UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática

Estructuras Algebraicas para la Computación

21 de junio de 2016

Apellidos y Nombre: .... **Grupo:** ....

DNI: .... **Titulación:** .... **Firma:** ....

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas. Para que un ejercicio se considere resuelto correctamente se debe indicar claramente el modelo matemático usado en la resolución y la justificación de su adecuación. No se valorará la mera coincidencia del resultado propuesto.
- No usar lápiz, se debe escribir con bolígrafo azul o negro.
- No se puede utilizar ningún dispositivo electrónico.

Al responder cada pregunta, define cada uno de los conceptos que aparecen en negrita.

1. (0,5 pt.) Justifica si es posible encontrar un alfabeto **finito** Σ tal que $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ sea un **conjunto numerable**.

2. (0,75 pt.) Sea D_{108} el conjunto de todos los divisores de 108 con la **relación de orden** divisibilidad.

   a) Dibuja su diagrama de Hasse.

   b) Dado el subconjunto $B = \{6, 9, 12, 36\}$, halla (si existen) **minimales**, **maximales**, **mínimo**, **máximo**, **cotas superiores**, **cotas inferiores**, **mínima cota superior** y **máxima cota inferior**.

   c) Justifica que D_{108} es un **retículo algebraico** y estudia si es **retículo complementado**.

3. (1 pt.) Sea $\mathbb{B}$ el **álgebra de Boole** binaria y sea $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ el álgebra de Boole de las funciones booleanas de tres variables.

   a) Da una lista de los **átomos** y otra lista de los **superátomos** de $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$.

   b) Da un ejemplo de una función booleana de tres variables que no esté en las listas anteriores y exprésala en función de los átomos y de los superátomos.

   c) ¿Existe un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ son álgebras de Boole isomorfas?
   En caso afirmativo, define un **isomorfismo**.

4. (0,75 pt.) La matriz de verificación de paridad de un cierto **código de grupo** es

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Determina el mensaje que se enviará para comunicar $E\ A\ C$ usando la equivalencia:

$$111\ M \quad 110\ A \quad 101\ T \quad 100\ R \quad 011\ I \quad 010\ C \quad 001\ E \quad 000\ S$$

   b) Halla cuatro palabras que tengan el mismo síndrome que 0010011.

   c) Halla cuatro palabras que se decodifiquen igual que 1001001.

5. (1,25 p.) En el **anillo** de matrices $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ se consideran los subconjuntos

$$\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}\right\},\qquad \mathcal{M}(\mathbb{Z})=\left\{M=\begin{pmatrix} 1 & z\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ z\in\mathbb{Z}\right\}$$

Justifica que:

a) $(\mathcal{A},+,\cdot)$ es **cuerpo**.

b) Para cualesquiera A, B y $C\in\mathcal{A}$, (con $A\neq 0$), siempre que $A\cdot B=A\cdot C$ se verifica $B=C$.

c) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}),+)$ no es grupo.

d) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}),\cdot)$ es **grupo abeliano**.

e) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}),+,\cdot)$ no es **anillo**.

6. (2,25 pt.) Una **aplicación lineal** $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^4$ cumple:

$$\begin{aligned} f(1,1,0) &= (1,0,-1,1)\\ f(0,1,0) &= (0,1,0,1)\\ f(0,1,-1) &= (1,1,0,-1)\end{aligned}$$

a) Halla la **matriz asociada** a f en las bases canónicas.

b) Estudia si el vector $(1,a,-1,a+1)$ pertenece a $Im\ f$ para algún $a\in\mathbb{R}$

c) Calcula la **dimensión** y las ecuaciones cartesianas de $Im\ f$.

d) Determina si f es **inyectiva**.

e) Sabiendo que el sistema $\{v_1,v_2\}$ es **linealmente independiente**, ¿podemos afirmar que el sistema $\{f(v_1-v_2),f(v_2)\}$ también es linealmente independiente? Justifica la respuesta.

7. (3,5 pt.) De una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ sabemos que tiene dos **valores propios** distintos, -1 y 2 y que sus **subespacios propios** son

$$\begin{aligned} U_{-1} &= \mathcal{L}\{(1,1,0,1),(1,-1,2,0),(0,2,1,-2)\}\\ U_2 &= \mathcal{L}\{(-3,1,2,2)\}\end{aligned}$$

a) Halla $f(1,1,0,1)$ y $f(0,6,3,-6)$.

b) ¿ $\vec{v}=(2,2,3,-1)$ es un **vector propio** de f, asociado al valor propio -1 ?

c) Estudia si U_2 es un **subespacio ortogonal** al subespacio U_{-1}.

d) Halla la matriz asociada a la aplicación lineal en la base

$$\mathcal{B}=\{(1,1,0,1),(1,-1,2,0),(0,2,1,-2),(-3,1,2,2)\}$$

e) Halla la matriz A asociada a la aplicación f en las bases canónicas.

f) Justifica si f es **diagonalizable ortogonalmente** y, en caso afirmativo, determina una matriz de paso Q tal que $Q^t\ A\ Q=D$, siendo $D=diag(-1,-1,-1,2)$.

g) Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{U}_{-1}$, y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{U}_2$ tales que $\mathcal{B}\,'=\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ sea una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^4$.

h) Calcula las **coordenadas** del vector $\vec{v}=(2,1,1,6)$ respecto a la base $\mathcal{B}\,'$.