Sistemas de Ecuaciones Lineales

Manuel Ojeda Aciego

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 2015-2016

Ecuaciones Lineales

Definición

Una **ecuación lineal en n variables** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *tiene la forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Los coeficientes $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *y* b *son elementos de un cuerpo* $\mathcal{K}$.

- ✓ Trabajaremos habitualmente con el cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales, aunque también se pueden usar los números reales $\mathbb{R}$ o los números complejos $\mathbb{C}$.
- ✓ Las primeras letras del abecedario se usan para representar las constantes y las últimas para representar variables.

$a, b, c, \ldots$	constantes
$x, y, z, \ldots$	variables

Ecuaciones Lineales

Ecuaciones lineales y ecuaciones no lineales

Ejemplo

- Las ecuaciones siguientes son lineales:

$$\begin{array}{rlrl} (i) & 3x + (\log 5)y = 7 & (ii) & \frac{1}{2}x + y - \pi z = \sqrt{2} \\ (iii) & 2x_1 - 5x_2 + x_3 = 18 & (iv) & \left(sen\frac{\pi}{7}\right)x_1 - 4x_2 = e^2 \end{array}$$

- Y son ecuaciones no lineales:

$$\begin{array}{rlrl} (v) & xy + z = 2 & (vi) & \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 4 \\ (vii) & \operatorname{sen} x_1 2x_2 - 3x_3 = \sqrt{2} & (viii) & e^x - 2y = 0 \end{array}$$

☛ Las ecuaciones lineales **no** contienen raíces, ni funciones trigonométricas, exponenciales o logarítmicas **aplicadas sobre variables**.

☛ Las variables aparecen sólo elevadas a la **primera** potencia.

Ecuaciones Lineales

- Nos planteamos determinar todos los valores de las variables (**incógnitas**) $x_1, x_2, \cdots, x_n$, que verifiquen la ecuación

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

Definición

Una **solución** *de la ecuación lineal* $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$ *es una sucesión* $s_1, s_2, \cdots, s_n$ *de elementos del cuerpo* $\mathcal{K}$*, tales que al sustituir* $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ *se cumple la igualdad.*

Ejemplo

$x_1 = 3,\ x_2 = -1,\ x_3 = 7$ es una solución de

$$2x_1 - 5x_2 + x_3 = 18$$

pues, $2 \cdot 3 - 5 \cdot (-1) + 7 = 18$ pero **no es la única** solución, ya que $x_1 = 2$, $x_2 = -4,\ \ x_3 = -6$ también lo es.

Ecuaciones Lineales

Definición

Se llama **conjunto solución** *al conjunto de todas las soluciones de una ecuación lineal.* **Resolver** *una ecuación lineal es hallar el conjunto solución.*
Se dice que dos ecuaciones son **equivalentes** *si tienen el mismo conjunto solución.*

Para describir el conjunto solución de una ecuación se suele utilizar una **representación paramétrica**

Ejemplos (Representación paramétrica del conjunto solución)

Resuelva las siguientes ecuaciones lineales en $\mathbb{R}$:

$$x_1 + 2x_2 = 4 \qquad\qquad x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 6$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definición

Un **sistema de** m **ecuaciones lineales con** n **incógnitas**, *o simplemente un* **sistema lineal**, *es un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Un sistema lineal viene dado por:*

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right.$$

Los subíndices de los coeficientes a_{ij} se leen de la siguiente manera:

- el primer subíndice i corresponde a la ecuación i-ésima,
- el segundo subíndice j se asocia con la j-ésima variable x_j.

Así, la i-ésima ecuación es $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplos

1. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 7z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

2. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

3. $$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Definiciones

- Una **solución** de un sistema lineal es una sucesión de n escalares $s_1, s_2, \cdots, s_n$ que es solución de todas y cada una de las ecuaciones del sistema.
  Es decir, los escalares $s_1, s_2, \cdots, s_n$ tienen la propiedad de que al tomar $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \cdots, x_n = s_n$ las m ecuaciones se convierten en igualdades.
- **Resolver** el sistema consiste en hallar el conjunto de todas sus soluciones.
- Se dice que un sistema lineal es **compatible** si tiene solución.
- Si la solución es única, se llama **sistema compatible determinado** (S.C.D.) y se llama **sistema compatible indeterminado** (S.C.I.) si hay más de una. (En el caso de estar trabajando en $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ habrá infinitas soluciones).
- Se llama **sistema incompatible**(S.I.) si no tiene solución.

Hay autores que llaman **consistentes** a los sistemas que tienen solución. Y a los sistemas que no tienen solución les llaman **inconsistentes**.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Ejemplos

- El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

  tiene solución única: $x_1 = 1, \quad x_2 = -2, \quad x_3 = 3$

- El sistema

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & 2 \\ 2x & + & 3y & + & 7z & = & 3 \\ 3x & - & y & + & 5z & = & 1 \end{array}\right.$$

  es incompatible.

Sistemas equivalentes. Operaciones elementales

Definiciones

Se dice que dos sistemas de ecuaciones lineales (con las mismas incógnitas) son **equivalentes** si tienen el mismo conjunto solución.

Dado un sistema de ecuaciones lineales podemos pasar a otro sistema equivalente realizando cualquiera de las siguientes manipulaciones:

1. Intercambiar el orden en el que figuran las ecuaciones en el sistema.
2. Multiplicar una de las ecuaciones por cualquier escalar no nulo.
3. Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

A cada una de estas estas operaciones se le llama **operación elemental**.

La aplicación sucesiva de operaciones elementales sobre las ecuaciones de un sistema lineal permite pasar de un sistema lineal a otro que, *teniendo las* **mismas** *soluciones que el planteado inicialmente*, es más fácil de resolver.

Transformación mediante operaciones elementales I

Se considera el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 14 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

- Para eliminar x_1, restamos 2 veces la primera ecuación a la segunda y restamos 3 veces la primera ecuación a la tercera,

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ & - & 5x_2 & - & 10x_3 & = & -20 \end{array}\right.$$

- Ahora multiplicamos la tercera ecuación por $-1/5$ y obtenemos

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array}\right.$$

Transformación mediante operaciones elementales II

- Ahora al intercambiar las ecuaciones segunda y tercera obtenemos

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & - & 7x_2 & - & 4x_3 & = & 2 \end{array}\right.$$

- Y al sumar 7 veces la segunda ecuación a la tercera, podremos eliminar x_2.

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 6 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

- La importancia del procedimiento reside en el hecho de que los sistemas lineales inicial y final tienen **exactamente** las mismas soluciones.
- El sistema final tiene la ventaja de que se puede resolver fácilmente y da como resultado los valores obtenidos para x_1, x_2 y x_3.
- Podemos usar la **representación matricial** para simplificar los cálculos.

Expresión matricial de un sistema lineal

Dado el sistema lineal de m ecuaciones y n incógnitas

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right.$$

se definen las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

que permiten reescribir el sistema de la forma $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Expresión matricial de un sistema lineal

La matriz A es la **matriz de coeficientes** del sistema lineal, mientras que

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

es la **matriz aumentada** del sistema lineal.

- ✔ Las matrices de coeficientes y la aumentada tienen una función esencial en la resolución de sistemas lineales.
- ✔ A continuación, estudiamos cómo sistematizar la reducción de incógnitas de un sistema mediante manipulaciones en la matriz asociada.

Matrices escalonadas. Sistemas escalonados.

Definición (Matrices escalonadas)

Una matriz $m \times n$ está en **forma escalonada por filas** *si verifica:*

1. *Todas las filas que constan sólo de ceros, si las hay, están en la parte inferior de la matriz.*
2. *En cada fila, al leer de izquierda a derecha, la primera entrada distinta de cero, llamada* **entrada principal** *de su fila, es un 1.*
3. *Si las filas i y $i+1$ son consecutivas y no constan completamente de ceros, entonces la entrada principal de la fila $i+1$ está a la derecha de la entrada principal de la fila i.*

Una matriz escalonada por filas se dice que está en **forma escalonada reducida por filas** *si además verifica:*

4. *Si una columna contiene una entrada principal de alguna fila, entonces el resto de las entradas de esta columna son iguales a cero.*

Matrices escalonadas. Sistemas escalonados.

Ejemplo

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz B está en forma escalonada, mientras que A y C, además, están en forma reducida.

Definición (Sistemas escalonados)

Un sistema de ecuaciones lineales se dice que es un **sistema escalonado** *si su matriz de coeficientes es escalonada. Y se dice que es un* **sistema escalonado reducido** *si su matriz es escalonada reducida.*

Matrices escalonadas

Mediante operaciones elementales por filas se puede transformar una matriz A en una matriz U escalonada reducida.

.

Ejemplo

Realizando la operación elemental $f_2 + (-2)f_1 \longrightarrow f_2$ sobre las filas de la matriz $(A|b)$, se obtiene la matriz $(A_1|b_1)$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 2 & 14 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2+(-2)f_1} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) = (A_1|b_1)$$

y así sucesivamente.

Terminar la transformación a matriz escalonada.

Matrices equivalentes por filas

Definición (Matrices equivalentes)

Una matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ *es* **equivalente por filas** *a una matriz* $B \in \mathcal{M}_{mn}$*, si efectuando una serie finita de operaciones elementales sobre las filas de* A*, se puede obtener* B*.*

La equivalencia por filas de matrices verifica las propiedades **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**. Por tanto, se trata de una **relación de equivalencia** en el conjunto de matrices $\mathcal{M}_{mn}$. En cada clase estarán todas las matrices equivalentes entre sí.

Teorema

Toda matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}$ *distinta de cero es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada reducida por filas.*

Transformación a forma escalonada reducida I

Queremos pasar una matriz A a forma escalonada, por ejemplo, sea

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Paso 1.** Determinar (de izquierda a derecha) la primera

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{0} & 2 & 3 & -4 & 1 \\ \boxed{0} & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ \boxed{2} & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Columna pivote de A

Transformación a forma escalonada reducida II

- **Paso 2.** Identificar (de arriba hacia abajo) la primera entrada distinta de cero en la columna pivote.

  Este elemento es el **pivote**, que señalamos mediante un cuadrado.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Pivote

- **Paso 3.** Intercambiar, en caso necesario, la primera fila con la fila donde aparece el pivote, de modo que éste se encuentre ahora en la primera fila. Llamamos a esta nueva matriz A_1.

$$A_1 = \begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & -5 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

Transformación a forma escalonada reducida III

- **Paso 4.** Multiplicar la primera fila de A_1 por el inverso del pivote, así obtenemos la **entrada principal**.

  A la nueva matriz la llamamos A_2.

$$A_2 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 2 & 0 & -6 & 9 & 7 \end{pmatrix}$$

- **Paso 5.** Sumar múltiplos de la primera fila a las demás filas, para hacer igual a cero todas las entradas de la columna pivote, excepto la entrada principal.

  Llamaremos a la nueva matriz A_3.

$$A_3 = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Transformación a forma escalonada reducida IV

- **Paso 6.** Eliminar la 1ª fila de A_3 y aplicar pasos 1–5 a la submatriz B que resulta.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{0} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & \boxed{-2} & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{2} & 3 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 7 & 3 \end{pmatrix} \sim B_3 = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Transformación a forma escalonada reducida V

- **Paso 7.** Eliminar la 1ª fila de B_3 y repetir pasos 1–5 a la submatriz C que resulta.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim C_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{2} & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\sim C_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim C_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Transformación a forma escalonada reducida VI

- **Paso 8.** Sea D la matriz que consta de las filas eliminadas seguidas de las filas de la matriz C_3 del paso 7. Efectuar las operaciones elementales necesarias para anular todas las entradas que aparezcan por encima de las entradas principales.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim D_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{5}{2} & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{19}{4} & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim D_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 9 & -\frac{19}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{17}{4} & -\frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

☛ La matriz final D_3 está en forma escalonada reducida por filas.

Soluciones de sistemas y matrices equivalentes

Teorema

Sean $Ax = b$ *y* $Cx = d$ *dos sistemas lineales de* m *ecuaciones y* n *incógnitas. Si las matrices aumentadas* $\left(A \mid b\right)$ *y* $\left(C \mid d\right)$ *son equivalentes por filas, entonces ambos sistemas tienen exactamente las mismas soluciones.*

Corolario

Sean $A, C \in \mathcal{M}_{mn}$. *Si* A *y* C *son equivalentes por filas, entonces los sistemas lineales* $Ax = 0$ *y* $Cx = 0$ *tienen exactamente las mismas soluciones.*

Existencia de soluciones

✓ Como no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución, dado un sistema lineal es razonable plantearse, en primer lugar, si es compatible.

✓ El siguiente resultado nos enseña cómo se puede detectar la incompatibilidad de un sistema.

Teorema (Rouché-Fröbenius)

(a) *El sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ es incompatible si y sólo si su matriz aumentada $\left(A \mid b\right)$ es equivalente por filas a una matriz en forma escalonada reducida por filas $\left(U \mid c\right)$ que tiene una fila en la que los n primeros elementos son iguales a cero y el último elemento es distinto de cero.*

(b) *Un sistema es compatible si y solo si el rango de su matriz asociada coincide con el de la matriz ampliada.*

Ejemplo de estudio de existencia de soluciones I

Sea el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 2 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 2 \end{array}\right.$$

Realizando operaciones elementales de fila en la matriz aumentada resulta

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(A_1 \mid b_1\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(A_1 \mid b_1\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(U \mid c\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ejemplo de estudio de existencia de soluciones II

- ✓ Hemos llegado a una matriz escalonada reducida que tiene una fila cuyos 4 primeros elementos son iguales a cero y el último es igual a 1.
- ✓ El sistema lineal $Ax = b$ es equivalente al sistema correspondiente a la matriz $\big(U \mid c\big)$.
- ✓ Y este sistema es incompatible claramente,pues su última ecuación

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 1$$

no se puede satisfacer para ningún valor de las incógnitas.

Método de Gauss-Jordan

Para resolver un sistema lineal $Ax = b$ procedemos así:

Paso 1.- Formar la matriz aumentada $\left(A \mid b\right)$.

Paso 2.- Mediante operaciones elementales de filas, transformar la matriz aumentada $\left(A \mid b\right)$ a su forma escalonada reducida por filas $\left(U \mid c\right)$.

Paso 3.- En cada fila distinta de cero de la matriz $\left(U \mid c\right)$ se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de la fila. Las filas que constan completamente de ceros se pueden ignorar.

Método de Gauss-Jordan I

Un ejemplo

Usando el método de Gauss-Jordan para resolver el sistema lineal

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

Paso 1.- La matriz aumentada es

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{cccr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right)$$

Método de Gauss-Jordan II

Un ejemplo

Paso 2.- Realizamos operaciones elementales de fila en la matriz aumentada $\left(A \mid b\right)$ para obtener la matriz escalonada reducida por filas equivalente $\left(U \mid c\right)$.

$$\left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim \left(A_1 \mid b_1\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(A_2 \mid b_2\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(A_3 \mid b_3\right) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Método de Gauss-Jordan III

Un ejemplo

$$\left(A_3 \mid b_3\right) = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(A_4 \mid b_4\right) = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(U \mid c\right) = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Método de Gauss-Jordan IV

Un ejemplo

Paso 3.- En cada fila distinta de cero de la matriz $(U \mid c)$, se despeja la incógnita correspondiente a la entrada principal de la fila

$$(U \mid c) = \left(\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Longrightarrow \begin{array}{ccccc} x_1 & = & 1 & + & x_4 \\ x_2 & = & 3 & - & x_4 \\ x_3 & = & 1 & - & x_4 \\ x_4 & = & & & x_4 \end{array}$$

- Este sistema lineal es **compatible indeterminado**.
- El conjunto solución S se puede especificar así

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 1 + x_4, \quad x_2 = 3 - x_4, \quad x_3 = 1 - x_4\}$$

Método práctico para calcular la matriz inversa

El procedimiento consta de los siguientes pasos:

Paso 1. Formar la matriz $(A \mid \mathrm{I}_n)$.

Paso 2. Transformar $(A \mid \mathrm{I}_n)$ a su forma escalonada reducida por filas.

Paso 3. Sea $(U \mid C)$ la matriz escalonada reducida por filas.

- **3.1** Si $U = \mathrm{I}_n$, entonces $C = A^{-1}$.
- **3.2** Si $U \neq \mathrm{I}_n$, entonces U tiene una fila de ceros.
  En este caso, A no es invertible, no existe A^{-1}.

Método práctico para calcular la matriz inversa I

Ejemplo desarrollado

Queremos determinar la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Paso 1. Formamos la matriz $(A \mid \mathtt{I}_n)$.

$$(A \mid \mathtt{I}_n) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Paso 2. Se transforma la matriz $(A \mid \mathtt{I}_n)$ a su forma escalonada reducida por filas.

$$(A \mid \mathtt{I}_n) = \left(\begin{array}{rrr|rrr} \boxed{1} & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3 - 2f_1} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Método práctico para calcular la matriz inversa II

Ejemplo desarrollado

Paso 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{f_3-2f_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

==

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1-2f_3]{f_2+f_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{f_1+f_2} (U|C) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

Método práctico para calcular la matriz inversa III

Ejemplo desarrollado

Paso 3. La matriz escalonada reducida por filas es

$$(U|C) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array} \right)$$

Ya que $U = \mathtt{I}$, entonces

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Factorización LU

Definición

Sea $A \in \mathcal{M}_{mn}$. Si la matriz A se puede escribir como producto de una matriz triangular inferior L y una triangular superior U, se dice que $A = LU$ es una **factorización** *LU de A.*

Ejemplos

(a) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

(b) $$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = LU$$

Factorización LU

Resolución de sistemas usando factorización LU

Sea A una matriz de tamaño $m \times n$ para la que conocemos una factorización LU. Entonces el sistema lineal $Ax = b$ se puede resolver en dos pasos más fáciles:

$$Ax = LUx = L(Ux) = Ly = b, \quad Ux = y$$

1. Se despeja y de la ecuación $Ly = b$
2. Se despeja x de la ecuación $Ux = y$

Factorización LU

Resolución de sistemas usando factorización LU

Ejemplo

Resuelva el sistema de ecuaciones

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 70 \\ 17 \end{pmatrix}$$

usando la siguiente factorización LU

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Factorización LU

Resolución de sistemas usando factorización LU

Solución

$$Ax = LUx = L(Ux) = b$$

1. Se resuelve el sistema triangular inferior $Ly = b$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcll} y_1 & & & & & = & 11 & \Longrightarrow & y_1 & = & 11 & & \\ 5y_1 & + & y_2 & & & = & 70 & \Longrightarrow & y_2 & = & 70 - 5y_1 & = & 15 \\ -2y_1 & + & 3y_2 & + & y_3 & = & 17 & \Longrightarrow & y_3 & = & 17 + 2y_1 - 3y_2 & = & -6 \end{array}\right.$$

2. Se resuelve el sistema $Ux = y$ por sustitución

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 4x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & 11 & \Longrightarrow & x_1 & = & 1 \\ & & 3x_2 & + & 7x_3 & = & 15 & \Longrightarrow & x_2 & = & -2 \\ & & & - & 2x_3 & = & -6 & \Longrightarrow & x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Factorización LU

¿Cómo obtener la factorización LU?

Evidentemente, el principal problema para aplicar el método anterior reside en factorizar la matriz A del sistema.

El siguiente resultado nos indica cómo factorizar una matriz.

Teorema

Si A es una matriz $m \times n$ que se puede reducir a triangular superior U

*(**sin intercambios de fila**)* $\Longleftarrow$ *ojo con esto, es importante*

entonces A se puede escribir como $A = L \cdot U$ donde L es una matriz $m \times m$ triangular inferior con unos en la diagonal principal.

El elemento $\boldsymbol{\ell}_{\mathbf{ij}}$ $(i > j)$ de L proviene de la operación elemental

$f_i - \boldsymbol{\ell}_{\mathbf{ij}} f_j$ $\Longleftarrow$ *ojo con esto, es importante*

*que se usó para hacer **0** en la posición ij durante la reducción.*

Factorización LU

¿Cómo obtener la factorización LU? Un ejemplo resuelto

Ejemplo

Hallar la factorización LU de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix}$

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 20 & -7 & 12 \\ -8 & 13 & 17 \end{pmatrix} \xrightarrow[f_3+(\mathbf{2})f_1]{f_2+(-\mathbf{5})f_1} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 9 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_3+(-\mathbf{3})f_2} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = U$$

Recogiendo los datos, directamente obtenemos

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{5} & 1 & 0 \\ -\mathbf{2} & \mathbf{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Definición

Una matriz $E \in \mathcal{M}_{n\times n}$ se llama **matriz elemental** *si se puede obtener de la matriz identidad I_n mediante* **una única** *operación elemental por filas.*

$$(a)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&3&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(d)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\end{pmatrix} \qquad (e)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$(f)\ \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{pmatrix} \qquad (g)\ \begin{pmatrix}1&0&0&7\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

Matrices elementales

Teorema

Sea E la matriz elemental obtenida al efectuar una operación elemental sobre las filas de $\mathcal{I}_n$. El resultado de efectuar esa misma operación elemental sobre las filas de A coincide con el producto $E \cdot A$.

$$(a)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 0 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(b)\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 0 \\ 2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrices elementales

No todas las matrices cuadradas son invertibles. Sin embargo,

Teorema

Toda matriz elemental es invertible, y su inversa también es elemental.

- Para hallar la inversa de una matriz elemental E basta invertir la operación elemental utilizada para obtener E.

$$(E_1)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 1 \end{pmatrix}$$

$$(E_2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathbf{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$