E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2016/2017

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 8 de Ejercicios

1. Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^4$ con el producto escalar usual. Halla:

   a) un vector unitario ortogonal a los vectores del subespacio $\mathcal{W}$ generado por el sistema de vectores
   $$\{(1,2,1,0),(0,-1,1,0),(1,1,2,-1)\}$$

   b) una base ortonormal para el subespacio $\mathcal{U}$ generado por el sistema de vectores
   $$\{(1,2,-1,0),(0,1,1,0),(1,0,-2,1)\}$$

2. En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^4$ consideramos el subespacio vectorial $\mathcal{L}$ generado por el sistema de vectores
   $$\Big\{(1,1,1,1),(1,-2,1,-2),(1,0,1,0),(3,-2,3,-2)\Big\}$$

   a) Define el complemento ortogonal de $\mathcal{L}$

   b) Estudia si $\mathcal{L}^{\perp}$ es un subespacio vectorial y, en caso afirmativo, halla una base.

   c) Dado el vector $\vec{v}=(2,0,1,0)$, halla vectores $\vec{v}_1\in\mathcal{L}$ y $\vec{v}_2\in\mathcal{L}^{\perp}$ tales que $\vec{v}=\vec{v}_1\oplus\vec{v}_2$.

3. En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios
   $$\mathcal{L}_1=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1-x_2 & = & 0 \\ 2x_2-x_3 & = & 0 \end{array}\right\}, \qquad \mathcal{L}_2=\left\{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1+ax_2+bx_3 = 0\right\}$$

   a) Calcula los valores de a y b para que $\mathcal{L}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{L}_2$.

   b) Halla una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{L}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{L}_2$ tales que $\mathcal{B}_1\cup\mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

4. Construye una base ortonormal en $\mathbb{R}^3$ a partir de la base $\mathcal{B}=\{\vec{v}_1=(1,1,0),\vec{v}_2=(0,1,1),\vec{v}_3=(1,0,1)\}$.

5. Sea la matriz
   $$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ -7 & 2 & -3 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Estudia si A es diagonalizable.

   b) En caso afirmativo, halla una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   c) Justifica si es posible encontrar una matriz ortogonal Q tal que Q^tAQ sea diagonal.

6. Sea la matriz
   $$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Halla una matriz P tal que $P^{-1}AP$ sea diagonal.

   b) Halla una matriz Q tal que Q^tAQ sea diagonal.

7. Diagonaliza las matrices simétricas siguientes, calculando una matriz de paso ortogonal:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la forma bilineal definida:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_1 - 3x_1y_2 + x_2y_2$$

   a) Determina la matriz A de f en la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (1, 0), \vec{v}_2 = (1, 1)\}$

   b) Determina la matriz B de f en la base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1 = (1, -1), \vec{w}_2 = (2, 2)\}$

   c) Halla la matriz P del cambio de la base $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ y comprueba que $B = P^tAP$.

   Indicación: La matriz asociada a una forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ respecto a una base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ es

$$M = \begin{pmatrix} f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{pmatrix}$$

9. En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la función $\varphi \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = 4x_1y_1 + 2x_3y_1 + 6x_2y_2 + 2x_1y_3 + 4x_3y_3$$

   a) Estudia si es un producto escalar.

   b) En caso afirmativo, halla una base ortonormal a partir de la base canónica.

10. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_1(t)$ se define el producto escalar $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)dt$

   a) Halla la matriz del producto escalar referida a la base $\{1, t\}$.

   b) Calcula el coseno del ángulo que forman $p(t) = t + 3$ y $q(t) = 2t + 4$

   c) Determina para qué valores de α son ortogonales los vectores $t + \alpha$ y $t - \alpha$.

11. Se define para $p, q \in \mathbb{R}_2(t)$ el siguiente producto escalar $\langle p, q\rangle = \displaystyle\int_0^1 p(t)q(t)dt$.

   a) Halla la matriz de este producto escalar con respecto a la base $B = \{1, t, t^2\}$

   b) Aplica el proceso de Gram-Schmidt para obtener una base ortonormal a partir de la base $\{1, t, t^2\}$.