Techniques de Simulations

PRISCILLA, GOGUY
priscilla.goguy@etu.univ-lyon1.fr

MAHLÎ, REINETTE
mahli.reinette@etu.univ-lyon1.fr

13/10/2025

M1 Actuariat
ISFA

Table des matières

Première partie

Préambule

0.1 Avant-propos

Toutes les ressources utilisées seront présentes en annexes et sur le ***repository*** github ci-dessus. Dans une optique de rigueur absolue, nous tenterons de commenter chaque partie de notre code et essaierons de justifier nos méthodes de simulation.

0.2 Notations

* **$\mathcal{P}(\mathbf{X})$:** *Soit Ω, un ensemble quelconque.*
  — *On note $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω.*
* **σ-Algèbre de Ω :** *Soit Ω, un ensemble quelconque. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ est dite σ-Algèbre de Ω si :*
  — $\Omega \in \mathcal{A}$
  — $\forall A \in \mathcal{A},\ \bar{A} \in \mathcal{A}$
  — $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}},\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$
  — *On notera la « tribu borélienne » : $\mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$ et λ : « mesure de Lebesgue ».*
* **μ Mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A})$, un couple dit « espace probabilisable »*
  — $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, 1]$
  — $\mu(\emptyset) = 0$
  — $\forall (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, *une famille disjointe,* $\mu(\bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$
  — *On notera la « probabilité historique » : $\mathbb{P}$.*
  — *On notera $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$: « espace probabilisé ».*
* **X, une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: « espace probabilisé »*
  — $(\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$ *: « espace mesurable »*
  — ***X :*** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\boldsymbol{E}, \mathcal{E})$
  — $\forall B \in \mathcal{E},\ \mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \mathcal{B}\})$
* **X, une variable aléatoire continue sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$: « espace probabilisé »*
  — $(\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$ *: « espace mesuré »*
  — ***X :*** $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$
  — $\mathbb{P}_X \ll \lambda$[1]
  — $\exists! \rho : (\mathbb{R}^n, \mathbb{B}(\mathbb{R}^n), \lambda) \longrightarrow \mathbb{R}^+$[2], *mesurable, tel que :*

$$\mathbb{P}_X(A) = \int_A \rho(x)\, dx$$

1. $\forall A \in \mathbb{B}(\mathbb{R}^n)$, tel que $\lambda(A) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}_X(A) = 0$.
2. Dite : *« densité de **X** »*.

* **Espérance E[X], de la variable aléatoire X :** *Soit **X**, une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* **E[X]**, *« l'espérance de **X** ».*
  — *Si **X**, est discrète*[1], *alors :*

$$\mathbf{E[X]} = \sum_{k \in X(\Omega)} k\mathbb{P}_X(\{k\})$$

  — *Si **X**, est continue de densité* ρ, *alors :*

$$\mathbf{E[X]} = \int x\rho(x)\,dx$$

* **Fonction de Répartition F_X, de la variable aléatoire X :** *Soit **X**, une variable aléatoire sur* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \mathbb{P}_X(]-\infty, x])$ *« la fonction de répartition de **X** ».*
* **Espace $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, *l'ensemble :*

$$\{\mathbf{X}\text{variable aléatoire sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) | \mathbf{E}[|\mathbf{X}|^p] < +\infty\}$$

* **Moment d'ordre p m_p[X], de la variable aléatoire X :** $\forall$ ***X***, $\in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $m_p[\mathbf{X}] = \mathbf{E}[\mathbf{X}^p]$
* **Moment centré d'ordre p μ_p[X], de la variable aléatoire X :** $\forall$ ***X***, $\in L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\mu_p[\mathbf{X}] = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{E}[\mathbf{X}])^p]$
* **Variantes du moment centré d'ordre 2, de la variable aléatoire X :** $\forall$ ***X***, $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$
  — *On note* $\mathbf{V}(X) = \mu_2[\mathbf{X}]$, *la : « variance de **X** »*
  — *On note* $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, *« l'écart-type de **X** »*
* **Covariance, entre les variables aléatoires X et Y :** $\forall$(***X***, ***Y***) $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$
  — *On note* $\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{E}[\mathbf{X}])(\mathbf{Y} - \mathbf{E}[\mathbf{Y}])]$, *la : « covariance entre **X** et **Y** »*
  — $(L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}),$ ***Cov***$)$, *forme un « espace euclidien »*
* **Coefficient de corrélation linéaire, entre les variables aléatoires X et Y :** $\forall$(***X***, ***Y***) $\in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^2$
  — *On note* $\rho_{X,Y} = \dfrac{\mathbf{Cov(X,Y)}}{\sigma_X \sigma_Y}$, *la : « le coefficient de corrélation linéaire entre **X** et **Y** »*

1. $\mathbb{P}_X$ « μ, ou μ est : la « mesure de comptage ».

0.3 Objets du Problème

On cherche à approximer la probabilité de ruine pour un modèle de théorie de la ruine en assurance moto. On étudie deux cas : un cas où les assurés sont indépendants, et un cas où ils sont corrélés à travers des conditions météo communes.

* **La variable aléatoire X_{norm} sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$:** $\forall (x_0, b, \sigma, \delta) \in \mathbb{R} \times (\mathbb{R}_+^*)^3$
  — *On note X_{norm},*
  — *la variable aléatoire continue de densité : f_{norm} :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{norm}(x) = \mathbb{1}_{[0,b]}(x)\ exp(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2})\ (1 + cos(2\pi \frac{x-x_0}{\delta})^2)$$

* **La variable aléatoire $X_{puissance}$ sur $(\mathbb{R}, \mathbb{B}(\mathbb{R}))$:** $\forall (a, \alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]1 : +\infty[$
  — *On note $X_{puissance}$,*
  — *la variable aléatoire continue de densité : $f_{puissance}$[1] :*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_{puissance}(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha - 1}{a^{1-\alpha}}$$

* **La variable aléatoire Z sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ et tel que : $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$*
  — *On note Z,*
  — *la variable aléatoire discrète, dont les probabilités respectives sont ainsi notées :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ p_n = \mathbb{P}(Z = n)$$

  — *On désignera par la suite sa probabilité de la sorte : $\mathbb{P}_Z$*

* **La variable aléatoire $\mathbf{X}$ sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:** *Soit : X_{norm}, $X_{puissance}$, Z, des variables aléatoires mutuellement indépendantes, de lois (et ou de densités) respectives : f_{norm}, $f_{puissance}$ et $\mathbb{P}_Z$.*
  — *On note $\mathbf{X}$,*
  — *la variable aléatoire, définie de la sorte :*

$$\mathbf{X} = \begin{cases} X_{norm} \text{ si Z = 0} \\ X_{puissance} \text{ si Z = 1} \\ Z \text{ sinon} \end{cases}$$

File keyword
Run keyword
Ouvrir l'annexe
test

1. This is my link

1 Organisation du travail

Deuxième partie
Modélisation

2 modélisation

2.1 simulation de X_{norm}

2.2 Simulation de $X_{puissance}$

$$\forall (a,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times]1:+\infty[,$$

$X_{puissance}$ est une variable aléatoire continue, de densité $f_{puissance}$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$f_{puissance}(x) = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall t \in \mathbb{R}, F_{X_{puissance}}(t) = \mathbb{P}_{X_{puissance}}(]-\infty:t]) = \int_{-\infty}^{t} f_{puissance}(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{t} \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x)\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}} dx$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \int_{a}^{t}\ x^{-\alpha} \times \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}} dx = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \frac{\alpha-1}{a^{1-\alpha}} \int_{a}^{t}\ x^{-\alpha} dx$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \frac{\overbrace{\alpha-1}^{=-(1-\alpha)}}{a^{1-\alpha}} \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_a^t = -\mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\right]_a^t$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left[\frac{x^{1-\alpha}}{a^{1-\alpha}}\right]_t^a = \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \underbrace{\left[x^{1-\alpha}\right]_t^a}_{=a^{1-\alpha}-t^{1-\alpha}} \times a^{\alpha-1}$$

$$= \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(t) \times \left(1 - \left(\frac{t}{a}\right)^{1-\alpha}\right)$$

Posons $F_{X_{puissance}}^{-}$, la fonction définit de la sorte : $\forall y \in]0,1[$:
$F_{X_{puissance}}^{-}(y) = \inf \left\{x \in \mathbb{R} \mid y \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\}$

Or $y \in]0,1[\iff 0 < y \iff \left\{x \in \mathbb{R} \mid y \leq \mathbb{1}_{[a,+\infty[}(x) \times \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\} = \left\{x \in [a,+\infty[\mid y \leq \left(1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\right)\right\}$

$\inf\{x \in [a,+\infty[\mid y \leq 1 - \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\} = \inf\{x \in [a,+\infty[\mid y - 1 \leq -\left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha}\} = \sup\{x \in [a,+\infty[\mid \left(\frac{x}{a}\right)^{1-\alpha} \leq 1 - y\} = \sup\{x \in [a,+\infty[\mid \left(\frac{x}{a}\right) \leq \sqrt[1-\alpha]{1-y}\} = \sup\{x \in [a,+\infty[\mid x \leq a\sqrt[1-\alpha]{1-y}\}$

Or $a\sqrt[1-\alpha]{1-y} = \frac{a}{\underbrace{\sqrt[\alpha-1]{1-y}}_{\in]0,1[}} \in [a,+\infty[\iff$

$$F^{-}_{X_{puissance}}(y) = sup\{x \in [a,+\infty[\mid x \leq a\sqrt[1-\alpha]{1-y}\} = sup[a, a\sqrt[1-\alpha]{1-y}] = \boxed{a\sqrt[1-\alpha]{1-y}}$$

A l'aune de cette information nouvelle, nous pouvons établir notre modèle de la sorte :

$$\boxed{\text{Soit } U \sim \mathcal{U}(]0,1[),\ F^{-}_{X_{puissance}}(U) \sim X_{puissance}}$$

2.3 Conditions météorologiques et chaines de Markov $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$

L'on cherche a réaliser un modèle simulant des observations journalières de nos états météorologique.
Pour ce faire (et de façon assez naturelle, nous établirons une *chaine de Markov* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, possédant les propriétés suivantes :

* **Processus Aléatoire** $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ **:** *Soit* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*} \in (E,\mathcal{A},\mathbb{P})^{\mathbb{N}^*}$

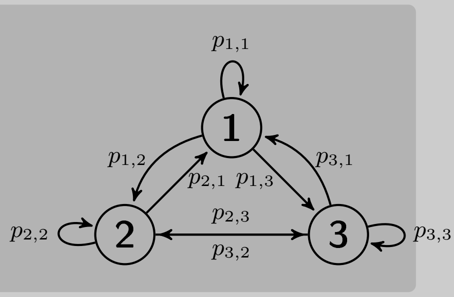
— *On note* $E = \{\text{beau temps}, \text{temps couvert}, \text{pluie}\}$, *dit « ensemble des états de* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *».*

— *On note* μ_0*, une mesure de probabilité sur* $(E,\mathcal{A})$*, dite « loi initiale de* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *», tel que* $(\mu_0(i))_{i\in[|1,3|]}$*, est une permutation quelconque de* $(1,0,0)$.

— *On note* $Q \in M_3(\mathbb{R})$*, une matrice stochastique, dite « matrice de transition de* $(H_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ *», tel que* $\forall k \in \mathbb{N}^*$[1] :

$$\begin{bmatrix} \mathbb{P}(H_{k+1}=1|H_k=1) & \mathbb{P}(H_{k+1}=2|H_k=1) & \mathbb{P}(H_{k+1}=3|H_k=1) \\ \mathbb{P}(H_{k+1}=1|H_k=2) & \mathbb{P}(H_{k+1}=2|H_k=2) & \mathbb{P}(H_{k+1}=3|H_k=2) \\ \mathbb{P}(H_{k+1}=1|H_k=3) & \mathbb{P}(H_{k+1}=2|H_k=3) & \mathbb{P}(H_{k+1}=3|H_k=3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$



Vous trouverez en annexe la construction de notre *« Table de Walker »*.

1. Pour des raisons évidentes de lisibilité nous confondrons les états *« beau temps »*, «

2.4 Occurrences des sinistres (modèle A)

A chaque états de notre *chaine de Markov* ((1, 2, 3)) est associée une valeur $\lambda_k \in \mathbb{R}_+^*$ (respectivement $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.
Notons $N \in \mathbb{N}$, la taille de notre portefeuille.
« On suppose que, pour chaque jour $k \in \mathbb{N}$, les dates des sinistres déclarés par l'assuré le jour k suivent, conditionnellement à la valeur de H_k, un processus de Poisson d'intensité λ_{H_k} ».

Ainsi, nous définissons :

* **Fonction** $\Delta(\omega)$: : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\Delta : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto \mathbb{1}_{[0,365]}(t)\lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} \end{cases} .$$

* **Fonction** $\mu(\omega)$: : $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$$\mu(t) = \int_0^t \Delta(x)dx = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,365]}(x)\lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx$$

* **Suite de processus de poisson in-homogène mélange :** $(R_t^{(k)})_{k\in[|1,N|]}$

— $(R_t^{(k)})_{k\in[|1,N|]}$, *une suite de processus de poisson in-homogène mélange indépendants.*

— $\forall (k,t) \in [|1,N|] \times \mathbb{R}_+,\ R_t^{(k)} \sim P(\mu(t))$, *le processus de poisson in-homogène mélange indépendants représentant les temps d'occurrence des sinistres du contrat k.*

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ R_t = \sum_{i=1}^{N} R_t^{(i)}$$

$$\forall t \in [0,365],\ \mu(t) = \int_0^t \Delta(x)dx = \int_0^t \mathbb{1}_{[0,365]}(x)\lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx = \int_0^t \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx$$

$$= \int_0^1 \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx + \int_1^2 \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx + ... + \int_{\lfloor t \rfloor - 1}^{\lfloor t \rfloor} \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx + \int_{\lfloor t \rfloor}^{t} \lambda_{H_{\lfloor x \rfloor}} dx$$

$$= \int_0^1 \lambda_{H_0} dx + \int_1^2 \lambda_{H_1} dx + ... + \int_{\lfloor t \rfloor - 1}^{\lfloor t \rfloor} \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor - 1}} dx + \int_{\lfloor t \rfloor}^{t} \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} dx$$

$$= \lambda_{H_0} + \lambda_{H_1} + ... + \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor - 1}} + \int_{\lfloor t \rfloor}^{t} \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\lfloor t \rfloor - 1} \lambda_{H_i} + \lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}} \times (t - \lfloor t \rfloor)$$

---

temps couvert » et *« pluie »* avec les états respectifs : 1, 2, et 3.

$$\forall t \in \mathbb{R}_+,\ R_t = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{R_t^{(i)}}_{\sim P(\mu(t))} \sim P(N \times \mu(t)) \iff$$

$R_t$est un processus de poisson in-homogène mélange d'intensité : $\Delta^* = N\Delta$

Il nous suffit donc de simuler une seule loi de poisson pour nos N contrats.

Posons donc : $\forall t \in \mathbb{R},\ \Delta^*(t) = N\mathbb{1}_{[0,365]}(t)\lambda_{H_{\lfloor t \rfloor}}$.

Cette définition a le bon gout d'être aisément majorable par une formule simple : $N \times max(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$.

2.5 Probabilité de Ruine Annuelle (modèle A)

* **Modèle de Réserves :** $\forall (N,u,c) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}^2$, $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, *une suite de variables aléatoires identiquement distribuées et croissantes.*

— *On note N, la taille de notre portefeuille.*

— *On note u, l'investissement initial et individuel par assurés.*

— *On note c, le taux de prime par assuré et par unité de temps.*

— *On note $(T_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$, la suite des dates de sinistres déclarés (de tous les assurés). La suite est par ailleurs ordonnée.*

— $\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$R_t = Nu + Nct - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i)\ X_i$$

* **Partition** A **de** $[0, 365]$ **:** $\forall k \in \mathbb{N}$.

— $n = inf\{k \in \mathbb{N}^* | T_k \in [0, 365]\}$

$$A_k = \begin{cases} [0, T_1[\ \text{, si k = 0} \\ [T_k, T_{k+1}[\ \text{, si } k \in [|1, n-1|] \\ [T_n, 365]\ \text{, si } k = n \\ \emptyset\ \text{, sinon} \end{cases}$$

— $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *forme une partition de* $[0, 365]$.

Soit : $\forall \omega \in \Omega$, $R_t(\omega)$, est bien définie sur $[0, 365]$. On a donc :

$$\min_{t \in [0,365]} R_t(\omega) = \min_{k \in [|0,n|]} (\min_{t \in A_k} R_t(\omega))$$

Cette partition ($(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$), nous permet d'exprimer tout minimum local ($\min_{t \in A_k} R_t(\omega)$), sous une forme explicite (plus ou moins simple) :

$$\forall (k,t) \in \mathbb{N} \times A_k,\ R_t(\omega) = Nu + Nct - \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_i(\omega))\ X_i(\omega)$$

$$= Nu + Nct - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega) \iff$$

$$\min_{t \in A_k} R_t(\omega) = \begin{cases} Nu\ \text{, si k = 0} \\ Nu + NcT_k(\omega) - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega)\ \text{, si } k \in [|1, n|] \end{cases}$$

, car par soucis de réalisme l'on considère (par soucis de réalisme) que $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Nous avons donc le résultat suivant :

$$\min_{t \in [0,365]} R_t(\omega) = Nu + \min_{k \in [|1,n|]} (NcT_k(\omega) - \sum_{i=1}^{k} X_i(\omega))$$

$$= Nu + \min_{k \in [|1,n|]} (\sum_{i=1}^{k} (\frac{NcT_k(\omega)}{k} - X_i(\omega)))$$

Ce résultat nous permet de caractériser l'événement suivant :

$$\left(\min_{t \in [0,365]} R_t < 0 \right) = \left(\exists k \in [|1,n|] \text{ , tel que : } \sum_{i=1}^{k} (\frac{NcT_k}{k} - X_i) < -Nu \right)$$

Il nous suffirait donc de procédé pas a pas.

Soit $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$, une suite de v.a.i.i.d., tel que $\forall j \in \mathbb{N}$,

$$V_j \sim \mathbb{B}(\mathbb{P} \left(\exists k \in [|1,n|] \text{ , tel que : } \sum_{i=1}^{k} (\frac{NcT_k}{k} - X_i) < -Nu \right))$$

Par loi des grands nombres nous avons :

$$\frac{1}{p} \sum_{j=1}^{p} V_j \xrightarrow[p \to +\infty]{p.s.} \mathbb{P} \left(\min_{t \in [0,365]} R_t < 0 \right)$$

3 Commentaires sur les techniques de programmation

4 Les différents modèles

4.1 Complexité algorithmique

4.2 Vérifications d'usage

Troisième partie

Conclusion

5 Commentaires sur la pertinence du modèle

6 Évolutions possibles du modèle

7 Commentaires

8 Annexes et contacts

Annexes et contacts