Cours de Mathématique de préparation

préparation aux CPGE

Table des matières

Première partie

Tableau des Symboles Grecs

Chapitre 1

Tableau des Symboles Grecs

1.1 Tableau de Symboles Grecs

1.1.1 Tableau de Symboles Grecs

Alpha	A	α
Bêta	B	β
Gamma	Γ	γ
Delta	Δ	δ
Epsilon	E	ϵ
Zêta	Z	ζ
Êta	H	η
Thêta	Θ	θ
Iota	I	ι
Kappa	K	k
Lambda	Λ	λ
Mu	M	μ
Nu	N	ν
Xi	Ξ	ξ
Omicron	O	o
Pi	Π	π
Sigma	Σ	σ
Tau	T	τ
Upsilon	Υ	υ
Phi	Φ	ϕ
Khi	X	χ
Psi	Ψ	ψ
Ôméga	Ω	ω

Deuxième partie

Initiation a la logique

Chapitre 2

Introduction a la Logique Mathématique

2.1 Théorie de la Logique

La mathématique contrairement aux autres sciences est une « **discipline axiomatique** ». En ce sens, l'on a en mathématique des vérités absolues par rapport a notre « **système d'axiomes** ».

Nous parlons « **d'axiomes** » sans en avoir défini le sens, rectifions le tire : « Un axiome est une propriété ou proposition que nous considérons vraie, un postulat. »

exemple :

En sélectionnant **2 points** distincts dans un repère a 2 dimensions, nous pouvons tracé une **droite**, unique passant par ces 2 points.

conséquences :

Ces « **axiomes** », par définition sont considérés comme vrais, notre réflexion ne porte donc que très rarement sur la validité de ces axiomes, cela reviendrait à débattre de la réalité du « dieu spaghetti », en partant du principe que celui-ci existe.

Il faut ainsi comprendre, que le but de la mathématique : comme construire nos théorèmes à partir de ces petites briques que nous nommons « **axiomes** ».

Ce sont des **postulats** que l'on considères bien souvent comme évidents, cependant en mathématiques il faut se méfier de ce qui parait évident.

point culture générale :

Abordons plusieurs points dans cette section culture générale.

—Nous l'avons dit plutôt, ce qui sépare la mathématique des autres sciences, est son fonctionnement « **axiomatique** ». En effet, en général les disciplines scientifiques (quelles soient dites « **dures** » ou « **humaines** »), sont basées sur la « **méthode scientifique** » (ce qui n'est pas le cas de la mathématique). C'est cette particularité qui permet à la mathématique, de soutenir l'existence de vérités absolues, alors que dans le reste du champs scientifique l'on parle la majeure partie du temps de : « **vérités scientifiques** » (en soit des assertions, qui correspondent bien avec nos observations empiriques du monde (à une époque donnée)).

—Deuxièmement, parler de façons abstraites de l'existence « **d'axiomes** », ne nous informe pas sur leur contenu. Certains champs des mathématiques font appel à différents « **systèmes d'axiomes** », cependant le plus connu, le plus vieux et par ailleurs le plus utilisé ; est le « **système d'axiomes euclidien** » (du nom du célébrissime mathématicien grec : **Euclide**, qui est à l'origine de cette pensée « **axiomatique** »). Ces axiomes sont au nombre de 5 et l'on parle alors de « **géométrie euclidienne** ».

Cependant les mathématiques ont connues leur plus grand bouleversement, en faisant le constat contre intuitif de l'invalidité du 5e axiome d'Euclide Il nous a donc fallu construire de nouvelles bases a la mathématique, que l'on voulait quasiment inattaquable. On a ainsi donné naissance aux « **mathématiques modernes** » (et au passage ouvert un nouveau champ des mathématiques : « **la géométrie non euclidienne** »).

—Les **« mathématiques modernes »** ont connues leur lot de grands noms. Parmi eux, figure le nom du logicien Kurt Gödel, qui vient définitivement enterrer les rêves de ses contemporains mathématiciens, à l'aide de son fameux **« théorème d'incomplétude de Gödel »**.

2.1.1 Assertions et Opérateurs

Reprenons.

La mathématique, comme la philosophie repose en très grande partie sur la **« logique »**. L'idée est de venir faire grossir notre champ de connaissances à partir de nos **axiomes** et grâce à nos **« règles de logique »**.

Pour ce faire, nous ne pouvons-nous permettre de travailler sur des concepts trop flous ou à la définition changeante.

Nos tests de logiques ne portes alors que sur des assertions.

Définition 1

Une assertion est une proposition qui ne peut être que vraie ou fausse.

Elle est donc une proposition qui ne peux se permettre d'être trop ambiguë.

exemples :

— « Aujourd'hui est une belle journée. », n'est pas une assertion.

— « Une tesla est en orbite autour de la terre. », est une assertion, cette proposition peut être soit infirmée soit confirmée, il n'y a pas d'entre deux.

— « La terre est une planète gazeuse. », est une assertion (bien que fausse).

2.1.2 Opérateurs Logiques

Nos **« opérateurs logiques »**, ne sont pas nombreux.

Ils sont en quelque sorte le ciment qui lie nos différentes **assertions**, pour composer des propositions plus vastes, des édifices plus grands.

D'un point de vue mathématique, dans $\mathbf{R}$, nous possédons nos opérateurs classiques : $+$, $-$, x et $/$, pour manipuler nos nombres réels. Il s'agit ici de manipulé (de façons analogue) nos **assertions**.

Définition 2

Soit : P1 et P2, 2 assertions.

— Et(P1, P2) est vraie si et seulement si P1 et P2 sont vraies.
— Ou(P1, P2) est vraie si et seulement si l'une des assertions l'est (P1 ou P2).
— Non(P1) est vraie si et seulement si P1 est fausse et vis versa.

exemples :

— P1 = Vraie
— P2 = Faux
— Alors Ou(P1, P2) = Vraie

— P1 = « La terre possède un champ magnétique. »
— P2 = « La lune a un plus gros volume que le soleil. »
— Alors Ou(P1, P2) = Vraie.
— Alors Et(P1, P2) = Faux.

2.1.3 Implications

L'implication a peu ou prou la même signification qu'en français.

L'idée de l'implication va être de venir corréler 2 **assertions** à partir de **lien logiques**.
L'implication peut être formulée a partir **« d'opérateurs logiques »**, cependant cela ne sera pas notre objet d'étude.
Dans la pratique celle-ci est majoritairement utilisée à travers la règle du **« modus ponens »** (vrai implique vrai).
Nous avons également à notre disposition la règle du **« Modus tollens »** (faux implique faux).
Elle est représentés par le symbole : $\Longrightarrow$.

Définition 3

Soit : P1 et P2, 2 assertions.

— si P1 $\Longrightarrow$ P2, alors si P1 est vraie P2 est nécessairement vraie. **« modus ponens »**.
— si P1 $\Longrightarrow$ P2, alors si P2 est faux P1 est nécessairement faux. **« Modus tollens »**.

exemples :

— « J'habite à Paris, donc je réside en France. » **« modus ponens »**.
— « Je ne réside pas à Japon, donc je n'habite pas à Tokyo. » **« Modus tollens »**.

ATTENTION !
Une implication va dans un sens et pas nécessairement dans un autre.

clarifications :

— En effet dire que : « J'habite à Paris, donc je réside en France. » est une implication valide, cependant je ne peux conclure que : « Je réside en France, donc j'habite à Paris. » . Je pourrais tout autan habité à Lyon.
Mon implication va dans un sens, mais ne va pas dans l'autre.
— Je peux formuler en français des implications par le connecteur logique : **« si »** : « Si j'habite à Paris alors je réside en France. »

2.1.4 Équivalences

Définition 4

Soit : P1 et P2, 2 assertions.

— si P1 $\implies$ P2 et P2 $\implies$ P1, alors P1 $\iff$ P2.
— La notion d'équivalence relève par définition d'une implication à double sens.

Preuve : Double Implication

Soit : P1 et P2, 2 assertions.
Si l'on veux prouver que c'est 2 assertions sont équivalentes, il nous suffit de prouver que :

— P1 $\implies$ P2.
— P2 $\implies$ P1.
La double implication est une méthode de preuve.

exemple :

— « L'entreprise A a fait faillite, implique que l'entreprise A n'a plus de capitale. »
— « L'entreprise A n'a plus de capitale si elle a fait faillite. »
— Alors ces 2 propositions sont donc équivalentes.

clarifications :

— Je peux formuler en français des équivalences par le connecteur logique : **« si et seulement si »** : « Je suis modo discord si et seulement si je modère des serveurs discord. »

2.1.5 logique du théorème

Définition 5

un théorème est un objet mathématique composé d'une liste d'hypothèses $H = [h_1, h_2, ..., h_n]$ et d'une ou plusieurs conclusions $C = [c_1, c_2, ..., c_k]$.
Cela dépend de la formulation du théorème mais bien souvent : si Et$(h_1, h_2, ..., h_n)$ = Vraie alors l'on peut appliquer $c_1, c_2, ..., c_k$.

Subtilités :
Il faut particulièrement faire attention a la formulation de nos théorèmes. Celle-ci peut être liée soit par une implication, soit par une équivalence. Il faut donc différencier les **« si »** et les **« si et seulement si »**.
Plus encore, avant d'appliquer un théorème il faut vérifier si ses hypothèses se sont réalisées.

2.2 Logique Ensembliste et Écriture

Les « **mathématiques modernes** » sont bien souvent « **ensemblistes** ».

Si celle-ci peut paraitre quelque peu fantasque, cette méthode apporte de nombreux avantages. Mais avant tout donnons une définition a notre concept « **d'ensemble** » :

Définition 1

En mathématiques, un ensemble désigne un rassemblement d'objets distincts.
Il faut les voir comme des tiroirs plus ou moins gros, ou le mathématicien y place des objets plus ou moins semblables.

L'on possède plusieurs façons de décrire formellement des ensembles.
Cette introduction se fait généralement de la sorte :

$$E = \{ \text{ énumération des éléments qui le compose } \}$$

exemples :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$, ici E ne contient que 4 éléments qui sont : 0,1,2 et 3.
— $E = \{n$ tel que n soit un entier naturel ≥ 9 $\}$, ici E contient 9, 10, 11, 12 et tous les entiers naturels supérieur ou égal a 9.

A bien des égards, cette idée apparait brillante.

Dans notre expérience de pensée, nous partons du principe que les objets sont en parfait état et fonctionnels.

En effet ranger dans un même lieu les **objets semblables**, nous permet de dégager des **propriétés** collectivement partagés ces mêmes objets.
Prenons l'exemple : d'une petite fille (que nous nommerons Charlotte), qui range ses jouets dans autant de boites qu'elle en juge nécessaire (en partant du principe, qu'elle peut ranger des boites dans d'autres boites autrement plus grosses).
Il y aura une boite réservée aux véhicules (l'ensemble des véhicules ayants des roues). En prenant n'importe quel objet dans cet ensemble, je peux affirmer que celui-ci aura des roues, pourra se déplacer d'avant en arrière (mes objets partagent des propriétés, bien qu'étants différents).
Charlotte pourra dans sa boite réservée aux véhicules, y loger un autre boite (plus petite), qui sera dédiée aux voitures.
Cette fois-ci, en piochant n'importe quel objet contenue dans la boite des voitures, je peux non seulement affirmer de façon catégorique que : mon objet aura des roues, mais également (et cela de façon plus précise) affirmer que mon objet en a précisément 4.

exemple :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$, ici E ne contient que 4 éléments qui sont : 0,1,2 et 3.

— $F = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, ici F contient 0, 1, 2, 3, 4 et tous les entiers naturels.

— Charlotte peut en quelque sorte ranger E dans F, car tous les éléments de E sont contenus dans F.

Cette idée de sélectionner des objets quelconque dans un **ensemble** préalablement défini, est à la base du « **calcul littéralee** » (bien que peu de gens en aient conscience).

Dans notre expérience de pensée, nous partons du principe que les objets sont en parfait état et fonctionnels.

Cette « **variable** » x, cet « **inconnue** », est l'objet quelconque que nous sélectionnant dans cet ensemble. Il nous est **inconnu**, anonyme, mais par la définition même de notre **ensemble** nous pouvons affirmer catégoriquement que cet **inconnu**, que cette « **variable** » possède tel ou telle propriété.

Plus encore, si nous connaissons un objet, nous pouvons savoir (en lui faisant passer une batterie de tests), si celui-ci appartient à un ensemble ou non.
Par exemple, si Charlotte sélectionne un objet au hasard dans ses jouets.
En regardant son nombre de roues (si l'objet en possède), si celui-ci possède une carrosserie, des phares, une ou plusieurs portières, elle peut en conclure que cet objet est une voiture.
Avec cette nouvelle conclusion (car Charlotte n'est pas une enfant très futée), elle peut ainsi en déduire que cet objet peut rouler.

Sélection

Sélection de nos Inconnues(Axiome du Choix)

Soit E un ensemble.
En mathématiques, la sélection de notre objet quelconque, de notre inconnue se fait comme tel :

$$\text{Soit } x \in E.$$

Cela se lit en bon français : « Soit x appartenant a l'ensemble E. »
L'on appel ce symbole $\in$, le symbole « **appartient** ».

exemple :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$.

— $3 \in E$.

— $6 \notin E$, car E ne contient que 0,1,2 et 3.

2.2.1 Opérations sur les Ensembles

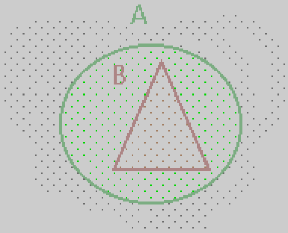
Avant d'entamer notre partie sur nos ensembles classiques, nous allons parler des quelques « **opérateurs** » classiques dans la « **théorie des ensembles** ».

Comme pour les nombres, comme pour les assertions, les ensembles possèdent des « **opérateurs** » pour les liés entre eux.

Définition 2 (L'inclusion)

Soit E un ensemble.
Soit F un ensemble.
On dit que E est inclus dans F, si tous les éléments de E se retrouvent également dans F.

On traduit en langage mathématique : $E \subseteq F \iff$ pour tout $x \in E$ alors $x \in F$.



exemple :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$, ici E ne contient que 4 éléments qui sont : 0,1,2 et 3.

— $F = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, ici F contient 0, 1, 2, 3, 4 et tous les entiers naturels.

— $E \subseteq F$, car tous les éléments de E sont contenus dans F.

— Cependant l'inverse n'est pas vrai, F n'est pas $\subseteq E$, en effet $4 \in F$, mais $4 \notin E$.

clarifications :

Cela n'apparait peut être pas évident en premiers lieux, mais cette notion d'inclusion est une façon de comparer nos ensembles (lorsque l'un est inclus dans l'autre), de la même manière que nous comparerons des nombres.

En effet : pour les nombres nous possédons les opérateurs suivants : $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ et $=$ pour comparer deux quantités.

Cependant si un ensemble est inclus dans un autre, nous avons les opérateurs suivants : $\subseteq$, $\supseteq$, $\subset$, $\supset$ et $=$ pour comparer leur tailles respectives.

Définition 3

Soit E un ensemble.
Soit F un ensemble.

On dit que $E = F$, si tous les éléments de E se retrouvent également dans F et si tous les éléments de F se retrouvent également dans E.

Preuve : Double Inclusion

Soit E un ensemble.
Soit F un ensemble.
Si l'on veux prouver que c'est 2 ensembles sont égaux, il nous suffit de prouver que :

— $E \subseteq F$.
— $F \subseteq E$.

Dans les deux parties de la méthode, nous revenons a la définition de l'inclusion (avec l'appartenance (on prend x dans le premier ensemble et l'on montre son appartenance au deuxième ensemble)).
La « **double inclusion** » est une méthode de preuve.

Nous ne montrerons pas d'exemples pour le moment (car faisant appel a des notions que nous aborderons plus tard).

Définition 4

Soit E un ensemble.
Nous appelons cardinal de E, noté $|E|$, ou encore $Card(E)$, la taille de E.

— Si E est un « **ensemble fini** » (c'est a dire qu'il contient un nombre fini d'éléments), alors $|E|$ est égal au nombre de ses éléments.
— Si E n'est pas un « **ensemble fini** », alors $|E| = +\infty$.

exemples :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$.
— $F = \{0, 1, 2, 3, ...\}$, ici F contient 0, 1, 2, 3, 4 et tous les entiers naturels.
— $|E| = 4$.
— $|F| = +\infty$.

clarifications :

— La encore, le cardinal est outils qui nous permet de comparer les tailles de certains ensembles. Les ensembles sont des objets parfois abstraits. L'intérêt du cardinal va être de casser cette abstraction en se ramenant a des nombres. Soit E et F, 2 ensembles fini, si $|E| \leq |F|$, alors E contient moins d'éléments que F. Cependant cette comparaison ne fonctionne que sur des ensembles finis, car nous ne pouvons pas comparé de la sorte 2 infinis.

— Pour dire qu'un « **ensemble est fini** », nous pouvons simplement noté $|E| < +\infty$.

Utilisations

Nous l'avons vu, nous possédons 2 outils pour comparer la taille de 2 ensembles : « **l'inclusion** » et « **le cardinal** ».

Ceux-ci possèdent tous les 2 des contraintes et des avantages (donc il est plus astucieux d'utiliser l'un a un certain moment et l'autre a un autre).

— L'inclusion a pour principal défaut que l'un des ensembles que nous comparons, soit **inclus** dans l'autre. Cependant elle nous permet de **comparer des ensembles qu'ils soient fini ou non**.

— Le cardinal a pour principal défaut de ne **pas pouvoir comparé 2 ensembles infini**, cependant il **ne nécessite pas l'inclusion d'un des 2 ensembles dans l'autre**.

Les Opérateurs

Partie non obligatoire

Définition 3

Soit E un ensemble.
Soit F un ensemble.
Notons G, l'ensemble tel que pour tout $x \in G$, alors ($x \in E$) ou ($x \in F$).

On note alors $G = E \cup F$.
Cela se traduit en bon français : « E union F. »

exemple :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$.
— $F = \{4, 5, 6, 7\}$.
— $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Définition 4

Soit E un ensemble.
Soit F un ensemble.
Notons G, l'ensemble tel que pour tout $x \in G$, alors ($x \in E$) et ($x \in F$).

On note alors $G = E \cap F$.
Cela se traduit en bon français : « E inter F. »

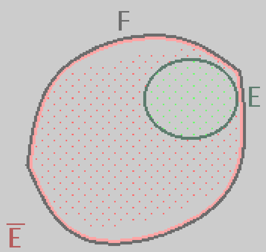
exemples :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$.
— $F = \{4, 5, 6, 7\}$.
— $P = \{2, 3, 62, 75\}$.
— $E \cap P = \{2, 3\}$.
— $E \cap F = \{\}$.

Définition 5

Soit E un ensemble.
Soit F un ensemble.
Si $E \subseteq F$, alors nous avons l'existence d'un troisième ensemble dit : « **le complémentaire de** E **dans** F », noté $\overline{E}$, tel que $E \cup \overline{E} = F$ et $E \cap \overline{E} = \{\}$.

Cela se traduit mathématiquement assez facilement : « $\overline{E} = \{$ tout $x \in F$ tel que $x \notin E\}$. »



exemple :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$.
— $F = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
— $E \subseteq F$.
— Donc $\overline{E} = \{4, 5, 6, 7\}$ dans F.

Fin de la partie non obligatoire

2.2.2 Ensembles Classiques

Âpres cette avalanche de définitions, soufflons un peu en énumérant les ensembles auquel nous sommes régulièrement confrontés.

Mais avant, parlons un petit peu « **stabilité** ».

Définition 1

Soit E un ensemble.

— Mon ensemble E est dit « **stable par** $+$ » si et seulement si, pour tout x, $y \in E$, $x + y \in E$.

— Mon ensemble E est dit « **stable par x** » si et seulement si, pour tout x, $y \in E$, x x $y \in E$.

Mes Classiques

— **L'ensemble vide**

L'ensemble vide est simplement l'ensemble qui ne contient rien.
Noté $\emptyset$, on peux l'écrire ainsi : $\emptyset = \{\}$.

— **Le Singleton**

Le singleton est l'ensemble qui ne contient qu'un seul élément, que l'on pourra noté x.
On note alors notre singleton : $\{x\}$.

Regardons si notre singleton est stable (cette section n'est pas particulièrement importante, elle n'est ici que pour nourrir la curiosité, elle n'est pas nécessaire a la bonne compréhension du chapitre) :

Soit $x \in \mathbf{R}$ (on prend un nombre réel pour formé notre singleton ici).
Il n'y a pas 10 000 façons de prendre 2 éléments dans $\{x\}$, par définition il ne contient qu'un élément (donc nous ne pouvons que l'additionner ou le multiplié avec lui même).
Ainsi $x + x \in \{x\}$ si et seulement si $x + x = x$.
Donc $x + x \in \{x\}$ si et seulement si $x = 0$.
Conclusion : seul $\{0\}$ est stable par $+$.
Ainsi $x^2 \in \{x\}$ si et seulement si $x^2 = x$.
Donc $x^2 \in \{x\}$ si et seulement si $x \in \{0, 1\}$.
Conclusion : seul $\{0\}$ et $\{1\}$ sont stables par x.

— **N**

L'ensemble **N**, est « **l'ensemble des entiers naturels** ».
Ces « **entiers naturels** », sont simplement les nombres que nous utilisons intuitivement dans la vie quotidienne pour dénombré les choses (ils sont tous positifs).

$\mathbf{N} = \{0, 1, 2...\}$, il va de 0 jusqu'à l'infini.
par exemple : 2, 4, 18, 428...

$\mathbf{N}^* = \{1, 2...\}$, est une variante **N** ($\mathbf{N}^* \subseteq \mathbf{N}$) ou l'on a exclus 0.

N et $\mathbf{N}^*$ sont tous les 2 stables par $+$.
par exemple : $2 + 4 \in \mathbf{N}$, car 6 est un entier naturel. Cependant, ils ne sont pas stables par - : 2 - 4 = -2 et -2 $\notin$ **N**.

— **Z**

L'ensemble **Z**, est « **l'ensemble des entiers relatifs** ».
Z contient « **l'ensemble des entiers naturels** » et tous les entiers négatifs.

Z est stable par $+$.

— **Q**

L'ensemble **Q**, est « **l'ensemble des nombres rationnels** ».
Q contient tout les nombres pouvant s'ecrirent sous la forme d'une fraction de 2 entiers relatifs.
par exemple :

$$\left(\frac{13}{25}\right)$$

Q est stable par $+$ et par x.

— **R**

L'ensemble **R**, est « **l'ensemble des nombres réels** ».
R contient autan les entiers relatifs que les nombres a virgules.

R est stable par $+$ et par x.

— **L'intervalle**

L'intervalle est sous ensemble spécifique de **R**.
Soit $a, b \in \mathbf{R}$ avec $a < b$, alors :
— $[a; b] = \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $a \leq x \leq b\}$.
— $]a; b] = \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $a < x \leq b\}$.
— $[a; b[= \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $a \leq x < b\}$.
— $]a; b[= \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $a < x < b\}$.
— $[a; +\infty[= \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $a \leq x\}$.
— $]a; +\infty[= \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $a < x\}$.
— $]-\infty; b] = \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x \leq b\}$.
— $]-\infty; b[= \{$ tout $x \in \mathbf{R}$ tel que $x < b\}$.

L'intervalle n'est pas forcement stable, que se soit par $+$ ou par x.

2.2.3 Quantificateurs

Les quantificateurs sont des connecteurs logiques indispensables a la bonne formulation d'un énoncé mathématique.

Ils sont au nombre de 2 :

— $\forall$, le symbole : « **pour tout** ».

— $\exists$, le symbole : « **il existe** ».

Ces 2 symboles complètent notre liste « **d'opérateurs logiques** » et nous permettent de correctement formuler nos énoncés.

Lors de la résolution d'un problème, la « **phase de quantification** » (de formulation de notre énoncé par des quantificateurs), est primordiale. Elle pose et énonce clairement les objets mathématiques que nous allons manipuler.

Cela ne semble pas grand chose, mais énoncé a quel ensemble appartient tel objet, revient a implicitement énoncer certaines propriétés de cet objet (**par exemple :** nous savons a présent que $\mathbf{R}$ est stable).

exemples :

— Soit E et F, 2 ensembles.

$$E \subseteq F \implies \forall x \in E, x \in F.$$

— $]-\infty; b[= \{x \in \mathbf{R} | x < b\}$

— Formulons que : quelque soit l'entier naturel que l'on prend, l'on peut toujours trouver un autre entier naturel qui lui est supérieur (exemple : si je prend comme l'entier 12, 13 lui est supérieur) :

$$\forall n \in \mathbf{N}\ \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que } n \leq k.$$

2.2.4 n-uplets

$\forall n \in \mathbf{N}$, on appel n-uplet une liste de n éléments que nous aurons préalablement défini sur des ensembles.

exemples :

— Un 2-uplet de nombres réels : (11.5 ; 3) ou encore (165.2788 ; 279.78) e.t.c (un 2-uplet est appelé un couple).

— Un 5-uplet de nombres réels : (11.5 ; 3 ; 165.2788 ; 279.78 ; 12) e.t.c

Ensembles Produit (Produit Cartésien)

Définition 1

$\forall n \in \mathbf{N}$.
Soit $H = (E_1, E_2, ..., E_n)$ une liste de n ensembles.

$E = E_1 \text{x} E_2 \text{x} ... \text{x} E_n$ est l'ensemble des n-uplets tel que si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ alors $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ $x_i \in E_i$.
Cette opération est nommée : **Produit Cartésien**.

exemples :

— $E = \mathbf{R}\text{x}\mathbf{N}\text{x}\mathbf{Z}$, alors E est un ensemble contenant que des 3-uplets.
Pour tout 3-uplet prit dans E, le premier terme doit être un réel, le second un entier naturel et le troisième un entier relatif.
Par exemple (10.1111, 4, -51) $\in E$.
Par exemple (-1275, 21, 42) $\in E$.
Par exemple (1010.888, -4, -51) $\notin E$, car (-4) $\notin \mathbf{N}$.

— $F = [0; 1]\text{x}[-1; 0]$, alors E est un ensemble contenant que des 2-uplets.
Pour tout 2-uplet prit dans F, le premier terme doit être dans $[0; 1]$, le second doit être dans [-1 ;0].
Par exemple (0.51, 4) $\notin F$, car $4 \notin [-1; 0]$.
Par exemple (0.51, -0.75) $\in F$, car $0.51 \in [0; 1]$ et(-0.75) $\in [-1; 0]$.
Par exemple (1, -1) $\in F$, car $1 \in [0; 1]$ et(-1) $\in [-1; 0]$.

— $G = E\text{x}F$, alors E est un ensemble contenant que des 2-uplets (des 2-uplets de 2-uplets).
Par exemple ((10.1111, 4, -51),(0.51, -0.75)) $\in G$, car (10.1111, 4, -51) $\in E$ et (0.51, -0.75) $\in F$.

Notations

Notations

$\forall n \in \mathbf{N}$.
Soit E un ensemble.

On note E^n, l'ensemble des n-uplets de E (tous les éléments du n-uplet doivent appartenir a E.

exemples :

— $E = \mathbf{N}^2$,
(4,1289) $\in E$.
(4278,19) $\in E$.
(789,-896) $\notin E$, car (-896) $\notin \mathbf{N}$.
(0,0) $\in E$.

2.2.5 Règles d'écriture dans $\mathbf{R}$

Nous entrons a présent dans le vif du sujet.

Une voiture n'a pas les mêmes attributs qu'un avion, Charlotte les rangent dans des boites différentes.

En mathématiques tout est question d'écriture, démontrer c'est bien souvent se ramener a la définition (en occurrence a nos définitions), trouver une forme d'écriture avantageuse.
Nous avons vu précédemment, que « **quantifier nos objets** », revient implicitement a en révéler certaines propriétés. « Quelles sont elles ? », me diriez-vous, a raison.
Cela dépend de l'ensemble choisit, cependant le « **calcul littérale** » est en grande partie basé sur les propriétés des nombres réels.
C'est ici que notre notion de « **stabilité** », va nous être utile.
Avant, nous devons faire un constat primordial :

$$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$$

Ainsi, toutes nos règles de calcul sur les réels, fonctionnent également sur les entiers et les rationnels.

Abstraction 01

Nous allons étudier différentes propriétés communément partagés par les réels.

Ces propriétés sont particulièrement puissantes, grâce a la « **stabilité** » de $\mathbf{R}$. En effet, quelque soit l'opération (nous parlons ici des opérations « **triviales** » : + et x), que l'on fait subir a notre inconnue x, le résultat de notre opération conserve les propriétés d'un réel.

exemple :

— Si j'ai a ma disposition une propriété P_1, qui nous dit que :

$$« \forall a \in \mathbf{R},\ (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1 ».$$

Je peux donc naturel dire que : $\forall a \in \mathbf{R}$, $(a+1)^2 = a^2+2a+1$, mais également que :

$$« \forall a \in \mathbf{R},\ ((a+1)+1)^2 = (a+1)^2 + 2(a+1) + 1, \text{ car } (a+1) \in \mathbf{R} ».$$

Plus généralement, n'importe qu'elle formule composée de réels obéie a cette Loi.

Il faut ainsi comprendre que pour toute formule composée d'éléments de $\mathbf{R}$: $(formule + 1)^2 = formule^2 + 2formule + 1$ (cela sera le cas pour toutes nos propriétés sur $\mathbf{R}$).

Abstraction 02

Si je vous demande combien il y a d'opérateurs sur notre ensemble $\mathbf{R}$, vous seriez tentez de me répondre 4 : « **l'addition** », « **la multiplication** », « **la soustraction** » et « **la division** ».

Cependant, je vous affirmerais qu'elles sont 2 : « **l'addition** » et « **la multiplication** ».

$\forall x \in \mathbf{R}$, $(-x) \in \mathbf{R}$. En effet 8.5 est un réel et (-8.5) est aussi un réel. Cela fonctionne pour tous nos réels.

Maintenant constatons que : $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $x - y = x + (-y)$. Nous pouvons transformer n'importe qu'elle **soustraction** en **addition**, plus encore toute **soustraction** est une **addition** spécifique.

Pour la **division**, cela ne se révèle pas beaucoup plus complexe :

Démonstration :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3, \ \frac{x}{y} z = \frac{x.z}{y}.$$

Partons de ce postulat.

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \ \frac{x}{y} = \frac{x}{y} 1.$$

(je multiplie par 1, donc je ne change pas mon égalité).

$$\iff \frac{x}{y} = \frac{1}{y} x = (\frac{1}{y})x.$$

Conclusion : **Diviser** x par y, revient a **multiplier** x par $\frac{1}{y}$. Toute **division** est une **multiplication** spécifique.

Priorité de Calcul

Avant de parler de nos formules en elles mêmes, il nous faut parler de l'importance des parenthèses. Les parenthèses sont extrêmement importantes, elles servent en quelque sorte a séparer nos formules en blocs distincts.

Cependant, l'emplacement de nos parenthèses change la façon dont nous calculons. Parfois cela a une incidence sur notre résultat et parfois non. En général, il vaux mieux mettre trop de parenthèses que pas asses.

Par exemple : $a(x + 1) \neq ax + 1$, cela semble évident si l'on pose les termes,(cependant énormément d'élèves font l'erreur (bien souvent par inattention)) :

Si $(a, x) = (4, 3)$ alors :

$a(x + 1) = $ 4x(3+1) $= 4^2 = 16$

$ax + 1 = $ 4x3 + 1 $= 12 + 1 = 13$

Donc $a(x + 1) \neq ax + 1$.

Cela peut parfois mené a des formules ambiguës : $6/2(1 + 2)$.

On ne sait pas si il s'agit de $\frac{6}{2}(1 + 2)$, ou de $\frac{6}{2(1 + 2)}$.

Cela tient au fait que nous ne connaissons pas la priorité de calcul : il manque des parenthèses.

Pour se faire nous devons avoir des règles qui nous indiques quand une parenthèse ne change pas le résultats de notre calcul.

La principal d'entre elles se nomme « **l'associativité** ».

Associativité

Il y a deux règles d'associativité dans **R**, deux règles pour ses 2 opérateurs : + et x (voir **abstraction 02**).

— **Associativité de +** :
$\forall(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, alors $x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$.
En effet :

$$1 + 2 + 3 = 1 + \overbrace{5}^{=2+3} = \underbrace{3}_{=1+2} + 3 = 6$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe la façon dont nous sommons nos 3 termes, le résultat sera identique.

— **Associativité de x** :
$\forall(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, alors $x \times y \times z = x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.
En effet :

$$1 \times 2 \times 3 = 1 \times \overbrace{6}^{=2\times3} = \underbrace{2}_{=1\times2} \times 3 = 6$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe la façon dont nous multiplions nos 3 termes, le résultat sera identique.

Commutativité

Il y a deux règles de commutativité dans **R**, deux règles pour ses 2 opérateurs : + et x (voir **abstraction 02**).

— **Commutativité de +** :
$\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors $x + y = y + x$.
En effet :

$$1 + 2 = 2 + 1 = 3$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe l'ordre dans lequel nous sommons nos 2 termes, le résultat sera identique.

— **Commutativité de +** :
$\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors $x \times y = y \times x$.
En effet :

$$1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe l'ordre dans lequel nous multiplions nos 2 termes, le résultat sera identique.

Retour Notre Priorité de Calcul

En prenant du recul sur nos règles de calcul nous pouvons faire plusieurs constats (en ayant la la « **stabilité** » de $\mathbf{R}$ en tête) : pour toutes formules (f_1, f_2, f_3), composées d'éléments de $\mathbf{R}$

— $f_1 + f_2 + f_3 = f_1 + (f_2 + f_3) = (f_1 + f_2) + f_3$
— $f_1 \times f_2 \times f_3 = f_1 \times (f_2 \times f_3) = (f_1 \times f_2) \times f_3$
— $f_1 + f_2 = f_2 + f_1$
— $f_1 \times f_2 = f_2 \times f_1$

Conséquence : nos règles d'associativité et de commutativité sont valables quelque soit le nombre d'éléments que l'on additionne (exemple : $x_1(\times x_2 \times ... \times x_n) = (x_1 \times x_2 \times ...) \times x_n = x_1 \times x_2 \times ... \times x_n$).

exemples

— $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$(62x + y^2 + xy)(x^y + y) = (x^y + y)(62x + y^2 + xy) \qquad \mathbf{(1)}$$
$$(62x + y^2 + xy) + (x^y + y) = (x^y + y) + (62x + y^2 + xy) = x^y + 62x + y^2 + xy \qquad \mathbf{(2)}$$

Ainsi, il nous faut faire un constat :

Il y a problème de **priorité de calcul** lorsque l'on mélange **additions** et **multiplications**. Par exemple l'on ne peux pas retirer les parenthèses pour l'exemple **(1)**, alors que l'exemple **(2)**, n'est composé que d'additions (raison pour laquelle l'on a pu retirer toutes les parenthèses sans changer la valeur de l'égalité).

Il faut être particulièrement attentif aux parenthèses lorsque l'on mélange additions et multiplications (mieux vaux trop que pas asses de parenthèses.

Pour ce faire, nous avons besoin de règles de « **distribution** » de notre multiplication sur notre addition.

Distributivité

Nous avons évoquer ci-dessus nos problèmes de priorité de calcul. Nous ne pouvions pas retirer nos parenthèses pour un certain exemple. Notre règle de « **distributivité** » vient palier ce problème.

— **Distributivité(classique) de x sur +** :
$\forall(x, y, \lambda) \in \mathbf{R}^3$, alors $\lambda(x+y) = \lambda y + \lambda x$.
En effet :

$$4(1+2) = 4\overbrace{3}^{=1+2} = 12$$

$$\overbrace{4\times 1}^{=4} + \overbrace{4\times 2}^{=8} = 4+8 = 12$$

Donc :

$$4(1+2) = 4\times 1 + 4\times 2 = 12$$

Notre règle nous dit simplement, de distribuer λ sur notre x, puis sur notre y.

— **Distributivité(en dimension supérieur) de x sur +** :
$\forall n \in \mathbf{N}, \forall\lambda \in \mathbf{R}, \forall(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \implies \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + ... + \lambda x_n$.
En effet :

$$4(1+2+3+4) = 4\overbrace{10}^{=1+2+3+4} = 40$$

$$\overbrace{4\times 1}^{=4} + \overbrace{4\times 2}^{=8} + \overbrace{4\times 3}^{=12} + \overbrace{4\times 4}^{=16} = 4+8+12+16 = 24+16 = 40$$

Donc :

$$4(1+2+3+4) = 4\times 1 + 4\times 2 + 4\times 3 + 4\times 4 = 40$$

Notre règle généralise simplement notre règle de distribution a des sommes de plus de 2 variables.

— **Double Distributivité** :
$\forall(x, y, a, b) \in \mathbf{R}^4$, alors : $(x+y)(a+b) = xa + xb + ya + yb$.
En effet :

(1 + 2)(3 + 4) = 3 x 7 = 21
3 + 4 + 2x3 + 2x4 = 7 + 6 + 8 = 7 + 12 = 21
Donc : (1 + 2)(3 + 4) = 1x3 + 1x4 + 2x3 + 2x4

Attention, il est très facile de faire une erreur de signe lors d'une distribution. Si vous n'êtes pas sur transformer vos soustractions en additions.

Démonstration :

Nous pouvons prouver notre règle de double distributivité a partir de notre règle de distributivité.

$\forall(x, y, a, b) \in \mathbf{R}^4$, alors $(x + y) \in \mathbf{R} \implies (x + y)(a + b) = (x + y)a + (x + y)b$ (selon notre règle de distributivité).
Selon notre règle de commutativité de x : $(x + y)a + (x + y)b = a(x + y) + b(x + y)$.
Selon notre règle de distributivité : $a(x + y) = ax + ay$ et $b(x + y) = bx + by$.
Donc : $(x + y)(a + b) = ax + ay + bx + by$.
Selon notre règle de commutativité de $+$: $(x + y)(a + b) = xa + xb + ya + yb$.

On a bien : $(x + y)(a + b) = xa + xb + ya + yb$.

Les opérations de « **factorisation** » et de « **développement** », ne sont en soit que des applications directes de notre formule de distributivité.

Petit rappel : $\forall n \in \mathbf{N}, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \implies \lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + ... + \lambda x_n$.

— « **développer** », est le sens directe (ou l'on retire les parenthèse).

— « **factoriser** », est le sens indirect, l'on rassemble tous nos termes sous un même facteur (l'on essais de rassembler plusieurs termes a l'intérieur de nos parenthèses).

Factorisation et Développement

développement : $\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) \to \lambda x_1 + \lambda x_2 + ... + \lambda x_n$.

factorisation : $\lambda x_1 + \lambda x_2 + ... + \lambda x_n \to \lambda(x_1, x_2, ..., x_n)$.
Ici nous avons repérer le facteur commun : λ, nous factorisons alors par λ.

Il ne faut jamais oublier que quelque soit l'égalité, elle va dans les 2 sens.

exemples :

— $\forall(x, y) \in \mathbf{R}^2$, « **factorisation** » :

$$L = 4x + 2y$$
$$= 2 \times 2x + 2y$$
Nous avons le facteur commun : 2
Donc : $L = 2(2x + y)$

— $\forall(x, y, a, b) \in \mathbf{R}^4$, « **développement** » :

$$L = (2 - 4x)(2x + xy - 6y^2 + 3a - x^a b)$$

$$= 2 \times 2x + 2xy + 2(-6)y^2 + 2 \times 3a + 2(-x^a b) + (-4x) \times 2x + (-4x) \times xy + (-4x)(-6y^2) + (-4x)3a + (-4x)(-x^a b)$$
$$= 4x + 2xy - 12y^2 + 6a - 2bx^a - 8x^2 - 4yx^2 + 24xy^2 - 12xa + 4xbx^a$$
$$= 4x + 2xy - 12y^2 + 6a - 2bx^a - 8x^2 - 4yx^2 + 24xy^2 - 12xa + 4bx^{a+1}$$
Donc : $L = 4x + 2xy - 12y^2 + 6a - 2bx^a - 8x^2 - 4yx^2 + 24xy^2 - 12xa + 4bx^{a+1}$

— $\forall (x,y,a,b) \in \mathbf{R}^4$, « **factorisation** » :

$$L = 4(2a - 4x) + (a - 2x)(y^2 + 3b)$$

$$(2a - 4x) = 2(a - 2x) \text{ (factorisation) } \Longleftrightarrow$$
$$L = 2 \times 4(a - 2x) + (a - 2x)(y^2 + 3b) \Longleftrightarrow$$

Nous avons le facteur commun : $(a - 2x)$

$$L = (a - 2x)(2 \times 4 + (y^2 + 3b))$$

(utilisons l'associativité de $+$ pour supprimer les parenthèses.)

Donc : $L = (a - 2x)(8 + y^2 + 3b)$

Règles de Fractions

Nous avons plusieurs règles basiques pour le calcul des fractions (en ayant en tête que la division est une multiplication).

Quantifions nos variables : $\forall (a,b,c,d) \in \mathbf{R}^4$.

* $\dfrac{a+b}{c} = \dfrac{a}{c} + \dfrac{b}{c}$
* $\dfrac{a \times b}{c \times d} = \dfrac{a}{b} \text{ x } \dfrac{b}{d}$
* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{b}\ a$
* $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad}{bd} + \dfrac{cb}{bd} = \dfrac{ad+cb}{bd}$

Puissances

Nous avons plusieurs règles basiques pour le calcul des puissances.

$\forall a \in \mathbf{R}$:

* $a^0 = 1$
* $a^1 = a$
* $\forall n \in \mathbf{N}$, $a^n = a \times a^{n-1}$
* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $(ab)^n = a^n \times b^n$
* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\forall (a_1, ..., a_k) \in \mathbf{R}^k$, $(a_1 \times ... \times a_k)^n = a_1^n \times ... \times a_k^n$
* $\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2$, $a^{n+k} = a^n \times a^k$ **relation importante**
* $a^{-1} = \dfrac{1}{a}$, si $a \neq 0$ **relation importante**
* $\forall n \in \mathbf{N}$, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$, si $a \neq 0$ **relation importante**
* $\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, $\forall n \in \mathbf{N}$, $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$
* $\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2$, $a^{n-k} = a^n\ a^{-k} = \dfrac{a^n}{a^k}$ si $a \neq 0$ ou si n $\geq$ k
* $\dfrac{a}{a} = 1$
* $\forall n \in \mathbf{N}$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Il ne faut jamais diviser par 0.

Identités Remarquables

Les identités remarquables sont au nombres de 3.

$\forall (a, b) \in \mathbf{R}^2$:

* $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, **relation importante**
* $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, **relation importante**
* $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, **relation importante**

exemples

— $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{gathered} 4x^2 - 4xy + y^2 \\ = 2^2x^2 - 2 \times 2xy + y^2 \\ = (2x)^2 - 2(2xy) + y^2 \\ = (2x-y)^2 \end{gathered}$$

— $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$.

$$\begin{gathered} x - 4y^2 \\ = \sqrt{x^2} - 2^2 \times y^2 \\ = \sqrt{x^2} - (2y)^2 \\ = (\sqrt{x^2} + 2y)(\sqrt{x^2} - 2y) \end{gathered}$$

— $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$\begin{gathered} (x^2+y^2)^2 - (x^2-y^2)^2 \\ = ((x^2+y^2) + (x^2-y^2))((x^2+y^2) - (x^2-y^2)) \\ = (x^2+y^2+x^2-y^2)(x^2+y^2-x^2+y^2) \\ = (2x^2)(2y^2) \\ = 4x^2y^2 \end{gathered}$$

Chapitre 3

Algèbre et Règles d'équations

3.1 Introduction

« **L'équation** » est un traitement de l'information basé sur **l'égalité** et **l'implication**.

En d'autres termes, une « **equation** » est composée d'une première égalité, puis chacune de ses étapes doit être justifiée par une égalité et ou une implication (sachant qu'une équivalence n'est rien d'autre qu'une implication qui va dans deux sens).

L'on reprends notre analogie. L'on se munit d'une Charlotte très intelligente et de 2 bacs a jouets pleins.

L'on se remet a la place de Charlotte.
Elle se représente une « **équation** » de la sorte : elle possède deux bacs contenant exactement les mêmes jouets.
L'on dit ces bacs : « **égaux** ».
A présent, si Charlotte ajoute une petite voiture bleue dans le 1er bac et exactement la même voiture dans le second, les 2 bacs restent identiques.
Charlotte doit donc (si elle veux conserver l'égalité), appliquer la même modification aux 2 bacs.
Voila le concept fondamental de l'équation : la conservation de l'égalité.
Imaginons a présent que : bien que les 2 bacs restent identiques (en terme de contenu), l'un soit extrêmement bien rangé (si bien que l'on puisse identifier d'un simple coup d'œil tous les jouets qui le compose), mais que le second soit rangé et organisé de façon chaotique.
Sachant cette égalité, Charlotte pourrait conclure que : « Si la poupée rose se trouve dans le bac 1, alors elle trouvera nécessairement une poupée identique dans le second bac. ».

C'est la le cœur d'une équation, conserver des égalités pour en extraire des informations.

3.2 Formulation

Une égalité s'écrit de la sorte :
Une quantité $A =$ *Une* quantité B
Rappelons le une énième fois, bien souvent en mathématiques, il faut trouver une forme d'écriture avantageuse.

exemple :

$$Soit\ (a,b) \in \mathbf{R}^2,$$
$$\underbrace{a-b}_{=\text{ quantité A}} = \underbrace{0}_{=\text{ quantité B}}$$

3.2.1 Conservation des Quantités

Rappelons nous, que nous devons conserver les quantités de gauche et de droite en toute occasion.

Partons de notre égalité, *Soit* $(A,B) \in \mathbf{R}^2$**, tel que :**
$A = B$

Nous avons alors plusieurs règles pour nos opérateurs classiques :

$\forall x \in \mathbf{R}$:

$$A + x = B + x, \textbf{ relation importante}$$

$\forall x \in \mathbf{R}$:

$$A - x = B - x, \textbf{ relation importante}$$

$\forall x \in \mathbf{R}$:

$$A \times x = B \times x, \textbf{ relation importante}$$

Attention : Il y a une subtilité pour la division !
IL EST FORMELLEMENT INTERDIT DE DIVISER UN NOMBRE PAR 0 !
$\forall x \in \mathbf{R}$, si $x \neq 0$:

$$\frac{A}{x} = \frac{B}{x}, \textbf{ relation importante}$$

Par la suite nous noterons des ensembles A privés de 0 : A^*, ou encore $A/\{0\}$.
Par exemple : $\mathbf{R}^*$ ($\mathbf{R}$, privé de 0).

Ces règles nous disent simplement, qu'il nous faut changer de façons symétrique notre terme de gauche et notre terme de droite.

exemple :

$$\textit{Soit } a \in \mathbf{R},$$
$$\underbrace{2a+1}_{=\text{ quantité A}} = \underbrace{2}_{=\text{ quantité B}}$$
$$\iff 2a+1 -1 = 2 -1$$

(Notons qu'ici nous utilisons une implication (plus encore une équivalence) pour passer d'une ligne a l'autre).

$$\iff 2a = 1$$

exemple :

$$\textit{Soit } (a,b) \in \mathbf{R}^2,$$
$$\underbrace{20a+10b}_{=\text{ quantité A}} = \underbrace{10}_{=\text{ quantité B}}$$
$$\iff (20a+10b)\ \tfrac{1}{10} = 10\ \tfrac{1}{10}$$
$$\iff \frac{20a}{10} + \frac{10b}{10} = \frac{10}{10}$$
$$\text{Or } \frac{20a}{10} + \frac{10b}{10} = \frac{2 \times 10 \times a}{10} + \frac{10 \times b}{10} = 2a+b$$
$$\iff 2a+b = \frac{10}{10}$$

On a donc : $2a + b = 1$

Nous faisons la remarque que les parenthèses étaient nécessaires pour ne pas fausser l'égalité (Il faut donc consentement faire attention a la priorité de calcul).

3.3 Stratégies Classiques

Nous l'avons vu les règles de simplification de nos égalité ne tiennent pas a grand chose.

Elles sont peu nombreuses. La résolution d'une égalité tiens le plus souvent d'un travail d'équilibre, que d'érudition.

Cependant, nous l'avons vu dans notre exemple précédent, extraire de l'information, simplifier notre égalité, exige bien souvent un équilibrage astucieux.

En effet :

Soit $(a, b) \in \mathbf{R}^2$,

$$20a + 10b = 10 \iff 2a + b = 1$$

Nous obtenons une forme plus simple, en ayant remarquer le facteur commun : 10.

3.3.1 Utilité d'une équation

L'équation est une technique utilisée pour déterminer en ensemble de solutions S, qui satisfassent une certaine égalité (propriété).

En d'autres termes, elle sert a : lever l'anonymat sur des inconnues qui ont satisfait une égalité donnée.

Nous notons le plus souvent cet ensemble de solutions : S.

Dans cette optique, nous formulons le début de notre équation sans quantification :

Soit E un ensemble, résolvons dans E, $A = B$

Cela signifie que la ou les solutions que nous cherchons (si elles existent), se trouvent dans E.

Clarifions notre propos par un exemple.

exemple :

En effet :

Résolvons dans $\mathbf{R}$:

$$a - 1 = 0 \qquad (*)$$

Nous avons ici l'inconnue a, la solution a cette equation (si elle existe se trouve dans l'ensemble de a, c'est a dire $\mathbf{R}$)

Nous avons donc :

$$a - 1 = 0$$
$$\iff a - 1 + 1 = 0 + 1$$
$$\iff a = 1$$

Donc l'ensemble des solutions est : $S = \{1\}$.

Nous avons lever l'anonymat de a.

Et S, constitue l'ensemble des objets de $\mathbf{R}$ (l'ensemble des réels), qui sont égaux a 0 si l'on y soustrait 1.

Évidement, il n'y a que 1, qui satisfait cette propriété (*).

3.3.2 Stratégies Classiques et ou Avancées

Cette partie n'est pas obligatoire, mais fortement conseillée.

Nous allons ici nous intéresser aux stratégies classiques de réécriture astucieuse (de nos équations).

Technique 01

0 est « **absorbant** » dans $\mathbf{R}$.
Il est le seul nombre qui multiplié a un autre (ou a lui même) donne 0.

Soit dans $\mathbf{R}$:

$$x = 0 \tag{3.1}$$

$\iff \forall \lambda \in \mathbf{R}$

$$\lambda \times x = 0 \tag{3.2}$$

exemple :

Résolvons dans $\mathbf{R}$:

$$2x + 2 = 0$$
$$\iff 2(x+1) = 0$$
$$\iff \frac{1}{2} 2(x+1) = 0 \text{ Nous utilisons la technique 1}$$
$$\iff x + 1 = 0$$

Technique 02

1 est « **neutre** » dans $\mathbf{R}$, pour la multiplication.
N'importe quel nombre multiplié par 1, demeure inchangé.

Soit dans $\mathbf{R}$:

$$x = 1 \times x \tag{3.3}$$

Cela a sans doute l'air idiot ou évident, mais cette égalité est en réalité très puissante.

exemple :

$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$xy + x = x(y+1)$$

exemple :

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 :$$
$$x(2-8x)+y(2y-1)=0$$
$$\iff 2x-y-8x^2+2y^2=0$$
$$\iff 2x-y=8x^2-2y^2$$
$$\iff 2x-y=2(4x^2-y^2)$$
$$\text{Si } (4x^2-y^2)\neq 0, \text{ alors } \frac{2x-y}{4x^2-y^2}=2$$
$$\iff \frac{2x-y}{(2x-y)(2x+y)}=2 \text{ identité remarquable}$$
$$\text{Or si } (2x-y)\neq 0,\ \frac{2x-y}{2x-y}=1.$$
Or $(2x-y)(2x+y)=4x^2-y^2$, que nous avons supposé non nulle.
Donc : $(2x-y)\neq 0$ et $(2x+y)\neq 0$.
$$\iff \frac{2x-y}{2x-y}\,\frac{1}{2x+y}=2\,\frac{2x-y}{2x-y}$$
$$\iff \frac{2x-y}{2x-y}\,\frac{1}{2x+y}=2$$
$$\iff \frac{1}{2x+y}=2$$
$$\iff 2x+y=\tfrac{1}{2}$$
$$\iff y=\tfrac{1}{2}-2x$$

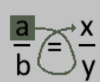
Technique 03

Il est parfois plus facile de résoudre $A=0$ que $A=B$.

$$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 :$$
$$x=y \iff x-y=0$$

Technique 04 (Produit en Croix)

Nous pouvons parfois tomber sur des égalités de la sorte $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}$.
Si nous voulons détérminer l'un des termes a partir des 3 autres, nous pouvons procéder de la sorte :



exemple :

$$a=\frac{bx}{y} \ ||\ b=\frac{ay}{x} \ ||\ x=\frac{ay}{b} \ ||\ y=\frac{xb}{a}$$

Astuce :

Lorsque l'on choisi l'inconnue a déterminer, l'on divise par le nombre sur la diagonale et multiplie par les 2 restants (la diagonale pour a est y, il nous suffit donc de multiplier par les nombres restants : $a = \frac{bx}{y}$).

Technique 05

Résoudre une équation dans $\mathbf{R}^2$, revient a trouver une ou des solutions si elles existent dans $\mathbf{R}^2$, (c'est a dire, trouver des 2-uplets, des couples satisfaisants.

Dans ce cas, si notre équation est décrite avec 2 inconnues x et y ; pour décrire S, il nous faut décrire x a partir de y ou y a partir de x.

exemple :

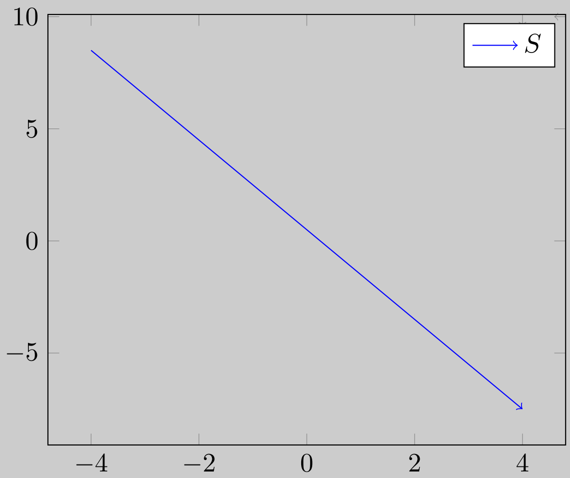
Résolvons dans $\mathbf{R}^2$:

$$2x + y = \frac{1}{2}$$

$$\iff y = \frac{1}{2} - 2x$$

Alors $S = \{(x, \frac{1}{2} - 2x), x \in \mathbf{R}\}$

Notre ensemble des solutions a l'air complexe, mais il nous suffit d'un graphique pour comprendre notre solution, en traçant tous les points de notre ensemble S en bleu.



La droite bleu est notre ensemble de points S.

exemple : si je prends $x = 0$ et $y = \frac{1}{2} - 2 \times 0 = 0.5$, alors $2x + y = 0.5$.

Nous avons résolu dans $\mathbf{R}^2$: $2x + y = \frac{1}{2}$, ce qui équivalait a résoudre : $x(2 - 8x) + y(2y - 1) = 0$.

3.4 Règles d'inéquation

3.4.1 Inéquation

Une inéquation n'est pas bien différente d'une équation. Elle est utilisée pour la même raison : lever l'anonymat sur une inconnue.

Au lieu de constater l'égalité entre 2 quantités, l'inéquation compare 2 quantités.

$$Une \text{ quantité } A \leq Une \text{ quantité } B$$
$$A \text{ est plus petite ou égal que } B.$$

Elle se formule ainsi :
Soit E, un ensemble.

Résolvons dans E :
$$A \leq B$$
Attention, seul des réels peuvent faire l'état d'une inégalité.

Je vois venir votre objection, qui est justifiée.	« N'y a-t-il pas un deuxième signe pour exprimer nos inégalités ? » Vous auriez raison, nous venons de voir le signe : $\leq$, « d'infériorité ». Vous devez surement faire allusion au signe : $\geq$, de « supériorité ». Cependant nous pouvons définir $\geq$, a partir de $\leq$, car : $A \leq B \iff B \geq A$. Donc nous pouvons définir toute inégalité (non stricte) a partir de $\leq$.

3.4.2 Inéquation Stricte

Une « inégalité stricte » reste une « inégalité ».

$$Une \text{ quantité } A < Une \text{ quantité } B$$
$$A \text{ est strictement plus petite que } B.$$

Elle se formule ainsi :
Soit E, un ensemble.

Résolvons dans E :
$$A < B$$
Attention, seul des réels peuvent faire l'état d'une inégalité stricte.

Les signes : $\leq$ et $<$ sont appelés des **relations d'ordre**.

3.4.3 Règles d'inégalité

Règle 01

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x \leq y$$

$\forall a \in \mathbf{R}$

$$\text{Alors : } x + a \leq y + a$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x < y$$

$\forall a \in \mathbf{R}$

$$\text{Alors : } x + a < y + a$$

N'oublions pas que la soustraction est une addition !

exemple :

$$\begin{gathered} 4 \leq 7 \\ \text{Or } 4 + 2 = 6 \\ \text{et } 7 + 2 = 9. \\ \text{Or } 6 \leq 9. \end{gathered}$$

$$\text{Donc : } 4 + 2 \leq 7 + 2$$

Règle 02

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x \leq y$$

$\forall a \in \mathbf{R}$ positif

$$\text{Alors : } x \times a \leq y \times a$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x < y$$

$\forall a \in \mathbf{R}$ strictement positif

$$\text{Alors : } x \times a < y \times a$$

exemple :

$$\begin{aligned} & 4 < 7 \\ \iff & \underbrace{4 \times 2}_{=8} < \underbrace{7 \times 2}_{=14} \end{aligned}$$

Règle 03

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x \leq y$$

$\forall a \in \mathbf{R}$ négatif

$$\text{Alors : } x \times a \geq y \times a$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x < y$$

$\forall a \in \mathbf{R}$ strictement négatif

$$\text{Alors : } x \times a > y \times a$$

Multiplier par un nombre négatif inverse le sens de l'inéquation !

exemple :

$$4 < 7$$
$$\iff \underbrace{4 \times (-1)}_{=-4} > \underbrace{7 \times (-1)}_{=-7}$$

Règle 04

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x \leq y$$

$\forall a \in \mathbf{R}^*$ positif (Notez bien que $a \neq 0$!)

$$\text{Alors : } \frac{x}{a} \leq \frac{y}{a}$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x < y$$

$\forall a \in \mathbf{R}^*$ strictement positif (Notez bien que $a \neq 0$!)

$$\text{Alors : } \frac{x}{a} < \frac{y}{a}$$

Règle 05

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x \leq y$$

$\forall a \in \mathbf{R}^*$ négatif (Notez bien que $a \neq 0$!)

$$\text{Alors : } \frac{x}{a} \geq \frac{y}{a}$$

Soit $(x, y) \in \mathbf{R}^2$,

$$\text{tel que } x < y$$

$\forall a \in \mathbf{R}^*$ strictement négatif (Notez bien que $a \neq 0$!)

$$\text{Alors : } \frac{x}{a} > \frac{y}{a}$$

Diviser par un nombre négatif inverse le sens de l'inéquation !

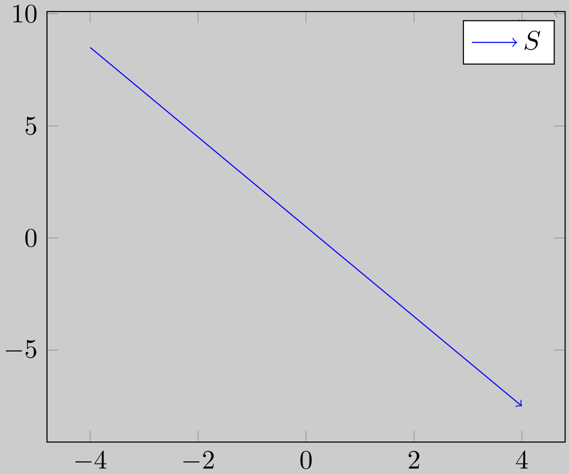
3.5 Notations

- $\mathbf{R}^+ = [0; +\infty[$
- $\mathbf{R}^*_+ =]0; +\infty[$
- $\mathbf{R}^- =]\infty-; 0]$
- $\mathbf{R}^*_- =]\infty-; 0[$
- $[a; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$.
- $]a; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a < x \leq b\}$.
- $[a; b[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x < b\}$.
- $]a; b[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a < x < b\}$.
- $[a; +\infty[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x\}$.
- $]a; +\infty[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a < x\}$.
- $]-\infty; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } x \leq b\}$.
- $]-\infty; b[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } x < b\}$.

3.6 Algèbre et Géométrie

Il faut prendre du recul, pour nous apercevoir que nos equations et inéquations (a travers la description de l'ensemble S), décrivent des formes(géométries).

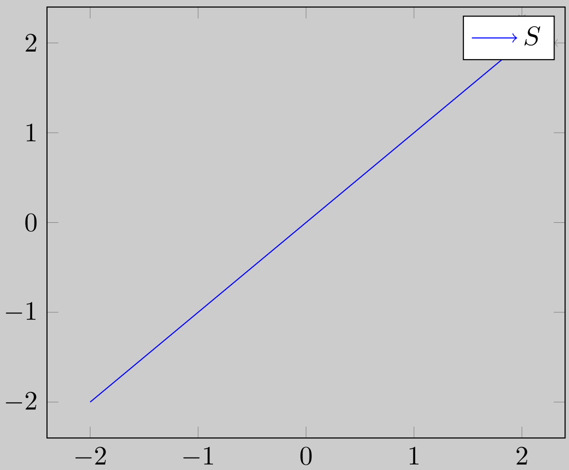
On la vue dans notre dernier exemple (pour l'équation), que l'équation : $2x + y = \frac{1}{2}$, décrivait l'espace S (qui est une droite) :



On peut donc définir nos equations et inéquations comme des méthodes descriptives de nos ensembles S (et donc bien souvent de nos géométries).

En soit : des « descriptions algébriques ».

$2x + y = \frac{1}{2}$, n'est pas la seule, une plus simple peut être : $x = y$ (équivalent a : $x - y = 0$).



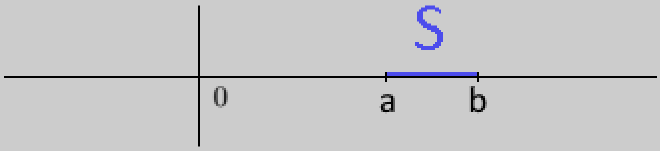
Les équations ne sont pas les seules méthodes descriptives d'ensembles, qui décrivent des géométries.

exemple :

$\forall(a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que $a < b$:

$S = [a;b]$, S est un segment de la droite d'abscisse x.

En effet, S contient tous les points compris entre a et b. Il est donc la description du segment $[a,b]$.



Maintenant, élargissons un peu notre focal en reprenant l'exemple ci-dessus.

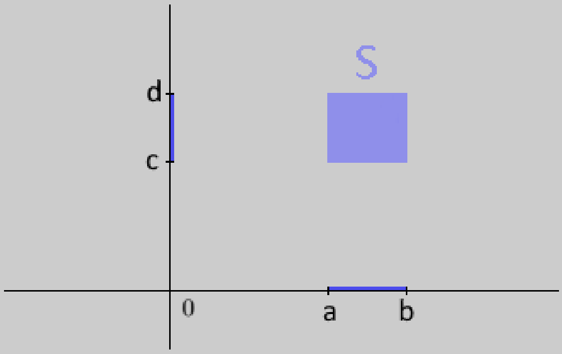
exemple :

$\forall(a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que $a < b$.

$\forall(c,d) \in \mathbf{R}^2$, tel que $c < d$:

Effectuons le produit cartésien : $S = [a;b] \times [c;d]$, S, appelé pavé est un rectangle.

En effet, il contient tous les points (x,y), contenus dans un certain rectangle :

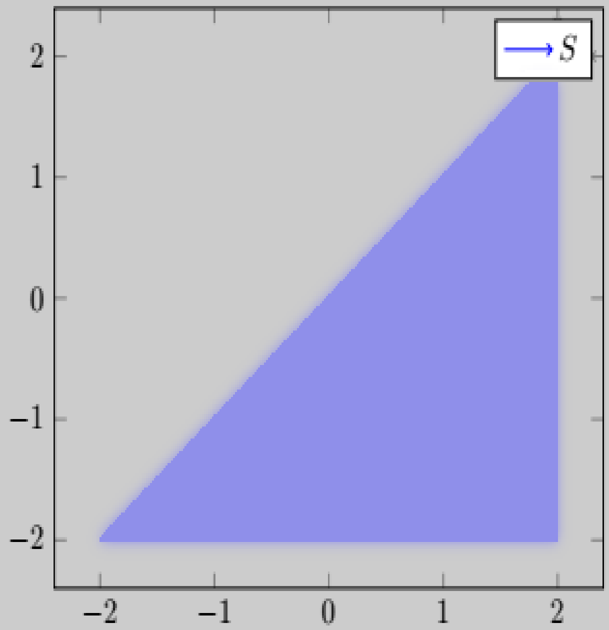


Les inéquations décrivent également des géométries.

exemple :

Considérons l'inéquation : $y - x \leq 0 \iff y \leq x$.

S est simplement l'espace des points (x, y) tel que x est systématiquement supérieur ou égal a y.



S est une surface.

Cercle

Rappelons nous de nos cours de collège.

A partir d'un point (que l'on nommait centre du cercle), l'on traçait a l'aide d'un compas, un cercle de rayon variable.

L'utilisation du compas, nous permettait de tracer une infinité de points qui avaient tous la même distance par rapport a notre centre (cette distance était appelée : le rayon).

Nous pouvons décrire cette géométrie de façons algébrique (par la description mathématique d'ensembles).

Bien que nous n'ayons pas encore vu les fonctions, considérons la fonction f, qui calcule la distance entre 2 points $A = (x, y)$ et $B = (a, b)$.

$$f(A, B) = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

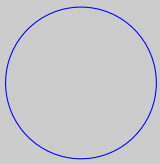
Simplifions notre fonction en partant du principe, que nous volons mesurer la distance d'un seul point A, par rapport a l'origine de notre repère $(0, 0)$.

Nous avons donc la fonction g, tel que $\forall A = (x, y) \in \mathbf{R}^2$:

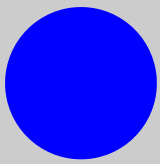
$$g(A) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Résolvons alors l'équation $g(A) = 1$, notre ensemble S (des solutions), représente alors l'ensemble des points A, tel que la distance entre les points A et l'origine du repère, soit égale a 1.

Notre annoncé nous parait peut être prodigieusement complexe, mais cela ne représente juste que notre cercle de rayon 1 et de centre $(0, 0)$.



Plus encore, en transformant notre équation : $g(A) = 1$, en inéquation : $g(A) \leq 1$, alors S devient un disque :



L'équation décrit les points du périmètre de notre cercle, tendis que l'inéquation décrit les points de la surface de celui-ci.

Cela n'est pas anodin, car les n-uplets qui nous paraissent si abstraits sont ce que l'on appelle communément des « **vecteurs** ».

3.7 Synthèse, liste mémoire

3.7.1 Synthèse

- **Ensemble Vide :** $E = \emptyset = \{\}$
- **Singleton :** $E = \{x\}$
- **Ensemble Fini :** $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq \mathbf{R}^n$
  $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\} = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup ... \cup \{x_n\}$
- **Ensemble des entiers naturels :** $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$
- **Ensemble des entiers naturels privé de** 0 **:** $\mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
- **Ensemble issu d'un produit scalaire :**
  Soit E un ensemble
  $\forall a \in \mathbf{R}$
  $aE = \{a \times x \mid \forall x \in E\}$
- **Ensemble des entiers relatifs :** $\mathbf{Z} = \mathbf{N} \cup (-\mathbf{N})$
- **Ensemble des entiers relatifs privé de** 0 **:** $\mathbf{Z}^* = \mathbf{N}^* \cup (-\mathbf{N}^*)$
- **Segments de Z :**
  $[|a : b|] = \{a, a+1, a+2, ..., b\}$
- **Ensemble issu d'un produit cartésien :**
  Soit E un ensemble
  Soit F un ensemble
  $E \times F = \{(x, y) \mid \forall x \in E, \forall y \in F\}$
- **Ensemble des nombres rationnels :** $\mathbf{Q} = \{\frac{p}{q} \mid \forall (p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*\}$
- **Ensemble des nombres rationnels privés de** 0 **:** $\mathbf{Q}^*$
- **Ensemble des nombres réels :** $\mathbf{R}$
- **Ensemble des nombres réels privé de** 0 **:** $\mathbf{R}^*$
- **Ensemble des nombres réels positifs :** $\mathbf{R}^+$
- **Ensemble des nombres réels strictement positifs :** $\mathbf{R}_+^*$
- **Ensemble des nombres réels négatifs :** $\mathbf{R}^-$
- **Ensemble des nombres réels strictement négatifs :** $\mathbf{R}_-^*$
- **Segments de R :**
  $[a; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$
- **Intervalles de R :**
  $[a; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x \leq b\}$
  $]a; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a < x \leq b\}$
  $[a; b[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x < b\}$
  $]a; b[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a < x < b\}$
  $[a; +\infty[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a \leq x\}$
  $]a; +\infty[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } a < x\}$
  $]-\infty; b] = \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } x \leq b\}$
  $]-\infty; b[= \{\forall x \in \mathbf{R} \text{ tel que } x < b\}$
- **Inclusion sur R :**
  $\emptyset \subseteq \mathbf{N}^* \subseteq \mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$
  $\emptyset \subseteq \mathbf{N}^* \subseteq \mathbf{Z}^* \subseteq \mathbf{Z}$
  $\emptyset \subseteq \mathbf{Q}^* \subseteq \mathbf{Q}$
  $\emptyset \subseteq \mathbf{R}_-^* \subseteq \mathbf{R}_- \subseteq \mathbf{R}$
  $\emptyset \subseteq \mathbf{R}_+^* \subseteq \mathbf{R}_+ \subseteq \mathbf{R}$
  $]a; b[\subseteq]a; b] \subseteq [a; b] \subseteq [a; +\infty[\subseteq \mathbf{R}$
  $]a; b[\subseteq [a; b[\subseteq [a; b] \subseteq [a; +\infty[\subseteq \mathbf{R}$

$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2$, tel que $a < b$:

$[b;+\infty[\subseteq]a;+\infty[\subseteq [a;+\infty[$
$]b;+\infty[\subseteq]a;+\infty[\subseteq [a;+\infty[$
$]-\infty;a[\subseteq]-\infty;b[\subseteq]-\infty;b]$
$]-\infty;a] \subseteq]-\infty;b[\subseteq]-\infty;b]$

3.7.2 Liste Mémoire

— **Règles de Fractions :**
$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$
$\frac{a \times b}{c \times d} = \frac{a}{b} \text{ x } \frac{b}{d}$
$\frac{a}{b} = \frac{1}{b}\ a$
$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{cb}{bd} = \frac{ad+cb}{bd}$

— **Règles de Puissances :**
$a^0 = 1$
$a^1 = a$
$\forall n \in \mathbf{N},\ a^n = a \times a^{n-1}$
$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ (ab)^n = a^n \times b^n$
$\forall n \in \mathbf{N},\ \forall k \in \mathbf{N},\ \forall (a_1, ..., a_k) \in \mathbf{R}^k,\ (a_1 \times ... \times a_k)^n = a_1^n \times ... \times a_k^n$
$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ a^{n+k} = a^n \times a^k$
$a^{-1} = \frac{1}{a}$, si $a \neq 0$
$\forall n \in \mathbf{N},\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, si $a \neq 0$
$\forall (a,b) \in \mathbf{R}^2,\ \forall n \in \mathbf{N},\ (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n},\ b \neq 0$
$\forall (n,k) \in \mathbf{N}^2,\ a^{n-k} = a^n\ a^{-k} = \frac{a^n}{a^k}$ si $a \neq 0$ ou si n $\geq$ k
$\frac{a}{a} = 1$
$\forall n \in \mathbf{N},\ \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

— **Règles Classiques :**
$\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda x_1 + \lambda x_2 + ... + \lambda x_n$
$(x+y)(a+b) = xa + xb + ya + yb$
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

— **On ne divise jamais par 0.**

Chapitre 4

Initiation Au Langage Python

4.1 Introduction

« **L'informatique** » est une branche des mathématiques, qui à engendrer la 3e révolution industrielle.

« L'informatique modernes » est née au milieu du 20e siècle, grâce à de brillants mathématiciens tel qu'Alan Turing [1](et sa machine universelle).

L'idée d'origine est de concevoir des machines capables d'exécuter des calculs[2], bien souvent chronophages pour nous autres. Ces machines spécifiques, fabriqués depuis l'antiquité et ont besoin de protocoles de calcul : *« d'algorithmes »*.

L'essor de l'informatique moderne coïncide avec celui de la « **micro-économie** », car une énorme capacité de calcul, permet une utilisation des statistiques plus poussée. Il en découle une vérification empirique de nos modèles plus abordable.

De nos jours, ces exécuteurs de calculs sont fabriqués à l'aide de « **transistors** ». Les transistors, sont des composants électroniques qui laissent passer des courants électriques sous certaines conditions. De façon générale, toute la structure d'un ordinateur est basée sur ce concept de présence de courant : 1 et ou d'absence de courant : 0. 1 = Vrai, 0 = Faux. Nous revenons ainsi aux balbutiements de notre mathématique moderne : « **la logique** »(cf : Chapitre 2). L'on parle de manipulations « **booléennes** », toute l'informatique moderne est basée sur cette théorie de la logique.

EN MATHÉMATIQUES NOUS POUVONS PRESQUE TOUJOURS REMONTER A LA RACINE

4.2 Notion de Langage

Ainsi, nous l'avons compris, un ordinateur est une machine programmable. Il est donc nécessaire de posséder un canal de communication, pour lui transmettre instructions et informations.

Cela implique que nous devons posséder un langage commun. Nous l'avons compris, ce langage est composé de 2 briques élémentaires : le 0 et le 1. Nous pouvons les voir comme les lettres de notre alphabet.

En effet si nous considérons un ensemble $\Sigma = \{a, b, c, ...\}$, contenant toutes les lettres de notre alphabet, un mot n'est que la concaténation de ces mêmes lettres, et une phrase la concaténation de ces mêmes mots. Ainsi, à la racine de tout langage, se trouve un alphabet, et il en va de même pour celui de l'ordinateur : $\Sigma = \{0, 1\}$. L'on parle de **« langage binaire »**, car il ne contient que 2 briques fondamentales.

Si vous pensez cette approche capillotractée, pensez donc à la façon dont vous même avez été programmé. L'alphabet de votre génome n'est composé que de 4 lettre : $\Sigma = \{A, T, C, G\}$, et tout votre programme génétique repose sur ces 4 petites lettres.

Une phrase en **« langage naturel »**, tel que le Français, obéit à certaines règles d'agencement des mots, qui in finé lui donne une signification. Il en va de même pour l'ADN. Il en va de même pour le langage binaire.

Seulement, une série de 0 et de 1 reste illisible pour le commun des mortels, il faut donc trouver une langue qui nous est intelligible et qui puisse être traduite en binaire.

C'est la toute l'idée première des langages de programmation, dont **Python** reste a ce jour : l'un des plus utilisés.

4.3 Mise en Contexte

Charlotte trouve dans sa chambre un python.

Étant une fan de la première heure de la saga Harry Potter, elle veut soumettre celui-ci a sa volonté, en utilisant la langue des serpents.

C'est une langue extrêmement codifiée, très mathématique, car les serpents forment une société cultivée. Il lui faut donc en apprendre les rudiments. Heureusement pour elle, Charlotte a des bases en algèbre booléen. En voilà une enfant cultivée...

4.4 Installation

Pour commencer, nous devons télécharger Python.

* Rendons nous sur le site : `https://www.python.org/`

* Dans l'onglet « Downloads », choisissez la version de Python, en fonction que votre système d'exploitation.

* En démarrant l'installateur Python, assurez vous de bien cocher la case « Pip ».

4.5 Le Shell

* Une fois « Python » installé, cherchez l'application « Idle ».

Une interface de commande devrait apparaitre. Celle-ci se nomme le **« shell »** et se charge d'interpréter votre code, car python est un langage interprété.

1. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Alan_Turing`
2. Des outils tel que le boulier ou encore la « Pascaline »
3. Central Proccessing Unit

* Allez dans l'onglet « File », « New file ». Une nouvelle fenêtre devrait avoir fait son apparition. * Allez dans l'onglet « File », « Save As », pour enregistrer votre premier fichier Python.

Celui-ci contiendra notre code. Cette méthode a pour avantage de ne pas avoir à manuellement exécuter le code ligne par ligne dans le **« shell »**.

Pour exécuter le code contenu dans notre fichier Python, il nous suffit d'aller dans l'onglet : « run », puis « Run Module ». Une fois ceci fait, l'interpréteur Python lira votre fichier de haut en bas, et si celui-ci ne détecte aucune erreur, compilera, puis exécutera proprement votre code. Il y a une exception à cela. Lorsque vous parlez la langue des serpents, les instructions qui commencent par le signe : « # », ne sont pas interprétés, vous pouvez y mettre tout et n'importe quoi. Ces instructions se nomment les « **commentaires** » et sont le plus souvent utilisées pour *« commenter du code »*. Elles sont des notes a soit même, ou a l'intention d'autres personnes qui seraient amenées à collaborer avec vous sur un projet.

En effet, il est bien plus pratique de lire les *« commentaires »* d'un développeur, plutôt que de tenter de déchiffrer son code (un exercice qui peut être extrêmement fastidieux).

4.6 Les Variables

Les serpents sont des êtres très pragmatiques, ils aiment quantifier sujets et COD de leurs phrases. Ils leur donne le nom de variables.

Déclarer une variable, revient a la garder en mémoire. cela se fait simplement et tout en élégance : nom-de-la-variable = son-contenu

```
# Prenons un exemple concret :
nombre = 2
# Ici l'on a associe la variable de nom : "nombre" a la valeur 2.
```

Cependant vient une question légitime : « comment en être sur ? ». En effet, une fois le code compilé, rien ne se passe. Pour se faire, nous allons utiliser notre première **« fonction »**. Notez que l'appel d'une fonction, se fait toujours en utilisant son nom et en précédant celui-ci d'une **« parenthèse ouverte »**, puis d'une **« parenthèse fermée »**, dans lesquelles on sera éventuellement amenés a y insérer des **« arguments »**(Les variables d'entrées).

Nous verrons cette notion un peu plus en profondeur dans de prochains chapitres.

Nous utiliserons la fonction : « print », qui est utilisée pour afficher du texte dans la console « Python ». Elle aura pour argument la valeur que nous voulons afficher. **NB** : En Python une fonction est également un type de variable.

```
nombre = 2
print(nombre)
# Nous appellons la variable par son nom pour récupérer son contenu.
```

Résultat Console :

```
>>> 2
```

4.6.1 Les « types » de Variables

Nous l'avons dit, les serpents sont des êtres instruits qui quantifient leurs variables. Cette quantification passe par une attribution de *« type »* à chaque variable, et comme nous l'avons vu (cf : Chapitre 2), quantifier une variable revient implicitement à lui associer certaines propriétés. Il en va de même en Python, nous pouvons ou non, faire certaines choses avec des variables d'un certain *« type »*, tandis qu'avec d'autres cela ne sera pas possible. En d'autre termes, le *« type »* : attribut aux variables certaines propriétés. Utilisons une deuxième fonction native, nommée : **« type »**. Celle-ci renvoie le *« type »* de la variable que l'on passe en argument. Notre fonction **« type »**, est en cela différente de **« print »**, que celle-ci renvoie un résultat, qui peut être stocké à l'aide d'une variable.

```
nombre = 2
a = type(nombre)
# Nous stockons le type de nombre dans la variable a.
print(a)
# Nous affichons le contenu de a.
print(type(a))
# a est une variable qui aussi possède un type.
print(type(print))
# Nous l'avons dit précédemment, une fonction est une variable.
# Par conséquent elle possède elle aussi un type.
```

Résultat Console :

```
>>> <class 'int'>
>>> <class 'type'>
>>> <class 'builtin_function_or_method'>
```

nombre est donc de *« type »* : *« int »*, *a* est de *« type »* : *« type »* et **« print »** est de *« type »* : *« function »*. Essayons donc de comprendre ces termes en faisant un tour non exhaustif des types de variables...

4.6.2 Le Type None

Les variables booléennes, n'ont pas spécialement de propriétés remarquables, elles sont néanmoins utiles lorsque l'on ne veux pas donner (a un moment t) de type et de contenu a une variable.

Pour en créer une, il vous suffit simplement de la déclarée ainsi :

$$variable = None$$

4.6.3 Le Type Booléen

Nous l'avons brièvement évoqué, les booléens sont a la base de *« l'informatique modernes »*, le fameux 0 et 1.

Elles se déclarent ainsi :

$$\mathit{variable} = \text{True}$$
$$\text{ou}$$
$$\mathit{variable} = \text{False}$$

En Python, les variables booléennes sont utilisées pour faire des tests logiques, nous ramenant ainsi a notre tout premier chapitre (cf : Chapitre 2). Il est donc tout naturel que *« Python »*, nous permette d'utiliser nos opérateurs de base.

```
a = True
b = False
c = a or b
d = a and b
e = not(a)
print(a)
print(b)
print(c)
print(d)
print(e)
print(type(a))
```

Résultat Console :

```
>>> True
>>> False
>>> True
>>> False
>>> False
>>> <class 'bool'>
```

4.6.4 Entiers[int], Nombres a virgules[float]

Nous l'avons vu en début de chapitre, déclarer un entier n'est guerre complexe. Les nombres en général sont stockés sous deux formes, les entiers relatifs : *« int »* et les rationnels : *« float »*.

NB : Lorsque l'on veux déclarer un nombre a virgules nous remplaçons la virgule par un point. **exemple :** $a = 2.8$

Comme pour les *« booléens »*, *Python* possède nativement des opérateurs pour manipuler nos nombres : « + », « - », « * », « / », « ** », respectivement pour « l'addition », « la soustraction », « la multiplication », « la division » et « la puissance ».

NB : Exception faite de la « la division », toute les opérations en *« int »*, renvoient des résultats typés en *« int »*. Il en va de même pour les nombres a virgules(*« float »*). Cependant une opération entre un *« int »* et un *« float »* renvoie un *« float »*.

NB : Comme en Mathématiques, *Python* prend en compte les priorités de calcul sur les parenthèses.

```
a = 7
b = 9
c = 3**(a+1) + b -2
d = 5.2 + 6.7
e = a + (b/2)*7
print(a)
print(type(a))
print(b)
print(type(b))
print(c)
print(type(c))
print(d)
print(type(d))
print(e)
print(type(e))
```

Résultat Console :

```
>>> 7
>>> <class ’int’>
>>> 9
>>> <class ’int’>
>>> 6568
>>> <class ’int’>
>>> 11.9
>>> <class ’float’>
>>> 38.5
>>> <class ’float’>
```

4.7 Les Variables indicées/séquencées

Les *« variables séquencées »*, sont une famille de types de variables, partageant certaines propriétés. Ces variables sont séquencées/indicées, car leur contenu est subdivisé et que l'on peut accéder a chacune de ces subdivisions.

Une *« variables séquencées »* possède une taille et peut être concaténée avec une autre *« variables séquencées »* du même type, pour en former une nouvelle.

4.7.1 Généralités

Nous l'avons dit : une *« variables séquencées »* possède une taille. Une fonction native de *Python*, nous permet d'y accéder : « **len** ». Cette taille est toujours typée en *« int »*. Les subdivisions d'une *« variables séquencées »* sont indicées par des entiers naturels strictement inférieurs a la taille de notre variable (allant de 0 a len($Variable$) - 1).

Nous pouvons accéder au contenu de cette subdivision par son indice de la façon suivante : $Variable$[indice].

Cela peut nous apparaitre un peu abstrait pour l'instant pallions ce problème en listant nos différents types de *« variables séquencées »*.

4.7.2 Les Chaines de Caractères[String]

Une *« chaine de caractères »*, est a l'évidence une : chaine de caractères, une façon commode pour *Python* de stocker du texte. Elle se déclare de la façon suivante : *variable* = "Mon texte."

Prenons un exemple concret :

```
a = "Héllo World!"
print(a)
print(type(a))
print(len(a))
print(a[0])
print(a[1])
print(a[4])
```

Résultat Console :

```
>>> Héllo World!
>>> <class 'str'>
>>> 12
>>> H
>>> é
>>> o
```

4.7.3 Les Tuples (n-uplets)[tuple]

Un *« tuple »* n'est autre qu'un n-uplet. Il se parcours de la même façon qu'un *« str »*. Il se déclare de la façon suivante : *variable* = (elm_1,elm_2,...).

Prenons un exemple concret :

```
a = (0,2,4.5,"je suis le 4e élément","2")
print(a)
print(type(a))
print(len(a))
print(a[0])
print(a[1])
print(a[3])
```

Résultat Console :

```
>>> (0, 2, 4.5, 'je suis le 4e élément', '2')
>>> <class 'tuple'>
>>> 5
>>> 0
>>> 2
>>> je suis le 4e élément
```

4.7.4 Les Listes[list]

Une *« liste »* (*« list »*) est en cela différente d'un *« tuple »* et d'un *« str »*, que l'on peut modifier le contenue de ses subdivisions et même en rajouter. Elle se déclare ainsi : *variable* = [elt_1, elt_2,...].

« Python » nous offre également la possibilité de déclarer une liste vide, qui pourra par la suite être remplie. Cela se fait assez simplement : *variable* = [].

Prenons un exemple concret :

```python
a = [0,4,6,9]
print(a)
print(type(a))
print(len(a))
print(a[2])
a[2] = 17
print(a)
a.append(29)
print(a)
```

Résultat Console :

```
>>> [0, 4, 6, 9]
>>> <class 'list'>
>>> 4
>>> 6
>>> [0, 4, 17, 9]
>>> [0, 4, 17, 9, 29]
```

4.7.5 Les fonctions de conversion

Les **« fonctions de conversion »**, sont des *« fonctions natives »* de *Python*. Celles-ci ont pour but de changer le *« type »* d'une variable(si cela est possible). Elles ne sont pas si nombreuses, cependant quasiment tout les *« types »* de *Python* en ont une.

L'on peut transformer n'importe quel nombre (*« int »* ou *« float »*) en chaine de caractères *« str »*, par la fonction : **« str »**.

Inversement si une chaine de caractères est entièrement composée de chiffres ont peux la transformée en nombre par les fonctions **« int »** et ou **« float »**.

L'on peut transformer un *« tuple »* en liste et inversement par les fonctions : **« tuple »** et **« list »**.

4.7.6 La Concaténation

Par l'opérateur « + », l'on peux concaténer : chaine de caractères, tuples et listes.

* "ab" + "cd" = "abcd"
* (0,1) + (2,3) = (0,1,2,3)
* [0,1] + [2,3] = [0,1,2,3]
* "a" * 4 = "aaaa"
* (0,1)*2 = (0,1,0,1)
* [0,1]*2 = [0,1,0,1]

Il faut néanmoins noté que cette opération de concaténation peut être couteuse en temps.

4.8 Les Dictionnaires[dict]

Ce chapitre ne sera pas très avare de détails vis a vis des dictionnaires (un chapitre spécifique leur seront dédié). Nous avons structuré nos chapitres selon une certaine logique précise. Nous avons vu les bases de la *logique*, puis les bases de la logique *ensembliste*. De la même façon, par analogie, nous pouvons considérer les dictionnaires, comme des ensembles dont on énumère les éléments.

Un dictionnaire se défini de la façon suivante :

$variable = \{cle_1 : val_1, cle_2 : val_2, ...\}$.

Les clés servent a accéder aux valeurs de votre dictionnaire, de la même façon que l'on accède aux valeurs des variables itérées. Notez cependant que contrairement a ces dernières, il n'est pas nécessaire que les clés d'un dictionnaire soient des entiers naturels.

4.9 Approfondissement des variables Booléennes

La section des variables terminée, rentrons dans le dure du sujet. Python, nous permet de faire des tests de logique.

Nous l'avons vu, Python possède des opérateurs logiques, cependant nous pouvons allés plus loin, en faisant des test d'égalités.

4.9.1 Les conditions

Considérons une variable booléenne var.

La syntaxe Python nous permet d'exécuter des instructions en fonction de la valeur de : var.

if var :
    $instruction_1$

if var :
    $instruction_1$
else :
    $instruction_2$

Il faut comprendre ce morceau de code ainsi : si var est égal a $True$ (autrement dit est vraie), alors le programme doit exécuter l'$instruction_1$, sinon il doit exécuter l'$instruction_2$.

Maintenant, soit $n \in \mathbf{N}$ et $var_0, var_1, ..., var_n$ (n+1) variables booléennes.

if var_0 :
    $instruction_0$
elif var_1 :
    $instruction_1$
        ...
        ...
        ...
elif var_k :
    $instruction_k$
        ...
        ...
        ...
else :
    $instruction_{n+1}$

Il faut comprendre ce morceau de code ainsi : si var_0 est égal a $True$ (autrement dit est vraie), alors le programme doit exécuter l'$instruction_1$, sinon si var_1 est égal a $True$ il doit exécuter l'$instruction_1$, ..., sinon si var_k est égal a $True$ il doit exécuter l'$instruction_k$, ..., sinon il doit exécuter l'$instruction_{n+1}$.

4.9.2 Les tests d'égalité et d'inégalités

Soit 2 variables var_1 et var_2, l'on peut tenter de stocker un test d'égalité dans une variable booléenne, quelque soit le type des 2 premières variables, de la façon suivante :

$$var = (var_1 == var_2) \textit{ égalité}$$

$var = True$ si $var_1 = var_2$, $False$ sinon.

Maintenant, soit 2 variables numériques (int ou float) : var_1 et var_2, l'on peut tenter de stocker un test d'égalité ou d'inégalité dans une variable booléenne de la façon suivante :

$$var = (var_1 == var_2) \textit{ égalité}$$
$$var = (var_1 > var_2) \textit{ inégalité stricte}$$
$$var = (var_1 < var_2) \textit{ inégalité stricte}$$
$$var = (var_1 >= var_2) \textit{ inégalité}$$
$$var = (var_1 <= var_2) \textit{ inégalité}$$

$var = True$ si l'inégalité est vraie, $False$ sinon.

4.9.3 Les tests d'appartenance

Soit *contenant*, un tuple, ou une liste. Soit *elt* une variable. On peut tenter de stocker un test d'appartenance dans une variable.

$$var = (elt \text{ in } contenant) \textit{ test d'appartenance}$$
$$var = (elt \text{ not in } contenant) \textit{ test de non appartenance}$$

Pour le premier $var = True$ si elt est un élément de $contenant$, $False$ sinon. Il sagit du contraire pour le second.

exemple :

0 appartient a $[5, 6, 0]$.

$$(0 \text{ in } [5,6,0]) = True$$
$$(\text{"0" in } [5,6,0]) = False$$
$$(4 \text{ in } [5,6,0]) = False$$
$$(4 \text{ not in } [5,6,0]) = True$$

Soit $str1$, une chaine de caractères. Soit m une chaine de caractères.

$$var = (m \text{ in } str1) \textit{ test d'appartenance}$$
$$var = (m \text{ not in } str1) \textit{ test de non appartenance}$$

Il s'agit la du même concept mais pour les chaines de caractères.

exemple :

"Hello" est un sous-mot de "Hello World !".

$$(\text{"Hello" in "Hello World !"}) = True$$
$$(\text{"je suis" in "Hello World !"}) = False$$
$$(\text{"hello" in "Hello World !"}) = False$$

test d'appartenance dans un dictionnaire :

Le test d'appartenance concerne les clés du dictionnaire et non ses valeurs. Ce test est intéressant en programmation car il est en temps constant, alors qu'un test d'appartenance sur une liste dépend intrinsèquement de la longueur de celle-ci.

exemple :

b $= \{0 : \text{"}ab\text{"}, \text{"}c\text{"} : 490, 4 : True\}$
(0 in b) $= True$

4.9.4 Combinaison

Nous avons vu comment utilisé des conditions sur des variables booléennes, puis nous avons vu comment transformer des tests logiques en variables booléennes, nous pouvons ainsi combiné ces 2 techniques pour composer des codes plus complexes.

Mise en Situation :

Charlotte possède une boite contenant des boules numérotés. Elle veut ordonner au serpent de chercher dans la boite si une de ses boules est numérotée 19 ou 9.

```
boite = [8, 0, 7, 9]
if (19 in boite) :
    print("19 est présent dans la boite")
elif (9 in boite) :
    print("9 est présent dans la boite")
else :
    print("échec du test")
```

Résultat Console :

```
>>> 9 est présent dans la boite
```

4.10 Parcours de liste par l'instruction : « for »

En python, l'instruction « for », permet de parcourir les éléments d'une liste (ou d'un objet qui y ressemble). La syntaxe d'une boucle « for », n'est pas très complexe :

```
for nom_arbitraire in ma_liste :
    instructions
```

Notre boucle « for », va parcourir les éléments de notre liste (ma_{liste}), un a un. En un premier temps, elle va regarder le premier élément de la liste.

Définir une variable du nom : $nom_{arbitraire}$: comme étant la variable représentant ce premier élément. Elle va ensuite exécuter le code contenu dans l'instruction : *instructions*.

Ceci fait, elle va passer au second élément. Définir une variable du nom : $nom_{arbitraire}$: comme étant la variable représentant ce deuxième élément, pour ensuite exécuter le code contenu dans l'instruction : *instructions*, et ainsi de suite.

Elle va faire cela, jusqu'à ce qu'elle ait parcourue tous les éléments de la liste.

exemple :

```
boite = [8, 0, 7, 9]
for k in boite :
    a = k + 1
    print(a)
```

Résultat Console :

```
>>> 9
>>> 1
>>> 8
>>> 10
```

Nous rappelons que les indentations sont absolument vitales pour la compilation.

L'indentation ici présente, nous amène a un concept fondamental : la ***localité*** des variables. Une variable peut être **locale** ou **globale**(c'est a dire que l'on peut y accéder quelque soit l'endroit ou elle est appelée après sa déclaration), selon qu'elle ait été déclarée avec ou sans indentations.

Toutes les variables déclarées dans *instructions*, ne pourrons pas nécessairement être accessibles en dehors de cette instruction.

Voyez les indentations comme une arborescence de contextes locaux.

La variables k et a ne sont définies que dans le contexte de la boucle for qui parcoure notre liste : *boite*, ce sont des variables locales.

A contrario, la liste *boite* est une variable globale, car l'on peut accéder a son contenu quelque soit la ligne et le contexte, a partir de la ligne 2.

Que ce soit pour une boucle for, une boule while, pour une $fonction$, ou un $objet$, la compréhension de la localité est variables est absolument cruciale.

4.10.1 Fonction range

La $fonction$ « **range** », est une $fonction$ qui génère un objet itéré, comparable a une liste : qui contient elle même tous les entiers entre deux nombres passés en arguments.

exemple :

```
boite = range(2,5)
for k in boite :
        print(k)
```

Résultat Console :

```
>>> 2
>>> 3
>>> 4
```

Nous notons que cela exclus le dernier entier (en l'occurrence 5) !

4.10.2 Mise en situation :

Nous voulons parcourir tous les éléments d'une liste, exception faite de ses deux premiers termes.

```
maliste = [9,4,6,6, "c", "abdg", 4]
for k in range(1,len(maliste)) :
        print(maliste[k])
```

Résultat Console :

```
>>> 6
>>> 6
>>> c
>>> abdg
>>> 4
```

Veuillez noter que range(0,n) = range(n). L'on peut ainsi parcourir la liste entièrement.

exemple :

```
maliste = [9,4,6,6, "c", "abdg", 4]
for k in range(len(maliste)) :
    print(maliste[k])
```

Résultat Console :

```
>>> 9
>>> 4
>>> 6
>>> 6
>>> c
>>> abdg
>>> 4
```

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE

bravo !

Chapitre 5

TD 0001

5.1 TD 0001

5.1.1 Exercice 01

Soit E un ensemble de nombres et $M \in \mathbf{R}_+^*$ (comprenez par la un réel strictement positif). Exprimez a partir de quantificateurs, que tous les éléments de E sont strictement inférieurs a M.

On dit que : « E **est borné supérieurement** ».

5.1.2 Exercice 02

En logique (bien que cela paraisse contre intuitif), pour inverser le sens d'une assertion, il nous suffit d'inverser $\forall$ et $\exists$. Les $\forall$ deviennent des $\exists$ et les $\exists$ deviennent des $\forall$.

Nous possédons une boite fermée quelconque, de boules numérotés par des entiers.

Pour simplifier les chose l'on considérera E comme un ensemble de nombres (qui représentent ces boules).

E est donc un ensemble quelconque d'entiers quelconques.

Charlotte fait la proposition P suivante : « Il existe au moins une boule portant le numéro 9 ».

a) : Traduisez la proposition P de Charlotte (énoncée en « **langage naturel** » (en français)), a partir de quantificateurs.

b) : En un second temps énoncez la proposition $Non(P)$, a l'aide de ces mêmes quantificateurs.

indication : *utilisez l'indication du début de l'énoncé.*

5.1.3 Exercice 03 : Distributivité

Soit E, F et G 3 ensembles.

Démontrez que : $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.

indications : *revenez a la définition de l'union et l'intersection, puis effectuez une double inclusion.*

5.1.4 Exercice 04 : Distributivité

Soit E, F et G 3 ensembles.
Démontrez que : $E \cup (F \cap G) = (E \cup F) \cap (E \cup G)$.
indications : *revenez a la définition de l'union et l'intersection, puis effectuez une double inclusion.*

5.1.5 Exercice 05

Soit E, un ensemble et F et G 2 sous-ensembles de E, c'est a dire que : $F \subseteq E$ et $G \subseteq E$.

Pour rappel, *on note :* $\overline{F} = \{x \in E | x \notin F\}$ *et* $\overline{G} = \{x \in E | x \notin G\}$.

En partant de l'hypothèse que : $G \subseteq F$ démontrez que $\overline{F} \subseteq \overline{G}$.

5.1.6 Exercice 06

Soit A et B, 2 ensembles : démontrez que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
indication : *effectuez une double inclusion.*

5.1.7 Exercice 07

Soit A et B, 2 ensembles : démontrez que : $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$.
indication : *effectuez une double inclusion.*

5.1.8 Exercice 08

$A =]0; 6] \cap [2; 4[$
Explicitez A !

5.1.9 Exercice 09

$A = [1; 5[\cap]3; 6]$
Explicitez A ! (sous forme d'intervalle)

5.1.10 Exercice 10

$A = [2 : 10] \subseteq \mathbf{R}^+$
Explicitez $\overline{A}$, a l'aide de l'opérateur $\cup$ *(le complémentaire de A dans $\mathbf{R}^+$).*
indications : *exprimez $\mathbf{R}^+$ sous forme d'intervalle.*
faire un dessin peut grandement clarifié la situation.

5.1.11 Exercice 11

Résoudre dans $\mathbf{R}$:

$$x^2 - 1 = 0$$

5.1.12 Exercice 12

Résoudre dans $\mathbf{R}^+$:

$$x^2 - 1 = 0$$

5.1.13 Exercice 13

Résoudre dans $\mathbf{R}$:

$$x^2(x^3 + 9) = 0$$

5.1.14 Exercice 14[Lien avec la géométrie]

Nous sommes dans $\mathbf{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2, \text{ considérons : } a((x, y)) = max(|x|, |y|)$$

La fonction max, renvoie le plus grand de ses arguments.
exemple : $max(2, 5) = 5$
exemple : $max(2, -7) = 2$

La fonction || (« **fonction valeur absolue** »), transforme tous nos nombres en nombres positifs :

$$\forall x \in \mathbf{R} :$$

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ si x} < 0 \\ x \text{ sinon} \end{cases}$$

Ainsi : $max(|2|, |-7|) = max(2, 7) = 7$.
1) Résolvez dans R $|x| = 1$.
2) Résolvez dans $\mathbf{R}^+$ $x \leq 1$, **en explicitant** S **(l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle).**
3) Résolvez dans R $|x| \leq 1$, **en explicitant** S **(l'ensemble des solutions sous forme d'intervalle).**
4) Résolvez dans $\mathbf{R}^2$ $a((x, y)) = 1$.
5) En s'inspirant de l'exemple du cercle dans le chapitre 3, résoudre dans $\mathbf{R}^2$ $a((x, y)) \leq 1$, **puis dessinez** S.

5.1.15 Exercice 15[Programme du Maximum]

Écrire un script *Python* qui aura pour but de parcourir une liste de nombres, puis d'afficher le nombre maximum qu'elle contient.

5.1.16 Exercice 16[Programme du Maximum 2]

Écrire un script *Python* qui aura pour but de parcourir une liste de nombres, puis d'afficher l'indice du nombre maximum qu'elle contient.

5.1.17 Exercice 17

Écrire un script *Python* qui aura pour but de créer une liste de tous les nombres pairs entre 0 et 200.

indication : *Vous pourriez vous servir de la fonction range, pour générer une première liste qu'il vous suffirait de filtrer par la suite.*

5.1.18 Exercice 18

Écrire un script *Python* qui aura de compter le nombre de "a" dans "abdgaakhukaijaaaalhuaagukcaakiali".

Correction 0001

5.2 Correction 0001

5.2.1 Exercice 01

Soit $E \subseteq \mathbf{R}$. Soit $M \in \mathbf{R}_+^*$.
« E **est borné supérieurement** », $\implies \forall x \in E \; x < M$.

5.2.2 Exercice 02

En logique (bien que cela paraisse contre intuitif), pour inverser le sens d'une assertion, il nous suffit d'inverser $\forall$ et $\exists$. Les $\forall$ deviennent des $\exists$ et les $\exists$ deviennent des $\forall$.

a) :

P : « $\exists x \in E \mid x = 9$ »

b) :

P : « $\forall x \in E \mid x \neq 9$ ». Traduction : « Il n'existe aucune boule portant le numéro 9 dans la boite. ».

5.2.3 Exercice 03 : Distributivité

Soit E, F et G 3 ensembles.
Nous voulons démontrer que : $E \cap (F \cup G) = (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
Utilisons la méthode de la : ***Double inclusion*** !
$\forall x \in E \cap (F \cup G) \implies$

$$\begin{cases} x \in E \\ \text{et } x \in F \cup G \end{cases}$$

——**Sens 01**——
$\forall x \in E \cap (F \cup G) \implies x \in F \cup G$, donc :

— Si $x \in F \implies x \in (E \cap F)$ (car quoi qu'il arrive $x \in E$, donc il est dans E et F a la fois. Donc par définition $x \in (E \cap F)$.

— Si $x \in G \implies x \in (E \cap F)$ (car quoi qu'il arrive $x \in E$, donc il est dans E et F a la fois. Donc par définition $x \in (E \cap F)$.

En conclusion : $\forall x \in E \cap (F \cup G)$, $x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
$\implies$ **par définition :** $E \cap (F \cup G) \subseteq (E \cap F) \cup (E \cap G)$.
——**Sens 02**——
$\forall x \in (E \cap F) \cup (E \cap G) \implies x \in (E \cap F)$ ou $(E \cap G)$.

— Si $x \in (E \cap F)$, $x \in E$ et $x \in F$.

$x \in F \implies x \in (F \cup G)$.

Or $x \in E \implies E \cap (F \cup G)$ (car $x \in E$ et $x \in (F \cup G)$).

— Si $x \in (E \cap G)$, $x \in E$ et $x \in G$.

$x \in G \implies x \in (F \cup G)$.

Or $x \in E \implies E \cap (F \cup G)$ (car $x \in E$ et $x \in (F \cup G)$).

En conclusion : $\forall x \in (E \cap F) \cup (E \cap G)$, $x \in E \cap (F \cup G)$.

$\implies$ **par définition :** $(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cap (F \cup G)$.

——**Conclusion**——

* $E \cap (F \cup G) \subseteq (E \cap F) \cup (E \cap G)$

* $(E \cap F) \cup (E \cap G) \subseteq E \cap (F \cup G)$

Par double inclusion, on a : $(E \cap F) \cup (E \cap G) = E \cap (F \cup G)$.

Troisième partie

Initiation a « l'analyse fonctionnelle »

5.3 Rappels et Notations

5.3.1 logique du théorème

Définition 5

un théorème est un objet mathématique composé d'une liste d'hypothèses $H = [h_1, h_2, ..., h_n]$ et d'une ou plusieurs conclusions $C = [c_1, c_2, ..., c_k]$.
Cela dépend de la formulation du théorème mais bien souvent : si $\text{Et}(h_1, h_2, ..., h_n) = \text{Vraie}$ alors l'on peut appliquer $c_1, c_2, ..., c_k$.

Subtilités :
Il faut particulièrement faire attention a la formulation de nos théorèmes. Celle-ci peut être liée soit par une implication, soit par une équivalence. Il faut donc différencier les « **si** » et les « **si et seulement si** ».
Plus encore, avant d'appliquer un théorème il faut vérifier si ses hypothèses se sont réalisées.

5.3.2 définition d'un ensemble

Définition 1

En mathématiques, un ensemble désigne un rassemblement d'objets distincts.
Il faut les voir comme des tiroirs plus ou moins gros, ou le mathématicien y place des objets plus ou moins semblables.

L'on possède plusieurs façons de décrire formellement des ensembles.
Cette introduction se fait généralement de la sorte :

$$E = \{\text{ énumération des éléments qui le compose }\}$$
ou
$$E = \{\text{ conditions pour appartenir a l'ensemble }\}$$

exemples :

— $E = \{0, 1, 2, 3\}$, ici E ne contient que 4 éléments qui sont : 0,1,2 et 3.
— $E = \{n | n \in \mathbf{N}, \text{ tel que } n > 8\}$, ici E contient 9, 10, 11, 12 et tous les entiers naturels supérieur ou égal a 9.

Ensembles Produit (Produit Cartésien)

Définition 1

$\forall n \in \mathbf{N}$.
Soit $H = (E_1, E_2, ..., E_n)$ une liste de n ensembles.

$E = E_1 \text{x} E_2 \text{x} ... \text{x} E_n$ est l'ensemble des n-uplets tel que si $(x_1, x_2, ..., x_n) \in E$ alors $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ $x_i \in E_i$.
Cette opération est nommée : **Produit Cartésien**.

Notations

$\forall n \in \mathbf{N}$.
Soit E un ensemble.

On note E^n, l'ensemble des n-uplets de E (tous les éléments du n-uplet doivent appartenir a E.

5.3.3 Associativité

Il y a deux règles d'associativité dans $\mathbf{R}$, deux règles pour ses 2 opérateurs : $+$ et x (voir **abstraction 02**).

— **Associativité de $+$** :
$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, alors $x + y + z = x + (y + z) = (x + y) + z$.
En effet :

$$1 + 2 + 3 = 1 + \overbrace{5}^{=2+3} = \underbrace{3}_{=1+2} + 3 = 6$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe la façon dont nous sommons nos 3 termes, le résultat sera identique.

— **Associativité de x** :
$\forall (x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, alors $x \times y \times z = x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.
En effet :

$$1 \times 2 \times 3 = 1 \times \overbrace{6}^{=2\times 3} = \underbrace{2}_{=1\times 2} \times 3 = 6$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe la façon dont nous multiplions nos 3 termes, le résultat sera identique.

5.3.4 Commutativité

Il y a deux règles de commutativité dans $\mathbf{R}$, deux règles pour ses 2 opérateurs : + et x (voir **abstraction 02**).

— **Commutativité de +** :
$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors $x + y = y + x$.
En effet :

$$1 + 2 = 2 + 1 = 3$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe l'ordre dans lequel nous sommons nos 2 termes, le résultat sera identique.

— **Commutativité de +** :
$\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, alors $x \times y = y \times x$.
En effet :

$$1 \times 3 = 3 \times 1 = 3$$

Notre règle nous dit simplement, que peut importe l'ordre dans lequel nous multiplions nos 2 termes, le résultat sera identique.

Chapitre 6

Logique Ensembliste et Vecteurs (Approfondissement des n-uplets)

6.1 Concept d'espace vectoriel

L'on reprends notre analogie. L'on se munit d'une Charlotte très intelligente et de 2 bacs a jouets pleins.

Nous avons précédemment aborder les notions fondamentales de la « **logique ensembliste** ».
Ceci fait, nous pouvons définir convenablement un ensemble, quantifier nos objets(variables) mathématiques.

Nous pouvons faire une remarque plus générale :
« les termes de *« vecteurs »* et ou de *« scalaires »*, sont entrés dans le langage courant (et bien souvent sont utilisés a tort et a travers) ».
Néanmoins nous ne pouvons pas nous contenter de vagues intuitions vis a vis de nos objets mathématiques.
Il nous faut donc comprendre ces concepts a l'aune de nos nouvelles connaissances.

Commençons !

Définition 01

Un « **scalaire** », n'est ni plus ni moins qu'un réel (ou un *Complexe*).

Ce terme est souvent utilisé pour différentier une variable classique (*réelle*), d'un vecteur qui ne l'est pas (en général il n'est pas un *réel*).

La définition d'un *« espace vectoriel »* (ensembles qui définissent les *« vecteurs »*), peut être assez complexe et abstraite (et pour cause, il nous manque certaines notions basiques d'algèbre[1]).

K-Espace Vectoriel

Un « **K-Espace Vectoriel** » E, est un ensemble composé de plusieurs de plusieurs éléments.
— K, l'espace de nos « **scalaire** » (inclus dans l'ensemble des *réels* ou des *complexes*), tel que : $\forall \lambda \in K$ et $\forall x \in E$ $\lambda \times x \in E$.
Cette loi $\times$ est appelée : « **loi de composition externe** », ou « **multiplication par un scalaire** ».
— $\forall (x, y) \in E^2$, $x + y = y + x \in E$.
Cette loi $+$ est appelée : « **loi de composition interne** », ou « **somme vectorielle** ».
— La loi $\times$ est *distributive* sur $+$: $\forall \lambda \in K$ et $\forall (x, y) \in E^2$, $\lambda \times (x + y) = \lambda \times x + \lambda \times y$
— $\exists e \in E$, tel que : $\forall x \in E$ $x + e = e + x = x$
Cet élément est appelé « **élément neutre** » (c'est en quelque sorte la généralisation du 0 pour les vecteurs).

— Cette définition est tres abstraite et n'est que très peu utilisée (il n'est donc pas nécessaire de l'apprendre par cœur), une définition alternative que nous verrons ci-dessous lui ait préférable.
— Il faut impérativement comprendre les lois $+$ et $\times$, comme des généralisation de : *l'addition* et de la *multiplication* de *réels* sur des objets plus abstraits.
— L'« **élément neutre** », n'est elle aussi rien de plus qu'une généralisation de 0, sur des objets plus abstraits.
— Les éléments de E, sont appelés des « **vecteurs** »(ou des « **points** ») de E.

K-Espace Vectoriel(Pseudo définition)

Un « **K-Espace Vectoriel** » E, est un ensemble composé de plusieurs de plusieurs éléments.
— K, l'espace de nos « **scalaire** » (inclus dans l'ensemble des *réels* ou des *complexes*), tel que : $\forall \lambda \in K$ et $\forall (x, y) \in E^2$.
  * $\lambda \times x + y \in E$
  * E possède un « **élément neutre** »

— Cette définition est préférable, en se sens qu'elle est moins abstraite, néanmoins elle n'est pas la vraie définition d'un « **K-Espace Vectoriel** ».

1. Notions abordées en première année de classe préparatoire.

exemple :

$\{0\}$, le « **singleton** 0 »(l'ensemble qui ne contient que 0), est un $\mathbf{R}$-Espace Vectoriel.
En effet : $\forall x \in \{0\}$, $x = 0 \iff$.
$\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall (x, y) \in \{0\}^2$, $\overbrace{\lambda \times x}^{=0} + \overbrace{y}^{=0} = 0$
Et 0 est l'« **élément neutre** » et appartient par définition a $\{0\}$.

exemple :

$\mathbf{R}$(l'ensemble des *réels*), est un $\mathbf{R}$-Espace Vectoriel.
$\forall \lambda \in \mathbf{R}$, $\forall (x, y) \in \mathbf{R}^2$, $\lambda \times x + y \in \mathbf{R}$, par *stabilité* de $\mathbf{R}$.
Et 0 est l'« **élément neutre** » (car $\forall x \in \mathbf{R}$, $x + 0 = 0 + x = x$) et $0 \in \mathbf{R}$.

exemple :

$\mathbf{N}$(l'ensemble des *entiers naturels*), n'est pas un $\mathbf{R}$-Espace Vectoriel, car $0,5 \in \mathbf{R}$ et $1 \in \mathbf{N}$, or $0,5 \times 1 = 0,5$ et $0,5 \notin \mathbf{N}$.

exemple :

$\mathbf{N}^*$(l'ensemble des *entiers naturels supérieurs a* 0), n'est pas un $\mathbf{R}$-Espace Vectoriel, car $0 \notin \mathbf{N}^*$.

6.1.1 Et les vecteurs dans tout cela ?

Mais qu'en est-il de nos « **vecteurs** », de quoi faut-il se rappeler ?
La relation dont il faut se souvenir est celle-ci : $\lambda \times x + y \in E$.
Tous les vecteurs sont construits pour respecter cette relation.
Nous ne nous attarderons pas dessus, néanmoins : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{R}^n$(l'ensemble des n-uplets de $\mathbf{R}$), est un « **R-Espace Vectoriel** » et n est appelé sa « **dimension**[1] ».
Intuitivement la « **dimension** » d'un espace, représente le nombre *« d'axes »* qui portent l'ensemble des « **vecteurs** » de l'espace en question.
Typiquement $\mathbf{R}$, n'est porté que par un seul *axe* (la droite des *réels*), ou encore le plan $\mathbf{R}^2$, est porté par deux *axes* (l'axe des ordonnés et l'axe des abscisses).
Nous, humains pensons vivre dans un espace a trois dimensions[2] (ou quatre si l'on considère le temps comme une dimension spatiale), et il est donc très ardue pour nous autre d'imaginer des espaces de dimensions supérieures a 3. Néanmoins *mathématiquement*, cela ne pose aucun soucis.

---

a. NB : d'autres *espaces vectoriels* obéissent a cette notion de *« dimensions »*. Cela étant dit y passer trop de temps nous mènerait a des notions trop poussées.

b. Certains modèle physiques, comme ceux de la « **Théorie des Cordes** », considèrent que nous vivons dans un espace a plus de trois dimensions spatiale.

Notations

$$\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.1}$$

6.1.2 Règles basiques de calculs sur $\mathbf{R}^n$

Nous l'avons vu, les objets d'un « K**-Espace Vectoriel** », sont soit nommés des « **vecteurs** » de E, soit des « **points** » de E.
Ces deux appellations ne sont pas anodines, car elles correspondes toutes deux a des représentations graphiques différentes (respectivement des translations dans l'espace : $\vec{v}$, ou des points dans l'espace : v).
Cela ne change en rien nos calculs fondamentaux, néanmoins nous pouvons passer d'une interprétation a une autre, pour tirer des conclusions qui paraissent plus *triviales* (évidentes) sous le premier point de vue(ou respectivement le deuxième), que sous le second(ou respectivement le premier).

$$\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n \qquad \forall Y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbf{R}^n$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{6.3}$$

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}$$

$$\lambda \times X + Y = \begin{bmatrix} \lambda \times x_1 + y_1 \in \mathbf{R} \\ \lambda \times x_2 + y_2 \in \mathbf{R} \\ \vdots \\ \lambda \times x_n + y_n \in \mathbf{R} \end{bmatrix} \tag{6.4}$$

La « **somme vectorielle** » et la « **multiplication par un scalaire** » sur $\mathbf{R}^n$, se font *termes a termes* sur les différentes coordonnées de nos vecteurs.

exemple :

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \iff u - v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

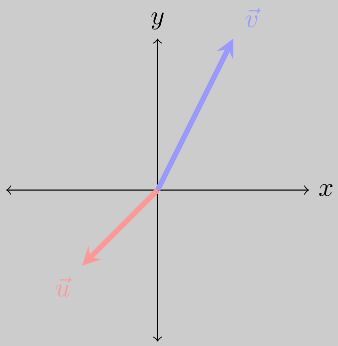
6.1.3 Représentations Graphiques et Interprétations sur $\mathbf{R}^2$ ou $\mathbf{R}^3$

Nous l'avons dit, un « **vecteur** » de $\mathbf{R}^n$, peut être vu comme une *translation* sur $\mathbf{R}^n$.
$\forall \vec{v} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$

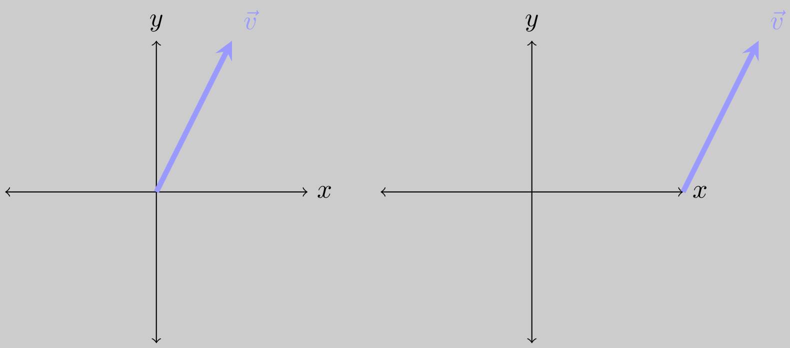
$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

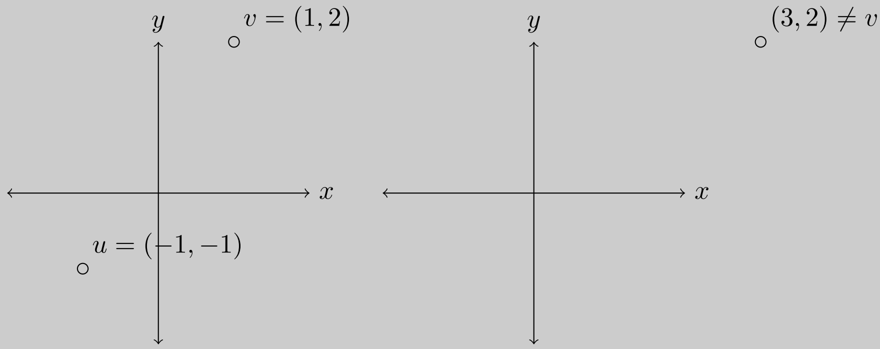


Dans cette représentation, les coordonnées ne représentent pas la position de l'origine de la flèche dans le plan (quelque soit la position de la flèche dans le plan, ses coordonnées ne changeront pas). Les coordonnées représentent l'orientation des flèches.
Les deux représentations ci-dessous représentent exactement les mêmes vecteurs :



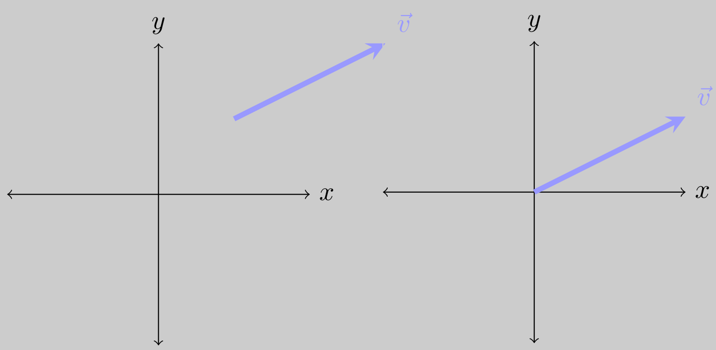
La deuxième interprétation de nos « **vecteurs** », consiste a les considérés comme des *« points*[1] *»* du *« plan*[2] *»*. Il y a unicité du *point* dans *l'espace*.

a. Les coordonnées du vecteur caractérisant la position du point
b. Notre *« espace vectoriel »*



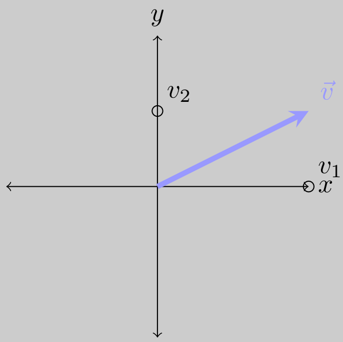
6.1.4 Pythagore

Précédemment, nous avons brièvement aborder le fait que : nous puissions passer d'une *interprétation graphique* a une autre (de $\vec{v}$ a v, ou de v a $\vec{v}$), pour en tirer des conclusions qui restent valables indépendamment de la dite *représentation graphique* choisie. Certaines propriétés paraissent plus évidentes sous une forme que sous une autre et ce tour de passe passe permet de simplifier nos démonstrations et a pour effet de les rendre plus intuitives.
La chose est visiblement manifeste lorsque l'on s'intéresse a la *longueur* d'un vecteur $\vec{v}$ (on appelle cette longueur la « **norme** » du vecteur $\vec{v}$, notée : $\|\vec{v}\|$, ou (sous la représentation ponctuelle) : $\|v\|$).
Ces quantités sont non seulement singulièrement les mêmes, mais doivent impérativement satisfaire certaines propriétés (tel que la nécessite d'être toujours positives : en effet l'on ne veut pas de longueurs négatives).
En deux dimensions notre *« Plan (*$\mathbf{R}^2$*) »*, est muni d'un *« repère orthonormé(nos deux axes x et y) »*.
L'*« axe des abscisses »* et l'*« axe des ordonnées »*, respectivement x et y, forment un angle droit entre eux.
De même, l'on peu interpréter notre vecteur comme une translation (dont on peut changer l'origine sans en modifier les coordonnées).
Nous n'allons pas nous gêner et placer *l'origine de notre vecteur* a l'**« origine de notre *repère*(le centre) »**.



A présent notre vecteur forme un angle avec notre *« axe des abscisses »*, ni ses coordonnées, ni sa *longueur* n'ont étés modifiées.
Nous possédons un triangle rectangle, dont l'« **hypoténuse** », n'est plus, ni moins que notre vecteur $\vec{v}$ et dont la longueur de ses différents cotés nous ait donner par ses coordonnées (sur ses axes respectifs).

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \tag{6.9}$$



Nota Béné

Les coordonnées v_1 et v_2, sont respectivement nommées : « **projection orthogonale de $\vec{v}$ sur l'axe x** »(pour v_1) et « **projection orthogonale de $\vec{v}$ sur l'axe y** »(pour v_2).

A présent que les longueurs sont connues et que nous avons pu caractériser notre triangle rectangle, nous pouvons appliquer le **théorème de Pythagore** sur notre *norme*(dans notre espace a 2 dimensions) :

$$\|\vec{v}\|_2^2 = v_1^2 + v_2^2 \tag{6.10}$$

Donc :

$$\|\vec{v}\|_2 = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \tag{6.11}$$

En dimensions supérieures nous souhaitons conserver ces mêmes propriétés :

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \tag{6.12}$$

Norme

La « **norme euclidienne n** » $\|\vec{v}\|_n$ de notre vecteur $\vec{v}$, est le *scalaire* défini de la sorte :

$$\|\vec{v}\|_n = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + ... + v_n^2} \tag{6.13}$$

Notez bien qu'il s'agit du caractère *orthogonal* de notre repère qui nous a permit de construire notre norme ainsi.

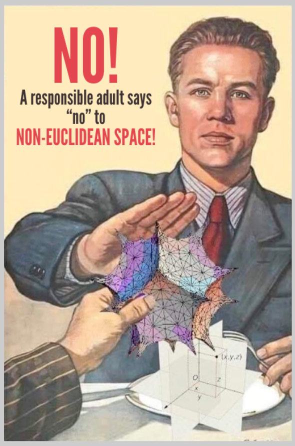
6.1.5 Petit aparté

Nous venons de le dire, le caractère *orthogonal* de notre repère a été essentiel pour construire ce type de norme (car il nous fallait repérer un angle droit, pour notre triangle).
La mathématique possède un domaine, la : « **Topologie**[1] », qui définie proprement la notion de *normes* sur un *espace vectoriel*.
Elles sont nombreuses, si nombreuses, que la *norme euclidienne* (qui nous parait si intuitive a nous autres humains), peut apparaitre comme un choix totalement arbitraire.
Comment savoir qu'elle est la bonne ? Et plus encore, dans notre réalité physique, considère-t-on toutes nos hypothèses comme satisfaites pour pouvoir appliquer le fameux : *théorème de Pythagore* ?
La réponse est oui de façon très locale et non si ça ne l'est pas, on en revient a notre « 5^e **postulat d'Euclide** ».
Vous pourriez penser que tout cela n'est qu'un énième *délire de mathématicien*, mais cette idée est a la base de le « **Relativité Général d'Einstein** [2] » : les *distorsion de l'espace* sont des modifications de notre *norme euclidienne*.

a. La branche des mathématique qui étudie les *formes* dans les espaces vectoriels

b. Pour de plus amples informations : `https://youtu.be/E5LvA8FHBxs?si=hF0A3UtB9xwq-DnI`

Si localement les distances peuvent nous paraitre euclidiennes il n'en est rien.
Nous revenons donc a notre notion : « **d'espaces non-euclidien** ».



6.1.6 Propriétés

Colinéarité entre deux vecteurs

— Soit E, un $K-$espace vectoriel.
— Soit $\forall (X,Y) \in E^2$, deux vecteurs de E.
— X et Y sont dit « **colinéaires** », si et seulement si $\exists \lambda \in K$, un *scalaire* tel que $X = \lambda Y$.

— Autrement dit si on est dans $\mathbf{R}^n$:

$$X = \lambda Y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

— Donc $\forall i \in [|1,n|]$, $x_i = \lambda \times y_i$.

Théorème

Hypothèses :
— $(X,Y) \in (\mathbf{R}^n)^2$, 2 vecteurs colinéaires tel que : $X = \lambda Y$, avec $\lambda \in \mathbf{R}$

Conclusions :
— $\|X\|_n = |\lambda| \times \|Y\|_n$

Démonstration :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{6.15}$$

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{6.16}$$

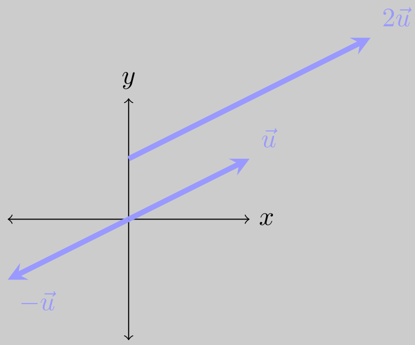
$$X = \begin{bmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \\ \vdots \\ \lambda y_n \end{bmatrix} \tag{6.17}$$

$$\|X\|_n = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2 + ... + (\lambda y_n)^2} = \sqrt{\lambda^2 y_1^2 + \lambda^2 y_2^2 + ... + \lambda^2 y_n^2} \tag{6.18}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \times (y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2)} = \sqrt{\lambda^2} \times \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2} = \sqrt{\lambda^2} \times \|Y\|_n = |\lambda| \times \|Y\|_n \tag{6.19}$$

On considérera comme admis (pour l'instant), que : $\sqrt{\lambda^2} = |\lambda|$.

exemple de vecteurs colinéaires



Remarque

Par définition la **norme euclidienne** dans $\mathbf{R}$ (car $\mathbf{R} = \mathbf{R}^1$), est : $\|\vec{v}\|_1 = \sqrt{v_1^2} = \sqrt{v^2}$.
Or, la façon naturelle de mesurer les *longueurs* de nos nombres réels, reste la *« valeur absolue »* (qui *ramène* tous les nombres réels sur $\mathbf{R}^+$).
Donc : $\forall v \in \mathbf{R}$, $|v| = \|v\|_1 = \sqrt{v^2} \in \mathbf{R}^+$.
La **« valeur absolue »**, n'est donc que la **norme euclidienne** sur $\mathbf{R}$.
De la même façon, nous pouvons voir la chose dans le sens opposé : *les normes ne sont que des généralisations de notre valeur absolue sur des espaces vectoriels.* D'une certaine façon, les **normes** *ramènent nos vecteurs sur* $\mathbf{R}^+$.

Combinaison linéaire

— E, un **K-espace vectoriel**
— $V = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, ..., \vec{v_n}) \in E^n$
— $A = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in K^n$
— $\vec{w} = \alpha_1\vec{v_1} + \alpha_2\vec{v_2} + ... + \alpha_n\vec{v_n}$

— $\vec{w}$, est dit une **« combinaison linéaire de V »**

Distance

La **« distance euclidienne n »** d de deux vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{u}$, est le *scalaire* défini de la sorte :

$$d(\vec{v}, \vec{u}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|_n = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + ... + (u_n - v_n)^2} \tag{6.20}$$

Comme son nom l'indique la : **« distance euclidienne n »**, calcul la distance qui sépare $\vec{v}$ de $\vec{u}$, dans notre espace $\mathbf{R}^n$.
Plus généralement pour toute norme $\|\|$, nous définissons la distance, par rapport a cette norme, la quantité : $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$

Cette distance correspond dans les faits a la norme d'une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.
Cette dernière est intéressante par sa capacité a *ramener* nos vecteurs sur la droite des réels positifs. Néanmoins la norme perds certaines propriétés utiles, tel que la *linéarité*.
Le « **produit scalaire**[1] », vient en quelque sortes pallier ce manquement.
Comme pour les **normes**, les « **produits scalaire** » sont légion en mathématiques et rentre dans le champ d'étude des « **espaces euclidiens** » (ou encore des *« espaces préhilbertiens*[2] *»*)
Nous n'allons pas nous attardés sur la définition d'un « **produit scalaire** ». Il faut simplement retenir que ce dernier caractérise la notion d'« **orthogonalité** » entre vecteurs[3].

a. « **produit scalaire** », car il ramène nos vecteurs sur l'espace K.

b. `https://fr.wikipedia.org/wiki/Espace_pr%C3%A9hilbertien`, Soit E, un K-espace vectoriel, muni du produit scalaire noté $\langle\rangle$. Alors E est dit *« préhilbertien »*.

c. Nous voulons que le produit vectoriel entre deux vecteurs orthogonaux (la généralisation de la perpendicularité sur des espaces plus abstraits), soit nul.

Produit Scalaire

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbf{R}^2)^2$, on défini le « **produit scalaire usuel** », de la sorte :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \times \|\vec{v}\|_2 \times cos(\vec{u}, \vec{v}).$$

$cos(\vec{u}, \vec{v})$, étant l'angle formé par les deux vecteurs, dont les deux origines ont étés confondues (i.e. les vecteurs ont étés mis bout a bout).

De façon plus générale $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in (\mathbf{R}^n)^2$, on défini le « **produit scalaire usuel** », de la sorte :

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1 \times v_1 + u_2 \times v_2 + ... + u_n \times v_n,$$ pour des raisons d'orthogonalité de notre repère.

Quelques remarques

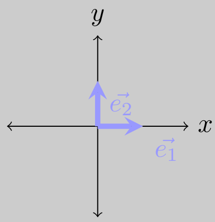
En comprenant cette définition, 3 propriétés nous viennent immédiatement en tête.
Premièrement : $\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} = \|\vec{u}\|_n$.
Deuxièmement : si l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est de 0 (nos vecteurs sont *colinéaires*), alors : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \|\vec{u}\|_2 \times \|\vec{v}\|_2$
Troisièmement : si l'angle formé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, est de 90° (nos vecteurs sont *orthogonaux*), alors : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ (notre caractérisation de la notion d'« **orthogonalité**[1] » entre vecteurs).
Quatrièmement : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$

a. A présent nous définirons (pour tout espace préhilbertien, doté de $\langle\rangle$) « **l'orthogonalité entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$** » de la sorte : $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$.

6.1.7 Retour sur notre notion de dimension

Nous l'avons brièvement aborder, la *dimension* de notre espace $\mathbf{R}^n$, n'est autre que n.
Notre justification était la suivante : $\mathbf{R}^n$, peut être représenté par un repère a n axes, il est alors intuitif d'admettre que $\mathbf{R}^n$ possède n, *dimensions*.
Néanmoins cette notion de *« dimensions »* (qui n'est pas universelle, il faut bien le rappeler)[1], cache une compréhension plus profonde qu'il n'y parait.
Le problème est le suivant : « nous possédons un K-espace vectoriel E, pouvons nous trouver une unique famille de vecteurs qui permettraient de caractériser l'entièreté de notre espace ? ».
En d'autres mots : « pouvons nous trouver une famille minimale V de vecteurs de E, tel que tous les autre vecteurs de E, ne soient que des combinaisons linéaires de V ? ».
Pour que cette famille soit minimale (au sens ou elle ne contienne que le minimum possible de vecteurs), il faut que les vecteurs qu'elle contient ne soient pas eux même des combinaisons linéaires des autres vecteurs de la famille.
Cette famille que nous nommons : **« base de E »**, contient toute les briques de base, qui nous permettent a terme de reconstruire n'importe quel vecteur de espace E.
Mathématiquement, nous voulons $\beta = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}, ...)$, des vecteurs de E, tel que $\forall i, j\ \langle \vec{e_i}, \vec{e_j} \rangle = \overbrace{\delta_{i,j}}^{=1 \text{ si } i=j,\ 0 \text{ sinon}}$ [2].
Si tout vecteur de E est une combinaison linéaire de β, β est dite **« base de E »** et nous sommes amenés a dire que β engendre E.
Si $|\beta| = n$ (si β, ne contient pas un nombre infini d'éléments), n est appelée *« dimension de E »*.
Sur $\mathbf{R}^2$, cette *base*, est toute simple :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$



a. Tous les K-espaces vectoriels ne possèdent pas nécessairement de dimensions.

b. « **Le symbole de Kronecker** ».

Bilinéarité du Produit scalaire

Hypothèses :
— E, un K-espace vectoriel
— $\forall \lambda \in K$
— $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$
Conclusions :
— $\langle \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{w}, \lambda \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u} \rangle + \langle \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v} \rangle$

La chose peut être résumée en 3 points :
— $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle$
— $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in E^2$, $\langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$
— $\forall (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) \in E^3$, $\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle$
Nous avons omis la définition d'un produit scalaire (en tant qu'objet mathématique), or la bilinéarité en est un attribut fondamental.
Néanmoins la chose peut être démontrer pour le *produit scalaire usuel sur* $\mathbf{R}^n$*, de la façon suivante :*

$$\langle \lambda \vec{u} + \vec{v}, \vec{w} \rangle = (\lambda u_1 + v_1) \times w_1 + (\lambda u_2 + v_2) \times w_2 + ... + (\lambda u_n + v_n) \times w_n = \lambda u_1 \times w_1 + v_1 \times w_1 + \lambda u_2 \times w_2 + v_2 \times w_2 + ... + \lambda u_n \times w_n + v_n \times w_n = \lambda u_1 \times w_1 + \lambda u_2 \times w_2 + ... + \lambda u_n \times w_n + v_1 \times w_1 + v_2 \times w_2 + ... + v_n \times w_n = \lambda (u_1 \times w_1 + u_2 \times w_2 + ... + u_n \times w_n) + (v_1 \times w_1 + v_2 \times w_2 + ... + v_n \times w_n) = \lambda \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

Orthogonalité d'un vecteur vis a vis d'un plan

— E, un K-espace vectoriel
— $P \subseteq E$, un K-espace vectoriel
— $\overrightarrow{u} \in E$
— $\forall \overrightarrow{v} \in P$, $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$

— $\overrightarrow{u}$, est orthogonale a P
— On généralise la chose a des plans : 2 plans P_1 et P_2 sont orthogonaux entre eux, si le produit scalaire entre tous leurs vecteurs est nul.

Théoreme

Hypothèses :
— E, un K-espace vectoriel
— $P \subseteq E$, un K-espace vectoriel
— $e = (e_1, ..., e_n)$, la base finie de P
— $\overrightarrow{u} \in E$
— $\forall i \in [|1, n|]$, $\langle \overrightarrow{u}, e_i \rangle = 0$
Conclusions :
— $\overrightarrow{u}$, est orthogonale a P

La base e, décrit entièrement P.

Théoreme

Hypothèses :
— E, un K-espace vectoriel
— $P_1 \subseteq E$, un K-espace vectoriel
— $P_2 \subseteq E$, un K-espace vectoriel
— $e = (e_1, ..., e_n)$, la base finie de P_1
— $f = (f_1, ..., f_k)$, la base finie de P_2
— $\forall (i, j) \in [|1, n|] \times [|1, k|]$, $\langle e_i, e_j \rangle = 0$
Conclusions :
— P_1, est orthogonale a P_2

Les bases (e, f), décrivent entièrement P_1 et P_2.

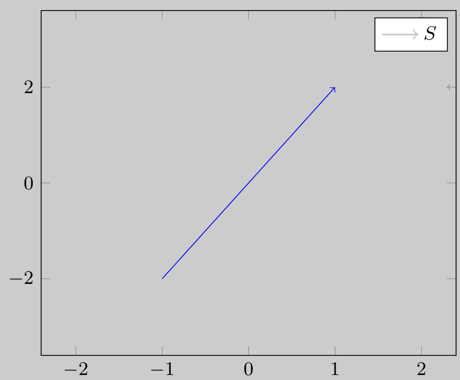
6.2 Faire jouer les ensembles entre eux

Bien, nous pouvons a présent proprement définir nos *objets* d'étude, par le biais de la théorie des ensembles, néanmoins nous (mathématiciens) ne nous contentons pas classer les objets, nous aimons de temps a autre faire jouer ces différents ensembles entre eux.
Pour ce faire nous possédons nombres d'outils a notre disposition.
Prenons le cas de l'équation :

$$\text{Résoudre dans } \mathbf{R}^2,$$

$$2x - y = 0$$

La résolution de cette équation fait correspondre a $\mathbf{R}^2$, un ensemble S.
C'est la formule algébrique $(2x - y = 0)$ qui définie le lien et la forme géométrique de S.



L'être humain est un animal qui adore classer les choses. Cette tendance apparait de façon inconsciente chez la plupart d'entre nous, néanmoins chez le mathématicien (moderne) il s'agit la d'un démarche consciente et tout a fait assumée[1].
Seulement il faut garder en tête que ces ensembles, ces cases, ces catégories ne sont que des constructions mentales (que celles-ci aient étés ou non construites par des mathématiciens) dont la réalité ce fiche pas mal la plupart du temps. C'est pour cette raison qu'il est difficile de classer les objets de la vie réelle (de façon rigoureuse et avec l'honnêteté intellectuelle qui est du a cette tache), car ses catégories n'ont lieux d'être qu'a l'intérieur d'un cerveau.
Classer un objet (construire un ensemble), c'est avant tout donner une définition aux objets qui la compose.
En ce sens comment définir l'ensemble des chats ? Faut-il nécessairement qu'un chat ait des poils ? Un lynx est-il un chat ?[2]
Comment définir l'être humain ou tout autre espèce animale ? Que définie le terme de *femme* ? Est-ce la, le caractère *biologique* de son sexe (la forme de ses *gamètes*) qui la définie ou le comportement sexué et normé qu'elle *est supposée adopter* en société ? Des questions d'actualité a n'en pas douté. Ces notions de catégories n'existent que dans nos têtes, car notre cerveau fonctionne ainsi et en se sens chercher a définir des catégories revient bien souvent a chercher de l'ordre la ou il n'y en a pas. Néanmoins dans le monde des idée pures (dont la mathématique en est une des humble représentante) cette approche se révèle indispensable.
Nous avions précédemment aborder 2 approches.
La première consistait a énumérer tous les éléments qui le composait ($E = \{a, 0, 1, b\}$), tandis que la seconde consistait a donner une règle logique qui filtrerait les éléments d'un ensemble déjà connu ($F = \{x \in E | x \in \mathbf{R}\} = \{0, 1\}$, ou encore $]0, 1[= \{x \in \mathbf{R} | 0 < x < 1\}$).
Nous avons construit nos K-espaces vectoriel de telle sorte a pouvoir définir ces familles (très spéciales) de vecteurs que l'on nome : *base* et qui représentent (dans les faits) une façon nouvelle de définir des ensembles (plus particulièrement des espaces vectoriels).
Reprenons notre analogie avec la petite Charlotte et ses nombreux jouets. Parmi cette collection infini de jouets, se trouvent des Légo (que nous pourrions d'une certaine façons considérer comme un espace vectoriel). La question se pose donc : **« parmi ces Légos aux combinaisons quasiment infinies, comment reconnaitre un personnage Légo, d'un légo qui ne l'est pas ? »**. Nous pourrions simplement dire que tous les personnages sont constitués de briques spécifiques (une tête ou encore un bras gauche), briques qui constitueraient notre **base** de *l'espace vectoriel des personnages.*

---

a. Une remarque que l'on pourrait étendre a l'ensemble des scientifiques.
b. L'on se rends compte que la plupart du temps il nous faut faire des choix arbitraires.

6.3 Concepts fondamentaux et généralités sur les fonctions

L'idée de base d'une « **fonction** » est de pouvoir mettre les *objets* de deux ensembles (distincts ou non) en relation.
La suite est donc toute trouvée, les fonctions sont des *relations* entre objets et il nous faut donc par conséquent : un « **ensemble de départ** », un « **ensemble d'arrivée** » et (si l'on veut étudier la fonction en elle même) : la *modalité* de notre relation (bien souvent une relation algébrique).

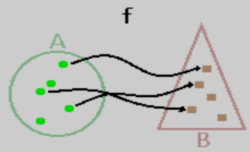
Définition 1 : la « Fonction »

Soit E un ensemble quelconque.
Soit F un ensemble quelconque.
Notons f, **l'application** définie de la sorte :

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \longmapsto f(x) \in B \end{cases} .$$

Alors f est dite **fonction** de A dans B.

— Nous avons plusieurs remarques, a commencez par celle-ci : f désigne la **fonction**, tendis que $f(x)$; désigne une valeur et n'est rien d'autre qu'une **variable** de l'ensemble F. La différence est en cela notoire.
Par exemple cela ne rime a rien de dire que : $f(x)$ est *croissante*, car il s'agit la d'une valeur fixe (qui ne varie pas).
— A est appelé : « **ensemble de départ** », tandis que B est nommé : « **ensemble d'arrivée** ».
— $\forall x \in E$, la variable x est appelée : « **variable d'entrée** » ou « **argument** », tandis que $f(x)$ est nommée : « **image** » de x par la fonction f.
— A l'inverse, $\forall y \in B$, tel que $\exists x \in A$, tel que $f(x) = y$: on peut appeler : « **antécédent** » de y, par la fonction f.
— $\forall x \in A$, f associe a x la valeur $f(x)$.



La définition ci dessus est une première façon de déclarer une **fonction**. Cependant, nous pouvons déclarer notre *application* plus simplement, de la sorte :
$\forall x \in f(x) =$ *définition algébrique de notre fonction*

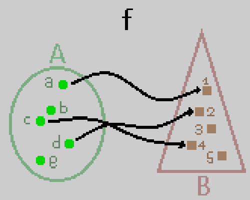
exemple :

Nous pouvons déclarer notre **fonction** f de la façon suivante :

$$f : \begin{cases} \{a, b, c, d, e\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

, la fonction qui a $x \in \{a, b, c, d, e\}$, associe $f(x)$, définie de la sorte :

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x = a \\ 2 \text{ si } x = c \\ 4 \text{ si } x = d \end{cases}$$



$f(c) = 2 \in B$ (il suffit de remplacer x, par la valeur que l'on veut lui donner, pour obtenir l'image souhaitée).

exemple :

Nous pouvons déclarer notre **fonction** g, de deux façons :

$$g : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \longmapsto \underbrace{2(x+1)}_{=g(x)} \end{cases}$$

Ou de la façon suivante, par sa formule algébrique :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ g(x) = 2(x+1)$$

Dans tous les cas : $g(4) = 2(4+1) = 2 \times 5 = 10$

exemple :

Nous pouvons déclarer notre **fonction vectorielle** $ma_{fonction}$, de la façon suivante :

$$ma_{fonction} : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ x = (x_1, x_2) \longmapsto x_1 + x_2 \end{cases}$$

exemple :

Charlotte est une personne extrêmement sérieuse et veut suivre (quoi que de façon imparfaite) le coure des personnages Légo, E, est la base de notre espace (elle quotient toutes les briques fondamentales des personnages (par exemple "tête", "bras droit" e.t.c).

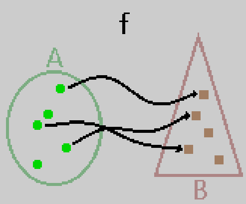
Admettons que $|E|$ = n.

$$\forall x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n, \text{ les couts unitaires de nos pièces ,}$$
$$f_{caractercost}(x) = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

En admettant que Charlotte puisse avoir l'information x sur le marcher (et a tout instant), elle pourrait ainsi calculer le cout minimum de vente d'un personnage sur le marcher (le cout de production).

Ces x, seraient alors eux même fonction du temps t.

Nous pouvons faire une remarque très pertinente sur notre premier exemple : *« les ensembles A et B, ne sont pas entièrement utilisés »*



Il y a donc des termes de A, qui n'ont pas d'images (on dit que $f(x)$, n'est **pas définie**), ou des éléments de B, qui n'ont pas d'antécédents. Il est donc bien de garder en tête que notre définition algébrique n'existe que si celle-ci a du sens vis a vis des objets qu'elle manipule.

Par ailleurs, (du a la façon dont nous avons définie les *fonctions*), pour un élément de A donné, il ne peut y avoir au plus qu'une seule image (dans son ensemble d'arrivée).

Cette propriété nous rappel simplement a notre devoir de mathématiciens, qui est : que en toute chose nous nous devons de faire preuve de prudence et de rigueur, qu'avant de vouloir institué une relation entre deux ensembles par le biais d'une définition algébrique, il faut avant tout s'assurer en préambule que cette relation est possible.

6.3.1 Petit instant notations

* **Image d'un ensemble par la fonction f :** *Soit f, une fonction quelconque, A et B, deux ensembles quelconques.*

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

— $\forall E \subseteq A \ f(E) = \{f(x) | x \in E\}$.

* **Symbole de Kronecker δ :** *Soit E, un ensemble quelconque.*

— $\forall (x, y) \in E^2$ *:*

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1 \text{ si } x = y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

* **Fonction indicatrice 1 :** *Soit E, un ensemble quelconque.*

— $\forall x$*, quelconque :*

$$1_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } \ \in E \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

* **Fonction restreinte $f_{|E}$:** *Soit f, une fonction quelconque.*

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

— $\forall E \subseteq A$ *et* $\forall x \in A$

$$f_{|E}(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } \ \in E \end{cases}$$

* **Fonction composée $f \circ g$:** *Soit f et g, deux fonctions quelconques, A B et C, trois ensembles quelconques.*

$$f : \begin{cases} B \to C \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

$$g : \begin{cases} A \to B \\ x \longmapsto g(x) \end{cases}$$

$$\forall x \in A, \ f \circ g(x) = f(g(x))$$

* **$\overline{E}$:** *Soit $E \subseteq \mathbf{R}$, un ensemble quelconque.*

$$\overline{E} = \begin{cases} E \cup \{-\infty, +\infty\} \text{ selon le contexte} \\ E \cup \{+\infty\} \text{ selon le contexte} \\ E \cup \{-\infty\} \text{ selon le contexte} \end{cases}$$

(Cette notation peut paraitre abusive, pour la simple et bonne raison que l'on considère ainsi : ∞ comme un nombre. Dans la pratique cela ne pose aucun problème, cependant (en fonction du contexte) il ne faudra pas confondre $\overline{E}$ avec l'ensemble conjugué : $\overline{E}$.)

***** $f = g$, $f < g$, $f \leq g$ **:** *$f : A \to B$ et $g : A \to B$, 2 fonctions quelconques définies sur le même espace :*

— $\forall x \in A$, $f(x) = g(x)$, *on note* $f = g$

— $\forall x \in A$, $f(x) < g(x)$, *on note* $f < g$

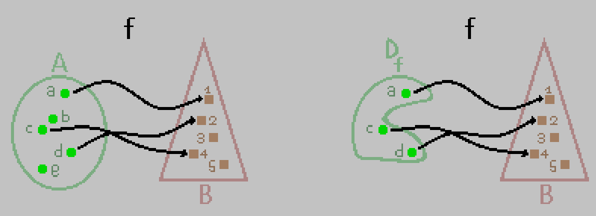
— $\forall x \in A$, $f(x) \leq g(x)$, *on note* $f \leq g$

Nous utiliserons ces notations pour les prochains chapitres et le reste de celui-ci !

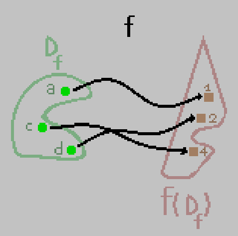
6.3.2 ensemble de définitions, Injectivité, surjectivité

« L'ensemble de définition »

Soit $f : A \to B$, une application définie par une expression algébrique.
« L'ensemble de définition » (généralement noté D_f) de la fonction f, est le plus grand sous-ensemble de A, qui rend $f(x)$ définissable (c'est a dire $f = f_{|D_f}$.
L'exemple le plus emblématique doit être celui de la **fonction inverse**, définie par la relation algébrique : $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Celle-ci est définie pour tous les réels a l'exception de 0.
Son ensemble de définition est donc : $\mathbf{R}^*$.



En prenant $f(D_f)$, nous avons :

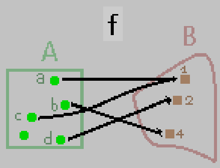


La notion de surjectivité est assez simple a comprendre dans les faits :

« La surjectivité sur B »

Par *surjectivité* sur B, nous entendons que tous les éléments de B (ou notre espace d'arrivée si B n'est pas spécifié), trouvent au moins un antécédent dans notre espace de départ.
$Soit f : A \to B, \forall y \in B, \exists x \in A \ f(x) = y$

$\forall y \in B$, y possède au moins un antécédent dans A.

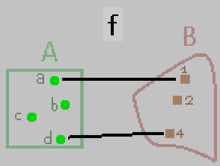


Ce nouvel exemple, nous illustre parfaitement le problème d'*injectivité* qui sera poser ci-après : le point $1 \in B$, possède plusieurs antécédents dans A (a et c).

« L'injectivité sur B »

Par *injectivité* sur B, nous entendons que pour tous les éléments de B (ou notre espace d'arrivée si B n'est pas spécifié), si ils possèdent un antécédent, celui-ci est unique. Donc tous les éléments de notre espace d'arrivée possèdent au plus un antécédent.
$Soit f : A \to B, \forall (x, x') \in A^2$, tel que $f(x) = f(x') \iff x = x'$

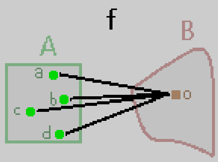
$\forall y \in B$, y possède au plus un antécédent dans A.



exemple :

Soit f, la fonction : $f : A \to B$, tel que $\forall x \in A,\ f(x) = 0$

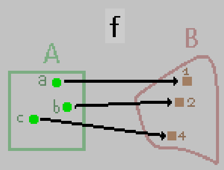
Alors $f(a) = f(b)$, or $a \neq b \iff f$ n'est pas *injective*.



« La Bijectivité sur B »

Soit $f : A \to B$
— f est *injective* sur B
— f est *surjective* sur B
  — f est dite *bijective* sur B.

$\forall y \in B$, il existe au moins un antécédent dans A et il existe au plus un antécédent dans A, celui-ci est donc unique.
Cela se traduit ainsi : *Soit* $f : A \to B$, $\forall y \in B$, $\exists! x \in A\ f(x) = y$.



6.3.3 Les fonctions numériques

Selon toute vraisemblance, nous pouvons choisir n'importe quel *ensemble d'arrivée* et ou de *départ*, pour définir une **fonction**. Cela va si loin, que nous pouvons même définir des **fonctions de fonctions**. En ce qui nous concerne, nous nous contenterons pour un temps, d'étudier les « **fonctions numériques** ».
Une : « **fonction numérique** », n'est rien d'autre qu'une **fonction** dont **l'espace d'arrivée/ l'ensemble d'arrivée** est inclus dans $\mathbf{R}$:

$$f : \begin{cases} E \to F \subseteq \mathbf{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Il faut ainsi comprendre par ce biais, que toutes les images (tous les $f(x)$) sont des nombres.

6.3.4 Les représentations graphiques

Par soucis de simplification : nous partirons du principe que les *ensembles de départ* de nos **fonctions numériques** sont soit constitués de « **vecteurs(*n-uplets*) de $\mathbf{R}^n$** », soit sont des *ensembles numériques*.

Définition 2 : Le « Graph »

Soit :

$$f : \begin{cases} E \to F \subseteq \mathbf{R} \\ x \longmapsto f(x) \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Nous appelons **Graph**, l'ensemble : $\{(x, f(x)) | x \in E\}$.

Soit $n \in [|1, 2|]$.
Soit :

$$f : \begin{cases} E \subseteq \mathbf{R}^n \to F \subseteq \mathbf{R} \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Ce type de **fonctions numériques**, on une propriété intéressante, on peut les représenter graphiquement dans un **repère orthonormé** (en supposant n suffisamment petit).
Pour ce faire, il suffit simplement de placer l'ensemble des points du *graph* de la dite fonction dans un **repère orthonormé**.
Souvent notée : C_f, la figure ainsi tracée est appelée : **Courbe représentative de la fonction f**.

$$f : \begin{cases} \mathbf{R} \to \mathbf{R} \\ x \longmapsto sin(x)x^2 \end{cases}$$

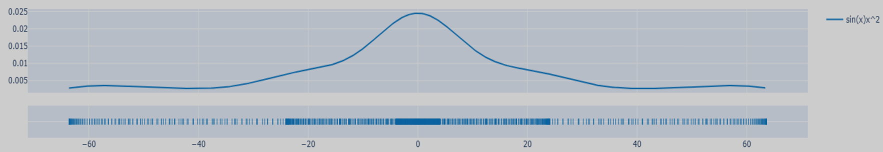


FIGURE 6.1 – Courbe représentative de $f(x) = sin(x)x^2$
L'axe horizontal est appelé : « **axe des abscisses** », tandis que l'axe vertical est nommé : « **axe des ordonnées** ».

$$g : \begin{cases} \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R} \\ (x, y) \longmapsto sin(x + y)(x + 2y)^2 \end{cases}$$

FIGURE 6.2 – Courbe représentative de $g(x, y) = sin(x + y)(x + 2y)^2$

Ces notions d'*injectivité* et de *surjectivité* (et par construction de *bijectivité*), peuvent êtres intuitées par le biais de *courbes représentatives*.
Une fonction qui possède plusieurs fois la même image (une courbe représentative qui atteint plusieurs fois le même terme y, en supposant la fonction représentée continue), ne peut être *injective*. A contrario une fonction f bornée par 2, ne peut pas être *surjective* sur $\mathbf{R}$.
Il nous faut toutefois restés prudents. Une *courbe représentative*, n'est jamais une preuve de l'*injectivité* ou de la *surjectivité* d'une fonction en soit.
SPOILER : Néanmoins elle peut être la preuve de leur absence, en faisant l'hypothèse plus ou moins acceptable que la fonction étudiée soit *continue* (aspect que nous ne tarderons pas a étudier).

exemple :

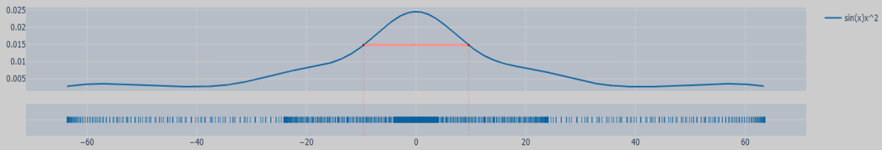


Figure 6.3 – f n'est pas injective

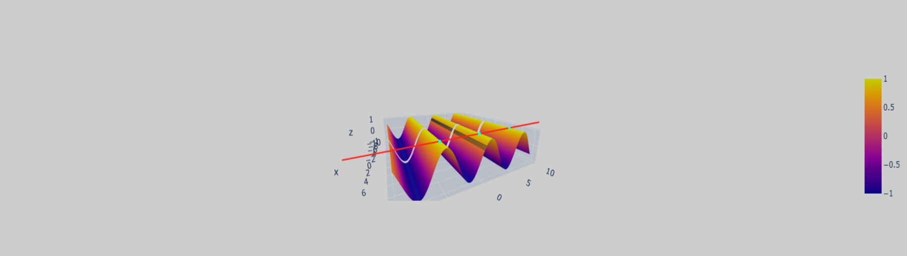


Figure 6.4 – f n'est pas injective

SPOILER : De façon générale une *fonction périodique*(terme que nous ne tarderons pas a aborder), n'est jamais injective.

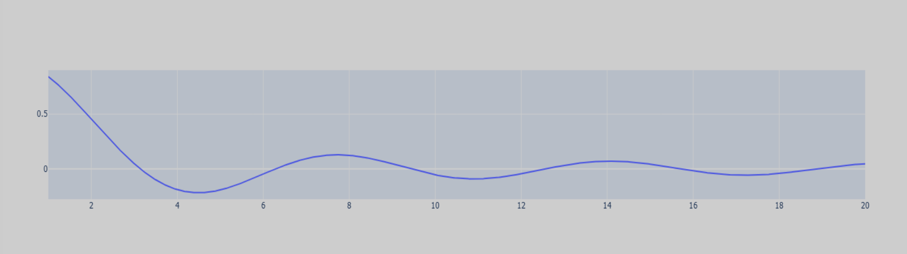


Figure 6.5 – f n'est pas surjective sur $\mathbf{R}$ (comme fonction bornée par 1).

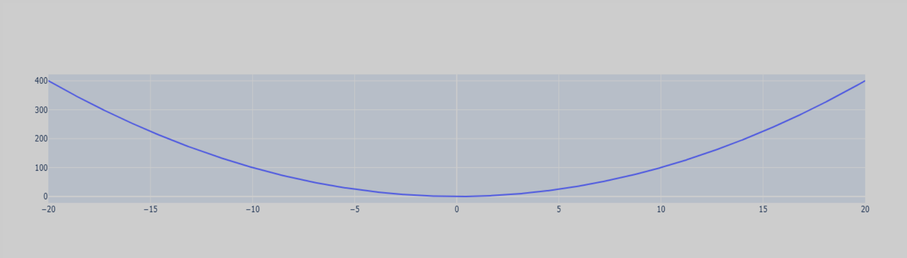


Figure 6.6 – la fonction *carrée* n'est pas injective, mais est néanmoins surjective sur $\mathbf{R}$.

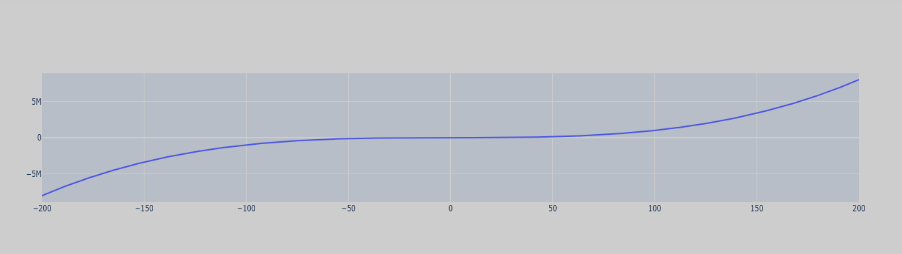


FIGURE 6.7 – la fonction *cube* est bijective.

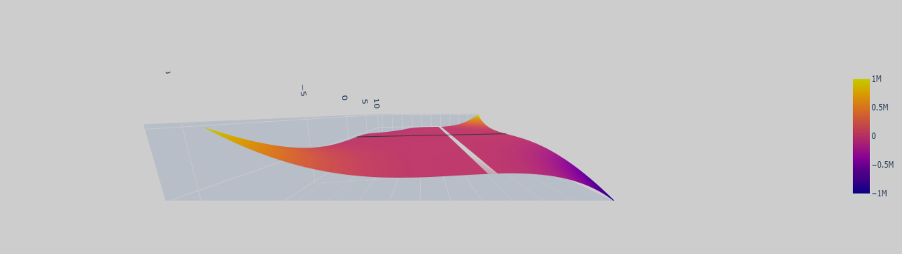


FIGURE 6.8 – f est surjective.

6.4 Les Généralités sur les fonctions numériques a une variable

Un bon énoncé mathématique nécessite une *quantification* adéquate des termes utilisés.
Dans toute cette partie nous allons définir nos objets de la façon suivantes :
$E \subseteq \mathbf{R}$
$F \subseteq \mathbf{R}$

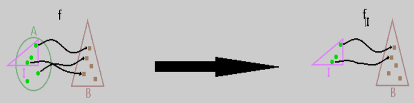
$$f : \begin{cases} E \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Nous allons aborder les bases de « **l'analyse** », et ses notions les plus fondamentales.
Pour exprimer certaines propriétés de telles fonctions, nous procédons bien souvent par explicité le ou les sous-ensembles de E pour lequel cette propriété se réalise.
f est [***insérer la propriété***] sur $I \subseteq E$.
Le plus souvent, ce sous-ensemble I est exprimer sous la forme d'un intervalle.

6.4.1 Restrictions de fonction

Une *fonction restreinte* n'est rien d'autre qu'une restriction de son ensemble de départ.
$\forall A \subseteq E$,

$$f_{|A} : \begin{cases} A \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$



Ainsi si f est [***insérer la propriété***] sur $I \subseteq E$, alors $f_{|I}$ est [***insérer la propriété***] et $f = f_{|E}$.

6.4.2 Généralités

Positivité et Stricte Positivité

Soit $I \subseteq E$.
Dire que f est **positive** sur $I \iff \forall x \in I\ 0 \leq f(x)$.
Nous notons souvent $f_{|I} \geq 0$.

Soit $I \subseteq E$.
Dire que f est **strictement positive** sur $I \iff \forall x \in I\ 0 < f(x)$.
Nous notons souvent $f_{|I} > 0$.

exemple :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2$.
f est **positive** sur $\mathbf{R} \iff f \geq 0$.
La *« courbe représentative »* de f : C_f, ne *descend* jamais en dessous de « **l'axe des abscisses »**.

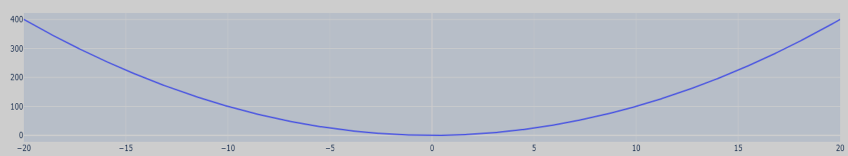


FIGURE 6.9 – Nous pouvons ainsi déduire que nous pouvons *« intuiter »* la réponse en regardant sa *« courbe représentative »*.

Négativité et Stricte Négativité

Soit $I \subseteq E$.
Dire que f est **négative** sur $I \iff \forall x \in I\ f(x) \leq 0$.
Nous notons souvent $f_{|I} \geq 0$.

Soit $I \subseteq E$.
Dire que f est **strictement négative** sur $I \iff \forall x \in I\ f(x) < 0$.
Nous notons souvent $f_{|I} < 0$.

exemple :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = -x^2.$$
$$f \text{ est } \textbf{négative} \text{ sur } \mathbf{R} \iff f \leq 0.$$

La *« courbe représentative »* de f : C_f, ne *monte* jamais en dessus de **« l'axe des abscisses »**.

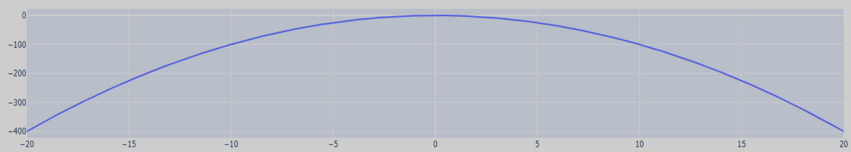


Figure 6.10 – Nous pouvons ainsi déduire que nous pouvons *« intuiter »* la réponse en regardant sa *« courbe représentative »*.

Théoreme

Hypothèses :
— $I \subseteq E$
Conclusions :
— $f_{|I} \leq 0 \iff f(I) \subseteq \mathbf{R}^-$
— $f_{|I} < 0 \iff f(I) \subseteq \mathbf{R}^*_-$
— $f_{|I} \geq 0 \iff f(I) \subseteq \mathbf{R}^+$
— $f_{|I} > 0 \iff f(I) \subseteq \mathbf{R}^*_+$

Il s'agit la d'une caractérisation de nos propriétés.

Démonstration

Nous n'allons ici ne démontrer qu'une seule de nos propriétés, car les autres se démontres de façon similaires.

Procédons par **double implications** :

(Première implication)Hypothèse : $f_{|I} > 0$

$\forall y \in f(I) \exists x \in I$, tel que $f(x) = y$, or $\forall x \in I\ f(x) = \underbrace{f_{|I}(x)}_{>0}$

Donc : $\forall y \in f(I) \exists x \in I$, tel que $f(x) = \underbrace{\underbrace{f_{|I}(x)}_{>0}}_{\in \mathbf{R}_+^*} = y \in \mathbf{R}_+^* \iff f(I) \subseteq \mathbf{R}_+^*$

(Seconde implication)Hypothèse : $f(I) \subseteq \mathbf{R}_+^*$

$\forall x \in I,\ f(x) = f_{|I}(x) \in \underbrace{f(I)}_{\subseteq \mathbf{R}_+^*} \iff f_{|I}(x) > 0 \iff f_{|I} > 0$

Conclusion :

— $f_{|I} > 0 \implies f(I) \subseteq \mathbf{R}_+^*$
— $f(I) \subseteq \mathbf{R}_+^* \implies f_{|I} > 0$
Donc : $f_{|I} > 0 \iff f(I) \subseteq \mathbf{R}_+^*$, par double implication.

exemple :

Soit f, tel que $\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x + 4$.
Il va de soit que $f_{|[0,3]} > 0$.
Nous avons $f([0,3]) = [4,7] \subseteq [0, +\infty[= \mathbf{R}_+^*$.

Théoreme

Hypothèses :
— $I \subseteq E$
— Pour toute fonction $f : A \to B$ et α un scalaire, nous notons αf, la fonction tel que : $\forall x \in A,\ (\alpha f)(x) = \alpha \times f(x)$
Conclusions :
— $f_{|I} \leq 0 \iff -f_{|I} \geq 0$
— $f_{|I} < 0 \iff -f_{|I} > 0$
— $f_{|I} \geq 0 \iff -f_{|I} \leq 0$
— $f_{|I} > 0 \iff -f_{|I} < 0$

La démonstration est triviale.
Par ailleurs, les règles sont sensiblement similaires pour αf, en fonction du signe du dit α (avec l'hypothese supplémentaire que celui-ci soit différent de 0).

exemple :

-4 est un scalaire.
Soit f la fonction carrée (qui est nous le rappelons positive).
alors $-4f \leq 0$

Théoreme

Hypothèses :

— $I \subseteq E$

— Pour toute fonction $f : A \to B$ et α un scalaire, nous notons $f + \alpha$, la fonction tel que : $\forall x \in A$, $(f + \alpha)(x) = f(x) + \alpha$

— $\alpha \in \mathbf{R}^+$

Conclusions :

— $f_{|I} \geq 0 \iff f_{|I} + \alpha \geq 0$

— $f_{|I} > 0 \iff f_{|I} + \alpha > 0$

Hypothèses :

— $I \subseteq E$

— Pour toute fonction $f : A \to B$ et α un scalaire, nous notons $f + \alpha$, la fonction tel que : $\forall x \in A$, $(f + \alpha)(x) = f(x) + \alpha$

— $\alpha \in \mathbf{R}^-$

Conclusions :

— $f_{|I} \leq 0 \iff f_{|I} + \alpha \leq 0$

— $f_{|I} < 0 \iff f_{|I} + \alpha < 0$

exemple :

4 est un scalaire.

Soit f la fonction carrée (qui est nous le rappelons positive).

alors $0 \leq f + 4$

Bornée supérieurement et ou inférieurement

Soit $I \subseteq E$.

f est **bornée supérieurement** sur $I \iff \exists M \in \mathbf{R}$, tel que $\forall x \in I$ $f(x) < M$.

Nous notons souvent $f_{|I} < M$.

---

f est **bornée inférieurement** sur $I \iff \exists M \in \mathbf{R}$, tel que $\forall x \in I$ $f(x) > M$.

Nous notons souvent $f_{|I} > M$.

exemple :

Soit f la fonction *inverse* (c'est a dire f, telle que $\forall x \in \mathbf{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f_{|]0,+\infty[} > 0$, elle est donc bornée inférieurement par 0.

Donc $f_{|]0,+\infty[} + 4 > 4$, $f_{|]0,+\infty[} + 4$ est bornée inférieurement par 4.

Bornée

Soit $I \subseteq E$.
f est **bornée** sur $I \iff \exists M \in \mathbf{R}^+$, tel que $\forall x \in I$, $-M < f(x) < M$.

Nous notons souvent $|f| < M$, quand $I = E$.

Lemme(théorème)

Hypotheses :
— Soit $I \subseteq E$.
— f est **bornée supérieurement** sur I.
— f est **bornée inférieurement** sur I.

Conclusion :
— f est **bornée** sur I.

démonstration :

Soit $I \subseteq E$.

f est **bornée supérieurement** sur $I \iff \exists b \in \mathbf{R}$, tel que $\forall x \in I$ $f(x) < b$.

f est **bornée inférieurement** sur $I \iff \exists a \in \mathbf{R}$, tel que $\forall x \in I$ $f(x) > a$.

Notons : $M = max(a, b)$, alors $\forall x \in I$, $-M < f(x) < M$, car $-max(a, b) \leq a$ et $max(a, b) \geq b$.

Donc : $-M \leq a < f(x) < b \leq M$.

En conclusion : f est **bornée** sur I.

exemple :

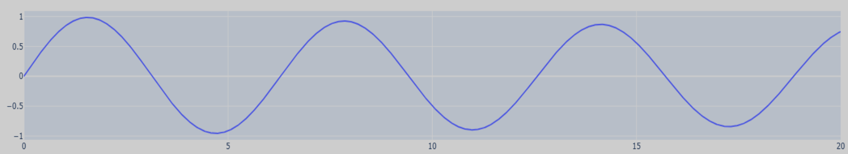


FIGURE 6.11 – la fonction suivante est bornée par 1 sur $\mathbf{R}^+$

Théoreme

Hypothèses :
— $I \subseteq E$
— $(\alpha, M) \in \mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}$
Conclusions :
— $f_{|I} > M \iff f_{|I} + \alpha > M + \alpha$
— $f_{|I} > M \iff \alpha f_{|I} > M \times \alpha$
— $f_{|I} > M \iff -\alpha f_{|I} < -M \times \alpha$
— $f_{|I} < M \iff f_{|I} - \alpha < M - \alpha$
— $f_{|I} < M \iff \alpha f_{|I} < M \times \alpha$
— $f_{|I} < M \iff -\alpha f_{|I} > M \times \alpha$

Toutes ces règles (vues précédemment) sont intuitives en cela qu'elles ne heurtent pas particulièrement notre sens commun.
En ce sens elles ne sont pas a apprendre par cœur, car elle se redémontre assez aisément.
On peut les voir comme corollaires de nos règles de signes.

Constance

Soit $I \subseteq E$.
f est **constante** sur $I \iff \forall (x,y) \in I^2\ f(x) = f(y)$.

Il existe toutefois une définition plus *simple* de la notion de *constance* :
f est **constante** sur $I \iff \exists c \in \mathbf{R}, \forall x \in I\ f(x) = c$.

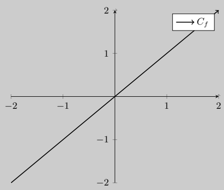
Croissance et Décroissance

Soit $I \subseteq E$.
f est **croissante** sur $I \iff \forall (x,y) \in I^2, x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$.
Nous notons souvent : $f \nearrow$ sur I, et $f \nearrow$ quand $I = E$.

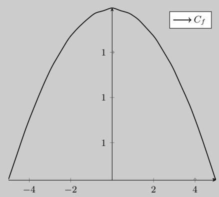
Soit $I \subseteq E$.
f est **décroissante** sur $I \iff \forall (x,y) \in I^2, x \leq y \iff f(y) \leq f(x)$.
Nous notons souvent : $f \searrow$ sur I, et $f \searrow$ quand $I = E$.

exemple :

$\forall x \in \mathbf{R},\ f(x) = x$. (Nous nommons une telle fonction : **identité**)
$\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2$, tel que $x \leq y$.
$f(y) - f(x) = y - x$, or $x \leq y \iff 0 \iff y - x \iff f(x) \leq f(y) \iff f \nearrow$.
Nous pouvions ainsi *intuiter* la réponse en regardant sa *« courbe représentative »*.
Elle est *ascendante* lors des phases de croissance de la fonction et *descendante* lors de ses phases de décroissance.



Nous tenons a apporter quelques précisions.
Demander si une fonction f est **croissante** ou **décroissante**, sans en préciser l'ensemble, revient implicitement a poser la question de la validité de cette propriété sur son ensemble de définition.
A ce titre une fonction ne peut être ni l'un, ni l'autre sur son ensemble de définition, par exemple en ayant des phases de croissance et de décroissance successives.

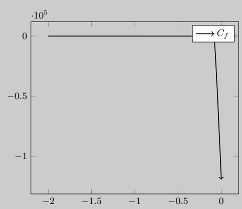


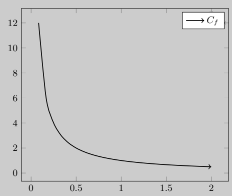
Méfiez des faux-amis, si l'on divise l'ensemble de définition d'une fonction et que celle-ci est décroissante sur ces segmentations, cela n'implique pas nécessairement que la fonction ait le même comportement sur son ensemble de définition.
En mathématiques nous possédons un exemple classique pour ce genre de situations :
$\forall x \in \mathbf{R}^*,\ f(x) = \dfrac{1}{x}$.

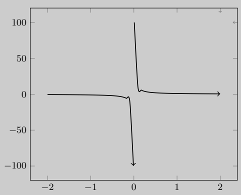
f est $\searrow$ sur $\mathbf{R}^*_-$.

f est $\searrow$ sur $\mathbf{R}^*_+$.

Cependant f n'est pas **décroissante** sur $\mathbf{R}^*$.







6.5 Intérêt de la restriction

6.5.1 Fonction réciproque

Nous avons palabré en long en large et en travers sur les notions de *d'injectivité, de surjectivité et de bijectivité.*
Cette dernière est particulièrement importante, en ce sens qu'elle permet de définir le concept fondamental de *« fonction réciproque »*.

Fonction Réciproque

$$f : \begin{cases} A \to B \\ x \longmapsto f(x) \in B \end{cases}.$$

f, une fonction bijective.

$$f^{-1} : \begin{cases} B \to A \\ y \longmapsto x \in A \end{cases}.$$

tel que $f(x) = y$.
Nous avons : $f^{-1}(f(x)) = x$

Notez bien que la fonction f doit être *bijective*, pour que sa fonction réciproque f^{-1} soit bien définie.
Or, toutes les fonctions ne sont pas bijectives (cela va de soit), néanmoins nous pouvons restreindre ces fonctions sur des ensembles ou leur *bijectivité* est assurée.

Autrement dit, si pour f une fonction voulue, f^{-1} n'est pas *globalement définie* (sur son *ensemble de définition*), nous pouvons définir des *fonctions réciproques locales* $f^{-1}_{|F}$.

exemple :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x$.
Rappellons que nous nommons cette fonction la fonction *identité*.
Cette fonction est *bijective* sur $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
Et sa fonction réciproque est elle même.

$$f^{-1} = f$$

exemple de restriction :

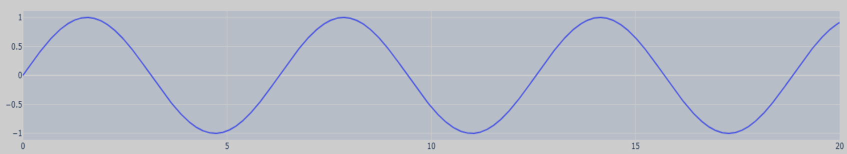


Figure 6.12 – Notre fonction ci-dessus n'est pas bijective.

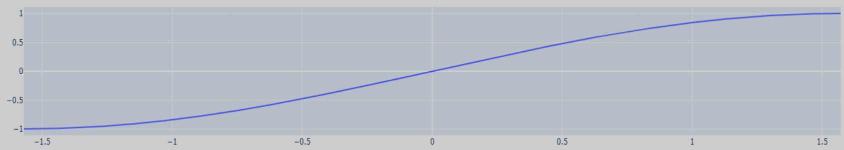


FIGURE 6.13 – Néanmoins si nous restreignons notre ensemble de départ a $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$, celle-ci se retrouve bijective.

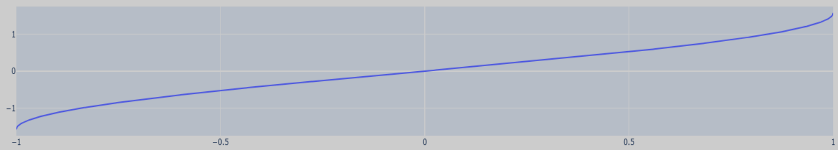


FIGURE 6.14 – Fonction réciproque sur $[-1, 1] \to [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Théoreme sur la monotonie

Hypothèses :
— $f : A \to B$, *bijective*
— $I \subset A$, sur lequel f est *monotone*
Conclusions :
— $f_I \nearrow \iff f^{-1}_{f(I)} \nearrow$
— $f_I \searrow \iff f^{-1}_{f(I)} \searrow$

— Notre théorème nous dit simplement que nous conservons la croissance ou la décroissance lors de notre passage au réciproque.
— Il n'y a pas de théorème sur la *constance*, car si une fonction est constante, elle n'est pas *bijective*.

Théoreme

Hypothèses :
— $f : A \to B$, *bijective*
Conclusions :
— f^{-1}, est *bijective*
— $(f^{-1})^{-1} = f$

Chapitre 7

Comportement Asymptotique, Limites, convergences et Continuité

7.1 L'approche infinitésimale

Prenons la fonction suivante : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = cos(400x)e^{-x}$

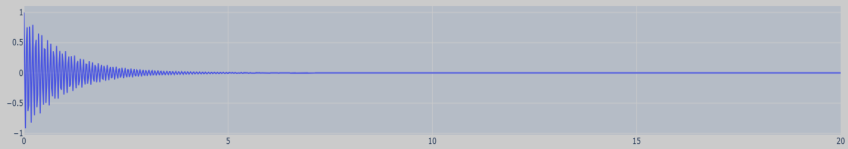


FIGURE 7.1 – Courbe représentative C_f

$f(x)$, semble prendre des valeurs de plus en plus proches de 0, a mesure que : x prend des valeurs de plus en plus grandes. Néanmoins il ne s'agit pas d'une fonction bornée par 0, et celle-ci n'est pas non plus décroissante.

Prenons une seconde fonction : $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$

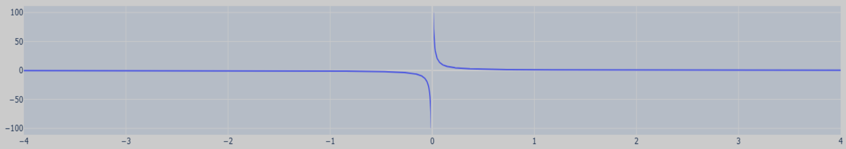
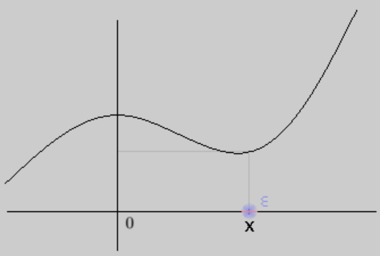


FIGURE 7.2 – Courbe représentative C_g

A l'inverse, lorsque l'on fait partir x de 1 et que celui-ci prend des valeurs de plus en plus proches de 0 ($g(0)$, n'étant évidement pas défini), $g(x)$ prends des valeurs de plus en plus grandes.
Comment décrire mathématiquement le caractère *convergent* de notre fonction f ?
Reformulons notre question voulez vous bien ?
« Comment étudier le comportement d'une fonction au voisinage d'un point ? ».
Cette question n'a a priori rien de triviale et la raison en est assez simple : les termes utilisés pour l'énoncer ne sont ni précis, ni définis et sont encore moins précisément définis.
Rappelons nous nos premiers chapitres : la *logique* ne peut avoir pour autre objets d'étude que des *assertions*.

Nous voulons définir le terme de : **« voisinage d'un point »**, nul doute que si cette notion existe, elle sera nécessairement *locale* (géographiquement limitée), car elle est doit être liée au point ci-nommé. A l'aune de cette nouvelle information, nous pourrions décider d'une limite arbitraire ϵ, qui définirait notre *« voisinage »*. Cet ϵ, pourrait représenter le rayon d'un cercle dont le centre serait notre point d'étude :



Ainsi l'on pourrait définir le **« voisinage du point** a **»**, comme l'intersection de ce cercle avec la droite des abscisses.
De façon tout a fait itérative, nous pourrions définir le **« voisinage de** $f(a)$ **»**, comme l'ensemble : $f(Voisinage(a))$.
La question qui nous vient immédiatement a l'esprit est : *« Pourquoi ne pas directement étudier* $f(a)$ *? »*
Il y a deux raisons a cela :

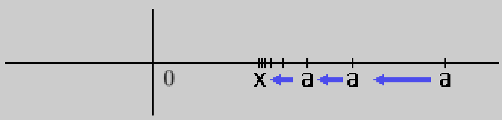
— Il se peut que ces points ne soient pas atteignables ($f(+\infty)$ ou encore $g(0)$).

— Nous voulons étudier une tendance et non une estimation ponctuelle. Typiquement nous ne pourrions étudier la monotonie d'une fonction en ne s'intéressant qu'a une estimation ponctuelle.

Cette approche est très loin d'être dénuée de sens, seulement elle charrie avec elle certains inconvénients :
— Le premier étant qu'en mathématiques, nous n'aimons pas l'arbitraire.
— Le second plus immédiat est que : le résultat que l'on pourrait obtenir, pourrait fortement a un ϵ près, varier (comment alors, interpréter nos résultats ?).
— Puis, comment définir le *bon* ϵ, si il faut en choisir un ?
— Et pour finir, le problème le plus important : pour certaines combinaisons de fonctions et de points, ce *« voisinage »* de $f(x)$, pourrait tout simplement ne pas exister.
Par exemple, si notre fonction f, n'est définie que sur $\mathbf{R}^+$, et que nous volons étudier le *voisinage* de 0, alors : $Voisinage(0) = [-\epsilon : \epsilon]$, or sur la moitié de cet intervalle f, ne serait pas définie.

Il est a noté que cet exercice(« **étudier le comportement d'une fonction donnée au voisinage d'un point** x »), ne consiste pas a étudier $f(x)$, en lui même.
Pour quelle raison ?
La première raison peut être que la propriété que nous cherchons a démontrer est *locale*, qu'elle n'est valable que sur un intervalle (comme peut l'être la croissance). Par conséquent il ne fait aucun sens de s'intéresser a une seule estimation ponctuelle.
L'autre raison peut être que cette estimation ponctuelle n'existe pas (elle n'est pas définie). Un exemple immédiat qui nous vient en tête est $f(0)$ quand f représente la fonction *inverse* sur $\mathbf{R}$ (qui est une valeur qui rappelons le : n'est pas définie).
Notre précédente approche consistait implicitement a fixer une distance maximal : ϵ, entre les points de notre voisinage et notre point : x.
L'approche « **infinitésimale** », pousse cette idée a l'extrême. Elle consiste a étudier le comportement de notre fonction f, lorsque l'on réduit de plus en plus cette distance maximale/-rayon par rapport a un point de notre espace appartenant a l'ensemble de définition : D_f.
Il faut ainsi comprendre que l'on approche *infiniment*, notre point : x, d'où : l'appellation « **d'infinitésimale** ».

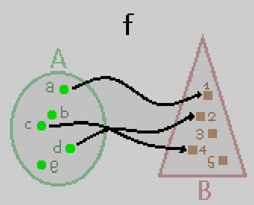
Partons d'un cas simple : une droite et un point x, lui appartenant. Les façons d'approcher infiniment x, sont nombreuses. En prenant un point $a \neq x$ de notre droite et en réduisant progressivement sa distance a lui de moitié, nous pourrions infiniment approcher x (sans n'avoir jamais a l'atteindre) :



La « **limite** », est une notion de « **l'approche infinitésimale** », qui englobe toutes ces manières d'approcher infiniment une valeur.

7.2 Quelques propriétés conceptuelles

Nous avons jusque la omis (a dessin) un problème conceptuel a notre approche *infinitésimale*.
En effet, celle-ci est bien plus générale que la description que nous en avons faite. Elle peut être généralisée a d'autres *espaces vectoriels* que $\mathbf{R}$ (tel que $\mathbf{R}^n$).
Ces études rentrent toutefois dans le champs d'application de la **Topologie** et ne seront évidement pas traitées dans ces chapitres.
Néanmoins nous pouvons brièvement évoquer certaines de ces problématiques.
f est une fonction telle que $f : A \to B$, avec A et B des ensembles quelconques.



7.2.1 La densité

Notre problématique peut-être résumée par la question suivante : **Puis-je infiniment approcher c, depuis a, a partir des éléments de A, sans pour autant atteindre c ?**
La réponse apparait (pour une fois) assez évidente : *la chose est impossible*.
On se doute que la question doit avoir un rapport avec l'*infini*.
En effet il apparait complexe d'infiniment approcher c avec des éléments de A, tout en sachant que ce dernier est un ensemble fini.
Une deuxième question qui nous vient a l'esprit (a l'aune de ces informations nouvelles) est : **Suffit-il d'avoir un ensemble infini pour pouvoir infiniment approcher un de ces points (a partir des autres points de ce meme ensemble) et tout cela depuis un autre de ces points ?**
La réponse est **non** et cela se démontre assez aisément (par un contre exemple).
Il n'est pas possible d'infiniment approcher 2 a partir de 1 dans $\mathbf{N}$. Nous ne pouvons pas casser la distance qui les sépares sans atteindre le point 2.
On dit alors que l'espace A, n'est pas **dense** pour 2.
Il existe de nombreux **ensembles denses** pour chacun de leurs points $\mathbf{R}$, $\mathbf{Q}$ et de façon générale quasiment tous les intervalles de $\mathbf{R}$ (une des raisons de leurs popularité).

7.2.2 La limite

La chose peut etre assez complexe a concevoir, néanmoins nous pouvons approcher un point qui n'appartient pas a notre ensemble A a partir de points qui lui appartiennent.
Par exemple : nous pouvons approcher $+\infty$, par les points de $\mathbf{N}$, or $+\infty$ n'est pas un entier naturel.
Il suffit pour ce faire de prendre des points (de $\mathbf{N}$) de plus en plus grands.

7.3 Les limites

7.3.1 Quelques notations

Les notations ci-dessous seront couramment utilisées au cours de cette partie.

— Soit E, un ensemble et f une fonction, dont l'ensemble de définition comprend E, alors : $f(E) = \{f(x)|\forall x \in E\}$. $f(E)$, est appelé : *« espace image de E par f »*.

— Soit E, un ensemble et f une fonction, dont l'ensemble de définition comprend E, alors : $f^{-1}(E) = \{x|$ tel que $f(x) \in E\}$. $f^{-1}(E)$, est appelé : *« image réciproque de E par f »*.

Il est donc important de noté que $f(E)$ et $f^{-1}(E)$ sont des ensembles et non des résultats numériques.

exemple :

Le voisinage de $f(x)$ est *« l'espace image de $Voisinage(x)$ par f »*.

exemple :

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 1$, alors : $f^{-1}(\underbrace{\{1\}}_{\text{l'ensemble ne contenant que 1}}) = \mathbf{R}$

7.3.2 La notion de limite

La Limite

Soit $D_f \subseteq \mathbf{R}$
Soit $F \subseteq \mathbf{R}$
Soit f, tel que :

$$f : \begin{cases} D_f \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

Soit $a \in D_f$
— Soit $l \in F$, dire que f **converge vers** l, lorsque l'on fait tendre x vers a, soit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

revient a dire que plus l'on ressert le voisinage de a (en réduisant son rayon), plus les valeurs de $f(Voisinage(a))$ sont proches (en distance) de l.
— La façon la plus commune de l'interpréter est : quelque soit la méthode infinitésimale que l'on utilise pour approcher a par x, $f(x)$ s'approche dans le même temps de l.

Mathématiquement cela se traduit ainsi : $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, tel que $\forall x \in D_f$ $|x - a| < \delta \implies |f(x) - l| < \epsilon$, alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

7.3.3 Linéarité de la limite

Prenons un moment pour nous félicité, le plus dur est fait.
Nous ne passerons pas énormément de temps sur cette notion, car bien qu'elle soit centrale lors d'un calcul de **limites**, elle est relativement simple a comprendre.
Néanmoins gardé en tête (et nous le verrons prochainement), qu'un objet ne **converge** pas nécessairement vers un point donné.

La linéarité de la limite

Soit f et g, deux fonctions, $a \in \mathbf{R}$ et $(l_1, l_2) \in \mathbf{R}^2$, tel que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l_1$$

$$\lim_{x \to a} g(x) = l_2$$

Alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = l_1 + l_2$$

Soit f une fonction, $a \in \mathbf{R}$ et $l \in \mathbf{R}$, tel que :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

$\forall \lambda \in \mathbf{R}$:

$$\lim_{x \to a} \lambda f(x) = \lambda \times \lim_{x \to a} f(x) = l\lambda$$

exemple :

Soit f et g, deux fonctions, tel que :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 1} g(x) = 3$$

$$\lim_{x \to 1} 2f(x) + g(x) = 8 + 3 = 11$$

7.3.4 Convergences dans l'infini

Il nous faut faire un constat : nos définitions ne s'accordent en rien aux *convergences dans l'infini.*
Nous ne nous attarderons pas sur de prochaines définitions, cela rendraient notre chapitre inutilement technique (programme de première et seconde année de *CPGE*). Certaines démonstrations ne seront pas faites non plus pour les mêmes raisons.

La Limite

Soit $D_f \subseteq \mathbf{R}$
Soit $F \subseteq \mathbf{R}$
Soit f, tel que :

$$f : \begin{cases} D_f \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

— Soit $l \in F$, dire que f **converge vers** l, lorsque l'on fait tendre x vers $+\infty$, soit :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$$

Cela revient a dire que plus x est grand, plus les valeurs $f(x)$ sont proches de l .

Il en va de meme pour la convergence dans $-\infty$.

La Limite

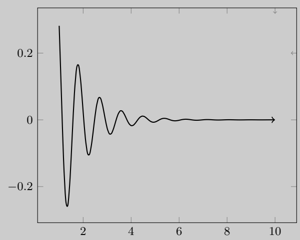
— Soit $l \in F$, dire que f **converge vers** l, lorsque l'on fait tendre x vers $-\infty$, soit :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$$

Cela revient a dire que plus x est petit, plus les valeurs $f(x)$ sont proches de l .

exemple de convergence en l'infini

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$



7.3.5 La divergence ou la convergence vers l'infini

Il existe néanmoins une autre forme de convergence :

La Limite

Soit $D_f \subseteq \mathbf{R}$
Soit $F \subseteq \mathbf{R}$
Soit f, tel que :

$$f : \begin{cases} D_f \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

— Soit $a \in F$, dire que f **converge vers** $+\infty oumoins -\infty$, lorsque l'on fait tendre x vers a, soit :

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

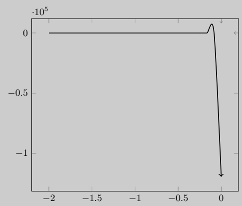
ou respectivement

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

Cela revient a dire que $\forall \epsilon > 0$, il existera un x_0 suffisamment proche de a, tel qu'a partir de ce rang tous les $f(x) > \epsilon$ (le Voisinage de $f(x_0)$, de rayon $|x_0 - a|$ sera bornée inférieurement par ϵ) ou respectivement : $\forall \epsilon < 0$, il existera un x_0 suffisamment proche de a, tel qu'a partir de ce rang tous les $f(x) < \epsilon$ (le Voisinage de $f(x_0)$, de rayon $|x_0 - a|$ sera bornée supérieurement par ϵ).

exemple

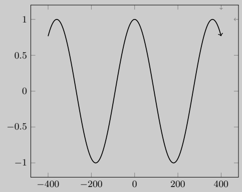
$$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$$



Nous avons ne nouveaux outils, certes, cependant toutes les fonctions n'obéissent pas nécessairement aux propriétés que nous avons définies ci-dessus.

Par exemple, les *fonctions périodiques (qui prennent périodiquement les mêmes valeurs)*, n'ont pas de point de convergence en l'infini.

illustration



7.3.6 Les règles de base

Soit $E \subseteq \mathbf{R}$
$\forall a \in \overline{E} = E \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $E \cup \{+\infty\}$ ou encore $E \cup \{-\infty\}$

> (Cette notation peut paraitre abusive, pour la simple et bonne raison que l'on considère ainsi : ∞ comme un nombre. Dans la pratique cela ne pose aucun problème, cependant (en fonction du contexte) il ne faudra pas confondre $\overline{E}$ avec l'ensemble conjugué : $\overline{E}$.)

$f : E \to f(E) \subseteq \mathbf{R}$
$g : E \to g(E) \subseteq \mathbf{R}$

$$A = \lim_{x \to a} f(x)$$

$$B = \lim_{x \to a} g(x)$$

$$C = \lim_{x \to a} f(x) + g(x)$$

$$D = \lim_{x \to a} f(x) \times g(x)$$

Notre problème se pose en ces termes : *« Dans quelles situations peut on déterminer C et D en fonction de A et B ? »*.

$$C = \lim_{x \to a} f(x) + g(x)$$

A	B	C
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}$	$\lambda_1 + \lambda_2$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !
$-\infty$	$+\infty$	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !

Nous pouvons résumé toutes ces règles grâce a la *commutativité de la somme* $(f(x) + g(x) = g(x) + f(x))$, de la façon suivante.

A	B	C
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}$	$\lambda_1 + \lambda_2$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$+\infty$	$+\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !

Démonstration(Optionnelle)

Nous n'allons démontrer toutes les propriétés énoncées ci-dessus, car les démonstrations sont plus ou moins semblables !

— **Démonstration 01**

Soit $a \in \mathbf{R}$

$\lim_{x\to a} f(x) = \lambda_1 \implies$

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}\ |x - a| < \delta_1 \implies |f(x) - \lambda_1| < \epsilon$

$\lim_{x\to a} g(x) = \lambda_2 \implies$

$\forall\epsilon > 0\ \exists\delta_2 > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}\ |x - a| < \delta_2 \implies |g(x) - \lambda_2| < \epsilon$

Donc $\forall\epsilon > 0,\ \exists(\delta_1, \delta_2) \in (\mathbf{R}_+^*)^2,\ \forall x \in \mathbf{R}\ |x - a| < \underbrace{min(\delta_1, \delta_2)}_{=\delta} \implies$

$|f(x) - \lambda_1| < \dfrac{\epsilon}{2}$ et $|g(x) - \lambda_2| < \dfrac{\epsilon}{2}$, car $\dfrac{\epsilon}{2} > 0$.

On admet que $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Donc : $\underbrace{|f(x) - \lambda_1 + g(x) - \lambda_2|}_{=|f(x)+g(x)-(\lambda_1+\lambda_2)|} \leq 2 \times \dfrac{\epsilon}{2}$.

On a donc : $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathbf{R}\ |x-a| < \delta \implies |f(x)-\lambda_1+g(x)-\lambda_2| < \epsilon \implies$

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lambda_1 + \lambda_2$$

règles de multiplication

$$D = \lim_{x \to a} f(x) \times g(x)$$

A	B	D
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}$	$\lambda_1 \times \lambda_2$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_+^*$	$+\infty$	$+\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_+^*$	$-\infty$	$-\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_-^*$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}_+^*$	$+\infty$
$+\infty$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}_-^*$	$-\infty$
$-\infty$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}_+^*$	$-\infty$
$-\infty$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}_-^*$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !
∞	0	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !

Nous pouvons résumé toutes ces règles grâce a la *commutativité du produit* ($f(x) \times g(x) = g(x) \times f(x)$), de la façon suivante.

A	B	D
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}$	$\lambda_1 \times \lambda_2$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_+^*$	$+\infty$	$+\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_-^*$	$+\infty$	$-\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_+^*$	$-\infty$	$-\infty$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}_-^*$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	∞	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !

règles de la division

$$E = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

A	B	E
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	$\lambda_2 \in \mathbf{R}^*$(Attention au 0 !)	$\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$
$\lambda_1 \in \mathbf{R}$	∞	0
∞	∞	*forme indéterminée* : cela dépends des cas !
$\lambda_1 > 0$	0	$+\infty$
$\lambda_1 < 0$	0	$-\infty$
$+\infty$	$\lambda_2 > 0$	$+\infty$
$-\infty$	$\lambda_2 > 0$	$-\infty$
$+\infty$	$\lambda_2 < 0$	$-\infty$
$-\infty$	$\lambda_2 < 0$	$+\infty$

exemples fondamentaux

— **exemple 01**

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 2 \implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, car f est une *fonction constante*, $f = 2$.

$\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = 7 \implies \lim_{x \to +\infty} g(x) = 7$, car g est une *fonction constante*, $g = 7$.

exemple

— **exemple 02**

$\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 2 \implies \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$, car f est une *fonction constante*, $f = 2$.

$\forall x \in \mathbf{R}$, $id(x) = x \implies \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{id(x)} = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} (4 + \frac{f(x)}{id(x)}) = 4 + 0 = 4$$

7.4 La sacrée sainte Continuité

7.4.1 La Continuité

La Continuité en un point a

- Soit $D_f \subseteq \mathbf{R}$
- Soit $F \subseteq \mathbf{R}$
- Soit f, tel que :

$$f : \begin{cases} D_f \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

- Soit $a \in D_f$

---

f est dite *« continue »* en a, si et seulement si :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

La *« continuité »* est avant tout une propriété locale et prolongée sur un ensemble elle est souvent présentée de la sorte : *« Une fonction f est continue si l'on parvient a dessiner sa courbe représentative sans lever la main (entendez par la que sa courbe représentative ne saute pas d'un point a un autre) »*.
Seulement cette définition manque cruellement de rigueur et est parfaitement inefficace sur des fonctions un peu complexes (comme la *« fonction de Weierstrass »*.

La Continuité sur un ensemble E

- Soit $E \subseteq \mathbf{R}$
- Soit $F \subseteq \mathbf{R}$
- Soit f, tel que :

$$f : \begin{cases} E \to F \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$$

---

f est *« continue »* sur E, si et seulement si f est continue en tout point de E.
Autrement dit, si :

$$\forall a \in E, \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Chapitre 8

Fonctions Usuelles

8.1 Préambule

8.1.1 Valeur absolue, Cardinal et Partie entière

8.1.2 Optimisation (Minimum et Maximum)

8.1.3 Idée de la fonction réciproque

8.2 Les fonctions linéaires

8.2.1 La fonction indicatrice

8.2.2 Les fonctions linéaires

8.2.3 La fonction identité

8.2.4 Les fonctions affines

8.2.5 Généralités

8.3 Les puissances n-ième

8.3.1 Parité

8.3.2 Généralités

8.3.3 Les racines n-ième

8.4 Les fonctions polynomiales

8.4.1 Généralités

8.5 La Fonction Exponentielle

8.5.1 Généralités

8.5.2 Transformation des puissances

8.6 Le Logarithme Népérien

Chapitre 9

Généralités sur les Suites Numériques

Chapitre 10

Les techniques de dérivation

Chapitre 11

Primitives et Intégrales

Quatrième partie

Probabilités Et Statistiques