UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática

Estructuras Algebraicas para la Computación

7 de septiembre de 2016

Apellidos y Nombre: .... **Grupo:** ....

DNI: .... **Titulación:** .... **Firma:** ....

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas. Para que un ejercicio se considere resuelto correctamente se debe indicar claramente el modelo matemático usado en la resolución y la justificación de su adecuación. No se valorará la mera coincidencia del resultado propuesto.
- No usar lápiz, se debe escribir con bolígrafo azul o negro.
- No se puede utilizar ningún dispositivo electrónico.

Al responder cada pregunta, define cada uno de los conceptos que aparecen en negrita.

1. (0,5 pt.) Justifica si es posible encontrar un alfabeto **finito** Σ tal que $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ sea un **conjunto numerable**.

2. (0,75 pt.) Sea D_{675} el conjunto de todos los divisores de 675 con la **relación de orden** divisibilidad.

   a) Dibuja su diagrama de Hasse.

   b) Dado el subconjunto $B = \{9, 15, 75, 225\}$, halla (si existen) **minimales**, **maximales**, **mínimo**, **máximo**, **cotas superiores**, **cotas inferiores**, **mínima cota superior** y **máxima cota inferior**.

   c) Justifica que D_{675} es un **retículo algebraico** y estudia si es **retículo complementado**.

3. (1,25 pt.) Sea $\mathbb{B}$ el **álgebra de Boole** binaria y sea $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ el álgebra de Boole de las funciones booleanas de tres variables.

   a) Da una lista de los **átomos** y otra lista de los **superátomos** de $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$.

   b) Da un ejemplo de una función booleana de tres variables que no esté en las listas anteriores y exprésala en función de los átomos y de los superátomos.

   c) ¿Existe un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ son álgebras de Boole isomorfas? En caso afirmativo, define un **isomorfismo**.

4. (0,75 pt.) La matriz de verificación de paridad de un cierto **código de grupo** es

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Determina el mensaje que se enviará para comunicar $E\ A\ C$ usando la equivalencia:

$$111\ M \quad 110\ E \quad 101\ T \quad 100\ R \quad 011\ C \quad 010\ I \quad 001\ A \quad 000\ S$$

   b) Halla cuatro palabras que tengan el mismo síndrome que 0101010.

   c) Halla cuatro palabras que se decodifiquen igual que 1101011.

5. (1 p.) En el **anillo** de matrices $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ se consideran los subconjuntos

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \mathcal{M}(\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Justifica que:

a) $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es **cuerpo**.

b) Para cualesquiera A, B y $C \in \mathcal{A}$, (con $A \neq 0$), siempre que $A \cdot B = A \cdot C$ se verifica $B = C$.

c) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}), \cdot)$ es **grupo abeliano**.

d) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ no es **anillo**.

6. (2 pt) Sean el subespacio vectorial $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ y la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Razone si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) $\mathcal{L}\{(-1, 2, -1), (0, 1, -1), (1, -2, 1)\} = W$

b) El sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ con $\vec{b} = (1, 1, 1)$ es incompatible.

c) El sistema de ecuaciones lineales $A\vec{x} = \vec{b}$ es compatible para todo $\vec{b} \in W$.

7. (3,75 pt.) De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ sabemos que tiene dos **valores propios** distintos, -1 y 2 y que sus **subespacios propios** son

$$\begin{aligned} U_{-1} &= \mathcal{L}\{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 0), (0, 2, 1, -2)\} \\ U_2 &= \mathcal{L}\{(-3, 1, 2, 2)\} \end{aligned}$$

a) Halla $f(0, 2, 1, -2)$.

b) ¿ $\vec{v} = (1, 5, -1, 0)$ es un **vector propio** de f asociado al valor propio -1 ?

c) Estudia si U_2 es un **subespacio ortogonal** al subespacio U_{-1}.

d) Halla la matriz asociada a la aplicación lineal en la base

$$\mathcal{B} = \{(1, 1, 0, 1), (1, -1, 2, 0), (0, 2, 1, -2), (-3, 1, 2, 2)\}$$

e) Halla la matriz A asociada a la aplicación lineal f en las bases canónicas.

f) Justifica si f es **diagonalizable ortogonalmente** y, en caso afirmativo, determina una matriz de paso Q tal que Q^t A $Q = D$, siendo $D = diag(-1, -1, -1, 2)$.

g) Halla una base $\mathcal{B}_1$ del subespacio $\mathcal{U}_{-1}$, y otra base $\mathcal{B}_2$ del subespacio $\mathcal{U}_2$ tales que $\mathcal{B}\,' = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una **base ortonormal** de $\mathbb{R}^4$.

h) Calcula las **coordenadas** del vector $\vec{v} = (1, 2, 1, 6)$ respecto a la base $\mathcal{B}\,'$.