Espacios Euclídeos

Mariam Cobalea Vico

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 16/17

Producto escalar

Definición (Producto escalar)

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Un **producto escalar** *es una función $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ que verifica:*

1. $\varphi(\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{v},\vec{u})$
2. $\varphi(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}) = \varphi(\vec{u},\vec{v}) + \varphi(\vec{u},\vec{w})$
3. $\varphi(c\vec{u},\vec{v}) = \varphi(\vec{u},c\vec{v}) = c\varphi(\vec{u},\vec{v})$
4. $\varphi(\vec{v},\vec{v}) > 0$ *y* $\varphi(\vec{v},\vec{v}) = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = \vec{0}$

☛ Un **producto escalar** se suele definir, de forma más sucinta, como una forma bilineal $\varphi\colon \mathcal{V}\times\mathcal{V}\to\mathbb{R}$ simétrica y definida positiva.

Producto escalar

Ejemplo

La función $(\ |\ )\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida como

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

es el **producto escalar euclídeo**.

- ✔ Para denotar el producto escalar de dos vectores $\vec{v}, \vec{w}$ se suelen usar distintas notaciones, tales como

$$\varphi(\vec{v}, \vec{w}), \qquad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \qquad (\vec{v} \mid \vec{w}), \qquad \vec{v} \cdot \vec{w}$$

- ✔ Para distinguir el producto escalar euclídeo definido en $\mathbb{R}^n$ de otros productos escalares usaremos la notación siguiente:

$\vec{v} \cdot \vec{w}$	representa el producto escalar euclídeo en $\mathbb{R}^n$
$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$	representa el producto escalar general en un espacio vectorial $\mathcal{V}$

Producto escalar

Ejemplo

La función $\langle\ \rangle\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$\langle \vec{x},\ \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 7 x_2 y_2$$

es otro producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

Este ejemplo se puede generalizar demostrando que:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = c_1 v_1 w_1 + c_2 v_2 w_2 + \ldots + c_n v_n w_n, \quad \text{con} \quad c_i > 0$$

es un producto escalar en $\mathbb{R}^n$, en el que las constantes c_i se llaman **pesos**.

Espacio vectorial euclídeo

Definición (Espacio vectorial euclídeo)

Se llama **espacio euclídeo** *a un espacio vectorial real en el que se ha definido un producto escalar.*

Ejemplo

Son espacios euclídeos:

1. $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar euclídeo $(\ |\ ) \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definido
$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$
2. $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar $(\ |\ ) \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido
$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + 7 x_2 y_2$$
3. $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar $(\ |\ ) \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definido
$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$$

Espacio vectorial euclídeo

Ejemplo

Son espacios euclídeos:

4. $(\mathbb{R}_2(t), \langle\ \rangle)$, donde $\langle\ \rangle$ es el producto escalar
$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$$
5. $(\mathcal{C}[0, 2\pi], \langle\ \rangle)$, donde $\langle\ \rangle$ es el producto escalar
$$\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$$
6. $(\mathcal{C}[a, b], \langle\ \rangle)$, donde $\langle\ \rangle$ es el producto escalar
$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición (Norma de un vector)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Llamamos **norma** *de un vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ al número real*

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Ejemplo

La norma del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ del espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual es

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición (Vector unitario)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que $\vec{u} \in \mathcal{V}$ es un vector **unitario** *si $\|\vec{u}\| = 1$*

☛ *Si $\vec{v}$ es un vector no nulo, el vector $\vec{u} = \dfrac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}$ es unitario.*

Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, el vector

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

es unitario.

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición (Distancia entre dos vectores)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Llamamos **distancia** *entre dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ al número real*

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

Ejemplo

La distancia entre los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar euclídeo es

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Teorema (Propiedades de la norma)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sean $c \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$.

1. $\|\vec{v}\| = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = 0$
2. $\|c\vec{v}\| = |c|\ \|\vec{v}\|$
3. $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ *(Desigualdad triangular)*

Teorema (Propiedades de la distancia)

Sean $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores de un espacio euclideo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. Entonces

1. $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$
2. $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ *si, y sólo si,* $\vec{v} = \vec{w}$
3. $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$
4. $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$ *(Desigualdad triangular)*

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean $\vec{v}$, $\vec{w}$ vectores de un espacio euclideo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ Entonces

$$\left|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle\right| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene $-1 \leq \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \leq 1$

Luego, existe un único ángulo θ tal que $\cos\theta = \dfrac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$

Definición (Ángulo entre dos vectores)

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores en un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. El **ángulo** *entre dos vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, no nulos, viene dado por*

$$ang(\vec{v}, \vec{w}) = \theta = \arccos \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}, \quad \theta \in [0, \pi]$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre dos vectores. Ortogonalidad

Ejemplos

1. En $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar euclídeo, el ángulo entre los vectores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{es} \quad \theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$

2. En $\mathbb{R}_3(x)$ se considera el producto escalar $(p|q) = \displaystyle\sum_{i=1}^{3} p(i)q(i)$

   El ángulo determinado por los polinomios $x^2 + 1$ y $x^2 - 3x + 1$ es

$$\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{11}}$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre dos vectores. Ortogonalidad

Definición (Vectores ortogonales)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$. Se dice que $\vec{v}$ es **ortogonal** *a $\vec{w}$ si su producto escalar es cero.*
Cuando un vector $\vec{v}$ es ortogonal a todos los vectores de un subespacio $\mathcal{W}$ se dice que $\vec{v}$ es **ortogonal** *a $\mathcal{W}$*

Teorema (Generalización del teorema de Pitágoras)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ son ortogonales si y sólo si verifican:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre dos vectores. Ortogonalidad

Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, son ortogonales los vectores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo

En el espacio euclídeo $\mathcal{C}[0, 2\pi]$, las funciones $\operatorname{sen} t$ y $\cos t$ son ortogonales, ya que

$$\langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} t \cdot \cos t dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen} 2t dt = \left. \frac{-\cos 2t}{4} \right|_0^{2\pi} = 0$$

- ✔ La ortogonalidad depende del producto escalar que se elige.
- ✔ Dos vectores pueden ser ortogonales con respecto a un producto escalar y **no** serlo con respecto a otro producto.

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre dos vectores. Ortogonalidad

Ejemplo

El vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ es ortogonal al subespacio vectorial $\mathcal{W}$ generado por

el sistema de vectores $\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{w}_1, ..., \vec{w}_r\}$ una base de un subespacio vectorial $\mathcal{W}$. Demuestra que un vector $\vec{v}$ es ortogonal a $\mathcal{W}$ si y solo si $\vec{v}$ es ortogonal a cada vector de $\mathcal{B}$

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Sistema ortogonal)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m\} \subset \mathcal{V}$ es **ortogonal** *si cada vector $\vec{v}_i$ es ortogonal a todos los demás.*

Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual el sistema

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es ortogonal,

$$(1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1,1,1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (-1,2,-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Teorema

Si un sistema de vectores es ortogonal, entonces es linealmente independiente.

Corolario

En un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ de dimensión n cualquier sistema ortogonal de n vectores no nulos es una base de $\mathcal{V}$.

Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico el sistema

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

es una base, ya que es ortogonal.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Sistema ortonormal)

Sea $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\} \subset \mathcal{V}$ es **ortonormal** *si es un sistema ortogonal y cada vector $\vec{u}_i$ es unitario.*

Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual, el sistema

$$\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}\right\}$$

es un sistema ortonormal.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Teorema (Coordenadas en una base ortonormal)

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ *una base ortonormal del espacio euclídeo* $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$.
Entonces la representación de cada vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *en la base* $\mathcal{B}$ *viene dada por*

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1\rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2\rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{u}_n\rangle \vec{u}_n$$

- Las coordenadas de un vector $\vec{v}$ en la base ortonormal $\mathcal{B}$ se llaman **coeficientes de Fourier** de $\vec{v}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Ejemplo (Coordenadas en una base ortonormal)

En el espacio $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar canónico, las coordenadas del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ respecto a la base ortonormal

$$\mathcal{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

son las siguientes

$$< \vec{v}, \vec{u}_1 >= (1,0,2)\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{3}}, \qquad < \vec{v}, \vec{u}_2 >= (1,0,2)\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{-3}{\sqrt{6}},$$

$$< \vec{v}, \vec{u}_3 >= (1,0,2)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

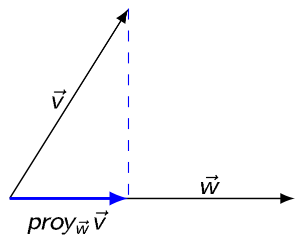
Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Definición (Proyección ortogonal)

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$, con $\vec{w} \neq 0$. La **proyección ortogonal** *de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ se define como*

$$proy_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}\vec{w}$$



☛ Si $\vec{w}$ es unitario, entonces $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \|\vec{w}\|^2 = 1$, y la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ queda

$$proy_{\vec{w}}\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{w}$$

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Usando el producto escalar canónico en $\mathbb{R}^3$, hallar la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$.

Solución:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 10, \quad \langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = 5$$

Luego la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{w}$ es

$$proy_{\vec{w}}\vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}\vec{w} = \frac{10}{5}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Espacio vectorial euclídeo

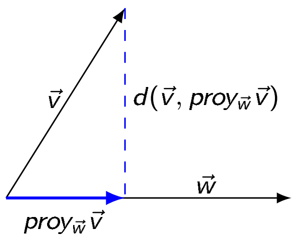
Proyección ortogonal

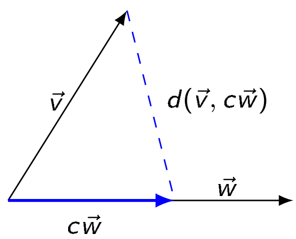
Teorema (Proyección ortogonal y distancia)

Sean $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$, con $\vec{w} \neq 0$. Entonces

$$d(\vec{v}, proy_{\vec{w}}\vec{v}) < d(\vec{v}, c\vec{w}), \qquad si\ c \neq \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}\rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w}\rangle}$$

- $proy_{\vec{w}}\vec{v}$ es el múltiplo escalar de $\vec{w}$ más cercano a $\vec{v}$.





Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Definición (Proyección ortogonal sobre un subespacio $\mathcal{W}$)

Sea $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_r\}$ una base ortogonal de un subespacio vectorial $\mathcal{W}$ de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. La **proyección ortogonal** *de un vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$, denotada por $proy_{\mathcal{W}}\vec{v}$ viene dada por*

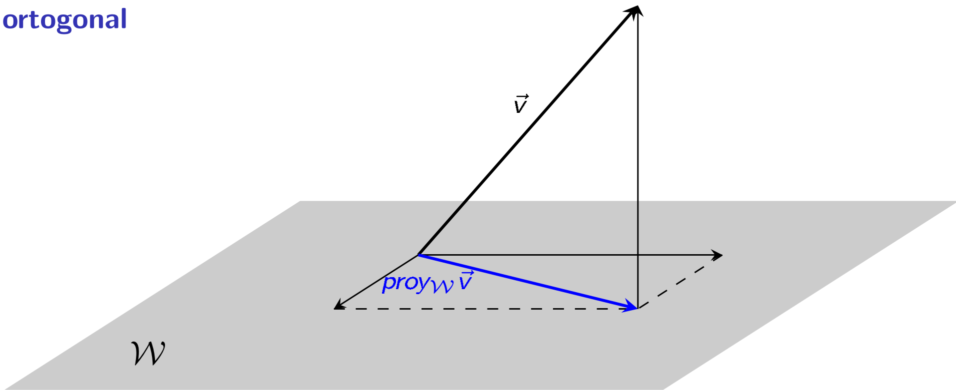
$$proy_{\mathcal{W}}\vec{v} \;=\; \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1\rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2\rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2\rangle}\vec{w}_2 + \cdots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_r\rangle}{\langle \vec{w}_r, \vec{w}_r\rangle}\vec{w}_r$$

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_r\}$ es una base ortonormal de $\mathcal{W}$ entonces la expresión de la proyección ortogonal de $\vec{v} \in \mathcal{V}$ sobre $\mathcal{W}$, se expresa como

$$proy_{\mathcal{W}}\vec{v} \;=\; \langle \vec{v}, \vec{u}_1\rangle\vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2\rangle\vec{u}_2 + \cdots + \langle \vec{v}, \vec{u}_r\rangle\vec{u}_r$$

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal



Ejemplo

Sea el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y el subespacio $\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}\right)$.

La **proyección ortogonal** del vector $\vec{v}$ **sobre** el subespacio $\mathcal{W}$ es

$$proy_{\mathcal{W}}\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5}) \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}$$

Espacio vectorial euclídeo

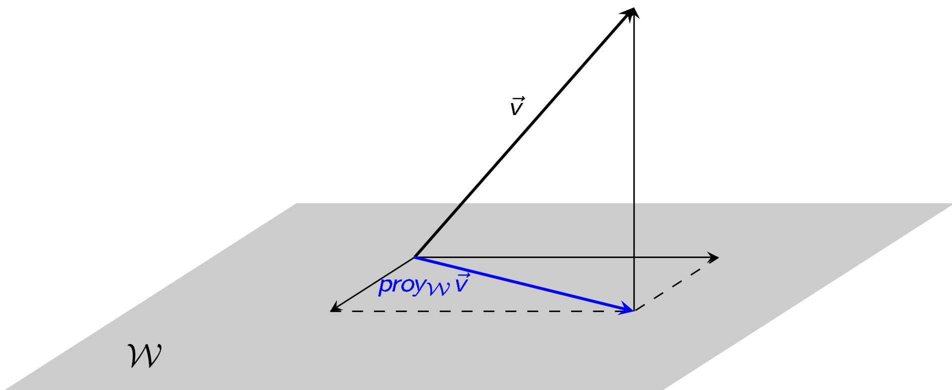
Proyección ortogonal

Teorema (Proyección ortogonal y distancia)

Sea $\mathcal{W}$ un subespecie vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$, y sea $\vec{v} \in \mathcal{V}$.
Entonces para todo $\vec{w} \in \mathcal{W}$, $\vec{w} \neq proy_{\mathcal{W}}\vec{v}$

$$d(\vec{v}, proy_{\mathcal{W}}\vec{v}) < d(\vec{v}, \vec{w})$$

☛ $proy_{\vec{w}}\vec{v}$ es el vector de $\mathcal{W}$ que está a menor distancia de $\vec{v}$.



Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Definición (Complemento ortogonal)

Sea $\mathcal{W}$ un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$.
El **complemento ortogonal** *de $\mathcal{W}$, denotado $\mathcal{W}^\perp$ es*

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{ \vec{x} \in \mathcal{V} \mid \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0, \ \textit{para todo } \vec{w} \in \mathcal{W} \right\}$$

Teorema

Sea $\mathcal{W}$ un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. Entonces

1. *$\mathcal{W}^\perp$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.*
2. $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\vec{0}\}$
3. *Si* $\dim \mathcal{V} = n$, *entonces* $\dim \mathcal{W}^\perp = n - \dim \mathcal{W}$.

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Ejercicio

En $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{W}$ generado por el sistema de vectores

$$\left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right.$$

1. Halla una base de $\mathcal{W}^\perp$.
2. Comprueba el teorema anterior.

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Teorema (Descomposición ortogonal)

Sea $\mathcal{W}$ un subespacio vectorial finito de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$. Entonces todo vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ tiene una representación única de la forma

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

donde $\vec{v}_1 \in \mathcal{W}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{W}^{\perp}$.

Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ se determinan muy fácilmente pues, respectivamente, son la proyección ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\mathcal{W}$ y la componente de $\vec{v}$ ortogonal a $\mathcal{W}$.

$$\vec{v}_1 = proy_{\mathcal{W}}\vec{v}$$
$$\vec{v}_2 = \vec{v} - proy_{\mathcal{W}}\vec{v}$$

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Ejemplo

Sea el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y el subespacio $\mathcal{W} = \mathcal{L}\Big(\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}\Big)$.

La **proyección ortogonal** del vector $\vec{v}$ **sobre** el subespacio $\mathcal{W}$ es

$$proy_{\mathcal{W}}\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (-\frac{1}{5})\begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}$$

La **componente de** $\vec{v}$ **ortogonal a** $\mathcal{W}$ es

$$\vec{v} - proy_{\mathcal{W}}\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/25 \\ 0 \\ 28/25 \end{pmatrix}$$

Espacio vectorial euclídeo

Existencia de bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

Teorema

Todo espacio euclídeo de dimensión finita tiene una base ortonormal.

La demostración desarrolla el **Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt**

1. En primer lugar, partiendo de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ se construye una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$
2. A continuación, normalizando los vectores de $\mathcal{B}'$, se forma la base ortonormal $\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$

Espacio vectorial euclídeo

Método de Gram-Schmidt

Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle\ \rangle)$.

1. Se forma la base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$, donde los $\vec{w}_j$ son

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= \vec{v}_1 \\
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1\rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1 \\
\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1\rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2\rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2\rangle}\vec{w}_2 \\
&\vdots \\
\vec{w}_n &= \vec{v}_n - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_1\rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1\rangle}\vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_2\rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2\rangle}\vec{w}_2 \dots - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_{n-1}\rangle}{\langle \vec{w}_{n-1}, \vec{w}_{n-1}\rangle}\vec{w}_{n-1}
\end{aligned}$$

$\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ es una base ortogonal de $\mathcal{V}$.

2. Normalizando los vectores de $\mathcal{B}'$ obtenemos la siguiente base ortonormal

$$\mathcal{B}'' = \{\frac{1}{\|\vec{w}_1\|}\vec{w}_1, \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2, \dots, \frac{1}{\|\vec{w}_n\|}\vec{w}_n\}$$

Espacio vectorial euclídeo

Método de Gram-Schmidt

Ejemplo

Aplique el método de Gram-Schmidt a la siguiente base de $\mathbb{R}^3$

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Primero formamos la base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

$$\begin{aligned}
\vec{w}_1 &= \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{w}_2 &= \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{w}_3 &= \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1}\vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2}\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1/2} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Espacio vectorial euclídeo

Existencia de bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

Luego

$$\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

Normalizando cada vector de la base $\mathcal{B}'$ obtenemos $\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

$$\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \frac{1}{\|\vec{w}_1\|}\vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{u}_2 &= \frac{1}{\|\vec{w}_2\|}\vec{w}_2 = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\vec{u}_3 &= \frac{1}{\|\vec{w}_3\|}\vec{w}_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Ejercicio

En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{L}$ generado por el sistema de vectores

$$\Big\{(1,1,1,1),(1,-2,1,-2),(1,0,1,0),(3,-2,3,-2)\Big\}$$

1. Define el complemento ortogonal de $\mathcal{L}$
2. Estudia si $\mathcal{L}^{\perp}$ es un subespacio vectorial y, en caso afirmativo, halla una base.
3. Dado el vector $\vec{v}=(2,0,1,0)$, halla vectores $\vec{v}_1 \in \mathcal{L}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{L}^{\perp}$ tales que $\vec{v}=\vec{v}_1 \oplus \vec{v}_2$.

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Ejercicio

En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\mathcal{W}_1=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1-x_2 &=& 0\\ 2x_2-x_3 &=& 0\end{array}\right\},\quad \mathcal{W}_2=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1+ax_2+bx_3 = 0\right\}$$

1. Calcula los valores de a y b para que $\mathcal{W}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{W}_2$.
2. Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{W}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{W}_2$ tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Diagonalización ortogonal

Definiciones (Aplicación ortogonal, Matriz ortogonal)

- Una aplicación lineal se dice **ortogonal** si conserva el producto escalar.
- Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si $Q^tQ = \mathrm{I}$. Es decir, $Q^t = Q^{-1}$.

Teorema

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^n$ y sea P la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}$ a la base canónica $\mathcal{C}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base ortonormal si y sólo si P es una matriz ortogonal.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo

La matriz ortogonal $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio de la base

ortonormal $\mathcal{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a la base canónica.

Diagonalización ortogonal

Definición (Matriz diagonalizable ortogonalmente)

Se dice que una matriz A es **diagonalizable ortogonalmente** *si existe una matriz ortogonal P tal que $P^t AP = D$.*

Ejemplo

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La matriz A es diagonalizable ortogonalmente, ya que

$$P^t AP = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Teorema

Una matriz A de orden n es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A tiene un sistema de n vectores propios ortonormales.

Teorema

Si una matriz A es diagonalizable ortogonalmente, entonces es simétrica.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (Diagonalización ortogonal)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2,$ multiplicidad 2

$\lambda_2 = 5,$ multiplicidad 1

Sus **subespacios propios** son:

$$\mathcal{U}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\} = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathcal{U}_5 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x-z=0 \wedge y-z=0\} = \mathcal{L}\left[\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios de A

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

- Podemos observar que
  $\vec{v}_3$ es ortogonal a $\vec{v}_1$ y a $\vec{v}_2$; pero $\vec{v}_1$ **no** es ortogonal a $\vec{v}_2$.
- Ortogonalizando la base de $\mathcal{U}_2$, obtenemos la base

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Ahora, la base de vectores propios $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}$ ya es ortogonal.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios ortogonales de A

$$\left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Normalizando nos queda una base de vectores propios ortonormal

$$\left\{ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.) Así, obtenemos la diagonalización ortogonal de la matriz simétrica A,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = P^t A P = P^t \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} P$$

donde P es la matriz ortogonal siguiente

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

- En este ejemplo ha sido decisivo que el vector propio $\vec{v}_3$ correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 5$ fuese **ortogonal** a los vectores propios $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ correspondientes a $\lambda_1 = 2$.
- El siguiente teorema muestra que esta **ortogonalidad** no es casual, sino que es una consecuencia de la **simetría** de A.

Teorema

Si una matriz A es simétrica, entonces los vectores propios que pertenecen a subespacios propios distintos son ortogonales.

Diagonalización ortogonal

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces:

1. *A sólo tiene valores propios reales.*
2. *Si un valor propio λ tiene orden de multiplicidad k, la dimensión del subespacio propio $\mathcal{U}_\lambda$ es k.*

Corolario

Toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable ortogonalmente.

Diagonalización ortogonal

Procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica A

1. Se encuentra una base para cada subespacio propio de A.
2. Se aplica el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases para obtener una base ortonormal de cada subespacio propio.
3. Se forma una matriz P cuyas columnas son los vectores de las bases ortonormales obtenidas.

   Esta matriz diagonaliza ortogonalmente a la matriz A.

$$P^t A P = D$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo

Diagonaliza ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución:

1. Se encuentra una base para cada subespacio propio de A.
   - Los valores propios son $\begin{cases} \lambda_1 = 2, & \alpha_1 = 2 \\ \lambda_2 = 8, & \alpha_2 = 1 \end{cases}$
   - Los subespacios propios son:

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \qquad \mathcal{U}_8 = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Diagonalización ortogonal

Solución (cont.):

2. Se aplica el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases para obtener una base ortonormal de cada subespacio propio.

$$\mathcal{U}_2 = \mathcal{L}\Big[\vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \ \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\Big] \qquad \mathcal{U}_8 = \mathcal{L}\Big[\vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\Big]$$

3. Se forma una matriz P cuyas columnas son los vectores de las bases ortonormales obtenidas.

$$P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Se puede comprobar que, efectívamente, $P^tAP = D = diag(2, 2, 8)$

Bibliografía

Álgebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Álgebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Álgebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal y sus aplicaciones David C. Lay (Ed. Pearson)

Álgebra lineal R. Larson, B.H. Edwards y D.C. Falvo (Ed. Pirámide)

Álgebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Álgebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)