- sistema di generatori:

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = V$$

- linearm. indipendenti:

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

DEF (BASE DI UNO SPAZIO VETTORIALE)

Dati $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$, V sp. vettoriale

$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V se

1. $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono un sistema di generatori di V, ovvero

$$\text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = V$$

2. $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono linearmente indipendenti

<u>Def</u>: Uno spazio vettoriale si dice finitamente generato se esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ tali che

$$V = \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

<u>Prop</u>: (ESISTENZA DI BASI)

Se V è uno spazio vettoriale finitamente generato allora V ammette una base

<u>Dim</u>: poichè V è finitamente generato esistono $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \in V$ tali che

$$V = \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

[$\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono un sistema di generatori]

- se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono anche lin. indip $\Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V ✓

- Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ non sono lin. indip significa che esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

possiamo supporre $\lambda_1 \neq 0$
ma allora (prop. della lezione precedente)

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ V}}{\operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}} = \operatorname{span}\{\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$$

$\Rightarrow \{\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V (composto da $n-1$ vettori)

- $\{\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ lin. indip $\Rightarrow$ base. ✓
- $\{\underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ non sono lin. indip.

allora esistono $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli tali che

$$\alpha_2 \underline{v}_2 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

possiamo supporre $\alpha_2 \neq 0$ (come prima)

$\Longrightarrow$ $V = \text{span}\{\underline{v}_2, \underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n\} = \text{span}\{\underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n\}$

$\Rightarrow \{\underline{v}_3, \dots, \underline{v}_n\}$ sono un sistema di generatori (sono $n-2$ vettori).

ripetiamo il precedente argomento e (dopo al più $n-1$ passi) abbiamo una base $\blacksquare$

OSS: se $\underline{v} \neq \underline{0}$ allora $\{\underline{v}\}$ è lin. indip. (perchè $\lambda \underline{v} = \underline{0}$ se $\underline{v} \neq \underline{0}$ $\Rightarrow \lambda = 0$)

ESEMPI:

- $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale finitam. generato. Una base è data da

$$\underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \underline{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots\dots, \quad \underline{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $\lambda_1 \underline{e}_1 + \dots\dots \lambda_n \underline{e}_n = \underline{0}$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

pertanto $\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ sono lin. indip.

b) $\underline{v} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \underline{v} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_n \end{pmatrix} =$$

$$= a_1 \underline{e}_1 + a_2 \underline{e}_2 + \dots + a_n \underline{e}_n$$

$\Rightarrow \text{span}\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\} = \mathbb{R}^n$.

$\{\underline{e}_1, \dots, \underline{e}_n\}$ si dice la base canonica di $\mathbb{R}^n$.

- $V = \text{Mat}(m \times n)$

$$E_{ij} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix} & i \\ \quad\quad\quad\quad j & \end{array}$$

es: $Mat(2\times 2)$ $\quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{mn}\}$

è una base di $Mat(m\times n)$. [Esercizio]

- $V = Pol_{\leq n}[x]$

$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ è una base

di $Pol_{\leq n}[x]$.

- lin. indip:

polinomio $\equiv 0$

$$\lambda_0(1) + \lambda_1 \cdot x + \lambda_2 x^2 + \ldots + \lambda_n x^n = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

Dunque $\{1, x, \ldots, x^n\}$ sono lin. indip.

- sono un sistema di generatori:

$p(x) \in Pol_{\leq n}[x] \Rightarrow p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$

con $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ ma allora

$$p(x) = a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot x + \dots + a_n x^n$$

cioè $p(x) \in \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$

$\Rightarrow Pol_{\leq n}[x] = \text{span}\{1, x, \dots, x^n\}$.

ESEMPIO:

Sia S lo spazio vettoriale (sottospazio di $\mathbb{R}^3$) delle soluzioni del sistema lineare omogeneo

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 - x_2 = 0 \end{cases}$$

Determinare una base.

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = x_2 \end{cases} \Rightarrow$$ le soluzioni del sistema lineare omogeneo sono date da

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad S = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$ è una base di S.

Prop (Unicità della scrittura)

V sp. vett. Sia $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ una base di V.
Dato $\underline{w} \in V$ esistono unici $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$
tali che $\underline{w} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$

Dim: poichè $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V, allora per definizione è un sistema di generatori $\Rightarrow$ dato $\underline{w} \in V$ esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{w} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

dobbiamo vedere che questa è l'unica combinazione lineare che restituisce $\underline{w}$
supponiamo per assurdo che

$$\underline{w} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \quad \text{per}$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \underline{w} = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

$\Longrightarrow$

$$\alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n - \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + (-\lambda_n \underline{v}_n) = \underline{0}$$

$$\boxed{(\alpha_1 - \lambda_1)\underline{v}_1 + \dots + (\alpha_n - \lambda_n)\underline{v}_n = \underline{0}}$$

ma $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono una base e quindi lin. indip.

$\Longrightarrow \alpha_1 - \lambda_1 = 0 \quad \dots \quad \alpha_n - \lambda_n = 0$

$\Longrightarrow \alpha_1 = \lambda_1, \dots, \alpha_n = \lambda_n.$ ∎

OSS: Se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base

$$\underline{v}_1 = 1 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$$

$$\underline{v}_2 = 0 \cdot \underline{v}_1 + 1 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n$$

$$\vdots$$

$$\underline{v}_n = 0 \cdot \underline{v}_1 + 0 \cdot \underline{v}_2 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_{n-1} + 1 \cdot \underline{v}_n$$

OSS: (viceversa della proposizione precedente):
se $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono vettori di V tali che ogni $\underline{w} \in V$ si scrive in modo unico come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \Rightarrow \{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base di V.

Dim: poiché ogni vettore di V si scrive come combinazione lineare di $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \Rightarrow \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = V$

inoltre se $\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0}$

poichè $0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n = \underline{0}$

per l'unicità della scrittura $\Rightarrow \lambda_1 = 0, \dots, \lambda_n = 0$

e quindi $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ sono lin. indip.

$\blacksquare$

Teorema (completamento della base)

Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato. Siano $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ vettori di V lin. indip. Allora esistono $\underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n \in V$ tali che

$\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{w}_{m+1}, \dots, \underline{w}_n\}$ è una base di V

Dim: Poiché V è finitam. generato, esiste una base $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ di V

Consideriamo

$$\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$$

è un sistema di generatori di V, perché

$$V \supseteq \operatorname{span}\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \supseteq \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} \underset{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n \text{ base}}{=} V$$

$\Longrightarrow$

$$\operatorname{span}\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m, \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = V.$$

Poiché $\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\}$ è base di V allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tali che

$$\underline{w}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n$$

Osserviamo che $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non possono essere tutti nulli. Perché se lo fossero $\underline{w}_1 = 0 \cdot \underline{v}_1 + \dots + 0 \cdot \underline{v}_n = \underline{0} + \dots + \underline{0} = \underline{0}$

ma allora

$$1 \cdot \underline{w}_1 + 0 \cdot \overset{=\underline{0}}{\underline{w}_2} + \dots + 0 \cdot \overset{=\underline{0}}{\underline{w}_m} =$$

$$= 1 \cdot \underline{w}_1 = \underline{0}$$

e dunque $\{\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_m\}$ non sarebbero lin. indip. ↯ contrad.

Poiché $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non sono tutti nulli possiamo supporre $\lambda_1 \neq 0$.

Dunque

$$\underline{w}_1 = \overset{\neq 0}{\lambda_1} \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n \implies$$

$$\underline{v}_1 = \frac{1}{\lambda_1} \left(\underline{w}_1 - \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + (-\lambda_n \underline{v}_n) \right) \quad (*)$$

$\Longrightarrow$

$\{\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base di V.

perché da (*) otteniamo che

$$\text{span}\{\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} = \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n\} = V$$

$$\underline{u} \in V, \quad \underline{u} = \alpha_1 \underline{v}_1 + \dots + \alpha_n \underline{v}_n \overset{(*)}{=}$$

$$\alpha_1 \left(\frac{1}{\lambda_1} \underline{w}_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \underline{v}_2 + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \underline{v}_n \right) + \alpha_2 \underline{v}_2 +$$

$$\dots + \alpha_n \underline{v}_n =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\lambda_1} \underline{w}_1 + \left(\alpha_2 - \alpha_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) \underline{v}_2 + \dots + \left(\alpha_n - \alpha_1 \frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right) \underline{v}_n$$

Inoltre $\{\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ sono lin. indip.:

$$\mu_1 \underset{\lambda_1 \underline{v}_1 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n}{\underset{\shortparallel}{\underline{w}_1}} + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_n \underline{v}_n = \underline{0} \overset{?}{\Longrightarrow} \mu_1 = \dots = \mu_n = 0$$

$$\mu_1(\lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2 + \dots + \lambda_n \underline{v}_n) + \mu_2 \underline{v}_2 + \dots + \mu_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

$$\mu_1 \lambda_1 \underline{v}_1 + (\mu_1 \lambda_2 + \mu_2) \underline{v}_2 + \dots + (\mu_1 \lambda_n + \mu_n) \underline{v}_n = \underline{0}$$

poichè $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ sono lin. indip.

$$\Rightarrow \begin{cases} \mu_1 \lambda_1^{\neq 0} = 0 \\ \mu_1 \lambda_2 + \mu_2 = 0 \\ \vdots \\ \mu_1 \lambda_n + \mu_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \Rightarrow \mu_1 = 0 \\ \swarrow \\ \mu_2 = 0 \\ \vdots \\ \mu_n = 0 \end{matrix}$$

$\Rightarrow \{\underline{w}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ sono lin. indip.

- Ripetiamo l'argomento precedente con

$$\underline{w}_2 = \rho_1 \underline{w}_1 + \rho_2 \underline{v}_2 + \dots + \rho_n \underline{v}_n$$

Oss: $\rho_2, \dots, \rho_n$ non sono tutti nulli altrimenti $\underline{w}_2 = \rho_1 \underline{w}_1$ e dunque

$$\rho_1 \underline{w}_1 + (-1)\cdot \underline{w}_2 + 0 \cdot \underline{w}_3 + \ldots + 0 \cdot \underline{w}_m = \underline{0}$$

è una combin. lineare di $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m$ che da $\underline{0}$ con pesi non tutti nulli e quindi $\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m\}$ non sarebbero lin. indip.

Possiamo quindi supporre $\rho_2 \neq 0$ e dunque come prima

$\{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{v}_3, \ldots, \underline{v}_n\}$ sono una base di V.

Procediamo poi con $\underline{w}_3, \ldots, \underline{w}_m$ alla fine troviamo

$\{\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_m, \underline{v}_{m+1}, \ldots, \underline{v}_n\}$ sono una base

$\blacksquare$

ESEMPIO: Sia $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Completarlo ad una base di $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

EG

$R_2 \to R_2 - R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R_3 \to R_3 + R_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$?