

## 1. Liczby zespolone

Proszę przypomnieć sobie operacje na liczbach zespolonych.

Niech  $x = -2 + i\sqrt{5}$ . Znajdź postać polarną  $x$ .

Policz ile wynosi  $x^*$ ,  $|x^2|$ ,  $|x|^2$ .

Policz  $|x + y|$  gdzie  $y = 2e^{-i\pi/4}$ .

Powyższe wyniki proszę znaleźć analitycznie, a następnie sprawdzić z wykorzystaniem dowolnego programu pozwalającego na obliczenia numeryczne (Mathematica, Python, itp.).

## 2. Troche jednostek

Zielony wskaźnik laserowy emituje światło o długości fali  $\lambda = 532nm$ . Ile fotonów emituje w trakcie jednej sekundy jeśli jego moc wynosi  $5mW$ ?

Energia jonizacji atomu wodoru w stanie podstawowym wynosi około  $13.6eV$ . Jaka jest długość fali i częstotliwość światła która wystarcza do zjonizowania tego atomu? Czy należy ono do widzialnej, podczerwonej czy ultrafioletowej części widma?

Wartości stałych fizycznych potrzebne do powyższych obliczeń proszę znaleźć w dowolnych źródłach.

## 3. Doświadczenie Younga

Proszę przypomnieć sobie schemat doświadczenia Younga pokazującego interferencję światła, gdzie spójna wiązka światła o długości  $\lambda$  pada na układ dwóch bardzo wąskich szczelin oddalonych od siebie o odległość  $d$ . Na ekranie położonym równolegle do płaszczyzny szczelin, w odległości  $l$  od nich, obserwujemy układ prążków interferencyjnych. Proszę wyprowadzić warunek na odległość między kolejnymi prążkami/maksimami (patrz, na przykład, opis ćwiczenia O18 na I Pracowni Fizycznej).

W pełnej analogii, będziemy rozważali amplitudę prawdopodobieństwa znalezienia cząstki w konkretnym miejscu na ekranie. W przypadku cząstki która przeszła przez  $j$ -tą szczelinę amplituda ta wynosi  $\phi_j = \frac{e^{ikl_j}}{l_j}$ , gdzie  $l_j = \sqrt{l^2 + (x \pm d/2)^2}$  (plus dla  $j = 1$ , minus dla  $j = 2$ ) to odległość między środkiem  $j$ -tej szczeliny a konkretnym miejscem na ekranie, gdzie  $x = 0$  to punkt na ekranie który znajduje się w osi szczelin. W powyższym wzorze  $k = 2\pi/\lambda$  jest liczbą falową.

W przypadku gdy cząstka mogła przejść przez dowolną z tych dwóch szczelin z tym samym prawdopodobieństwem, prawdopodobieństwo znalezienia cząstki w konkretnym punkcie ekranu wynosi  $P(x) \sim |\phi_1 + \phi_2|^2$ . Proszę znaleźć  $P(x)$  przy założeniu, że odległość  $l$  jest dużo większa niż  $d$  i  $x$ .

## 4. Fale de Broglie'a

Rozważmy ciało o masie  $1g$  poruszające się z prędkością  $1m/s$ . Jaka jest długości fali de Broglie'a która odpowiada takiej sytuacji? Proszę ją porównać z promieniem protonu.

W doświadczeniu Davissona-Germera zaobserwowano wyraźne maksimum interferencyjne przy rozpraszaniu wiązki elektronów o energii  $54eV$  na kryształach niklu (odległość między płaszczyznami atomowymi  $d = 0.091nm$ ) dla kąta  $\alpha = 50^\circ$ , gdzie  $\alpha$  jest kątem między nadlatującą wiązką a kierunkiem ustawienia detektora. Proszę sprawdzić, czy dane te są zgodne z hipotezą de Broglie'a.

## 5. Macierze Pauliego

Tak zwane macierze Pauliego definiujemy jako:

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Pojawiają się one bardzo często w mechanice kwantowej, szczególnie w przypadku opisów układów którym odpowiada dwuwymiarowa przestrzeń Hilberta.

- Pokaż przy pomocy bezpośredniego rachunku, że:

$$\sigma_m \sigma_n = \delta_{mn} I_2 + i \sum_{o \in \{x,y,z\}} \epsilon_{mno} \sigma_o, \quad (2)$$

gdzie  $I_2$  oznacza jednostkową macierz  $2 \times 2$ , a  $\epsilon_{mno}$  jest symbolem całkowicie antysymetrycznym. Indeksy  $m$  oraz  $n$  przyjmują wartości w zbiorze  $\{x, y, z\}$  odpowiadające kierunkom w przestrzeni i  $\epsilon_{xyz} = 1$ . Należy sprawdzić wszystkie możliwe kombinacje  $m$  i  $n$  (część na kartce, resztę można na komputerze)

- Sprawdź, że macierze te mają wyznacznik równy  $-1$  i są bezśladowe, czyli  $\det \sigma_m = -1$ , oraz  $\text{Tr} \sigma_m = 0$ .
- Uzasadnij, że są one macierzami hermitowskimi i unitarnymi.

## 6. Komutatory

Policz komutatory  $[\sigma_m, \sigma_n] = \sigma_m \sigma_n - \sigma_n \sigma_m$ , oraz antykomutatory  $\{\sigma_m, \sigma_n\} = \sigma_m \sigma_n + \sigma_n \sigma_m$  macierzy Pauliego.

## 7. Diagonalizacja

Znajdź wartości własne i unormowane wektory własne dla macierzy Pauliego.

## 8. Eksponenta macierzy

Policz ile wynosi  $e^{-it\sigma_x}$  oraz  $e^{-it\sigma_z}$ , gdzie  $t$  jest dowolną liczbą. Eksponentę z macierzy definiujemy jako  $e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$ . *Wskazówka:* Proszę zauważyć, że  $\sigma_x^2 = \sigma_z^2 = I_2$ , co pozwala niezależnie rozważyć wkłady od  $n$  parzystych (proporcjonalny do  $I_2$ ), oraz  $n$  nieparzystych (proporcjonalny odpowiednio do  $\sigma_x$  i  $\sigma_z$ ). Proszę przypomnieć sobie jak wygląda rozwinięcie w szereg Taylora funkcji sinus i cosinus.

## 9. Reprezentacja macierzowa w bazie ortonormalnej

Rozważmy przestrzeń liniową funkcji  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (gładkich i całkowalnych z kwadratem), której bazę stanowi zbiór funkcji

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} \sqrt{n! 2^n}} H_n(x) e^{-x^2/2},$$

gdzie  $H_n(x)$  to  $n$ -ty wielomian Hermita. Iloczyn skalarny funkcji  $f(x)$  i  $g(x)$  jest dany wzorem

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x) dx.$$

- Korzystając, z własności wielomianów Hermita  $\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{mn}$ , którą przyjmujemy za znaną, proszę uzasadnić, że podana baza jest ortonormalna.

Operator  $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + \frac{d}{dx})$  działa na funkcję  $f(x)$  w taki sposób, że  $\hat{a}f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(xf(x) + f'(x))$ . Analogicznie definiujemy operator  $\hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - \frac{d}{dx})$  (później uzasadnimy, że rzeczywiście jest to operator sprzężony do operatora  $\hat{a}$ ).

- Proszę znaleźć macierzową reprezentację operatorów  $\hat{a}^\dagger$  i  $\hat{a}$  w zadanej bazie ortonormalnej. Proszę tutaj skorzystać, ze znanych własności wielomianów Hermita  $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \frac{d}{dx}H_n(x)$ , oraz  $\frac{d}{dx}H_n(x) = 2nH_{n-1}(x)$ .
- Jak działa na funkcję  $f(x)$  operator  $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ ? Jak wygląda jego macierzowa reprezentacja w zadanej bazie?

## 10. Sprzężenie hermitowskie

Proszę sprawdzić, że operator  $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$  jest hermitowski.

Iloczyn skalarny dwóch funkcji  $a(x), b(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  dany jest wyrażeniem:

$$\langle b|a \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} b^*(x)a(x)dx.$$

Ta definicja iloczynu skalarnego ma sens, jeśli powyższa całka jest zbieżna. Oznacza to, że funkcje  $a(x)$  i  $b(x)$  muszą dążyć dostatecznie szybko do zera dla  $x \rightarrow \pm\infty$ .

*Wsk.:* Sprzężenia hermitowskie jest zdefiniowane przez związek  $\langle b|Aa \rangle = \langle A^\dagger b|a \rangle$ , gdzie  $a(x)$  i  $b(x)$  to dowolne funkcje próbne, a  $\langle b|a \rangle$  oznacza iloczyn skalarny. Trzeba skorzystać z całkowania przez części, żeby tak przekształcić wyrażenie, aby operator  $\hat{p}$  działał raz na  $a(x)$  a drugi raz na  $b(x)$  pozostawiając wynik całkowania bez zmian.

## 11. Sprzężenie hermitowskie złożenia

Proszę znaleźć operator sprzężony hermitowsko z iloczynem operatorów  $A$  i  $B$ , czyli wyrazić postać operatora  $(AB)^\dagger$  przy pomocy operatorów  $A^\dagger$  i  $B^\dagger$ .

Ile wynosi sprzężenie hermitowskie macierzy (operatora) policzonego w zadaniu 8.?

## 12. Operator hermitowski

Dla operatora hermitowskiego  $\hat{A}$ , pokaż że:

- Jeśli  $\hat{A}|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$ , to  $\lambda = \lambda^*$ , czyli, że wartości własne operatora hermitowskiego przyjmują wartości rzeczywiste.
- Wektory własne operatora  $\hat{A}$  do różnych wartości własnych są ortogonalne. W szczególności należy pokazać, że jeśli  $\hat{A}|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$  dla  $i = 1, 2$ , to  $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle\lambda_1|\lambda_2\rangle = 0$ .

## 13. Operatory komutujące

Jeśli dwa operatory hermitowskie  $\hat{A}$  i  $\hat{B}$  komutują,  $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ , to istnieje wspólna dla nich baza wektorów własnych. Uzasadnij to twierdzenie. *Wskazówka:* Jak w poprzednim punkcie, rozważmy dwa dowolne wektory własne  $\hat{A}$ , t.j.,  $\hat{A}|\lambda_i\rangle = \lambda_i|\lambda_i\rangle$  dla  $i = 1, 2$ . Można łatwo zauważyć, że  $\langle\lambda_1|[\hat{A}, \hat{B}]|\lambda_2\rangle = 0$ . Proszę rozpisać to wyrażenie i zastanowić się co z niego wynika.

## 14. Postulaty pomiaru w mechanice kwantowej

Proszę rozważyć następujące operatory w trójwymiarowej przestrzeni Hilberta:

$$\hat{S}_x = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_y = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

1. Jakie wartości można otrzymać w wyniku pomiaru  $\hat{S}_z$ ?

2. Układ jest w stanie o  $S_z = -1$  i dokonujemy pomiaru  $\hat{S}_x$ . Podaj możliwe wyniki pomiaru i ich prawdopodobieństwa.
3. Rozważ stan, który w bazie stanów własnych  $\hat{S}_z$  wyraża się jako

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Dla tego stanu wykonujemy pomiar  $\hat{S}_z^2$  i otrzymujemy wynik 1. Podaj stan układu po tym pomiarze. Jakie jest prawdopodobieństwo otrzymania tego wyniku? Teraz wyobraź sobie, że mierzymy  $\hat{S}_z$ . Jakie możemy otrzymać wyniki i z jakim prawdopodobieństwem?

4. Układ jest w stanie, dla którego prawdopodobieństwa zmierzenia  $S_z = 1$  wynosi  $\frac{1}{16}$ ,  $S_z = 0$  wynosi  $\frac{1}{2}$ , a  $S_z = -1$  wynosi  $\frac{7}{16}$ . Uzasadnij, że stan unormowany o takich własnościach ma postać

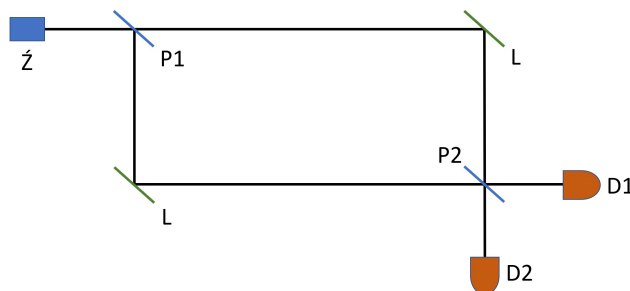
$$|\Psi\rangle = \frac{e^{i\phi_1}}{4}|S_z = 1\rangle + \frac{e^{i\phi_2}}{\sqrt{2}}|S_z = 0\rangle + \frac{\sqrt{7}e^{i\phi_3}}{4}|S_z = -1\rangle.$$

Z postulatów wynika, że stany różniące się o globalną fazę,  $|\Psi\rangle$  oraz  $e^{i\phi}|\Psi\rangle$ , są fizycznie nierozróżnialne. Czy oznacza to, że czynniki  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  i  $\phi_3$  w powyższym równaniu nie są istotne? Żeby się o tym przekonać policz, na przykład, prawdopodobieństwo zmierzenia  $S_y = 0$  w tym stanie.

Zachęcam, żeby w rozwiązaniu tego zadania wspomóc się jakimś programem do obliczeń numerycznych.

## 15. Interferometer Macha-Zehndera

Rozważmy układ interferometru Macha-Zehndera, jak na poniższym rysunku.



Foton ze źródła  $Z$  pada na lustro półprzepuszczalne  $P1$ , przez które może przejść lub się odbić pod kątem  $90^\circ$ . Następnie lustra  $L$  kierują go do kolejnego lustra półprzepuszczalnego  $P2$ . Interesują nas prawdopodobieństwa, że foton zostanie zarejestrowany przez detektor  $D1$  lub  $D2$ .

a) Foton ze źródła padając na lustro  $P1$  jest w superpozycji stanów gdzie został odbity i przeszedł prosto, co można wyrazić jako  $|Z\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|T\rangle + i|R\rangle)$  ( $i$  to ekstra czynnik fazowy między dwoma wiązkami). Załóżmy, że usunięto  $P2$ . Jakie są prawdopodobieństwa zarejestrowania fotonu w każdym z detektorów?

b) Ile będą wynosiły te prawdopodobieństwa jeśli w układzie będzie się znajdowało lustro  $P2$ ? Wiadomo, że w tym przypadku  $|T\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(i|D1\rangle + |D2\rangle)$ , a  $|R\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|D1\rangle + i|D2\rangle)$ . Proszę dodatkowo sprawdzić, że powyższa transformacja między  $\{|T\rangle, |R\rangle\}$ , a  $\{|D1\rangle, |D2\rangle\}$  jest unitarna.

c) Do układu na górnej i dolnej ścieżce dodajemy dodatkowe polaryzatory, ustawione w prostopadłych kierunkach. Możliwy stan fotonu charakteryzujemy wtedy dodatkowo przy pomocy jego

polaryzacji, przy czym stany kwantowe polaryzacji poziomej  $|H\rangle$  i pionowej  $|V\rangle$  są ortogonalne. Jak wtedy będzie wyglądał wynik pomiaru? Zakładamy, że zachowanie lusterek ani detektorów nie zależy od polaryzacji.

## 16. Eksperyment Sterna-Gerlacha

(a) Proszę rozważyć eksperyment typu Sterna-Gerlacha dla cząstek o spinie-1/2 (jak na wykładzie). Przygotowujemy wiązkę cząstek w stanie  $|\hat{S}_z = \hbar/2\rangle$  i dokonujemy na nich pomiaru rzutu spinu na kierunek  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ , gdzie  $\vec{n}$  jest wektorem jednostkowym, czyli  $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ . Odpowiedni operator rzutu spinu to  $\vec{n} \cdot \vec{\hat{S}} = n_x \hat{S}_x + n_y \hat{S}_y + n_z \hat{S}_z$ . Jakich wyników pomiaru oczekujemy z jakimi prawdopodobieństwami?

(b) Rozważmy podobne pytanie dla cząstek o spinie-1. Wiadomo, że w tym przypadku operatory rzutu spinu na kierunki  $x, y, z$  są dane przez macierze z zadania 14. (wyrażone w bazie stanów własnych  $\hat{S}_z$  oraz w jednostkach  $\hbar$ ).

W obu podpunktach można skorzystać z obliczeń numerycznych.

## 17. Unitarność operatora ewolucji czasowej

Stosując równanie ewolucji czasowej (równanie Schrödingera)  $i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = \hat{H}|\psi(t)\rangle$  i fakt, że Hamiltonian jest operatorem hermitowskim proszę pokazać, że dowolny stan  $|\psi(t)\rangle$  unormowany w chwili  $t = 0$  pozostaje unormowany w dowolnej innej chwili czasu  $t$ . Czyli:

$$\langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1 \quad \Rightarrow \quad \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = 1. \quad (4)$$

W tym celu proszę pokazać, że pochodna po czasie z normy stanu wynosi zero. Oznacza to, że operator ewolucji czasowej jest unitarny i można go rozumieć jako realizację obrotu wektora w przestrzeni przy zachowaniu jego normy (długości).

Równoważnie, proszę rozpatrzyć operator ewolucji  $\hat{U}(t, t_0)$ , spełniający równanie  $i\hbar\partial_t\hat{U}(t, t_0) = \hat{H}\hat{U}(t, t_0)$ , z warunkiem początkowym  $\hat{U}(t_0, t_0) = I$ . Proszę pokazać, że  $U(t, t_0)^\dagger U(t, t_0) = I$ .

Następnie, przy dodatkowym założeniu że Hamiltonian jest niezależny od czasu, proszę pokazać, że wartość oczekiwana Hamiltonianu  $\langle\psi(t)|\hat{H}|\psi(t)\rangle$  jest stała w czasie.

## 18. Ewolucja w czasie w dwuwymiarowej przestrzeni Hilberta

Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń Hilberta z bazą  $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ . Hamiltonian interesującego nas układu ma w tej bazie postać  $\hat{H} = E_0 I_2 - A\sigma_x$ . Proszę znaleźć zachowanie układu w czasie dla stanu początkowego  $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$  i  $|\Psi(t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |2\rangle)$ .

Zadanie proszę rozwiązać sprowadzając  $\hat{H}$  do bazy diagonalnej.

## 19. Precesja Larmora

Hamiltonian dla spinu w polu magnetycznym  $\vec{B}$  ma postać  $\hat{H} = -\gamma\vec{B} \cdot \vec{\hat{S}}$ , gdzie  $\vec{\hat{S}}$  jest operatorem spinu a  $\gamma$  to współczynnik żyromagnetyczny. Proszę rozważyć cząstkę o spinie-1, gdzie operatory  $\hat{S}$  w kierunkach  $x, y, z$  (wyrażone w jednostkach  $\hbar$ , w bazie stanów własnych  $\hat{S}_z$ ) są dane przez macierze  $S_x, S_y, S_z$  z zadania 14.

Załóżmy, że jednorodne pole magnetyczne jest skierowane w kierunku  $+x$ . Początkowy stan układu to stan  $|\Psi(0)\rangle = |S_z = +1\rangle$ . Proszę policzyć jak będą wyglądały średnie  $\langle\Psi(t)|\hat{S}_z|\Psi(t)\rangle$  oraz  $\langle\Psi(t)|\hat{S}_x|\Psi(t)\rangle$ .

*Wskazówka:* Stan układu w chwili czasu  $|\Psi(t)\rangle$  jest dany przez rozwiązanie równania Schrödingera z warunkiem początkowym danym w treści zadania. Proszę zauważyć, że rozwiązanie to w naszym przypadku (Hamiltonian niezależny od czasu) jest postaci  $|\Psi(t)\rangle = e^{-it\hat{H}/\hbar}|\Psi(t=0)\rangle$ . Proszę znaleźć postać macierzową operatora  $\hat{U}(t) = e^{-it\hat{H}/\hbar}$  (w bazie stanów własnych  $\hat{S}_z$ ).

Zachęcam do rozwiązania tego zadania w jakimś programie do obliczeń symbolicznych.

## 20. Delta Diraca

Delta Dirac-a  $\delta(x)$  jest funkcją uogólnioną zdefiniowaną przez własność

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0),$$

dla dowolnej odpowiednio “regularnej” funkcji próbnej  $f(x)$ .

Korzystając z tej definicji, proszę uzasadnić następujące własności:

- $\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}$ , dla niezerowej liczby rzeczywistej  $a$
- $\delta(f(x)) = \sum_i \frac{\delta(x-x_i)}{|f'(x_i)|}$ , gdzie  $x_i$  oznacza miejsca zerowe funkcji  $f(x)$
- $\delta'(x) = -\delta(x)\frac{d}{dx}$ .

*Wsk.* Proszę odpowiednio zmienić zmienne w całkowaniu (całkowanie przez podstawienie) lub wykorzystać całkowanie przez części.

Korzystając z powyższych wzorów proszę policzyć:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x^3 - 16x)\phi(x)dx$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x-3)\sin(x)dx$
- $\int_0^{\infty} \delta'(x^2-4)e^x dx$

## 21. Nieskończona studnia potencjału

Niezależne od czasu równanie Schrödingera dla cząstki o masie  $m$  w jednym wymiarze ma postać:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x),$$

gdzie  $V(x)$  to potencjał,  $E$  to energia cząstki, a  $\psi(x)$  to jej funkcja falowa [jest to równanie własne dla operatora energii  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x})$  zapisane w reprezentacji położenia].

Proszę policzyć (i unormować) funkcję falową stanów własnych, oraz odpowiadające im energie gdy cząstka jest zamknięta w nieskończonym pudle potencjału  $V(x) = 0$  dla  $x \in (0, a)$  oraz  $V(x) = \infty$  poza tym przedziałem. Oznacza to, że funkcja falowa jest niezerowa tylko wewnątrz studni (*Wskazówka:* należy znaleźć rozwiązania równanie Schrödingera w tym przedziale) z dodatkowym warunkiem ciągłości

$$\psi(0) = \psi(a) = 0.$$

Jakie ograniczenia na energię nakłada obecność pudła? Co się dzieje, gdy powiększamy pudło? Proszę naszkicować postać funkcji falowej dla czterech stanów o najniższych energiach. Proszę pokazać bezpośrednim rachunkiem, że różne stany własne cząstki w pudle (czyli odpowiadające różnym wartościom energii) są ortogonalne.

## 22. Średnie położenie i pęd cząstki w pudle

Proszę wyliczyć wartości średnie operatorów  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{x}^2$ ,  $\hat{p}^2$  w  $n$ -tym stanie własnym  $|\psi_n\rangle$  cząstki w pudle. Wartość średnią dowolnego operatora  $\hat{A}$  w dowolnym stanie  $|\phi\rangle$  definiujemy jako

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{\langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle}{\langle \phi | \phi \rangle},$$

gdzie:

$$\langle \phi | \hat{A} | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) A(x) \phi(x) dx, \quad \langle \phi | \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi^*(x) \phi(x) dx,$$

a przez  $A(x)$  rozumiemy element macierzowy operatora  $\hat{A}$  w reprezentacji położenia. Elementy te dla operatorów pędu i położenia mają postać:

$$\hat{p}(x) = -i\hbar \frac{d}{dx}, \quad \hat{x}(x) = x.$$

Przy całkowaniu proszę korzystać z symetrii problemu, a gdzie się nie da, można wspomóc się numerycznie.

### 23. Wizualizacja

Na stronie <http://www.falstad.com/qm1d/> można znaleźć pakiet wizualizujący stany stacjonarne (a także dynamikę) dla problemu cząstki w potencjale w jednym wymiarze. Proszę poeksperymentować zwracając szczególnie uwagę na przykłady które pojawiły się na ćwiczeniach i wykładzie.

### 24. Ewolucja swobodna pakietu Gaussowskiego

W chwili  $t = 0$  cząstkę przygotowujemy w stanie

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{(2\pi\kappa^2)^{1/4}} \exp \left( - \left( \frac{x - x_0}{2\kappa} \right)^2 + \frac{i}{\hbar} p_0 x \right). \quad (5)$$

1. Proszę pokazać, że stałe  $x_0$  i  $p_0$  to odpowiednio średnie położenie i średni pęd cząstki w tym stanie. Proszę policzyć średnią wariancję położenia cząstki w tym stanie.

*Wskazówka:* Stan jest unormowany. Zachęcam, żeby w ramach ćwiczenia rozwiązać zadanie z wykorzystaniem jakiegoś pakietu symbolicznego. Jeśli ktoś woli bardziej tradycyjny rachunek to całka Gaussowska  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x-\beta)^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ , dla  $\text{Re}(\alpha) > 0$  i dowolnej stałej  $\beta$  (także urojonej). Ponadto  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha(x-\beta)^2} dx = \frac{(1+2\alpha\beta^2)\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}}$ .

2. Następnie proszę rozważyć ewolucję swobodną (t.j. pod wpływem Hamiltonianu  $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m}$ ) pakietu Gaussowskiego. Jak będą się zmieniały w czasie średnie położenie, pęd, oraz wariancja położenia?

*Wskazówka:* Dla cząstki swobodnej stany własne mają postać fali płaskiej charakteryzowanej przez pęd  $p$ :

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}, \quad (6)$$

gdzie  $p$  jest dowolną liczbą rzeczywistą. Należy wyrazić  $\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(p, t = 0) e^{ipx/\hbar} dp$ , gdzie  $\tilde{\Psi}(p, t = 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, 0) e^{-ipx/\hbar} dx$ . Proszę uzasadnić ostatni wzory korzystając z całkowej reprezentacji delty Diraca  $\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip(x-x_0)/\hbar} dp$ . Następnie uzyskujemy  $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\Psi}(p, t = 0) e^{ipx/\hbar} e^{-i\frac{p^2 t}{2m\hbar}} dp$ .

Alternatywnie można policzyć postać operatora ewolucji w reprezentacji położenia.

## 25. Rozpraszanie na potencjale typu delta Diraca

Rozważmy cząstkę w jednowymiarowym potencjale typu delta Diraca. Niezależne od czasu równanie Schrödingera przybiera w tym przypadku postać:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + g_0 \delta(x)\right) \psi(x) = E \psi(x),$$

gdzie  $\delta(x)$  oznacza deltę Diraca zlokalizowaną w  $x_0 = 0$ .

Ogólna postać rozwiązań tego równania ma postać (proszę to uzasadnić):

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_A(x) = A_l e^{-ikx} + A_p e^{ikx} & \text{dla } x < 0, \\ \psi_B(x) = B_l e^{-ikx} + B_p e^{ikx} & \text{dla } x > 0, \end{cases}$$

(a) Proszę wypisać warunki zszycia rozwiązań w punkcie  $x = 0$ . Jeden warunek to ciągłość funkcji falowej. Drugi można znaleźć przez scałkowanie równania Schrödingera w obszarze  $(-\epsilon, \epsilon)$  i rozważeniu granicy  $\epsilon \rightarrow 0$ .

(b) Proszę rozważyć stany rozproszeniowe, czyli w tym wypadku rozwiązania z  $E > 0$ . Dla uproszczenia rozważmy sytuację w której cząstki nadlatują tylko z lewej strony. W tym celu ustalamy  $A_p = 1$ ,  $B_l = 0$ , oraz definiujemy  $R = |A_l|^2$  oraz  $T = |B_p|^2$ . W tym wypadku  $R$  oznacza prawdopodobieństwo że cząstka odbiła się od bariery, a  $T$  że przez nią przeszła.

Proszę znaleźć wyrażenia na  $T$  i  $R$  i sprawdzić, że  $T + R = 1$ . Proszę się zastanowić jak  $T$  i  $R$  zależą od  $g_0$  oraz energii  $E$ .

## 26. Oscylator harmoniczny

Hamiltonian cząstki o masie  $m$  w potencjale harmonicznym o częstości  $\omega$  dany jest wzorem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2.$$

Definiujemy operatory opuszczania i podnoszenia

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right).$$

(a) Korzystając z relacji  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , proszę wykazać, że:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

a następnie zapisać Hamiltonian jako  $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$ .

(b) Proszę wyliczyć wartości średnie operatorów  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{x}^2$  oraz  $\hat{p}^2$  w dowolnym stanie własnym oscylatora harmonicznego. *Wsk.* Należy wyrazić operatory położenia i pędu poprzez operatory drabinowe  $\hat{a}$  i  $\hat{a}^\dagger$  i skorzystać z tego jak te operatory działają na stany własne.

## 27. Relacje komutacji operatorów momentu pędu

Operatory orbitalnego momentu pędu definiujemy jako  $\hat{L}_k = \epsilon_{kmn} \hat{r}_m \hat{p}_n$ . Spełniają one relacje komutacji:

$$[\hat{L}_m, \hat{L}_n] = i\hbar \epsilon_{mnk} \hat{L}_k.$$

(a) Korzystając z relacji komutacji dla położenia i pędu proszę pokazać, że  $[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$ .

(b) Operator kwadratu momentu pędu (zwany również operatorem Casimira) definiujemy jako:  $\hat{L}^2 = \sum_i \hat{L}_i^2$ . Proszę wykazać, że operator ten komutuje ze wszystkimi składowymi operatora momentu pędu:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0.$$

(c) Definiujemy operatory  $L_+ = \hat{L}_x + i\hat{L}_y$  oraz  $L_- = \hat{L}_x - i\hat{L}_y$ . Proszę sprawdzić, że  $L_+ L_- = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z - \hbar)$  oraz  $L_- L_+ = \hat{L}^2 - \hat{L}_z(\hat{L}_z + \hbar)$ .



## 28. Układ środka masy

Rozważmy dwie cząstki o masach  $m_1$  oraz  $m_2$ . Dla każdej z cząstek mamy odpowiadające jej operatory położenia  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  i pędu  $\hat{p}_1$ ,  $\hat{p}_2$  (dla uproszczenia notacji i bez straty ogólności ograniczymy się do przypadku jednowymiarowego). Położenia środka masy ma postać  $\hat{X} = \frac{m_1\hat{x}_1 + m_2\hat{x}_2}{m_1 + m_2}$ , a położenie względne to  $\hat{x} = \hat{x}_1 - \hat{x}_2$ .

Proszę pokazać, że odpowiadające im operatory pędu to  $\hat{P} = \hat{p}_1 + \hat{p}_2$  oraz  $\hat{p} = \frac{m_2\hat{p}_1 - m_1\hat{p}_2}{m_1 + m_2}$ . *Wskazówka:* Można rozpatrzyć jaką postać operatory pędu mają w reprezentacji położenia i wykonać odpowiednią zmianę zmiennych w różniczkowaniu.

Proszę uzasadnić, że  $[\hat{x}, \hat{p}] = [\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar$ , oraz pokazać, że  $[\hat{x}, \hat{P}] = [\hat{X}, \hat{p}] = 0$ . *Uwaga:* Operatory  $\hat{x}_1$  i  $\hat{p}_2$  są związane ze stanem różnych cząstek, więc  $[\hat{x}_1, \hat{p}_2] = 0$ .

Proszę sprawdzić, że:  $\frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \frac{\hat{p}^2}{2\mu}$ , gdzie masa całkowita  $M = m_1 + m_2$ , a masa zredukowana  $\mu = m_1 m_2 / M$ .

## 29. Atom mionowy

Proszę rozważyć mionowy jon helu-3 (układ składający się z jądra helu-3 i mionu). Korzystając z rozwiązania dla atomu wodoru z wykładu, proszę policzyć długość fali związanej z przejściem ze stanu 2s na 1s. Proszę oszacować skalę wielkości tego jonu (odpowiadający mu promień Bohra).

## 30. Układ dwóch spinów 1/2

Niech  $\vec{S}$  oznacza operator spinu-1/2. Stany własne  $\hat{S}^z$  do wartości własnych, odpowiednio  $\pm \frac{1}{2}\hbar$ , oznaczamy jako  $|\uparrow\rangle$  i  $|\downarrow\rangle$ . W tej bazie operatory spinu to  $\vec{S} = \frac{1}{2}\hbar\vec{\sigma}$ , gdzie  $\sigma^x$ ,  $\sigma^y$ ,  $\sigma^z$  to macierze Pauliego.

Rozpatrzmy teraz układ dwóch spinów,  $\vec{S}_1$  i  $\vec{S}_2$ , z przestrzenią Hilberta zadaną przez bazę  $|\uparrow\uparrow\rangle$ ,  $|\uparrow\downarrow\rangle$ ,  $|\downarrow\uparrow\rangle$ ,  $|\downarrow\downarrow\rangle$ , gdzie pierwsza strzałka odpowiada stanowi pierwszego spinu, a druga drugiego spinu.  $\vec{S}_1$  jest operatorem działającym na pierwszy spin, a  $\vec{S}_2$  na drugi spin. Definiujemy operator całkowitego spinu  $\vec{S}_{tot} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ . Definiujemy stany  $|j, m\rangle$ :

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle, \\ |1, 0\rangle &= (|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}, \\ |1, -1\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle, \\ |0, 0\rangle &= (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Proszę sprawdzić bezpośrednim rachunkiem, że zachodzi  $\hat{S}_{tot}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle$ , oraz  $\hat{S}_{tot}^z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle$ . Zadanie można zrobić numerycznie. Operatory  $\vec{S}_{1,2}$  zapisujemy korzystając z iloczynu Kroneckera, np.  $\hat{S}_1^x = \frac{1}{2}\hbar\sigma_x \otimes I_2$ ,  $\hat{S}_2^x = I_2 \otimes \frac{1}{2}\hbar\sigma_x$ , co pozwala nam znaleźć reprezentację macierzową wszystkich interesujących nas operatorów w przestrzeni Hilberta dwóch spinów.

Proszę odczytać współczynniki w powyższej definicji stanów w tablicach współczynników Clebscha-Gordona.

## 31. Symetria funkcji falowej względem zamiany cząstek

Rozważmy dwie identyczne cząstki o współrzędnych  $\vec{r}_1$  i  $\vec{r}_2$ . Niech

$$\begin{aligned} \Psi_A(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \phi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2), \\ \Psi_B(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi(\vec{r}_1)\chi(\vec{r}_2) + \chi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2)], \\ \Psi_C(\vec{r}_1, \vec{r}_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi(\vec{r}_1)\chi(\vec{r}_2) - \chi(\vec{r}_1)\phi(\vec{r}_2)], \end{aligned}$$

gdzie  $\langle \phi | \phi \rangle = \langle \chi | \chi \rangle = 1$ , oraz  $\langle \phi | \chi \rangle = 0$ .

Dla każdego przypadku proszę określić: symetrię funkcji falowej ze względu na zamianę cząstek, które funkcje falowe są bozonowe, a które fermionowe, normalizację funkcji falowej.

### 32. Układ 2 elektronów

Proszę rozpatrzyć atom helu (2 elektrony). W pierwszym przybliżeniu zaniedbujemy oddziaływanie między elektronami. W tym przypadku stany własne dla pojedynczego elektronu będą dane przez rozwiązania dla atomu wodoru z odpowiednio zmienionym ładunkiem i masą jądra. W reprezentacji położenia  $\Psi_{nlm}(\vec{r}_{1,2})|m_s\rangle_{1,2}$ , gdzie indeks 1, 2 odnosi się odpowiednio do pierwszego i drugiego elektronu.

Zakładamy, że jeden elektron znajduje się w stanie 1S, a drugi w stanie 2P. Proszę napisać jaką będzie postać funkcji falowej  $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  dla tego układu. Jak się zmieni sytuacja, gdy oba elektrony będą okupowały orbital 1S.

Ponieważ elektrony są fermionami, funkcja falowa musi być antysymetryczna ze względu na zamianę cząstek. Proszę się zastanowić jak uzyskać taką postać składając część przestrzenna w kombinacje symetryczną i antysymetryczną, oraz robiąc to samo dla części spinowej.

# 1 Zadania nie robione ostatnio

## 1. Rachunek zaburzeń, oddziaływanie spin-orbita

Rozpatrujemy atom wodoru z Hamiltonianem

$$\hat{H}_0 = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{\hat{r}}.$$

Związane stany własne  $|nlm_l m_s\rangle$  do energii  $E_n = -mc^2 \frac{\alpha^2}{2n^2}$ , gdzie  $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$  to stałą struktury subtelnej, są zdegenerowane ze względu na całkowity orbitalny moment pędu  $l$ , rzut krętu na oś kwantyzacji  $m_l$ , oraz rzut spinu  $m_s$ .

Oddziaływanie spin-orbita w atomie wodoru ma postać

$$V_{SL} = \frac{e^2 \hbar^2}{2m^2 c^2} \frac{1}{r^3} \vec{L} \cdot \vec{S}.$$

(operatory  $\vec{L}$  i  $\vec{S}$  w powyższym wzorze są bezwymiarowe). W pierwszym rzędzie rachunku zaburzeń proszę policzyć, jak będzie wyglądało rozszczepienie poziomów związane z tym zaburzeniem. Powyższe zaburzenie (między innymi) jest odpowiedzialne za tak zwaną strukturę subtelną widma atomowego.

W obliczeniach proszę skorzystać z tego, że

$$\langle nlm_l m_s | r^{-3} | nlm_l m_s \rangle = \frac{1}{l(l+1/2)(l+1)n^3} \frac{1}{a_B^3},$$

gdzie  $a_B = \frac{\hbar}{mc\alpha}$  jest charakterystyczną skalą długości w problemie – tzw. promieniem Bohra.

Proszę podstawić dane tablicowe i wyniki wyrazić w elektronowoltach. *Wsk.* W celu policzenia średniej z operatora  $\vec{L} \cdot \vec{S}$  proszę rozpatrzyć kwadrat operatora całkowitego momentu pędu.

## 2. Rachunek zaburzeń, oscylator anharmoniczny

Rozpatrzmy jednowymiarowy oscylator harmoniczny o częstotliwości  $\omega$ , który został poddany zaburzeniu

$$\hat{V}_1 = A \left( \frac{\hat{x}}{l} \right)^4,$$

gdzie  $l = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$  jest charakterystyczną długością oscylatora. Proszę wyliczyć poprawki do energii w pierwszym oraz drugim rzędzie rachunku zaburzeń.

## 3. Rachunek wariacyjny

Proszę rozpatrzyć jednowymiarowy problem cząstki o masie  $m$  poruszającej się w potencjale  $V(x) = k|x|$ . Proszę oszacować stan podstawowy cząstki korzystając z metody wariacyjnej. W tym celu postulujemy, że z dobrym przybliżeniem stan podstawowy można znaleźć ograniczając się do funkcji próbnych postaci  $\Psi(x) = A \exp(-\lambda x^2)$ , które zależą od parametru  $\lambda$ .  $A$  należy znaleźć z warunku normalizacji funkcji falowej.

Należy policzyć średnią energię tego stanu w zależności od  $\lambda$ , a następnie znaleźć wartość parametru  $\lambda$  który ją minimalizuje.

Proszę porównać uzyskaną energię z przybliżonym wynikiem analitycznym na energię  $n$ -tego stanu własnego ( $n = 0, 1, 2, \dots$ )

$$\epsilon_n = \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right)^{1/3} \tilde{\epsilon}_n,$$

gdzie  $\tilde{\epsilon}_0 = 1.01878\dots$ ,  $\tilde{\epsilon}_1 = 2.33811\dots$

#### 4. Fermionowe operatory kreacji i anihilacji

Proszę rozpatrzyć fermionowe operatory kreacji  $a^\dagger$  i anihilacji  $a$ , spełniające następujące relacje antykomutacji  $\{a^\dagger, a\} = 1$ ,  $\{a^\dagger, a^\dagger\} = \{a, a\} = 0$ , gdzie  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ .

Proszę sprawdzić, że możemy wprowadzić operator ilości cząstek  $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  który spełnia reguły komutacji  $[\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ , oraz  $[\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}$ . Następnie proszę wykorzystać ten wynik, żeby uzasadnić, że  $a$  anihiluje, a  $a^\dagger$  kreuje cząstkę (w stanie odpowiadającym  $\hat{a}$ ). Proszę uzasadnić, że  $\hat{n}$  ma tylko dwie wartości własne równe odpowiednio 0 i 1.

#### 5. Problem własny

Proszę znaleźć wszystkie unormowane rozwiązania równania:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

albo innymi słowy proszę znaleźć wartości własne i odpowiadające im wektory własne powyższej macierzy  $3 \times 3$ .

#### 6. Rezonans dla problemu w dwustanowej przestrzeni Hilberta.

Rozważmy dwuwymiarową przestrzeń Hilberta rozpiętą przez wektory  $|\uparrow\rangle$  i  $|\downarrow\rangle$  będące stanami własnymi operatora  $\hat{\sigma}_z$  do wartości własnych odpowiednio  $+1$  i  $-1$ .

Hamiltonian układu jest dany przez

$$H = \frac{\omega_0 \hbar}{2} \sigma_z + \frac{\omega_1 \hbar}{2} \cos(\omega t) \sigma_x. \quad (7)$$

1. Załóż, że  $\omega_1 = 0$ . Policz  $\langle \sigma_x(t) \rangle$ , gdzie stan początkowy to  $|\Psi\rangle = \cos \theta |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin \theta |\downarrow\rangle$ .
2. Następnie zapisz równanie Schrödingera dla pełnego Hamiltonianu zależnego od czasu, uzyskując układ równań na współczynniki w rozkładzie  $|\Psi(t)\rangle = c_\uparrow(t) |\uparrow\rangle + c_\downarrow(t) |\downarrow\rangle$ . Podstaw  $c_\uparrow(t) = \gamma_\uparrow(t) e^{-i\omega_0 t/2}$ ,  $c_\downarrow(t) = \gamma_\downarrow(t) e^{+i\omega_0 t/2}$  i uzyskaj równania na współczynniki  $\gamma(t)$ . Opisuja one układ odniesienia rotujący wokół osi  $z$  z częstością  $\omega$ .
3. Rozważymy przypadek rezonansowy gdzie  $\omega_0 = \omega$ . W równaniach będzie występował człon eksponencjalny zmieniający się w czasie z częstością  $2\omega$ . Zakładając, że  $\omega_1$  jest małe, jest to szybko wirujący mały człon który efektywnie będzie się uśredniał do zera. Zaniedbaj go. Jest to tak zwane przybliżenie fali wirującej.
4. Załóż, że stan początkowy układu dla czasu  $t = 0$  to  $|\uparrow\rangle$ . Rozwiąż uzyskane w poprzednim punkcie równania aby policz prawdopodobieństwo znalezienia układu w stanie  $|\downarrow\rangle$  w dowolnej chwili czasu.

#### 7. Oscylator harmoniczny

Hamiltonian cząstki o masie  $m$  w potencjale harmonicznym o częstości  $\omega$  dany jest wzorem

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 \hat{x}^2.$$

Proszę przeliczyć diagonalizację tego Hamiltonianu metodą algebraiczną. W tym celu definiujemy operatory

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} + \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right), \quad \hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( \hat{x} - \frac{i}{m\omega} \hat{p} \right).$$

1. Korzystając ze znanej relacji  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ , proszę wykazać, że:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1,$$

oraz zapisać Hamiltonian jako  $\hat{H} = \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$ .

2. Definiujemy operator  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ . Proszę pokazać, że  $[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger$ , oraz  $[\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$ .
3. Korzystając z powyższych relacji komutacji, proszę pokazać, że jeżeli  $|n\rangle$  jest stanem własnym  $\hat{N}$  do wartości własnej  $n$  t.j.  $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$ , to  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  jest stanem własnym do wartości własnej  $(n+1)$ , a  $\hat{a}|n\rangle$  jest stanem własnym do wartości własnej  $(n-1)$ . Proszę pokazać, że norma wektora  $\hat{a}|n\rangle$  wynosi  $\sqrt{n}$ , zaś norma  $\hat{a}^\dagger|n\rangle$  wynosi  $\sqrt{n+1}$  (zakładamy, że  $|n\rangle$  jest stanem unormowanym).
4. Proszę uzasadnić, że operator  $\hat{N}$  jest nieujemnie określony, czyli  $\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle \geq 0$  dla dowolnego  $|\psi\rangle$ . W szczególności oznacza to, że wszystkie wartości własne operatora  $\hat{N}$  są nieujemne. Wsk. Należy skorzystać z własności iloczynu skalarnego  $\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle \geq 0$ , dla dowolnego stanu  $|\tilde{\psi}\rangle$ . Proszę się zastanowić jak można zapisać  $\langle\psi|\hat{N}|\psi\rangle$  w takiej postaci?
5. Korzystając z punktów 4. i 5. proszę uzasadnić, że wartości własne operatora  $\hat{N}$  mogą być tylko liczbami naturalnymi. W tym celu proszę rozważyć efekt wielokrotnego zadziałania operatorem  $\hat{a}$  na jakiś stan własny  $|\alpha\rangle$  operatora  $\hat{N}$ .
6. Proszę wyliczyć wartości średnie operatorów  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$ ,  $\hat{x}^2$  oraz  $\hat{p}^2$  w dowolnym stanie własnym oscylatora harmonicznego. Wsk. Należy wyrazić operatory położenia i pędu poprzez operatory drabinowe  $\hat{a}$  i  $\hat{a}^\dagger$  i skorzystać z tego jak te operatory działają na stany własne.
7. Proszę pokazać, że dowolny stan własny  $|n\rangle$  operatora  $\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$  można zapisać jako:

$$|n\rangle = \frac{(\hat{a}^\dagger)^n}{\sqrt{n!}}|0\rangle.$$

8. Stan podstawowy kwantowego oscylatora harmonicznego jest zdefiniowany przez  $\hat{a}|0\rangle = 0$ . Korzystając z reprezentacji położeniowej operatora  $\hat{a}$ , proszę pokazać, że w reprezentacji położenia

$$\langle x|0\rangle = \psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right).$$

Następnie proszę znaleźć postać  $\psi_1(x)$ .

## 8. Operator obrotu

Wektor  $\vec{r}$  obracamy wokół osi zdefiniowanej przez jednostkowy wektor  $\vec{n}$  o infinitesimalny kąt  $\varepsilon$ . Otrzymujemy wektor  $\vec{r}'$ , który można zapisać jako:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \varepsilon \vec{r} \times \vec{n}$$

Proszę wyrazić funkcję falową  $\psi(\vec{r}')$  poprzez  $\psi(\vec{r})$  korzystając z rozwinięcia Taylora do pierwszego rzędu w  $\varepsilon$ . Proszę na tej podstawie zapisać operator obrotu o kąt  $\varepsilon$ ,  $R_\varepsilon$ , poprzez operator momentu pędu  $\vec{L}$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

gdzie  $p^a = -i\hbar \frac{d}{da}$ , zaś  $r^a = a$  ( $a = x, y, z$ ).

Wskazówka: Dla uproszczenia można rozpatrzyć obrót wokół osi  $z$ . W ogólnym przypadku warto skorzystać z analogu algebraicznej własności dla 3-wymiarowych wektorów  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ . Można skorzystać z  $(\vec{r} \times \vec{n})_a = \epsilon_{abc} r_b n_c$ .

Obrót o dowolnie duży kąt  $\alpha$  wokół osi  $\vec{n}$  można zapisać jako

$$R_\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} R_\varepsilon^N$$

gdzie  $\varepsilon = \frac{\alpha}{N}$ . Posługując się tym wynikiem proszę uzasadnić, że operator obrotu funkcji falowej o kąt  $\alpha$  wokół osi  $\vec{n}$  ma postać

$$R_\alpha = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{L}}$$

## 9. Operatory orbitalnego momentu pędu w zmiennych sferycznych

Proszę znaleźć postać operatorów  $\hat{L}_x$ ,  $\hat{L}_y$ ,  $\hat{L}_z$ , oraz  $\hat{L}^2$  we współrzędnych sferycznych. Współrzędne sferyczne definiujemy jako

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta,$$

czyli

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arctg \frac{y}{x}, \quad \phi = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Operator Laplace'a we współrzędnych sferycznych ma postać

$$\Delta_{r,\theta,\phi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}.$$

Proszę zidentyfikować część która odpowiada  $\hat{L}^2$ .

## 10. Wartości własne operatorów momentu pędu

Z równania (27.) wynika, że dla operatorów  $\hat{L}^2$ ,  $\hat{L}_z$  istnieje wspólna baza, której elementy na razie oznaczmy  $|a, b\rangle$ , przy czym liczby kwantowe  $a, b$  stanowią wartości własne:

$$\begin{aligned} \hat{L}^2 |a, b\rangle &= a |a, b\rangle, \\ \hat{L}_z |a, b\rangle &= b |a, b\rangle. \end{aligned} \tag{8}$$

Korzystając z relacji (??) proszę pokazać, że

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ |a, b\rangle &\propto |a, b+1\rangle, \\ \hat{L}_- |a, b\rangle &\propto |a, b-1\rangle. \end{aligned} \tag{9}$$

Następnie, zakładając że przed zadziałaniem operatorem  $\hat{L}_\pm$  stan  $|a, b\rangle$  był unormowany, proszę wyliczyć współczynniki proporcjonalności w powyższych równaniach. W tym celu proszę udowodnić następujące tożsamości:

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ \hat{L}_- &= \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 + \hat{L}_z, \\ \hat{L}_- \hat{L}_+ &= \hat{L}^2 - \hat{L}_z^2 - \hat{L}_z, \end{aligned} \tag{10}$$

a następnie wykorzystać je do obliczenia normy z wektora  $\hat{L}_\pm |a, b\rangle$ .

Ponieważ  $a$  jest wartością własną operatora kwadratu długości wektora krętu, natomiast  $b$  jest wartością własną operatora rzutu wektora krętu na oś  $z$ , to przy zadanym  $a$  musi istnieć wartość minimalna i maksymalna  $b$  – nazwiemy je  $b_{min}$  i  $b_{max}$ . Powoduje to z kolei, że muszą zachodzić następujące relacje:

$$\begin{aligned} \hat{L}_+ |a, b_{max}\rangle &= 0, \\ \hat{L}_- |a, b_{min}\rangle &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Korzystając z tego faktu oraz z unormowania równania (9), proszę znaleźć zależności pomiędzy  $a$ ,  $b_{max}$  oraz  $b_{min}$ . Następnie, znając zależność między  $b_{max}$  i  $b_{min}$  oraz działanie operatorów podwyższania/obniżania momentu pędu (9), proszę pokazać że:

$$b_{max} = \frac{n}{2} \equiv l, \quad (12)$$

$$a = l(l+1), \quad (13)$$

gdzie  $n$  jest pewną liczbą naturalną.

**Uwaga:** Zwyczajowo przyjmuje się następujące oznaczenia:

$$|a, b\rangle \equiv |l, m\rangle, \quad (14)$$

przy czym  $m$  nazywamy magnetyczną liczbą kwantową. Liczba kwantowa  $l$  przyjmuje wartości naturalne lub połówkowe i jest kwantową liczbą momentu orbitalnego lub spinu.

## 11. Wypadkowy moment pędu

W kolejnych zadaniach przyjmujemy układ jednostek, gdzie  $\hbar = 1$ . Rozważmy cząstkę o spinie  $s$  oraz o momencie pędu  $l$ . Układ taki można opisać całkowitym momentem pędu:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}. \quad (15)$$

Proszę pokazać, że operatory  $\vec{J}$  spełniają reguły komutacji operatorów momentu pędu. Ponadto proszę pokazać, że

$$[\hat{J}_z, \hat{L}^2] = [\hat{J}_z, \hat{S}^2] = [\hat{J}^2, \hat{L}^2] = [\hat{J}^2, \hat{S}^2] = 0. \quad (16)$$

Z operatorem  $\vec{J}$  związana jest baza stanów  $|j, m\rangle$  (dokładniej powinniśmy napisać  $|j, m, l, s\rangle$ , ale  $l, s$  często się opuszcza przez domniemanie), będąca standardową bazą własną dla operatorów momentu pędu:

$$\begin{aligned} \hat{J}^2 |j, m\rangle &= j(j+1) |j, m\rangle, \\ \hat{J}_z |j, m\rangle &= m |j, m\rangle, \end{aligned} \quad (17)$$

przy czym w ogólności  $j = l + s, \dots, |l - s|$ , natomiast  $m = -j, -j + 1, \dots, j$ , dla każdej wartości  $j$  niezależnie.

Z drugiej strony z operatorami  $\vec{S}$  i  $\vec{L}$  związane są odpowiednio bazy  $|s, m_s\rangle$  oraz  $|l, m_l\rangle$ , wobec czego przestrzeń Hilberta dla całkowitego momentu pędu  $\vec{J}$  można rozpiąć za pomocą ich stanów iloczynowych

$$|l, m_l; s, m_s\rangle = |l, m_l\rangle \otimes |s, m_s\rangle, \quad (18)$$

gdzie  $m_s = -s, \dots, s$  oraz  $m_l = -l, \dots, l$ , a ponadto zachodzi  $m = m_s + m_l$ . Te dwie bazy nie są identyczne, jednak rozpinają tę samą przestrzeń Hilberta całkowitego krętu  $\vec{J}$ . Jaki jest wymiar tej przestrzeni? Proszę pokazać, że obydwie bazy są równoliczne.

Ponieważ opisane bazy rozpinają tę samą przestrzeń Hilberta, istnieje transformacja liniowa przeprowadzająca jedną z nich w drugą:

$$|j, m\rangle = \sum_{\substack{m_s, m_l \\ m_s + m_l = m}} C_{m_l m_s}^{lsjm} |l, m_l; s, m_s\rangle, \quad C_{m_l m_s}^{lsjm} = \langle l, m_l; s, m_s | j, m \rangle, \quad (19)$$

gdzie współczynniki transformacji  $C_{m_l m_s}^{lsjm}$  nazywane są współczynnikami Clebscha-Gordana.

Proszę wyznaczyć współczynniki Clebscha-Gordana dla przypadku  $l = 1, s = \frac{1}{2}$ . W tym celu należy zauważyć, że

$$|l + s, l + s\rangle = |l, l; s, s\rangle, \quad (20)$$

a wszystkie stany o niższej wartości  $m$  można wygenerować działając na powyższy stan operatorem  $\hat{J}_-$ . Podobna zależność występuje dla stanu  $|l+s, -l-s\rangle$ , wobec czego tę samą procedurę można by przeprowadzić za pomocą operatora  $\hat{J}_+$ .

Zachodzi następująca zależność między współczynnikami Clebscha-Gordana (przy czym fazy przyjmuje się w ramach tzw. konwencji Condon-Shortleya):

$$C_{m_l m_s}^{lsjm} = (-1)^{l+s-j} C_{-m_l, -m_s}^{lsj, -m}, \quad (21)$$

co pozwala skrócić obliczenia o połowę.

W przypadku stanów o  $j = l + s - 1$  procedura wygląda analogicznie, z tym że najwyższy stan  $m = l + s - 1$  wyraża się przez pewną kombinację liniową stanów bazy iloczynowej, wobec czego można go znaleźć jako stan ortonormalny do poprzednio wyznaczonych stanów o tej samej wartości  $m$ . Należy ponadto pamiętać o konwencji Condon-Shortleya, która w tym wypadku mówi, że współczynnik  $C_{m_l=l, m_s=j-l}^{lsj, m=j}$  jest dodatni.

## 12. Tablice współczynników Clebscha-Gordana

Współczynniki Clebscha-Gordana dla typowych przypadków są ztabelaryzowane. Proszę porównać współczynniki Clebscha-Gordana pojawiające się w 2 ostatnich zadaniach z tablicami. Następnie proszę rozłożyć złożenie spinu-2 ze spinem-1 i używając tablic wypisać jak złożyć z nich stan  $|j = 2, m = 0\rangle$ .

## 13. Operator translacji

Proszę znaleźć operator  $U(a)$  przeprowadzający funkcję próbną  $\psi(x)$  w  $\psi(x-a)$ . Proszę rozważyć dwie metody:

(a) rozwinać  $\psi(x-a)$  w szereg Taylora wokół punktu  $x$  i zidentyfikować na tej podstawie  $U(a)$ . *Wskazówka:* Zadanie jest blisko związane z zadaniem 8.

(b) znaleźć operator  $U(\varepsilon)$  przeprowadzający  $\psi(x)$  w  $\psi(x-\varepsilon)$  dla infinitesimalnie małego  $\varepsilon$  a następnie pokazać że  $U(\varepsilon_1)U(\varepsilon_2) = U(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ . Powyższe rachunki należy przeprowadzić z dokładnością do wyrazów liniowych w  $\varepsilon$ . Następnie wyliczyć operator  $U(a)$  jako  $U(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} U(\frac{a}{N})^N$ , gdzie  $\varepsilon = \frac{a}{N}$ .

## 14. Nieskończona studnia potencjału w 3 wymiarach

Jak będą wyglądały rozwiązania niezależnego od czasu równania Schrödingera dla nieskończonej "prostopadłościenniej" studni potencjału w trzech wymiarach?

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi(x, y, z) + V(x, y, z) \Psi(x, y, z) = E \Psi(x, y, z),$$

gdzie  $\Delta$  oznacza laplasjan, a potencjał  $V(x, y, z) = 0$  w tym pudle  $[x \in (0, a), y \in (0, a) \text{ i } z \in (0, 2a)]$  oraz  $V(x, y, z) = \infty$  poza nim. *Wskazówka:* Należy rozważyć funkcje falowe postaci  $\Psi(x, y, z) = \psi_x(x)\psi_y(y)\psi_z(z)$  i zauważyć że każda z nich musi stanowić rozwiązanie problemu w jednym wymiarze, odpowiednio w kierunku  $x$ ,  $y$  i  $z$  – innymi słowy należy wykonać tak zwaną separację zmiennych. Następnie skorzystać z wyników zadania 21.

Jaka będzie degeneracja pierwszego stanu wzbudzonego?

## 15. Obrót spinu

Składowe operatora  $\vec{S}$  spinu-1/2 definiujemy jako  $S_a = \frac{1}{2} \hbar \sigma_a$ , gdzie  $(a = x, y, z)$  oraz  $\sigma_a$  to macierze Pauliego. Korzystając z wyników uzyskanych w zadaniu 5., proszę napisać reguły komutacji dla operatorów spinu.



Operator obrotu (części spinowej) dla cząstki o spinie  $1/2$  ma postać

$$D_{\alpha}^{1/2}(\vec{n}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \alpha \vec{n} \cdot \vec{S}}, \quad (22)$$

gdzie  $\vec{n}$  jest wersorem ( $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ ) wyznaczającym oś obrotu, a  $\alpha$  jest kątem obrotu. Proszę pokazać, że operator ten można zapisać jako:

$$D_{\alpha}^{1/2}(\vec{n}) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \vec{n} \cdot \vec{\sigma}.$$

Należy skorzystać z jawnej postaci macierzy Pauliego oraz sprawdzić jak zachowują się kolejne potęgi operatora  $\vec{n} \cdot \vec{S}$ . Jakiej operacji na funkcji falowej odpowiada obrót układu o  $360$  stopni?

Proszę zadziałać operatorem obrotu  $D_{\alpha}^{1/2}(\vec{z})$  (wokół osi  $z$ ) na operator  $\hat{S}_x$ . Co dostajemy w efekcie takiego obrotu?