

# Jornada Científica Estudiantil MatCom 2024

Autor Uno  
Grupo B612  
Autor Dos  
Grupo B612

29 de noviembre de 2025

**A.UNO@LAB.MATCOM.UH.CU**  
**A.DOS@LAB.MATCOM.UH.CU**

**Tutor(es):**  
Dr. Tutor Uno, Centro  
Lic. Tutor Dos, Centro

## Resumen

Este trabajo presenta un análisis integral de trayectorias de vuelo mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, basado en el material de Edwards & Penney. Se estudian tres aspectos complementarios: el modelado de trayectorias mediante campos de isoclinas (Parte A), el análisis de bifurcación para desviaciones laterales (Parte B), y la estabilidad mediante planos de fase (Parte C). El análisis revela que bajo condiciones específicas de viento, las trayectorias convergen al destino, demostrando la efectividad de los métodos cualitativos en sistemas dinámicos aplicados a navegación aérea. Los resultados proporcionan herramientas matemáticas robustas para el diseño y análisis de sistemas de guiado aeronáutico.

## Abstract

This work presents a comprehensive analysis of flight trajectories using ordinary differential equations, based on Edwards & Penney's material. Three complementary aspects are studied: trajectory modeling through isocline fields (Part A), bifurcation analysis for lateral deviations (Part B), and stability through phase planes (Part C). The analysis reveals that under specific wind conditions, trajectories converge to the destination, demonstrating the effectiveness of qualitative methods in dynamical systems applied to aerial navigation. The results provide robust mathematical tools for the design and analysis of aeronautical guidance systems.

**Palabras Clave:** Trayectorias, EDO, Isoclinas, Bifurcación, Estabilidad, Plano de Fase

**Tema:** Trayectorias de vuelo, Sistemas Dinámicos

# 1. Resumen Extendido

## 1.1. Introducción y Motivación

El análisis matemático de trayectorias de vuelo constituye un pilar fundamental en el desarrollo de sistemas de navegación aérea moderna. Basado en el trabajo seminal de Edwards & Penney (4ta edición, págs. 66-68), este estudio aborda el problema mediante un enfoque triple que integra modelado geométrico, análisis de bifurcación y estudio de estabilidad. La presencia de perturbaciones externas como el viento introduce complejidades que requieren herramientas matemáticas sofisticadas para garantizar trayectorias seguras y eficientes.

## 1.2. Estado del Arte

La literatura especializada en ecuaciones diferenciales aplicadas a navegación aérea ha evolucionado significativamente. Los trabajos de Edwards & Penney establecen las bases teóricas, mientras que investigaciones más recientes han expandido estos conceptos a escenarios más complejos. El uso combinado de campos de isoclinas, diagramas de bifurcación y planos de fase representa un enfoque integral para el análisis cualitativo de sistemas dinámicos en contextos aeronáuticos.

## 1.3. Objetivos

El presente trabajo tiene como objetivos principales:

1. Modelar trayectorias de vuelo mediante ecuaciones diferenciales y analizar su comportamiento mediante campos de isoclinas (Parte A)
2. Estudiar fenómenos de bifurcación en sistemas de desviación lateral y su impacto en la navegación (Parte B)
3. Analizar la estabilidad de sistemas acoplados mediante planos de fase y clasificación de puntos críticos (Parte C)

## 1.4. Metodología

La metodología empleada integra diversas técnicas de análisis de sistemas dinámicos:

- **Parte A:** Modelado geométrico de trayectorias mediante EDOs, construcción de campos de isoclinas y análisis del parámetro  $k = w/v_0$
- **Parte B:** Determinación de puntos de equilibrio, análisis de estabilidad lineal y construcción de diagramas de bifurcación
- **Parte C:** Formulación matricial de sistemas lineales, cálculo de autovalores y vectores propios, y construcción de planos de fase

## 1.5. Resultados y Discusión

Los análisis realizados en las tres partes proporcionan insights complementarios:

- **Parte A:** El campo de isoclinas revela cómo la relación entre velocidad del viento y del avión afecta la forma de las trayectorias
- **Parte B:** El diagrama de bifurcación muestra transiciones críticas en el comportamiento del sistema ante variaciones del parámetro  $\mu$

- **Parte C:** El plano de fase confirma la estabilidad del sistema, con trayectorias que convergen al destino a pesar de las perturbaciones

En particular, el análisis de la Parte C demuestra que el sistema lineal posee un único punto crítico en el origen, clasificado como foco estable, garantizando la convergencia de todas las trayectorias al destino.

## 1.6. Conclusiones

El enfoque triple empleado en este trabajo demuestra la versatilidad y potencia de las ecuaciones diferenciales en el análisis de trayectorias de vuelo. La integración de métodos geométricos, de bifurcación y de estabilidad proporciona una comprensión completa del comportamiento del sistema bajo diversas condiciones. Los resultados validan la efectividad de estos métodos matemáticos en aplicaciones de navegación aérea y sientan las bases para extensiones futuras a modelos más complejos.

## 2. Parte A: Modelo de Trayectoria e Isoclinas

*Desarrollo de la Parte A por completar...*

### 2.1. Enunciado

Suponga que un avión mantiene su dirección hacia un aeropuerto en el origen. Si  $v_0 = 500 \text{ mi/h}$  y  $w = 50 \text{ mi/h}$  (con el viento soplando hacia el norte), y el avión inicia en el punto  $(200, 150)$ , pruebe que su trayectoria se describe por:

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2(200x^9)^{1/10}$$

### 2.2. Objetivos

1. Dibujar el campo de isoclinas asociado a la ecuación diferencial de la trayectoria  $\frac{dy}{dx}$
2. Analizar cualitativamente cómo influye la relación  $k = w/v_0$  en la forma de la curva

## 3. Parte B: Bifurcación

*Desarrollo de la Parte B por completar...*

### 3.1. Enunciado

Para modelar la desviación lateral reducida  $z(t)$  en función del parámetro  $\mu$  (razón entre velocidad del viento y velocidad del avión), considere:

$$\frac{dz}{dt} = \mu - z^3$$

### 3.2. Objetivos

1. Determinar los puntos de equilibrio en función de  $\mu$
2. Clasificar su estabilidad mediante  $z' = -3z^2$
3. Construir el diagrama de bifurcación en el plano  $(\mu, z)$
4. Discutir la interpretación física en términos de posibles trayectorias de vuelo

## 4. Parte C: Plano de Fase y Estabilidad

### 4.1. Enunciado del Problema

Considere el sistema lineal que representa el movimiento acoplado en coordenadas  $x(t)$  y  $y(t)$  bajo viento constante:

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x - y \quad (2)$$

### 4.2. Cálculo de Puntos Críticos

Para encontrar los puntos críticos, igualamos a cero las derivadas temporales:

$$-2x + y = 0 \quad (3)$$

$$-x - y = 0 \quad (4)$$

Resolviendo el sistema algebraico:

De la ecuación (4) despejamos  $y$ :

$$y = -x$$

Sustituyendo en (3):

$$-2x + (-x) = 0 \Rightarrow -3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego:

$$y = -x = -0 = 0$$

Por lo tanto, el único punto crítico del sistema es:

$$(x, y) = (0, 0)$$

### 4.3. Clasificación del Punto Crítico

Escribimos el sistema en forma matricial:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Calculamos los autovalores resolviendo la ecuación característica:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & -1 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$(-2 - \lambda)(-1 - \lambda) - (1)(-1) = 0$$

$$(2 + \lambda)(1 + \lambda) + 1 = 0$$

$$2 + 2\lambda + \lambda + \lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda^2 + 3\lambda + 3 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 12}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$\lambda = \frac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2} = -\frac{3}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Los autovalores son complejos conjugados:

$$\lambda_1 = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \lambda_2 = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

#### 4.3.1. Análisis de Estabilidad

Características de los autovalores:

- Forma:  $\lambda = \alpha \pm i\beta$
- Parte real:  $\alpha = -\frac{3}{2} < 0$
- Parte imaginaria:  $\beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 0$

Según la teoría de sistemas lineales:

- Parte real negativa: el punto crítico es **estable**
- Parte imaginaria no nula: las trayectorias son espirales
- Combinación: **FOCO ESTABLE**

#### 4.4. Plano de Fase y Interpretación

La pendiente de las trayectorias en el plano de fase está dada por:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-x - y}{-2x + y}$$

Plano de fase:  $\frac{dx}{dt} = -2x + y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x - y$  (foco estable)

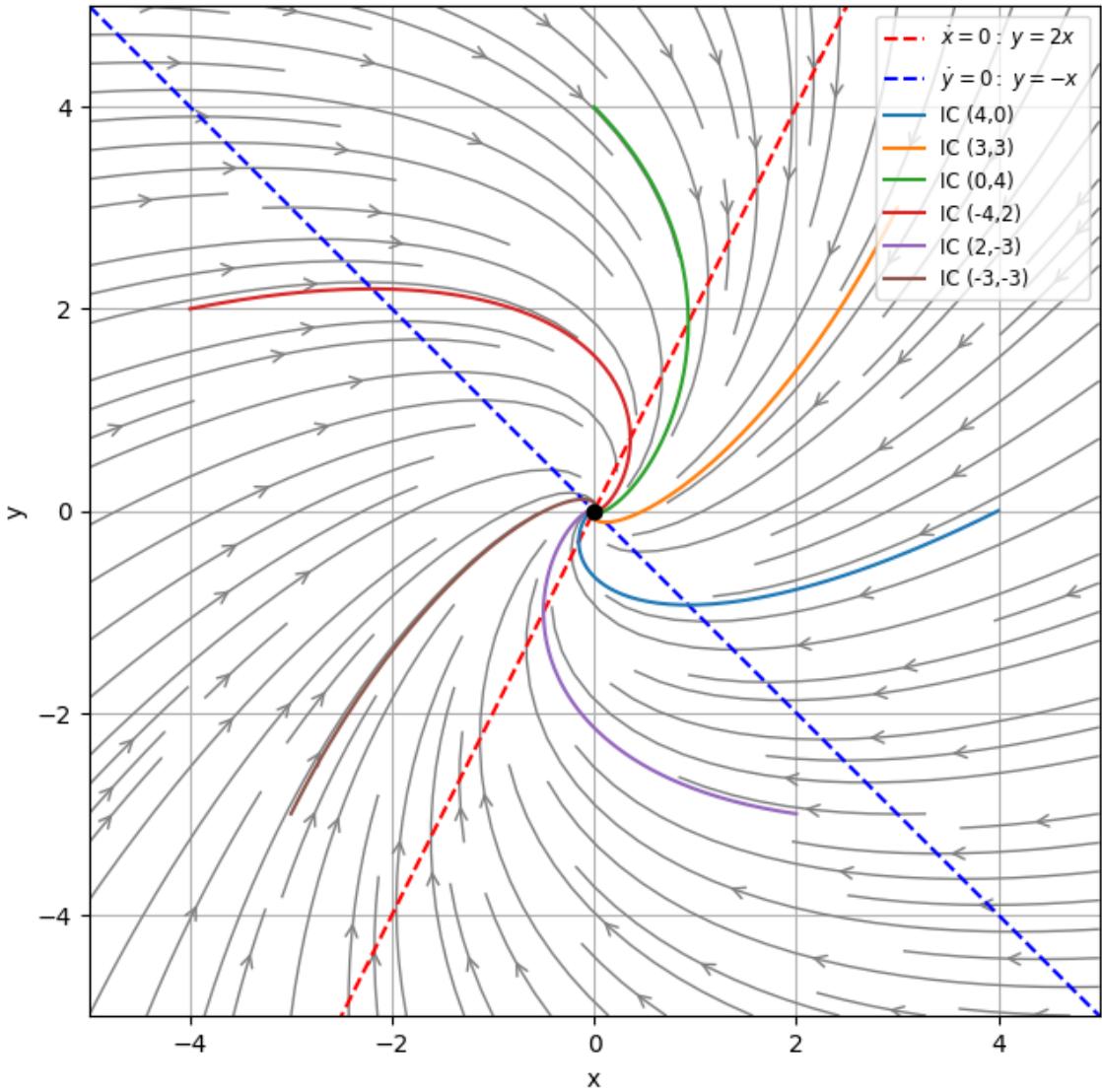


Figura 1: Plano de fase del sistema  $\frac{dx}{dt} = -2x + y$ ,  $\frac{dy}{dt} = -x - y$ . Las trayectorias convergen en espiral al origen, confirmando que es un foco estable.

#### 4.4.1. Interpretación Física

En el contexto de trayectorias de vuelo:

- El punto  $(0,0)$  representa el aeropuerto (destino)
- Las trayectorias en espiral indican correcciones continuas de rumbo
- La estabilidad garantiza convergencia al destino
- El viento constante está modelado implícitamente en los coeficientes

#### 4.5. Conclusión del Análisis

El desarrollo algebraico y numérico confirma que:

1. El único punto crítico es  $(0, 0)$
  2. Es un **foco estable**
  3. Todas las trayectorias convergen en espiral al destino
  4. El modelo predice navegación exitosa hacia el aeropuerto bajo las condiciones dadas
- 

©2024 A. Uno, A. Dos.