

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 3 de Ejercicios

1. En el conjunto $A = \mathbb{Q} - \{1\}$ se define la operación $*$

$$\begin{aligned} *: A \times A &\longrightarrow A \\ (x, y) &\longmapsto x * y = x + y - xy \end{aligned}$$

Estudia qué estructura algebraica tiene $(A, *)$.

2. En el conjunto $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ se define la operación $*$

$$\begin{aligned} *: G \times G &\longrightarrow G \\ (x, y) &\longmapsto x * y = x + y + xy \end{aligned}$$

- a) Demuestra que $(G, *)$ es grupo abeliano.
b) Encuentra el valor de $x \in G$ tal que $2 * x * 3 = 35$

3. Sea el conjunto

$$S = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} \mid m, n \in \mathbb{Z} \right\}$$

Determina qué estructura algebraica tiene (S, \cdot) .

4. Estudia qué estructura algebraica tiene el conjunto $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ con la suma y el producto.
5. Estudia qué propiedades verifican la suma y el producto usual de matrices definidas en el conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

6. Se considera el conjunto matrices $\mathcal{M}(\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, z \in \mathbb{Z} \right\}$.

- a) Estudia qué estructura tiene $\mathcal{M}(\mathbb{Z})$ con la operación producto de matrices.
b) Idem con la suma.

7. Sea S_3 el conjunto de las permutaciones de 3 elementos.

- a) Demuestra que (S_3, \circ) es un grupo de orden 6 no conmutativo.
b) Halla un subgrupo de S_3 que sea conmutativo.

8. Sea (S_5, \circ) el grupo de las permutaciones de 5 elementos y sean $\sigma, \rho \in S_5$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Halla $(\sigma \circ \rho)^{-1}$.

9. Sea el conjunto de funciones $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$ definidas de $\mathbb{R} - \{0, 1\}$ en sí mismo

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = 1 - x$$

$$f_4(x) = \frac{1}{1-x} \quad f_5(x) = \frac{x-1}{x} \quad f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

- Demuestra que (F, \circ) es un grupo.
- Estudia si es abeliano y deduce si es cíclico.
- Demuestra que $H = \{f_1, f_3\}$ es un subgrupo de F .
- Determina las clases laterales derechas e izquierdas de H . ¿Es un subgrupo normal?

10. Demuestra o refuta:

- El subconjunto de los enteros impares es un subgrupo de $(\mathbb{Z}, +)$.
- $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$.
- $(\{[0]_{12}, [3]_{12}, [6]_{12}, [9]_{12}\}, +_{12})$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_{12}, +_{12})$.
- El conjunto de matrices

$$\mathcal{M} = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subgrupo del grupo de matrices $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +)$.

11. Dada la matriz

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se define la función $f: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^5$ como $f(w) = wG$

- Demuestra que la imagen de f es un subgrupo de (\mathbb{Z}_2^5, \oplus) .
- Halla las clases laterales de los elementos 10111 y 10101.
- Determina cuántas clases laterales distintas hay. (Sin hallarlas)

12. Para cada una de las siguientes matrices generadoras, determina cuantos errores detecta y cuantos errores corrige el correspondiente código:

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (ii) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Escribe la tabla de decodificación para el código dado por la matriz generadora

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Usa esta tabla para corregir el mensaje

1100011 1011000 0101110 0110001 1010110.

14. Sea $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{Z}_2^5$ un código de grupo de cuatro elementos. Sabiendo que 10101 y 11010 son elementos de \mathcal{C} , determina:

- los restantes elementos de \mathcal{C} .
- una matriz \mathcal{G} generadora del código y una matriz \mathcal{H} de verificación de paridad asociada.

15. Sea \mathcal{C} un código con matriz de verificación de paridad

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} a & 0 & c & 1 \\ 1 & b & 0 & d \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Calcula los valores a, b, c, d para que \mathcal{H} reconozca las palabras 101011 y 110110 como pertenecientes al código.
- Encuentra las restantes palabras del código y determina hasta cuántos errores se pueden corregir.

16. Sea la función de codificación $\mathcal{C}_{\mathcal{G}} : \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2^6$ dada por la matriz generadora

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Escribe la tabla de decodificación para $\mathcal{C}_{\mathcal{G}}$ y determina hasta cuántos errores se pueden corregir.
- Decodifica y traduce el mensaje

011011 110000 010110 100000 110110 110111 011111

usando la equivalencia

000	001	010	011	100	101	110	111
—	T	E	D	A	R	N	H

17. Se sabe que la matriz generadora de un cierto código es

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y se recibe el mensaje

000111 011100 000000 101101 001010 010011

- Determina qué palabras pertenecen o no al código calculando su síndrome.
- Decodifica y traduce el mensaje recibido usando la equivalencia

111 A 110 N 101 T 100 S 011 E 010 R 001 O 000 C

18. Se considera el conjunto $\mathcal{F} = \{f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ en el que se definen la suma y el producto usuales

$$\left. \begin{aligned} \forall x \in D, \quad (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned} \right\}$$

Estudia si $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ es anillo unitario.

19. En el conjunto

$$\mathcal{A}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, x, y \in \mathbb{Z}_3 \right\}$$

se consideran la suma y el producto de matrices usuales.

Estudia si $(\mathcal{A}_{2 \times 2}(\mathbb{Z}_3), +, \cdot)$ es un anillo.

20. En el anillo unitario $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15}, \cdot_{15})$ se considera el subconjunto

$$S = \{[0]_{15}, [3]_{15}, [6]_{15}, [9]_{15}, [12]_{15}\}$$

a) Estudia si es un anillo unitario.

b) En caso afirmativo, señala el elemento unidad.

21. Halla los valores de a en el anillo \mathbb{Z}_8 que hacen que la ecuación $ax = a$ tenga solución única.

22. Estudia para qué valores de $m \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, la ecuación $2x = 6$ tiene solución única en \mathbb{Z}_m .

23. a) En el anillo $(\mathbb{Z}_{36}, +_{36}, \times_{36})$ determina los elementos que son divisores de cero.

b) En el grupo multiplicativo U_{36} encuentra los inversos de cada uno de los elementos.

24. Demuestra o da un contraejemplo:

a) Todo grupo abeliano es cíclico.

b) Sea $(G, *)$ un grupo. Si G tiene siete elementos, entonces es abeliano.

c) Un grupo (G, \cdot) es conmutativo si y solo si para todo $x, y \in G$ $(x \cdot y)^2 = x^2 \cdot y^2$.

d) $(\mathbb{Z}_4, +_4)$ es un subgrupo de $(\mathbb{Z}_8, +_8)$.

e) $(\mathbb{Z}_{11}^*, \times_{11})$ es un grupo cíclico.

f) El anillo de las matrices cuadradas reales no es un dominio de integridad.

g) Si p es primo, entonces $(\mathbb{Z}_p, +_p, \times_p)$ es un cuerpo.