2.5 Exercices et problèmes

2.5.1 Représentation matricielle

1. L'espace des états d'un certain système physique est à trois dimensions. Soit $\{|\varphi_1\rangle, |u_2\rangle, |\varphi_3\rangle\}$, une base orthonormée de cet espace. On définit les kets $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ par

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\varphi_1\rangle + \frac{i}{2}|\varphi_2\rangle + \frac{1}{2}|\varphi_3\rangle, \ |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|\varphi_1\rangle + i|\varphi_3\rangle). \tag{2.5.1}$$

   Ces kets sont-il normés ? Calculer les matrices P_0 et P_1 représentant dans la base $\{|\varphi_i\rangle\}$ les projecteurs sur les états $|\psi_0\rangle$ et $|\psi_1\rangle$ respectivement. Vérifier que ces matrices sont hermitiennes.

2. Dans un espace à deux dimensions, on considère l'opérateur dont la matrice dans une base orthonormée $\{|\varphi_1\rangle, |u_2\rangle\}$ s'écrit

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.5.2}$$

   La matrice Y est-elle hermitienne ? Calculer ses valeurs propres et ses vecteurs propres. Calculer les matrices représentant les projecteurs sur ces vecteurs propres. Vérifier que celles-ci satisfont à des relations d'orthogonalité et de fermeture.

2.5.2 QuTiP - Opérateurs

Cet exercice à pour objet de familiariser l'étudiant à l'utilisation des différentes classes ***`qutip.Qobj`*** *associées aux fonctions* ***operator*** *et* ***state*** *avoir obtenir des informations sur les opérateurs.*

On considère un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ d'un état de spin 1/2. Une base de cet espace est $\{|0\rangle, |1\rangle\}$. On considère en outre les trois matrices de Pauli $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dont les Qobj prédéfinis sont `sigmax()`, `sigmay()`, `sigmaz()`.

1. En utilisant la commande `Q.eigenstates()` appropriée, calculer les valeurs propres et vecteurs propres de σ_x. On notera $vec1$ et $vec2$ lesdits vecteurs propres.

2. Évaluer $\sigma_z * vec1$ et $\sigma_z * vec2$ et commenter.

3. Calculer les valeurs propres et vecteurs propres de l'opérateur $\mathtt{H} = \frac{2}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_y)$.

4. En utilisant la commande `Q.isherm` appropriée (Qobj attribue), vérifier que `H` est hermitienne. Évaluer $\mathtt{H}^2$ et le comparer à $\mathbb{I}_2$. En déduire que `H` est une matrice unitaire.

5. Définir les projecteurs $\mathtt{P}_1$ et $\mathtt{P}_2$ sur les états propres de `H`. Vérifier les propriétés d'un opérateur projecteur sur $\mathtt{P}_1$ (i.e., $\mathtt{P}_1^\dagger = \mathtt{P}_1$, $\mathtt{P}_1^2 = \mathtt{P}_1$).

2.5.3 Formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Soient A et B deux opérateurs qui commutent avec leur commutateur $[A,B]$. On définit l'opérateur $F(t)$ par la fonction de la variable t, $F(t) = e^{At}e^{Bt}$.

1. Démontrer que $\frac{dF}{dt} = (A+B+t[A,B])F(t)$.
2. Intégrer cette équation et vérifier la formule de **Baker-Campbell-Hausdorff** (BCH)
$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}. \tag{2.5.3}$$
Il est donc claire que si A et B commutent $e^A e^B = e^B e^A$.

2.5.4 Opérateur de Hausdorff

On considère l'opérateur
$$f(t) = e^{tA} B e^{-tA}, \tag{2.5.4}$$
où A et B sont des opérateurs.

1. Montrer que
$$\frac{df(t)}{dt} = [A, f(t)], \ \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = [A,[A,f(t)]]. \tag{2.5.5}$$
2. En déduire
$$e^A B e^{-A} = B + \frac{t}{1!}[A,B] + \frac{t^2}{2!}[A,[A,B]] + \dots \tag{2.5.6}$$

2.5.5 ECOC

Dans la base orthonormée $\{|u_1\rangle, \{|u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, la matrice représentant le hamiltonien en eV est
$$\mathtt{H} = \begin{pmatrix} 2 & -3\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2} & -1 & -3 \\ 3\sqrt{2} & -3 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.5.7}$$

1. Déterminer les énergies E_1, E_2, E_3 du système quantique, avec $E_1 \geq E_2 \geq E_3$.
2. Vérifier que les vecteurs propres normés correspondant sont respectivement
$$\begin{cases} |E_1\rangle = \frac{1}{2}(-\sqrt{2}\,|u_1\rangle + |u_2\rangle - |u_3\rangle) \\ |E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2\rangle + |u_3\rangle) \\ |E_3\rangle = \frac{1}{2}(\sqrt{2}\,|u_1\rangle + |u_2\rangle - |u_3\rangle) \end{cases} \tag{2.5.8}$$
3. A $t = 0$, le système est dans l'état $|\psi(t=0)\rangle = |u_1\rangle$. Quel est l'état du système à un instant ultérieur t ?
4. Évaluer en eV la valeur moyenne $\langle H\rangle$ et la déviation standard ΔH de la variable dynamique H dans l'état $|\psi(t)\rangle$? Que peut-on conclure ?
5. Soit K l'opérateur définit par
$$K = |E_1\rangle\langle E_1| + |E_2\rangle\langle E_2|. \tag{2.5.9}$$
   (a) Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de K ?
   (b) Montrer que H et K forment un ECOC (Ensemble Complet d'Opérateurs Compatibles).

2.5.6 QuTiP - ECOC

Il s'agit ici d'utiliser les fonctions **state** et **operator** de QuTiP pour résoudre l'exercice (**??**). Il est conseiller, de rédiger un programme (script) en python en utilisant la commande `print()` pour visionner les attributs Qobj.

Avec la classe des objets `qutip.Odedata`, QuTiP permet de résoudre l'équation de Schrödinger $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle = \mathtt{H}|\psi\rangle$, de calculer les états $|\psi(t)\rangle$ pour un intervalle de temps données et les valeurs moyennes des opérateurs voulus, avec la commande `mesolve(operator, state, tlist, [], [exp-op-list])`.

- `operator`=opérateur hamiltonien `H`, ;
- `state`=état $|\psi\rangle$;
- `tlist`=utilise la commande `linspace(temps-initial,temps-final,pas)` pour définir l' intervalle de temps ;
- `[exp-op-list]`=liste des opérateurs dont évaluera les valeurs moyennes pendant `tlist`.

On utilise les commandes `odedata.state` et `odedata.expect` pour extraire les informations sur l'état du système la valeur moyenne calculés.

1. Définir les états $|u1\rangle$, $|u2\rangle$, $|u3\rangle$ ainsi que le hamiltonien `H`.
2. En utilisant la commande `Q.eigenstates()` appropriée, calculer les énergies $E1$, $E2$, $E3$ et les vecteurs propres $|E_1\rangle$, $|E_2\rangle$, $|E_3\rangle$ associés.
3. Calculer pour $t \in [0, 10]$, avec 10 pas, les états $|\psi(t)\rangle$ lorsque l'état initial du système est $|u1\rangle$.
4. Calculer la déviation standard de `H`, $\sqrt{\langle \mathtt{H}^2\rangle - \langle \mathtt{H}\rangle^2}$ pour $t = 10\,\mathrm{s}$.
5. Définir les projecteurs P_1, P_2 et P_3 sur les états propres de `H`.
6. Exprimer `K` en fonction de P_1, P_2 et P_3.
7. Calculer les valeurs propres et les vecteurs propres de `K`.
8. Vérifier que les vecteurs propres de `K` sont vecteurs propres de `H`. $\{\mathtt{H}, \mathtt{K}\}$ forme-t-il un ECOC ?

2.5.7 Propriétés des matrices de Pauli

On appelle **matrices de Pauli** σ_i, les matrices

$$\sigma_x := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.5.10}$$

Elles sont telles que

$$\sigma_i\sigma_j = i\varepsilon_{ijk}\sigma_k + \delta_{ij}\mathbb{I}, \tag{2.5.11}$$

où le symbole de Levi-Civita ε_{ijk} est un tenseur de rang 3 complètement anti-symétrique (dans l'échange de n'importe quelle paire indices) :

$$\varepsilon_{ijk} := \begin{cases} 1, & \text{pour les permutations circulaires droite de } (i,j,k), \\ -1, & \text{pour les permutations circulaires de 2 indices de } (i,j,k), \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.5.12}$$

1. Montrer que les matrices σ_i anti-commutent entre elles et en déduire
$$\sigma_x\sigma_y\sigma_z = -\sigma_y\sigma_x\sigma_z = i\mathbb{I}. \tag{2.5.13}$$
2. Montrer que si $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ sont deux vecteurs dont les composantes sont des nombres ou des opérateurs qui commutent avec σ_i, alors
$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{A})(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\mathbb{I}+i\boldsymbol{\sigma}\cdot(\boldsymbol{A}\wedge\boldsymbol{B}). \tag{2.5.14}$$
En déduire $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{P})^2$ et $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\pi})^2$.
3. On pose $\sigma_0 = \mathbb{I}$. Une matrice carrée quelconque M peut s'écrire
$$M = \sum_{i=0}^{3} \lambda_i\sigma_i. \tag{2.5.15}$$
Montrer que
$$\lambda_i = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(M\sigma_i). \tag{2.5.16}$$
A quelle condition doivent obéir les coefficients λ_i lorsque la matrice M est hermitienne ?

2.5.8 Porte logique quantique élémentaire

Une porte quantique logique $\mathtt{U}$, $|\psi_e\rangle - \boxed{\mathtt{U}} - |\psi_s\rangle$ est un dispositif expérimental agissant de manière linéaire sur un 1-qubit d'entrée $|\psi_e\rangle$, en fournissant un 1-qubit de sortie $|\psi_s\rangle = \mathtt{U}|\psi_e\rangle$, où $\mathtt{U}$ est pour une matrice carrée.

On rappelle que la relation duale de $|\psi_s\rangle = \mathtt{U}|\psi_e\rangle$ s'écrit $\langle\psi_s| = \langle\psi_e|\mathtt{U}^\dagger$, où $\langle\psi_e| = \alpha^*\langle 0| + \beta^*\langle 1|$.

Les matrices de Pauli définies dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, par

$$\mathtt{X} = |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|,\ \mathtt{Y} = i(|1\rangle\langle 0| - |0\rangle\langle 1|),\ \mathtt{Z} = |0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|, \tag{2.5.17}$$

permettent de construire des portes quantique logiques élémentaires.

1. Pour $|\psi_e\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, donner l'expression des sorties $|\psi_{sx}\rangle = \mathtt{X}|\psi_e\rangle$, $|\psi_{sy}\rangle = \mathtt{Y}|\psi_e\rangle$ et $|\psi_{sz}\rangle = \mathtt{Z}|\psi_e\rangle$.
2. Montrer que la normalisation simultanée de $|\psi_e\rangle$ et de $|\psi_s\rangle$ impose que $\mathtt{U}$ soit, en toute généralité, une matrice **unitaire**, i.e., telle que $\mathtt{U}^\dagger\mathtt{U} = \mathbb{I}$. ***Tout dispositif expérimental implémentant une porte quantique logique devra respecter cette condition dite d'unitarité.***
3. Vérifier, en utilisant la forme vectorielle (2.5.17), que les opérateurs $\mathtt{X}, \mathtt{Y}, \mathtt{Z}$ sont unitaires.
4. $\{\mathtt{X}, \mathtt{Z}\}$ est-il un ECOC ? Justifier.

2.5.9 Délocalisation et recombinaison d'un spin 1/2

On considère un dispositif expérimental de la figure 2.5.1 où un faisceau de quantons de spin $\frac{1}{2}$, dans l'état $|+\rangle_z$ se propagent suivant l'axe Oy. Le faisceau pénètre dans un premier appareil de Stern et Gerlach, SG1, dont champ magnétique est tourné d'un angle θ autour de Oy. Sur les deux sortant de SG1, on place deux détecteurs A et B.

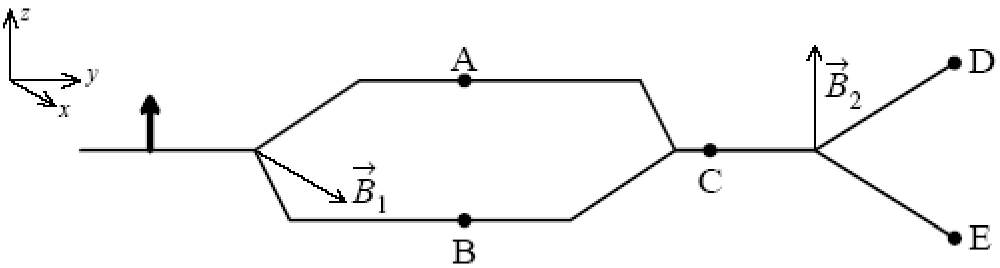

Figure 2.5.1 – *Mesure du spin 1/2*

On considérera que le faisceau A, tout comme le faisceau D des questions 3. et 4. ci-dessous, a la plus grande valeur du spin.

1. Donner dans la base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$, la matrice de l'opérateur $\mathtt{R}_y(\theta)$ de rotation d'angle θ autour de Oy d'un spin $\frac{1}{2}$.

2. Expliquer clairement pourquoi on obtient deux faisceaux à la sortie de SG1, en donnant l'état du spin en A et B et les probabilités de détection $\mathcal{P}_A$ et $\mathcal{P}_B$.

3. On enlève les détecteurs A et B précédents, et les deux faisceaux sont recombinés en un seul faisceau avant de pénétrer à nouveau dans un deuxième appareil de Stern-Gerlach, SG2, orienté selon Oz. A la sortie de SG2, on place deux détecteurs D et E.

   Quel est l'état de spin des quantons détectés en D et E et quelles sont les probabilités $\mathcal{P}_D$ et $\mathcal{P}_E$?

4. On place un absorbeur en A, c'est-à-dire que SG1 agit comme un filtre qui ne laisse passer que le faisceau B.

   Quel est l'état de spin des quantons détectés en D et E et quelles sont les probabilités $\mathcal{P}_D$ et $\mathcal{P}_E$? Considérer en particulier le cas de $\theta = \frac{\pi}{2}$.

5. Quelles commentaires pouvez-vous faire par rapport aux probabilités obtenues aux questions 3. et 4. ?