preco_venda_metodos

December 13, 2022

1 Problema

(Fonte: LEMOS DOS SANTOS, Vinícius et al. APLICAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON, SECANTE E BISSEÇÃO PARA DEFINIÇÃO DE PREÇO ADEQUADO À VENDA. Santana do Livramento: Universidade Federal do Pampa, 2018.)

A empresa fictícia Lighter Fire, pretende lançar um isqueiro no mercado. Para isso realizou uma pesquisa de mercado para obter previsões de demanda semestral para diferentes preços de venda a fim de obter o preço que maximize seus lucros. O custo unitário de produção é R$1,00, este preço permanecerá constante mesmo com variações de unidades produzidas. O resultado dessa pesquisa pode ser observado na Tabela 1.

Preço (R$)	Previsão de demanda	Previsão de lucro
2.0	500000	500000
2.5	450000	675000
3.0	350000	700000
3.5	200000	500000
4.0	40000	120000

Pretende-se determinar um polinômio que interpole os pontos dados, através da biblioteca numpy de álgebra linear.

2 Solução

2.1 Importação de bibliotecas

[ ]:
```
##Importar biblioteca numpy

import numpy as np
```

2.2 Polinômios

2.2.1 Previsão demanda

Para resolver o problema precisamos calcular os coeficientes de um polinômio que possui os valores da coluna **Previsão de demanda** da tabela no seu domínio. É útil que tenhamos um método que, dado um valor $x \in R$ e um vetor de coeficientes, nos retorna o valor do polinômio em x.

2.3 Matriz de Vandermonde

Também é necessário descrever o sistema de equações como uma matriz, para que possamos resolver o problema linearmente. A matriz de Vandermonde nos auxilia nesse processo descrevendo um conjunto de observações x_i para o mesmo polinômio:

$$\begin{bmatrix} x_1^{n-1} & x_1^{n-2} & \dots & x_1^1 & 1 \\ x_2^{n-1} & x_2^{n-2} & \dots & x_2^1 & 1 \\ \dots \\ x_n^{n-1} & x_n^{n-2} & \dots & x_n^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ a_{n-2} \\ \dots \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema obtemos o polinômio interpolador para os valores do problema.

$$p(x) = a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_0x^0$$

No enunciado do problema temos 5 amostras de valores, portanto nossa matriz de coeficientes A pode ser definida por:

$$\begin{bmatrix} 2.0^4 & 2.0^3 & 2.0^2 & 2.0^1 & 1 \\ 2.5^4 & 2.5^3 & 2.5^2 & 2.5^1 & 1 \\ 3.0^4 & 3.0^3 & 3.0^2 & 3.0^1 & 1 \\ 3.5^4 & 3.5^3 & 3.5^2 & 3.5^1 & 1 \\ 4.0^4 & 4.0^3 & 4.0^2 & 4.0^1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_4 \\ a_3 \\ a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500000 \\ 450000 \\ 350000 \\ 200000 \\ 40000 \end{bmatrix}$$

Resolvendo esse sistema obtemos o polinômio interpolador para os valores do problema.

$$p(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0x^0$$

2.4 Demanda prevista

2.4.1 Resolução sistema

[ ]:
```
##Definir variáveis demanda prevista

x = [2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0]
y = [500000, 450000, 350000, 200000, 40000]
```

[ ]:
```
##Resolver matriz 5x5 dos coeficientes por numpy

x = np.array( [[x[0]**4, x[0]**3, x[0]**2, x[0], x[0]**0],
               [x[1]**4, x[1]**3, x[1]**2, x[1], x[1]**0],
               [x[2]**4, x[2]**3, x[2]**2, x[2], x[2]**0],
               [x[3]**4, x[3]**3, x[3]**2, x[3], x[3]**0],
               [x[4]**4, x[4]**3, x[4]**2, x[4], x[4]**0]])

y = np.array(y)

c = np.linalg.solve(x, y)
```

```
print(f"a4: {c[0]:.2f} a3: {c[1]:.2f} a2: {c[2]:.2f} a1: {c[3]:.2f} a0: {c[4]:.
↪2f}")
```

```
a4: 26666.67 a3: -293333.33 a2: 1093333.33 a1: -1776666.67 a0: 1600000.00
```

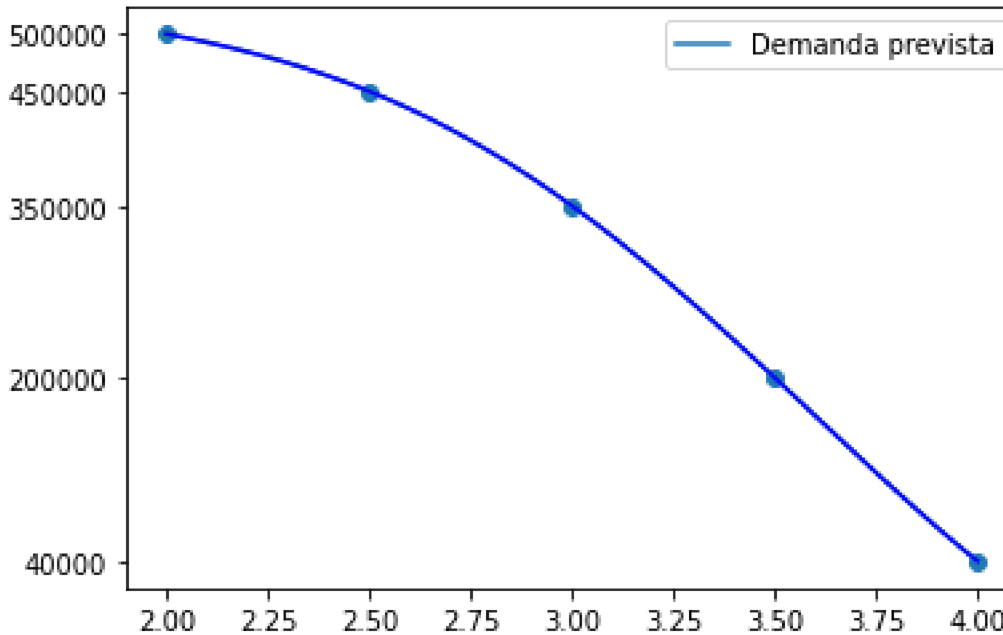
2.4.2 Polinômio demanda prevista

$$p(x) = 26666.67x^4 - 293333.33x^3 + 1093333.33x^2 - 1776666.67x + 1600000.00$$

2.4.3 Análise gráfica do polinômio

[ ]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy

##Gráfico da demanda
x1 = np.arange(2.0, 4.0, 0.001)
y1 = c[0]*x1**4 + c[1]*x1**3 + c[2]*x1**2 + c[3]*x1**1 + c[4]

##Mudança escala eixo y
plt.yticks(y)

##Pontos x e y
x = [2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0]
y = [500000, 450000, 350000, 200000, 40000]

ax = plt.subplot()
ax.plot(x1, y1, label='Demanda prevista')

plt.scatter(x, y)

plt.plot(x1, y1, 'b')

ax.legend()
plt.show()
```

```
<ipython-input-4-99c4f4f1a1df>:15: MatplotlibDeprecationWarning: Adding an axes
using the same arguments as a previous axes currently reuses the earlier
instance.  In a future version, a new instance will always be created and
returned.  Meanwhile, this warning can be suppressed, and the future behavior
ensured, by passing a unique label to each axes instance.
  ax = plt.subplot()
```



2.5 Lucro previsto

2.5.1 Resolução sistema

[ ]:
```
##Definir variáveis lucro previsto

x = [2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0]
y = [500000, 675000, 700000, 500000, 120000]
```

[ ]:
```
##Resolver matriz 5x5 dos coeficientes por numpy

x = np.array( [[x[0]**4, x[0]**3, x[0]**2, x[0], x[0]**0],
               [x[1]**4, x[1]**3, x[1]**2, x[1], x[1]**0],
               [x[2]**4, x[2]**3, x[2]**2, x[2], x[2]**0],
               [x[3]**4, x[3]**3, x[3]**2, x[3], x[3]**0],
               [x[4]**4, x[4]**3, x[4]**2, x[4], x[4]**0]])

y = np.array(y)

c = np.linalg.solve(x, y)

print(f"a4: {c[0]:.2f} a3: {c[1]:.2f} a2: {c[2]:.2f} a1: {c[3]:.2f} a0: {c[4]:.
 ↪2f}")
```

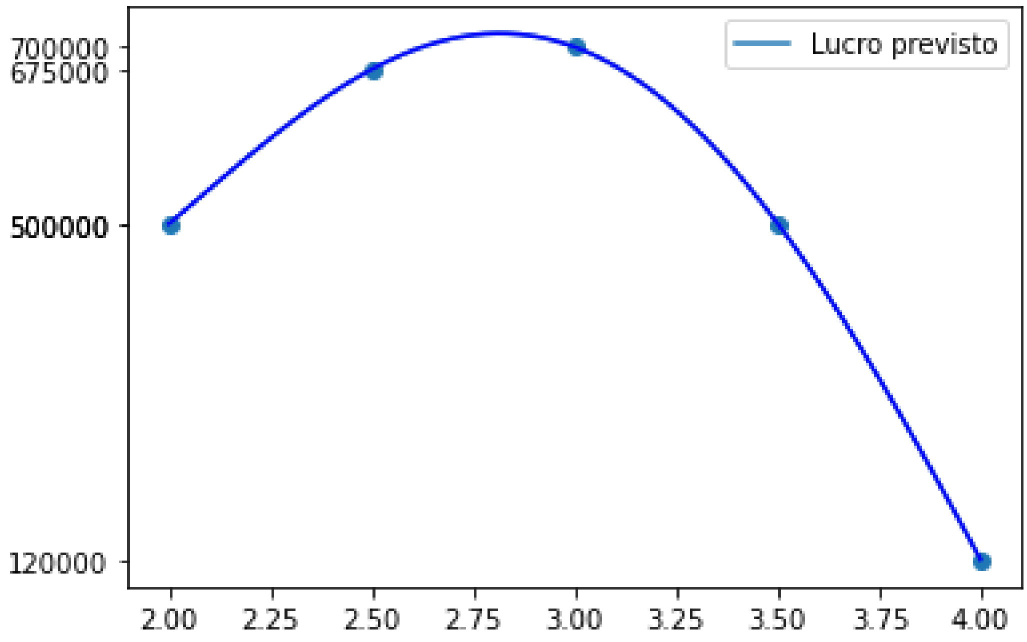
```
a4: 80000.00 a3: -980000.00 a2: 4030000.00 a1: -6530000.00 a0: 4000000.00
```

2.5.2 Polinômio lucro previsto

$$p(x) = 80000.00x^4 - 980000.00x^3 + 4030000.00x^2 - 6530000.00x + 4000000.00$$

2.5.3 Análise gráfica do polinômio

[ ]:
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy

##Gráfico de lucro
x1 = np.arange(2.0, 4.0, 0.001)
y1 = c[0]*x1**4 + c[1]*x1**3 + c[2]*x1**2 + c[3]*x1**1 + c[4]

##Mudança escala eixo y
plt.yticks(y)

##Pontos x e y
x = [2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0]
y = [500000, 675000, 700000, 500000, 120000]

ax = plt.subplot()
ax.plot(x1, y1, label='Lucro previsto')

plt.scatter(x, y)

plt.plot(x1, y1, 'b')

ax.legend()
plt.show()
```



2.6 Métodos numéricos para encontrar o lucro máximo previsto

(Fonte: GOMES RUGGIERO, Márcia A.; DA ROCHA LOPES, Vera Lúcia. Cálculo Numérico: Aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2019.)

Para determinarmos o ponto máximo da função lucro precisamos calcular a raiz real da sua função derivada. Para isso, já que a função é um polinômio de grau maior que três, usaremos métodos numéricos como o de Newton, da secante e da bisseção. Os métodos consistem basicamente em a partir de uma aproximação inicial para a raiz refinar essa aproximação através de um processo iterativo.

2.7 Método de Newton

2.7.1 Função de iteração:

$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

Gera uma série que tende a raiz real da função, e como a ordem de convergência é quadrática garante que a cada iteração "acerte" duas casas decimais da raiz fazendo com que 3 iterações sejam suficientes para uma precisão de duas casas decimais.

[ ]:
```python
import sympy as sp
import time

x = sp.Symbol('x')

#definir função lucro
flucro = 80000*x**4 - 980000*x**3 + 4030000*x**2 - 6530000*x + 4000000.00

#definir derivadas
#definir primeira derivada da função lucro prevista
f = flucro.diff(x)

#definir segunda derivada da função lucro prevista
df = f.diff(x)

print(f"f'= {f}\nf''= {df}")
```

```
f'= 320000*x**3 - 2940000*x**2 + 8060000*x - 6530000
f''= 960000*x**2 - 5880000*x + 8060000
```

[ ]:
```python
import sympy as sp



#definir derivada função lucro
def f(x):
  return 320000*x**3 - 2940000*x**2 + 8060000*x - 6530000
```

```
#testar alguns preços e estudar os sinais da função
print(f'    0    |    1     |    2    |    2.5    |    3    |    4     |    5   ␣
↪|\n{f(0)} | {f(1)} | {f(2)} | {f(2.5)} | {f(3)} | {f(4)} | {f(5)} |')
```

```
    0    |     1     |    2    |    2.5    |     3    |    4     |    5    |
-6530000 | -1090000 | 390000 | 245000.0 | -170000 | -850000 | 270000 |
```

Pelo estudo do sinal da função, percebe-se que o ponto máximo está entre $[2.5, 3]$, pois é onde o sinal da função derivada "troca" de positivo para negativo, indicando que a função apresenta um valor máximo neste intervalo.

[ ]:
```
inicio = time.time()
#importar bibliotecas
from sympy import *

#definir derivada da função lucro prevista
def f(x):
  return 320000*x**3 - 2940000*x**2 + 8060000*x - 6530000

#definir segunda derivada da função lucro prevista
def df(x):
  return 960000*x**2 - 5880000*x + 8060000

#definir função lucro
def flucro(x):
  return 80000*x**4 - 980000*x**3 + 4030000*x**2 - 6530000*x + 4000000.00

#definir função demanda
def fdemanda(x):
  return 26666.67*x**4 - 293333.33*x**3 + 1093333.33*x**2 - 1776666.67*x +␣
↪1600000.0


#definir parâmetros

x = symbols('x')
x0 = 2.5 #x inicial
k = 3 #iteracao

#metodo newton
for i in range(k):
  sn = x0 - (f(x0)/df(x0))
  x0 = sn

fim = time.time()
tempo = fim - inicio
```

```python
print(f"O preço que maximiza o lucro é R${sn}")
print(f"O lucro máximo será de R${flucro(sn)}")
print(f"A demanda será de {round(fdemanda(sn))} unidades")
print(f"Tempo de execução: {tempo}")
```

```
O preço que maximiza o lucro é R$2.8147972753348047
O lucro máximo será de R$715584.6087796651
A demanda será de 393739 unidades
Tempo de execução: 0.0018930435180664062
```

2.8 Método da Secante

Gera uma série que tende a raiz real da função, com uma convergência próxima da quadrada fazendo com que 3 iterações sejam suficientes para uma precisão de duas casas decimais. ### Função de iteração:

$\phi(x_k) = x_k - \frac{f(x_k)(x_k - x_{k-1})}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$

[ ]:
```python
inicio = time.time()
#metodo secante
#definir parâmetros do intervalo da precisão e das iterações

xs0 = 2.5 #inicio intervalo
xs1 = 2.7 #ponto proximo inicio intervalo
e = 0.001 #precisao
k = 3 #iteracao
i = 0

while True:
  xs2 = xs1 - f(xs1)*(xs1-xs0)/(f(xs1)-f(xs0))

  if i == k:
    break;

  else:
    xs0 = xs1
    xs1 = xs2

    i = i + 1

fim = time.time()
tempo = fim - inicio

print(f"O preço pelo método da secante é R${xs2}")
print(f"O lucro máximo será de R${flucro(xs2)}")
print(f"A demanda será de {round(fdemanda(xs2))} unidades")
print(f"Tempo de execução: {tempo}")
```

```
O preço pelo método da secante é R$2.8147970162080047
```

```
O lucro máximo será de R$715584.6087796949
A demanda será de 393739 unidades
Tempo de execução: 0.0003790855407714844
```

2.9 Método da Bisseção

Seja uma função $f(x)$ contínua em $[a, b]$ e tal que $f(a)f(b) < 0$.
Vamos supor, para simplificar, que o intervalo (a, b) contenha uma única raiz da equação $f(x) = 0$.
O objetivo desse método é reduzir a amplitude do intervalo que contém a raiz até atingir-se a precisão desejada: $(b - a) < \epsilon$, usando para isso a sucessiva divisão de $[a, b]$ ao meio.
O número de iterações se dá pela expressão:

$k > \frac{log(b_0 - a_0) - log(\epsilon)}{log(2)}$.

[ ]:
```
inicio = time.time()
import numpy as np

#definir parâmetros do intervalo da precisão e das iterações

a = 2.5 #inicio intervalo
b = 3.0 #fim intervalo
e = 0.001 #precisao
k = floor((np.log10(b-a)-np.log10(e))/np.log10(2)) #iteracao


for i in range(k):
  if (b - a) < e:
    sb = (a + b)/2

  m = f(a)
  sb = (a + b)/2

  if m*f(sb) > 0:
    a = sb
  else:
    b = sb

fim = time.time()
tempo = fim - inicio

print(f"O preço pelo método da bisseção é R${sb}")
print(f"O lucro máximo será de R${flucro(sb)}")
print(f"A demanda será de {round(fdemanda(sb))} unidades")
print(f"Tempo de execução: {tempo}")
```

```
O preço pelo método da bisseção é R$2.814453125
O lucro máximo será de R$715584.5564615428
A demanda será de 393813 unidades
Tempo de execução: 0.001068115234375
```

2.10 Comparação entre os métodos

Em relação as iterações, os métodos de Newton e da Secante precisaram de 3. Entretanto o grau de convêrgencia é diferente: o primeiro tem grau 2 e o segundo aproximadamente 1,61. Quer dizer que para precisões maiores, o número de iterações mudaria.
O método da bisseção precisou de 8 iterações, porém como ainda são poucas iterações, não apresentou grande diferença no tempo de execução. Em relação aos algoritmos, o de Newton foi o que demandou mais esforço computacional, pois precisou definir as derivadas. O da bisseção precisou de muitas condições. O mais simples foi o da Secante. Todos apresentaram resultados satisfatórios de acordo com a precisão demandada, porém, para o problema aqui apresentado, o método da Secante mostrou-se mais eficaz.

	Newton	Secante	Bisseção
Dados iniciais	$x_0 = 2.5$	$x_0 = 2.5$ $x_1 = 2.7$	[2.5, 3.0]
x	2.814797	2.814797	2.814453
f(x)	715584.608779	715584.608779	715584.556461
Iterações	3	3	8
Tempo	0.001893s	0.000379s	0.001068