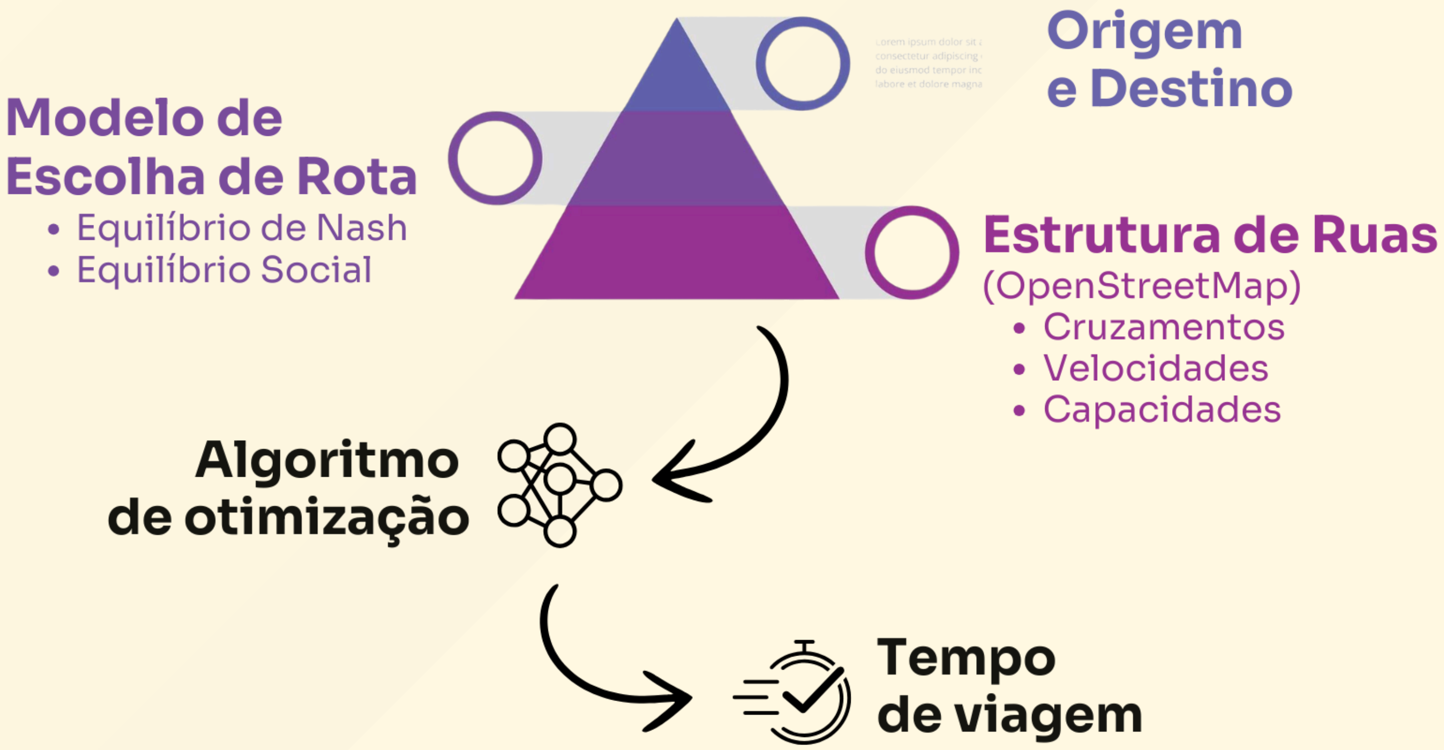
Estimação de Matrizes OD - Revisão Bibliográfica

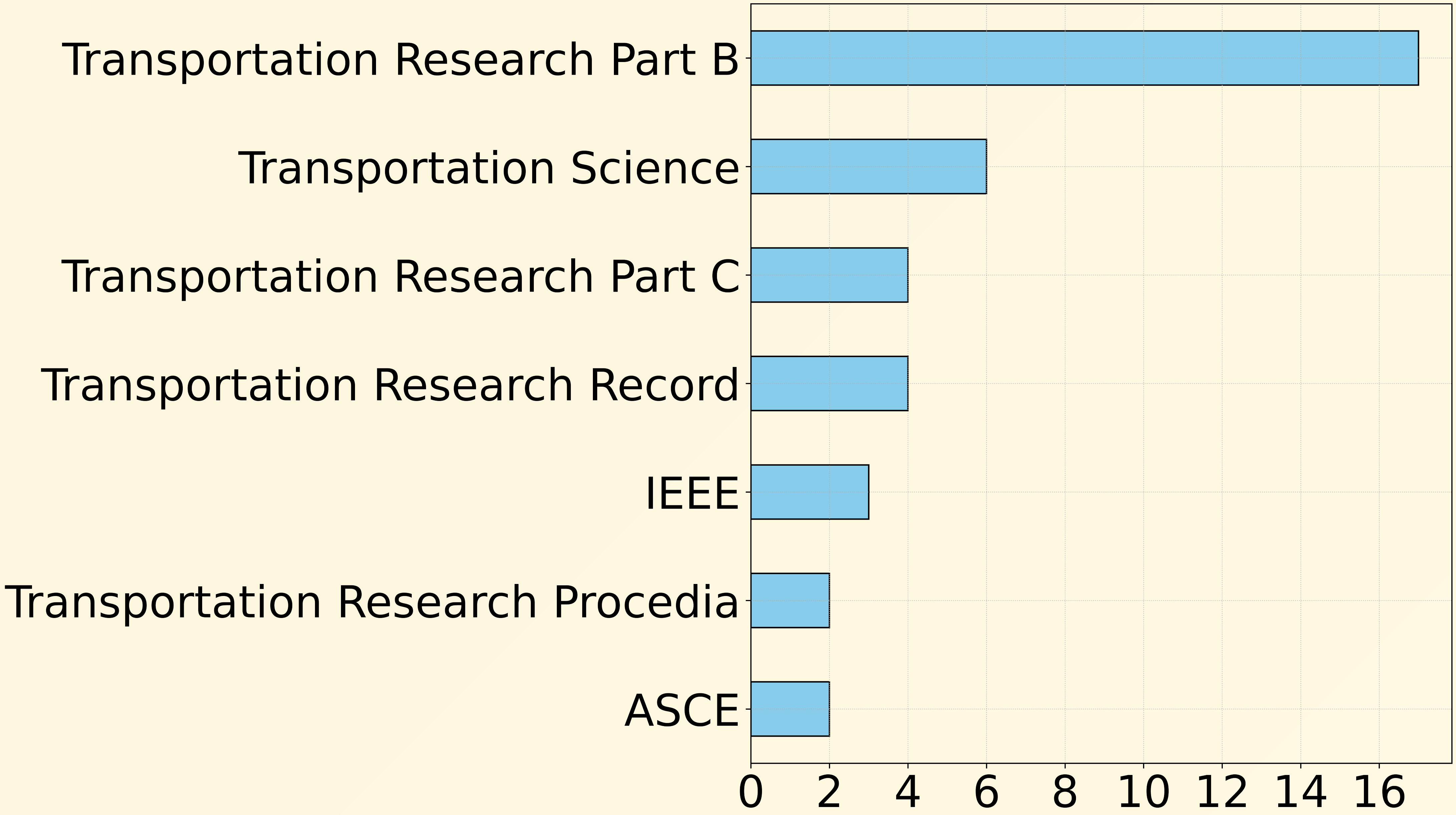
- Carlos Miguel Moreira Gonçalves

Simulação de Tráfego



Coleta de Artigos

- Foram coletados 53 artigos do Google Scholar
  - Utilizando a tag "origin destination matrix estimation";
  - Não foram selecionados artigos que usavam informações além do fluxo ou tempo;
  - Foram recolhidos artigos até a 3 página pelo crítério de título;
  - Foram coletados artigos nas seguintes faixas: até 2000, 2000 a 2010 e 2010 até atual;
  - 11 foram descartados após a lida.



Transportation Research Part B
Transportation Science
Transportation Research Part C
Transportation Research Record
IEEE
Transportation Research Procedia
ASCE
0
2
4
6
8
10
12
14
16

- A pesquisa atual sobre estimação de ODs não foca mais em algoritmos.
- Em 2010 houve a chegada do ML na estimação
- Dificuldade em pesquisar o que eu exatamente quero;
- Parece que a estimação de ODs evoluiu separado de TA

Principais Métodos de Estimação de Matrizes OD Utilizando Fluxo na Rede

1. **Método de Entropia Máxima (ME)**
    - Baseado na teoria da informação.
    - Maximiza a entropia sujeita a restrições de fluxo observadas.
2. **Método de Mínimos Quadrados (LS)**
    - Minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre os fluxos observados e estimados.
    - Simples e eficiente, mas pode não capturar bem a variabilidade dos dados.

Principais Métodos de Estimação de Matrizes OD Utilizando Fluxo na Rede

3. **Método do Gradiente (Network Equilibrium)**
    - Baseado na teoria de equilíbrio de tráfego.
    - Assume que os motoristas escolhem rotas para minimizar o tempo de viagem.
4. **Método de Máxima Verossimilhança (ML)**
    - Maximiza a probabilidade dos fluxos observados dados os parâmetros do modelo.
    - Requer uma boa modelagem estatística dos dados.

Método de Máxima Verossimilhança

Admite-se que T_i segue uma distribuição de Poisson com parâmetro $\lambda = p_i \times \hat{T}_i$.

A função de verossimilhança para uma distribuição de Poisson é dada por:

$$L(p_i \times \hat{T}_i; T_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{e^{-p_i \times \hat{T}_i} (p_i \times \hat{T}_i)^{T_i}}{T_i!}$$

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Para maximizar a verossimilhança, tomamos o logaritmo da função de verossimilhança:

$$\min \log L(p_i \times \hat{T}_i; T_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(p_i \times \hat{T}_i - T_i \log(\hat{T}_i) \right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,a} T_i = v_a$$

onde $\delta_{i,a}$ é uma variável indicadora que vale 1 se a OD i contribui para o arco a e 0 caso contrário, e v_a é o fluxo observado no arco a.

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Método de Lagrange

Para resolver o problema de estimação de matrizes OD utilizando o método de Lagrange, introduzimos multiplicadores de Lagrange λ_a para cada restrição de fluxo observada.

A função Lagrangiana é dada por:

$$\mathcal{L}(p_i \times \hat{T}_i, \lambda_a) = \log L(p_i \times \hat{T}_i; T_i) + \sum_a \lambda_a \left(\sum_{i=1}^{n} \delta_{i,a} T_i - v_a \right)$$

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Passo 0

- Inicialize $\lambda_a \leftarrow 0, a \in A$.
- Defina $s_i \leftarrow \rho_i, i \in I$.

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Passo 1

Para cada $a \in A$:

1. Calcule

$$d_a^{\min} = -\min_{i \in I,\ n_{ia} > 0} \frac{s_i}{n_{ia}}$$

e defina I' como o conjunto de pares O-D para os quais este mínimo é atingido.

Passo 1 (continuação)

2. Se $I' \subset I^o$ e

$$\sum_{i \in I^+} \frac{n_{ia} t_i}{s_i + n_{ia} d_a^{\min}} \leq V_a$$

então defina $d_a \leftarrow d_a^{\min}$,

senão encontre $d_a > d_a^{\min}$ que satisfaça:

$$\sum_{i \in I^+} \frac{n_{ia} t_i}{s_i + n_{ia} d_a} = V_a$$

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Passo 1 (continuação)

3. Atualize:
    - $\lambda_a \leftarrow \lambda_a + d_a$
    - $s_i \leftarrow s_i + n_{ia} d_a, \quad i \in I.$

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Passo 2

Se $||d|| > \epsilon$, volte ao **Passo 1**.

Caso contrário, compute:

$$T_i^* = \frac{t_i}{s_i}, \quad \text{para todos } i \in I \text{ com } s_i > 0.$$

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

Passo 3

Para i com $s_i = 0$, resolva o seguinte sistema linear:

$$\sum_{i \in I,\ s_i = 0} n_{ia} T_i = V_a - \sum_{i \in I^+} n_{ia} T_i^*, \quad a \in A.$$

Com as condições:

- $T_i \geq 0$ para todos $i \in I^o$ com $s_i = 0$.

Spiess, Heinz. A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices. Transportation Research Part B: Methodological

1. Esse problema matemático é convexo;
2. Precisa saber a priori uma estimativa da matriz OD.
3. Precisa-se saber, quando foi proposto, da matriz $n_{i,a}$

Aerde, Michel Van, Hesham Rakha, and Harinarayan Paramahamsan. "Estimation of origin-destination matrices: Relationship between practical and theoretical considerations." Transportation Research Record 1831.1 (2003): 122-130.

Método do Gradiente

$$Z(\hat{T}) \;=\; \frac{1}{2}\sum_{a\in\hat{A}}\left[v_a(\hat{T}) - \hat{v}_a\right]^2,$$

- $\hat{T}$: vetor de demandas OD (para todos os pares Origem-Destino $i \in I$).
- $v_a(g)$: volume estimado no link a quando se atribui g.
- $\hat{v}_a$: volume observado no link a.
- $\hat{A}$: conjunto de links com contagem observada.

Spiess, Heinz. "A gradient approach for the OD matrix adjustment problem." a∈ ˆA

Para cada par OD i, podemos ter um conjunto de rotas k. O volume em cada link a:

$$v_a \;=\; \sum_{i\in I}\sum_{k\in K_i} \delta_{ak}\, h_k\,,$$

onde:

- $\delta_{ak} = 1$ se o link a pertence à rota k, e 0 caso contrário.
- h_k: fluxo na rota k.

Se definirmos a **probabilidade** de rota $p_k = h_k / g_i$, obtemos:

$$v_a = \sum_{i \in I} g_i \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} \, p_k.$$

O gradiente de Z em relação à demanda g_i:

$$\frac{\partial Z}{\partial g_i} = \sum_{a \in \hat{A}} \frac{\partial v_a}{\partial g_i} \left[v_a - \hat{v}_a \right].$$

Supondo p_k localmente constantes (isto é, não variam instantaneamente com g_i), temos:

$$\frac{\partial v_a}{\partial g_i} = \sum_{k \in K_i} \delta_{ak}\, p_k\,.$$

Logo,

$$\frac{\partial Z}{\partial g_i} = \sum_{a \in \hat{A}} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak}\, p_k \left[v_a - \hat{v}_a \right].$$

Spiess, Heinz. "A gradient approach for the OD matrix adjustment problem." a∈ ˆA

Para cada iteração ℓ, queremos atualizar g_i no **sentido** de maior declive negativo.
Forma multiplicativa (evita alterar zeros e considera variação percentual):

$$g_i^{(\ell+1)} = g_i^{(\ell)} \left(1 - \lambda^{(\ell)} \frac{\partial Z}{\partial g_i} \right),$$

onde $\lambda^{(\ell)}$ é o **tamanho de passo** a ser escolhido na iteração ℓ.

Para achar o **tamanho de passo ótimo** λ, precisamos do valor $v'_a = \frac{d\,v_a}{d\,\lambda}$.

Pelo critério da regra da cadeia:

$$v'_a \;=\; \frac{d\,v_a}{d\,\lambda} \;=\; \sum_{i\in I} \frac{d\,g_i}{d\,\lambda}\,\frac{\partial v_a}{\partial g_i}.$$

Como $\frac{d\,g_i}{d\,\lambda} = -\,g_i\,\frac{\partial Z}{\partial g_i}$

na direção de descida multiplicativa, obtemos:

$$v'_a \;=\; -\sum_{i\in I} g_i \Bigl(\sum_{k\in K_i} \delta_{ak}\,p_k\Bigr)\Bigl(\sum_{a'\in\hat{A}} \delta_{a'k}\,\bigl[v_{a'} - \hat{v}_{a'}\bigr]\Bigr).$$

Spiess, Heinz. "A gradient approach for the OD matrix adjustment problem." a∈ ˆA

Queremos minimizar Z ao longo da direção de descida. A derivada de Z em função de λ:

$$\frac{d\,Z(\lambda)}{d\,\lambda} = \sum_{a \in \hat{A}} v'_a \Big([v_a - \hat{v}_a] + \lambda\, v'_a \Big).$$

Encontrando o ponto ótimo λ^* (onde esta derivada se anula):

$$\lambda = \frac{\sum_{a \in A} v'_a (\hat{v_a} - v_a)}{\sum_{a \in A} v'^2_a}$$

1. **Inicia** com $g^{(0)}$ (matriz OD inicial).
2. Atribui na rede $\rightarrow$ obtém $v_a^{(\ell)}$.
3. Calcula $\frac{\partial Z}{\partial g_i}$ para cada i.
4. Estima $\lambda^{(\ell)}$ usando a fórmula acima.
5. **Atualiza** $g_i^{(\ell+1)} = g_i^{(\ell)} \left[1 - \lambda^{(\ell)} \frac{\partial Z}{\partial g_i}\right]$.
6. Repete até convergência ou limite de iterações.

Spiess, Heinz. "A gradient approach for the OD matrix adjustment problem." a∈ ˆA

1. **Dependência de da posição inicial**
2. **Custo Computacional**
3. **Problema mal posto**
4. **Admite equilíbrio**

Kolovský, František, and Ivana Kolingerová. "Origin-destination matrix estimation using bush-based user equilibrium algorithms." International Conference on Computational Science and Its Applications.

GLS

- **Objetivo**: Estimar a matriz Origem–Destino $\mathbf{t}$ a partir de:
  1. **Estimativa prévia $\boldsymbol{\tau}$** (vinda de pesquisa ou modelo), com covariância $\mathbf{V}$.
  2. **Contagens de tráfego $\mathbf{f}_{obs}$** em links da rede, com covariância $\mathbf{W}$.
  3. **Assignment** (matriz $\mathbf{A}$ relacionando $\mathbf{t}$ e os fluxos).

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

2. Relação entre as Variáveis

A relação entre $\boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{f}_{obs}$ e $\mathbf{t}$ é dada por:

1. $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{t} + \mathbf{c}$, onde $\mathrm{E}[\mathbf{c}] = \boldsymbol{\mu}$ e $\mathrm{Var}(\mathbf{c}) = \mathbf{V}$.
2. $\mathbf{f}_{obs} = \mathbf{A}\,\mathbf{t} + \boldsymbol{\varepsilon}$, onde $\mathrm{E}[\boldsymbol{\varepsilon}] = \boldsymbol{\delta}$ e $\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{W}$.

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

3. Sistema Linear Estocástico

Juntamos as observações $\boldsymbol{\tau}$ e $\mathbf{f}_{obs}$ no seguinte sistema linear:

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{f}_{obs} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} \mathbf{t} + \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad \text{com covariâncias} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{pmatrix}.$$

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

4. Função-Objetivo do GLS

A função-objetivo do GLS é minimizar a diferença ponderada entre as observações e a estimativa de $\mathbf{t}$:

$$(\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{t})^\top \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\mathbf{t}),$$

onde $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ \mathbf{f}_{obs} \end{pmatrix}$ e $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$.

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

5. Solução Fechada

A solução do estimador GLS para $\mathbf{t}$ é dada por:

$$\hat{\mathbf{t}} = \left(\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{A}^\top \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1} \left(\mathbf{V}^{-1} \boldsymbol{\tau} + \mathbf{A}^\top \mathbf{W}^{-1} \mathbf{f}_{obs}\right).$$

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

6. Viés e Covariância

- **Viés**: Se $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{\delta} \neq \mathbf{0}$, o estimador pode ser viesado.
- **Covariância**: A variância do estimador é dada por:

$$\operatorname{Var}(\hat{\mathbf{t}}) = \left(\mathbf{V}^{-1} + \mathbf{A}^\top \mathbf{W}^{-1} \mathbf{A}\right)^{-1}.$$

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

7. Vantagens do GLS

1. **Integração de informações**: Combina estimativas prévias e contagens de tráfego de forma eficiente.
2. **Flexibilidade**: Não depende de uma distribuição específica (como Poisson), apenas das matrizes de covariância $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$.
3. **Fórmula direta**: Oferece uma solução fechada para $\hat{\mathbf{t}}$ quando o assignment é simples.

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

8. Desvantagens do GLS

1. **Necessidade de estimar $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$**: Essas matrizes podem ser difíceis de estimar corretamente.
2. **Viés**: O estimador pode ser viesado se a estimativa prévia $\boldsymbol{\tau}$ ou a matriz de assignment $\mathbf{A}$ forem imprecisas.
3. **Assignment não linear**: Se o assignment depender da própria O–D (equilíbrio de tráfego), o modelo se torna não linear.

Cascetta, Ennio. "Estimation of trip matrices from traffic counts and survey data: a generalized least squares estimator." Transportation Research Part B: Methodological.

Máxima Entropia

$$\max \sum_{r,s} (x_{rs} \ln(x_{rs}) - x_{rs})$$

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_{k_{rs}} \delta_{a,k} = v_a \quad \forall a \in A \quad f_{k_{rs}} \geq 0$$

- $f_{k_{rs}}$: Fluxo de caminho (k) entre (r) e (s).
- v_a: Fluxo observado no link (a).
- x_{rs} é o número de viagens entre os pares origem (r) e destino (s).

Spiess, Heinz. "A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices." Transportation Research Part B: Methodological

Passos Detalhados do Algoritmo

1. **Inicialização**:
    - Definir uma matriz O-D inicial x_{rs}^0.
    - A inicialização pode ser feita atribuindo $x_{rs} = \hat{v}_a$ para os links da sub-rede, e $x_{rs} = 0$ para os outros pares origem-destino (r, s).

- Resolver o **problema linearizado** do modelo de Máxima Entropia (ME):

$$\min \sum_{r,s} \left(\sum_{k \in K_{rs}} f_{k_{rs}} \ln f_{k_{rs}} - f_{k_{rs}} \right)$$

Sujeito a:

$$\sum_{k \in K_{rs}} f_{k_{rs}} \delta_{a,k} = \hat{v}_a \quad \forall a \in A$$

Onde $f_{k_{rs}}$ é o fluxo do caminho k entre os pares O-D (r, s), e $\delta_{a,k}$ é o indicador de incidência do link a no caminho k.

3. **Busca de Linha**:
    - Encontre o valor ótimo de α (um parâmetro de mistura) resolvendo:

$$\min\left(\sum_{r,s}(x_{rs}\ln x_{rs} - x_{rs}) + \alpha\sum_{r,s}(y_{rs}\ln y_{rs} - y_{rs})\right)$$

Aqui, y_{rs} é a matriz auxiliar de viagens obtida no Passo 1.

Spiess, Heinz. "A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices." Transportation Research Part B: Methodological

4. **Atualização da Solução**:
   - Atualize a matriz O-D x_{rs} com base no valor de α:

$$x_{rs}^{n+1} = x_{rs}^{n} + \alpha(y_{rs} - x_{rs}^{n})$$

Onde x_{rs}^{n} é a matriz O-D na iteração n, e y_{rs} é a solução auxiliar obtida no Passo 1.

Spiess, Heinz. "A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices." Transportation Research Part B: Methodological

5. **Teste de Convergência**:
   - Verifique se a solução convergiu, ou seja, se a mudança entre as iterações foi suficientemente pequena:

$$\|x_{rs}^{n+1} - x_{rs}^{n}\| < \epsilon$$

   Caso o critério de convergência seja atendido, pare. Caso contrário, retorne ao Passo 1.

Spiess, Heinz. "A maximum likelihood model for estimating origin-destination matrices." Transportation Research Part B: Methodological

Vantagens

- **Eficiência Computacional**: Evita a enumeração completa de caminhos, usando geração de colunas.
- **Escalabilidade**: Adequado para redes grandes, com muitos nós e links.
- **Solução Viável**: Sempre gera uma solução viável, desde que haja dados de fluxo.

Desvantagens

- **Dependência de Fluxos Precisos**: A precisão depende dos dados de fluxo nos links.
- **Complexidade em Redes Muito Grandes**: A busca de caminhos curtos pode ser um gargalo em redes muito grandes.
- **Não Considera Custos de Viagem**: Não incorpora explicitamente variáveis de custo de viagem, como tempo ou congestionamento.
- **Matriz de Incidência**: Necessita saber a priori.

Modelagens recentes

- Modelagens mistas

$$F(g, v) = \gamma_1 \mathbf{F}_1(g, \hat{g}) + \gamma_2 \mathbf{F}_2(v, \hat{v})$$

- Modelagens com Machine Leraning
- Metaheurísticas

Modelagem de Matrizes OD com ML

- Utilização de técnicas de Machine Learning para estimar matrizes OD.
- Aplicação de modelos como Redes Neurais, Regressão, e Árvores de Decisão.
- Integração de dados de diversas fontes, como sensores de tráfego e dados de GPS.
- Melhoria na precisão das estimativas em comparação com métodos tradicionais.
- Capacidade de adaptação a diferentes cenários e condições de tráfego.

- Divide a matriz OD em dois tensores (R e C) que representam características latentes de origens e destinos.
- Modela a sequência temporal desses tensores usando redes recorrentes (GRU/LSTM) combinadas com convolução em grafos (GCNN).
- Reconstrói a matriz OD multiplicando R e C, depois usa softmax para normalizar e obter histogramas de probabilidade.

Hu, Jilin, et al. "Stochastic origin-destination matrix forecasting using dual-stage graph convolutional, recurrent neural networks." 2020 IEEE 36th International conference on data engineering (ICDE). IEEE, 2020.

- Cada matriz $M^{(t)}$ é fatiada por origem ou destino.
- Aplicamos **GCNN** com matrizes de adjacência (W, W') para considerar vizinhança espacial.
- Geramos tensores menores **R** e **C** que capturam características latentes.
- Substituímos as camadas totalmente conectadas de uma GRU por **filtros de convolução em grafos**.
- Cada iteração da GRU considera **vizinhos** das regiões, explorando dependências **espaciais e temporais**.

Hu, Jilin, et al. "Stochastic origin-destination matrix forecasting using dual-stage graph convolutional, recurrent neural networks." 2020 IEEE 36th International conference on data engineering (ICDE). IEEE, 2020.

- Para cada passo futuro (t+h):
  1. Previsão de $\widehat{R}^{(t+h)}$ e $\widehat{C}^{(t+h)}$ pela GCNN-RNN.
  2. Multiplicação: $\widetilde{M}^{(t+h)} = \widehat{R}^{(t+h)} \times \widehat{C}^{(t+h)}$.
  3. **softmax** para garantir que cada célula seja um histograma (probabilidades somando 1).

Hu, Jilin, et al. "Stochastic origin-destination matrix forecasting using dual-stage graph convolutional, recurrent neural networks." 2020 IEEE 36th International conference on data engineering (ICDE). IEEE, 2020.

- $\mathbf{t}$: vetor ou matriz de viagens OD reais (a desconhecida).
- $\bar{\mathbf{t}}$: estimativa inicial (alvo).
- $\mathbf{f}$: fluxos em cada link resultantes de $ \mathbf{t} $.
- $\bar{\mathbf{f}}$: contagens de tráfego medidas em alguns links.
- Custo no link ℓ: $c_\ell = c_\ell(f_\ell)$.
- **Equilíbrio** (por exemplo, SUE - Stochastic User Equilibrium):
  - Fração de $\mathbf{t}$ que escolhe um caminho k depende de c_k.
  - $\mathbf{f}$ é resultado da soma de fluxos de todos os caminhos e OD.

Minimizar uma medida de desvio entre: $\mathbf{t}$ e $\bar{\mathbf{t}}$ e $\mathbf{f}(\mathbf{t})$ e $\bar{\mathbf{f}}$

Por exemplo, via Mínimos Quadrados Generalizados (GLS):

$$\min_{\mathbf{x}\geq 0} (\mathbf{x}-\bar{\mathbf{t}})^\intercal V^{-1}(\mathbf{x}-\bar{\mathbf{t}}) \; + \; (\bar{\mathbf{f}}-\mathbf{f}(\mathbf{x}))^\intercal W^{-1}(\bar{\mathbf{f}}-\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

- $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ requer resolver o equilíbrio (pois $\mathbf{c} = \mathbf{c}(\mathbf{f})$).
- Logo, a solução final $\mathbf{t}^*$ satisfaz um **ponto fixo**:$\mathbf{t}^* = T[\mathbf{f}(\mathbf{t}^*)]$, isto é, “atribuindo $\mathbf{t}^*$ na rede (equilíbrio), e voltando ao problema de mínimos quadrados, obtemos de novo $\mathbf{t}^*$”.

1. Dado $\mathbf{t}^{(k-1)}$, resolva o **equilíbrio** (DUE/SUE)
   - Obtenha $\mathbf{f}^{(k)}$ e custos $\mathbf{c}^{(k)}$.
2. Resolva o subproblema de mínimos quadrados (ou outro critério) fixando a matriz de atribuição do passo anterior.
   - Obtenha $\mathbf{t}^{(k)}$.
3. Se $\|\mathbf{t}^{(k)} - \mathbf{t}^{(k-1)}\|$ < tolerância, parar. Caso contrário, repetir.

- Iniciar: $k = 0$ e $\mathbf{t}^{(0)} = \bar{\mathbf{t}}$.
- Resolver a atribuição (SUE) para $\mathbf{t}^{(0)}$. Obter $\mathbf{f}^{(0)}$, $\mathbf{c}^{(0)}$, $H^{(0)}$.
- Resolver:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \arg\min_{\mathbf{x}\geq 0}\left[F_1(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{t}}) + F_2(H^{(k-1)}\,\mathbf{x}, \bar{\mathbf{f}})\right].$$

- Definir $\mathbf{t}^{(k)} = \mathbf{x}^{(k)}$.
- Atribuir $\mathbf{t}^{(k)} \to$ resolver SUE, obter $\mathbf{f}^{(k)}$ e $H^{(k)}$.
- Se convergiu, parar. Senão, $k \leftarrow k + 1$ e repetir.

- Resolver o subproblema e obter $\mathbf{x}^{(k)}$.
- Fazer uma média com $\mathbf{t}^{(k-1)}$:

$$\mathbf{t}^{(k)} = \alpha_k \, \mathbf{x}^{(k)} + (1 - \alpha_k) \, \mathbf{t}^{(k-1)},$$

  onde geralmente $\alpha_k = \frac{1}{k}$ ou outra sequência decrescente.

3. Atribuir $\mathbf{t}^{(k)}$, etc.