

CAPITULO 3

Ruido Blanco Gaussiano:

El Ruido Blanco Gaussiano (White Gaussian Noise **WGN**) con media cero tiene la misma densidad espectral de potencia $G_{WGN}(f)$ para todas las frecuencias.

La función autocorrelación de **WGN** se denota con $Ra_{WGN}(\tau)$ y es cero para todo $\tau \neq 0$. Puede calcularse como la transformada inversa de Fourier de la función densidad espectral de potencia $G_{WGN}(f)$

$$\begin{aligned} Ra_{WGN}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} WGN(t)WGN(t+\tau) dt = \\ &= F^{-1}\{G_{WGN}(f)\} = \frac{N_0}{2} \delta(t) \end{aligned}$$

Esto indica que cualquier par de muestras de WGN son incorrelacionadas (sin importar cuan cerca este en el tiempo). Se dice que WGN es totalmente incorrelacionado respecto a cualquier versión de si mismo desplazada un tiempo $\tau \neq 0$.

La magnitud del WGN de banda ilimitada tiene una distribución de densidad de probabilidades Gaussiana y viene dada por:

$$p(WGN_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{\sigma}\right)^2\right]}$$

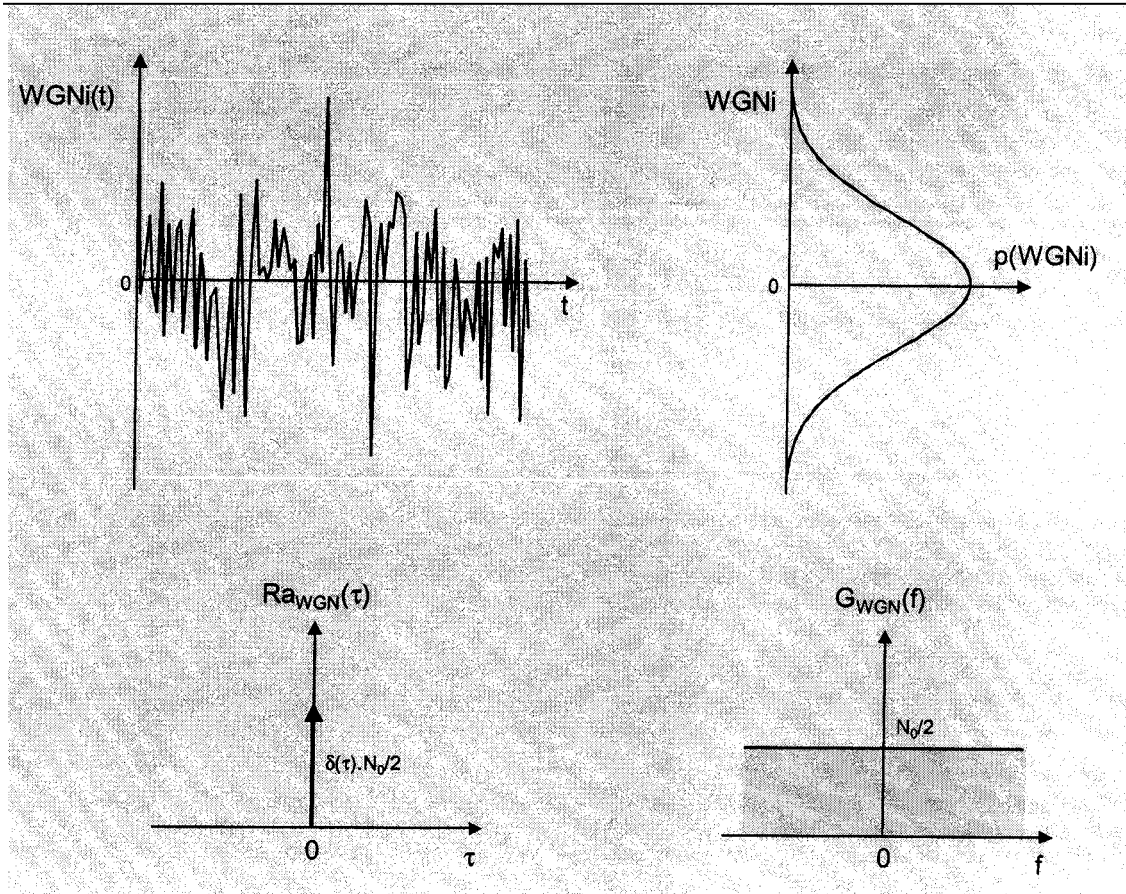


Fig 3.1

Ruido Pseudo Aleatorio:

En el capítulo anterior se utilizaron secuencias aleatorias para realizar el spreading de las señales. Desafortunadamente el receptor necesita una replica (en perfecto sincronismo) de la secuencia utilizada en el transmisor para realizar el despreading de la señal recibida. Al no poder utilizar generadores aleatorios se propone utilizar secuencia pseudo aleatorias (llamadas pseudo ruido PN) que tengan las siguientes propiedades:

- 1- Ser fácilmente generadas (responder a una ley determinística).
- 2- Tener propiedades similares a las aleatorias (propiedades estadística similares al WGN).
- 3- Tener largo periodos.
- 4- Ser difícilmente reconstruidas a partir de una muestra corta.

Los registros de desplazamiento con realimentación lineal generan secuencias con propiedades muy interesantes.

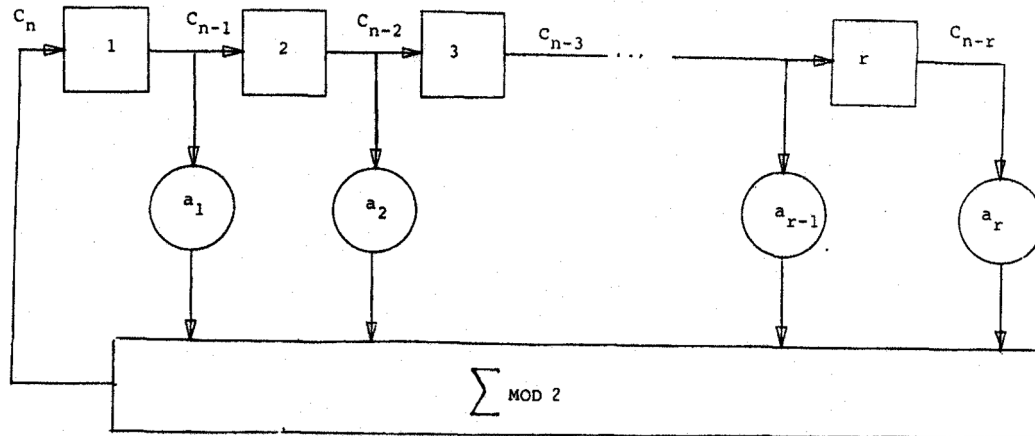


Fig. 4. Simple shift register generator (SSRG).

Fig 3.2

Se observa que cumplen las propiedades 1 y 3, cumplen parcialmente la propiedad 3 pero la propiedad 4.

El registro de desplazamiento consiste en una serie de elemento de memoria binaria que copia a la salida la información de entrada con cada pulso de clock. El contenido de cada registro (memoria) es combinado a través de coeficientes binarios (1,0) para determinar la entrada a la primera etapa. Suponiendo una combinación de modulo dos, la secuencia cumple con la siguiente ecuación recursiva:

$$C_n = \sum a_k C_{n-k} \pmod{2} \quad a_r = 1$$

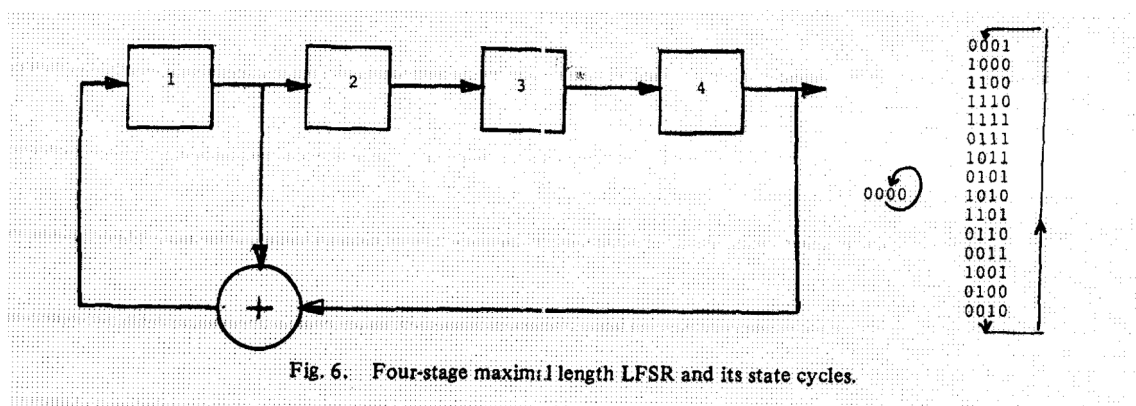
El periodo de la secuencia depende del estado inicial y de los coeficientes a_k seleccionados para la realimentación .

The diagram illustrates a four-stage Linear Feedback Shift Register (LFSR). The top part shows the hardware structure with four stages labeled 1, 2, 3, and 4. The output of stage 4 is fed back to the input of stage 1. The feedback is taken from the outputs of stages 1, 2, 3, and 4, which are then summed modulo 2 (indicated by the $\Sigma \text{ MOD } 2$ block) to produce the next input for stage 1. Below the hardware diagram, three state cycles are shown as directed graphs. The first cycle is a 4-state cycle: 1000 → 0001 → 0011 → 0110 → 1000. The second cycle is an 8-state cycle: 1111 → 1110 → 1101 → 1011 → 0111 → 0110 → 1000 → 1100 → 1111. The third cycle is a 4-state cycle: 0100 → 1001 → 0010 → 0101 → 0100.

Fig. 5. Four-stage LFSR and its state cycles.

Para utilizarlo como generador PN en un sistema SS se busca que tenga la máxima longitud, que será $2^r - 1$, donde r es el número de registros. Obsérvese que se debe evitar el estado de todos ceros.

1 0 0 0 1 1 1 1 0 1 0 1 1 0 0



En este caso el contenido inicial de los registros es:

1 0 0 0 de izquierda a derecha

Siempre es posible encontrar un juego de coeficientes tal que la secuencia tenga longitud máxima.

Estas secuencias de longitud máxima tienen las siguientes características estadísticas:

1 – Propiedad de Balance:

En cada periodo de la secuencia la cantidad de unos difiere en uno de la cantidad de ceros, tienen 2^{r-1} unos y $2^{r-1} - 1$ ceros.

$$pn = +1 \quad +1 \quad +1 \quad -1 \quad +1 \quad -1 \quad -1 \quad \sum pn = +1$$

Cuando se modula una portadora con una secuencia pn , el balance de ceros y unos limita el grado de supresión de portadora obtenida. Esto será solucionado en las aplicaciones prácticas.

2 – Distribución de longitudes de las corridas:

Una corrida es una secuencia de un mismo tipo de dígitos binarios (unos o ceros). Entre las corridas de unos y ceros en cada periodo es deseable que la mitad de las corridas de cada tipo tenga longitud 1, que un cuarto tenga longitud 2 que un octavo son de longitud tres, etc

3 – Autocorrelación:

El origen del nombre “Ruido o Secuencia Pseudoaleatoria” proviene del hecho de tener una función autocorrelación similar a la del ruido blanco Gaussiano.

La función autocorrelación para un dado periodo de una secuencia está dado como la cantidad de acuerdos menos la cantidad de desacuerdos que surgen de la comparación término a término de un periodo completo con la misma secuencia desplazada τ posiciones.

$$Ra(\tau) = \int_{-N_c T_c/2}^{N_c T_c/2} pn(t) pn(t + \tau) dt$$

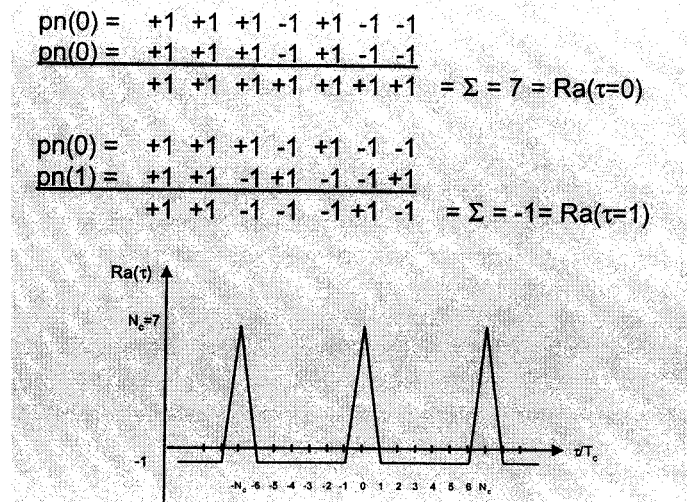


Fig 3.5

Como se observa la función autocorrelación tiene un valor pico para la perfecta coincidencia temporal, esta característica es utilizada para implementar el esquema de sincronización entre el transmisor y receptor.

4 – Espectro de Frecuencia:

Debido a la naturaleza periódica de la secuencia su espectro estará compuesto por líneas que se separarán según sea el periodo de la secuencia (o lo que es lo mismo su longitud). En lo que se refiere a las magnitudes de cada componente estarán dadas por la sinc-cuadrado correspondiente a la tasa de chip. La componente de DC está asociada a la propiedad de balance.

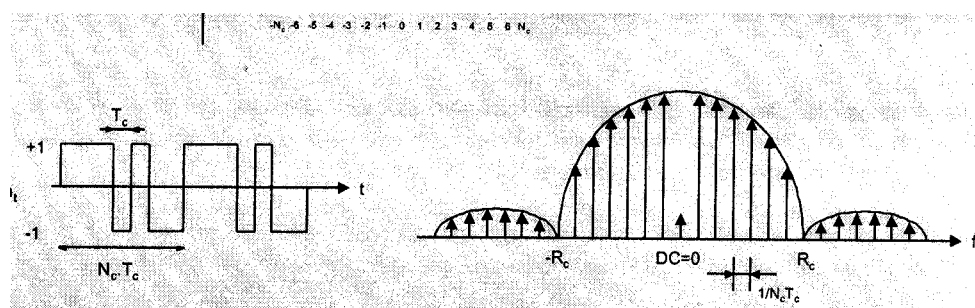


Fig 3.6

5 – Correlación Cruzada:

La correlación cruzada describe la interferencia entre los códigos pn_i y pn_j y viene dada por:

$$Rc(\tau) = \int_{-N_c T_c/2}^{N_c T_c/2} pn_i(t) pn_j(t + \tau) dt$$

Si la correlación cruzada es cero para todo τ se dice que los códigos son ortogonales. Si dos usuarios utilizan el mismo espectro pero códigos ortogonales no hay interferencia después del despreading.

En la práctica los códigos no son perfectamente ortogonales lo que deriva en una degradación de la performance (se puede asociar a una disminución de SJR)

Resumen:

Normalizando los gráficos de Autocorrelación y espectro queda:

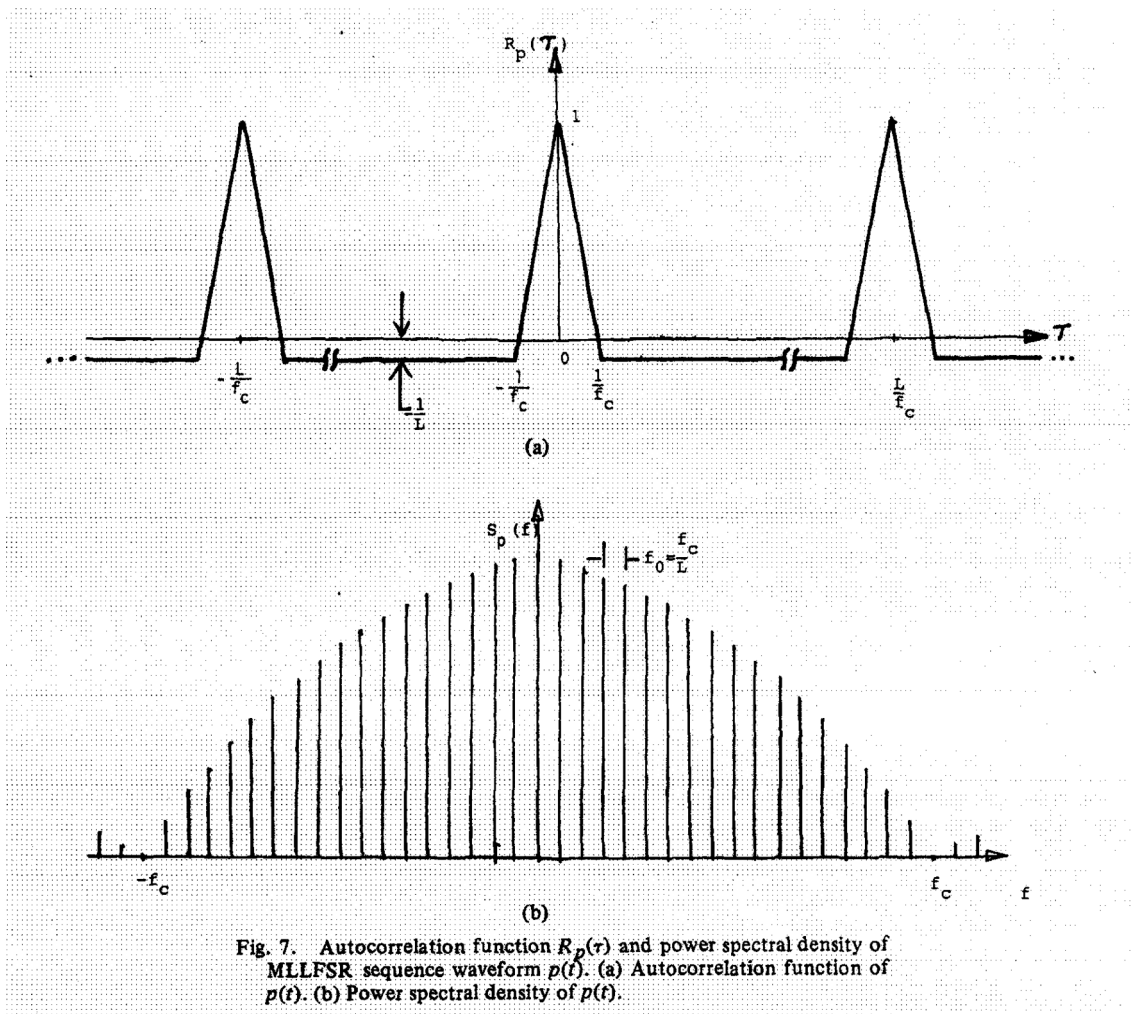


Fig 3.7

Tipos de Secuencias:

Secuencias M:

Un generador de registro de desplazamiento simple (Simple Shift Register Generator SSRG) tiene todas las señales realimentadas para formar la única entrada. Se dice que es lineal si la realimentación puede ser expresada como una función de módulo dos (XOR).

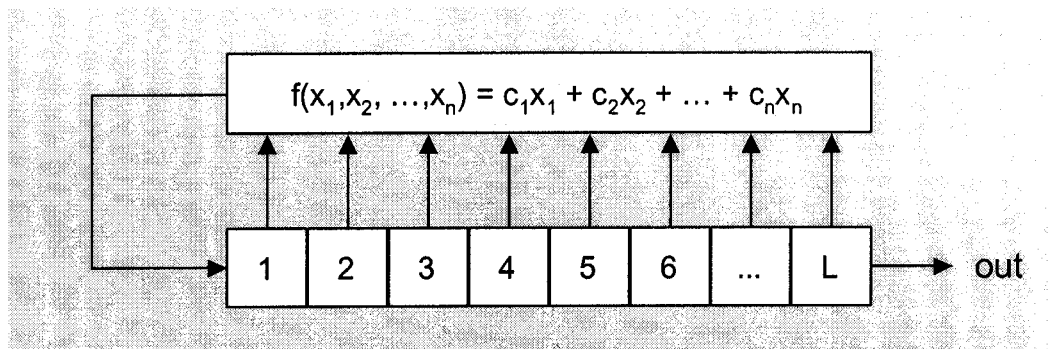


Fig. 3.8

La función de realimentación $f(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$ es una suma de módulo dos de los contenidos de los registros $(x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)$. Un vector de coeficientes $(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$ definen el esquema de conexión ($c_i = 1$ conectado $c_i = 0$ desconectado). Un SSRG con L flip flop (registros) produce una determinada secuencia dependiendo de carga inicial de los registro (upon register) y del vector de coeficientes $(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n)$. Cuando el periodo (o longitud) de la secuencia es igual a $2^L - 1$ se dice que es una secuencia de longitud máxima (secuencia M). Para estas secuencias máximas el vector de coeficientes tiene un número par de elementos.

Dado un SSRG de L etapas con conexiones de realimentación en las posiciones k y m , existe una secuencia inversa generada con un SSRG con realimentaciones en $L-k$ y $L-m$.

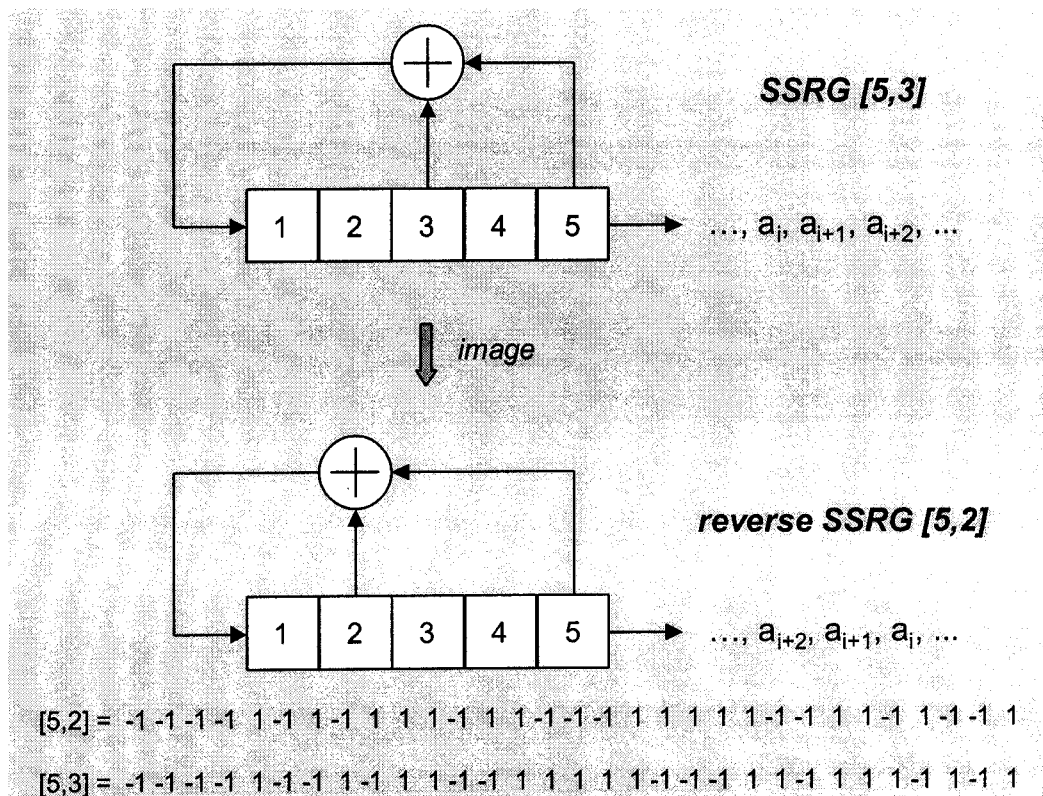


Fig. 3.9

En la siguiente tabla se muestran los vectores de realimentación que generan secuencias de longitud máxima (no se indican las secuencias imágenes).

| L | $N_c=2^L-1$ | Feedback Taps for m-sequences | # m-sequences |
|----|-------------|--|---------------|
| 2 | 3 | [2,1] | 2 |
| 3 | 7 | [3,1] | 2 |
| 4 | 15 | [4,1] | 2 |
| 5 | 31 | [5,3] [5,4,3,2] [5,4,2,1] | 6 |
| 6 | 63 | [6,1] [6,5,2,1] [6,5,3,2] | 6 |
| 7 | 127 | [7,1] [7,3] [7,3,2,1] [7,4,3,2] [7,6,4,2] [7,6,3,1] [7,6,5,2] [7,6,5,4,2,1] [7,5,4,3,2,1] | 18 |
| 8 | 255 | [8,4,3,2] [8,6,5,3] [8,6,5,2] [8,5,3,1] [8,6,5,1] [8,7,6,1] [8,7,6,5,2,1] [8,6,4,3,2,1] | 16 |
| 9 | 511 | [9,4] [9,6,4,3] [9,8,5,4] [9,8,4,1] [9,5,3,2] [9,8,6,5] [9,8,7,2] [9,6,5,4,2,1] [9,7,6,4,3,1] [9,8,7,6,5,3] | 48 |
| 10 | 1023 | [10,3] [10,8,3,2] [10,4,3,1] [10,8,5,1] [10,8,5,4] [10,9,4,1] [10,8,4,3] [10,5,3,2] [10,5,2,1] [10,9,4,2] [10,6,5,3,2,1] [10,9,8,6,3,2] [10,9,7,6,4,1] [10,7,6,4,2,1] [10,9,8,7,6,5,4,3] [10,8,7,6,5,4,3,1] | 60 |
| 11 | 2047 | [11,2] [11,8,5,2] [11,7,3,2] [11,5,3,2] [11,10,3,2] [11,6,5,1] [11,5,3,1] [11,9,4,1] [11,8,6,2] [11,9,8,3] [11,10,9,8,3,1] | 176 |

Fig. 3.10

Propiedades:

- a) **Balance:** tienen 2^{L-1} unos y $2^{L-1} - 1$ ceros.
- b) **Distribución de Corridas:** Cumple con la propiedad enunciada
- c) **Autocorrelación:** Se observa en el siguiente figura un ejemplo

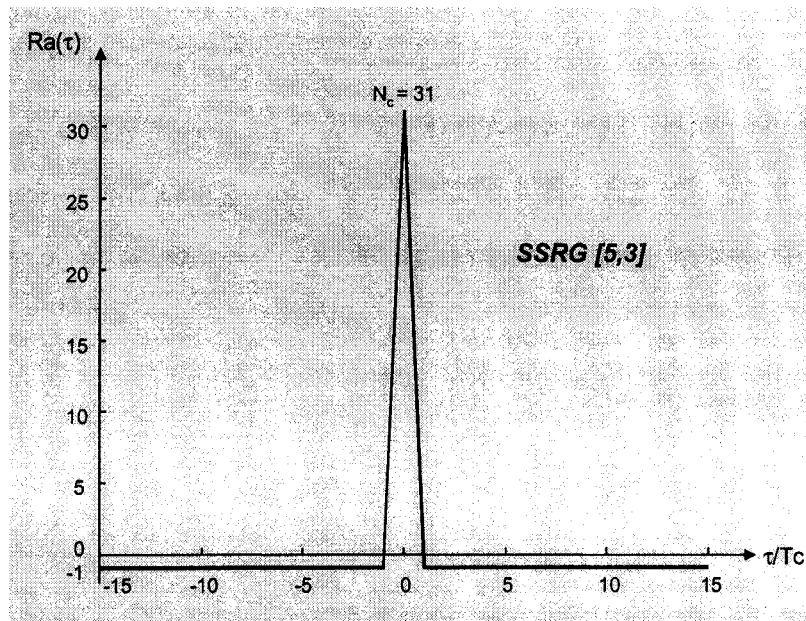


Fig. 3.11

- d) **Correlación Cruzada:** La correlación cruzada es una medida de la coincidencia entre dos secuencias desafortunadamente el comportamiento de la correlación cruzada no es tan bueno como el de la autocorrelación. Esto obliga a que en un escenario de múltiples usuarios se deba seleccionar los códigos con ciertas precauciones para evitar problemas de interferencia.

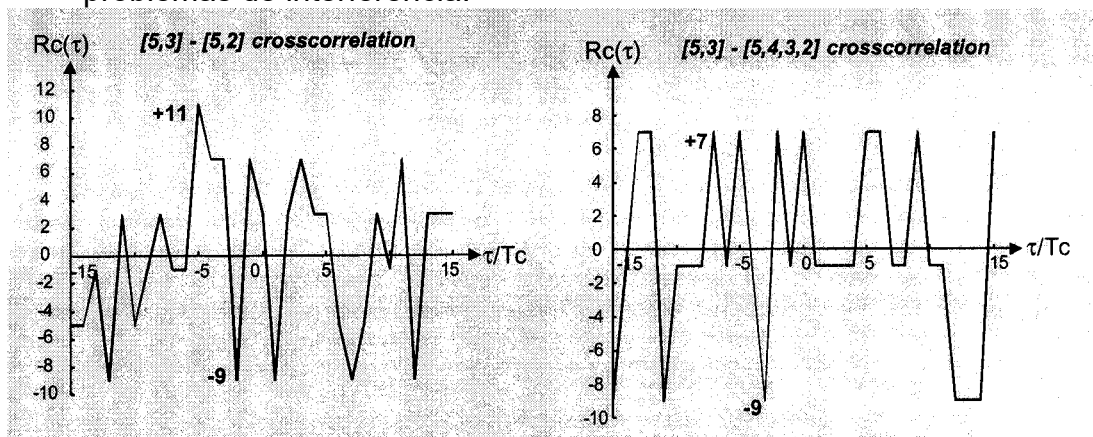


Fig. 3.12

- e) **Seguridad:** Las secuencias generadas por realimentación lineal son fácilmente reconstruidas a partir de muestras cortas. A partir de $2L+1$ chips se puede determinar la secuencia. Esto hace que las secuencias M no sean utilizadas para transmisiones seguras.

Códigos Barker:

Estos códigos fueron seleccionados por Ronald Barker para ser utilizados como trama de sincronismo en filtros acoplados. Tienen la particularidad de poseer propiedades aperiódicas en la correlación y ser fácilmente identificados en una secuencia mayor de bit.

El código de Barker tiene diferentes longitudes para una función de autocorrelación similar.

$$\begin{aligned} \text{Barker}(11) &= 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ -1 & \sum &= +1 \text{ balanceado} \\ \text{Barker}(13) &= 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ -1 \ -1 \ 1 \ 1 \ -1 \ 1 \ -1 \ 1 & \sum &= +5 \text{ desbalanceado} \end{aligned}$$

La función autocorrelación para el Barker(11) es:

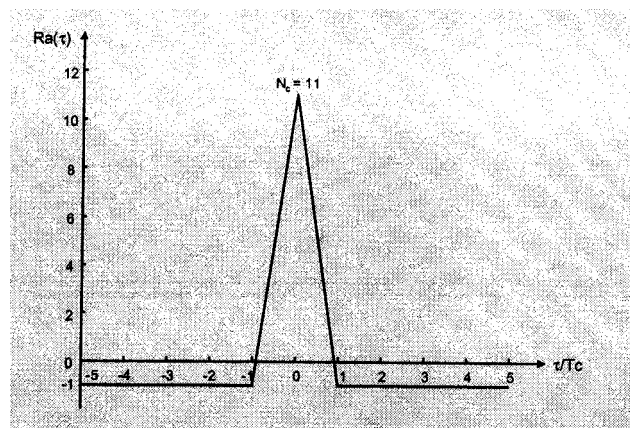


Fig. 3.13

Estos códigos son utilizados en la norma IEEE 802.11. En la siguiente figura se muestran todos los códigos de Barker conocidos.

TABLE 3. LISTING OF KNOWN BARKER CODES

| CODE LENGTH (N) | BARKER SEQUENCE |
|------------------------|------------------------|
| 1 | + |
| 2 | ++ or +- |
| 3 | ++- |
| 4 | +++ - or +-+ - |
| 5 | ++++ - |
| 7 | ++++--+- |
| 11 | ++++--+-+-- |
| 13 | +++++--++-+-+ |

Fig. 3.13b

Códigos de Gold:

En búsqueda de mejores comportamiento en lo que se refiere a la correlación cruzada, para aplicaciones multiusuarios (CDMA), aparecen los códigos de Gold.

Los códigos de Gold tienen todos la misma longitud con una función de correlación cruzada controlada.

Estos códigos se generan de dos secuencias M de la misma longitud con el siguiente esquema

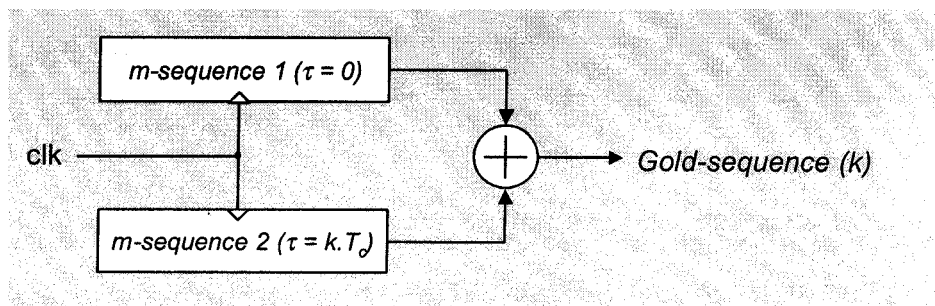


Fig. 3.14

Los códigos así generados tienen la misma longitud que las secuencias M (pero no será una longitud máxima). Por lo tanto la función autocorrelación será peor que la de las secuencias M. Obsérvese que todos los cambios de fases relativas de las secuencias M generará un nuevo código resultante.

Para referirlos se indica un par de vectores de realimentación de los generadores de secuencias M.

Con cualquier generador de código de Gold se pueden generar $2^L - 1$ secuencias (solo cambiando la fase) más las dos secuencias M originales totalizan $2^L + 1$ secuencias.

Con el objeto de generar códigos de Gold que tengan una función de correlación cruzada uniforme y acotada se seleccionan las secuencias M a utilizar. Estas secuencias son conocidas como secuencias preferidas. Dando lugar a funciones de correlación cruzada de tres valores:

| L | N_c | normalized 3-value crosscorrelation | Frequency of occurrence |
|-------------------|-----------|---|---|
| Odd | $2^L - 1$ | $-1/N_c$ $-(2^{(L+1)/2} + 1)/N_c$ $(2^{(L+1)/2} - 1)/N_c$ | ~ 0.50 ~ 0.25 ~ 0.25 |
| Even (not k.4) | $2^L - 1$ | $-1/N_c$ $-(2^{(L+2)/2} + 1)/N_c$ $(2^{(L+2)/2} - 1)/N_c$ | ~ 0.75 ~ 0.125 ~ 0.125 |

Fig. 3.15

Un grupo importante de códigos Gold se muestra en la siguiente figura:

| L | $N_c=2^L-1$ | preferred pairs of m-sequences | 3-value crosscorrelations | | | bound |
|----|-------------|---|------------------------------|----|-----|-------|
| 5 | 31 | [5,3] [5,4,3,2] | 7 | -1 | -9 | -29% |
| 6 | 63 | [6,1] [6,5,2,1] | 15 | -1 | -17 | -27% |
| 7 | 127 | [7,3] [7,3,2,1] [7,3,2,1] [7,5,4,3,2,1] | 15 | -1 | -17 | -13% |
| 8* | 255 | [8,7,6,5,2,1] [8,7,6,1] | 31 | -1 | -17 | +12% |
| 9 | 511 | [9,4] [9,6,4,3] [9,6,4,3] [9,8,4,1] | 31 | -1 | -33 | -6% |
| 10 | 1023 | [10,9,8,7,6,5,4,3] [10,9,7,6,4,1] [10,8,7,6,5,4,3,1] [10,9,7,6,4,1] [10,8,5,1] [10,7,6,4,2,1] | 63 | -1 | -65 | -6% |
| 11 | 2047 | [11,2] [11,8,5,2] [11,8,5,2] [11,10,3,2] | 63 | -1 | -65 | -3% |

Fig. 3.16

Solo una parte de los códigos de Gold son balanceados

| | |
|--------------------|---|
| [5,4,3,2] = | -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 1 -1 1 1 |
| [5,3] (0) = | -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 |
| Gold(0) = | -1 -1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 1 |
| Σ Gold(0) = | -7 = not balanced |
| [5,4,3,2] = | -1 -1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1 -1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 -1 -1 1 |
| [5,3] (1) = | 1 -1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 1 1 1 -1 1 |
| Gold(1) = | 1 -1 -1 -1 1 1 1 1 1 1 -1 -1 -1 1 -1 -1 1 1 1 -1 -1 1 1 |
| Σ Gold(1) = | 1 = balanced |

Fig. 3.17

A continuación se muestran las funciones de autocorrelación y correlación cruzada de un código de Gold.

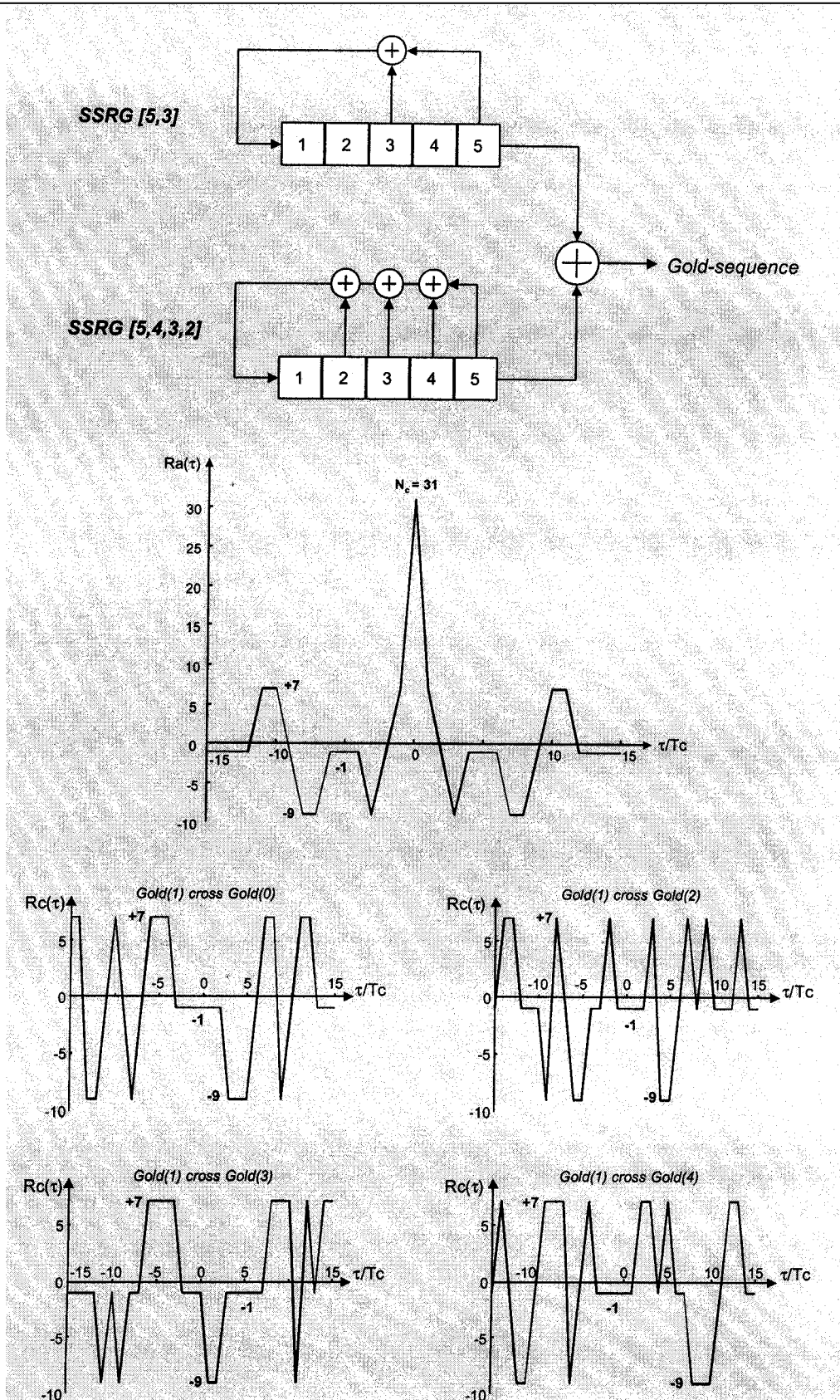


Fig. 3.18

Códigos Hadamard-Walsh:

Estos códigos son generados por grupos de $N = 2^n$ códigos de longitud $N = 2^n$. El algoritmo de generación es:

$$H_N = \begin{bmatrix} H_{N/2} & H_{N/2} \\ H_{N/2} & -H_{N/2} \end{bmatrix} \quad \text{con } H_0 = [1]$$

Las columnas (o filas) de las matrices H son los códigos:

Fig. 3.19

En todos los casos la primera fila está compuesta de todos unos y todas las otras filas tiene $N/2$ ceros y $N/2$ unos. La fila número $N/2$ comienza por $N/2$ unos y termina con $N/2$ ceros.

La distancia (número de elementos diferentes) entre un par de códigos es siempre $N/2$.

Todas las filas son mutuamente ortogonales:

$$\sum_{k=0}^{N-1} h_{ik} h_{jk} = 0$$

La correlación cruzada entre cualquier par de códigos es cero, si los códigos están perfectamente sincronizados. En un sistema CDMA el perfecto sincronismo garantiza la no interferencia entre usuarios.