星系动力学 作业一

胡旭凡 023426910029　　2023.9.24

In[ ]:= $G = 4.33\times10^{-3};$

1.

查阅资料得知，银河系年龄约为136亿年(4.3×10^{17}s)

弛豫时间限制：（单位制 Gyr　km/s　$M_\odot$）

In[ ]:= $M = 4.2\times10^{6};\ r = 0.001;$

In[ ]:= $\sigma = \sqrt{\frac{G M}{r}}$

Out[ ]= 4264.5

$$\text{Reduce}\left[\frac{18}{\text{Log}[M/m]}\,\frac{1}{m}\,\frac{10^{3}}{M/\left(\frac{4}{3}\pi r^{3}\right)}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^{3} > 13.6,\ m\right]$$

约化

Out[ ]= $0 < m < 3.68758\times10^{-6} \mid\mid 4.2\times10^{6} < m < 4.2\times10^{6}$

即 m 需要小于 3.7×10^{-6} 个太阳质量，显然这对黑洞来说是不可能的

蒸发时间限制：

In[ ]:= $\gamma = 7.38\times10^{-3};$

$$\text{Reduce}\left[140\,\frac{18}{\text{Log}[M/m]}\,\frac{1}{m}\,\frac{10^{3}}{M/\left(\frac{4}{3}\pi r^{3}\right)}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^{3} > 13.6,\ m\right]$$

约化

Out[ ]= $0 < m < 0.000633754 \mid\mid 4.2\times10^{6} < m < 4.2\times10^{6}$

即 m 需要小于 6.3×10^{-4} 个太阳质量

2.

太阳半径约 7×10^{5} km （2.27×10^{-8}pc），M32直径约 8000 光年(244 pc)

In[ ]:= $m = 1;\ r = 0.1;\ \sigma = 240;\ \rho[R\_] := 3\times10^{5}\,R^{-2.4};$

In[ ]:= $M = \text{Integrate}\left[4\pi R^{2}\rho[R],\ \{R, 0, 0.1\}\right]$

积分

Out[ ]= 1.57826×10^{6}

In[ ]:= $t\_relax = \frac{18}{\text{Log}\left[244/\left(2.27\times10^{-8}\right)\right]}\,\frac{1}{m}\,\frac{10^{3}}{\rho[r]}\left(\frac{\sigma}{10}\right)^{3}$

Out[ ]= 0.142958

即弛豫时间为 143 Myr.

In[ ]:= $n[R\_] := \frac{\rho[R]}{m}$

In[ ]:= $\lambda = \frac{1}{n[r1]\,\pi\,(11 \times 2.27 \times 10^{-8})^2}$

Out[ ]= $1.70173 \times 10^7\ r1^{2.4}$

In[ ]:= M = Integrate[$4\pi R^2 \rho[R]$, {R, 0, r1}]
积分

Out[ ]= $6.28319 \times 10^6\ r1^{0.6}$

In[ ]:= $\sigma = \sqrt{\frac{G M}{r1}}$

Out[ ]= $\frac{164.943}{r1^{0.2}}$

In[ ]:= Solve[$\lambda\, 3.09 \times 10^{13} / \sigma == 10^8 \times 3.15 \times 10^7$, r1]
解方程

Out[ ]= {{r1 → 0.0698476}}

即距离中心0.07 pc

3.

(a) 距离的测量与哈勃常数相关 $d \propto \frac{1}{h_7}$，星系团的质量使用维里定理估算 $M \propto R \propto 1/h_7$，光度 $L \propto 1/h_7{}^2$, 因此 $M/L \propto h_7$

(b) 同(a)，改变哈勃常数，质光比变为原来的1/8，暗物质的质量是发光物质的50倍。

4.

从 rad^2 转换到 acrsec^2:

In[ ]:= 2.5 Log10[$\left(3600\ \frac{180}{\pi}\right)^2$]
常用对数

Out[ ]= 26.5721

绝对星等的距离模数

In[ ]:= 2.5 Log10[100]
常用对数

Out[ ]= 5.

$\mu_B = M_B$-2.5 lg (I_B)+26.5721-5=27.05-2.5 lg(I_B)

5.

(a)

设观测者方向单位矢量

In[ ]:=
```
n = {0, Sin[i], Cos[i]};
```
正弦 余弦

则观测者看到椭圆其中一个轴依旧是x轴,x1=1; 在 x=0 的剖面， $y^2+z^2/q^2=1$ 。观察者的视线方程表示为（c为任意常数）

In[ ]:=
```
y = Tan[i] z + c;
```
正切

则视线与轮廓边缘的交点为

In[1]:=
```
Solve[y^2 + z^2 / q^2 == 1 && y == Tan[i] z + c, {y, z}]
```
解方程 正切

Out[1]=

$$\left\{\left\{y\to\frac{c-\sqrt{q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2-c^2q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2+q^4\,\mathrm{Tan}[i]^4}}{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2},\ z\to\mathrm{Cot}[i]\left(-c+\frac{c}{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}-\frac{\sqrt{q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2\left(1-c^2+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2\right)}}{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}\right)\right\},\left\{y\to\frac{c+\sqrt{q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2-c^2q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2+q^4\,\mathrm{Tan}[i]^4}}{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2},\ z\to\mathrm{Cot}[i]\left(-c+\frac{c}{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}+\frac{\sqrt{q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2\left(1-c^2+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2\right)}}{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}\right)\right\}\right\}$$

In[2]:=
```
Solve[q^2 Tan[i]^2 - c^2 q^2 Tan[i]^2 + q^4 Tan[i]^4 == 0, c]
```
解方程

Out[2]=

$$\left\{\left\{c\to-\sqrt{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}\right\},\left\{c\to\sqrt{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}\right\}\right\}$$

解得与轮廓边缘相切的视线为 y=tan i z ± $\sqrt{1+q^2\tan^2 i}$

所以，在观察者看来，椭圆的另一个轴长度为

$$\mathbf{x2}=\frac{\sqrt{1+q^2\,\mathrm{Tan}[i]^2}}{\sqrt{1+\mathrm{Tan}[i]^2}}$$

当 q>1 x2>x1，轴比为Q= $\sqrt{1+\tan^2 i}/\sqrt{1+q^2\tan^2 i}$ ；反之，轴比Q= $\sqrt{1+q^2\tan^2 i}/\sqrt{1+\tan^2 i}$

(b) 假设我们确定亮度积分的半径，视线方向为

In[ ]:=
```
y = r Sin[i]; z = r Cos[i];
```
正弦 余弦

In[ ]:=
```
Solve[y^2 + z^2 / q^2 == C^2, r]
```
解方程

Out[ ]=

$$\left\{\left\{r\to-\frac{C}{\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}[i]^2}{q^2}+\mathrm{Sin}[i]^2}}\right\},\left\{r\to\frac{C}{\sqrt{\frac{\mathrm{Cos}[i]^2}{q^2}+\mathrm{Sin}[i]^2}}\right\}\right\}$$

即视线在星系中亮度积分长度为 $r1 = 2C/\sqrt{\cos^2 i(1/q^2-1)+1}$

$I_n = \int j(r)\, dr$

而对于沿对称轴的观察者 $I_0 = \int j(z)\, dz$

对任一等亮度面 $y^2 + z^2/q^2 = C1^2$ 只要 $z = C1\, q$, $r = \frac{C1}{\sqrt{\frac{\text{Cos}[i]^2}{q^2}+\text{Sin}[i]^2}}$ ，即有j(z)=j(r)

所以积分改写成 $I_n = \int j(r)\, dr = \int j(z)\, dz \left(\frac{dr}{dz}\right) = I_0 \frac{1}{q\sqrt{\frac{\text{Cos}[i]^2}{q^2}+\text{Sin}[i]^2}} = I_0 \frac{1}{q\sqrt{(1/q^2-1)\cos^2 i+1}}$

若 q>1

In[4]:= $\text{Solve}\left[Q == \frac{\sqrt{1+\text{Tan2}}}{\sqrt{1+q^2\,\text{Tan2}}}, \text{Tan2}\right]$
解方程

Out[4]= $\left\{\left\{\text{Tan2} \to \frac{1-Q^2}{-1+q^2 Q^2}\right\}\right\}$

In[6]:= $\text{Cos2} = \frac{1}{1+\text{Tan2}} /. \left\{\text{Tan2} \to \frac{1-Q^2}{-1+q^2 Q^2}\right\}$

Out[6]= $\frac{1}{1+\frac{1-Q^2}{-1+q^2 Q^2}}$

In[8]:= $\text{I\_n} = \text{FullSimplify}\left[\frac{\text{I0}}{q\sqrt{(1/q^2-1)\,\text{Cos2}+1}} /. \left\{\text{Cos2} \to \frac{1}{1+\frac{1-Q^2}{-1+q^2 Q^2}}\right\}\right]$
完全简化

Out[8]= $\text{I0}\, q \sqrt{\frac{1}{q^2 Q^2}}\, Q^2$

即 $I_n = I_0\, Q$

若q<1

In[9]:= $\text{Solve}\left[Q == \frac{\sqrt{1+q^2\,\text{Tan2}}}{\sqrt{1+\text{Tan2}}}, \text{Tan2}\right]$
解方程

Out[9]= $\left\{\left\{\text{Tan2} \to \frac{-1+Q^2}{q^2-Q^2}\right\}\right\}$

In[10]:= $\text{Cos2} = \frac{1}{1+\text{Tan2}} /. \left\{\text{Tan2} \to \frac{-1+Q^2}{q^2-Q^2}\right\}$

Out[10]= $\frac{1}{1+\frac{-1+Q^2}{q^2-Q^2}}$

In[11]:= I_n = Simplify[$\frac{I0}{q\sqrt{(1/q^2-1)\,Cos2+1}}$ /. {Cos2 → $\frac{1}{1+\frac{-1+Q^2}{q^2-Q^2}}$}]
化简

Out[11]= $\frac{I0}{q\sqrt{\frac{Q^2}{q^2}}}$

即 $I_n = I_0/Q$

(c)

距离对称轴 10° 以内

In[ ]:= f1 = Integrate[2 π Sin[θ], {θ, 0, $\frac{10}{180}$ π}] / (4 π)
积分 正弦

Out[ ]= $\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{36}\right]^2$

In[ ]:= N[f1]
数值运算

Out[ ]= 0.00759612

距离赤道10°以内

In[ ]:= f1 = Integrate[2 π Sin[θ], {θ, $\frac{80}{180}$ π, $\frac{90}{180}$ π}] / (4 π)
积分 正弦

Out[ ]= $\frac{1}{2}\mathrm{Sin}\left[\frac{\pi}{18}\right]$

In[ ]:= N[f1]
数值运算

Out[ ]= 0.0868241

(d)

需要两步完成，在ϕ方向上实现 [0,2π] 的均匀分布，在θ方向上实现 cos θ在 [-1,1]上均匀分布，我们使用 arccos来实现

C语言代码如下：

```
#include<stdlib.h>
#include<math.h>
#define pi 3.1415927

double sphere_random(double a[][2],double R,int n){
    int i=0;
    for(;i<n;i++){
        a[i][0]=rand()%10000/10000.0*2*pi;
        a[i][1]=acos(rand()%10000/5000.0-1);
        }
    return 0;
    }
```