# Espacios Vectoriales

Mariam Cobalea Vico

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 16/17

# Espacios Vectoriales

## El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

Dado el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales, el producto de $\mathbb{R}$ por sí mismo, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se denota $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Llamaremos

- ☞ **vectores** a los elementos de $\mathbb{R}^2$
- ☞ **escalares** a los elementos del cuerpo $\mathbb{R}$

# Espacios Vectoriales

## El espacio $\mathbb{R}^2$

### Definiciones (Suma de vectores en $\mathbb{R}^2$, producto por un escalar)

En $\mathbb{R}^2$ se define la operación **suma** de vectores de la forma:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\vec{x}, \vec{y}) & \mapsto & \vec{x} + \vec{y} \end{array} \qquad \vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

La operación **producto** de un **escalar** $c \in \mathbb{R}$ por un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (c, \vec{x}) & \mapsto & c \cdot \vec{x} \end{array} \qquad c \cdot \vec{x} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Las operaciones de suma y producto por un escalar se pueden definir en general, en un producto de $n$ copias de $\mathbb{R}$, dando lugar al espacio $\mathbb{R}^n$.

# Espacios Vectoriales

## El espacio $\mathbb{R}^n$: Propiedades de la suma y el producto por un escalar

### Teorema

*Dados vectores* $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ *y escalares* c, d $\in \mathbb{R}$, *se cumplen las siguientes igualdades*

1. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
3. $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
4. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
5. $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
6. $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
7. $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
8. $1\vec{u} = \vec{u}$

✓ Usando estas propiedades se pueden realizar manipulaciones algebraicas de los vectores de $\mathbb{R}^n$ de manera muy similar a como se hace con números reales.

# Espacios Vectoriales

Muchos conceptos matemáticos (tales como matrices, polinomios y funciones) comparten también estas propiedades.

**Definición (Espacio vectorial sobre un cuerpo)**

*Se dice que un conjunto* $\mathcal{V}$ *es un* **espacio vectorial** *sobre un cuerpo* $\mathcal{K}$ *si se tienen definidas:*

- *una operación interna* $+: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ *tal que* $(\mathcal{V}, +)$ *es grupo abeliano, esto es, se cumplen las propiedades 1, 2 , 3 y 4 del teorema anterior.*
- *una ley de composición externa* $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ *que verifica las propiedades 5, 6 , 7 y 8 del teorema anterior.*

# Espacios Vectoriales

## Ejemplos (de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$)

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ de las $n$-tuplas ordenadas de números reales con las operaciones usuales.
- El conjunto $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de matrices $m \times n$, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathbb{R}_k(x)$ de los polinomios de grado menor o igual que $k$, es decir, de la forma $p(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, donde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ son números reales, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ de las funciones reales definidas en el intervalo $[0,1]$. La suma está definida como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $(c \cdot f)(x) = c \cdot \left[ f(x) \right]$
- El conjunto $\mathcal{C}([a,b])$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$.

# Espacios Vectoriales

## Algunas propiedades de los vectores

### Teorema

*Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Para cualesquiera $c, d \in \mathcal{K}$ y $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ se verifica:*

1. $0\vec{v} = \vec{0}$
2. $c\vec{0} = \vec{0}$
3. *Si* $c\vec{v} = \vec{0}$, *entonces* $c = 0$ *ó bien* $\vec{v} = \vec{0}$.
4. $(-c)\vec{v} = -(c\vec{v}) = c(-\vec{v})$
5. $c(\vec{u} - \vec{v}) = c\vec{u} - c\vec{v}$
6. $(c - d)\vec{v} = c\vec{v} - d\vec{v}$
7. *Si* $c\vec{v} = d\vec{v}$ *y* $\vec{v} \neq \vec{0}$, *entonces* $c = d$
8. *Si* $c\vec{u} = c\vec{v}$, *y* $c \neq 0$, *entonces* $\vec{u} = \vec{v}$

# Espacios Vectoriales

## Subespacios vectoriales

### Definición (Subespacio vectorial)

*Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto no vacío del espacio vectorial $\mathcal{V}$. Se dice que $\mathcal{U}$ es* **subespacio vectorial** *de $\mathcal{V}$ si $\mathcal{U}$ tiene estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que $\mathcal{V}$.*

### Teorema (Caracterización de los subespacios vectoriales)

*Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ y sea $\emptyset \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$. Entonces $\mathcal{U}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$ si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si $\vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{U}$, entonces $\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathcal{U}$*
2. *Si $c \in \mathcal{K}$ y $\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{U}$, entonces $c\vec{\boldsymbol{v}} \in \mathcal{U}$*

# Espacios Vectoriales

## Subespacios vectoriales

### Ejemplo

El subconjunto $\mathcal{U} = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3\right\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

### Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el subconjunto $\mathcal{A}$ formado por las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

### Ejercicio

Sea $\mathcal{V}$ el espacio vectorial de las funciones reales de variable real. Demuestra que el conjunto de las funciones pares es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

# Espacios Vectoriales

## Unión e Intersección de subespacios vectoriales

### Definición (Intersección de subespacios vectoriales)

*La* **intersección** *de dos subespacios $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ es el conjunto de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que están en $\mathcal{U}_1$ y en $\mathcal{U}_2$.*

### Ejemplo

La intersección de los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0 \right\}$$

es

$$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 |\ x_1 = x_3 = 0 \right\}$$

### Teorema

*La intersección de dos subespacios vectoriales también es un subespacio vectorial.*

# Espacios Vectoriales

## Unión e Intersección de Subespacios vectoriales

### Definición (Unión de subespacios vectoriales)

*La* **unión** *de dos subespacios vectoriales* $\mathcal{U}_1$ *y* $\mathcal{U}_2$ *es el* *conjunto* *de todos los vectores de* $\mathcal{V}$ *que están en* $\mathcal{U}_1$ *o en* $\mathcal{U}_2$.

### Ejemplo

La unión de los subespacios

$$\mathcal{U}_1 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0 \right\}$$

es

$$\mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2 = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | \ x_1 = 0 \quad \text{ó} \quad x_3 = 0 \right\}$$

☛ En general, la **unión** de **subespacios vectoriales** **no** es un **subespacio**.

# Espacios Vectoriales

## Combinaciones lineales

Un conjunto de vectores suele recibir el nombre de **sistema de vectores**.

### Definición (Combinación lineal)

*Una* **combinación lineal** *de los vectores del sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \subset \mathcal{V}$ *es toda expresión de la forma*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

*donde* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son escalares.*

### Ejemplo

Dados los vectores $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, la expresión $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ es una combinación lineal del sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

# Espacios Vectoriales

## Combinaciones lineales

### Ejemplo

Por ser $\mathbb{R}^3$ un espacio vectorial, obtenemos

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Así, decimos que **el vector** $\begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}$ **se expresa como combinación lineal de los vectores** $\vec{v}_1, \vec{v}_2$.

En general, si un vector $\vec{v} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$, diremos que **el vector** $\vec{v}$ **se expresa como combinación lineal de los vectores** $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

# Espacios Vectoriales

## Combinaciones lineales

- El vector $\vec{0}$ se expresa como combinación lineal de cualquier sistema de vectores

$$\vec{0} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n$$

- Todo vector $v$ se puede expresar como combinación lineal de cualquier sistema al que pertenezca

$$\vec{v} = 0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + \cdots + 0\vec{v}_n + 1\vec{v}$$

## Combinación lineal

Sean los vectores

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si $\vec{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$.

*Solución:* Se deben determinar escalares $a$, $b$ y $c$ tales que

$$\vec{w} = a\vec{v_1} + b\vec{v_2} + c\vec{v_3}$$

# Espacios Vectoriales

## Combinaciones lineales

*Solución:* Escribimos

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & -b & + & 3c & = & -1 \\ a & + & b & + & c & = & -2 \\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2 \end{array}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

Por tanto, $\vec{w}$ se puede escribir como combinación lineal de $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ y $\vec{v_3}$

$$\vec{w} = \vec{v_1} - 2\vec{v_2} - \vec{v_3}$$

# Espacios Vectoriales

## Combinaciones lineales

### Ejercicio

En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, se consideran los vectores

$$p_1(x) = 2 - x + x^2, \quad p_2(x) = 2x + x^2, \quad p_3(x) = 4 - 4x + x^2$$

Estudia si $p_3(x)$ se puede expresar como combinación lineal de $p_1(x)$ y $p_2(x)$.

# Espacios Vectoriales

## Combinaciones lineales

### Ejercicio

En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, se consideran los vectores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Estudia si $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ se puede expresar como combinación lineal de

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

# Espacios Vectoriales

## Sistemas de generadores

### Teorema (Subespacio generado por un sistema de vectores)

*Sea* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *un sistema de vectores de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$.
*El conjunto de todas las combinaciones lineales*

$$\left\{ a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_p\vec{v}_p \mid a_1, \ldots, a_p \in \mathcal{K} \right\}$$

*es un subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$.

- Este subespacio se llama **subespacio generado** por $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ y se denota

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p)$$

- El sistema $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_p\}$ se llama **sistema generador** del subespacio.

# Espacios Vectoriales

## Sistemas de generadores

### Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, el sistema $\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ es un sistema generador del subespacio $\mathcal{W} = \left\{\vec{w} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\right\}$

En efecto, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{W} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Podemos encontrar otros sistemas generadores de $\mathcal{W}$, por ejemplo

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

# Espacios Vectoriales

## Sistemas de generadores

### Lema (Transitividad de las combinaciones lineales)

*Sean* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$ *sistemas de vectores de un espacio* $\mathcal{V}$. *Si un vector* $\vec{v}$ *se expresa como una combinación lineal de* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *y cada uno de éstos es, a su vez, combinación lineal de* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$, *entonces* $\vec{v}$ *también se podrá expresar linealmente en función de los vectores* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_m\}$.

### Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran los sistemas de vectores

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad y \quad \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

y el vector $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Puesto que $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$, entonces resulta

$$\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + 2(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = (1+2)\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

# Espacios Vectoriales

## Sistemas de generadores

### Definición (Sistemas equivalentes de vectores)

*Sean* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ *dos sistemas de vectores.*
*Se dice que son* **equivalentes** *si cada vector del primer sistema se expresa como combinación lineal de los vectores del segundo sistema y viceversa.*

### Ejemplo

Los sistemas

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ y } \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

son equivalentes, ya que

$$\begin{array}{rclcrcl}
\vec{v}_1 & = & 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3, & \qquad & \vec{u}_1 & = & \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\
\vec{v}_2 & = & 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3, & & \vec{u}_2 & = & \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\
\vec{v}_3 & = & \vec{u}_1 - \vec{u}_2, & & \vec{u}_3 & = & -\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\
\vec{v}_4 & = & \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 & & & &
\end{array}$$

# Espacios Vectoriales

## Sistemas de generadores

**Teorema (Criterio de equivalencia de sistemas de vectores)**

*Los sistemas* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ *son equivalentes si, y sólo si, generan el mismo subespacio, esto es, si* $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p) = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m)$

- ✓ La equivalencia de sistemas de vectores verifica las propiedades **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**. Por lo tanto es una **relación de equivalencia** en $\mathcal{V}$.
- ✓ Como toda relación de equivalencia particionará a $\mathcal{V}$ en **clases de equivalencia**.
- ✓ En cada clase estarán todos los sistemas que generen el **mismo** subespacio.

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Definición (Dependencia e Independencia lineal)

*Un sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es* **linealmente dependiente** *si algún vector del sistema se puede expresar como combinación lineal de los demás.*

*Es caso contrario, si ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás, se dice que el sistema es* **linealmente independiente***.*

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Ejemplos

- En $\mathbb{R}^3$ el sistema $\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$ es **linealmente dependiente**, ya que podemos encontrar la combinación lineal

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

- El sistema $\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ del mismo espacio vectorial es **linealmente independiente** puesto que ninguno de sus vectores se puede expresar como combinacion lineal de los demás.

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Ejemplos

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_2(x)$, el sistema $\{2 - x + x^2, 2x + x^2, 4 - 4x + x^2\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$4 - 4x + x^2 = 2(2 - x + x^2) - (2x + x^2)$$

- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el sistema $\left\{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B + C$$

## Teorema (Criterio de la dependencia lineal)

1. *El sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es* **linealmente dependiente** *si, y sólo si, existe alguna combinación lineal*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

   *con algún coeficiente* $a_i$ *no nulo.*

2. *El sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es* **linealmente independiente** *si, y sólo si, de toda combinación lineal*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

   *se deduce que* **todos** *los coeficientes* $a_i$ *son nulos.*

### Ejemplo

El sistema $\left\{\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente dependiente, ya que podemos encontrar una combinación lineal igual a $\vec{0}$ con algún coeficiente no nulo

$$2\vec{v_1} + 3\vec{v_2} - \vec{v_3} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Ejemplo

El sistema

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}\right\}$$

es **linealmente independiente**, ya que de cualquier combinación lineal igual a $\vec{0}$

$$a_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + a_3\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} = \vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

deducimos $a_1 = a_2 = a_3 = 0.$

☛ En general, si el sistema de ecuaciones resultante es escalonado, es inmediato deducir si los coeficientes $a_i$ necesariamente son todos nulos.

Podemos pasar de un sistema de vectores a otro sistema equivalente mediante las conocidas **transformaciones elementales**.

### Teorema

*Dado un sistema de vectores, pasamos a otro sistema equivalente si efectuamos* **una** *de las siguientes transformaciones:*

1. *Permutar dos vectores.*
2. *Multiplicar cualquier vector por un escalar distinto de cero.*
3. *Sumar a cualquier vector una* **combinación lineal** *de los vectores restantes.*
4. **Eliminar** *del sistema cualquier vector que sea combinación lineal de los vectores restantes.*

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Ejercicio

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcule un sistema escalonado equivalente a $\mathcal{S}$

*Solución:* Aplicando transformaciones elementales se obtienen los sistemas:

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 & = & (1,1,1) \\ \vec{u}_2 & = & (1,2,3) \\ \vec{u}_3 & = & (1,0,1) \\ \vec{u}_4 & = & (1,-1,-3) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & (1,1,1) \\ \vec{v}_2 & = & (0,1,2) \\ \vec{v}_3 & = & (0,-1,0) \\ \vec{v}_4 & = & (0,-2,-4) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{w}_1 & = & (1,1,1) \\ \vec{w}_2 & = & (0,1,2) \\ \vec{w}_3 & = & (0,0,2) \\ \vec{w}_4 & = & (0,0,0) \end{array}$$

- $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es un sistema escalonado equivalente a $\mathcal{S}$

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Teorema

*Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *un sistema linealmente dependiente (con algún vector no nulo), entonces podemos encontrar un subsistema linealmente independiente que genere el mismo subespacio.*

### Ejercicio

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Determina un subsistema linealmente independiente que genere el mismo subespacio.

# Espacios Vectoriales

## Dependencia e Independencia Lineal

### Teorema

1. *Si un sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también es linealmente independiente.*
2. *Si un sistema contiene a un sistema linealmente dependiente, entonces también es linealmente dependiente. En particular, si un sistema contiene al vector* $\vec{0}$*, dicho sistema es linealmente dependiente.*
3. *Si un vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *se expresa de forma* **única** *como combinación lineal de los vectores del sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$*, entonces* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *es linealmente independiente.*
4. *Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *es un sistema linealmente independiente, entonces todo vector* $\vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$ *se expresa de forma* **única***.*

# Espacios Vectoriales

## Bases y dimensión

- Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial distinto de $\{\vec{0}\}$. En $\mathcal{V}$ son posibles dos casos:
  - Existe un sistema linealmente independiente que contiene un número de vectores tan grande como se quiera.
  - Existe un sistema linealmente independiente que contiene un número **máximo** de vectores.
- Los espacios vectoriales del último caso se llaman **espacios vectoriales de tipo finito**
- En particular, un espacio vectorial de este tipo será cualquier subespacio generado por un sistema finito de vectores.

### Definición (Base de un espacio vectorial)

*Se dice que el sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una* **base** *de* $\mathcal{V}$ *si*

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es generador y*
2. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es linealmente independiente.*

### Ejemplos

1. $\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **base canónica** o **estándar** de $\mathbb{R}^3$.

2. El sistema $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es la **base estándar** de $\mathbb{R}_n(x)$.

3. El sistema

$$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es la **base estándar** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

# Espacios Vectoriales

## Bases y dimensión

### Teorema

1. *Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una base de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$ *y* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ *es un sistema linealmente independiente, entonces* $k \leq n$.
2. *Si* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ *son bases de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$*, entonces* $n = m$.

- ☛ La **base** es el sistema linealmente independiente con el **máximo** número de vectores (si es finita).
- ☛ Todas las bases tienen el **mismo** número de vectores.

A este número $n$ se le llama **dimensión** del espacio vectorial y escribimos

$$\dim(\mathcal{V}) = n$$

# Espacios Vectoriales

## Bases y dimensión

### Ejemplos

- $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión $n$, ya que admite como base a

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \quad \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\mathbb{R}_n(x)$ tiene dimensión $n+1$, ya que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base.

- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tiene dimensión $m \cdot n$, ya que admite la siguiente base

$$\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn}\}$$

### Teorema (Propiedades de la dimensión)

*Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión $n$. Entonces*

1. *Cualquier sistema con $n+1$ vectores es linealmente dependiente.*
2. *Un sistema de $n$ vectores es base de $\mathcal{V}$ si y sólo si, es generador o bien es linealmente independiente.*
3. *Si $\mathcal{L}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, entonces $dim(\mathcal{L}) \leq n$.*

# Espacios Vectoriales

## Bases y dimensión

### Ejemplo

El sistema $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

- ✓ Estamos en un espacio vectorial de dimensión cuatro y tenemos un sistema con exactamente cuatro vectores.
- ✓ Se puede justificar que es base demostrando, bien que es linealmente independiente o bien que es generador.
- ✓ En este caso, (por ser escalonado), es inmediato que es linealmente independiente.

☞ En general, **en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ (de dimensión $n$) cualquier sistema escalonado formado por $n$ vectores es una base**.

# Espacios Vectoriales

## Bases y dimensión

¿Cómo podemos obtener una base de todo el espacio vectorial $\mathcal{V}$ a partir de un sistema linealmente independiente?

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si tenemos que completar una base de un subespacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ procedemos de la siguiente manera:

1. Buscamos un sistema escalonado que sea equivalente al sistema dado.
2. Añadimos aquellos vectores necesarios para completar un sistema escalonado con $n$ vectores.

## Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^5$ se considera el subespacio $\mathcal{L}$ generado por el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallemos una base de $\mathbb{R}^5$ a partir de una base de $\mathcal{L}$.

# Espacios Vectoriales

## Bases y dimensión

*Solución:* En primer lugar, realizamos transformaciones elementales para encontrar un sistema escalonado equivalente al sistema inicial.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{u}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{u}_2 & = & (1,2,3,4,5) \\ \vec{u}_3 & = & (2,4,4,6,6) \\ \vec{u}_4 & = & (3,6,5,8,8) \\ \vec{u}_5 & = & (1,2,1,2,2) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \vec{v}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{v}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{v}_3 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{v}_4 & = & (0,0,2,2,5) \\ \vec{v}_5 & = & (0,0,0,0,1) \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{w}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{w}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{w}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{w}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{w}_5 & = & (0,0,0,0,1) \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{x}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{x}_5 & = & (0,0,0,0,0) \end{array}\right.$$

# Espacios Vectoriales

### Bases y dimensión

*Solución (cont.):* Después eliminamos los vectores igual a cero del último sistema y añadimos algún vector que permita completar un sistema escalonado con 5 vectores.

$$\left\{\begin{array}{lcl} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{x}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{x}_5 & = & (0,0,0,0,0) \end{array}\right. \qquad \begin{array}{lcl} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ -- & -- & -------- \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ -- & -- & -------- \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \end{array} \qquad \begin{array}{l} (1,2,1,2,1) \\ \boxed{(0,\ *\ ,\ *\ ,\ *\ ,\ *)} \\ (0,0,2,2,4) \\ \boxed{(0,\ 0,\ 0,\ *\ ,\ *)} \\ (0,0,0,0,1) \end{array}$$

De esta forma, una posible base de $\mathbb{R}^5$ es

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \vec{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{y}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{y}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Espacios Vectoriales

## Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

### Definición

*El* **rango** *de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio que genera.*

### Ejemplo

Hemos visto que el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

genera un subespacio $\mathcal{L}$ de dimensión 3. Por lo tanto, el rango de $\mathcal{S}$ es 3.

# Espacios Vectoriales

## Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- Toda matriz lleva asociados dos sistemas de vectores, uno formado por los vectores fila y el otro formado por los vectores columna.
- Podemos considerar el rango de una matriz dependiendo de si nos fijamos en sus vectores fila o sus vectores columna.
- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, introducimos las siguientes ...

### Definiciones

**Rango de filas de** $A$ es el rango del sistema de los vectores fila de $A$.
**Rango de columnas de** $A$ es el rango de los vectores columna de $A$.

### Teorema

*Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores fila de $A$ coincide con la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores columna.*

# Espacios Vectoriales

## Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

### Definición (Rango de una matriz)

*El* **rango** *de una matriz se define como su rango de filas (o de columnas).*

### Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ podemos hallar su rango mediante operaciones elementales en sus filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos que $rang(A) = 2$.

### Teorema

*Dada una matriz $A$ de dimensión $m \times n$, las soluciones del sistema lineal homogéneo $A\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^n$.*

### Definiciones (Núcleo y nulidad de una matriz)

- El conjunto de soluciones $\{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n | A\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}\}$ se llama **núcleo** de $A$, y se denota como $\mathcal{N}(A)$.
- La dimensión de $\mathcal{N}(A)$ se llama **nulidad** de $A$.

# Espacios Vectoriales

## Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

### Ejemplo (Hallar el núcleo de una matriz $A$)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - 3x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = -x_4 \\ x_4 = x_4 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Espacios Vectoriales

## Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- $\mathcal{N}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, que está determinado por el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + 2x_2 \quad\quad + 3x_4 & = 0 \\ x_3 + \ x_4 & = 0 \end{array}\right\}$$

  que son las **ecuaciones cartesianas** del subespacio.

- Una **base** de $\mathcal{N}(A)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

### Teorema (de la dimensión)

*Si $A$ es una matriz $m \times n$ entonces $n = rango(A) + nulidad(A)$.*

Esto es, si $rango(A) = r$, entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema lineal $A\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ es $n - r$.

### Teorema

*Si $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}$ es una solución del sistema lineal $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, entonces toda solución de este sistema es de la forma $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{h}}$, donde $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{h}}$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\mathbf{0}}$.*

# Espacios Vectoriales

## Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

### Ejemplo

Comprueba el teorema sobre el sistema $\left\{\begin{array}{rrrrcr} x_1 & & -2x_3 + & x_4 & = & 5 \\ 3x_1 + & x_2 & -5x_3 & & = & 8 \\ x_1 & +2x_2 & & -5x_4 & = & -9 \end{array}\right.$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U|c)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 | \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

# Espacios Vectoriales

## Suma de subespacios vectoriales

### Definición (Suma de subespacios)

*Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. La* **suma** *de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es el conjunto*

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \left\{ \vec{v} \in \mathcal{V} | \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \text{con} \quad \vec{u} \in \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{w} \in \mathcal{W} \right\}$$

*de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que se expresan como suma de un vector de $\mathcal{U}$ y un vector de $\mathcal{W}$.*

### Teorema

*La suma de dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.*

# Espacios Vectoriales

## Suma de subespacios vectoriales

### Lema

*Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es una base de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$ es una base de $\mathcal{W}$, entonces el subespacio suma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ está generado por $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$*

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$$

### Ejemplo

La suma de los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 - x_3 = 0\right\} \qquad \mathcal{W} = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\right\}$$

es un subespacio generado por el sistema

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} \cup \mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

# Espacios Vectoriales

## Suma de subespacios vectoriales

### Teorema

*Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Entonces*

$$dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{W}) - dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W})$$

### Ejemplo

Dados los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 | x_1 - x_3 = 0\right\} \qquad \mathcal{W} = \left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 | x_1 + x_2 = 0\right\}$$

comprobamos que se verifica

$$dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{W}) - dim(\mathcal{U}\cap\mathcal{W}) = 2 + 2 - 1 = 3$$

$$dim(\mathcal{U}+\mathcal{W}) = 3$$

### Definición (Suma directa)

*Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son dos subespacios vectoriales tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, se dice que la suma de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es* **suma directa** *y la denotamos $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.*

### Ejemplo

Comprueba que la suma de los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 | x_2 = 0 \right\}$$

es suma directa.

# Espacios Vectoriales

## Suma de subespacios vectoriales

### Definición (Subespacios suplementarios)

*Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Decimos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son* **suplementarios** *si*

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \quad y \quad \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$$

### Ejemplo

Los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$$

son suplementarios.

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

### Definición (Coordenadas)

Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, para cada $\vec{x} \in \mathcal{V}$ existe una **única** combinación lineal

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \vec{x}$$

A estos escalares $x_1, \ldots, x_n$ se les llama **coordenadas** del vector $\vec{x}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Diremos que $\boldsymbol{\vec{x}}$ **tiene coordenadas** $\boldsymbol{(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ **respecto a la base** $\boldsymbol{\mathcal{B}}$ y escribiremos

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{o bien} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

### Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, dada la base

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

el vector $\vec{v}$ de coordenadas $(2, 3, 4)_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = 2\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 4\vec{w}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

✔ En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si consideramos la *base canónica*

$$\boldsymbol{\mathcal{C}} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ para todo vector } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

se verifica

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Es decir, **las coordenadas de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ coinciden con sus componentes** $x_1, \ldots, x_n$.

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

La base es de gran importancia en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita.

En primer lugar, fijada una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ se identifica con sus coordenadas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ respecto a esa base.

Y así, trabajamos en el cuerpo $\mathcal{K}$, pues **todas las operaciones con los vectores quedan reducidas a operaciones con los elementos del cuerpo.**

Para sumar dos vectores basta sumar sus coordenadas y para multiplicar un escalar por un vector es suficiente multiplicar las coordenadas de dicho vector por el escalar.

## Cambio de base

- ✓ Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión $n$.
- ✓ Todo vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ queda unívocamente determinado por sus coordenadas respecto a una base.
- ✓ Al existir más de una base, las coordenadas de un mismo vector $\vec{x}$ variarán al pasar de una base a otra.
- ✓ Estudiamos qué relación guardarán entre sí las coordenadas respecto a una y otra base.

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

### Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Expresemos el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto a cada base.

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

### Lema (Cambio de base)

*Sean* $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ *y* $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ *bases de un espacio vectorial.*

$$\begin{cases} \vec{v'}_1 & = & a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{v'}_n & = & a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases}$$

*Entonces la matriz del cambio de* $\mathcal{B}'$ *a* $\mathcal{B}$ *es*

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

☛ Cada columna de $P$ coincide con las coordenadas de cada vector $\vec{v'}_j$ de la base $\mathcal{B}'$ expresado respecto de la base $\mathcal{B}$

# Espacios Vectoriales

## Coordenadas y cambio de base

*Demostración:*

Por ser $\boldsymbol{\mathcal{B}} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ y $\boldsymbol{\mathcal{B}'} = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ bases de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendrá coordenadas respecto a cada base:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mathcal{B}'}} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$$

La **expresión matricial** del **cambio de base** es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mathcal{B}'}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} \qquad P[\vec{x}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}'}} = [\vec{x}]_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$$

## Teorema (Inversa de la matriz del cambio de base)

*Si $P$ es la matriz de cambio de una base $\mathcal{B}'$ a otra base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión $n$, entonces $P$ es invertible y la matriz de cambio de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es $P^{-1}$.*

## Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Calcula la matriz de paso $P$ de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$.
2. Calcula la matriz de paso $Q$ de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$.
3. Comprueba que $P$ y $Q$ son inversas.

# Bibliografía


**Algebra lineal** J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

**Algebra lineal** J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

**Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab**
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

**Algebra lineal y sus aplicaciones** David C. Lay (Ed. Pearson)

**Algebra lineal con aplicaciones** G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

**Algebra lineal y sus aplicaciones** G. Strang (Ed. Addison Wesley)

**Problemas de Álgebra**
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)