UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

Estructuras Algebraicas para la Computación

9 de junio de 2014

Apellidos y Nombre: ....

DNI: .... **Grado:** .... **Grupo:** ......

1. (1.5 pt.) Sea Σ un alfabeto finito. Demuestre que:

   a) El conjunto Σ^* es numerable.

   b) El conjunto $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ es no numerable.

2. (1.5 pt.) Se consideran los retículos $(D_{24}, |)$, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ donde $X = \{a, b, c, d\}$ y $\left(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq\right)$. Se pide:

   a) Estudiar si son álgebras de Boole. En caso afirmativo, definir, si es posible, un isomorfismo entre dos de ellas.

   b) Hallar, si es posible, las formas normales de los siguientes elementos: $4 \in D_{24}$, $\{b, c\} \in \mathcal{P}(X)$ y $f(x, y) = x$

   c) Dar los elementos notables de $A = \{4, 6, 12\} \subseteq D_{24}$.

3. (2 pt.) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^5$ con las operaciones habituales se consideran los siguientes subespacios U y V dados por:

$$U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 - x_3 + x_5 = 0\ ,\ x_2 - 2x_4 = 0\}$$

$$V = \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & a \\ x_2 & = & a - 2b \qquad a, b \in \mathbb{R} \\ x_3 & = & a + b \\ x_4 & = & a - b \\ x_5 & = & b \end{array} \right.$$

   a) Halle una base y la dimensión de los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.

   b) Compruebe el teorema de la dimensión.

   c) Determine una base del complemento ortogonal del subespacio U.

4. (1 pt.) Estudie qué propiedades verifican la suma y el producto usual de matrices definidas en el conjunto

$$\mathcal{M} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   y determine su estructura.

5. (2 pt.) Sea la aplicación lineal $\boldsymbol{f}: \mathbb{R}_3(\boldsymbol{x}) \to \mathbb{R}_3(\boldsymbol{x})$ definida de la siguiente forma $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})) = \boldsymbol{p}''(\boldsymbol{x})$. Se pide:

   a) Demostrar que $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\mathbf{1}, \mathbf{1}+\boldsymbol{x}, \mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2, \mathbf{1}+\boldsymbol{x}+\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{x}^3\}$ es una base de $\mathbb{R}_3(\boldsymbol{x})$.

   b) Hallar la matriz asociada a $\boldsymbol{f}$ respecto de la base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$.

   c) Obtener $\boldsymbol{Ker}(\boldsymbol{f})$ e $\boldsymbol{Im}(\boldsymbol{f})$.

   d) Deducir si $\boldsymbol{f}$ es inyectiva y/o sobreyectiva.

6. (2 pt.) Sea la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

   - Determinar los valores del parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ tales que:

     a) $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{-3}$ sea un valor propio.

     b) $\vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ sea un vector propio.

     c) $\boldsymbol{A}$ sea diagonalizable.

   - Asignar un valor adecuado al parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ y hallar una base de vectores propios y la matriz de paso.

NORMAS DEL EXAMEN:

Numerar todos los folios y escribir tus datos en todos ellos, incluido éste.
Escribir en azul o negro.
Razonar todas las respuestas.
No se puede usar calculadora.