Python e Sympy na Resolução de Equações Diferenciais Aplicadas a Investimentos Imobiliários

Luís Fernandes Saucedo Souza[1] Bárbara Denicol do Amaral Rodriguez[1] Cristiana Andrade Poffal[1]

[1]Universidade Federal do Rio Grande – Instituto de Matemática, Estatística e Física

XI Bienal de Matemática UFSCAR, 2024

Sessões

Sessões

Introdução

Neste trabalho foi utilizado o método de capitalização de capital com depósitos ou retiradas (Freitas, 2019) para modelar um problema de aquisição de um imóvel proposto por Schuch e Tessmann (2022). No qual, leva em conta um cenário onde a variação nos depósitos é dada pela diferença das prestações que seriam pagas pelo imóvel e o seu aluguel.

Sessões

Descrição do Problema

Suponha que uma pessoa, sem capital inicial, investe a uma taxa de juros r (Freitas, 2019). Admitindo que o investimento seja feito continuamente e que os juros sejam capitalizados também continuamente, tem-se que a taxa de crescimento do montante $S(t)$ é dada por:

$$\frac{dS}{dt} = rS. \tag{1}$$

Descrição do Problema

Como a capitalização é contínua, imaginando que além do rendimento dos juros existam depósitos, ou retiradas k e supondo que os depósitos, ou retiradas, ocorram a uma taxa constante, a equação (1) é reescrita como:

$$\frac{dS}{dt} = rS + k, \tag{2}$$

onde k é positiva no caso de depósitos e negativa no caso de retiradas.

Descrição do Problema

Como propõem Schuch e Tessmann (2022), utiliza-se a diferença do aluguel e das parcelas, que seriam pagas em um empréstimo de um imóvel, para aportes em aplicações financeiras. Logo, os depósitos k são representados por:

$$k = R - a, \tag{3}$$

onde R são as prestações do financiamento e a são os aluguéis.

Descrição do Problema

Uma vez conhecidas as constantes: valor do imóvel, entrada, taxa do financiamento, aluguel, taxa de juros e parcelas, para modelar o problema é preciso escrever k em função de tais constantes. Para isso, aplicam-se algumas propriedades da matemática financeira, listadas a seguir.

Descrição do Problema

As prestações são escritas como:

$$R = J + A, \tag{4}$$

onde J são os juros do financiamento e A a amortização do financiamento. Os juros são calculados da seguinte forma:

$$J = i_f \cdot SD, \tag{5}$$

onde i_f é a taxa do financiamento e SD é o saldo devedor.

Descrição do Problema

Para a amortização, como o cenário é de financiamento, utiliza-se o Sistema de Amortização Constante (SAC), onde a amortização é calculada por:

$$A = \frac{(V - E)}{n}, \tag{6}$$

para V o valor do imóvel, E o valor da entrada do financiamento e n o número de parcelas do financiamento.

Descrição do Problema

Já o saldo devedor é definido por:

$$SD = F - tA, \tag{7}$$

onde F é o saldo devedor inicial ou valor do financiamento e t o tempo. Agora substituindo a equação (7) na equação (5), tem-se os juros expressos por:

$$J = i_f \cdot (F - tA). \tag{8}$$

Descrição do problema

Substituindo a equação (8) na equação (4), tem-se:

$$R = i_f \cdot (F - tA) + A. \tag{9}$$

Substituindo a equação (9) na equação (3), chega-se a:

$$k = i_f \cdot (F - tA) + A - a. \tag{10}$$

Descrição do problema

Reagrupando os termos, escreve-se:

$$k = -i_f \cdot A \cdot t + i_f \cdot F + A - a. \tag{11}$$

Para simplificar os cálculos, definem-se as constantes α e β como:

$$\begin{aligned} \alpha &= -i_f \cdot A, \\ \beta &= i_f \cdot F + A - a. \end{aligned} \tag{12}$$

Descrição do problema

Então k pode ser escrito como:

$$k = \alpha t + \beta. \tag{13}$$

Logo, a equação diferencial que modela o problema é dada por:

$$\frac{dS}{dt} = rS + \alpha t + \beta. \tag{14}$$

Sessões

Solução analítica

Como a equação que modela o problema é uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem, de grau um, linear e não-homogênea, para a solução analítica empregou-se o método do fator integrante para equações diferenciais lineares (ZILL, 2001). Resolvendo a equação, chega-se na solução:

$$S(t) = \frac{i_f \cdot A \cdot t}{r} + \frac{i_f \cdot A}{r^2} - \frac{i_f \cdot F + A - a}{r} + \left(E - \frac{i_f \cdot A}{r^2} + \frac{i_f \cdot F + A - a}{r}\right) e^{rt} \tag{15}$$

onde E é a entrada.

SymPy

A solução analítica pode ser calculada com uma biblioteca da linguagem de programação Python chamada SymPy.

A biblioteca SymPy é uma ferramenta poderosa para cálculos simbólicos em Python. Ela permite manipular expressões matemáticas como símbolos, derivadas, integrais e simplificações, além de resolver equações de forma simbólica.

SymPy

Primeiro, a partir das constantes dos valores do imóvel, do valor de entrada, da taxa de financiamento, das taxas do aluguel e rendimento, determinam-se os depósitos ou retiradas (k) em função do tempo (t).

```
#definindo variaveis
t = sp.Symbol("t", real=True)

amortizacao = valor_do_financiamento/tempo
saldo_devedor = valor_do_financiamento - t*amortizacao
juros = taxa_financiamento*saldo_devedor
prestacoes = juros + amortizacao
aluguel = taxa_aluguel*valor_do_imovel

k = prestacoes - aluguel
```

SymPy

Com a função *k* definida, é possível definir a função do montante em relação ao tempo e a partir da função do SymPy **dsolve()** solucionar a EDO.

```
#definindo montante em fun  o do tempo
S = sp.Function('S')

#resolvedo edo que caracteriza o problema
St = sp.dsolve(sp.Derivative(S(t),t)-
    rendimento_investimentos*S(t)-k, S(t), ics={S(0):
    entrada})
```

Sessões

Solução numérica

Os resultados analíticos foram comparados com os obtidos a partir da aplicação do método discreto implementado por Schuch (2022), onde a capitalização é feita mês a mês e são utilizados Python e Pandas Data Frame, uma estrutura de dados tabular bidimensional potencialmente heterogênea e de tamanho variável com eixos rotulados (linhas e colunas) para modelagem (OLIVEIRA, 2021).

Solução numérica

Os valores considerados para a comparação entre os métodos consistem no financiamento de um imóvel de R\$$500.000,00$, com uma entrada no valor de R\$$100.000,00$ e uma taxa de financiamento anual de $0,0942\%$, aluguel do imóvel com taxa anual de $0,04\%$ e taxa de rendimento de investimento anual em $0,08\%$.

Solução numérica

	Aluguel	Custo - Aluguel	Aportes	Patrimônio	Patrimônio - Principal	Patrimônio - Rendimentos
0	0.00	0.00	100000.0	100000.0	100000.0	0.0
1	1636.87	1636.87	2486.311111	103129.714122	102486.311111	643.403011
2	1636.87	3273.74	2477.941111	106271.194919	104964.252222	1306.942697
3	1636.87	4910.61	2469.571111	109424.518098	107433.823333	1990.694765
4	1636.87	6547.48	2461.211111	112589.769853	109895.034444	2694.735409
...	...	...	...	...	...	...
356	1636.87	582725.72	-483.928889	3067152.213293	456424.345556	2610727.867738
357	1636.87	584362.59	-492.288889	3086394.074097	455932.056667	2630462.01743
358	1636.87	585999.46	-500.658889	3105751.367612	455431.397778	2650319.969834
359	1636.87	587636.33	-509.028889	3125224.836536	454922.368889	2670302.467648
360	1636.87	589273.20	-517.388889	3144815.238346	454404.98	2690410.258346

361 rows × 6 columns

Figura: Data Frame do cenário.

Fonte: Do Autor.

Comparação entre os métodos

Ao final de 360 meses do cenário estipulado, o montante calculado analiticamente é 0.0067% maior que o discreto.

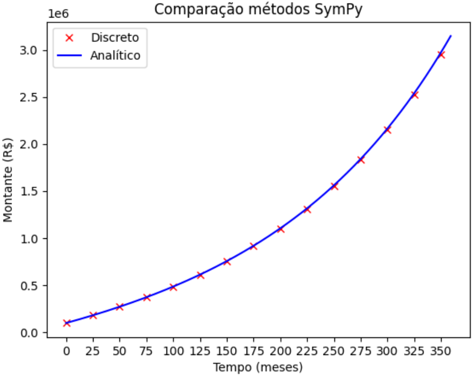

Figura: Comparação métodos.

Fonte: Do Autor.

Sessões

Conclusões

A solução analítica, implementada computacionalmente com a biblioteca Sympy do Python, mostrou resultados muito próximos ao método discreto, mesmo considerando um período de tempo relativamente grande. Além da precisão, a solução analítica oferece a vantagem de calcular o montante em qualquer instante de tempo e simplificar a implementação computacional, exigindo menos linhas de código e reduzindo o tempo de execução do programa.

Agradecimentos

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, através do Programa Institucional de bolsas de Iniciação Científica – PIBIC, pelo auxílio financeiro que possibilitou a dedicação ao projeto.

Sessões

Referências e materiais

Figura: Link do repositório.