

Espacios Vectoriales

Mariam Cobalea Vico

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 15/16

Espacios Vectoriales

El espacio vectorial \mathbb{R}^2

Dado el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales, el producto de \mathbb{R} por sí mismo, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se denota \mathbb{R}^2 .

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Llamaremos

- 👉 **vectores** a los elementos de \mathbb{R}^2
- 👉 **escalares** a los elementos del cuerpo \mathbb{R}

Espacios Vectoriales

El espacio \mathbb{R}^2

Definiciones (Suma de vectores en \mathbb{R}^2 , producto por un escalar)

En \mathbb{R}^2 se define la operación **suma** de vectores de la forma:

$$\begin{aligned} + : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\mapsto \vec{x} + \vec{y} \end{aligned} \quad \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

La operación **producto** de un **escalar** $c \in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (c, \vec{x}) &\mapsto c \cdot \vec{x} \end{aligned} \quad c \cdot \vec{x} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Las operaciones de suma y producto por un escalar se pueden definir en general, en un producto de n copias de \mathbb{R} , dando lugar al espacio \mathbb{R}^n .

Espacios Vectoriales

El espacio \mathbb{R}^n : Propiedades de la suma y el producto por un escalar

Teorema

Dados vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ y escalares $c, d \in \mathbb{R}$, se cumplen las siguientes igualdades

❶ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

❷ $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

❸ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$

❹ $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$

❺ $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$

❻ $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$

❼ $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$

❽ $1\vec{u} = \vec{u}$

✓ Usando estas propiedades se pueden realizar manipulaciones algebraicas de los vectores de \mathbb{R}^n de manera muy similar a como se hace con números reales.

Espacios Vectoriales

Muchos conceptos matemáticos (tales como matrices, polinomios y funciones) comparten también estas propiedades.

Definición (Espacio vectorial sobre un cuerpo)

Se dice que un conjunto \mathcal{V} es un **espacio vectorial** sobre un cuerpo \mathcal{K} si se tienen definidas:

- una operación interna $+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ tal que $(\mathcal{V}, +)$ es grupo abeliano, esto es, se cumplen las propiedades 1, 2, 3 y 4 del teorema anterior.
- una ley de composición externa $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ que verifica las propiedades 5, 6, 7 y 8 del teorema anterior.

Espacios Vectoriales

Ejemplos (de espacios vectoriales sobre \mathbb{R})

- El conjunto \mathbb{R}^n de las n -tuplas ordenadas de números reales con las operaciones usuales.
- El conjunto $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de matrices $m \times n$, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathbb{R}_k(x)$ de los polinomios de grado menor que k , es decir, de la forma $p(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$ donde a_0, a_1, \dots, a_{k-1} son números reales, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathcal{F}([0, 1], \mathbb{R})$ de las funciones reales definidas en el intervalo $[0, 1]$. La suma está definida como $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $(c \cdot f)(x) = c \cdot [f(x)]$
- El conjunto $\mathcal{C}([a, b])$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a, b]$.

Espacios Vectoriales

Algunas propiedades de los vectores

Teorema

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} . Para cualesquiera $c, d \in \mathcal{K}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ se verifica:

- 1 $0\vec{v} = \vec{0}$
- 2 $c\vec{0} = \vec{0}$
- 3 Si $c\vec{v} = \vec{0}$, entonces $c = 0$ ó bien $\vec{v} = \vec{0}$.
- 4 $(-c)\vec{v} = -(c\vec{v}) = c(-\vec{v})$
- 5 $c(\vec{u} - \vec{v}) = c\vec{u} - c\vec{v}$
- 6 $(c - d)\vec{v} = c\vec{v} - d\vec{v}$
- 7 Si $c\vec{v} = d\vec{v}$ y $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $c = d$
- 8 Si $c\vec{u} = c\vec{v}$, y $c \neq 0$, entonces $\vec{u} = \vec{v}$

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Definición (Subespacio vectorial)

Sea \mathcal{U} un subconjunto no vacío del espacio vectorial \mathcal{V} . Se dice que \mathcal{U} es **subespacio vectorial** de \mathcal{V} si \mathcal{U} tiene estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que \mathcal{V} .

Teorema (Caracterización de los subespacios vectoriales)

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial sobre un cuerpo \mathcal{K} y sea $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Entonces \mathcal{U} es subespacio vectorial de \mathcal{V} si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:

- 1 Si $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{U}$, entonces $\vec{v} + \vec{w} \in \mathcal{U}$
- 2 Si $c \in \mathcal{K}$ y $\vec{v} \in \mathcal{U}$, entonces $c\vec{v} \in \mathcal{U}$

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Ejemplo

El subconjunto $\mathcal{U} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\}$ es subespacio vectorial de \mathbb{R}^3 .

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el subconjunto \mathcal{A} formado por las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ejercicio

Sea \mathcal{V} el espacio vectorial de las funciones reales de variable real. Demuestra que el conjunto de las funciones pares es un subespacio vectorial de \mathcal{V} .

Espacios Vectoriales

Unión e Intersección de subespacios vectoriales

Definición (Intersección de subespacios vectoriales)

La **intersección** de dos subespacios \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 de un espacio vectorial \mathcal{V} es el conjunto de todos los vectores de \mathcal{V} que están en \mathcal{U}_1 y en \mathcal{U}_2 .

Ejemplo

La intersección de los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}$$

es

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = 0 \right\}$$

Teorema

La intersección de dos subespacios vectoriales también es un subespacio vectorial.

Espacios Vectoriales

Unión e Intersección de Subespacios vectoriales

Definición (Unión de subespacios vectoriales)

La **unión** de dos subespacios vectoriales \mathcal{U}_1 y \mathcal{U}_2 es el conjunto de todos los vectores de \mathcal{V} que están en \mathcal{U}_1 o en \mathcal{U}_2 .

Ejemplo

La unión de los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}$$

es

$$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \quad \text{ó} \quad x_3 = 0 \right\}$$

☛ En general, la **unión** de subespacios vectoriales **no** es un subespacio.

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Un conjunto de vectores suele recibir el nombre de **sistema de vectores**.

Definición (Combinación lineal)

Una **combinación lineal** de los vectores del sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ es toda expresión de la forma

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_n \vec{v}_n$$

donde a_1, a_2, \dots, a_n son escalares.

Ejemplo

Dados los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, la expresión $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ es una combinación lineal del sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejemplo

Por ser \mathbb{R}^3 un espacio vectorial, obtenemos

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Así, decimos que **el vector** $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ **se expresa como combinación lineal de los**
vectores \vec{v}_1, \vec{v}_2 .

En general, si un vector $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \dots + a_n\vec{v}_n$, diremos que
el vector \vec{v} se expresa como combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$.

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

- ☛ El vector $\vec{0}$ se expresa como combinación lineal de cualquier sistema de vectores

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n$$

- ☛ Todo vector v se puede expresar como combinación lineal de cualquier sistema al que pertenezca

$$\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \dots + 0\vec{v}_n + 1\vec{v}$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejercicio

Sean los vectores

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si \vec{w} se puede expresar como combinación lineal de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3 .

Solución: Se deben determinar escalares a , b y c tales que

$$\vec{w} = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2 + c\vec{v}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Solución: Escribimos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rrcrcl} & -b & + & 3c & = & -1 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2 \end{array}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

Por tanto, \vec{w} se puede escribir como combinación lineal de \vec{v}_1 , \vec{v}_2 y \vec{v}_3

$$\vec{w} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Teorema (Subespacio generado por un sistema de vectores)

Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial \mathcal{V} .

El conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\left\{ a_1 \vec{v}_1 + \dots + a_p \vec{v}_p \mid a_1, \dots, a_p \in \mathcal{K} \right\}$$

es un subespacio vectorial de \mathcal{V} .

- Este subespacio se llama **subespacio generado** por $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ y se denota

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$$

- El sistema $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ se llama **sistema generador** del subespacio.

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejemplo

En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 sobre \mathbb{R} , el sistema $\left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es un

sistema generador del subespacio $\mathcal{W} = \left\{ \vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}$

En efecto, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Podemos encontrar otros sistemas generadores de \mathcal{W} , por ejemplo

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Lema (Transitividad de las combinaciones lineales)

Sean $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ sistemas de vectores de un espacio \mathcal{V} . Si un vector \vec{v} se expresa como una combinación lineal de $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y cada uno de éstos es, a su vez, combinación lineal de $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$, entonces \vec{v} también se podrá expresar linealmente en función de los vectores $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$.

Ejemplo

En \mathbb{R}^3 se consideran los sistemas de vectores

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad y \quad \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

y el vector $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Puesto que $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$, entonces resulta

$$\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + 2(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = (1+2)\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Definición (Sistemas equivalentes de vectores)

Sean $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ dos sistemas de vectores.

Se dice que son **equivalentes** si cada vector del primer sistema se expresa como combinación lineal de los vectores del segundo sistema y viceversa.

Ejemplo

Los sistemas

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad y \quad \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

son equivalentes, ya que

$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3, & \vec{u}_1 &= \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\ \vec{v}_2 &= 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3, & \vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\ \vec{v}_3 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2, & \vec{u}_3 &= -\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\ \vec{v}_4 &= \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \end{aligned}$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Teorema (Criterio de equivalencia de sistemas de vectores)

Los sistemas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ y $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ son equivalentes si, y sólo si, generan el mismo subespacio, esto es, si $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p) = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m)$

- ✓ La equivalencia de sistemas de vectores verifica las propiedades **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**. Por lo tanto es una **relación de equivalencia** en \mathcal{V} .
- ✓ Como toda relación de equivalencia particionará a \mathcal{V} en **clases de equivalencia**.
- ✓ En cada clase estarán todos los sistemas que generen el **mismo** subespacio.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Definición (Dependencia e Independencia lineal)

Un sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es **linealmente dependiente** si algún vector del sistema se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Es caso contrario, si ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás, se dice que el sistema es **linealmente independiente**.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplos

- En \mathbb{R}^3 el sistema $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es **linealmente dependiente**, ya que podemos encontrar la combinación lineal

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

- El sistema $\left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ del mismo espacio vectorial es **linealmente independiente** puesto que ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplos

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3(x)$, el sistema $\{2 - x + x^2, 2x + x^2, 4 - 4x + x^2\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$4 - 4x + x^2 = 2(2 - x + x^2) - (2x + x^2)$$

- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el sistema $\left\{ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B + C$$

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Teorema (Criterio de la dependencia lineal)

- ① El sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es **linealmente dependiente** si, y sólo si, existe alguna combinación lineal

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_p \vec{v}_p = \vec{0}$$

con algún coeficiente a_i no nulo.

- ② El sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es **linealmente independiente** si, y sólo si, de toda combinación lineal

$$a_1 \vec{v}_1 + a_2 \vec{v}_2 + \dots + a_p \vec{v}_p = \vec{0}$$

se deduce que **todos** los coeficientes a_i son nulos.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplo

El sistema $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ es linealmente dependiente, ya que podemos encontrar una combinación lineal igual a $\vec{0}$ con algún coeficiente no nulo

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplo

El sistema

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

es **linealmente independiente**, ya que de cualquier combinación lineal igual a $\vec{0}$

$$a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

deducimos $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

- ☛ En general, si el sistema de ecuaciones resultante es escalonado, es inmediato deducir si los coeficientes a_i necesariamente son todos nulos.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Podemos pasar de un sistema de vectores a otro sistema equivalente mediante las conocidas **transformaciones elementales**.

Teorema

Dado un sistema de vectores, pasamos a otro sistema equivalente si efectuamos una de las siguientes transformaciones:

- 1 *Permutar dos vectores.*
- 2 *Multiplicar cualquier vector por un escalar distinto de cero.*
- 3 *Sumar a cualquier vector una **combinación lineal** de los vectores restantes.*
- 4 **Eliminar** *del sistema cualquier vector que sea combinación lineal de los vectores restantes.*

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejercicio

En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se considera el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcule un sistema escalonado equivalente a \mathcal{S}

Solución: Aplicando transformaciones elementales se obtienen los sistemas:

$$\begin{array}{lll} \vec{u}_1 = (1, 1, 1) & \vec{v}_1 = (1, 1, 1) & \vec{w}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{u}_2 = (1, 2, 3) & \vec{v}_2 = (0, 1, 2) & \vec{w}_2 = (0, 1, 2) \\ \vec{u}_3 = (1, 0, 1) & \vec{v}_3 = (0, -1, 0) & \vec{w}_3 = (0, 0, 2) \\ \vec{u}_4 = (1, -1, -3) & \vec{v}_4 = (0, -2, -4) & \vec{w}_4 = (0, 0, 0) \end{array} \quad \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \Rightarrow \end{array}$$

- $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es un sistema escalonado equivalente a \mathcal{S}

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Teorema

- 1 Si un sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también es linealmente independiente.
- 2 Si un sistema contiene a un sistema linealmente dependiente, entonces también es linealmente dependiente. En particular, si un sistema contiene al vector $\vec{0}$, dicho sistema es linealmente dependiente.
- 3 Si un vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ se expresa de forma **única** como combinación lineal de los vectores del sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$, entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ es linealmente independiente.
- 4 Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ es un sistema linealmente independiente, entonces todo vector $\vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m)$ se expresa de forma **única**.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Teorema

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\}$ un sistema linealmente dependiente (con algún vector no nulo), entonces podemos encontrar un subsistema linealmente independiente que genere el mismo subespacio.

Ejercicio

En el sistema $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

busca un subsistema linealmente independiente.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

- Sea \mathcal{V} un espacio vectorial distinto de $\{\vec{0}\}$. En \mathcal{V} son posibles dos casos:
 - ▶ Existe un sistema linealmente independiente que contiene un número de vectores tan grande como se quiera.
 - ▶ Existe un sistema linealmente independiente que contiene un número **máximo** de vectores.
- Los espacios vectoriales del último caso se llaman **espacios vectoriales de tipo finito**
- En particular, un espacio vectorial de este tipo será cualquier subespacio generado por un sistema finito de vectores.

Definición (Base de un espacio vectorial)

Se dice que el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una **base** de \mathcal{V} si

- 1 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es generador y
- 2 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es linealmente independiente.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplos

❶ $\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **base canónica o estándar** de \mathbb{R}^3 .

❷ El sistema $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es la **base estándar** de $\mathbb{R}_{n+1}(x)$.

❸ El sistema

$$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es la **base estándar** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Teorema

❶ Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base de un espacio vectorial \mathcal{V} y $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ es un sistema linealmente independiente, entonces $k \leq n$.

❷ Si $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ son bases de un espacio vectorial \mathcal{V} , entonces $n = m$.

☛ La **base** es el sistema linealmente independiente con el **máximo** número de vectores (si es finita).

☛ Todas las bases tienen el **mismo** número de vectores.

A este número n se le llama **dimensión** del espacio vectorial y escribimos

$$\dim(\mathcal{V}) = n$$

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplos

- \mathbb{R}^n tiene dimensión n , ya que admite como base a

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\mathbb{R}_{n+1}(x)$ tiene dimensión $n + 1$, ya que $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ es una base.
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tiene dimensión $m \cdot n$, ya que admite la siguiente base

$$\{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \dots, E_{2n}, \dots, E_{m1}, E_{m2}, \dots, E_{mn}\}$$

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Teorema (Propiedades de la dimensión)

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión n . Entonces

1. Cualquier sistema con $n + 1$ vectores es linealmente dependiente.
2. Un sistema de n vectores es base de \mathcal{V} si y sólo si, es generador o bien es linealmente independiente.
3. Si \mathcal{L} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} , entonces $\dim(\mathcal{L}) \leq n$.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplo

El sistema $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del espacio vectorial \mathbb{R}^4 .

- ✓ Estamos en un espacio vectorial de dimensión cuatro y tenemos un sistema con exactamente cuatro vectores.
- ✓ Se puede ver que es base demostrando, bien que es linealmente independiente o bien que es generador.
- ✓ En este caso, (por ser escalonado), es inmediato que es linealmente independiente.

☞ En general, **en el espacio vectorial \mathbb{R}^n (de dimensión n) cualquier sistema escalonado formado por n vectores es una base.**

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

¿Cómo podemos obtener una base de todo el espacio vectorial \mathcal{V} a partir de un sistema linealmente independiente?

En el espacio vectorial \mathbb{R}^n , si tenemos que completar una base de un subespacio vectorial \mathcal{L} procedemos de la siguiente manera:

- 1 Buscamos un sistema escalonado que sea equivalente al sistema dado.
- 2 Añadimos aquellos vectores necesarios para completar un sistema escalonado con n vectores.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplo

En el espacio \mathbb{R}^5 se considera el subespacio \mathcal{L} generado por el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallemos una base de \mathbb{R}^5 a partir de una base de \mathcal{L} .

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Solución: En primer lugar, realizamos transformaciones elementales para encontrar un sistema escalonado equivalente al sistema inicial.

$$\begin{array}{ll} \vec{u}_1 = (1, 2, 1, 2, 1) & \vec{v}_1 = (1, 2, 1, 2, 1) \\ \vec{u}_2 = (1, 2, 3, 4, 5) & \vec{v}_2 = (0, 0, 2, 2, 4) \\ \vec{u}_3 = (2, 4, 4, 6, 6) \implies \vec{v}_3 = (0, 0, 2, 2, 4) \\ \vec{u}_4 = (3, 6, 5, 8, 8) & \vec{v}_4 = (0, 0, 2, 2, 5) \\ \vec{u}_5 = (1, 2, 1, 2, 2) & \vec{v}_5 = (0, 0, 0, 0, 1) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \vec{w}_1 = (1, 2, 1, 2, 1) & \vec{x}_1 = (1, 2, 1, 2, 1) \\ \vec{w}_2 = (0, 0, 2, 2, 4) & \vec{x}_2 = (0, 0, 2, 2, 4) \\ \vec{w}_3 = (0, 0, 0, 0, 0) \implies \vec{x}_3 = (0, 0, 0, 0, 0) \\ \vec{w}_4 = (0, 0, 0, 0, 1) & \vec{x}_4 = (0, 0, 0, 0, 1) \\ \vec{w}_5 = (0, 0, 0, 0, 1) & \vec{x}_5 = (0, 0, 0, 0, 0) \end{array}$$

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Solución (cont.): Después eliminamos los vectores igual a cero del último sistema y añadimos algún vector que permita completar un sistema escalonado con 5 vectores.

$$\begin{array}{llll}
 \vec{x}_1 = (1, 2, 1, 2, 1) & \vec{x}_1 = (1, 2, 1, 2, 1) & (1, 2, 1, 2, 1) \\
 \vec{x}_2 = (0, 0, 2, 2, 4) & \text{---} & (0, *, *, *, *) \\
 \vec{x}_3 = (0, 0, 0, 0, 0) & \vec{x}_2 = (0, 0, 2, 2, 4) & (0, 0, 2, 2, 4) \\
 \vec{x}_4 = (0, 0, 0, 0, 1) & \text{---} & (0, 0, 0, *, *) \\
 \vec{x}_5 = (0, 0, 0, 0, 0) & \vec{x}_4 = (0, 0, 0, 0, 1) & (0, 0, 0, 0, 1)
 \end{array}$$

De esta forma, una posible base de \mathbb{R}^5 es

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Definición

El **rango** de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio que genera.

Ejemplo

Hemos visto que el sistema \mathcal{S} genera un subespacio \mathcal{L} de dimensión 3, donde

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto, el rango de \mathcal{S} es 3.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- Toda matriz lleva asociados dos sistemas de vectores, uno formado por los vectores fila y el otro formado por los vectores columna.
- Podemos considerar el rango de una matriz dependiendo de si nos fijamos en sus vectores fila o sus vectores columna.
- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, introducimos las siguientes ...

Definiciones

Rango de filas de A es el rango del sistema de los vectores fila de A .

Rango de columnas de A es el rango de los vectores columna de A .

Teorema

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores fila de A coincide con la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores columna.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Definición (Rango de una matriz)

El **rango** de una matriz se define como su rango de filas (o de columnas).

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ podemos hallar su rango mediante operaciones elementales en sus filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos que $\text{rang}(A) = 2$.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Teorema

Dada una matriz A de dimensión $m \times n$, las soluciones del sistema lineal homogéneo $A \vec{x} = \vec{0}$ forman un subespacio de \mathbb{R}^n .

Definiciones (Núcleo y nulidad de una matriz)

- El conjunto de soluciones $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^n | A \vec{x} = \vec{0}\}$ se llama **núcleo** de A , y se denota como $\mathcal{N}(A)$.
- La dimensión de $\mathcal{N}(A)$ se llama **nulidad** de A .

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo (Hallar el núcleo de una matriz A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 - 3x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- $\mathcal{N}(A)$ es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^4 , que está determinado por el sistema homogéneo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

que son las **ecuaciones cartesianas** del subespacio.

- Una **base** de $\mathcal{N}(A)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Teorema (de la dimensión)

Si A es una matriz $m \times n$ entonces $n = \text{rango}(A) + \text{nulidad}(A)$.

Esto es, si $\text{rango}(A) = r$, entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{0}$ es $n - r$.

Teorema

Si \vec{x}_p es una solución del sistema lineal $A\vec{x} = \vec{b}$, entonces toda solución de este sistema es de la forma $\vec{x} = \vec{x}_p + \vec{x}_h$, donde \vec{x}_h es una solución del sistema homogéneo asociado $A\vec{x} = \vec{0}$.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo

Comprueba el teorema sobre el sistema
$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 8 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_4 = -9 \end{cases}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) = (U|c)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Definición (Suma de subespacios)

Sean \mathcal{U} y \mathcal{W} subespacios vectoriales de \mathcal{V} . La **suma** de \mathcal{U} y \mathcal{W} es el conjunto

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \left\{ \vec{v} \in \mathcal{V} \mid \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \text{ con } \vec{u} \in \mathcal{U} \text{ y } \vec{w} \in \mathcal{W} \right\}$$

de todos los vectores de \mathcal{V} que se expresan como suma de un vector de \mathcal{U} y un vector de \mathcal{W} .

Teorema

La suma de dos subespacios vectoriales de \mathcal{V} es un subespacio vectorial de \mathcal{V} .

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Lema

Sean \mathcal{U} y \mathcal{W} subespacios vectoriales de \mathcal{V} . Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es una base de \mathcal{U} y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$ es una base de \mathcal{W} , entonces el subespacio suma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ está generado por $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$$

Ejemplo

La suma de los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

es un subespacio generado por el sistema

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Teorema

Sean \mathcal{U} y \mathcal{W} subespacios vectoriales de \mathcal{V} . Entonces

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = \dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Ejemplo

Dados los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 - x_3 = 0 \right\} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$$

comprobamos que se verifica

$$\dim(\mathcal{U}) + \dim(\mathcal{W}) - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = 3$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Definición (Suma directa)

Si \mathcal{U} y \mathcal{W} son dos subespacios vectoriales tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, se dice que la suma de \mathcal{U} y \mathcal{W} es **suma directa** y la denotamos $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.

Ejemplo

Comprueba que la suma de los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$$

es suma directa.

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Definición (Subespacios suplementarios)

Sean \mathcal{U} y \mathcal{W} subespacios vectoriales de \mathcal{V} . Decimos que \mathcal{U} y \mathcal{W} son **suplementarios** si

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$$

Ejemplo

Los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$$

son suplementarios.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Definición (Coordenadas)

Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial \mathcal{V} , para cada $\vec{x} \in \mathcal{V}$ existe una **única** combinación lineal

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = \vec{x}$$

A estos escalares x_1, \dots, x_n se les llama **coordenadas** del vector \vec{x} respecto a la base \mathcal{B} .

Diremos que \vec{x} tiene coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) respecto a la base \mathcal{B} y escribiremos

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Ejemplo

En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 , dada la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

el vector \vec{v} de coordenadas $(2, 3, 4)_{\mathcal{B}}$ es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = 2\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 4\vec{w}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

✓ En el espacio vectorial \mathbb{R}^n , si consideramos la *base canónica*

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ para todo vector } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

se verifica

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Es decir, **las coordenadas de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica \mathcal{C} coinciden con sus componentes x_1, \dots, x_n .**

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

La base es de gran importancia en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita.

En primer lugar, fijada una base \mathcal{B} , cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ se identifica con sus coordenadas x_1, x_2, \dots, x_n respecto a esa base.

Y así, trabajamos en el cuerpo \mathcal{K} , pues **todas las operaciones con los vectores quedan reducidas a operaciones con los elementos del cuerpo.**

Para sumar dos vectores basta sumar sus coordenadas y para multiplicar un escalar por un vector es suficiente multiplicar las coordenadas de dicho vector por el escalar.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Cambio de base

- ✓ Sea \mathcal{V} un espacio vectorial de dimensión n .
- ✓ Todo vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ queda unívocamente determinado por sus coordenadas respecto a una base.
- ✓ Al existir más de una base, las coordenadas de un mismo vector \vec{x} variarán al pasar de una base a otra.
- ✓ Estudiamos qué relación guardarán entre sí las coordenadas respecto a una y otra base.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Ejemplo

En \mathbb{R}^3 se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Expresemos el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto a cada base.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Lema (Cambio de base)

Sean $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n\}$ bases de un espacio vectorial.

$$\begin{cases} \vec{v}'_1 = a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \dots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vdots \\ \vec{v}'_n = a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \dots + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases}$$

Entonces la matriz del cambio de \mathcal{B}' a \mathcal{B} es

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- Cada columna de P coincide con las coordenadas de cada vector \vec{v}'_j de la base \mathcal{B}' expresado respecto de la base \mathcal{B}

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Demostración:

Por ser $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v}'_1, \dots, \vec{v}'_n\}$ bases de un espacio vectorial \mathcal{V} , cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendrá coordenadas respecto a cada base:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La **expresión matricial del cambio de base** es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad P[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Teorema (Inversa de la matriz del cambio de base)

Si P es la matriz de cambio de una base \mathcal{B}' a otra base \mathcal{B} de un espacio vectorial \mathcal{V} de dimensión n , entonces P es invertible y la matriz de cambio de \mathcal{B} a \mathcal{B}' es P^{-1} .

Ejemplo

En \mathbb{R}^3 se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

- 1 Calcula la matriz de paso P de la base \mathcal{C} a la base \mathcal{B} .
- 2 Calcula la matriz de paso Q de la base \mathcal{B} a la base \mathcal{C} .
- 3 Comprueba que P y Q son inversas.

Bibliografía

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Matlab

B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal y sus aplicaciones David C. Lay (Ed. Pearson)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra

A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontificia de Comillas)