Introducción a la Cardinalidad

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 16/17

Introducción a la Cardinalidad

- Nociones básicas.
- Conjuntos finitos.
- Conjuntos infinitos.
- Conjuntos numerables y no numerables.
- Comparación de cardinales. Teoremas fundamentales.

Cardinalidad

Definición (Conjuntos equipotentes)

Se dice que el conjunto A es ***equipotente*** *al conjunto B si existe una función biyectiva $f : A \to B$. Se escribe $A \approx B$.*

Ejemplo

El conjunto $A = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$ es equipotente al conjunto $B = \{0, 1, \cdots, 7\}$

Ejercicio

Sea X un conjunto con 10 elementos. Consideramos los conjuntos

$$A = \{Y \subseteq X \mid \quad Y \text{ tiene 7 elementos}\}$$
$$B = \{Z \subseteq X \mid \quad Z \text{ tiene 3 elementos}\}$$

Demuestra que $A \approx B$.

Cardinalidad

Teorema

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Se verifica:

1. $A \approx A$
2. *Si $A \approx B$, entonces $B \approx A$*
3. *Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.*

Demostración: Trivial a partir de las propiedades de las funciones biyectivas:

1. La identidad es una biyección.
2. La inversa de un función biyectiva es también un función biyectiva.
3. La composición de biyecciones tambien es biyección.

Cardinalidad

- Este teorema nos dice que dada una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos, la relación $\approx$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$.
- En cada clase de equivalencia estarán los conjuntos equipotentes.
- A cada clase de equivalencia se le asigna un objeto: el cardinal de cada elemento en la clase.
- De esta forma, a los conjuntos $\{1\}, \{a\}, \ldots$ que tienen **un** elemento se les asigna el cardinal 1;
  a los conjuntos $\{1,2\}, \{a,b\}, \cdots$ que tienen **dos** elementos se les asigna el cardinal 2; ...
  a los conjuntos $\{1,2,...,n\}, \{a_1,a_2,...,a_n\}, \cdots$ que tienen **n** elementos se les asigna el cardinal n; ...

Cardinalidad

- Para algunos conjuntos, como los del primer ejemplo,

  $$A = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\} \quad \text{y} \quad B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$$

  ser equipotentes, significa **tener el mismo número de elementos.**
- En estos conjuntos el cardinal coincide con la idea intuitiva de 'tamaño' del conjunto. Sin embargo, **no** siempre ocurre esto.
- Existen conjuntos equipotentes que **no** tienen el mismo 'tamaño'.

Ejemplo

Sea $E = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par } \}$. La función

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{Z} & \rightarrow & E \\ & & x & \mapsto & 2x \end{array}$$

nos permite afirmar que $\mathbb{Z}$ tiene el **mismo** cardinal que E.

(¡¡¡ A pesar de que E tiene la mitad de los elementos de $\mathbb{Z}$!!)

Conjuntos Finitos

Definición (Conjunto finito (I))

Se dice que un conjunto A es ***finito*** *si existe un número natural n, tal que se puede establecer una biyección entre el conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ y el conjunto A. Este entero n se llama* ***cardinal*** *de A. Se denota $|A| = n$.*
(Para $A = \varnothing$, $|A| = 0$)

- ☛ Establecer una biyección entre $\{1, 2, \ldots, n\}$ y un conjunto A equivale a ***contar*** el número de elementos de A.

- Las propiedades de los conjuntos finitos ya se han estudiado en Matemática Discreta.

Conjuntos Infinitos

Definición (Conjunto infinito (I))

Se dice que un conjunto A es ***infinito*** *si no es finito (es decir, si no existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede establecer una biyección entre el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y el conjunto A).*

- ☛ Para probar que un conjunto A es infinito usando la definición (I) se debe establecer que no existe ninguna biyección de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en A para ningún n.
- ☛ Esta prueba puede ser muy dificil debido a que hay que descartar infinitas posibilidades.

Conjuntos Infinitos

Teorema

$\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Demostración:

- Veamos que no existe un número natural n tal que se pueda establecer una biyección del conjunto $\{1, 2, \ldots, n\}$ al conjunto $\mathbb{N}$.
- Sea n cualquier elemento de $\mathbb{N}$ y sea f cualquier función de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $\mathbb{N}$.
- Se considera $k = 1 + \max\{f(1), \ldots, f(n)\}$
- Entonces $k \in \mathbb{N}$, pero para cada $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $\quad f(x) \neq k$.
- De ahí, f no puede ser sobreyectiva y, por tanto, no es biyectiva.
- Ya que n y f se eligen arbitrariamente, concluimos que $\mathbb{N}$ es infinito.

Conjuntos Finitos e Infinitos

Definición (I)

*Se dice que un conjunto A es **finito** si existe un número natural n, tal que se puede establecer una biyección $f : \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.*
*Se dice que un conjunto A es **infinito** si no es finito*

Definición (II)

*Se dice que un conjunto A es **infinito** si existe una función inyectiva $f : A \to A$ tal que $f(A) \subset A$.*
*Un conjunto A es **finito** si no es infinito.*

- La definición (I) establece explícitamente cómo reconocer un conjunto finito.
- La definición (II) establece explícitamente cómo reconocer un conjunto infinito.
- Se puede demostrar que las definiciones (I) y (II) son equivalentes.
- Usaremos la definición que sea más conveniente.

Conjuntos infinitos

- Usaremos la definición (I) para demostrar que un conjunto es **finito** y la definición (II) para mostrar que un conjunto es **infinito**.

Definición (I)

*Se dice que un conjunto A es **finito** si existe un número natural n, tal que se puede establecer una biyección $f : \mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\} \to A$.*

*Se dice que un conjunto A es **infinito** si no es finito.*

Definición (II)

*Se dice que un conjunto A es **infinito** si existe una función inyectiva $f : A \to A$ tal que $f(A) \subset A$.*

*Un conjunto A es **finito** si no es infinito.*

Conjuntos infinitos

Usando la definición (II) podemos dar una demostración más corta del teorema anterior.

Teorema

$\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Demostración:

- La función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por

$$f(n) = 2n$$

  es inyectiva y se cumple que

$$f(\mathbb{N}) \subset \mathbb{N}$$

- Por lo tanto, $\mathbb{N}$ es un conjunto infinito.

Conjuntos infinitos

Ejemplo

Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Entonces Σ^* es infinito.

Solución:

- En efecto, sea $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definida por $f(w) = aw$.
- Esta función es inyectiva y su imagen es un subconjunto propio de Σ^*, $f(\Sigma^*)$ es el subconjunto de las cadenas que empiezan con la letra a.
- Luego, Σ^* es infinito.

Conjuntos infinitos

Teorema

Sea A un subconjunto de B. Si A es infinito, entonces B es infinito.

Demostración:

- Si A es infinito, entonces existe una función inyectiva $f : A \to A$ tal que $f(A) = A' \subset A$.
- Para mostrar que B es infinito, definimos $g : B \to B$ como sigue:

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A \\ x & \text{si } x \in B - A \end{cases}$$

- Entonces g es inyectiva y la imagen de g no incluye el conjunto no vacío $A - A'$.
- Esto establece que B es infinito.

Corolario

1. *Si A es infinito, entonces $A \cup B$ es infinito.*
2. *Sea A un subconjunto de B. Si B es finito, entonces A es finito. (Esto es, cada subconjunto de un conjunto finito es finito.)*

Conjuntos infinitos

Teorema

Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Si A es un conjunto infinito, entonces B es infinito.

Teorema

Sean A y B conjuntos, tales que A es infinito y $B \neq \varnothing$. Entonces

1. *$\mathcal{P}(A)$ es infinito,*
2. *$A \times B$ es infinito,*

Demostración:

1. Consideramos la función $f : A \to \mathcal{P}(A)$ definida por f(x) = { x }
   Claramente, f es inyectiva y, del teorema anterior, deducimos que $\mathcal{P}(A)$ es infinito.

Conjuntos infinitos

Teorema

Sean A y B conjuntos, tales que A es infinito y $B \neq \varnothing$. Entonces

1. *$\mathcal{P}(A)$ es infinito,*
2. *$A \times B$ es infinito,*

Demostración:

2. Por ser $B \neq \varnothing$, podemos elegir un elemento $b \in B$, y definimos la función

$$f : A \to A \times B, \qquad f(x) = (x, b)$$

   Ya que A es infinito y f es inyectiva, se sigue del teorema anterior que $A \times B$ es infinito.

Conjuntos numerables

- La técnica usada para establecer el cardinal de un conjunto infinito es esencialmente la misma que se usó para conjuntos finitos.
- Para los conjuntos finitos, cada conjunto de la forma $\{1, 2, \ldots, n\}$ se usa como un 'conjunto estándar' con el que otros conjuntos son comparados mediante una biyección.
- Así pues, un conjunto finito tiene cardinal n si, y sólo si, hay una biyección de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en A.
- Cada vez que introducimos un nuevo número cardinal infinito α elegimos un conjunto estándar S apropiado y afirmamos:

El conjunto A tiene cardinal α si hay una biyección del conjunto S en el conjunto A.

Conjuntos numerables

- Hemos demostrado que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito.
- Ya que ningún número natural puede ser el cardinal de $\mathbb{N}$, debemos introducir un conjunto estándar para $|\mathbb{N}|$.
- Se elige el propio $\mathbb{N}$ como conjunto estándar y denotamos por $\aleph_0$ el cardinal de $\mathbb{N}$.

Definición

Se dice que un conjunto A tiene cardinal $\aleph_0$, si existe una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en A. Se escribe $|A| = \aleph_0$.

Conjuntos numerables

La existencia de biyección de $\mathbb{N}$ o algún conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ en A sugiere la idea de **contar** los elementos de A, incluso aunque el proceso de recuento pudiera ser interminable.

Definición

Se dice que un conjunto A es **infinito numerable** *si existe una biyección de $\mathbb{N}$ en A.*

El conjunto A se llama **numerable** *si es finito o infinito numerable.*

En otro caso, se dice que el conjunto A es **no numerable**.

☛ Si A es un conjunto infinito numerable, $|A| = \aleph_0$.

Conjuntos numerables

- Si A es infinito y $A \approx \mathbb{N}$, tambien tenemos que $\mathbb{N} \approx A$.
- Luego podemos demostrar que un conjunto A es infinito numerable encontrando
  1. una biyección $f : \mathbb{N} \to A$ o bien
  2. una biyección $f : A \to \mathbb{N}$
- Algunos autores consideran $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ y al conjunto $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ lo denotan $\mathbb{Z}^+$.
- Los conjuntos $\{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$ y $\{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ son equipotentes, ya que la función $f : \{0, 1, 2, 3, ..., n, ...\} \to \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ dada por $f(n) = n + 1$ es biyecctiva.
- Ambos conjuntos tienen el mismo cardinal: $\aleph_0$.

Conjuntos numerables

Ejemplo

Sea $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Demuestra que el conjunto $k\mathbb{Z}^+$ es numerable.

Solución:

Sea $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. La función $f : \mathbb{Z}^+ \to k\mathbb{Z}^+$ definida

$$f(x) = kx$$

es una biyección.

Luego, $k\mathbb{Z}^+$ es numerable y $|k\mathbb{Z}^+| = |\mathbb{Z}^+|$.

☛ En particular, el conjunto $\mathbb{Z}^-$ de los enteros negativos, es decir, $(-1)\mathbb{Z}^+$, es un conjunto numerable.

Conjuntos numerables

Ejemplo

Determina el cardinal del conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.

Solución: La función $f : \mathbb{Z}^+ \to A$ definida $f(n) = \frac{1}{n}$, establece una biyección entre $\mathbb{Z}^+$ y A.

Por lo tanto, $|A| = |\mathbb{Z}^+| = \aleph_0$, A es numerable.

Ejercicio

Halla el cardinal de los conjuntos siguientes:

$$A = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, \qquad B = \{6, 7, 8, 9, \dots\}, \qquad C = \left\{c_n = \frac{2n}{n+6} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Conjuntos numerables

Ejercicio

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 2\} \qquad B = \left\{ b_n = \frac{2n}{n+6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determina los cardinales de los conjuntos siguientes:

(i) B (ii) $A \cap B$ (iii) $B - A$

Justifica las respuestas.

Conjuntos numerables

Para avanzar un poco más en nuestro estudio de los conjuntos numerables, introducimos algunos conceptos que nos servirán para simplificar las demostraciones.

- Decimos que un conjunto se puede ***enumerar*** si sus elementos se pueden listar.
- Esta lista puede ser finita o infinita; y pueden ocurrir repeticiones (es decir, no todas las entradas de la lista deben ser distintas).
- Si una lista enumera el conjunto A, entonces cada entrada de la lista es un elemento de A y cada elemento de A aparece como una entrada de la lista.

Se formalizan estos conceptos como sigue.

Conjuntos numerables

Definición

Un **segmento inicial de** $\mathbb{N}$ *es el conjunto* $\mathbb{N}$ *o un conjunto de los* n *primeros números naturales,* $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definición

Sea A *un conjunto. Una* ***enumeración*** *de* A *es una función sobreyectiva* f *de un segmento inicial de* $\mathbb{N}$ *en* A.

- *Si* f *es inyectiva tambien (y por tanto, biyectiva), entonces* f *es una enumeración sin repeticiones.*
- *Si* f *no es inyectiva, entonces* f *es una enumeración con repeticiones.*

Conjuntos numerables

- Cuando presentamos una enumeración f, la función se especifica normalmente dando la secuencia $\langle f(1), f(2), \ldots \rangle$.
- Nos referiremos a f como una **función enumeración.**

Ejemplo

Si $A = \{a, b, c\}$, entonces $\langle b, c, b, a \rangle$ y $\langle c, b, a \rangle$ son enumeraciones de A ; la primera con repeticiones y la segunda sin repeticiones.

Conjuntos numerables

Teorema

Un conjunto A es numerable si, y sólo si, existe una enumeración de A.

Ejemplo

Dado cualquier alfabeto finito Σ, el conjunto Σ^* es infinito numerable.

Solución: Esto se puede demostrar exponiendo los elementos de Σ^* en un orden estándar.

En particular, si $\Sigma = \{0, 1\}$ y 0 precede a 1 en el orden 'alfabético' de Σ, entonces la enumeración de Σ^* en el orden estándar es

$$\langle \lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \ldots \rangle$$

Conjuntos numerables

Ejemplo

El conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}^+$ es infinito numerable.

Solución:

- ✓ Claramente $\mathbb{Q}^+$ no es finito, ya que podemos establecer una función inyectiva de los naturales $\mathbb{N}$ en $\mathbb{Q}^+$.
- ✓ Demostramos que $\mathbb{Q}^+$ es numerable mostrando una enumeración con repeticiones.
- ✓ El orden de la enumeración se especifica en un grafo dirigido.

Conjuntos numerables

✓ Todo número racional positivo es el cociente p/q de dos enteros positivos.

✓ Se escriben los números racionales positivos enumerando los de denominador 1 en la primera fila, los de denominador 2 en la segunda fila, y así sucesivamente.

	1	2	3	4	5	...
1	1/1	2/1	3/1	4/1	5/1	...
2	1/2	2/2	3/2	4/2	⋰	
3	1/3	2/3	3/3	4/3		
4	1/4	2/4	3/4			
5	1/5	2/5				
6	1/6					
⋮						

Conjuntos numerables

✓ Para enumerar $\mathbb{Q}^+$ en una sucesión se empieza por el racional positivo con $p+q=2$, seguido de aquellos con $p+q=3$, continuando con aquellos con $p+q=4$, ... como se muestra en la figura.

✓ El orden de la enumeración se especifica en el grafo dirigido

	1		2		3		4		5	...
1	1/1		2/1	→	3/1		4/1	→	5/1	...
	↓	↗		↙		↗		↙		
2	1/2		2/2		3/2		4/2		⋰	
		↙		↗		↙		↗		
3	1/3		2/3		3/3		4/3			
	↓	↗		↙		↗				
4	1/4		2/4		3/4					
		↙		↗						
5	1/5		2/5							
	↓	↗								
6	1/6									
⋮										

Conjuntos numerables

Teorema

Si A_1 y A_2 son conjuntos numerables, entonces $A_1 \cup A_2$ es un conjunto numerable.

Demostración: El orden de la enumeración se especifica en el grafo dirigido

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
A_1 & a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{14} & & a_{15} & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow \\
A_2 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \dots &
\end{array}$$

Ejercicio

Demuestra que $\mathbb{Q}$ es un conjunto numerable.

Conjuntos numerables

Teorema

La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable.

Demostración: El orden de la enumeración se especifica en el grafo dirigido

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
A_1 & a_{11} & & a_{12} & \rightarrow & a_{13} & & a_{14} & \rightarrow & a_{15} & \dots \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
A_2 & a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{24} & & \iddots & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
A_3 & a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{34} & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
A_4 & a_{41} & & a_{42} & & a_{43} & & & & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
A_5 & a_{51} & & a_{52} & & & & & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
A_6 & a_{61} & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Conjuntos numerables

Teorema

Si A y B son conjuntos numerables, entonces $A \times B$ es numerable.

Demostración: El orden de la enumeración se especifica en el grafo dirigido

$$
\begin{array}{c|ccccccccccc}
 & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 & \dots \\
\hline
a_1 & (a_1,b_1) & & (a_1,b_2) & \rightarrow & (a_1,b_3) & & (a_1,b_4) & \rightarrow & (a_1,b_5) & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \\
a_2 & (a_2,b_1) & & (a_2,b_2) & & (a_2,b_3) & & (a_2,b_4) & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \\
a_3 & (a_3,b_1) & & (a_3,b_2) & & (a_3,b_3) & & (a_3,b_4) & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & & \\
a_4 & (a_4,b_1) & & (a_4,b_2) & & (a_4,b_3) & & & & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & & \\
a_5 & (a_5,b_1) & & (a_5,b_2) & & & & & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & & \\
a_6 & (a_6,b_1) & & & & & & & & & \\
\vdots & & & & & & & & & &
\end{array}
$$

Conjuntos numerables

Ejemplo

Son numerables los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{N}^n, \quad \mathbb{Z}^n, \quad \mathbb{Q}^n, \quad n \in \mathbb{N}$
2. El conjunto de todos los polinomios de grado n con coeficientes racionales.
3. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales.
4. El conjunto de todas las matrices $n \times m$ con componentes racionales.
5. El conjunto de todas las matrices de dimensión finita arbitraria con componentes racionales.

Conjuntos numerables

Teorema

Cada conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable.

Demostración:

- Se eligen sucesivamente los elementos

$$a_1 \in A,\ a_2 \in A - \{a_1\},\ a_3 \in A - \{a_1, a_2\},\ \ldots, a_{k+1} \in A - \{a_1, a_2 \ldots, a_k\}, \ldots$$

- Siguiendo así, podemos construir una secuencia sin repeticiones

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

que será infinita,pues cada uno de los conjuntos $A - \{a_1, a_2 \ldots, a_k\}$ es infinito.

- Si no lo fuesen, el conjunto A se podría obtener como unión de conjuntos finitos

$$A = \Big(A - \{a_1, a_2 \ldots, a_k\}\Big) \cup \{a_1, a_2 \ldots, a_k\}$$

Conjuntos numerables

Teorema

Si B es un conjunto numerable no vacío y $A \subseteq B$, entonces A es numerable.

Del teorema anterior se puede deducir que:

- ✓ Un conjunto dado no vacío S es numerable si, y sólo si, S tiene el mismo cardinal que un subconjunto de $\mathbb{Z}^+$.
- ✓ Así, es suficiente que exista una función inyectiva $f : S \to \mathbb{Z}^+$ (no necesariamente una biyección), para afirmar que S es numerable, ya que $S \approx f(S)$ (es decir, $|S| = |f(S)|$ y $f(S)$ es numerable.)

Conjuntos no numerables

Teorema (Cantor)

El subconjunto de números reales $[0,1]$ *no es numerable.*

Demostración:

- Para demostrar que $[0,1]$ no es numerable, debemos mostrar que ninguna función $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ es sobreyectiva.
- Sea $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ una función cualquiera. Se colocan los elementos $f(1), f(2), \ldots,$ en una lista usando la representación decimal para cada valor $f(n)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0{,}x_{11}x_{12}x_{13}\ldots \\ f(2) &= 0{,}x_{21}x_{22}x_{23}\ldots \\ f(3) &= 0{,}x_{31}x_{32}x_{33}\ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde x_{nj} es el j -ésimo dígito en la expansión decimal de $f(n)$.

Conjuntos no numerables

Demostración:(cont.)

- Ahora especificamos un número real $y \in [0,1]$ como sigue: $y = 0{,}y_1y_2y_3\ldots,$ donde

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{jj} \neq 1 \\ 2, & \text{si } x_{jj} = 1 \end{cases}$$

- El número y está determinado por los dígitos en la diagonal.
- Claramente, $y \in [0,1]$.
- Sin embargo, y difiere de cada $f(n)$ al menos en un dígito de la expansión (a saber, el n -ésimo dígito).
- Por lo tanto, $y \neq f(n)$ para cualquier n.
- Y se concluye que la función $f\colon \mathbb{N} \to [0,1]$ no es sobreyectiva.
- Por lo tanto, no es una enumeración de $[0,1]$.
- Puesto que la función f era arbiraria, esto establece que $|[0,1]| \neq \aleph_0$.

Conjuntos no numerables

- La técnica de demostración del teorema anterior se conoce como el ***método de diagonalización de Cantor***.
- Esencialmente esta técnica empieza con una lista infinita en la que cada elemento de la lista tiene una descripción infinita.
- Después se construye un objeto distinto a cada elemento de la lista.

Esta técnica tiene muchas variaciones y se aplica frecuentemente en teoría de la computabilidad.

Conjuntos no numerables

Teorema

El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ *es no numerable.*

Demostración: (Método de diagonalización de Cantor)

- Supongamos que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es infinito numerable, es decir, existe una biyección
$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathcal{P}(\mathbb{N}) \\ & & n & \mapsto & f(n) = S_n \end{array}$$
- Entonces $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ se podría enumerar
$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = \{S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots\}$$

Conjuntos no numerables

Demostración:(cont.)

- Por ejemplo, podríamos tener la función $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & \{3,5,7\} \\ f(2) & = & \{2,4,6,8,\dots\} \\ f(3) & = & \emptyset \\ f(4) & = & \{1,2,3,4,5,6,\dots\} \\ f(5) & = & \{1,2\} \\ & \vdots & \end{array}$$

- En algunos casos $j \in f(j)$. En nuestro ejemplo, $2 \in f(2)$ y $4 \in f(4)$.
- Sin embargo, $1 \notin f(1)$, $3 \notin f(3)$ y $5 \notin f(5)$.

Conjuntos no numerables

Demostración:(cont.)

- Volviendo a nuestra supuesta función biyectiva $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, consideramos el subconjunto $\boldsymbol{D} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$
- Por ser f sobreyectiva, $\boldsymbol{D}$ será la imagen de algún $k \in \mathbb{N}$.
- Luego $\boldsymbol{D} = S_k$, para algún $k \in \mathbb{N}$.
- Ahora nos preguntamos si este $k \in S_k$
  - Si $k \in S_k$, entonces $k \notin \boldsymbol{D}$, por la definición de $\boldsymbol{D}$.
    Pero $\boldsymbol{D} = S_k$. Luego, $k \notin S_k$. (Contradicción)
  - Si $k \notin S_k$, entonces $k \in \boldsymbol{D}$, por la definición de $\boldsymbol{D}$.
    Pero $\boldsymbol{D} = S_k$. Luego, $k \in S_k$. (Contradicción)
- Llegamos a contradicción, esto nos dice que la suposición $\boldsymbol{D} = S_k$ es un error.
- $\boldsymbol{D} \notin f(\mathbb{N})$ y la hipótesis de que f es biyectiva es incorrecta.
- Por lo tanto, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable.

Conjuntos no numerables

- Los conjuntos $[0,1]$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son ejemplos de conjuntos infinitos pero no numerables.
- Elegimos $[0,1]$ como el ''conjunto estándar'' para esta cardinalidad y damos la siguiente definición:

Definición

Un conjunto A tiene cardinal $\aleph_1$ si hay una biyección de $[0,1]$ en A.

Al cardinal de $[0,1]$ también se le denota c ya que el conjunto $[0,1]$ se llama un ***contínuo***.

Conjuntos no numerables

Conjuntos de cardinal $\aleph_1$

Ejemplo

1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. El intervalo cerrado $[a,b]$ tiene el mismo cardinal que $[0,1]$, ya que la función $h\colon [0,1] \to [a,b]$ definida

$$h(x) = (b-a)\cdot x + a$$

es biyectiva (inyectiva y sobreyectiva).

2. El intervalo abierto $(0,1)$ tiene el mismo cardinal que $[0,1]$, puesto que es biyectiva la función $f\colon [0,1] \to (0,1)$ definida

$$\begin{cases} f(0) & = & \dfrac{1}{2} & \\ f(\frac{1}{n}) & = & \dfrac{1}{n+2} & n \in \mathbb{Z}^+ \\ f(x) & = & x & x \in [0,1] - \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \end{cases}$$

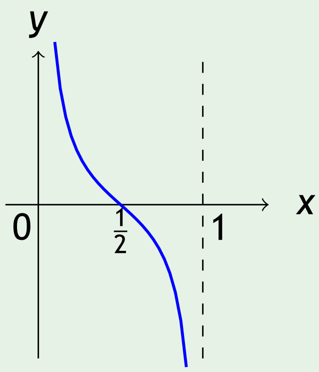
Conjuntos no numerables

Conjuntos de cardinal $\aleph_1$

Ejemplo

3. El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene cardinal $\aleph_1$, puesto que

la función $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definida $g(x) = \dfrac{(\frac{1}{2} - x)}{x(1-x)}$ es biyectiva.



Comparación de números cardinales

A continuación,

- se definen las relaciones $\preceq$ y $\prec$ sobre los números cardinales y
- se demuestra que tienen propiedades similares a las de las relaciones de orden usuales sobre los números reales.

Definición

Sean A y B conjuntos cualesquiera. Se dice que:

- $|A| \preceq |B|$ *si existe una función inyectiva de A en B.*
- $|A| \prec |B|$ *si existe una función inyectiva $f\colon A \to B$, pero no existe ninguna función biyectiva de A en B.*

  Es decir, $|A| \prec |B|$ si, y sólo si, $|A| \preceq |B|$ y $|A| \neq |B|$

Comparación de números cardinales

Teorema (Zermelo)

Sean los conjuntos A *y* B. *Se verifica una de las tres:*

(1) $|A| \prec |B|$ (2) $|A| = |B|$ (3) $|B| \prec |A|$

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Sean A *y* B *dos conjuntos cualesquiera. Si se verifica que* $|A| \preceq |B|$ *y* $|B| \preceq |A|$, *entonces* $|A| = |B|$.

- Este teorema proporciona un potente mecanismo para demostrar que dos conjuntos tienen el mismo cardinal.
- Primero construimos una función inyectiva $f : A \to B$ y luego otra función inyectiva $g : B \to A$.

Comparación de números cardinales

Ejemplo

1. Demostramos que $|[0,1]| = |(0,1)|$ dando una función inyectiva de uno en otro, como sigue:

   (i) $f\colon (0,1) \to [0,1]$ definida $f(x) = x$

   (ii) $g\colon [0,1] \to (0,1)$ definida $g(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}$

Análogamente, podemos demostrar que

2. $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |[0,1]| = \aleph_1$

3. $|\mathcal{F}(\mathbb{N},\mathbb{N})| = |[0,1]| = \aleph_1$

Comparación de números cardinales

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces $|A| \prec \aleph_0 \prec \aleph_1$

Demostración:

- Sea $|A| = n$. Se define la función $f\colon \{1, 2, ..., n\} \to \mathbb{N}$, $f(n) = n$
- Por ser f inyectiva, $|A| \preceq |\mathbb{N}|$.
- $|A| \neq |\mathbb{N}|$, ya que A es finito.
- Por lo tanto, $|A| \prec |\mathbb{N}| = \aleph_0$.
- A continuación, consideramos la función $g\colon \mathbb{N} \to [0, 1]$ definida
$$g(n) = \frac{1}{n+1}$$
y demostramos que es inyectiva.
- Luego, $|\mathbb{N}| \preceq |[0, 1\ ]|$.
- Por ser $|\mathbb{N}| \neq |[0, 1]|$, deducimos que $|\mathbb{N}| \prec |[0, 1]| = \aleph_1$.

Comparación de números cardinales

Teorema

Sea A un conjunto infinito. Entonces $\aleph_0 \preceq |A|$

Demostración:

- Por un teorema anterior, sabemos que si A es infinito, entonces contiene un subconjunto infinito A' que es numerable.
- Claramente, la función $f\colon A' \to A$
$$f(x) = x, \quad x \in A'$$
es inyectiva.
- Luego, $|A'| \preceq |A|$.
- Y ya que $|A'| = \aleph_0$, podemos concluir que $\aleph_0 \preceq |A|$.

Comparación de números cardinales

Teorema (Cantor)

Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $|A| \prec |\mathcal{P}(A)|$.

Demostración:

- Claramente, $|A| \preceq |\mathcal{P}(A)|$, pues la función $\boldsymbol{f}$ definida

$$\boldsymbol{f} : A \to \mathcal{P}(A) \qquad \boldsymbol{f}(x) = \{x\}$$

  es inyectiva.
- Ahora queda demostrar que $|A| \neq |\mathcal{P}(A)|$.
  Para ello mostraremos que **no** existe ninguna función sobreyectiva de A en $\mathcal{P}(A)$.
- Supongamos que $\boldsymbol{g}$ es cualquier función de A en $\mathcal{P}(A)$

Comparación de números cardinales

Demostración:(cont.)

- Supongamos que $\boldsymbol{g}$ es cualquier función de A en $\mathcal{P}(A)$
  y consideramos el conjunto $\boldsymbol{Y} = \{x \in A \mid x \notin \boldsymbol{g}(x)\} \in \mathcal{P}(A)$.
- Si la función $\boldsymbol{g}$ es sobreyectiva, entonces debe existir un elemento $\boldsymbol{y} \in A$, tal que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Y}$.
- Sin embargo, la existencia de este $\boldsymbol{y}$ nos lleva a contradicciones.
- En efecto, para este $\boldsymbol{y}$ se cumplirá que: $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, ó bien $\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{Y}$.
  - Si $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, entonces de la definición del subconjunto $\boldsymbol{Y}$ se deduce que $\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, lo que contradice la afirmación de que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Y}$.
  - Análogamente, si $\boldsymbol{y} \notin \boldsymbol{Y}$, entonces la definición de $\boldsymbol{Y}$ implicaría que $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})$, lo cual también contradice la suposición $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Y}$.
- Concluimos que no existe un $\boldsymbol{y} \in A$ tal que $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Y}$.
- Luego, $\boldsymbol{g}$ no puede ser sobreyectiva y, por tanto, $|A| \prec |\mathcal{P}(A)|$.

Comparación de números cardinales

- A partir de este teorema podemos afirmar que los conjuntos infinitos pueden tener cardinales distintos.
- Basta con seleccionar un conjunto infinito A y comparar su cardinal con el de su conjunto potencia.
- Así, el proceso de formación de conjuntos potencia nos lleva a una jerarquía de números cardinales infinitos. Podemos construir un conjunto infinito numerable de números cardinales, siendo cada uno de ellos inferior al siguiente:

$$|A| \prec |\mathcal{P}(A)| \prec |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| \prec \dots$$

- Una consecuencia de esta jerarquía es que no existe ningún cardinal infinito máximo.
- No obstante, existe un cardinal infinito mínimo: el cardinal de $\mathbb{N}$.

Comparación de números cardinales

Ejercicio

Determina si los siguientes enunciados son Verdaderos o Falsos (demostrando los que sean V y poniendo un contraejemplo de los F).

1. Si A y B son conjuntos no numerables, entonces $A \cap B$ es no numerable.
2. Si A y B son conjuntos no numerables, entonces $A - B$ es no numerable.
3. Si A es no numerable y B es numerable, entonces $A \cap B$ es no numerable.
4. Si A es no numerable y B es numerable, entonces $A - B$ es numerable.
5. Si A es numerable, entonces $\mathcal{P}(A)$ es numerable.

Ejercicio

Encuentra, si es posible, un conjunto S tal que $|\mathcal{P}(S)| = \aleph_0$.

Cardinalidad

Bibliografía

Matemática Discreta N.L.Biggs (Ed. Vicens Vives)

Matemáticas Discreta y combinatoria R.P. Grimaldi (Ed. Addison Wesley)

Matemática Discreta y sus aplicaciones K. Rosen (Ed. McGraw Hill)

Matemática Discreta K.A. Ross y C.R.B. Wright (Ed. Prentice Hall)