Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Estructuras Algebraicas para la Computación

25 de Junio de 2012

Apellidos y Nombre: .... **Grupo:** ......

DNI: .... **Titulación:** .... **Firma:** ....

---

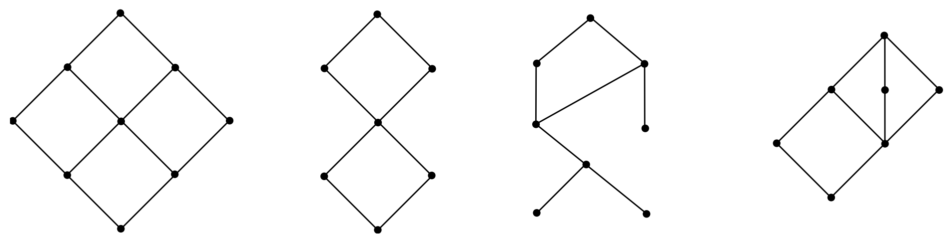
1. En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\} \qquad B = \left\{ b_n = \frac{3n}{n+6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determina los cardinales de cada uno de los conjuntos:

(i) A (ii) B (iii) $A \cup B$ (iv) $A \cap B$ (v) $B - A$

2. En los siguientes apartados determina si el diagrama de Hasse representa un retículo ordenado



(a) (b) (c) (d)

En caso afirmativo, estudia si es complementado y si es distributivo.

3. Determina la veracidad de los siguientes enunciados:

   a) En $(D_{90}, |)$ hay exactamente 4 elementos que no tienen complemento.

   b) $(D_{90}, |)$ es un álgebra de Boole.

   c) D_{1001} y $\mathbb{B}^3$ son álgebras de Boole isomorfas.

   d) $\mathcal{F}_3 = \mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ es un álgebra de Boole que tiene 8 átomos.

   e) La forma normal conjuntiva de la función $F : \mathbb{B}^3 \to \mathbb{B}$ definida $F(x, y, z) = xz + y\overline{z}$ es $(\overline{x} + y + z) \cdot (x + y + \overline{z}) \cdot (x + y + z)$

   f) $(\mathbb{R} - \{0\}, *)$ es grupo, siendo $*$ la operación definida $x * y = \dfrac{x \cdot y}{2}$

   g) Sea $(G, *)$ un grupo. Si G tiene siete elementos, entonces es abeliano.

   h) El conjunto de matrices

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

   tiene estructura de cuerpo con la suma y el producto usual de matrices.

4. Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales en $\mathbb{Z}_5$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & + & z & = & 2 \\ 2x & + & y & + & z & = & \alpha+3 \\ 4x & + & y & & & = & 0 \end{array}\right\}$$

a) Estudia la compatibilidad según el valor del parámetro α.

b) Resuélvelo cuando sea posible.

5. Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+y+t, ax+ay+z+(1+a)t, x+(1-a)y+2az+(1+a)t, x+2z+2t)$$

a) Halla la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

b) Determina, según los valores de a, la dimensión de $Ker(f)$ e $Im(f)$.

c) Estudia si el vector $(1, 1+a, 1+2a, a+3) \in Im(f)$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

d) Halla, según los valores de a, una base de $Ker(f)$

6. Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de los parámetros a y b para los que existe una matriz Q tal que Q^tAQ sea una matriz diagonal D.

b) Asigna valores adecuados a los parámetros y halla Q y D.

c) Enuncia el teorema de Cayley-Hamilton.

d) Usa el apartado anterior para calcular la inversa de A (si existe).

7. En el espacio $\mathbb{R}^3$ se considera la base

$$\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (0,1,1), \vec{v}_2 = (1,0,1), \vec{v}_3 = (1,1,0)\}$$

a) Halla una base ortonormal $\mathcal{B}'$ a partir de la base $\mathcal{B}$.

b) Calcula las coordenadas del vector $\vec{v} = (1,-2,3)$ respecto a la base $\mathcal{B}'$.

NORMAS DEL EXAMEN: Numera todos los folios y escribe tus datos en todos ellos, incluido éste.
Escribe en azul o negro.
Razona todas las respuestas.
No se puede usar calculadora.