poiché T è isomorfismo
esiste $\underline{v} \in V$ t.c. $T(\underline{v}) = \underline{w}$

$\underline{v} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

$\Longrightarrow$

$$\underline{w} = T(\underline{v}) = T(\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) \overset{T \text{ lineare}}{=\!=}$$

$$= \lambda_1 T(\underline{v}_1) + \dots + \lambda_n T(\underline{v}_n).$$

$$\Longrightarrow W = \text{span}\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\} = \operatorname{Im} T$$

- per verificare che $\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ sono linearmente indip. dal teo della dimensione:

$$\dim V = \underbrace{\dim \underbrace{\operatorname{Ker} T}_{\substack{\| \leftarrow T \text{ iniettiva} \\ \{\underline{0}\}}}}_{0} + \dim \underbrace{\operatorname{Im} T}_{=W}$$

$$\Longrightarrow \dim V = \dim W \quad \text{e} \quad \text{inoltre}$$

$\{T(\underline{v}_1), \dots, T(\underline{v}_n)\}$ sono lin. indip.

$\boxtimes$

MATRICE ASSOCIATA AD UNA APPLICAZIONE LINEARE

se $A \in Mat(m \times n) \Rightarrow L_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$\underline{x} \longmapsto A \cdot \underline{x}$

$\dim V = n$, $\dim W = m$.

- Sia $L : V \longrightarrow W$ lineare

Fissiamo $\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{B}_V := \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \text{ base di } V \\ \mathcal{B}_W := \{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\} \text{ base di } W \end{array}}$

$$\underbrace{L(\underline{v}_1)}_{\in W} = \boxed{a_{11}}\,\underline{w}_1 + \dots + \boxed{a_{m1}}\,\underline{w}_m$$

$$L(\underline{v}_2) = a_{12}\underline{w}_1 + \dots + a_{m2}\underline{w}_m$$

$$\vdots$$

$$L(\underline{v}_n) = a_{1n}\underline{w}_1 + \dots + a_{mn}\underline{w}_m$$

Abbiamo quindi definito:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in Mat(m \times n)$$

A si dice la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_W$

TEOREMA: $L: V \longrightarrow W$ lineare, $\mathcal{B}_V$ base di V, $\mathcal{B}_W$ base di W.

Sia A la matrice associata a L nelle basi $\mathcal{B}_V$, $\mathcal{B}_W$.

Sia $\underline{v} \in V$ con coordinate $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ nella base $\mathcal{B}_V$.

Allora $L(\underline{v}) \in W$ ha coordinate nella base $\mathcal{B}_W$ data da

$$A \cdot \underline{x}$$

$$
\begin{tikzcd}
\underline{v} \arrow[dd, "B_V"'] & \in & V \arrow[r, "L"] \arrow[d, "\text{isomorfismo}"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & W \arrow[d, "\text{isomorfismo}"', "B_W"] & \ni & L(\underline{v}) \arrow[ddll] \\
& & \mathbb{R}^n \arrow[r, "L_A"'] & \mathbb{R}^m & & \\
\underline{x} \arrow[rrr, mapsto] & \in & & A\underline{x} & &
\end{tikzcd}
$$

<u>Dim:</u> $\underline{v} \in V \qquad \underline{v} \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\underline{v} = x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n$$

$$\underset{\overset{\cap}{W}}{L(\underline{v})} = y_1 \underline{w}_1 + \dots + y_m \underline{w}_m$$

d'altra parte:

$$L(\underline{v}) = L(x_1 \underline{v}_1 + \dots + x_n \underline{v}_n) \overset{\substack{L \text{ lineare} \\ \downarrow}}{=}$$

$$= x_1 \cdot L(\underline{v}_1) + \dots + x_n L(\underline{v}_n) =$$

$$= x_1 (a_{11} \underline{w}_1 + \dots + a_{m1} \underline{w}_m) + \dots +$$

$$+ x_n (a_{1n} \underline{w}_1 + \dots + a_{mn} \underline{w}_m) =$$

$$(x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}) \underline{w}_1 + \dots +$$

$$+ (x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}) \underline{w}_m$$

$$\Longrightarrow y_1 = x_1 a_{11} + \dots + x_n a_{1n}$$

$$\vdots$$

$$y_m = x_1 a_{m1} + \dots + x_n a_{mn}$$

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

■