Sección 3 - Modelos Probabilísticos

Caso 3 - Parte Grupal

Instrucciones

- Realice este taller en grupos de máximo dos personas.
- Suba su solución al link habilitado en la página de Sicua de la sección 03 antes del **martes 8 de diciembre a las 23:59:59**.
- Los espacios habilitados para dudas de este caso serán: el tiempo de clase del **viernes 4 de diciembre** y el canal de Microsoft Teams dispuesto para ello. No se resolverán dudas por correo electrónico ni en los horarios de atención.
- No incurra en ninguna de las conductas que son consideradas como fraude académico de acuerdo al reglamento general de pregrado de la Universidad de los Andes.

Problemas

1. (50 puntos) La Red de Monitoreo de Calidad del Aire de Bogotá es un sistema de monitoreo ambiental continuo, que semanalmente provee información sobre el estado actual de la calidad del aire de la ciudad. Con base en la información disponible, al inicio de cada semana la Secretaría Distrital del Medio Ambiente hace una clasificación que da cuenta del problema y por tanto puede reportar una calidad del aire normal, en alerta o grave.

   El funcionamiento de plantas industriales en la ciudad influye significativamente en el estado de la calidad del aire. En este sentido, se ha estimado la función $F(x)$, la cual permite determinar la probabilidad de que la calidad del aire cambie de un estado a otro. Si la calidad del aire es normal y están en funcionamiento x plantas industriales, la probabilidad de que la calidad del aire continúe normal es de $1 - F(x)$, de que se vuelva grave es de $F(x)/2$ y el resto de la probabilidad se atribuye a un incremento de contaminantes que provocan que el estado de la calidad del aire pase a estar en alerta. Por otro lado, si la calidad del aire está en alerta y están en funcionamiento x plantas industriales, la probabilidad de que al inicio de la próxima semana la calidad del aire pase a ser normal y la de que se mantenga en alerta son iguales y la probabilidad de que la calidad del aire se vuelva grave es de $F(x)/2$. Finalmente, si la calidad del aire es grave y están funcionando x plantas industriales, se tiene que la probabilidad de que se mantenga en ese estado es de $F(x)$, de lograr normalizar la calidad del aire es de $(1 - F(x))/3$ y el resto de la probabilidad se asocia al hecho de que la calidad del aire está en alerta. De acuerdo con lo anterior, al inicio de cada semana, tras revisar el estado del aire, la alcaldía decide cada semana sí permitir la apertura del 100% de las plantas de la ciudad, del 70% o del 50% del total de las plantas industriales.

   La Organización Panamericana de la Salud (OPS), con el fin de promover acciones que mejoren la calidad del aire en las ciudades, ha decidido otorgar bonificaciones de acuerdo con los niveles de calidad de aire que se reporten en un mes. En este sentido, si a final de mes una ciudad reporta una calidad del aire normal, la OPS le dará una bonificación a la alcaldía de Bogotá de \$1500 MUSD, si la calidad del aire está en alerta la bonificación es de \$600 MUSD y finalmente, si la calidad es grave la OPS hace una donación de \$150 MUSD que deben ser invertidos obligatoriamente en mejorar la calidad del aire. En la actualidad, la ciudad de Bogotá cuenta con un total de 100 plantas industriales y el cierre de cada planta representa un costo de \$4 MUSD para la alcaldía.

Teniendo en cuenta lo anterior, realice lo siguiente:

(a) (20 puntos) Determine las componentes necesarias para poder solucionar el problema utilizando programación dinámica: Variable de estado, espacio de estados, épocas de decisión, espacio de decisiones, función que describa el máximo beneficio posible, costos o ganancias inmediatas, probabilidades de transición.

X_n: Estado de la calidad del aire al inicio de la semana n.

Espacio de estados:

$$S = \{Normal(N), Alerta(A), Grave(G)\}$$

Se define el conjunto de épocas de decisión como:

$$T = \{0, 1, 2, 3\}$$

Conjunto de decisiones:

D ={Abrir todas las plantas(100), Abrir el 70% de las plantas(70), Abrir el 50% de la plantas(50)}

La función que se quiere optimizar es aquella que guarde el máximo beneficio posible obtenido, dado el estado de la calidad del aire en un momento determinado de tiempo:

$f_t(d)$ = Máximo beneficio esperado por el estado de la calidad del aire, dado que en el momento t de decisión (semana) el estado de la calidad del aire es d.

Los costos o ganancias inmediatas se definen para un estado y la decisión asociada. Este problema solo se relaciona con la decisión:

$$c(50) = -\$4 \times Z \times 0.5 = -\$2Z$$
$$c(70) = -\$4 \times Z \times 0.3 = -\$1.2Z$$
$$c(100) = \$0$$

Igualmente, se puede considerar como retorno inmediato el beneficio obtenido en la última etapa si se finaliza en cada uno de los estados:

$$r(N) = \$1500$$
$$r(A) = \$600$$
$$r(G) = \$150$$

Finalmente, se definen las probabilidades de transición.

En caso que la decisión sea 50:

$$P(50) = \begin{array}{c|ccc} & N & A & G \\ \hline N & 1-F(0.5\times Z) & \frac{F(0.5\times Z)}{2} & \frac{F(0.5\times Z)}{2} \\ A & \frac{2-F(0.5\times Z)}{4} & \frac{2-F(0.5\times Z)}{4} & \frac{F(0.5\times Z)}{2} \\ G & \frac{1-F(0.5\times Z)}{3} & \frac{2(1-F(0.5\times Z))}{3} & F(0.5\times Z) \end{array}$$

En caso que la decisión sea 70:

$$P(70) = \begin{array}{c|ccc} & N & A & G \\ \hline N & 1-F(0.7\times Z) & \frac{F(0.7\times Z)}{2} & \frac{F(0.7\times Z)}{2} \\ A & \frac{2-F(0.7\times Z)}{4} & \frac{2-F(0.7\times Z)}{4} & \frac{F(0.7\times Z)}{2} \\ G & \frac{1-F(0.7\times Z)}{3} & \frac{2(1-F(0.7\times Z))}{3} & F(0.7\times Z) \end{array}$$

En caso que la decisión sea 100:

$$P(100) = \begin{array}{c|ccc} & N & A & G \\ \hline N & 1-F(Z) & \frac{F(Z)}{2} & \frac{F(Z)}{2}) \\ A & \frac{2-F(Z)}{4} & \frac{2-F(Z)}{4} & \frac{F(Z)}{2} \\ G & \frac{1-F(Z)}{3} & \frac{2(1-F(Z))}{3} & F(Z) \end{array}$$

(b) (30 puntos) Si en Bogotá hay un total de 100 plantas industriales y la funcion $F(x)$ está definida de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} 0.1 & x \leq 5 \\ 0.25 & 5 < x \leq 10 \\ 0.4 & 10 < x \leq 50 \\ 0.7 & 50 < x \leq 80 \\ 0.85 & 80 < x \leq 100 \\ 1 & x > 100 \end{cases}$$

Determine la política óptima en cuanto al cierre de las plantas industriales, teniendo en cuenta que al inicio de la primera semana el estado de la calidad del aire es normal.

Antes de comenzar, teniendo en cuenta la función y la cantidad de plantas industriales, las probabilidades de transición son las siguientes:

$$P(50) = \begin{array}{c|ccc} & N & A & G \\ \hline N & 0.6 & 0.2 & 0.2 \\ A & 0.4 & 0.4 & 0.2 \\ G & 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{array}$$

$$P(70) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{N} & \text{A} & \text{G} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{N} \\ \text{A} \\ \text{G} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.3 & 0.35 & 0.35 \\ 0.325 & 0.325 & 0.35 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$P(100) = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} \text{N} & \text{A} & \text{G} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{N} \\ \text{A} \\ \text{G} \end{array} & \begin{pmatrix} 0.15 & 0.425 & 0.425 \\ 0.2875 & 0.2875 & 0.425 \\ 0.05 & 0.1 & 0.85 \end{pmatrix} \end{array}$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se procede de la siguiente manera: Etapa 3:

$$f_3(N) = max \begin{cases} 0.6(r(N)) + 0.2(r(A)) + 0.2(r(G)) - c(50) = 850 & d = 50* \\ 0.3(r(N)) + 0.35(r(A)) + 0.35(r(G)) - c(70) = 592.5 & d = 70 \\ 0.15(r(N)) + 0.425(r(A)) + 0.425(r(G)) - c(100) = 543.75 & d = 100 \end{cases}$$

$$f_3(A) = max \begin{cases} 0.4(r(N)) + 0.4(r(A)) + 0.2(r(G)) - c(50) = 670 & d = 50* \\ 0.325(r(N)) + 0.325(r(A)) + 0.35(r(G)) - c(70) = 615 & d = 70 \\ 0.2875(r(N)) + 0.2875(r(A)) + 0.425(r(G)) - c(100) = 667.5 & d = 100 \end{cases}$$

$$f_3(G) = max \begin{cases} 0.2(r(N)) + 0.2(r(A)) + 0.4(r(G)) - c(50) = 280 & d = 50* \\ 0.1(r(N)) + 0.2(r(A)) + 0.7(r(G)) - c(70) = 255 & d = 70 \\ 0.05(r(N)) + 0.1(r(A)) + 0.85(r(G)) - c(100) = 262.5 & d = 100 \end{cases}$$

Etapa 2:

$$f_2(N) = max \begin{cases} 0.6(f_3(N)) + 0.2(f_3(A)) + 0.2(f_3(G)) - c(50) = 500 & d = 50 \\ 0.3(f_3(N)) + 0.35(f_3(A)) + 0.35(f_3(G)) - c(70) = 467 & d = 70 \\ 0.15(f_3(N)) + 0.425(f_3(A)) + 0.425(f_3(G)) - c(100) = 531.25 & d = 100* \end{cases}$$

$$f_2(A) = max \begin{cases} 0.4(f_3(N)) + 0.4(f_3(A)) + 0.2(f_3(G)) - c(50) = 464 & d = 50 \\ 0.325(f_3(N)) + 0.325(f_3(A)) + 0.35(f_3(G)) - c(70) = 472 & d = 70 \\ 0.2875(f_3(N)) + 0.2875(f_3(A)) + 0.425(f_3(G)) - c(100) = 556 & d = 100* \end{cases}$$

$$f(G)_2 = max \begin{cases} 0.2(f_3(N)) + 0.2(f_3(A)) + 0.4(f_3(G)) - c(50) = 216 & d = 50 \\ 0.1(f_3(N)) + 0.2(f_3(A)) + 0.7(f_3(G)) - c(70) = 295 & d = 70 \\ 0.05(f_3(N)) + 0.1(f_3(A)) + 0.85(f_3(G)) - c(100) = 347.5 & d = 100* \end{cases}$$

Etapa 1:

$$f_1(N) = max \begin{cases} 0.6(f_2(N)) + 0.2(f_2(A)) + 0.2(f_2(G)) - c(50) = 299.45 & d = 50 \\ 0.3(f_2(N)) + 0.35(f_2(A)) + 0.35(f_2(G)) - c(70) = 355.6 & d = 70 \\ 0.15(f_2(N)) + 0.425(f_2(A)) + 0.425(f_2(G)) - c(100) = 463.675 & d = 100* \end{cases}$$

$$f_1(A) = max \begin{cases} 0.4(f_2(N)) + 0.4(f_2(A)) + 0.2(f_2(G)) - c(50) = 304.4 & d = 50 \\ 0.325(f_2(N)) + 0.325(f_2(A)) + 0.35(f_2(G)) - c(70) = 354.981 & d = 70 \\ 0.2875(f_2(N)) + 0.2875(f_2(A)) + 0.425(f_2(G)) - c(100) = 460.272 & d = 100* \end{cases}$$

$$f(G)_1 = max \begin{cases} 0.2(f_2(N)) + 0.2(f_2(A)) + 0.4(f_2(G)) - c(50) = 156.45 & d = 50 \\ 0.1(f_2(N)) + 0.2(f_2(A)) + 0.7(f_2(G)) - c(70) = 287.575 & d = 70 \\ 0.05(f_2(N)) + 0.1(f_2(A)) + 0.85(f_2(G)) - c(100) = 377.538 & d = 100* \end{cases}$$

Finalmente, etapa 0. En esta se evalúa el estado inicial:

$$f_0(N) = max \begin{cases} 0.6(f_1(N)) + 0.2(f_1(A)) + 0.2(f_1(G)) - c(50) = 245.767 & d = 50 \\ 0.3(f_1(N)) + 0.35(f_1(A)) + 0.35(f_1(G)) - c(70) = 312.336 & d = 70 \\ 0.15(f_1(N)) + 0.425(f_1(A)) + 0.425(f_1(G)) - c(100) = 425.62 & d = 100* \end{cases}$$

De acuerdo con lo anterior, se tiene que no se debe cerrar ninguna planta durante las primeras tres semanas y que en la última semana, sin importar el estado de la calidad del aire, se deben cerrar el 50% . Con esta política se obtiene un beneficio esperado de $425.62 MUSD.

2. (50 puntos) Cada estudiante de la Universidad San Marino puede ser clasificado en cuatro categorías de acuerdo con su desempeño académico: *Excelente*, *Bueno*, *Promedio* y *Regular*. Cada estudiante elige sus propios hábitos de estudio, los cuáles pueden corresponder a únicamente asistir a clase **(1)**, a realizar adicionalmente las complementarias y tareas **(2)** o a leer el libro guía además de las dos actividades anteriores **(3)**.

   Un estudiante excelente hará mínimo las tareas y las complementarias, en cuyo caso seguirá siendo excelente con una probabilidad de 0.6, de lo contrario, pasará a ser bueno. Por otro lado, sólo 1 de 10 estudiantes excelentes descenderá a la categoría bueno en caso de leer el libro guía, los demás, seguirán siendo excelentes.

   Por otra parte, un estudiante regular nunca leerá el libro. Si un estudiante regular únicamente asiste a clase, seguirá siendo regular el 90% de las veces y ocasionalmente será un estudiante promedio. Finalmente, si un estudiante regular hace las complementarias y las tareas podrá volverse bueno el 5% de las veces, o promedio con una probabilidad de 0.25. En cualquier otro caso continúa siendo regular.

   Ahora bien, para un estudiante bueno se tienen las probabilidades de transición:

Decisión/Categoría	E	B	P	R
1	0.05	0.7	0.15	0.1
2	0.25	0.6	0.1	0.05
3	0.5	0.5	0	0

Table 1: Probabilidades de transición para un estudiante bueno

Para finalizar, un estudiante promedio que únicamente va a clase seguirá siendo promedio la mitad de las veces, regular con probabilidad de 0.3, o bueno con la probabilidad restante. Por otro lado, 10% de los estudiantes promedio que realizan las complementarias y tareas podrán pasar a ser excelentes, 30% pasarán a ser buenos y el 50% continuarán siendo promedio. Cuando se toman la tarea de leer el libro guía, con una probabilidad de 0.2 se vuelven estudiantes excelentes, con una probabilidad de 0.3 se vuelven estudiantes buenos y nunca pasarán a ser regulares.

Las decisiones sobre los hábitos de estudio a adoptar implican tiempo y esfuerzo, por lo que generan una ganancia sobre la satisfacción de los estudiantes. Dichas ganancias se presentan enseguida.

Categoría	1	2	3
E	No existe	3	0
B	4	2	-10
P	3	-5	-10
R	-3	-15	No existe

Table 2: Ganancias inmediatas por estado y acción

(a) (25 puntos) Determine todas las componentes necesarias para poder solucionar la situación anterior.

Tenga en cuenta que la decisión sobre sus hábitos de estudio cada semestre, y que su objetivo es maximizar las satisfacción esperada en el largo plazo asumiendo un factor de descuento igual a β.

Se define cada $t \in E$ como el periodo de estudio t. Sea X_t la categoría del estudiante en el momento t. Entonces

$$S = \{(E), (B), (P), (R)\}.$$

Para cada $(i) \in S$, las decisiones que puede tomar el estudiante es ir a clase (1), hacer las complementarias (2) y leer el libro (3). Así pues $A(i) = \{1, 2, 3\}$, sabiendo que no existen $A(E) = 1$ ni $A(R) = 3$.

Por último las probabilidades de transición dependen de la acción y se tienen las siguientes matrices de probabilidades de transición:

Decisión 1:

$$\begin{array}{c} \\ B \\ P \\ R \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & B & P & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.05 & 0.7 & 0.15 & 0.1 \\ 0 & 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0.1 & 0.9 \end{pmatrix} \end{array}$$

Decisión 2:

$$\begin{array}{c} \\ E \\ B \\ P \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & B & P & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.6 & 0.1 & 0.05 \\ 0.1 & 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.05 & 0.25 & 0.7 \end{pmatrix} \end{array}$$

Decisión 3:

$$\begin{array}{c} \\ E \\ B \\ P \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} E & B & P & R \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b) (25 puntos) Formule el programa lineal y encuentre la política óptima.

La función objetivo es

$$\min z = V_E + V_B + V_P + V_R$$

Las restricciones son: Para los estados que inician en E,

$$V_E \geq 3 + (0.6 \cdot V_E + 0.4 \cdot V_B)\beta$$
$$V_E \geq (0.9 \cdot V_E + 0.1 \cdot V_B)\beta$$

Para los estados que inician en B,

$$V_B \geq 4 + (0.05 \cdot V_E + 0.7 \cdot V_B + 0.15 \cdot V_P + 0.1 \cdot V_R)\beta$$

$$V_B \geq 2 + (0.25 \cdot V_E + 0.6 \cdot V_B + 0.1 \cdot V_P + 0.05 \cdot V_R)\beta$$
$$V_B \geq -10 + (0.5 \cdot V_E + 0.5 \cdot V_B)\beta$$

Para los estados que inician en P,

$$V_P \geq 3 + (0.2 \cdot V_B + 0.5 \cdot V_P + 0.3 \cdot V_M)\beta$$

$$V_P \geq -5 + (0.1 \cdot V_E + 0.3 \cdot V_B + 0.5 \cdot V_P + 0.1 \cdot V_M)\beta$$
$$V_P \geq -10 + (0.2 \cdot V_E + 0.3 \cdot V_B + 0.5 \cdot V_P)\beta$$

Y para los estados que inician en R,

$$V_R \geq -3 + (0.1 \cdot V_P + 0.9 \cdot V_R)\beta$$

$$V_R \geq -15 + (0.05 \cdot V_B + 0.25 \cdot V_P + 0.7 \cdot V_R)\beta$$