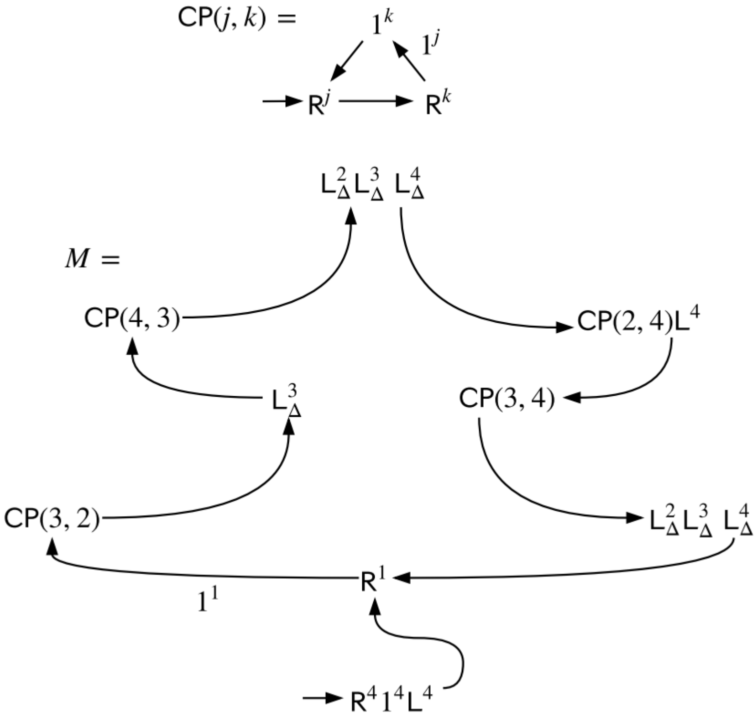
Teoretická informatika - Úkol č.3

Buchal Petr, xbucha02

1. Leden, 2019

1. Příklad

1.1 Zadání



Obrázek 1: Vánoční stroječek M a parametrizovaný stroj CP(j, k). Horní index označuje pásku, na které se daná akce vykonává.

Na obrázku 1 je kompozitní diagram vánočního Turingova stroječku M. Jde o čtyřpáskový stroj se vstupní abecedou $\Sigma = \{1\}$ a páskovou abecedou $\Gamma = \{\triangle, 1\}$. Obsahuje volání strojů CP(j, k), které kopírují obsah j-té pásky nacházející se vpravo za její hlavou doprava za hlavu k-té pásky. Počáteční konfigurace pásek a hlav M je M vyčísluje jistou funkci $f : \mathbb{N} \rightarrow$ N. Vstupemje unární

$$\begin{array}{ll} 1: & \underline{\triangle} x \triangle^\omega \\ 2: & \underline{\triangle}\triangle^\omega \\ 3: & \underline{\triangle}\triangle^\omega \\ 4: & \underline{\triangle}\triangle^\omega. \end{array}$$

zápis x přirozeného čísla na pásce 1, výstupem je unární zápis přirozeného čísla nacházející se po zastavení stroje na pásce 4.

(a) Identifikujte funkci f. Nápověda: $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$, . . . je dobře známá řada čísel.

(b) Zapište f jako parciálně rekurzivní funkci. Můžete použít funkce *eq*, $\neg$*eq*, *monus* a *plus* z přednášek a použít zjednodušený zápis funkcí. Inspirujte se příklady z přednášek a STI.

1.2 Řešení

1.2.1 Bod a

Instrukce	Páska 1	Páska 2	Páska 3	Páska 4	Hodnota f(x)
	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	0
$R^4 1^4 L^4$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	1
R^1	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
$1^1 \rightarrow$ CP(3,2)	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\triangle\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
$L^3_\triangle$	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\triangle\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
CP(4,3)	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\triangle\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
CP(2,4)L^4	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\triangle\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
CP(3,4)	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\triangle\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	1
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle\underline{1}1111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
R^1	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
$1^1 \rightarrow$ CP(3,2)	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
$L^3_\triangle$	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
CP(4,3)	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	
CP(2,4)L^4	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\triangle\underline{1}\triangle^\omega$	
CP(3,4)	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	2
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle1\underline{1}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	
R^1	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	
$1^1 \rightarrow$ CP(3,2)	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	
$L^3_\triangle$	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	
CP(4,3)	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	
CP(2,4)L^4	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\triangle\underline{1}1\triangle^\omega$	
CP(3,4)	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	3
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	
R^1	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	
$1^1 \rightarrow$ CP(3,2)	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	
$L^3_\triangle$	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	
CP(4,3)	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	
CP(2,4)L^4	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\triangle1\underline{1}1\triangle^\omega$	
CP(3,4)	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\triangle11\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11111\underline{\triangle}^\omega$	5
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle111\underline{1}1\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	
R^1	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	
$1^1 \rightarrow$ CP(3,2)	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	
$L^3_\triangle$	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	
CP(4,3)	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11111\underline{\triangle}^\omega$	
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	
CP(2,4)L^4	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\triangle11\underline{1}11\triangle^\omega$	
CP(3,4)	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\triangle111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11111\underline{\triangle}^\omega$	$\triangle11111111\underline{\triangle}^\omega$	8
$L^2_\triangle L^3_\triangle L^4_\triangle$	$\triangle1111\underline{1}\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111111\triangle^\omega$	
R^1	$\triangle11111\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111111\triangle^\omega$	
$1^1 \rightarrow$ CP(3,2)	$\triangle11111\underline{\triangle}^\omega$	$\underline{\triangle}111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111\triangle^\omega$	$\underline{\triangle}11111111\triangle^\omega$	

Simulací TS pro $x = 5$, jsme zjistili, že f je funkce Fibonacciho posloupnosti.

1.2.2 Bod b

Parciálně rekurzivní funkci Fibonacciho posloupnosti můžeme zapsat následovně

$$fibonacci(x) = \mu y[monus(fib(x), y) = 0].$$

Pomocná funkce fib je poté tvaru

$$fib(0) = \sigma(\xi())$$

$$fib(1) = \sigma(\xi())$$

$$fib(x) = plus(fib(monus(x, \sigma(\xi()))), fib(monus(x, \sigma(\sigma(\xi()))))).$$

2. Příklad

2.1 Zadání

Uvažujte jazyk predikátové logiky L prvního řádu bez rovnosti s jedním predikátovým symbolem p s četností 1 a množinou spočetně mnoha nulárních funkčních symbolů $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Pomocí diagonalizace dokažte, že množina realizací jazyka L, které mají jako univerzum množinu $\mathbb{N}$, je nespočetná.

2.2 Řešení

- Lemma 6.1.1 ze skript říká, že pro neprázdnou a konečnou množinu Σ je množina 2^{Σ^*} nespočetná, její důkaz se provádí diagonalizací.
- Realizací jazyka rozumíme algebraickou strukturu složenou z neprázdné množiny M zvané univerzum, zobrazení $f : M^n \to M$ pro každý funkční symbol f arity n a relací $R \subseteq M^n$ pro každý predikátový symbol R arity n.
- Nulární funkční symbol je konstanta, podle zadání jsou všechny funkční symboly konstanty, označme si je jako Σ^* (jedná se spočetnou množinu konstant $\{a_i | i \in \mathbb{N}\}$) a předpokládejme, že 2^{Σ^*} je spočetná. Dle definice spočetnosti existuje bijekce $f : \mathbb{N} \longleftrightarrow 2^{\Sigma^*}$.
- Uspořádejme Σ^* do nějaké posloupnosti $w_0, w_1, w_2, ...$, např. $1, 2, 3, 4, ...$. Nyní můžeme f zobrazit nekonečnou maticí:

	w_0	w_1	w_2	...	w_i	...
$L_0 = f(0)$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	...	a_{0i}	...
$L_1 = f(1)$	a_{10}	a_{11}	a_{12}	...	a_{1i}	...
$L_2 = f(2)$	a_{20}	a_{21}	a_{22}	...	a_{2i}	...
...	...	...	...	...	...	...

$$\text{kde } a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } w_j \notin L_i \\ 1, & \text{jestliže } w_j \in L_i \end{cases}$$

- Uvažujme jazyk $\overline{L} = \{w_i | a_{ii} = 0\}$. L se liší od každého jazyka $L_i = f(i), i \in \mathbb{N}$:
  - je-li $a_{ii} = 0$, pak w_i patří do jazyka,
  - je-li $a_{ii} = 1$, pak w_i nepatří do jazyka.
- Současně ale $\overline{L} \in 2^{\Sigma^*}$, f tudíž není surjektivní, což je spor.

3. Příklad

3.1 Zadání

Rozhodněte a dokažte, které ze vztahů $\{\subseteq, \supseteq, =\}$ platí mezi $\mathcal{O}(3^{2n})$ a $\mathcal{O}(2^{3n})$. Nápověda: zopakujte si pravidla pro počítání s mocninami a logaritmy.

3.2 Řešení

- Výrazy složitostí si můžeme upravit jako

$$3^{2n} = (3^2)^n = 9^n$$

$$2^{3n} = (2^3)^n = 8^n.$$

- Ukažme, že $8^n = \mathcal{O}(9^n)$.
- Výraz $8^n \leq c9^n$ je při zvolení c=1 je pravdivý pro všechna n, tedy splňuje definici $\mathcal{O}$.
- Nyní předpokládejme, že $9^n = \mathcal{O}(8^n)$, tedy $9^n \leq c8^n$, to si jinak můžeme vyjádřit jako

$$log(9^n) \leq log(c8^n)$$

$$nlog(9) \leq log(c8^n)$$

$$nlog(9) \leq log(c) + nlog(8)$$

$$n(log(9) - log(8)) \leq log(c)$$

$$nlog(\frac{9}{8}) \leq log(c)$$

$$n \leq \frac{log(c)}{log(\frac{9}{8})}.$$

- Podle definice $\mathcal{O}$ by měla být volba n libovolná, ale podle získaného výrazu nemůže být zvoleno n větší než $\frac{log(c)}{log(\frac{9}{8})}$, nastává spor z něhož plyne, že $\mathcal{O}(3^{2n}) \supseteq \mathcal{O}(2^{3n})$.

4. Příklad

4.1 Zadání

Teta Květa peče cukroví na předvánoční setkání s kamarádkami; v Kauflandu nakoupila spoustu surovin v akci (např. mouku, mléko, mák) a od tety Běty si půjčila Vánoční kuchařku. Nyní stojí nad sporákem a přemýšlí, kolik jakého cukroví musí napéct, aby bylo dost cukroví pro všechny kamarádky. Dokažte, že *Problém Tety Květy* je NP-úplný.

Upřesnění: Každý kus cukroví v kuchařce tety Běty vyžaduje určitý počet (celé číslo) měrných jednotek jednotlivých surovin (např. gramy u mouky, mililitry u mléka). Příklad: Jeden vanilkový rohlíček vyžaduje 10g cukru, 1 vanilkový lusk, 5 vlašských ořechu a 10g másla. Teta Květa řeší následující rozhodovací problém: existuje počet kusu každého cukroví z kuchařky tak, že množství potřebných surovin pro jejich napečení nepřekročí množství nakoupených surovin a bude napečeno alespoň tolik kusu, kolik má teta Květa kamarádek?

Nápověda: Použijte redukci z některého z následujících vybraných NP-úplných problému strejdy Karpa1 (u optimalizačních problému uvažujte jejich rozhodovací variantu, tj. pokud se optimalizační varianta ptá, jaké je nejlepší řešení, rozhodovací varianta se ptá, jestli existuje řešení, které má alespoň danou kvalitu):

- obarvitelnost grafu https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_coloring,
- problém batohu https://en.wikipedia.org/wiki/Knapsack_problem,
- celočíselné programování https://en.wikipedia.org/wiki/Integer_programming,
- vrcholové pokrytí grafu https://en.wikipedia.org/wiki/Vertex_cover nebo
- Hamiltonovská cesta https://en.wikipedia.org/wiki/Hamiltonian_path_problem.

4.2 Řešení

Při porovnání jednotlivých problémů jsem dospěl k závěru, že nejpodobnějším problémem *Problému tety Květy* je celočíselné programování. Konkrétně v kapitole 5.1 odkazovaného článku na Wikipedii se píše:

"Mixed integer programming has many applications in industrial production, including job-shop modelling. One important example happens in agricultural production planning involves determining production yield for several crops that can share resources (e.g. Land, labor, capital, seeds, fertilizer, etc.). A possible objective is to maximize the total production, without exceeding the available resources."

Konkrétní úloha celočíselného programování, která se zabývá produkcí je například Capital Budgeting (https://bit.ly/2LHathc). Na odkazované stránce je slovní popis této úlohy, převést jej na *Problém tety Květy* lze například následovně:

Capital Budgeting	Problém tety Květy
Firma má n projektů, které může provést, ale kvůli rozpočtovým limitacím jich může provést omezené množství.	Teta Květa má v kuchařce recepty na n druhů cukroví, ale kvůli omezenému počtu nakoupených surovin může napéct jen omezený počet kusů cukroví.
Od konkrétního projektu j je očekáván výdělek c_j, projekt ale vyžaduje investici a_{ij} v čase i pro $i = 1, ..m$.	Druh cukroví j bude mít stejnou výstupní hodnotu c_j se všemi ostatními druhy (protože záleží na celkovém počtu napečeného cukroví), každý druh cukroví ale vyžaduje surovinovou investici a_{ijk} v čase i pro $i = 1, ..m$, kde k je druh suroviny. *Problém tety Květy* se řeší jen pro jedno období, tedy $i = 1$.
Kapitál k dispozici v čase i je b_i.	Nakoupené suroviny k dispozici v čase i jsou b_{ik}, kde k je druh suroviny.
Problém maximalizace výdělku na základě dostupného kapitálu, může být formulován následovně: Nechť $x_j = 0$ nebo 1 podle toho zdali je vhodné projekt j projekt provádět nebo neprovádět. $\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ za podmínek $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$	Problém maximalizace napečeného cukroví na základě nakoupených surovin, může být formulován následovně: Nechť x_j nabývá hodnoty podle toho, kolik kusů daného cukroví j je vhodné upéct. $\max \sum_{j=1}^{n} x_j$ za podmínek $\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n} a_{jk} x_{jk} \leq b_k$

Konkrétní zadání této úlohy se nachází například na http://www2.ef.jcu.cz/$\sim$ *janaklic/emm/predn*5.*pdf*, ze zadání lze intuitivně vidět, že daný problém opravdu může být převeden na *Problému tety Květy*. Je zřejmé, že problém celočíselného programování je ekvivalentní *Problému tety Květy* a protože víme, že problém celočíselného programování je NP-úplný, je *Problém tety květy* rovněž NP-úplný.

5. Příklad

5.1 Zadání

Uvažujte definici jazyka Petriho sítě v přednášce o Petriho sítích na slajdu 18 (provedení přechodu odpovídá přečtení stejnojmenného symbolu) s tím, že přijímající jsou jen ty výpočetní posloupnosti, které vedou do deadlocku, tj. do značení, ze kterého není možné provést žádný přechod. Navrhněte Petriho sít, která přijímá jazyk $\{a^i(b^j)c^k \in \{a, b, c, (,)\}^* \mid i \geq j = k\}$ (příklad ilustruje, že Petriho sítě přijímají některé jazyky, které nejsou bezkontextové).

5.2 Řešení