E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2016/2017

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 5 de Ejercicios

1. Determina $a, b \in \mathbb{R}$ para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por el sistema $\{(1, 4, -5, 2), (1, 2, 3, -1)\}$

2. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema de vectores

$$S = \{(1, 1, a), (1, a, 1), (a, 1, 1)\}$$

   Estudia, en función de a, qué dimensión tiene el subespacio generado $\mathcal{L}(S)$

3. En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios:

$$\mathcal{V}_1 = \mathcal{L}\{(1, 2, 0, 1)\}$$

$$\mathcal{V}_2 = \{(x, y, z, t) \mid x - y + z + t = 0, z = 0\}$$

$$\mathcal{V}_3 \equiv \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda + \mu \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = \mu \end{cases}$$

   ¿Pertenece el vector $\vec{v} = (2, 4, 0, 2)$ a $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2$ ó $\mathcal{V}_3$?

4. Determina una base de cada uno de los subespacios de $\mathbb{R}^4$ siguientes:

   a) L, generado por el sistema de vectores

$$\{(1, 2, 3, 1), (2, 3, 2, 3), (0, 1, 4, -1), (2, -3, 1, 1), (4, 1, 7, 3)\}$$

   b) N, que tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = \lambda + \alpha + \beta \\ x_2 = \lambda - \alpha + 3\beta \\ x_3 = \lambda + \alpha \\ x_4 = 2\lambda + 4\alpha + \beta \end{array}\right\}$$

   c) la intersección de los subespacios

$$U = \langle (1, 2, 1, 0), (-1, 1, 1, 1) \rangle, \quad W = \langle (2, -1, 0, 1), (1, -1, 3, 7) \rangle$$

   d) la suma $U + W$ de los subespacios del apartado anterior.

5. Determina las ecuaciones cartesianas de cada uno de los subespacios vectoriales del ejercicio anterior.

6. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3(t)$ de los polinomios de una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3 se considera el subconjunto

$$P = \{at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathbb{R}_3(t) \mid a = b \quad c = d\}$$

   Demuestra que P es un espacio vectorial y determina una base.

7. En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3(t)$ de los polinomios de una variable con coeficientes en $\mathbb{R}$ de grado menor o igual a 3 se considera el subconjunto

$$Q = \{at^3 + bt^2 + ct + d \in \mathbb{R}_3(t) \mid b = d\}$$

Demuestra que Q es un espacio vectorial y determina una base.

8. Sea el espacio vectorial $\mathcal{V} = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Estudia si los subconjuntos siguientes son subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$.

   a) $\mathcal{U} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid |A| = 0\}$

   b) $\mathcal{W} = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$

9. En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se considera el subconjunto $\mathcal{A}$ formado por las matrices de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

   a) Demuestra que $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   b) Halla una base de $\mathcal{A}$

10. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden dos y sea $\mathcal{E}_1$ el conjunto de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix}$$

Prueba que $\mathcal{E}_1$ es un subespacio vectorial y que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base.

11. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden dos y sea $\mathcal{E}_2$ el conjunto de las matrices de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

Prueba que $\mathcal{E}_2$ es un subespacio vectorial y halla una base.

12. Sea $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$ una base de un espacio vectorial $\mathcal{V}$.

   a) Prueba que $\mathcal{B}_2 = \{2\vec{v}_1, -\vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{v}_4 - \vec{v}_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_3\}$ también es una base de $\mathcal{V}$.

   b) Encuentra las matrices del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

   c) Si un vector de $\mathcal{V}$ tiene coordenadas $(0, \alpha, 0, \alpha)$ respecto de la base $\mathcal{B}_1$, ¿qué coordenadas tendrá respecto de la base $\mathcal{B}_2$?