UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

Estructuras algebraicas para la computación

Grados de Informática, Software y Computadores — 5/9/2013

Apellidos y Nombre: ....

DNI: **Titulación:** **Grupo:**

---

1. (1.5 p.) Determine la veracidad de los siguientes enunciados:

   a) Si $\boldsymbol{A}$ es un conjunto no numerable entonces $\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ es un conjunto no numerable.

   b) $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, *)$ es grupo, siendo $*$ la operación definida $x * y = \dfrac{x \cdot y}{2}$

   c) La forma normal conjuntiva de la función $F\colon \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ definida por $F(x, y, z) = xz + y\overline{z}$ es $(\overline{x} + y + z) \cdot (x + y + \overline{z}) \cdot (x + y + z)$

2. (1 p.) Sea $\mathbb{B}$ el Álgebra de Boole binaria y sea D_{231} el Álgebra de Boole de los divisores positivos de 231 con las operaciones habituales:

$$a + b = m.c.m.(a, b), \quad a \cdot b = m.c.d.(a, b), \quad \bar{a} = \frac{231}{a}$$

   Determine el valor de n tal que $\mathbb{B}^n$ y D_{231} sean isomorfos y defina un isomorfismo entre ellos.

3. (0.75 p.) Dado $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0,\ 2x - y = a\}$ estudie para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ el conjunto W es un subespacio vectorial y calcule su dimensión.

4. (1.25 p.) Se sabe que en el espacio $\mathbb{R}^3$ el vector $\vec{v}$ tiene por coordenadas $(5, 1, -2)$ respecto de la base $B = \{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ y respecto de la base $B' = \{\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}\}$ sus coordenadas son $(6, -3, 4)$.

   Halle las coordenadas de $\vec{r}$ en la base B, sabiendo que:

$$\begin{aligned} \vec{p} &= 3\vec{x} - \vec{y} + \vec{z} \\ \vec{q} &= 4\vec{x} + 5\vec{y} - 6\vec{z} \end{aligned}$$

5. (1.5 p.) Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+y+t, ax+ay+z+(1+a)t, x+(1-a)y+2az+(1+a)t, x+2z+2t)$$

   a) Halle la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.
   b) Determine, según los valores de a, la dimensión de $Ker(f)$ e $Im(f)$.
   c) Halle, según los valores de a, una base de $Ker(f)$.
   d) Estudie si el vector $(1, 1+c, 1+2c, c+3) \in Im(f)$ para algún $c \in \mathbb{R}$.

6. (1.5 p.) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

   a) Calcule el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz A sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.
   b) Con dicho valor de a, halle su forma diagonal, una matriz de paso y A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.
   c) Use el teorema de Cayley-Hamilton para expresar A^{-1} (si existe) .

7. (1 p.) Dada la forma bilineal $f\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

   Se pide:

   a) Obtener la matriz asociada a f respecto de la base canónica.
   b) Demostrar que f define un producto escalar, definir la norma asociada y normalizar el vector $(1, 0, -1)$.

8. (1.5 p.) En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios

$$\mathcal{L}_1 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{rcl} x_1 - x_2 & = & 0 \\ 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right\}, \qquad \mathcal{L}_2 = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + ax_2 + bx_3 = 0 \right\}$$

   a) Calcule los valores de a y b para que $\mathcal{L}_1$ sea ortogonal a $\mathcal{L}_2$.
   b) Halle una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{L}_1$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{L}_2$ tales que $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

NORMAS DE EXAMEN:

- Numerar todos los folios y escribir los datos en todos ellos.
- Entregar esta hoja debidamente cumplimentada.
- **Razonar** todas las respuestas.
- **No** se puede usar calculadora.