Labastida Vázquez Fernando

Tema 3: Variables Aleatorias Conjuntas

- 2+ variables aleatorias = Variables Aleatorias Conjuntas

Por ejemplo: Si α_1, α_2 y α_3 son variables aleatorias pertenecientes al mismo espacio muestral, entonces α_1, α_2 y α_3 son variables aleatorias conjuntas

Variables Aleatorias Conjuntas Discretas

- Función de probabilidad conjunta de $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$

$$f_{x_1, x_2, x_3, \dots x_n} = P(X_1 = x_1 \cap X_2 = x_2 \cap, \dots, X_n = x_n)$$
$$= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, X_3 = x_3, \dots X_n = x_n)$$

- La función de distribución acumulada nos dice:

$$\lim_{\substack{x_1 \to -\infty \\ x_2 \to -\infty \\ x_n \to -\infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \\ x_n \to \infty}} F(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$$

Labastida Vázquez Fernando

- Probabilidad Condicional:

Se define como $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

- Propiedades de la Función de Densidad de Probabilidad

Conjunta: Se define bajo los axiomas básicos

$$f_{XY}(x,y) \geq 0 \ \forall X \ y \ Y$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)\, d_y\, dx = 1$$

Para variables discretas: $P_{XY}(x,y) = P_Y(Y)\ P_X(X)$

Para variables continuas: $f_{XY}(x,y) = f_X(X) f_Y(Y)$

- Independencia Estadística

Dos variables aleatorias (x,y) o continuas con distribución de probabilidad conjunta $f_{XY}(x/y)$ y distribución marginales $g(x)$ y $h(y)$, se dice que las variables son independientes estadísticamente si: $f(X,Y) = g(x)h(Y)$

Norma

Labastida Vázquez Fernando

Variables Aleatorias Conjuntas Continuas

Si $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ son variables aleatorias conjuntas continuas, su función de densidad conjunta es:

$$P(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Funciones de Densidad Condicional

Función de Densidad Marginal:

$$f_{Y|x_0}(y|X=x_0) \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x_0, y)}{f_X(x_0)}, & f_X(x_0) > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$f_{X|y_0}(x|Y=y_0) \begin{cases} \dfrac{f_{XY}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}, & f_Y(y_0) > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

- Independencia de Variables Aleatorias Conjuntas

Si una variable aleatoria conjunta es independiente, no

Labastida Vázquez Fernando

puede modificar el comportamiento probabilístico de otras variables. $F_{XY}(x, y) = P(X = x \cap Y = y)$

Se dice que X y Y son variables aleatorias conjuntas independientes si $= P(X1 = x_1, X2 = x_2, X3 = x_3, \ldots X_n = x_n)$

- Propiedades del valor esperado:

a) $E(c) = C$

b) $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

c) Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $E(g_1(X) g_2(Y)) = E((g_1(x) E(g_2(Y))$

- Valor esperado condicional

Curva de regresión: Se utiliza en los pronósticos, ya que para cada x proporciona el valor esperado de y, y viceversa. En otros términos:

a) Curva de regresión de Y dado x: $\hat{Y} = \mu_{Y|x}$

Labastida Vázquez Fernando

b) Curva de regresión de X dado y : $\hat{x} = \mu_{x|y}$

• Covarianza

Toma valores negativos cuando la relación entre las variables es inversamente proporcional y positivos cuando es directamente proporcional.

Es un importante indicador de la relación lineal entre variables.

• Coeficiente de Correlación

Es una asociación lineal entre variables aleatorias X y Y con sus dispersiones.

$p = 0$ Ausencia de asociación lineal

$p = 1$ Asociaciones lineales perfectas positivas

$p = -1$ Asociaciones lineales perfectas negativas

• Distribución Normal Bivariada

Labastida Vázquez Fernando

Si densidades marginales normales:

$x_1 \approx n(\mu_1, \sigma_1^2)$ y $x_2 \approx n(\mu_2, \sigma_2^2)$

$\therefore E(x_1) = \mu_1, \; E(x_2) = \mu_2, \; V(x_1) = \sigma_1^2, \; V(x_2) = \sigma_2^2$

Razón de la covarianza: $A[\sigma_1 \cdot \sigma_2]$

Covarianza:

$$\sigma_{12} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2) f(x_1, x_2) \, dx_1 \, dx_2$$

- Distribución Normal Bivariada

Si $\rho = 0$

Densidad Conjunta = Producto Densidades Marginales

$\therefore x_1$ y x_2 son independientes