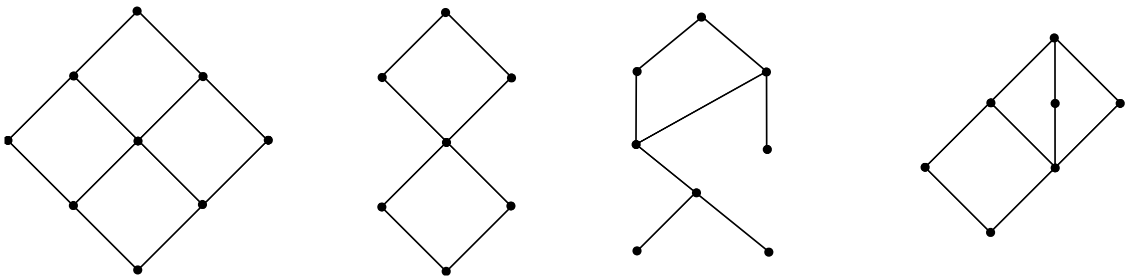
E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2016/2017

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 2 de Ejercicios

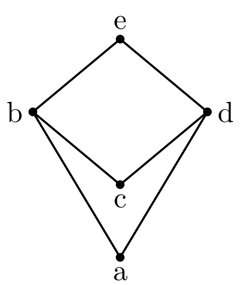
1. En los siguientes apartados determina si el diagrama de Hasse representa un retículo ordenado



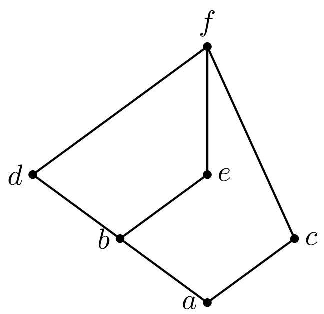
(a) (b) (c) (d)

En caso afirmativo, estudia si es complementado y si es distributivo.

2. Justifica por qué no es **retículo** el conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$



$(A, \preceq)$



$(\mathcal{M}, \preceq)$

3. Justifica por qué no es distributivo el retículo $(\mathcal{M}, \preceq)$ y estudia si es complementado.

4. Da ejemplos (si existen) de:
   - $a)$ Un **conjunto parcialmente ordenado** que no sea **retículo ordenado**.
   - $b)$ Un **retículo acotado** que no sea finito.
   - $c)$ Un **retículo distributivo** que no sea complementado.
   - $d)$ Un **retículo complementado** que no sea distributivo.
   - $e)$ Un álgebra de Boole con 24 elementos.

5. Sea D_{60} el conjunto de todos los divisores de 60 con la relación divisibilidad
   - $a)$ Dibuja su diagrama de Hasse.
   - $b)$ Da una lista de los átomos y otra lista de los elementos $\sqcup$-irreducibles de D_{60}.
   - $c)$ Expresa 60, 12 y 20 mediante elementos $\sqcup$-irreducibles (en más de una forma si es posible).
   - $d)$ Determina los elementos que tienen complemento.

6. Se considera el retículo $(D_n, |)$ con $n = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdots p_k^1$, donde cada $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ son primos. Estudia si es posible definir una función

$$\begin{array}{rccc} \bar{\cdot}: & D_n & \longrightarrow & D_n \\ & x & \longmapsto & \overline{x} \end{array}$$

tal que $m.c.d.(x, \overline{x}) = 1$ y $m.c.m.(x, \overline{x}) = n$.

7. En el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ de las funciones de $\mathbb{B}^2$ en $\mathbb{B}$ se considera la relación $\preceq$ definida:

$$f \preceq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{B}^2$$

   a) Dibuja el diagrama de Hasse de $\big(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq\big)$.
   b) Señala los átomos y superátomos.
   c) Estudia si es posible definir una función

$$\begin{array}{rccc} -: & \mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}) & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}) \\ & f & \longmapsto & g \end{array}$$

   tal que $(f + g)(x) = 1$ y $(f \bullet g)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{B}^2$.
   d) Justifica si $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ es un álgebra de Boole.

8. En un álgebra de Boole $\mathcal{A}$ se define la operación $\oplus$ (xor) de la siguiente manera: $a \oplus b = a\overline{b} + \overline{a}b$.
   a) Determina $a \oplus a$, $a \oplus 0$, $a \oplus 1$ y $a \oplus \overline{a}$.
   b) Demuestra o refuta cada una de las siguientes afirmaciones

i) $a \oplus b = b \oplus a$	*ii*) $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$
iii) $a \oplus b = \overline{a} \oplus \overline{b}$	*iv*) $a \oplus bc = (a \oplus b)(a \oplus c)$
v) $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$	*vi*) $\overline{a \oplus b} = \overline{a} \oplus b = a \oplus \overline{b}$
vii) $a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b$	*viii*) $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$

9. Encuentra un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y $\mathbb{B}^5$ sean isomorfos como álgebras de Boole.

10. Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Estudia si es posible definir un isomorfismo $\phi \colon D_{105} \to \mathcal{P}(A)$.
   En caso afirmativo, halla $\phi(35)$ y $\phi(21)$.

11. Se consideran las álgebras de Boole $\mathcal{A}_1 = D_{2310}$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$ y se define la función $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ del siguiente modo:

$$f(2) = \{a\} \quad f(3) = \{b\} \quad f(5) = \{c\} \quad f(7) = \{d\} \quad f(11) = \{e\}$$

   a) Expresa, si es posible, los elementos $110, 210$ y 330 en función de **átomos** y **superátomos**.
   b) Determina cuáles deben ser las imágenes de $f(35)$, $f(110)$, $f(210)$ y $f(330)$ para que f sea isomorfismo de álgebras de Boole.
   c) Estudia si se puede definir otra función $g : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ que también sea **isomorfismo de álgebras de Boole**.
   d) En caso afirmativo, determina $g(110)$, $g(210)$ y $g(330)$.
   e) ¿Cuántos isomorfismos diferentes se pueden definir entre $\mathcal{A}_1$ y $\mathcal{A}_2$?

12. Demuestra o refuta:

   a) Todo conjunto ordenado es un retículo.

   b) Si $\mathcal{L}$ es un retículo finito, entonces es acotado.

   c) Si $\mathcal{L}$ es un retículo complementado, entonces es un álgebra de Boole.

   d) Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole y $a, b, c \in \mathcal{A}$ son tales que $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

   e) Existe $n \in \mathbb{N}_{250}$ tal que D_n y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ son isomorfos como álgebras de Boole.

   f) En el álgebra de Boole $(D_{2\cdot 3\cdot 7\cdot 11}, +, \cdot)$ se verifica

$$\overline{(x \cdot 3)} \cdot (77 + 3) = 231\overline{x} + 77$$

   g) En el álgebra de Boole $(D_{210}, +, \cdot)$ se verifica

$$\overline{(x \cdot 3)} \cdot (35 + 3) = 105\overline{x} + 35$$

13. Define una función booleana de $\mathbb{B}^3$ en $\mathbb{B}$ y halla su forma normal disyuntiva.

14. Halla la forma normal disyuntiva de la función booleana $F : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ dada en forma conjuntiva

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + \overline{z})(x + \overline{y} + \overline{z})$$

15. Sean las expresiones booleanas

$$E_1(x, y, z) = \overline{x + \overline{z}} + \overline{y} \cdot z + \overline{y + z} \quad \text{y} \quad E_2(x, y, z) = \overline{x \cdot z + y \cdot \overline{z}} + \overline{y}$$

   a) Determina si $E_1(x, y, z)$ y $E_2(x, y, z)$ son equivalentes.
   b) Estudia si mediante la expresión booleana E_2 se puede especificar la función booleana

$$F(x, y, z) = \overline{x}z + \overline{y}$$

   c) Halla la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana que se puede especificar mediante la expresión booleana $E_1(x, y, z)$.