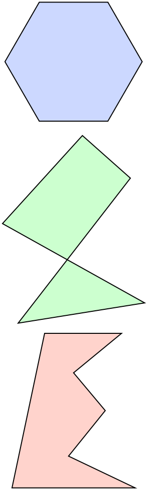
Triangulace polygonu

Petr Buchal, Martin Ivančo

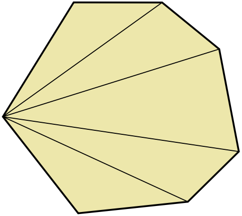
Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně
{xbucha02, xivanc03}@stud.fit.vutbr.cz

30. dubna 2020

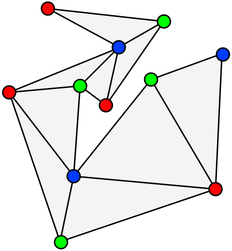
- Polygon je část roviny vymezená konečnou sekvencí navazujících úseček.
- Základní vlastnosti polygonů:
    - počet stran
    - **konvexnost** – jakákoliv přímka protínající polygon ho protíná právě dvakrát
    - **jednoduchost** – hranice polygonu neprotíná sebe sama
    - **konkávnost** – nekonvexní a zároveň jednoduchý polygon
    - **monotónnost** k přímce *p* – každá přímka kolmá na *p* protíná polygon nejvíce dvakrát



- Dekompozice polygonu na trojúhelníky.
- Konvexní polygon můžeme jednoduše triangulovat v lineárním čase pomocí **vějířové triangulace** – vybereme jeden vrchol a přidáváme diagonály od tohoto vrcholu ke všem ostatním.
- Vějířová triangulace se může také použít na konkávní polygon s jediným konkávním vrcholem – ten ale musíme použít jako bod, od kterého budeme přidávat diagonály.
- Počet všech možných triangulací konvexního polygonu s n stranami je výjádřen $(n-2)$. **Catalanovym číslem**: $C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!n!}$.



- Metoda triangulace pro jednoduché polygony založena na **teorému dvou uší**, podle kterého má každý jednoduchý polygon s více než 3 vrcholy alespoň 2 uši. Ucho polygonu je definováno jako vrchol *v* takový, že úsečka mezi jeho sousedy leží plně uvnitř polygonu.
- Podle tohoto teorému tedy můžeme vytvořit algoritmus, který postupně vyhledává uši a odstraňuje je, až z polygonu zůstane pouze trojúhelník. Ačkoli je tento algoritmus jednoduchý na implementaci, jeho složitost je poměrně neoptimální – $\mathbf{O}(\mathbf{n}^2)$.



Algorithm 1: Triangulace jednoduchého polygonu

```
Input: List vrcholů polygon
Output: List trojic vrcholů triangles
if clockwise(polygon) then
    reverse(polygon);
end
for v in polygon do
    if is_ear(v, polygon) then
        append(v, ears);
    end
end
while not empty(ears) and length(polygon) >= 3 do
    append(remove_ear(polygon, ears), triangles);
end
```

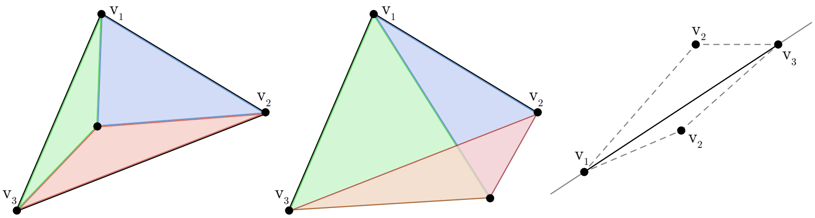
Ear-clipping metoda

Algorithm 2: remove_ear

```
Input: List vrcholů polygon, List vrcholů ears
Output: Trojice vrcholů triangle
v = pop(ears);
triangle = {previous(v), v, next(v)};
if length(polygon) > 3 then
    neighbors = {previous(v), next(v)};
    for n in neighbors do
        if not n in ears and is_ear(n, polygon) then
            append(n, ears);
        end
        if n in ears and not is_ear(n, polygon) then
            remove(n, ears);
        end
    end
end
```

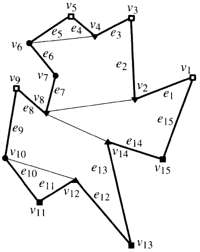
Algorithm 3: is_ear

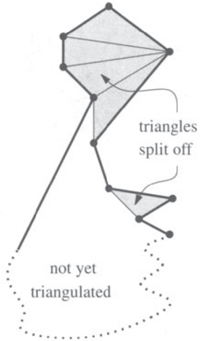
Input: Vrchol v, List vrcholů polygon
Output: Boolean ear
ear = contains_no_points(prev(v), v, next(v), polygon) and is_convex(prev(v), v, next(v)) and area(prev(v), v, next(v) > 0;



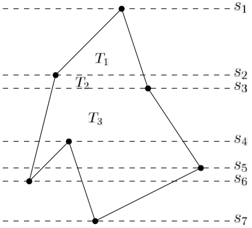
Zrychlení triangulace

- V knize *Computational Geometry* (de Berg *et al.*, 2008) je uvedena složitější, nicméně také rychlejší metoda.
- Tato metoda také pracuje nad jednoduchými polygony a dělí se na dvě části – **rozdělení polygonu na monotonní části** (se složitostí $O(n \log n)$) a **triangulace monotónního polygonu** (se složitostí $O(n)$).
- Jelikož celkový počet vrcholů monotónních částí je n, celý algoritmus pracuje se složitostí $\mathbf{O(n \log n)}$.
- Plný algoritmus je ve zmíněné knize podrobně vysvětlen.





- Jak bylo ukázáno, monotónní polygon umíme triangulovat v lineárním čase. Pokud tedy dokážeme nalézt dekompozici jednoduchého polygonu na monotónní části v lineárním čase, dokážeme celou triangulaci provést v lineárním čase.
- Jednou z technik pro takovouto dekompozici je tzv. *trapezoidace*.
- Princip trapezoidace je založen na vyslání paprsků ve vertikálním nebo horizontálním směru z každého vertexu, které se zastaví při kolizi s jiným segmentem polygonu. Tyto paprsky efektivně rozdělí polygon na lichoběžníky.



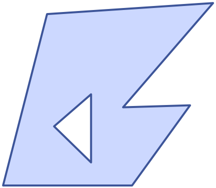
- Algoritmus provádějící trapezoidaci a tedy i triangulaci polygonu v lineárním čase byl prvně představen v článku *Triangulating a simple polygon in linear time* (Chazelle, 1990).
- Tento algoritmus je však velmi komplexní a obecně považován za "dostatečně beznadějný pro implementaci, takže slouží spíš jako existenční důkaz" (Skiena, 2008). [1]
- Algoritmus také obsahuje velké množství konstant, jejichž načítání by pravděpodobně reálnou implementaci zpomalovalo a algoritmus by tak nedosáhl výrazného zrychlení oproti ostatním $\mathbf{O}(\mathbf{n} \log \mathbf{n})$ algoritmům.

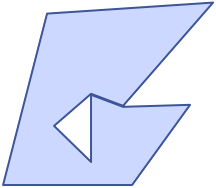
[1] volný překlad – v originálu "This algorithm is sufficiently hopeless to implement that it qualifies more as an existence proof."

Randomizovaná metoda

- Článek *A Randomized Algorithm for Triangulating a Simple Polygon in Linear Time* (Amato *et al.*, 2001) proto představil randomizovanou metodu pro výpočet trapezoidace jednoduchého polygonu s předpokládanou lineární složitostí, čímž představil další metodu pro triangulaci jednoduchého polygonu v (předpokladaném) lineárním čase.
- Metoda je založena na trapezoidaci postupně zpřesňovaných verzí polygonu.
- Ačkoliv je tento algoritmus na rozdíl od Chazelleovy metody prakticky implementovatelný, i tak je nad rámec této prezentace.

- Polygony s dírami se většinou definují tak, že vrcholy ohraničující díry jsou seřazeny opačným směrem oproti vnější hranici polygonu.
- Takovéto polygony pak umíme převést na polygony bez děr tak, že přidáme dvě hrany směrující do a ven z každé díry, přičemž tyto hrany spojují stejnou dvojici vrcholů a leží tedy "na sobě".
- Sebe protínající polygony nejsou až tak často používané a triangulující algoritmy pro tyto typy polygonů jsou relativně komplexní, nicméně existují.[2]





[2] Například FIST: http://www.cosy.sbg.ac.at/~held/projects/triang/triang.html

Literatura

- Amato, N. M., Goodrich, M. T., & Ramos, E. A. 2001.
  A Randomized Algorithm for Triangulating a Simple Polygon in Linear Time.
  Discrete Computational Geometry, **26**(2), 245–265.
- Chazelle, B. 1990.
  Triangulating a simple polygon in linear time.
  Pages 220–230 vol.1 of: Proceedings (1990) 31st Annual Symposium on Foundations of Computer Science, vol. 1. IEEE Comput. Soc. Press.
- de Berg, Mark, Cheong, Otfried, van Kreveld, Marc, & Overmars, Mark. 2008.
  Computational Geometry: Algorithms and Applications. Third edition edn.
  Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.
- Skiena, Steven S. 2008.
  Computational Geometry.
  Pages 562–619 of: The Algorithm Design Manual, 2 edn. London: Springer London.

Děkujeme za pozornost!