Techniques de Simulations

PRISCILLA, GOGUY
priscilla.goguy@etu.univ-lyon1.fr

MAHLÎ, REINETTE
mahli.reinette@etu.univ-lyon1.fr

13/10/2025

M1 Actuariat
ISFA

Table des matières

Première partie

Préambule

0.1 Avant-propos

Toutes les ressources utilisées seront présentes en annexes et sur le ***repository*** github ci-dessus. Dans une optique de rigueur absolue, nous tenterons de commenter chaque partie de notre code et essaierons de justifier nos méthodes de simulation.

0.2 Notations

* $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ **:** *Soit Ω, un ensemble quelconque.*
  - *On note $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.*
* **σ-Algèbre de Ω :** *Soit Ω, un ensemble quelconque. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est dite σ-Algèbre de Ω si :*
  - $\Omega \in \mathcal{A}$
  - $\forall A \in \mathcal{A}$, $\bar{A} \in \mathcal{A}$
  - $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
    - *On notera la « tribu borélienne » : $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ et λ : « mesure de Lebesgue ».*
* **μ Mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un couple dit « espace probabilisable »*
  - $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$
  - $\mu(\emptyset) = 0$
  - $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, *une famille disjointe,* $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$
    - *On notera la « probabilité historique » :* $\mathbb{P}$.
    - *On notera $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: « espace probabilisé ».*
* **$\mathbf{X}$, une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: « espace probabilisé »*
  - $(\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$ *: « espace mesurable »*
  - $\boldsymbol{X}$ **:** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$
    - $\forall B \in \mathcal{E}$, $\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \mathcal{B}\})$
* **$\mathbf{X}$, une variable aléatoire continue sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: « espace probabilisé »*
  - $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ *: « espace mesuré »*
  - $\boldsymbol{X}$ **:** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$
  - $\mathbb{P}_X$ « λ[1]
    - $\exists! \rho : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$[2], *mesurable, tel que :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \rho(x)\, dx$$

1. $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, tel que $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}_X(A) = 0$.
2. Dite : *« densité de $\boldsymbol{X}$ ».*

* **Espérance E[X], de la variable aléatoire X :** *Soit* $\boldsymbol{X}$*, une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\mathbf{E[X]}$*, « l'espérance de* $\boldsymbol{X}$ *».*
    — *Si* $\boldsymbol{X}$*, est discrète*[1]*, alors :*

$$\mathbf{E[X]} = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}_X(\{k\})$$

    — *Si* $\boldsymbol{X}$*, est continue de densité* ρ*, alors :*

$$\mathbf{E[X]} = \int x\rho(x)\,dx$$

* **Fonction de Répartition F_X, de la variable aléatoire X :** *Soit* $\boldsymbol{X}$*, une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$ *« la fonction de répartition de* $\boldsymbol{X}$ *».*
* **Espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$*, l'ensemble :*

$$\{\mathbf{X} \text{variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) | \mathbf{E[}|\mathbf{X}|^p\mathbf{]} < +\infty\}$$

* **Moment d'ordre p m_p[X], de la variable aléatoire X :** $\forall$ $\boldsymbol{X}$, $\in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $m_p\mathbf{[X]} = \mathbf{E[X}^p\mathbf{]}$
* **Moment centré d'ordre p μ_p[X], de la variable aléatoire X :** $\forall$ $\boldsymbol{X}$, $\in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\mu_p\mathbf{[X]} = \mathbf{E[(X - E[X])}^p\mathbf{]}$
* **Variantes du moment centré d'ordre 2, de la variable aléatoire X :** $\forall$ $\boldsymbol{X}$, $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\mathbf{V}(X) = \mu_2\mathbf{[X]}$*, la : « variance de* $\boldsymbol{X}$ *»*
  — *On note* $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$*, « l'écart-type de* $\boldsymbol{X}$ *»*
* **Covariance, entre les variables aléatoires X et Y :** $\forall(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$
  — *On note* $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E[(X - E[X])(Y - E[Y])]}$*, la : « covariance entre* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *»*
    — $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}), \boldsymbol{Cov})$*, forme un « espace euclidien »*
* **Coefficient de corrélation linéaire, entre les variables aléatoires X et Y :** $\forall(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y}) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$
  — *On note* $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathbf{Cov(X,Y)}}{\sigma_X \sigma_Y}$*, la : « le coefficient de corrélation linéaire entre* $\boldsymbol{X}$ *et* $\boldsymbol{Y}$ *»*

1. $\mathbb{P}_X$ « μ, ou μ est : la « mesure de comptage ».

0.3 Objets du Problème

On cherche à approximer la probabilité de ruine pour un modèle de théorie de la ruine en assurance moto. On étudie deux cas : un cas où les assurés sont indépendants, et un cas où ils sont corrélés à travers des conditions météo communes.

* **La variable aléatoire** X_{norm} **sur** $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ **:** $\forall (x_0, b, \sigma, \delta) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^3$
  - *On note* X_{norm},
    - *la variable aléatoire continue de densité* f_{norm}^* *proportionnelle a* f_{norm} *:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{norm}(x) = \mathbb{1}_{[0,b]}(x)\ exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})\ (1 + cos(2\pi\frac{x-x_0}{\delta})^2)$$

* **La variable aléatoire** $X_{puissance}$ **sur** $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$ **:** $\forall (a, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]1 : +\infty[$
  - *On note* $X_{puissance}$,
    - *la variable aléatoire continue de densité :* ${f_{puissance}}^1$ *:*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{puissance}(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha - 1}{a^{1-\alpha}}$$

* **La variable aléatoire** Z **sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **:** *Soit* $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ *et* $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ *et tel que :* $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$
  - *On note* Z,
    - *la variable aléatoire discrète, dont les probabilités respectives sont ainsi notées :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(Z = n)$$

    - *On désignera par la suite sa probabilité de la sorte :* $\mathbb{P}_Z$

* **La variable aléatoire X sur** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ **:** *Soit :* X_{norm}, $X_{puissance}$, Z, *des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de lois (et ou de densités) respectives :* f_{norm}, $f_{puissance}$ *et* $\mathbb{P}_Z$.
  - *On note* $\mathbf{X}$,
    - *la variable aléatoire, définie de la sorte :*

$$\mathbf{X} = \begin{cases} X_{norm} \text{ si Z} = 0 \\ X_{puissance} \text{ si Z} = 1 \\ Z \text{ sinon} \end{cases}$$

1 Organisation du travail

Concernant l'organisation du travail, nous avons jugé nécessaire de mettre en place un environnement permettant de partager facilement nos ébauches de code, l'avancée du rendu ainsi que tout document utile au bon déroulement du projet. Pour cela, nous avons créé une page *GitHub* dédiée.

La communication s'est faite principalement via un groupe de discussion sur les réseaux sociaux, mais aussi lors d'échanges directs en classe ou au cours de réunions informelles consacrées à l'avancement du projet.

Sur le plan technique, la première séance en classe a été consacrée à l'analyse de chaque question afin de déterminer les méthodes de simulation à utiliser et les optimisations possibles. Suite à cela, le rôle de *Priscilla* a été plutôt dirigé vers les implémentations de techniques de simulations « classiques » tandis que *Mahlî* a lui été plutôt chargé du côté optimisation du code notamment : *table de Walker*, classes...

Cela dit, de nombreuses parties du code ont été développées conjointement : chacun ayant parfois besoin des conseils, des idées ou de l'expertise de l'autre pour la mise en place de structures de données adaptées et pour garantir la cohérence globale de l'implémentation.

Enfin, nous avons choisi de travailler sur un *Notebook Python*, un format qui nous a semblé plus pratique pour organiser notre code, structurer nos sections et ajouter facilement titres et commentaires. Par souci de clarté et de rigueur, nous avons rédigé les démonstrations mathématiques associées aux différentes étapes de nos algorithmes. Conscients que ces éléments ne constituent pas le cœur de la matière, nous avons choisi de les regrouper dans une annexe, où elles restent consultables si nécessaire.

2 NB

Les (**Première approche :** et **Deuxième approche :**) (appellations que nous utiliserons à loisir dans le reste de la présentation) seront respectivement disponibles dans les *notebook* (***Methodes_premieres*** et ***Methodes_otpimisees***).

Deuxième partie

Aspects théoriques

3 modélisation

3.1 Simulation de $X_{puissance}$

$$\forall (a,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]1:+\infty[,$$

$X_{puissance}$ est une variable aléatoire continue, de densité $f_{puissance}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_{puissance}(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_{puissance}}(t) = \mathbb{P}_{X_{puissance}}(]-\infty:t]) = \int_{-\infty}^{t} f_{puissance}(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}dx$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \int_a^t\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}dx = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}} \int_a^t\ x^{-\alpha}dx$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \frac{\overbrace{\alpha-1}^{=-(1-\alpha)}}{a^{1-\alpha}} \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t = -\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\right]_a^t$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\right]_t^a = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \underbrace{\left[x^{1-\alpha}\right]_t^a}_{=a^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}} \times a^{\alpha-1}$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left(1 - \left(\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\right)$$

Posons $F^{-}_{X_{puissance}}$, la fonction définit de la sorte : $\forall y \in]0,1[$:
$F^{-}_{X_{puissance}}(y) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid y \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\}$

Or $y \in]0,1[\iff 0 < y \iff \left\{x \in \mathbb{R} \mid y \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\} = \left\{x \in [a,+\infty[\mid y \leq \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\}$

$$\inf\Big\{x \in [a,+\infty[\mid y \leq 1-\Big(\frac{x}{a}\Big)^{1-\alpha}\Big\} = \inf\Big\{x \in [a,+\infty[\mid y - 1 \leq -\Big(\frac{x}{a}\Big)^{1-\alpha}\Big\} = \sup\Big\{x \in [a,+\infty[\mid \Big(\frac{x}{a}\Big)^{1-\alpha} \leq 1-y\Big\} = \sup\Big\{x \in [a,+\infty[\mid \Big(\frac{x}{a}\Big) \leq \sqrt[1-\alpha]{1-y}\Big\} = \sup\Big\{x \in [a,+\infty[\mid x \leq a\sqrt[1-\alpha]{1-y}\Big\}$$

$$\text{Or } a\sqrt[1-\alpha]{1-y} = \underbrace{\frac{a}{\sqrt[\alpha-1]{1-y}}}_{\in]0,1[} \in [a,+\infty[\iff$$

$$F^{-}_{X_{puissance}}(y) = sup\Big\{x \in [a,+\infty[\mid x \leq a\sqrt[1-\alpha]{1-y}\Big\} = sup[a, a\sqrt[1-\alpha]{1-y}] = a\sqrt[1-\alpha]{1-y}$$

A l'aune de cette information nouvelle, nous pouvons établir notre modèle de la sorte :

Soit $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$, $F^{-}_{X_{puissance}}(U) \sim X_{puissance}$

3.2 Conditions météorologiques et chaines de Markov $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

L'on cherche à réaliser un modèle simulant des observations journalières de nos états météorologiques.
Pour ce faire (et de façon assez naturelle, nous établirons une *chaine de Markov* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, possédant les propriétés suivantes :

* **Processus Aléatoire** $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **:** *Soit* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in (E,\mathcal{A},\mathbb{P})^{\mathbb{N}^*}$

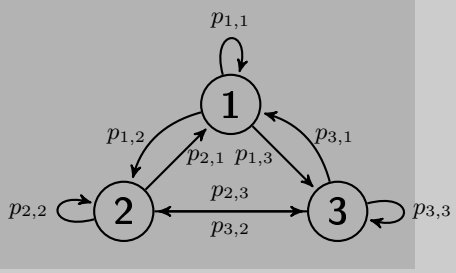
— *On note* $E = \{\text{beau temps}, \text{temps couvert}, \text{pluie}\}$, dit « *ensemble des états de* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ».

— *On note* μ_0, *une mesure de probabilité sur* $(E,\mathcal{A})$, *dite « loi initiale de* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ », *telle que* $(\mu_0(i))_{i\in[|1,3|]}$, *est une permutation quelconque de* $(1,0,0)$.

— *On note* $Q \in M_3(\mathbb{R})$, *une matrice stochastique, dite « matrice de transition de* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ », *telle que* $\forall k \in \mathbb{N}^*$[1] :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(H_{k+1}=1|H_k=1) & \mathbb{P}(H_{k+1}=2|H_k=1) & \mathbb{P}(H_{k+1}=3|H_k=1) \\ \mathbb{P}(H_{k+1}=1|H_k=2) & \mathbb{P}(H_{k+1}=2|H_k=2) & \mathbb{P}(H_{k+1}=3|H_k=2) \\ \mathbb{P}(H_{k+1}=1|H_k=3) & \mathbb{P}(H_{k+1}=2|H_k=3) & \mathbb{P}(H_{k+1}=3|H_k=3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$



1. Pour des raisons évidentes de lisibilité nous confondrons les états « *beau temps* », « *temps couvert* » et « *pluie* » avec les états respectifs : 1, 2, et 3.

Commentaires sur l'implémentation de la Chaine de Markov

Une première approche a été de partitionner notre intervalle : $[0, 1]$, de telle sorte à pouvoir simuler n'importe quelle variable aléatoire à support fini, à l'aide d'une loi uniforme.
Cette approche a le malheureux inconvénient d'avoir (parmi ses implémentations les moins naïves), une complexité de l'ordre de $o(nln(n))$[1].

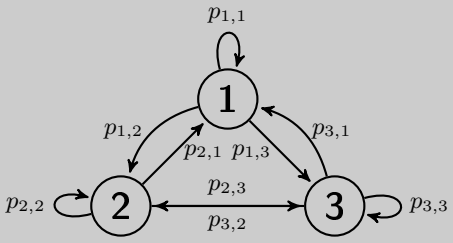
Comparativement, une autre approche dite de *« Table de Walker*[2] *»* (certes plus couteuse en temps d'initialisation), a le bon goût d'avoir une complexité de l'ordre : $o(1)$.

« La *méthode optimale* serait-elle fonction des conditions initiales ? ». La question ne manque pas pertinence, après tout notre loi à support fini ne possède que 3 états. En ce sens une *« Table de Walker »* est-elle réellement une méthode plus optimale que notre *approche naïve* ?

A cela nous avons deux objections :

— Pour $k \in \mathbb{N}$, la simulation d'une trajectoire a k étapes, d'une *chaine de Markov* à n états serait de l'ordre de $o(knln(n))$ avec notre approche naïve et de $o(k)$ avec notre *table de walker*[3].
— Simuler convenablement des conditions météorologiques à l'aide d'une unique *Chaine de Markov* à 3 états, nous apparait fort improbable. Il est fort à parier que l'utilisateur sera amené à faire varier le nombre d'états : n. En ce sens, notre *« modèle à Table de Walker »*, se montre beaucoup plus robuste que le précédent.

Ainsi, nous faisons donc le pari de la *robustesse* et de *l'adaptabilité* de notre modèle.



a. $n = |E|$ et E, l'ensemble des états de la variable aléatoire a support fini.

b. Vous trouverez en annexe la construction de notre *« Table de Walker »*.

c. Nous ne comptons pas l'étape d'initialisation, qui est dans le pire des cas d'ordre $o(n^2)$.

3.3 Occurrences des sinistres (modèle A)

À chaque état de notre *Chaine de Markov* $((1,2,3))$ est associé une valeur $\lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$ (respectivement $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$).
Notons $N \in \mathbb{N}$, la taille de notre portefeuille.
« On suppose que, pour chaque jour $k \in \mathbb{N}$, les dates des sinistres déclarés par l'assuré le jour k suivent, conditionnellement à la valeur de H_k, un processus de Poisson d'intensité λ_{H_k} ».

Ainsi, nous définissons :

* **Fonction** $\Delta(\omega) : : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto \mathbb{1}_{[0,365]}(t)\lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} \end{cases} .$$

* **Fonction** $\mu(\omega) : : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\mu(t) = \int_0^t \Delta(x)dx = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,365]}(x)\lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx$$

* **Suite de processus de poisson in-homogène mélange :** $(R_t^{(k)})_{k\in[|1,N|]}$

— $(R_t^{(k)})_{k\in[|1,N|]}$, *une suite de processus de poisson in-homogène mélange indépendant.*

— $\forall (k,t) \in [|1,N|] \times \mathbb{R}_+$, $R_t^{(k)} \sim P(\mu(t))$, *le processus de poisson in-homogène mélange indépendants représentant les temps d'occurrence des sinistres du contrat k.*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ R_t = \sum_{i=1}^{N} R_t^{(i)}$$

$$\forall t \in [0,365],\ \mu(t) = \int_0^t \Delta(x)dx = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,365]}(x)\lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx = \int_0^t \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx$$

$$= \int_0^1 \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx + \int_1^2 \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx + ... + \int_{\lfloor t \rfloor - 1}^{\lfloor t \rfloor} \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx + \int_{\lfloor t \rfloor}^t \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx$$

$$= \int_0^1 \lambda_{H_0} dx + \int_1^2 \lambda_{H_1} dx + ... + \int_{\lfloor t \rfloor - 1}^{\lfloor t \rfloor} \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor - 1}} dx + \int_{\lfloor t \rfloor}^t \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} dx$$

$$= \lambda_{H_0} + \lambda_{H_1} + ... + \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor - 1}} + \int_{\lfloor t \rfloor}^t \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \lambda_{H_i} + \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} \times (t - \lfloor t \rfloor)$$

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ R_t = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{R_t^{(i)}}_{\sim P(\mu(t))} \sim P(N \times \mu(t)) \iff$$

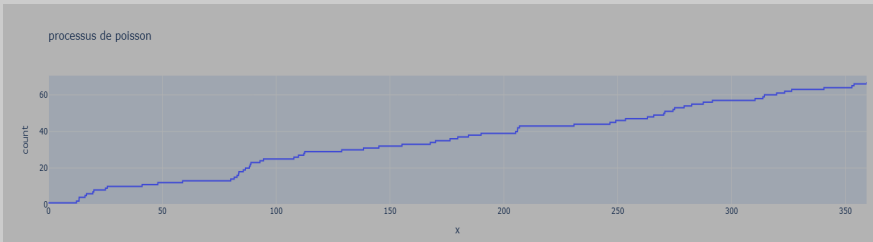
$R_t$est un processus de poisson in-homogène mélange d'intensité : $\Delta^* = N\Delta$

Il nous suffit donc de simuler une seule loi de poisson pour nos N contrats.

Posons donc : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\Delta^*(t) = N\mathbb{1}_{[0,365]}(t)\lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}}$.

Cette définition a le bon gout d'être aisément majorable par une formule simple : $\theta = N \times max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

Montrons nous toutefois sceptiques vis a vis de notre modèle. Partir du postulat que nos assurés partagent une météo commune, n'est pas une idée totalement absurde dans l'absolue, mais reste néanmoins extrêmement discutable dans les faits. Il faudrait pour cela faire l'hypothèse que nos assurés vivent sur un même territoire et que ce territoire est assez restreint pour que sa météo reste uniforme et uni-variée.
Le modèle B, fait l'hypothèse inverse (qui est tout aussi discutable).
Notre modèle A repose sur une autre hypothèse : que l'état de la météo au jour n, dépend uniquement de l'état de la météo au jour $n-1$.
Nous n'expliquerons pas a quel point cette hypothèse est absurde, néanmoins la valeur d'un modèle ne se limite pas a la somme de la valeur de ses axiomes (ex : les modèles de base de la micro-économie).



3.4 Probabilité de Ruine Annuelle (modèle A et B)

* **Modèle de Réserves :** $\forall (N, u, c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$, $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, *une suite de variables aléatoires identiquement distribuées et croissantes.*

— *On note N, la taille de notre portefeuille.*

— *On note u, l'investissement initial et individuel par assuré.*

— *On note c, le taux de prime par assuré et par unité de temps.*

— *On note $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, la suite des dates de sinistres déclarés (de tous les assurés). La suite est par ailleurs ordonnée.*

— $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$R_t = Nu + Nct - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i)\ X_i$$

* **Partition A de $[0, 365]$:** $\forall k \in \mathbb{N}$.

— $n = inf\{k \in \mathbb{N}^* | T_k \in [0, 365]\}$

$$A_k = \begin{cases} [0, T_1[\text{ , si k = 0} \\ [T_k, T_{k+1}[\text{ , si } k \in [|1, n-1|] \\ [T_n, 365] \text{ , si } k = n \\ \emptyset \text{ , sinon} \end{cases}$$

— $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *forme une partition de* $[0, 365]$.

Soit : $\forall \omega \in \Omega$, $R_t(\omega)$, est bien définie sur $[0, 365]$. On a donc :

$$\min_{t \in [0,365]} R_t(\omega) = \min_{k \in [|0,n|]} (\min_{t \in A_k} R_t(\omega))$$

Cette partition $((A_k)_{k \in \mathbb{N}})$, nous permet d'exprimer tout minimum local $(\min_{t \in A_k} R_t(\omega))$, sous une forme explicite (plus ou moins simple) :

$$\forall (k, t) \in \mathbb{N} \times A_k,\ R_t(\omega) = Nu + Nct - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i(\omega))\ X_i(\omega)$$

$$= Nu + Nct - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) \iff$$

$$\min_{t \in A_k} R_t(\omega) = \begin{cases} Nu \text{ , si k = 0} \\ Nu + NcT_k(\omega) - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) \text{ , si } k \in [|1, n|] \end{cases}$$

, car par soucis de réalisme l'on considère que $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous avons donc le résultat suivant :

$$\min_{t\in[0,365]} R_t(\omega) = Nu + \min_{k\in[|1,n|]}(NcT_k(\omega) - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega))$$

$$= Nu + \min_{k\in[|1,n|]}(\sum_{i=1}^{k}(\frac{NcT_k(\omega)}{k} - X_i(\omega)))$$

Ce résultat nous permet de caractériser l'événement suivant :

$$\left(\min_{t\in[0,365]} R_t < 0\right) = \left(\exists k \in [|1,n|] \text{ , tel que : } \sum_{i=1}^{k}(\frac{NcT_k}{k} - X_i) < -Nu\right)$$

Il nous suffirait donc de procédé pas à pas.

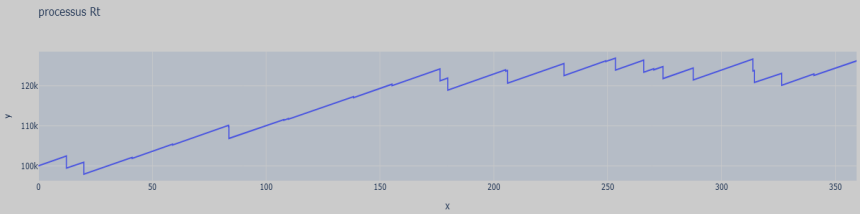
Soit $(V_j)_{j\in\mathbb{N}}$, une suite de v.a.i.i.d., tel que $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$V_j \sim \mathbb{B}(\mathbb{P}\left(\exists k \in [|1,n|] \text{ , tel que : } \sum_{i=1}^{k}(\frac{NcT_k}{k} - X_i) < -Nu\right))$$

Par loi des grands nombres nous avons :

$$\frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} V_j \xrightarrow[p\to+\infty]{p.s.} \mathbb{P}\left(\min_{t\in[0,365]} R_t < 0\right)$$

Le fait que nous ayons deux sommes (d'une part $\sum_{i=1}^{k}(\frac{NcT_k}{k} - X_i)$ et d'une autre $\sum_{j=1}^{p} V_j$), rend le problème parallélisable.



Troisième partie

Aspects Programmation

4 Commentaires sur les techniques de programmation

4.1 Dépendances

```
1  import random as rd
2  import numpy as np
3  import matplotlib.pyplot as plt # graphics
4  import plotly.express as px # graphics
5  import threading # parallélisation
6  import bisect # insertion dans une liste triée
```

4.2 X_{norm}

f_{norm}, est une fonction complexe et au vue de sa forme, il parait fort peu probable de trouver une forme explicite à son intégrale (sur un intervalle quelconque).

Une méthode similaire à celle de *Box-Muller*, a brièvement été évoquée, sans succès.

« La méthode du rejet semble donc s'imposer d'elle même ? ». Il s'agit encore d'une question d'arbitrage. Faut-il faire le choix de la meilleure des complexités, en approchant la fonction de répartition de X_{norm}, par des formules explicites incorrectes, ou préférer à la complexité une juste représentation de sa loi ?

Nous avons de prime abord opté pour l'implémentation d'une méthode de rejet dont le support serait la loi uniforme $U([0,b])$[1]. De plus, la majoration suivante, apparait de façon quasi-immédiate : $f_{norm} \leq 2$.

a. La densité f_{norm} étant nulle en dehors de l'intervalle $[0,b]$, il est naturel d'utiliser comme loi de proposition une uniforme sur ce même intervalle.

Algorithm 1 Algorithme de rejet

```
1: i ← True
2: while i do
3:     U ←∼ U([0, b])
4:     Y ←∼ U([0, 2])
5:     if Y ≤ f_norm(U) then return U
6:     end if
7: end while
```

Première approche :

```
def f_norm(x : float, x_0 : float, b : float, sigma : float, delta : float) :
    ind = (x >= 0) & (x <= b)
    return ind*(np.exp(-((x - x0)**2) / (2 * sigma**2)) * (1 + np.cos(2*np.pi*(x - x0)/delta)**2))
```

```
def echantillon_f_norm(x_0 : float, b : float, sigma : float, delta : float, n : int) :
    res = []
    while len(res) < n :
        X = np.random.uniform(0, b) # f_ norm est nulle sur [b,inf]
        Y = np.random.uniform(0, M)
        if Y <= f_norm(X, x0, b, sigma, delta) :
            res.append(X) # condition d'acceptation
    return res
```

Deuxième approche :

Conscients que cette méthode n'est sans doute pas la plus efficace au vue de la forme de f_{norm} nous avons donc opté pour une seconde méthode.
La loi $\mathbb{P}_{norm}$ étant très proche d'une loi normale, nous avons pensé à faire une méthode de rejet vis à vis de cette dernière.

Nous avons donc majoré le rapport $\frac{f_{norm}}{g}$, avec g la densité d'une loi normale.
Cela garantit une meilleure efficacité du rejet : la probabilité d'acceptation augmente, et donc le nombre moyen d'itérations[1] pour accepter un point diminue.

a. Qui fut précédemment de l'ordre de $2b$.

Algorithm 2 Algorithme de rejet

$i \leftarrow True$
while i **do**
    $U \leftarrow\sim$ loi de densité g
    $Y \leftarrow\sim U([0, M])$
    if $Y \times g(U) \leq f(U)$ **then return** U
    end if
end while

Nouvelle approche :

```
def g(x : float, x_0 : float, sigma : float) :
    ind = (x >= 0) & (x <= b)
    return (1 / (np.sqrt(2*np.pi)*sigma)) * np.exp(-((x - x0)**2) / (2 * sigma**2))
```

```
def echantillon_f_norm_opt(x_0 : float, b : float, sigma : float, delta :
float, n : int) :
    M = 2*np.sqrt(2*np.pi)*sigma
    res = []
    while len(res) < n :
        X = np.random.normal(x0, sigma)
        Y = np.random.uniform(0, M)
        if Y*g(X, x0, sigma) <= f_norm(X, x0, b, sigma, delta) :
            res.append(X) # condition d'acceptation
    return res
```

4.3 $X_{puissance}$

Cette partie sera relativement succincte. Les causes de cette concision sont doubles :

— Premièrement car tous les calculs ont déjà été traités dans la partie ***Modélisation***.

— Deuxièmement car le code qui y est associé est lui même relativement succinct.

La complexité est ici en temps constant et nous voyons mal comment optimiser ce code sans passer par un *interfacage c++*.

Le code dans toute sa beauté fonctionnelle :

```
def run_loi_de_puissance(a : float, alpha : float) :
    return a*(1 - rd.random())**(1/(1-alpha))
```

4.4 Z

Z suit une loi de probabilité qui nous est inconnue, il n'existe donc aucune *implémentation optimale* de cette dernière (que ce soit en terme de code et ou de complexité).

Il parait assez évident, qu'une approche par *« inversion de la fonction de répartition »*, serait complètement hors propos.

A terme, nous avons finalement opté pour une méthode de rejet (bien que la *« table de walker »* nous ait un instant effleuré l'esprit).

Par la suite nous restructurons notre code pour le rendre moins sensible a la casse.

La programmation orientée objet nous offre un paradigme bien plus adaptable et robuste au changement de paramètres.

Elle structure notre code et lui offre une architecture bien plus *arborescente*.

4.5 X

```
1   class Settings() :
2       def __init__(self, x_0=np.random.uniform(0,1),
    b=np.random.uniform(0.1,1), sigma=np.random.uniform(0.1,1),
    delta=np.random.uniform(0.1,1), a=np.random.uniform(0.1,1), al-
    pha=np.random.uniform(1,10), u=np.random.uniform(100,200),
    c=np.random.uniform(0.1,1), N=rd.randint(1,10000),
    monte_carlo_limit=10000, lambda_01=np.random.uniform(0.1,1),
    lambda_02=np.random.uniform(0.1,1), lambda_03=np.random.uniform(0.1,1)) :
3           """
4           Contient toutes les variables initiales de nos modeles
5           """
6           self.colors = "bg" : 0
7           self.parameters = { "x 0" : x_0,
8                   "b" : b,
9                   "sigma" : sigma,
10                  "delta" : delta,
11                  "a" : a,
12                  "alpha" : alpha,
13                  "u" : u,
14                  "c" : c,
15                  "N" : N,
16                  "limite machine de monte carlo limit" :
    monte_carlo_limit,
17                  "lambda 01" : lambda_01,
18                  "lambda 02" : lambda_02,
19                  "lambda 03" : lambda_03 }
20      def __repr__(self) :
21          return "Parametres du modèle : " + "\n" + "\n".join(["
    - " + str(elt) + " : " + str(self.parameters[elt]) for elt in
    self.parameters.keys()])
22      def __str__(self) :
23          return "Parametres du modèle : " + "\n" + "\n".join(["
    - " + str(elt) + " : " + str(self.parameters[elt]) for elt in
    self.parameters.keys()])
```

```
class Sinistre() :
    def __init__(self, settings=ProjectSettings, p=get_a_random_distribution(n=10)) :
        self.settings = settings
        self.p = p
    def f_norm(self, x : float) :
        """f_norm est la loi selon laquelle on doit simuler pour obtenir Pnorm"""
        ind = (x >= 0) & (x <= self.settings.parameters["b"])
        return ind*(np.exp(-((x - self.settings.parameters["x 0"])**2) / (2 * self.settings.parameters["sigma"]**2)) * (1+ np.cos(2*np.pi*(x - self.settings.parameters["x 0"])/self.settings.parameters["delta"])**2))
    def g(self, x : float) :
        return (1 / (np.sqrt(2*np.pi)*self.settings.parameters["sigma"])) * np.exp(-((x - self.settings.parameters["x 0"])**2) / (2 * self.settings.parameters["sigma"]**2))
    def f_norm_run(self) :
        while True :
            X = np.random.normal(self.settings.parameters["x 0"], self.settings.parameters["sigma"])
            Y = np.random.uniform(0, 2*np.sqrt(2*np.pi)*self.settings.parameters["sigma"])
            if Y*self.g(x=X) <= self.f_norm(x=X) :
                return X #condition d'acceptation, boucle brisée
    def loi_de_puissance_run(self) :
        return self.settings.parameters["a"]*(1 - rd.random())**(1/(1-self.settings.parameters["alpha"]))
    def loi_z_run(self) :
        M = np.max(self.p)
        k = len(self.p)
        while True :
            I = np.random.randint(0, k)
            U = np.random.uniform(0, M)
            if U <= self.p[I] :
                return I # condition d'acceptation
    def loi_X_run(self) :
        z = self.loi_z_run()
            return (z == 0)*self.f_norm_run() + (z == 1)*self.loi_de_puissance_run() + (z > 1)*z
    def empiricLikelihood(self, n=4000) :
        hist_data = [[self.f_norm_run() for i in range(n)],[self.loi_de_puissance_run() for i in range(n)],[self.loi_z_run() for i in range(n)],[self.loi_X_run() for i in range(n)]]
        group_labels = ["X_norm", "X_puissance","Z","X"]
        fig = ff.create_distplot(hist_data, group_labels, show_hist=False)
        fig.show()
```

4.6 Chaines de Markov $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

Nous voulons cette partie relativement succincte. Dans cet effort continu de concision, nous ne détaillerons ici que le code de notre première implémentation[1].

a. Le code de la version optimisée étant de toute évidence disponible sur le *notebook Master*.

```
def simuler_chaine_markov(M, H0, N) :
    d1, d2 = M.shape
    assert d1 == d2, "M doit être une matrice carrée"
    assert 1 <= H0 <= 3, f"H0 doit être dans 1,...,d1"
    H = []
    H.append(H0)
    for i in range(1, N + 1) :
        ligne = M[H[i - 1] - 1]
        H.append(np.random.choice(np.arange(1,4), p=ligne))
    return np.array(H)
```

4.7 Vérifications d'usage

X :

Nos *densités empiriques*, sont visiblement conformes (ou du moins vraisemblables) aux densités f_{norm}, $f_{puissance}$ et f_Z (ou $\mathbb{P}_Z$ conditionnellement a la nature de Z).

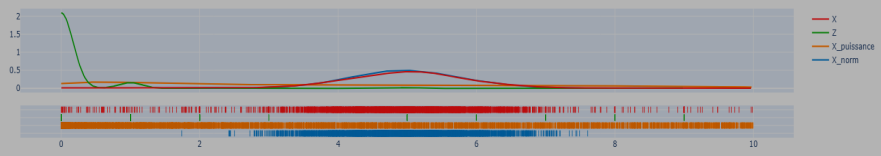
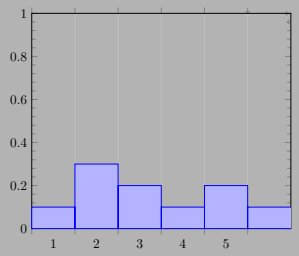


FIGURE 1 – Densités respectives

Table de Walker :

Qui plus est, nous tenons (dans un soucis de concision) a notifier que les vérifications d'usage pour nos *« tables de walker »* et autres *chaines de markov* (dont les codes ne seront pas détaillés ci-dessous au vu de leurs complexités) sont libre access sur les ***notebook***.



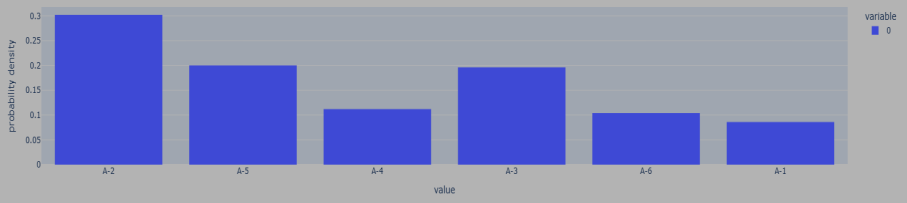


FIGURE 2 – Valeurs empiriques de notre *« table de walker »* (n = 1000)

Notre *« table de walker »*, semble représenter fidèlement la distribution voulue.

Chaine de Markov :

Afin de valider empiriquement la bonne implémentation de $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, nous avons voulu comparer ses fréquences d'apparitions avec nos valeurs théoriques espérées.
La chaine $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ étant *irréductible* et son ensemble d'états E fini, nous sommes assurés de l'existence et de l'unicité d'une *« loi invariante »*, propre a $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

```
def loi_stationnaire(M) :
    """calcul de la loi stationnaire"""
    vals, vecs = np.linalg.eig(M.T) # on cherche un vecteur propre de M transposée pour la v.p. 1
    idx = np.argmin(np.abs(vals - 1)) # cherche la position de la valeur 1 (ou environ 1 parfois arrondis)
    pi = np.real(vecs[ :, idx]) # récupérer le vecteur : uniquement sa partie réelle (parfois partie imaginaire existe)
    return pi / np.sum(pi) # normaliser pour avoir une mesure de proba
```

La ***fonction*** loi_stationnaire renvoie un vecteur caractérisant la loi stationnaire de $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$.

```
pi1 = loi_stationnaire(M_real)
H0 = 1
N = 10000
traj = np.array(simuler_chaine_markov(M_real, H0, N))
plt.figure()
plt.hist(traj, bins=[0.5, 1.5, 2.5, 3.5], density=True, rwidth=0.6)
plt.hlines(pi1, xmin=[0.5, 1.5, 2.5], xmax=[1.5, 2.5, 3.5])
plt.xlabel("État")
plt.ylabel("Fréquence")
plt.title("Fréquences empiriques et mesure invariante")
plt.show()
```

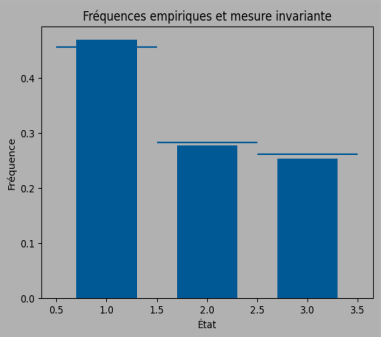


FIGURE 3 – Résultat console...

La superposition des barres correspondant aux fréquences empiriques et des lignes représentant la *« mesure invariante »* a été rendue possible par un ajustement des largeurs de barres et permet de constater que la distribution empirique est cohérente avec le résultat théorique attendu, illustrant ainsi la convergence de la chaine.

5 Les différents modèles

5.1 Modèle A

Première approche :

De prime abord, nous avons envisagé de simuler étape par étape notre sinistralité journalière, partant du postulat que l'agglomération de ces dernières formerait à terme notre sinistralité annuelle.
En cette idée réside le cœur de notre implémentation première.

```
def simuler_processus_poisson(lambd, horizon=1.0) :
    T = []
    tn = 0
    while True :
        tn += np.random.exponential(1/lambd)
        if tn > horizon :
            break;
        T.append(tn)
    return np.array(T)
```

La ***fonction*** simuler_sinistres_avec_temps renvoie une liste de tuples : (T_i : temps occurrence, X_i : montant sinistre associé).

La ***fonction*** simuler_processus_poisson, simule un processus de Poisson homogène sur $[0, horizon]$, puis renvoie la liste des temps d'occurrences T_n.

```
def simuler_sinistres_avec_temps(H, lambd, p, x0, b, sigma, delta, a,
alpha) :
    liste_T_X = [] # liste des couples (temps, montant)
    for jour in range(len(H)) :
        etat = H[jour] # on récupère la météo du jour
        lambda_j = lambd[etat - 1] # lambda associé à cette météo
        temps = simuler_processus_poisson(lambda_j)
        montants = echantillon_X_rejet(p, x0, b, sigma, delta, a,
alpha, len(temps)) # Simuler un montant pour chaque temps
        for i in range(len(temps)) :
            t=temps[i]
            liste_T_X.append((jour + t, montants[i]))
    return liste_T_X
```

Seconde approche :

Cette partie bénéficiera grandement des formules exposées en 3^{e} ***partie***, sur notre capacité à procéder étapes par étapes, afin d'optimiser notre code.
En premier lieu, nous générons nos possibles dates d'occurrences par une *simili* méthode de rejet, puis nous générons la trajectoire de la *Chaine de Markov* portant en elle l'information nécessaire a la bonne formation de nos critères de rejet.
Il n'est ainsi pas nécessaire de générer toute la trajectoire de la météo journalière, si l'information que celle-ci nous apporte ne nous est pas indispensable.

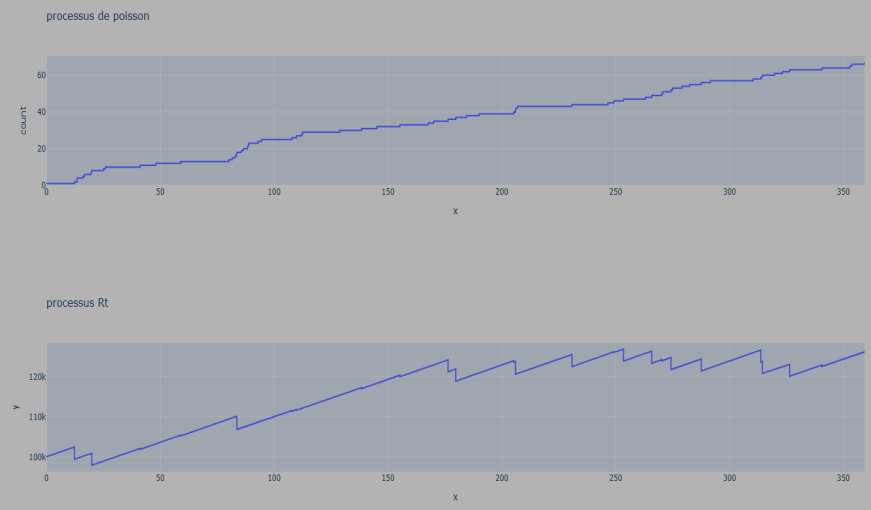
Algorithm 3 Algorithme de rejet

$\theta \leftarrow N \times max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$
$k \leftarrow 0$
$N_{sim} \leftarrow\sim P(\theta)$
    Simuler $(T_1, ..., T_N)$ suivant les points d'un processus de Poisson homogène d'intensité θ dans $[0, 356]$
    Trier le vecteur $(T_1, ..., T_N)$
for $i = 0$ **to** N_{sim} **do**
    $U \leftarrow\sim U([0, 1[)$
  if La $\lfloor T_i \rfloor$-ème étape de $(H_k)_k$ a été simulée **then**
    if $\theta * U \leq \Delta(T_i)$ **then**
      $k \leftarrow k + 1$
      $T_k^{'} \leftarrow T_i$
    end if
  else
    Simuler la trajectoire jusqu'à la $\lfloor T_i \rfloor$-ème étape
    if $\theta * U \leq \Delta(T_i)$ **then**
      $k \leftarrow k + 1$
      $T_k^{'} \leftarrow T_i$
    end if
  end if
end for
    return $(T_1^{'}, ..., T_k^{'})$

L'implémentation ci-dessus est quelque peu inspirée d'une méthode de rejet. Par soucis d'honnêteté intellectuelle il nous faut reconnaitre la sensibilité de ce dernier aux valeurs importantes prises par $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

```
1       def run_ruine(self, rounds=365, draw=True) :
2           N_sim = np.random.poisson(lam=self.theta*rounds) # Nous essayer d'optimiser le code de façon a que l'on ait besoin de simuler toute la trajectoire de la Chaine de Markov, si et seulement si l'information qu'elle apport nous ait nécessaire.
3           for k in range(N_sim) :
4               va_transitoire = np.random.uniform(0,rounds)
5               va_transitoire_aux = int(va_transitoire)
6               if (va_transitoire_aux in self.trajectory) : # recherche en temps constant
7                   if (np.random.uniform(0,self.theta) <= self.settings.parameters["N"]*self.trajectory[va_transitoire_aux]) :
8                       bisect.insort(self.T,va_transitoire) # o(lnn)
9                   else :
10                      for i in range(va_transitoire_aux - self.round + 2) : # Nombre de tours qu'il nous reste pour que va_transitioire_aux soit dans le dictionnaire
11                          self.state, self.round, self.trajectory[self.round] = self.transitions_walker_table[self.indexa[self.state]].run(), self.round + 1, self.state
12                          if (np.random.uniform(0,self.theta) <= self.settings.parameters["N"]*self.trajectory[va_transitoire_aux]) :
                                bisect.insort(self.T,va_transitoire) # o(lnn)
13          if draw :
14              X = [self.sinister.loi_X_run() for k in range(len(self.T))]
15              X[0] = 0
16              drawP(T=self.T, X=X)
17              drawRt(T=self.T, X=X, N=self.settings.parameters["N"], u=self.settings.parameters["u"], c=self.settings.parameters["c"])
```

5.2 Vérifications d'usage



5.3 Probabilité de ruine

Première approche :

```
def modele_A_meteo_commune(N_assures, u, c, horizon, M, H0, lambd, p, x0, b, sigma, delta, a, alpha) :
    H = simuler_chaine_markov(M, H0, horizon)
    T_all = []
    X_all = []
    for i in range(N_assures) :
        sinistres_i = simuler_sinistres_avec_temps(H, lambd, p, x0, b, sigma, delta, a, alpha)
        if len(sinistres_i) > 0 :
            T_i = np.array([t for (t, x) in sinistres_i])
            X_i = np.array([x for (t, x) in sinistres_i])
            T_all.append(T_i)
            X_all.append(X_i)
    # S'il n'y a aucun sinistre chez tous les assurés
    if len(T_all) == 0 :
        return np.array([]), np.array([]), None
    # On fusionne tous les sinistres dans une seule chronologie
    T_global = np.concatenate(T_all)
    X_global = np.concatenate(X_all)
    indices_tri = np.argsort(T_global) # retourne une permutation d'indices pour avoir les temps triés par ordre croissant
    T_global = T_global[indices_tri]
    X_global = X_global[indices_tri]
    # Calcul du processus de réserve agrégée
    Rt = N_assures * u + N_assures * c * T_global - np.cumsum(X_global)
    # Détection de la ruine
    indices_ruine = np.where(Rt < 0)[0]
    t_ruine = None
    if len(indices_ruine) > 0 :
        t_ruine = T_global[indices_ruine[0]]
    return T_global, Rt, t_ruine
```

Seconde approche :

```
def run(self) :
    self.run_ruine(draw=False)
    d_sum = 0
    x_sum = 0
    for k in range(1,len(self.T)) :
        d_sum = d_sum + self.settings.parameters["N"]*self.settings.parameters["c"]*self.T[k]
        x_sum = x_sum + self.sinister.loi_X_run()
        if (d_sum/k - x_sum <= -self.settings.parameters["N"]*self.settings.parameters["u"]) :
            global globsum_moda
            globsum_moda = globsum_moda + 1
            break;
```

FIGURE 4 – Évolution de la probabilité de ruine en fonction de u et de c

Par égard pour notre exercice premier, nous avons trouvé pertinente l'idée d'étudier le comportement de notre probabilité de ruine comparativement à nos niveaux de réserves(u et c).
Ce résultat (conforme aux prédictions, il faut bien l'admettre), renforce d'autant plus la crédibilité de notre modèle.

En effet, il parait assez intuitif que réduire nos réserves (que cela se fasse par le biais de de l'investissement initial u, ou par le biais du taux de prime journalière c), expose un peu plus l'assureur au risque d'insolvabilité (entendez par là que la probabilité de ruine serait une fonction décroissante de nos réserves).

Cela nous offre d'une certaine façon des perspectives nouvelles. Notre modèle stochastique pouvant se révéler lourd par certains aspects, nous pourrions interpoler ses résultats, ou entrainer un modèle d'apprentissage statistique quelconque a prédire les sorties de ce dernier.

FIGURE 5 – Évolution de la probabilité de ruine en fonction de a et de α

Ce dernier résultat semble mettre en lumière une certaine dépendance du modèle a la variable a.
Cette remarque nous offre une opportunité toute espérée pour entamer un dialogue autour de la crédibilité de nos *« lois paramétriques »* ($\mathbb{P}_{X_{puissance}}, \mathbb{P}_{X_{norm}}, \mathbb{P}_X$).

Nous avons tracé ici l'histogramme de $X_{puissance}$ par la méthode de simulation et la densité de la loi d'origine selon laquelle on cherche à simuler. Nous avons ici rencontré une difficulté la décroissance étant très rapide, les valeurs sont vite « tassées » vers 0.

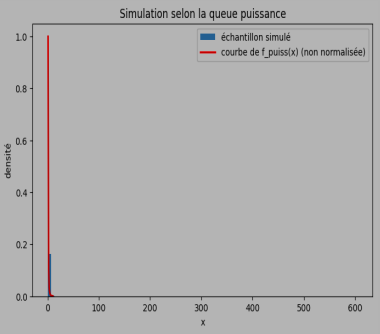
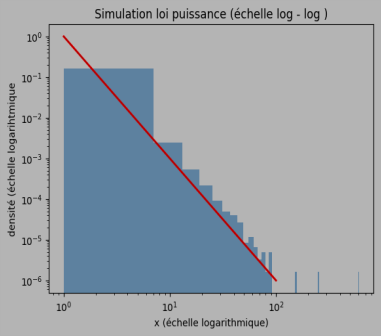


FIGURE 6 – Résultat console...



Pour remédier à cela et avoir une meilleure vue du graphique, nous avons fait le graphique en échelle logarithmique. Une autre idée aurait aussi pu être de prendre $\alpha < 1$ pour avoir une convergence moins rapide. Ainsi, notre programme semblait adapté et conforme aux attentes.

FIGURE 7 – Résultat console...

Les deux premières implémentations de X_{norm} produisent sensiblement les mêmes distributions.
Néanmoins nous tenons par soucis d'honnêteté intellectuelle a signaler que les performances de l'une ou de l'autre paraissent avant tout contextuelles.

lorsque δ est très grand, le *terme oscillant* devient quasiment constant et la densité tend vers une loi normale tronquée. Dans ce cas, la méthode optimisée (*rejet gaussien*) doit être particulièrement performante.

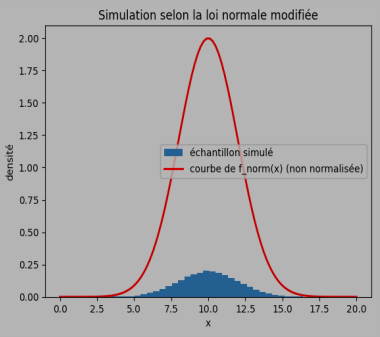
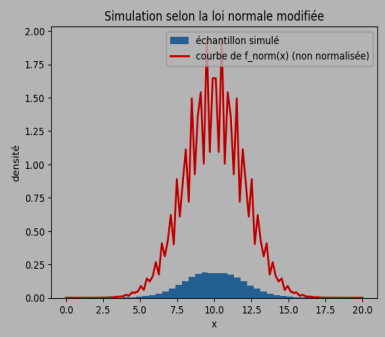


FIGURE 8 – $\delta = 10000$



A l'inverse, lorsque δ est très petit (entendez par la proche de 1), les oscillations de la densité deviennent très marquées, ce qui rend la méthode de rejet uniforme nettement moins efficace. Ces situations extrêmes sont précisément celles où la comparaison entre les deux méthodes est la plus instructive.

FIGURE 9 – $\delta = 1$

Nous l'avons dit, les performances de l'une ou de l'autre méthode paraissent avant tout contextuelles.
Parmi ces nombreux contextes figure celui de la valeur de δ :

Valeur de δ	Modèle uniforme	Modèle gaussien
1	$1.17s$	$0.35s$
10000	$0.88s$	$0.28s$

Cela vient confirmer que dans les cas extrêmes testés notre deuxième méthode de rejet est bien plus performante.

Nous avons fait des tests où Z était relativement simple et prenait trois valeurs $0, 1$ ou 2. Un premier test avec une forte probabilité que $Z = 0$ se produise ce qui veut dire une forte probabilité d'occurrence de petits sinistres avec faible perte. On a donc tracé l'histogramme. Celui ci nous a effectivement permis de voir une forte concentration des sinistres avec faibles valeurs même si on pouvait tout de même laisser apparaître quelques autres sinistres.

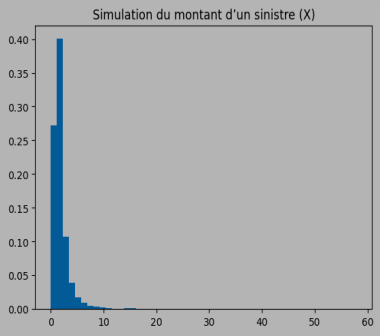
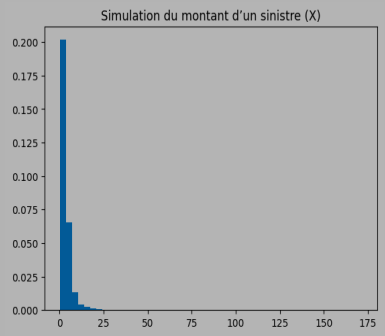


FIGURE 10 – Résultat console...



Ensuite, nous avons diminué la probabilité de $Z = 0$ pour vérifier que l'algorithme pouvait produire des sinistres plus rares mais plus coûteux, c'est-à-dire générer une queue de distribution plus prononcée. Les résultats ont confirmé ce comportement, avec l'apparition de sinistres aux coûts élevés, comme attendu.

FIGURE 11 – Résultat console...

5.4 Modèle B

Première approche :

Considérant nos implémentations relativement proches de celles du Modèle A, nous ne trouvions pas particulièrement pertinent de disserter longuement sur nos méthodes de simulation.
Nous insistons toutefois sur une limite inhérente a notre implémentation (ou peu s'en faut) du Modèle B dans sa seconde version. Les ramifications du modèle, trop nombreuses, amoindrissent nos capacités de parallélisation, les sous problèmes étant si nombreux que les périodes de préparation aux dites parallélisations font exploser le temps d'exécution de ce dernier.

A cela vient s'additionner une limite fort incapacitante : l'impossibilité de pouvoir réinitialiser un *thread python*.
Nous ne doutons pas qu'il puisse exister une solution satisfaisante à ce problème, nous ne l'avons simplement pas trouvée par manque de temps.

```
1  def modele_B_meteo_indep(N_assures, u, c, horizon, M, H0, lambd,
   p, x0, b, sigma, delta, a, alpha) :
2      T_all = []
3      X_all = []
4      for i in range(N_assures) :
5          H_i = simuler_chaine_markov(M, H0, horizon)
6          sinistres_i = simuler_sinistres_avec_temps(H_i, lambd, p,
   x0, b, sigma, delta, a, alpha)
7          if len(sinistres_i) > 0 :
8              T_i = np.array([t for (t, x) in sinistres_i])
9              X_i = np.array([x for (t, x) in sinistres_i])
10             T_all.append(T_i)
11             X_all.append(X_i)
12         if len(T_all) == 0 :
13             return np.array([]), np.array([]), None
14         T_global = np.concatenate(T_all)
15         X_global = np.concatenate(X_all)
16         indices_tri = np.argsort(T_global)
17         T_global = T_global[indices_tri]
18         X_global = X_global[indices_tri]
19         Rt = N_assures * u + N_assures * c * T_global -
   np.cumsum(X_global)
20         indices_ruine = np.where(Rt < 0)[0]
21         t_ruine = None
22         if len(indices_ruine) > 0 :
23             t_ruine = T_global[indices_ruine[0]]
24         return T_global, Rt, t_ruine
```

Seconde approche :

```
1       def run(self, rounds=365) :
2           N_sim = np.random.poisson(lam=self.theta*rounds) # Nous essayer d'optimiser le code de façon a que l'on ait besoin de simuler toute la trajectoire de la Chaine de Markov, si et seulement si l'information qu'elle apport nous ait nécessaire.
3           for k in range(N_sim) :
4               va_transitoire = np.random.uniform(0,rounds)
5               va_transitoire_aux = int(va_transitoire)
6               if (va_transitoire_aux in self.trajectory) : # recherche en temps constant
7                   if (np.random.uniform(0,self.theta) <= self.settings.parameters["N"]*self.trajectory[va_transitoire_aux]) :
8                       self.T.append(va_transitoire)
9                   else :
10                      for i in range(va_transitoire_aux - self.round + 2) : # Nombre de tours qu'il nous reste pour que va_transitioire_aux soit dans le dictionnaire
11                          self.state, self.round, self.trajectory[self.round] = self.transitions_walker_table[self.indexa[self.state]].run(), self.round + 1, self.state
12                          if (np.random.uniform(0,self.theta) <= self.settings.parameters["N"]*self.trajectory[va_transitoire_aux]) :
13                      self.T.append(va_transitoire)
14          self.reinit()
```

La ***fonction*** run remplit la liste globale du portefeuille de sinistres individuels.

La ***fonction*** T_run génère la liste des occurrences.

```
1       def T_run(self, draw=True) :
2           for i in range(self.settings.parameters["N"]) :
3               self.subsub.run()
4           self.T.sort()
5           if draw :
6               X = [self.sinister.loi_X_run() for k in range(len(self.T))]
7               X[0] = 0
8               drawP(T=self.T, X=X)
9               drawRt(T=self.T, X=X, N=self.settings.parameters["N"], u=self.settings.parameters["u"], c=self.settings.parameters["c"])
```

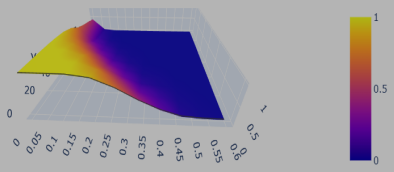


FIGURE 12 – Évolution de la probabilité de ruine en fonction de u et de c (Modèle B)

Quatrième partie
Conclusion

6 Évolutions possibles du modèle

7 Commentaires

Nos modèles reposent sur plusieurs techniques de simulations (que nous voulions plus ou moins exhaustives).
Entre autres des *Tables de Walker*, des méthodes de rejets, ou encore des méthodes d'*inversions de fonctions de répartition*.
Néanmoins il ne fait aucun doute que certains points peuvent encore être optimisés.
Pour ce faire nous proposons plusieurs solutions :
— *Interfaçer* notre code avec du code C++.
— Massivement paralléliser nos calculs sur un GPU.
— Entrainer un modèle d'apprentissage statistique quelconque à prédire les sorties de notre modèle.

8 Commentaires sur la pertinence du modèle

Nous le savons, nos modèles A et B ne sont pas réalistes.
L'un suppose que nos assurés partagent tous sans exception une météo commune et l'autre postule l'inverse.
Par ailleurs nos deux modèles reposent sur deux hypothèses encore plus discutables : l'une est que la sinistralité est homogène (la loi de X est commune à tous les assurés et ne dépend pas de la météo), et l'autre que les montants sont indépendants d'un individu à un autre.
Or (que l'on parle de risques climatiques et ou météorologiques), l'impact financier et économique n'est jamais le résultat d'une expérience purement individuelle.