Espacios Vectoriales

Manuel Ojeda Aciego

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 2015-2016

Espacios Vectoriales

El espacio vectorial $\mathbb{R}^2$

Dado el cuerpo $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ de los números reales, el producto de $\mathbb{R}$ por sí mismo, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, se denota $\mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Llamaremos

- **vectores** a los elementos de $\mathbb{R}^2$
- **escalares** a los elementos del cuerpo $\mathbb{R}$

Espacios Vectoriales

El espacio $\mathbb{R}^2$

Definiciones (Suma de vectores en $\mathbb{R}^2$, producto por un escalar)

En $\mathbb{R}^2$ se define la operación **suma** de vectores de la forma:

$$\begin{array}{rccc} + : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (\mathbf{x}, \mathbf{y}) & \longmapsto & \mathbf{x} + \mathbf{y} \end{array} \qquad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

La operación **producto** de un **escalar** $c \in \mathbb{R}$ por un vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}$ de la forma:

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (c, \mathbf{x}) & \longmapsto & c \cdot \mathbf{x} \end{array} \qquad c \cdot \mathbf{x} = c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Las operaciones de suma y producto por un escalar se pueden definir en general, en un producto de n copias de $\mathbb{R}$, dando lugar al espacio $\mathbb{R}^n$.

Espacios Vectoriales

El espacio $\mathbb{R}^n$: Propiedades de la suma y el producto por un escalar

Teorema

Dados vectores $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ *y escalares* $\mathbf{c}$, $\mathbf{d} \in \mathbb{R}$, *se cumplen las siguientes igualdades*

1. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}$
3. $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
4. $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
5. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\,\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
6. $(c + d)\,\mathbf{u} = c\,\mathbf{u} + d\,\mathbf{u}$
7. $c(d\,\mathbf{u}) = (cd)\,\mathbf{u}$
8. $1\,\mathbf{u} = \mathbf{u}$

✓ Usando estas propiedades se pueden realizar manipulaciones algebraicas de los vectores de $\mathbb{R}^n$ de manera muy similar a como se hace con números reales.

Espacios Vectoriales

Muchos conceptos matemáticos (tales como matrices, polinomios y funciones) comparten también estas propiedades.

Definición (Espacio vectorial sobre un cuerpo)

Se dice que un conjunto $\mathcal{V}$ es un **espacio vectorial** *sobre un cuerpo $\mathcal{K}$ si se tienen definidas:*

- *una operación interna* $+ : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *tal que* $(\mathcal{V}, +)$ *es grupo abeliano, esto es, se cumplen las propiedades 1, 2 , 3 y 4 del teorema anterior.*
- *una ley de composición externa* $\cdot : \mathcal{K} \times \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ *que verifica las propiedades 5, 6 , 7 y 8 del teorema anterior.*

Espacios Vectoriales

Ejemplos (de espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$)

- El conjunto $\mathbb{R}^n$ de las n-tuplas ordenadas de números reales con las operaciones usuales.
- El conjunto $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de matrices $m \times n$, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathbb{R}_k(x)$ de los polinomios de grado menor que k, es decir, de la forma $p(x) = a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ donde $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ son números reales, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar.
- El conjunto $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$ de las funciones reales definidas en el intervalo $[0,1]$. La suma está definida como $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ y el producto por un escalar $c \in \mathbb{R}$ como $(c \cdot f)(x) = c \cdot \left[f(x)\right]$
- El conjunto $\mathcal{C}([a,b])$ de las funciones reales continuas definidas en el intervalo $[a,b]$.

Espacios Vectoriales

Algunas propiedades de los vectores

Teorema

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathcal{K}$. Para cualesquiera $c, d \in \mathcal{K}$ y $u, v \in \mathcal{V}$ se verifica:

1. $0v = 0$
2. $c0 = 0$
3. *Si* $cv = 0$, *o* $c = 0$ *o* $v = 0$
4. $(-c)v = -(cv) = c(-v)$
5. $c(u - v) = cu - cv$
6. $(c - d)v = cv - dv$
7. *Si* $cv = dv$ *y* $v \neq 0$, *entonces* $c = d$
8. *Si* $cu = cv$, *y* $c \neq 0$, *entonces* $u = v$

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Definición

Sea $\mathcal{U}$ *un subconjunto no vacío del espacio vectorial* $\mathcal{V}$*. Se dice que* $\mathcal{U}$ *es* **subespacio vectorial** *de* $\mathcal{V}$ *si* $\mathcal{U}$ *tiene estructura de espacio vectorial con las mismas operaciones que* $\mathcal{V}$*.*

Teorema (Caracterización de los subespacios vectoriales)

Sea $\mathcal{V}$ *un espacio vectorial sobre un cuerpo* $\mathcal{K}$ *y sea* $\varnothing \neq \mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$*. Entonces* $\mathcal{U}$ *es subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$ *si y sólo si se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si* $v, w \in \mathcal{U}$*, entonces* $v + w \in \mathcal{U}$
2. *Si* $c \in \mathcal{K}$ *y* $v \in \mathcal{U}$*, entonces* $cv \in \mathcal{U}$

Espacios Vectoriales

Subespacios vectoriales

Ejemplo

El subconjunto $\mathcal{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = x_3 \right\}$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el subconjunto $\mathcal{A}$ formado por las matrices de la forma $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Ejemplo

- La intersección de dos subespacios es un subespacio.
- La unión de dos subespacios NO SIEMPRE es un subespacio.

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Un conjunto de vectores suele recibir el nombre de **sistema de vectores**.

Definición (Combinación lineal)

Una **combinación lineal** *de los vectores del sistema* $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{V}$ *es toda expresión de la forma*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_n v_n$$

donde $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *son escalares.*

Ejemplo

Dados $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

La expresión $2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2$ es una combinación lineal del sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

✓ El vector 0 se expresa como combinación lineal de cualquier sistema de vectores

$$0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$$

✓ Todo vector v se puede expresar como combinación lineal de cualquier sistema al que pertenezca

$$v = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n + 1v$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejercicio

Sean los vectores

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Estudiar si $\mathbf{w}$ se puede expresar como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$.

Solución: Se deben determinar escalares a, b y c tales que

$$\mathbf{w} = a\,\boldsymbol{v}_1 + b\,\boldsymbol{v}_2 + c\,\boldsymbol{v}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Solución: Escribimos

$$\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$$

De aquí obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & -b & + & 3c & = & -1\\ a & + & b & + & c & = & -2\\ 4a & + & 2b & + & 2c & = & -2\end{array}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos

$$a = 1 \qquad b = -2 \qquad c = -1$$

Por tanto, $\mathbf{w}$ se puede escribir como combinación lineal de $\boldsymbol{v}_1$, $\boldsymbol{v}_2$ y $\boldsymbol{v}_3$

$$\mathbf{w} = \boldsymbol{v}_1 \text{ -}2\boldsymbol{v}_2 \text{ - } \boldsymbol{v}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Definición (Subespacio generado por un sistema de vectores)

Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ un sistema de vectores de un espacio vectorial $\mathcal{V}$.
El conjunto de todas las combinaciones lineales

$$\left\{ a_1\vec{v}_1 + \cdots + a_p\vec{v}_p \mid a_1, \dots, a_p \in \mathcal{K} \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

- Este subespacio se llama **subespacio generado** por $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ y se denota

$$\mathcal{L}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p)$$

- El sistema $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_p\}$ se llama **sistema generador** del subespacio.

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ sobre $\mathbb{R}$, el sistema $\left\{\vec{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$ es un sistema generador del subespacio $\mathcal{W} = \left\{\vec{w} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 | x_3 = 0\right\}$

En efecto, $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathcal{W} \iff \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\0\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Podemos encontrar otros sistemas generadores de $\mathcal{W}$, por ejemplo

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Lema (Transitividad de las combinaciones lineales)

Sean $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$ *sistemas de vectores de un espacio* $\mathcal{V}$*. Si un vector* $\vec{v}$ *se expresa como una combinación lineal de* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_p\}$ *y cada uno de éstos es, a su vez, combinación lineal de* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$*, entonces* $\vec{v}$ *también podrá ser expresado linealmente en función de los vectores* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_m\}$*.*

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran los sistemas de vectores

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \quad y \quad \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

y el vector $\vec{v} = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2$. Puesto que $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ y $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$, entonces resulta

$$\vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + 2(\vec{u}_1 - \vec{u}_3) = (1+2)\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3 = 3\vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$$

Espacios Vectoriales

Sistemas de generadores

Definición (Sistemas equivalentes de vectores)

Sean $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ *dos sistemas de vectores.*
Se dice que son **equivalentes** *si cada vector del primer sistema se expresa como combinación lineal de los vectores del segundo sistema y viceversa.*

Ejemplo

Los sistemas

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ y } \left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

son equivalentes, ya que

$$\begin{array}{rclcrcl}
\vec{v}_1 & = & 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3, & \qquad & \vec{u}_1 & = & \vec{v}_2 - 2\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\
\vec{v}_2 & = & 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3, & & \vec{u}_2 & = & \vec{v}_2 - 3\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\
\vec{v}_3 & = & \vec{u}_1 - \vec{u}_2, & & \vec{u}_3 & = & -\vec{v}_3 + \vec{v}_4 \\
\vec{v}_4 & = & \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 & & & &
\end{array}$$

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Teorema (Criterio de equivalencia de sistemas de vectores)

Los sistemas $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m\}$ *son equivalentes si, y sólo si, generan el mismo subespacio, esto es, si* $\mathcal{L}(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_p) = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_m)$

✓ La equivalencia de sistemas de vectores verifica las propiedades **reflexiva**, **simétrica** y **transitiva**. Por lo tanto es una **relación de equivalencia** en $\mathcal{V}$.

Definición (Dependencia e Independencia lineal)

Un sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es* **linealmente dependiente** *si algún vector del sistema se puede expresar como combinación lineal de los demás.*

Es caso contrario, si ninguno de sus vectores se puede expresar como combinación lineal de los demás, se dice que el sistema es **linealmente independiente**.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplos

- En $\mathbb{R}^3$ el sistema $\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$ es **linealmente dependiente**, ya que podemos encontrar la combinación lineal

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 = 2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix} = \vec{v}_3$$

- El sistema $\left\{\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ del mismo espacio vectorial es **linealmente independiente** puesto que ninguno de sus vectores se puede expresar como combinacion lineal de los demás.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplos

- En el espacio vectorial $\mathbb{R}_3(x)$, el sistema $\{2 - x + x^2, 2x + x^2, 4 - 4x + x^2\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$4 - 4x + x^2 = 2(2 - x + x^2) - (2x + x^2)$$

- En el espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, el sistema $\left\{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\right\}$ es **linealmente dependiente**, porque

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = B + C$$

Teorema (Criterio de la dependencia lineal)

1. *El sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es* **linealmente dependiente** *si, y sólo si, existe alguna combinación lineal*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

   con algún coeficiente a_i *no nulo.*

2. *El sistema de vectores* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es* **linealmente independiente** *si, y sólo si, de toda combinación lineal*

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_p\vec{v}_p = \vec{0}$$

   se deduce que **todos** *los coeficientes* a_i *son nulos.*

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejemplo

El sistema $\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$ es linealmente dependiente, ya que podemos encontrar una combinación lineal igual a $\vec{0}$ con algún coeficiente no nulo

$$2\vec{v}_1 + 3\vec{v}_2 - \vec{v}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

☛ En general, si el sistema de ecuaciones resultante es escalonado es inmediato deducir si los coeficientes a_i necesariamente son todos nulos.

Podemos pasar de un sistema de vectores a otro sistema equivalente mediante las conocidas **transformaciones elementales**.

Teorema

Dado un sistema de vectores, pasamos a otro sistema equivalente si efectuamos **una** *de las siguientes transformaciones:*

1. *Permutar dos vectores.*
2. *Multiplicar cualquier vector por un escalar distinto de cero.*
3. *Sumar a cualquier vector una* **combinación lineal** *de los vectores restantes.*
4. **Eliminar** *del sistema cualquier vector que sea combinación lineal de los vectores restantes.*

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Ejercicio

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Calcule un sistema escalonado equivalente a $\mathcal{S}$

Solución: Aplicando transformaciones elementales se obtienen los sistemas:

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 & = & (1,1,1) \\ \vec{u}_2 & = & (1,2,3) \\ \vec{u}_3 & = & (1,0,1) \\ \vec{u}_4 & = & (1,-1,-3) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & (1,1,1) \\ \vec{v}_2 & = & (0,1,2) \\ \vec{v}_3 & = & (0,-1,0) \\ \vec{v}_4 & = & (0,-2,-4) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{w}_1 & = & (1,1,1) \\ \vec{w}_2 & = & (0,1,2) \\ \vec{w}_3 & = & (0,0,2) \\ \vec{w}_4 & = & (0,0,0) \end{array}$$

- $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es un sistema escalonado equivalente a $\mathcal{S}$

Teorema

1. *Si un sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_p\}$ *es linealmente independiente, entonces cualquier subconjunto de él también es linealmente independiente.*
2. *Si un sistema contiene a un sistema linealmente dependiente, entonces también es linealmente dependiente. En particular, si un sistema contiene al vector* $\vec{0}$*, dicho sistema es linealmente dependiente.*
3. *Si un vector* $\vec{v} \in \mathcal{V}$ *se expresa de forma* **única** *como combinación lineal de los vectores del sistema* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$*, entonces* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *es linealmente independiente.*
4. *Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *es un sistema linealmente independiente, entonces todo vector* $\vec{v} \in \mathcal{L}(\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m)$ *se expresa de forma* **única**.

Espacios Vectoriales

Dependencia e Independencia Lineal

Teorema

Si $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_m\}$ *un sistema linealmente dependiente (con algún vector no nulo), entonces podemos encontrar un subsistema linealmente independiente que genere el mismo subespacio.*

Ejercicio

Buscar un subsistema linealmente independiente del sistema siguiente

$$\left\{\vec{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix}2\\5\\3\end{pmatrix}\right\}$$

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

- Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial distinto de $\{\vec{0}\}$. En $\mathcal{V}$ son posibles dos casos:
  - Existe un sistema linealmente independiente que contiene un número de vectores tan grande como se quiera.
  - Existe un sistema linealmente independiente que contiene un número **máximo** de vectores.
- Los espacios vectoriales del último caso se llaman **espacios vectoriales de tipo finito**
- En particular, un espacio vectorial de este tipo será cualquier subespacio generado por un sistema finito de vectores.

Definición (Base de un espacio vectorial)

Se dice que el sistema $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ *es una* **base** *de* $\mathcal{V}$ *si*

1. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ *es generador y*
2. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ *es linealmente independiente.*

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplos

- $\mathcal{C} = \left\{ \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ **base canónica** o **estándar** de $\mathbb{R}^3$.
- El sistema $\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ es la **base estándar** de $\mathbb{R}_{n+1}(x)$.
- El sistema

  $$\left\{ E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

  es la **base estándar** de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Teorema

1. *Si* $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ *es una base de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$ *y* $\{\vec{w}_1, \ldots, \vec{w}_k\}$ *es un sistema linealmente independiente, entonces* $k \leq n$*.*
2. *Si* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ *y* $\{\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_m\}$ *son bases de un espacio vectorial* $\mathcal{V}$*, entonces* $n = m$*.*

- La **base** es el sistema linealmente independiente con el **máximo** número de vectores (si es finita).
- Todas las bases tienen el **mismo** número de vectores.

A este número n se le llama **dimensión** del espacio vectorial y escribimos

$$\dim(\mathcal{V}) = n$$

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplos

- $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n, ya que admite como base a

$$\mathcal{C} = \left\{ \vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \;\; \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \;\; \vec{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- $\mathbb{R}_{n+1}(x)$ tiene dimensión $n+1$, ya que $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ es una base.
- $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ tiene dimensión $m \cdot n$, ya que admite la siguiente base

$$\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22}, \ldots, E_{2n}, \ldots, E_{m1}, E_{m2}, \ldots, E_{mn}\}$$

Teorema (Propiedades de la dimensión)

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n. Entonces

1. *Cualquier sistema con $n+1$ vectores es linealmente dependiente.*
2. *Un sistema de n vectores es base de $\mathcal{V}$ si y sólo si, es generador o bien es linealmente independiente.*
3. *Si $\mathcal{L}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, entonces $\dim(\mathcal{L}) \leq n$.*

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplo

El sistema $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^4$.

- ✓ Estamos en un espacio vectorial de dimensión cuatro y tenemos un sistema con exactamente cuatro vectores.
- ✓ Se puede ver que es base demostrando, bien que es linealmente independiente o bien que es generador.
- ✓ En este caso, (por ser escalonado), es inmediato que es linealmente independiente.

☞ En general, **en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ (de dimensión n) cualquier sistema escalonado formado por n vectores es una base**.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

¿Cómo podemos obtener una base de todo el espacio vectorial $\mathcal{V}$ a partir de un sistema linealmente independiente?

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si tenemos que completar una base de un subespacio vectorial $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ procedemos de la siguiente manera:

1. Buscamos un sistema escalonado que sea equivalente al sistema dado.
2. Añadimos aquellos vectores necesarios para completar un sistema escalonado con n vectores.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Ejemplo

En el espacio $\mathbb{R}^5$ se considera el subespacio $\mathcal{L}$ generado por el sistema

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Hallemos una base de $\mathbb{R}^5$ a partir de una base de $\mathcal{L}$.

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Solución: En primer lugar, realizamos transformaciones elementales para encontrar un sistema escalonado equivalente al sistema inicial.

$$\begin{array}{rcl} \vec{u}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{u}_2 & = & (1,2,3,4,5) \\ \vec{u}_3 & = & (2,4,4,6,6) \\ \vec{u}_4 & = & (3,6,5,8,8) \\ \vec{u}_5 & = & (1,2,1,2,2) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{v}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{v}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{v}_3 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{v}_4 & = & (0,0,2,2,5) \\ \vec{v}_5 & = & (0,0,0,0,1) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \vec{w}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{w}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{w}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{w}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{w}_5 & = & (0,0,0,0,1) \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{x}_3 & = & (0,0,0,0,0) \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \\ \vec{x}_5 & = & (0,0,0,0,0) \end{array}$$

Espacios Vectoriales

Bases y dimensión

Solución (cont.): Después eliminamos los vectores igual a cero del último sistema y añadimos algún vector que permita completar un sistema escalonado con 5 vectores.

$$\begin{array}{lclclcl} \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) & \vec{x}_1 & = & (1,2,1,2,1) \\ \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) & -- & -- & -------- \\ \vec{x}_3 & = & (0,0,0,0,0) & \vec{x}_2 & = & (0,0,2,2,4) \\ \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) & -- & -- & -------- \\ \vec{x}_5 & = & (0,0,0,0,0) & \vec{x}_4 & = & (0,0,0,0,1) \end{array} \qquad \begin{array}{c} (1,2,1,2,1) \\ \boxed{(0,\ *\ ,\ *\ ,\ *\ ,\ *)} \\ (0,0,2,2,4) \\ \boxed{(0,\ 0,\ 0,\ *\ ,\ *)} \\ (0,0,0,0,1) \end{array}$$

De esta forma, una posible base de $\mathbb{R}^5$ es

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \vec{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Definición

El **rango** *de un sistema de vectores es la dimensión del subespacio que genera.*

Ejemplo

Hemos visto que el sistema $\mathcal{S}$ genera un subespacio $\mathcal{L}$ de dimensión 3, donde

$$\mathcal{S} = \left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{u}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{u}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Por lo tanto, el rango de $\mathcal{S}$ es 3.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- Toda matriz lleva asociados dos sistemas de vectores, uno formado por los vectores fila y el otro formado por los vectores columna.
- Podemos considerar el rango de una matriz dependiendo de si nos fijamos en sus vectores fila o sus vectores columna.
- Para cada matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, introducimos las siguientes ...

Definiciones

Rango de filas de A es el rango del sistema de los vectores fila de A.

Rango de columnas de A es el rango de los vectores columna de A.

Teorema

Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores fila de A coincide con la dimensión del subespacio generado por el sistema de vectores columna.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Definición (Rango de una matriz)

El **rango** *de una matriz se define como su rango de filas (o de columnas).*

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ podemos hallar su rango mediante operaciones elementales en sus filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 8 \\ 1 & -2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & -5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

De esta forma, tenemos que $rang(A) = 2$.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Teorema

Dada una matriz A de dimensión $m \times n$, las soluciones del sistema lineal homogéneo $A\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ forman un subespacio de $\mathbb{R}^n$.

Definiciones (Núcleo y nulidad de una matriz)

- El conjunto de soluciones $\{\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n | A\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}\}$ se llama **núcleo** de A, y se denota como $\mathcal{N}(A)$.
- La dimensión de $\mathcal{N}(A)$ se llama **nulidad** de A.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo (Hallar el núcleo de una matriz A)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = U$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \qquad + 3x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 + \ x_4 \ = 0 \end{array} \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -2x_2 - \ 3x_4 \\ x_2 = \quad x_2 \\ x_3 = \qquad\quad -x_4 \\ x_4 = \qquad\quad\ \ x_4 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{N}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

- $\mathcal{N}(A)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, que está determinado por el sistema homogéneo

$$\left\{\begin{array}{rr} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 = 0 \\ x_3 + \ x_4 \ = 0 \end{array}\right\}$$

que son las **ecuaciones cartesianas** del subespacio.

- Una **base** de $\mathcal{N}(A)$ es

$$\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Teorema (de la dimensión)

Si A es una matriz $m \times n$ entonces $n = rango(A) + nulidad(A)$.

Esto es, si $rango(A) = r$, entonces la dimensión del espacio de soluciones del sistema lineal $A\,\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ es $n - r$.

Teorema

Si $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}$ es una solución del sistema lineal $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$, entonces toda solución de este sistema es de la forma $\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{h}}$, donde $\vec{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{h}}$ es una solución del sistema homogéneo asociado $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$.

Espacios Vectoriales

Rango de una matriz y sistemas de ecuaciones lineales

Ejemplo

Compruebe el teorema sobre el sistema $\begin{cases} x_1 \quad\quad -2x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 \quad\quad = 8 \\ x_1 + 2x_2 \quad\quad -5x_4 = -9 \end{cases}$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & -5 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & -5 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = (U|c)$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \middle| \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Definición (Suma de subespacios)

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. La **suma** *de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es el conjunto*

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \left\{ \vec{v} \in \mathcal{V} | \vec{v} = \vec{u} + \vec{w}, \quad \text{con} \quad \vec{u} \in \mathcal{U} \quad \text{y} \quad \vec{w} \in \mathcal{W} \right\}$$

de todos los vectores de $\mathcal{V}$ que se expresan como suma de un vector de $\mathcal{U}$ y un vector de $\mathcal{W}$.

Teorema

La suma de dos subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Lema

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Si $\mathcal{B}_1 = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\}$ es una base de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$ es una base de $\mathcal{W}$. Entonces el subespacio suma $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ está generado por $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p\}$

$$\mathcal{U} + \mathcal{W} = \mathcal{L}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{w}_1, \dots, \vec{w}_p)$$

Teorema

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Entonces

$$dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = dim(\mathcal{U}) + dim(\mathcal{W}) - dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W})$$

Definición (Suma directa)

Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son dos subespacios vectoriales tales que $\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\}$, se dice que la suma de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ es **suma directa** *y la denotamos $\mathcal{U} \oplus \mathcal{W}$.*

Espacios Vectoriales

Suma de subespacios vectoriales

Definición (Subespacios suplementarios)

Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ subespacios vectoriales de $\mathcal{V}$. Decimos que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ son **suplementarios** *si*

$$\mathcal{U} \cap \mathcal{W} = \{\vec{0}\} \quad y \quad \mathcal{U} \oplus \mathcal{W} = \mathcal{V}$$

Ejemplo

Los subespacios

$$\mathcal{U} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 0 \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{W} = \left\{ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0 \right\}$$

son suplementarios.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Definición (Coordenadas)

Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, para cada $\vec{x} \in \mathcal{V}$ existe una **única** combinación lineal

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n = \vec{v}$$

A estos escalares $x_1, \ldots, x_n$ se les llama **coordenadas** del vector $\vec{x}$ respecto a la base $\mathcal{B}$.

Diremos que **$\vec{x}$ tiene coordenadas $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ respecto a la base $\mathcal{B}$** y escribiremos

$$[\vec{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \text{o bien} \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Ejemplo

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, dada la base

$$\boldsymbol{\mathcal{B}} = \left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

el vector $\vec{v}$ de coordenadas $(2, 3, 4)_{\boldsymbol{\mathcal{B}}}$ es

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}_{\boldsymbol{\mathcal{B}}} = 2\vec{w}_1 + 3\vec{w}_2 + 4\vec{w}_3 = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

✔ En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, si consideramos la *base canónica*

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ para todo vector } \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

se verifica

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \implies \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}}$$

Es decir, **las coordenadas de un vector $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ coinciden con sus componentes** $x_1, \ldots, x_n$.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

La base es de gran importancia en el estudio de los espacios vectoriales de dimensión finita.

En primer lugar, fijada una base $\boldsymbol{\mathcal{B}}$, cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ se identifica con sus coordenadas $x_1, x_2, \dots, x_n$ respecto a esa base.

Y así, trabajamos en el cuerpo $\mathcal{K}$, pues **todas las operaciones con los vectores quedan reducidas a operaciones con los elementos del cuerpo.**

Para sumar dos vectores basta sumar sus coordenadas y para multiplicar un escalar por un vector es suficiente multiplicar las coordenadas de dicho vector por el escalar.

Cambio de base

- ✓ Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión n.
- ✓ Todo vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ queda unívocamente determinado por sus coordenadas respecto a una base.
- ✓ Al existir más de una base, las coordenadas de un mismo vector $\vec{x}$ variarán al pasar de una base a otra.
- ✓ Estudiamos qué relación guardarán entre sí las coordenadas respecto a una y otra base.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

Expresemos el vector $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ respecto a cada base.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Definición (Cambio de base)

Sean $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ bases de un espacio vectorial.

$$\begin{cases} \vec{v'}_1 & = & a_{11}\vec{v}_1 + a_{21}\vec{v}_2 + \cdots + a_{n1}\vec{v}_n \\ \vdots & & \vdots \\ \vec{v'}_n & = & a_{1n}\vec{v}_1 + a_{2n}\vec{v}_2 + \cdots + a_{nn}\vec{v}_n \end{cases}$$

entonces la matriz del cambio de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ es

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

que coincide con la matriz traspuesta del sistema.

Espacios Vectoriales

Coordenadas y cambio de base

Teorema (Inversa de la matriz del cambio de base)

Si P es la matriz de cambio de una base $\mathcal{B}'$ a otra base $\mathcal{B}$ de un espacio vectorial $\mathcal{V}$ de dimensión n, entonces P es invertible y la matriz de cambio de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ es P^{-1}.

Ejemplo

En $\mathbb{R}^3$ se consideran las bases

$$\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ y } \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

1. Calcule la matriz de paso P de la base $\mathcal{C}$ a la base $\mathcal{B}$.
2. Calcule la matriz de paso Q de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$.
3. Compruebe que P y Q son inversas.