Teoretická informatika - Úkol č.1

Buchal Petr, xbucha02

28. Říjen, 2018

1. Příklad

1.1 Zadání

S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \backslash L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \backslash L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \backslash L_2 \in \mathcal{L}_2$

$\mathcal{L}_2^D$ značí třídu deterministických bezkontextových jazyků.

1.2 Řešení

1.2.1 Bod a

Regulární jazyky jsou uzavřeny vzhledem k operacím $\cup$ (sjednocení), $\cdot$ (konkatenace) a * (iterace). To plyne z definice regulárních množin a ekvivalence regulárních množin a regulárních jazyků.

$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$, pokud jsou regulární jazyky uzavřeny vzhledem k průniku a zároveň vzhledem ke komplementu, jsou uzavřené rovněž vzhledem k rozdílu a výsledný jazyk bude náležet do $\mathcal{L}_3$.

(a) Uzavřenost regulárních jazyků vzhledem ke komplementu

K jazyku L sestrojíme úplně definovaný KA M

$$M = (Q, \Delta, \Sigma, q_0, F)$$

kde $\Delta \subseteq \Sigma$ a platí, že $L = L(M)$. Pak KA M'

$$M' = (Q, \Delta, \Sigma, q_0, Q \backslash F)$$

zřejmě přijímá jazyk $\Delta^* \backslash L$. Komplement vzhledem k Σ^*:

$$\overline{L} = L(M') \cup \Sigma^*(\Sigma \backslash \Delta)\Sigma^*$$

což je regulární jazyk.

(b) Uzavřenost regulárních jazyků vzhledem k průniku

Uzavřenost regulárních jazyků vzhledem ke komplementu plyne z de Morganových zákonů:

$$L_3 \cap L_4 = \overline{\overline{L_3 \cap L_4}} = \overline{\overline{L_3} \cup \overline{L_4}}$$

a tedy $L_3, L_4 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_3 \cap L_4 \in \mathcal{L}_3$.

1.2.2 Bod b

$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$, pokud jsou deterministické bezkontextové jazyky uzavřeny vzhledem k průniku s regulárními jazyky a vzhledem k doplňku, tvrzení 1.b bude pravdivé. Deterministické bezkontextové jazyky jsou vyjádřitelné deterministickými zásobníkovými automaty.

(a) Uzavřenost deterministických bezkontextových jazyků vzhledem k průniku s regulárními jazyky
Uzavřenost dokážeme tak, že zkonstruujeme deterministický zásobníkový automat přijímající příslušný průnik - konstruujeme průnik na konečném řízení, zásobníkové operace zůstávají.

(b) Uzavřenost deterministických bezkontextových jazyků vzhledem k doplňku
Nechť $M = (Q, \Sigma, R, s, F)$ je deterministický zásobníkový automat, kde

- Q je konečná množina stavů,
- Σ je abeceda taková, že $\Sigma \cap Q =$ a $\Sigma = \Sigma_I \cup \Sigma_{PD}$, kde Σ_I je vstupní abeceda a Σ_{PD} je zásobníková abeceda obsahující startovací symbol S.
- $R \subseteq \Sigma_{PD} Q(\Sigma_I \cup \{\epsilon\}) \times \Sigma^*_{PD} Q$ je konečná množina pravidel,
- $s \in Q$ je počáteční stav
- $F \subseteq Q$ množina koncových stavů

a který přijímá $w \in \Sigma^*_I$, $Ssw \vdash_* zq$, kde $q \in Q$ a $z \in \Sigma^*_{PD}$. Poté existuje algoritmus, který takový deterministický zásobníkový automat přijme na vstupu a na výstup předá deterministický zásobníkový automat $M' = (Q', \Sigma', R', s', F')$ takový, že $L(M') = \overline{L(M)}$.

Algoritmus 1 Algoritmus na získání doplňku deterministického zásobníkového automatu

$Q' := \{[q,\ k] : q \in Q \text{ and } k \in \{1, 0, @\}\}$
$F := \{[q,\ @] :\ q \in Q\}$
if $s \in F$ **then**
    $s' = [s,\ 1]$
else
    $s' = [s,\ 0]$
for each $r : Aq \vdash xp \in R$ and $k = 0,\ 1$ **do**
    if $p \in F$ or $k = 1$ **then**
        $R' := R' \cup \{A[q,\ k] \vdash x[p,\ 1]\}$
    else
        $R' := R' \cup \{A[q,\ k] \vdash x[p,\ 0]\}$
for each $r : Aqa \vdash xp \in R$ **do**
    $R' := R' \cup \{A[q,\ 0] \vdash A[q,\ @]\}$
    if $p \in F$ **then**
        $R' := R' \cup \{A[q,\ 1]a \vdash x[p, 1],\ A[q, @]a \vdash x[p, 1]\}$
    else
        $R' := R' \cup \{A[q,\ 1]a \vdash x[p, 0],\ A[q, @]a \vdash x[p, 0]\}$

1.2.3 Bod c

$L_1 \setminus L_2 = L_1 \cap \overline{L_2}$, k pravdivosti vztahu 1.c je potřeba dokázat, že je bezkontextový jazyk L_2 uzavřený vzhledem k doplňku a vzhledem k průniku s regulárními jazyky. Uzavřenost vzhledem k doplňku se pokusíme dokázat jako první. Z De Morganových zákonů plyne uzavřenost vzhledem k průniku $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1 \cap L_2}} = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$. Bezkontextové jazyky, ale nejsou uzavřené vzhledem k průniku, což lze demonstrovat na následujícím příkladu:

(a) Mějme bezkontextové jazyky $L_3 = \{a^m b^m c^n | n, m \geq 1\}$ a $L_4 = \{a^m b^n c^n | n, m \geq 1\}$.

(b) Provedeme operaci průnik $L_3 \cap L_4 = \{a^n, b^n, c^n | n \geq 1\}$.

(c) Pomocí pumping teorému provedeme důkaz, že $L_5 = \{a^n, b^n, c^n | n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_2$.
Nechť L_5 je bezkontextový jazyk, pak existuje konstanta $k > 0$ taková, že je-li $z \in L_5$ a $|z| \geq k$, pak lze z zapsat ve tvaru:

$$z = uvwxy, vx \neq \epsilon, |vwx| \leq k$$

a pro všechna $i \geq 0$ je $uv^iwx^iy \in L_5$. Řetězce v a x ale nelze zvolit tak, aby jejich iterací zůstával stejný počet symbolů a, b, c a současně pořadí symbolů a, b, c zůstalo nezměněno. Nastává spor, tedy $L_5 \notin \mathcal{L}_2$, z čehož vyplývá, že bezkontextové jazyky nejsou uzavřeny vzhledem k průniku.

Z neuzavřenosti bezkontextových jazyků (L_2) vzhledem k průniku plyne neuzavřenost vzhledem k doplňku, a tedy $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \backslash L_2 \notin \mathcal{L}_2$.

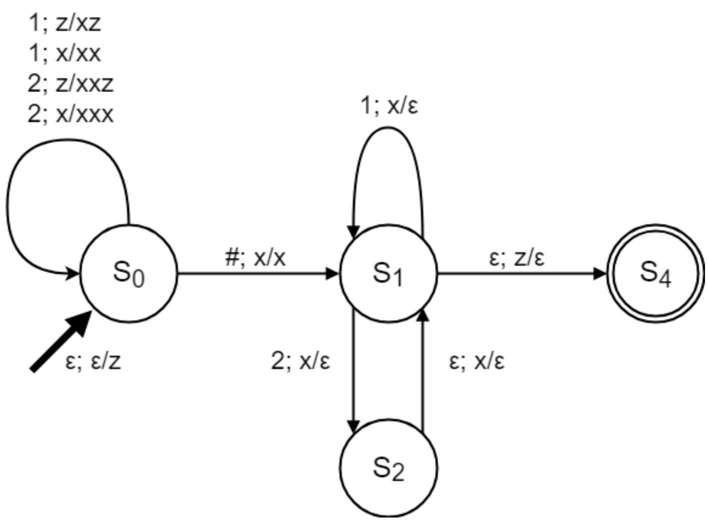
2. Příklad

2.1 Zadání

Nechť $\Sigma = \{0, 1, 2\}$. Uvažujme jazyk L nad abecedou $\Sigma \cup \{\#\}$ definovaný následovně:
$L = \{w_1\#w_2|w_1, w_2 \in \Sigma^*, \#_1(w_1) + (2 * \#_2(w1)) = \#_1(w_2) + (2 * \#_2(w2)\}$

Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$.

2.2 Řešení



3. Příklad

3.1 Zadání

Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

3.2 Řešení

- Předpokládejme, že $L \in \mathcal{L}_3$.
- $\exists k > 0 : \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow \exists x, y, z \in \Sigma^* : w = xyz \wedge y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$
- Uvažme libovolné $k > 0$ splňující uvedené tvrzení.
- Zvolme $w = 1^k\#1^k, |w| = 2k + 1 \geq k$
- Tedy $\exists x, y, z \in \Sigma^* : w = x, y, z \wedge y \neq \epsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$
- Z $|xy| \leq k$ a z $y \neq \epsilon$ plyne, že y musíme zvolit z prefixu 1^k, který je tvořen pouze symboly 1.
- Poté pro $i = 0$ řetězce $1^k\#1^k$ nebude platit, že $\#_1(w_1) + (2 * \#_2(w1)) = \#_1(w_2) + (2 * \#_2(w2)\}$, což je spor.
- Předpoklad, že $L \in \mathcal{L}_3$, byl chybný.
- $L \notin \mathcal{L}_3$

4. Příklad

4.1 Zadání

Nechť $G_P = (N, \Sigma, P, S)$ je pravá lineární gramatika. Navrhněte a *formálně popište* algoritmus, který pro zadanou pravou lineární gramatiku $G_P = (N, \Sigma, P, S)$ vytvoří levou lineární gramatiku G_L takovou, že $L(G_P) = L(G_L)$.

Algoritmus demonstrujte na na gramatice $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s následujícími pravidly:

$$S \to abA|bS$$
$$A \to bB|S|ab$$
$$B \to \epsilon|aA$$

4.2 Řešení

4.2.1 Algoritmus pro převod pravé lineární gramatiky na levou lineární gramatiku

1. Pravou lineární gramatiku $G_P = (N, \Sigma, P, S)$ převedeme na gramatiku G' = (N', Σ', P', S'), kde P' obsahuje pouze pravidla tvaru

$$A \to aB;\ A, B \in N';\ a \in \Sigma \text{ nebo}$$
$$A \to \epsilon$$

tak, že $L(G_P) = L(G'_P)$.

   (a) Pravidla z P tvaru
   $$A \to aB;\ A, B \in N';\ a \in \Sigma \text{ nebo}$$
   $$A \to \epsilon$$
   zařadíme do P'.

   (b) Každé pravidlo tvaru
   $$A \to a_1a_2\ ...\ a_nB,\ n \geq 2$$
   z P nahradíme v P' soustavou pravidel:
   $$A \to a_1A_1$$
   $$A_1 \to a_2A_2$$
   $$...$$
   $$A_{n-1} \to a_nB$$

   (c) Každé pravidlo tvaru
   $$A \to a_1a_2\ ...\ a_n,\ n \geq 1$$
   z P nahradíme v P' soustavou pravidel:
   $$A \to a_1A'_1$$
   $$A'_1 \to a_2A'_2$$
   $$...$$
   $$A'_{n-1} \to a_nA'_n$$
   $$A'_{n-1} \to \epsilon$$

   (d) Odstraníme (zbývající) tzv. jednoduchá pravidla tvaru $A \to B$.

2. Ke gramatice G' = (N', Σ', P', S') sestrojíme nedeterministický konečný automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ následovně:

   (a) $Q = N$'

(b) $\Sigma = \Sigma$'

(c) δ: $\delta(A, a)$ obsahuje B, jestliže $A \rightarrow aB$ je v P'

(d) $q_0 = S$'

(e) $F = \{A | A \rightarrow \epsilon \text{ je v } P'\}$

3. Nedeterministický konečný automat $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ upravíme následovně:

   (a) Vytvoříme nový stav $F_0 \in Q$.

   (b) Do δ přidáme pravidla $\delta(A, \epsilon) \rightarrow F_0$ pro $A \in F$.

   (c) Množinu koncových stavů určíme jako $F = \{F_0\}$.

4. K nedeterministickému konečnému automatu $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ sestavíme levou lineární gramatiku $G_L = (N, \Sigma, P, S)$ následovně:

   (a) $N = Q$

   (b) $\Sigma = \Sigma$

   (c) Pravidla P sestavíme následovně:

      i. Pokud existuje δ: $(B, a) = A$, pak P obsahuje pravidlo $A \rightarrow Ba$.

      ii. Pokud $A = q_0$, pak P obsahuje pravidlo $A \rightarrow \epsilon$

   (d) $S = F_0$, $F_0 \in F$

4.2.2 Demonstrace algoritmu na příkladu

1. Podle prvního kroku algoritmu převedeme gramatiku $G = (\{S, A, B\}, \{a, b\}, P, S)$ s pravidly

$$S \rightarrow abA | bS$$

$$A \rightarrow bB | S | ab$$

$$B \rightarrow \epsilon | aA$$

na gramatiku G' = $(\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P$', S') s pravidly

$$S \rightarrow aC | bS$$

$$A \rightarrow bB | aC | bS | aD$$

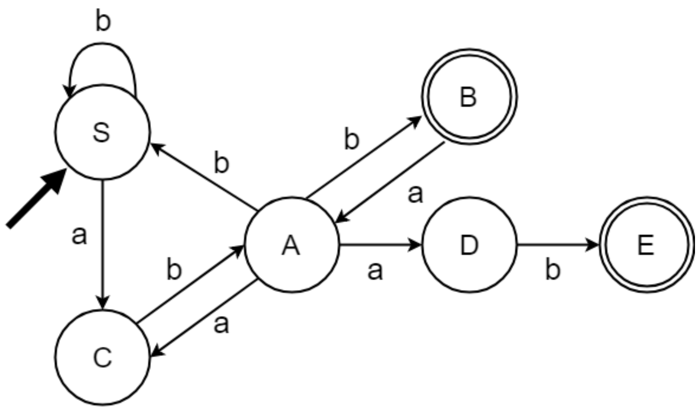
$$B \rightarrow \epsilon | aA$$

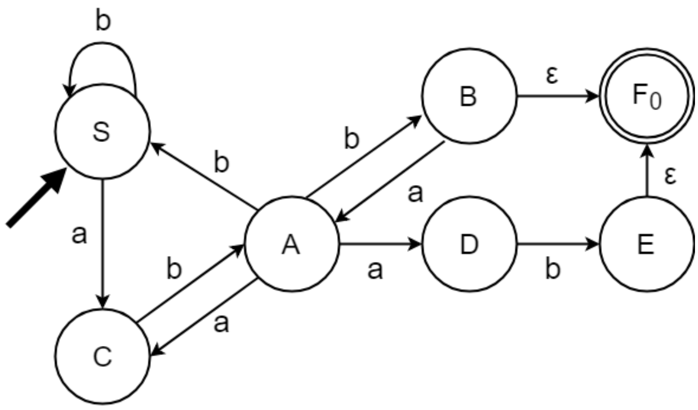
$$C \rightarrow bA$$

$$D \rightarrow bE$$

$$E \rightarrow \epsilon$$

Podle druhého kroku algoritmu převedeme gramatiku G' = $(\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, P$', S') na nedeterministický konečný automat $M = (\{S, A, B, C, D, E\}, \{a, b\}, \delta, S, \{B, E\})$





Podle třetího kroku algoritmu doplníme do NKA M nový stav F_0, přidáme s ním spojené ϵ-přechody a množinu koncových stavů určíme jako $F = \{F_0\}$.

Podle posledního kroku algoritmu převedeme NKA $M = (\{S, A, B, C, D, E, F_0\}, \{a, b\}, \delta, S, \{F_0\})$ na levou lineární gramatiku $G_L = (N, \Sigma, P, S)$ s pravidly

$$F_0 \to B|E$$

$$B \to Ab$$

$$E \to Db$$

$$D \to Aa$$

$$A \to Cb|Ba$$

$$C \to Aa|Sa$$

$$S \to Aa|Sb|\epsilon$$

5. Příklad

5.1 Zadání

Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) mod\ 3 \neq 0 \wedge \#_b(w) > 0\}$ je regulární. Postupujte následovně:

- Definujte $\sim_L$ pro jazyk L.
- Zapište rozklad $\Sigma^*/\sim_L$ a určete počet tříd rozkladu.
- Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^*/\sim_L$.

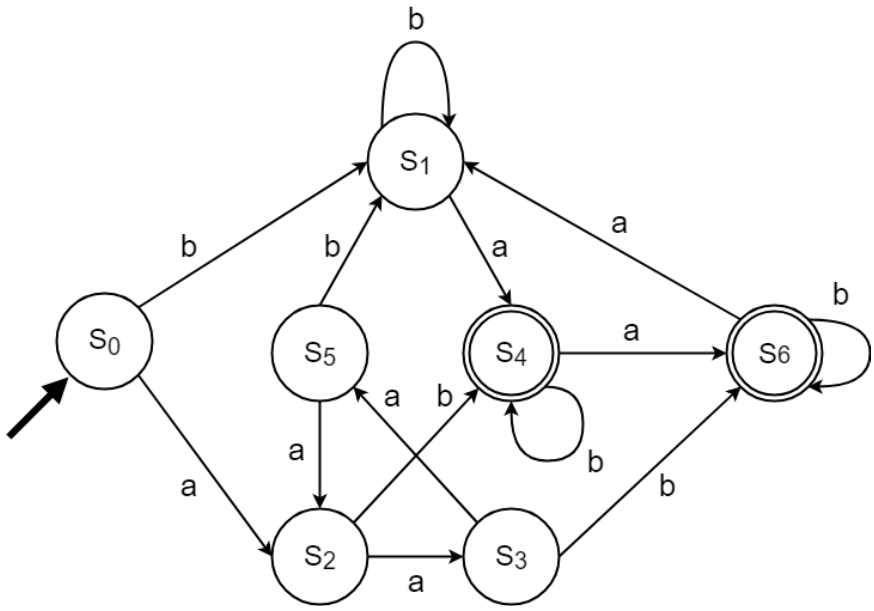
5.2 Řešení

$u \sim_L v \Leftrightarrow ((\#_b(u) > 0 \wedge \#_b(v) > 0) \vee (\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0)) \wedge (\#_a(u) mod3 = \#_a(v) mod3))$

Pro větší přehlednost jako první sestrojíme konečný automat přijímající daný jazyk a podle něj určíme rozklad tříd (obrázek automatu se nachází na další straně). Již sestavení konečného automatu dokazuje, že daný jazyk je regulární.

$L^{-1}(S_0) = \epsilon$
$L^{-1}(S_1) = (b + aaa(aaa)^*b + a(aaa)^*bb^*ab^*a + aa(aaa)^*bb^*a)b^*(b^*ab^*ab^*a)^*$
$L^{-1}(S_2) = a(aaa)^*$
$L^{-1}(S_3) = aa(aaa)^*$
$L^{-1}(S_4) = (bb^*a + a(aaa)^*b + aaa(aaa)^*bb^*a + aa(aaa)^*bb^*ab^*a)b^*(b^*ab^*ab^*a)^*$
$L^{-1}(S_5) = aaa(aaa)^*$
$L^{-1}(S_6) = (bb^*ab^*a + a(aaa)^*bb^*a + aaa(aaa)^*bb^*ab^*a + aa(aaa)^*b)b^*(b^*ab^*ab^*a)^*$

$L = L^{-1}(S_4) \cup L^{-1}(S_6)$, L je sjednocením některých tříd rozkladu určeného pravou kongruencí na Σ^* s konečným indexem, jedná se tedy o regulární jazyk.


b
S1
b
b
a
a
S0
S5
S4
a
S6
b
a
b
a
b
b
a
S2
S3
a