

Cardinalidad. Relaciones de orden

Manuel Ojeda Aciego

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 2015-2016

Para comenzar ... un clásico

Considerad cuál es vuestro origen:
no fuisteis hechos para vivir como brutos,
sino para conseguir virtud y conocimiento.

La Divina Comedia
Infierno, Canto XXVI



Dante Alighieri
1265-1321

Cardinalidad

Definición (Conjuntos equipotentes)

Se dice que el conjunto A es **equipotente** al conjunto B si existe una función biyectiva $f: A \rightarrow B$. Se escribe $A \approx B$.

Ejemplo

Los siguientes conjuntos $A = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$ y $B = \{0, 1, \dots, 7\}$ son equipotentes

Ejercicio

Dado un conjunto X con 10 elementos, consideramos los conjuntos

$$A = \{Y \subseteq X \mid Y \text{ tiene 7 elementos}\}$$

$$B = \{Z \subseteq X \mid Z \text{ tiene 3 elementos}\}$$

Demuestre que $A \approx B$.

Cardinalidad

Teorema

Sean A , B y C conjuntos cualesquiera. Se verifica:

- 1 $A \approx A$
- 2 Si $A \approx B$, entonces $B \approx A$
- 3 Si $A \approx B$ y $B \approx C$, entonces $A \approx C$.

Demostración: Trivial a partir de las propiedades de las funciones biyectivas:

- 1 La identidad es una biyección.
- 2 La inversa de una función biyectiva es también una función biyectiva.
- 3 La composición de biyecciones también es biyección.

Cardinalidad

- Este teorema nos dice que dada una colección \mathcal{S} de conjuntos, la relación \approx es una relación de equivalencia en \mathcal{S} .
- En cada clase de equivalencia estarán los conjuntos equipotentes.
- A cada clase de equivalencia se le asigna un objeto: el cardinal de cada elemento en la clase.
- De esta forma, a los conjuntos $\{1\}, \{a\}, \dots$ que tienen **un** elemento se les asigna el cardinal 1;
a los conjuntos $\{1, 2\}, \{a, b\}, \dots$ que tienen **dos** elementos se les asigna el cardinal 2; ...
a los conjuntos $\{1, 2, \dots, n\}, \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, \dots$ que tienen **n** elementos se les asigna el cardinal n; ...

Cardinalidad

Para conjuntos finitos, ser equipotentes significa *tener el mismo número de elementos*. En estos conjuntos el cardinal coincide con la idea intuitiva de 'tamaño' del conjunto. Sin embargo, **no** siempre ocurre esto.

Ejemplo

Existen conjuntos equipotentes que **NO** tienen el mismo 'tamaño'.

Sea $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par}\}$. La función $f: \mathbb{Z} \rightarrow P$ definida como $f(x) = 2x$ nos permite afirmar que \mathbb{Z} tiene el **mismo** cardinal que P .

(¡¡¡ A pesar de que P tiene la mitad de los elementos de \mathbb{Z} !!!)

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

Definición

Se dice que un conjunto A es **finito** si para algún número natural n se puede establecer una biyección entre el conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ y el conjunto A . Este entero n se llama **cardinal** de A . Se denota $|A| = n$.
(Para $A = \emptyset$, $|A| = 0$)

- ☛ Establecer una biyección entre $\{1, 2, \dots, n\}$ y un conjunto A equivale a **contar** el número de elementos de A .

Definición

*Se dice que un conjunto A es **infinito** si no es finito (es decir, si no existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede establecer una biyección entre el conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ y el conjunto A).*

- ☛ Para probar que un conjunto A es infinito usando esta definición se debe probar que no existe ninguna biyección de $\{1, 2, \dots, n\}$ en A para ningún n .
- ☛ Esto es difícil debido a que hay que descartar infinitas posibilidades.

Conjuntos Infinitos

Teorema

\mathbb{N} es un conjunto infinito.

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- 1 A es un conjunto infinito.
- 2 Existe una inyección de \mathbb{N} en A .
- 3 Existe una inyección $f: A \rightarrow A$ tal que $f(A) \subset A$.

Corolario

Sea $f: A \rightarrow B$ una función inyectiva. Si A es infinito entonces B es infinito.

Conjuntos infinitos

Teorema

*Dados $A \subseteq B$ se cumple que si A es infinito entonces B es infinito.
Equivalentemente, si B es finito entonces A es finito.*

Corolario

Si A es infinito entonces $A \cup B$ y $\mathcal{P}(A)$ son infinitos. Además, si $B \neq \emptyset$ entonces $A \times B$ también es infinito.

Ejemplo

Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ se tiene que Σ^* es infinito.

- En efecto, sea $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ definida por $f(w) = aw$.
- Esta función es inyectiva y su imagen es un subconjunto propio de Σ^* , pues $f(\Sigma^*)$ es el subconjunto de las cadenas que empiezan con la letra a .
- Luego, Σ^* es infinito.

Conjuntos infinitos

- La técnica usada para establecer el cardinal de un conjunto infinito es esencialmente la misma que se usa para conjuntos finitos:
Cada conjunto de la forma $\{1, 2, \dots, n\}$ se usa como *conjunto estándar* con el que comparar otros conjuntos mediante una biyección.
- Hemos demostrado que el conjunto \mathbb{N} es infinito. Y ya que ningún número natural puede ser el cardinal de \mathbb{N} , tomamos el propio \mathbb{N} como conjunto estándar y denotamos por \aleph_0 su cardinal.

Definición

Se dice que un conjunto A tiene cardinal \aleph_0 , si existe una función biyectiva de \mathbb{N} en A . Se escribe $|A| = \aleph_0$.

Conjuntos numerables

La existencia de biyección de \mathbb{N} o algún conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ en A sugiere la posibilidad de **contar** los elementos de A , incluso aunque el proceso de recuento pudiera ser interminable.

Definición

Un conjunto A es **infinito numerable** si existe una biyección de \mathbb{N} en A .

El conjunto A se llama **numerable** si es finito o infinito numerable.

En otro caso, se dice que el conjunto A es **no numerable**.

☛ Si A es un conjunto infinito numerable, $|A| = \aleph_0$.

Conjuntos numerables

Ejemplo

Dado cualquier alfabeto finito Σ , el conjunto Σ^* es infinito numerable. Esto se puede demostrar exponiendo los elementos de Σ^* en un orden standard. En particular, si $\Sigma = \{0, 1\}$ y 0 precede a 1 en el orden 'alfabético' de Σ , entonces la enumeración de Σ^* en el orden estándar es

$$\langle \lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots \rangle$$

Ejercicios

- Sea $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Demuestre que el conjunto $k\mathbb{Z}^+$ es numerable.
- Determine el cardinal del conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.
- Halle el cardinal de los conjuntos siguientes:

$$A = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, \quad B = \{6, 7, 8, 9, \dots\}, \quad C = \left\{ c_n = \frac{2n}{n+6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Conjuntos numerables

Teorema

El producto cartesiano de dos conjuntos infinitos numerables es infinito numerable

El orden de la enumeración se especifica en el grafo dirigido

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	(a_1, b_3)	(a_1, b_4)	(a_1, b_5)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	(a_2, b_3)	(a_2, b_4)	\dots
a_3	(a_3, b_1)	(a_3, b_2)	(a_3, b_3)	(a_3, b_4)	
a_4	(a_4, b_1)	(a_4, b_2)	(a_4, b_3)		
a_5	(a_5, b_1)	(a_5, b_2)			
a_6	(a_6, b_1)				

Corolario

El conjunto de los números racionales positivos \mathbb{Q} es infinito numerable.

Conjuntos numerables

Teorema

- Si A_1 y A_2 son conjuntos numerables entonces $A_1 \cup A_2$ es un conjunto numerable.
- La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable.
- Si A es finito, B^A es numerable.

Ejemplo

Son numerables los siguientes conjuntos:

- 1 \mathbb{N}^n , \mathbb{Z}^n y \mathbb{Q}^n para cualquier valor de n .
- 2 El conjunto de todos los polinomios de grado n con coeficientes racionales.
- 3 El conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales.
- 4 El conjunto de todas las matrices $n \times m$ con componentes racionales.
- 5 El conjunto de todas las matrices de dimensión finita arbitraria con componentes racionales.

Conjuntos numerables

Teorema

Cada conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable.

Teorema

Si B es un conjunto numerable no vacío y $A \subseteq B$, entonces A es numerable.

Del teorema anterior se puede deducir que:

- ✓ Un conjunto dado no vacío S es numerable si y solo si S tiene el mismo cardinal que un subconjunto de \mathbb{Z}^+ .
- ✓ Así, es suficiente que exista una función inyectiva $f : S \rightarrow \mathbb{Z}^+$ (no necesariamente una biyección), para afirmar que S es numerable, ya que $S \approx f(S)$ (es decir, $|S| = |f(S)|$ y $f(S)$ es numerable.)

Conjuntos no numerables

Diagonalización de Cantor

Teorema (Cantor)

El subconjunto de números reales $[0, 1]$ no es numerable.

Demostración:

- Para demostrar que $[0, 1]$ no es numerable, basta mostrar que ninguna función $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ es sobreyectiva.
- Sea $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ una función cualquiera. Se colocan los elementos $f(1), f(2), \dots$, en una lista usando la representación decimal para cada $f(n)$:

$$\begin{aligned} f(1) &= 0, x_{11}x_{12}x_{13} \dots \\ f(2) &= 0, x_{21}x_{22}x_{23} \dots \\ f(3) &= 0, x_{31}x_{32}x_{33} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

donde x_{nj} es el j -ésimo dígito en la expansión decimal de $f(n)$.

Conjuntos no numerables

Diagonalización de Cantor

Demostración:(cont.)

- Ahora especificamos un número real $y \in [0, 1]$ como sigue: $y = 0, y_1 y_2 y_3 \dots$, donde

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{jj} \neq 1 \\ 2, & \text{si } x_{jj} = 1 \end{cases}$$

- El número y está determinado por los dígitos en la diagonal.
- Claramente, $y \in [0, 1]$.
- Sin embargo, y difiere de cada $f(n)$ al menos en un dígito de la expansión (a saber, el n -ésimo dígito).
- Por lo tanto, $y \neq f(n)$ para cualquier n .
- Y se concluye que la función $f: \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ no es sobreyectiva.
- Puesto que la función f era arbitraria, esto establece que $[0, 1]$ es infinito, pero **no numerable**.

Conjuntos no numerables

Teorema

El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable.

- Los conjuntos $[0, 1]$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son ejemplos de conjuntos infinitos pero no numerables.
- Elegimos $[0, 1]$ como el conjunto estándar para esta cardinalidad y damos la siguiente definición:

Definición

Un conjunto A tiene cardinal \aleph_1 si hay una biyección de $[0, 1]$ en A .

Al cardinal de $[0, 1]$ también se le denota **c** (por **continuo**).

Conjuntos no numerables

Conjuntos de cardinal \aleph_1

Ejemplos

- 1 Un intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$, tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$, ya que $h: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ definida como $h(x) = (b - a)x + a$ es biyectiva.
- 2 El intervalo abierto $(0, 1)$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$, puesto que existe una biyección $f: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ definida como

$$\begin{cases} f(0) &= \frac{1}{2} \\ f\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{1}{n+2} & n \in \mathbb{Z}^+ \\ f(x) &= x & x \in [0, 1] - \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\} \end{cases}$$

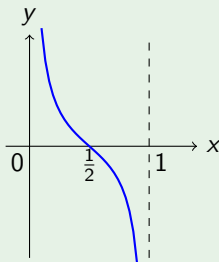
Conjuntos no numerables

Conjuntos de cardinal \aleph_1

Ejemplo

El conjunto \mathbb{R} de los números reales tiene cardinal \aleph_1 .

La función $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \frac{(\frac{1}{2} - x)}{x(1 - x)}$ es una biyección.



Comparación de números cardinales

Definición

Sean A y B conjuntos cualesquiera. Se dice que:

- $|A| \preceq |B|$ si existe una función inyectiva de A en B .
- $|A| \prec |B|$ si existe una función inyectiva $f: A \rightarrow B$, pero no existe ninguna función biyectiva de A en B .

Es decir, $|A| \prec |B|$ si, y sólo si, $|A| \preceq |B|$ y $|A| \neq |B|$

Teorema (Zermelo)

Sean los conjuntos A y B . Se verifica una de las tres situaciones siguientes:

$$(1) \quad |A| \prec |B|$$

$$(2) \quad |A| = |B|$$

$$(3) \quad |B| \prec |A|$$

Comparación de números cardinales

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si se cumple que $|A| \preceq |B|$ y $|B| \preceq |A|$, entonces $|A| = |B|$.

Ejemplo

Podemos demostrar más fácilmente que $[0, 1]$ y $(0, 1)$ tienen el mismo cardinal dando una función inyectiva de uno en otro, como sigue:

- $f: (0, 1) \rightarrow [0, 1]$ definida como $f(x) = x$
- $g: [0, 1] \rightarrow (0, 1)$ definida como $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

Análogamente, podemos demostrar que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| = \aleph_1$

Comparación de números cardinales

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces $|A| \prec \aleph_0 \prec \aleph_1$

Teorema

Sea A un conjunto infinito. Entonces $\aleph_0 \preceq |A|$

Teorema (Cantor)

Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $|A| \prec |\mathcal{P}(A)|$.

A partir de este teorema podemos afirmar la existencia de una jerarquía de cardinales infinitos.

Comparación de números cardinales

- Podemos construir un conjunto infinito numerable de números cardinales, siendo cada uno de ellos inferior al siguiente:

$$|A| \prec |\mathcal{P}(A)| \prec |\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))| \prec \dots$$

- Como consecuencia de esta jerarquía no existe un cardinal infinito máximo.
- No obstante, existe un cardinal infinito mínimo, \aleph_0 , el cardinal de \mathbb{N} .

Relaciones de orden

Definición (Relación de orden parcial)

Sea \mathcal{R} una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío A .

- Se dice que \mathcal{R} es una **relación de orden parcial** si es **reflexiva**, **antisimétrica** y **transitiva**.
- El par (A, \mathcal{R}) se llama **conjunto parcialmente ordenado**.

Para denotar las relaciones de orden usaremos los símbolos \preceq , \ll o \sqsubseteq .

Ejemplos

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
- En el conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ la relación $|$ de divisibilidad nos genera la siguiente relación de orden:

$$\mathcal{R}_| = \{(2, 2), (2, 4), (2, 10), (2, 12), (2, 20), (4, 4), (4, 12), (4, 20), \\ (5, 5), (5, 10), (5, 20), (10, 10), (10, 20), (12, 12), (20, 20)\}$$

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Una relación de orden parcial \preceq sobre un conjunto A se puede representar usando un grafo simplificado teniendo en cuenta las propiedades de la relación: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- ✓ Por ser reflexiva, tenemos asegurados los arcos (a, a) .
- ✓ Por ser antisimétrica, no habrá arcos de ida y vuelta, es decir, si aparece (a, b) , no aparecerá (b, a) .
- ✓ Por ser transitiva, si aparecen los arcos (a, b) y (b, c) , también contamos con el arco (a, c) .
- ✓ Por todo ello, podemos **simplificar** la gráfica prescindiendo de los arcos que están asegurados.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Para determinar qué arcos son imprescindibles definimos los siguientes conceptos.

Definición

Sean a y b elementos de un conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) .

- Se dice que son elementos **comparables** si $a \preceq b$ o bien $b \preceq a$.
- Se dice que el elemento b es **sucesor inmediato** del elemento a si se verifican las siguientes condiciones:
 - ▶ $a \preceq b$
 - ▶ No existe $c \in A$, tal que $a \preceq c \preceq b$.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos describir un grafo de la relación más simple: el **diagrama de Hasse**.

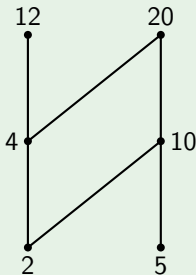
- Empezamos representando cada elemento del conjunto A con un punto del plano, colocándolos de abajo hacia arriba (el punto a por debajo del b , si $a \preceq b$).
- Dibujamos una línea ascendente desde cada elemento hasta cada uno de sus sucesores inmediatos.
- Se suprimen las orientaciones, pues todas las líneas son ascendentes.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo

El conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación de orden parcial divisibilidad se representa mediante el diagrama de Hasse:

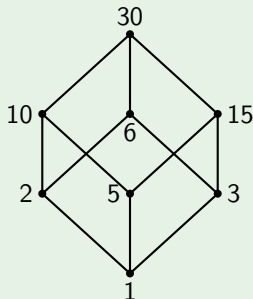


Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo

El conjunto \mathcal{D}_{30} de los divisores de 30 con la relación de orden parcial divisibilidad se representa como se indica:



Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejercicio

En el conjunto $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, b), (b, d), (b, e), (b, f), \\ (c, c), (c, d), (c, e), (c, f), (d, d), (d, f), (e, e), (e, f), (f, f)\}$$

- 1 Demuestre que (T, \mathcal{R}) es un conjunto parcialmente ordenado.
- 2 Dibuje su diagrama de Hasse.

Relaciones de orden

Orden producto

Definición (Orden Producto)

Sean (A, \leq) y (B, \sqsubseteq) dos conjuntos parcialmente ordenados.

En el conjunto $A \times B$ se define la relación \preceq :

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \leq a_2 \text{ y } b_1 \sqsubseteq b_2$$

Teorema

$(A \times B, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

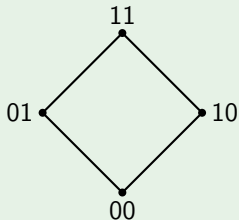
Relaciones de orden

Orden producto

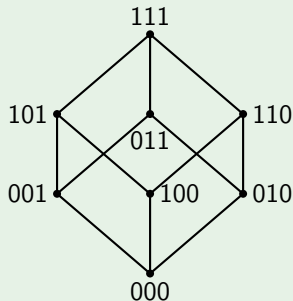
Ejemplo



(\mathbb{B}, \leq)



(\mathbb{B}^2, \preceq)



(\mathbb{B}^3, \preceq)

Relaciones de orden

Definición (Orden Lexicográfico)

Sean (A, \leq) y (B, \sqsubseteq) dos conjuntos parcialmente ordenados. En el conjunto $A \times B$ se define la relación \preceq (llamada **orden lexicográfico**)

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 < a_2 \text{ o } (a_1 = a_2 \text{ y } b_1 \sqsubseteq b_2)$$

Teorema

- 1 $(A \times B, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
- 2 Si (A, \leq) y (B, \sqsubseteq) son órdenes totales, el orden lexicográfico también es total.

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) .

- 1 Se dice que $x \in B$ es **maximal** de B , si no existe ningún $b \in B$ posterior.
- 2 Se dice que $x \in B$ es **máximo** de B , si x es posterior a todo $b \in B$.
- 3 Se dice que $x \in B$ es **minimal** de B , si no existe ningún $b \in B$ anterior.
- 4 Se dice que $x \in B$ es **mínimo** de B , si x es anterior a todo $b \in B$.

Teorema

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) .

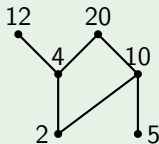
- 1 El máximo de B (si existe) es único.
- 2 El mínimo de B (si existe) es único.

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación de divisibilidad.



12 y 20 son maximales de $B_1 = \{2, 4, 12, 20\}$

20 es máximo de $B_2 = \{2, 4, 10, 20\}$

2 y 5 son minimales de $B_3 = \{2, 5, 12, 20\}$

2 es minimal (y mínimo) de B_1

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq) .

- 1 Se dice que $c \in A$ es **cota superior** de B , si c es posterior a todo $b \in B$.
- 2 Se dice que $c \in A$ es **cota inferior** de B , si c es anterior a todo $b \in B$.
- 3 Se dice que $m \in A$ es la **mínima cota superior** o **supremo** de B , si m es el mínimo del conjunto $C_s(B)$ de las cotas superiores de B .
- 4 Se dice que $M \in A$ es la **máxima cota inferior** o **ínfimo** de B , si M es el máximo del conjunto $C_i(B)$ de las cotas inferiores de B .

Relaciones de orden

Orden total compatible con un orden dado

Lema

Sea (A, \preceq) un conjunto parcialmente ordenado. Si A es finito y no vacío, entonces tiene un elemento minimal.

Aplicando el lema anterior repetidamente podemos encontrar una relación de orden total \ll **compatible** con \preceq ; es decir, una relación de orden total \ll que contenga a la relación de orden parcial \preceq dada:

para todo $a, b \in A$ si $a \preceq b$, entonces $a \ll b$

El proceso de construcción de un orden total como \ll se llama

clasificación u **ordenación topológica**.

Relaciones de orden

Algoritmo de ordenación topológica

Dada una relación de orden parcial \preceq en un conjunto finito no vacío A , nos planteamos encontrar una relación de orden total \ll compatible con \preceq , esto es, para todo $a, b \in A$ si $a \preceq b$, entonces $a \ll b$.

- 1 Se empieza eligiendo un elemento minimal $a_1 \in A$.
- 2 Si $A \setminus \{a_1\}$ no es vacío, se elige un elemento minimal $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.
- 3 Se repite este proceso hasta elegir todos los elementos de A .
- 4 La secuencia $a_1 \ll a_2 \ll \cdots \ll a_n$ nos proporciona un orden total.