Techniques de Simulations

PRISCILLA, GOGUY
priscilla.goguy@etu.univ-lyon1.fr

MAHLÎ, REINETTE
mahli.reinette@etu.univ-lyon1.fr

13/10/2025

M1 Actuariat
ISFA

Table des matières

Première partie
Préambule

0.1 Avant-propos

Toutes les ressources utilisées seront présentes en annexes et sur le ***repository*** github ci-dessus. Dans une optique de rigueur absolue, nous tenterons de commenter chaque partie de notre code et essaierons de justifier nos méthodes de simulation.

0.2 Notations

* **$\mathcal{P}(\mathbf{X})$:** *Soit Ω, un ensemble quelconque.*
  — *On note $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.*
* **σ-ALGÈBRE DE Ω :** *Soit Ω, un ensemble quelconque. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est dite σ-Algèbre de Ω si :*
  — $\Omega \in \mathcal{A}$
  — $\forall A \in \mathcal{A},\ \bar{A} \in \mathcal{A}$
  — $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
  — *On notera la « tribu borélienne » : $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ et λ : « mesure de Lebesgue ».*
* **μ MESURE DE PROBABILITÉ SUR $(\Omega, \mathcal{A})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un couple dit « espace probabilisable »*
  — $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$
  — $\mu(\emptyset) = 0$
  — $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, *une famille disjointe,* $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$
  — *On notera la « probabilité historique » : $\mathbb{P}$.*
  — *On notera $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: « espace probabilisé ».*
* **X, UNE VARIABLE ALÉATOIRE SUR $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: « espace probabilisé »*
  — $(\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$ *: « espace mesurable »*
  — ***X*** *:* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$
  — $\forall B \in \mathcal{E},\ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \mathcal{B}\})$
* **X, UNE VARIABLE ALÉATOIRE CONTINUE SUR $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: « espace probabilisé »*
  — $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ *: « espace mesuré »*
  — ***X*** *:* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$
  — $\mathbb{P}_X \ll \lambda$[1]
  — $\exists! \rho : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$[2], *mesurable, tel que :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \rho(x)\,dx$$

1. $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, tel que $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}_X(A) = 0$.
2. Dite : *« densité de **X** »*.

* **Espérance E[X], de la variable aléatoire X :** *Soit **X**, une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  - *On note* $\mathbf{E[X]}$, *« l'espérance de **X** ».*
  - *Si **X**, est discrète*[1], *alors :*

$$\mathbf{E[X]} = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}_X(\{k\})$$

  - *Si **X**, est continue de densité* ρ, *alors :*

$$\mathbf{E[X]} = \int x\rho(x)\, dx$$

* **Fonction de Répartition F_X, de la variable aléatoire X :** *Soit **X**, une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  - *On note* $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$ *« la fonction de répartition de **X** ».*
* **Espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  - *On note* $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *l'ensemble :*

$$\{\mathbf{X}\text{variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) | \mathbf{E}[|\mathbf{X}|^p] < +\infty\}$$

* **Moment d'ordre p m_p[X], de la variable aléatoire X :** $\forall$ ***X**,* $\in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  - *On note* $m_p[\mathbf{X}] = \mathbf{E}[\mathbf{X}^p]$
* **Moment centré d'ordre p μ_p[X], de la variable aléatoire X :** $\forall$ ***X**,* $\in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  - *On note* $\mu_p[\mathbf{X}] = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{E}[\mathbf{X}])^p]$
* **Variantes du moment centré d'ordre 2, de la variable aléatoire X :** $\forall$ ***X**,* $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  - *On note* $\mathbf{V}(X) = \mu_2[\mathbf{X}]$, *la : « variance de **X** »*
  - *On note* $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, *« l'écart-type de **X** »*
* **Covariance, entre les variables aléatoires X et Y :** $\forall$(***X**, **Y***) $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$
  - *On note* $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{Y} - \mathbf{E}[\mathbf{Y}])]$, *la : « covariance entre **X** et **Y** »*
  - $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, ***Cov***), *forme un « espace euclidien »*
* **Coefficient de corrélation linéaire, entre les variables aléatoires X et Y :** $\forall$(***X**, **Y***) $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$
  - *On note* $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathbf{Cov(X,Y)}}{\sigma_X \sigma_Y}$, *la : « le coefficient de corrélation linéaire entre **X** et **Y** »*

1. $\mathbb{P}_X$ « μ, ou μ est : la « mesure de comptage ».

0.3 Objets du Problème

On cherche à approximer la probabilité de ruine pour un modèle de théorie de la ruine en assurance moto. On étudie deux cas : un cas où les assurés sont indépendants, et un cas où ils sont corrélés à travers des conditions météo communes.

* **LA VARIABLE ALÉATOIRE X_{norm} SUR $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$:** $\forall (x_0, b, \sigma, \delta) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^3$
  - *On note X_{norm},*
    - *la variable aléatoire continue de densité : f_{norm} :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{norm}(x) = \mathbb{1}_{[0,b]}(x)\ exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})\ (1 + cos(2\pi \frac{x-x_0}{\delta})^2)$$

* **LA VARIABLE ALÉATOIRE $X_{puissance}$ SUR $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$:** $\forall (a, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]1 : +\infty[$
  - *On note $X_{puissance}$,*
    - *la variable aléatoire continue de densité : $f_{puissance}$[1] :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{puissance}(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha - 1}{a^{1-\alpha}}$$

* **LA VARIABLE ALÉATOIRE Z SUR $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et tel que : $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$*
  - *On note Z,*
    - *la variable aléatoire discrète, dont les probabilités respectives sont ainsi notées :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(Z = n)$$

  - *On désignera par la suite sa probabilité de la sorte : $\mathbb{P}_Z$*

* **LA VARIABLE ALÉATOIRE $\mathbf{X}$ SUR $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit : X_{norm}, $X_{puissance}$, Z, des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de lois (et ou de densités) respectives : f_{norm}, $f_{puissance}$ et $\mathbb{P}_Z$.*
  - *On note $\mathbf{X}$,*
    - *la variable aléatoire, définie de la sorte :*

$$\mathbf{X} = \begin{cases} X_{norm} \text{ si Z = 0} \\ X_{puissance} \text{ si Z = 1} \\ Z \text{ sinon} \end{cases}$$

File keyword
Run keyword
Ouvrir l'annexe
test

1. This is my link

1 Organisation du travail

Deuxième partie
Modélisation

2 modélisation

2.1 simulation de X_{norm}

2.2 Simulation de $X_{puissance}$

$$\forall (a,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]1:+\infty[,$$

$X_{puissance}$ est une variable aléatoire continue, de densité $f_{puissance}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_{puissance}(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$$
$$\Updownarrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_{puissance}}(t) = \mathbb{P}_{X_{puissance}}(]-\infty:t]) = \int_{-\infty}^{t} f_{puissance}(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}dx$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \int_{a}^{t}\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}dx = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t)\frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}} \int_{a}^{t}\ x^{-\alpha}dx$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \frac{\overbrace{\alpha-1}^{=-(1-\alpha)}}{a^{1-\alpha}} \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t = -\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\right]_a^t$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\right]_t^a = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \underbrace{\left[x^{1-\alpha}\right]_t^a}_{=a^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}} \times a^{\alpha-1}$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left(1-\left(\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\right)$$

Posons $F_{X_{puissance}}^{-}$, la fonction définit de la sorte : $\forall y \in]0,1[$:
$F_{X_{puissance}}^{-}(y) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \mid y \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) \times \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\}$

Or $y \in]0,1[\iff 0 < y \iff \left\{x \in \mathbb{R} \mid y \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) \times \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\} = \left\{x \in [a,+\infty[\mid y \leq \left(1-\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\}$

$\inf\{x \in [a,+\infty[\mid y \leq 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\} = \inf\{x \in [a,+\infty[\mid y - 1 \leq -\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\} = \sup\{x \in [a,+\infty[\mid \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha} \leq 1 - y\} = \sup\{x \in [a,+\infty[\mid \left(\frac{x}{a}\right) \leq \sqrt[1-\alpha]{1-y}\} = \sup\{x \in [a,+\infty[\mid x \leq a \sqrt[1-\alpha]{1-y}\}$

$$\text{Or } a \sqrt[1-\alpha]{1-y} = \frac{a}{\underbrace{\sqrt[\alpha-1]{1-y}}_{\in]0,1[}} \in [a,+\infty[\iff$$

$$F^{-}_{X_{puissance}}(y) = sup\{x \in [a,+\infty[\mid x \leq a \sqrt[1-\alpha]{1-y}\} = sup[a, a \sqrt[1-\alpha]{1-y}] = \boxed{a \sqrt[1-\alpha]{1-y}}$$

A l'aune de cette information nouvelle, nous pouvons établir notre modèle de la sorte :

$$\boxed{\text{Soit } U \sim \mathcal{U}(]0,1[),\ F^{-}_{X_{puissance}}(U) \sim X_{puissance}}$$

2.3 Conditions météorologiques et chaines de Markov $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$

L'on cherche a réaliser un modèle simulant des observations journalières de nos états météorologique.
Pour ce faire (et de façon assez naturelle, nous établirons une *chaine de Markov* $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$, possédant les propriétés suivantes :

* **PROCESSUS ALÉATOIRE** $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ **:** *Soit* $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*} \in (E, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}^*}$

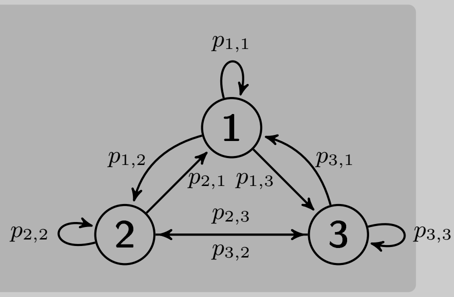
— *On note* $E = \{\text{beau temps}, \text{temps couvert}, \text{pluie}\}$, dit *« ensemble des états de* $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *».*

— *On note* μ_0, *une mesure de probabilité sur* $(E, \mathcal{A})$, *dite « loi initiale de* $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *», tel que* $(\mu_0(i))_{i \in [|1,3|]}$, *est une permutation quelconque de* $(1, 0, 0)$.

— *On note* $Q \in M_3(\mathbb{R})$, *une matrice stochastique, dite « matrice de transition de* $(H_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ *», tel que* $\forall k \in \mathbb{N}^*$[1] :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(H_{k+1} = 1 | H_k = 1) & \mathbb{P}(H_{k+1} = 2 | H_k = 1) & \mathbb{P}(H_{k+1} = 3 | H_k = 1) \\ \mathbb{P}(H_{k+1} = 1 | H_k = 2) & \mathbb{P}(H_{k+1} = 2 | H_k = 2) & \mathbb{P}(H_{k+1} = 3 | H_k = 2) \\ \mathbb{P}(H_{k+1} = 1 | H_k = 3) & \mathbb{P}(H_{k+1} = 2 | H_k = 3) & \mathbb{P}(H_{k+1} = 3 | H_k = 3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$



Vous trouverez en annexe la construction de notre *« Table de Walker ».*

1. Pour des raisons évidentes de lisibilité nous confondrons les états *« beau temps »*, «

3 Commentaires sur les techniques de programmation

4 Les différents modèles

4.1 Complexité algorithmique

4.2 Vérifications d'usage

Troisième partie

Conclusion

5 Commentaires sur la pertinence du modèle

6 Évolutions possibles du modèle

7 Commentaires

8 Annexes et contacts

Annexes et contacts

temps couvert » et « *pluie* » avec les états respectifs : 1, 2, et 3.