

Mathematical Specialists

Lachlan Takumi Ikeguchi

April 4, 2023

Contents

0.1	Important symbols	1
0.2	Addition principle	2
0.3	Multiplication principle	2
0.4	Factorials	2
0.4.1	Dividing factorials	2
0.4.2	Special cases	2
0.5	Permutations	3
0.5.1	Permutations in a circle	3
0.5.2	Like objects repetitions	3
0.5.3	Restrictions	4
0.5.4	Grouped items	4
0.5.5	Special cases	4
0.6	Combinations	4
0.7	Pascal's triangle	5

Abstract

This document was written to be used as a summary to help revise the content covered mathematical specialists.
For any inquiries, contact lachlanprivate@duck.com or through the discord server: <https://discord.gg/6P8rddkXFr>

0.1 Important symbols

Symbol	Mathematical definition	Simple definition
\cup	Union	<i>A and B</i> , or think as in 'add'.
\cap	Intersection	<i>A or B</i> , or think as in 'multiply'.
$n!$	$n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) \dots \times 3 \times 2 \times 1$	The product of integers between the given value and 1.
nP_r	$\frac{n!}{(n-r)!}$	The number of combinations there are of length r from a group of length n where the order matters.
nC_r	$\frac{n!}{r!(n-r)!}$	The number of combinations there are of length r from a group of length n where the order does not matter.

0.2 Addition principle

If there are n ways of performing operation A , and m ways of performing operation B , there are $n + m$ ways of performing operation $A \cup B$.

As in, let there be 2 ways to perform task A , and 3 ways to perform task B . If there is an option to perform A or B , there is a total of $2 + 3 = 5$ ways to perform an operation.

0.3 Multiplication principle

If there are n ways of performing operation A , and m ways of performing operation B , there are $n \times m$ ways of performing operation $A \cup B$.

As in, let there be 4 ways to perform task A , and 5 ways to perform task B . With considering 1 way to perform A , there are 5 ways to perform B , repeat the process through the number of ways to perform A .

	$B, 1$	$B, 2$	$B, 3$	$B, 4$	$B, 5$
$A, 1$	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)
$A, 2$	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)
$A, 3$	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)
$A, 4$	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)

Where there are $4 \times 5 = 20$ ways to perform the operations.

0.4 Factorials

Factorials is the result of multiplying all of the integers between the given integer and 1. This is given the notation and formula:

$$n! = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times (n - 3) \dots \times 3 \times 2 \times 1$$

Example:

$$\begin{aligned} 5! &= 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \\ &= 120 \end{aligned}$$

0.4.1 Dividing factorials

When given some factorial over another factorial in such cases as:

$$\begin{aligned} &\frac{4!}{2!} \\ &= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} \\ &= \frac{4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times \cancel{1}} \\ &= 4 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$

0.4.2 Special cases

$$0! = 1$$

0.5 Permutations

Permutations is the number of ways of choosing r things from n distinct things where *order matters*. This is given the notation and formula:

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Example:

$$\begin{aligned} {}^6P_4 &= \frac{6!}{(6-4)!} \\ &= \frac{6!}{2!} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} \\ &= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times \cancel{2} \times \cancel{1}}{\cancel{2} \times \cancel{1}} \\ &= 6 \times 5 \times 4 \times 3 \\ &= 360 \end{aligned}$$

0.5.1 Permutations in a circle

In cases where the positions being concerned is a circle such as the permutations of a circular seating arrangement, if the standard permutations formula is applied, there are several over-counting of the like arrangement in a different perspective. In these cases apply the formula:

$$\frac{{}_nP_r}{r} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r}$$

0.5.2 Like objects repetitions

The number of ways of arranging n objects made up of indistinguishable objects, n_1 in the first group, n_2 in the second group and so on, is:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!\dots n_r!}$$

Example:

Find the number of permutations of the letters in the word WOOLLOOMOOLOO.

There are 8 'O's and 3 'L's

Permutations:

$$\begin{aligned} &\frac{13!}{8!3!} \\ &\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} \\ &\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(8 \times 7 \times 6 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times 3 \times 2 \times 1) \times (3 \times 2 \times 1)} \\ &\frac{13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9}{3 \times 2} \\ &\frac{13 \times \cancel{12} \times \overset{6 \times 2}{11} \times 10 \times \overset{3 \times 3}{\cancel{9}}}{\cancel{3} \times \cancel{2}} \\ &13 \times 6 \times 11 \times 10 \times 3 \\ &25,740 \end{aligned}$$

0.5.3 Restrictions

When considering restrictions, deal with the restrictions first.

Example:

Find the number of arrangements of the letters of the word DARWIN beginning and ending with a vowel.

Number of letters = 6

Number of positions = 6

Beginning and end must be a vowel, so the available positions are decreased by 2: number of positions - 2 = 4

Since 2 vowels must be used: number of letters - 2 = 4

Permutations:

$4P_4$

$$4!$$

$$4 \times 3 \times 2 \times 1$$

$$24$$

0.5.4 Grouped items

When items are grouped together, treat each group as a single object. Find the number of arrangements of the groups, then multiply by the number of arrangement within each group.

Example:

Find the number of arrangement of the letters of the word EQUALS if the vowels are kept together.

Number of vowels = 3

Number of letters = 6

Number of positions = 6

As the 3 vowels are grouped together, the number of positions decreases:

number of positions - 3_{for the members of the group} + 1_{for the group} = 4

Permutations within vowel group:

$${}^3P_3 = 3! = 3 \times 2 = 6$$

Permutations of all positions:

$${}^4P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Multiply together:

$$6 \times 24 = 144$$

0.5.5 Special cases

$${}^nP_n = n!$$

$${}^nP_0 = 1$$

0.6 Combinations

Combinations is the number of ways of choosing or selecting r objects from n distinct objects where *order does not matter*. This is given the notation and formula:

$${}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{r!}$$

$${}^nC_r = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!}$$

Example:

$$\begin{aligned} {}^4C_2 &= \frac{{}^4P_2}{2!} \\ &= \frac{\frac{4!}{(4-2)!}}{2!} \\ &= \frac{\frac{4!}{2!}}{2!} \\ &= \frac{\frac{4 \times 3 \times 2}{2}}{2} \\ &= \frac{\frac{4 \times 3 \times \cancel{2}}{2}}{2} \\ &= \frac{4 \times 3}{2} \\ &= \frac{12}{2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

0.7 Pascal's triangle

The Pascal's triangle is a pattern formed by adding the top 2 adjacent numbers and a 1 is placed on either side of the bottom row to resemble a triangle:

$n = 0:$																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																			</
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	----

Each element in the Pascal's triangle can be used to calculate combinations, hence, the triangle can be written using Combinations notation (nC_r):

$$\begin{array}{cccccccc}
n = 0: & & & & & & & {}^0C_0 \\
n = 1: & & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & \\
n = 2: & & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 \\
n = 3: & & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 \\
n = 4: & & {}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 \\
n = 5: & & {}^5C_0 & & {}^5C_1 & & {}^5C_2 & & {}^5C_3 & & {}^5C_4 & & {}^5C_5
\end{array}$$

Pascal's triangle shows that the r^{th} element of the n^{th} row of Pascal's triangle is given by nC_r . It is assumed that the 1 at the beginning of each row is the 0^{th} element. This gives the *Pascal's identity*:

$${}^nC_r = {}^{n-1}C_{r-1} + {}^{n-1}C_r \text{ for } 0 < r < n$$