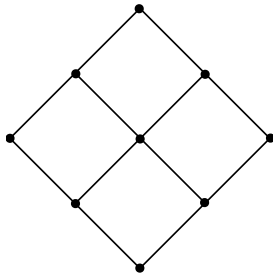


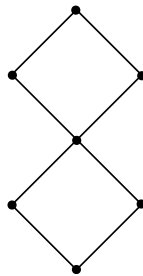
Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 2 de Ejercicios

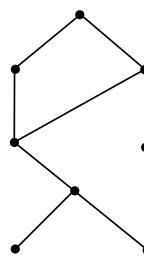
1. En los siguientes apartados determina si el diagrama de Hasse representa un retículo ordenado



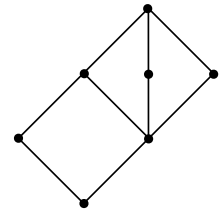
(a)



(b)



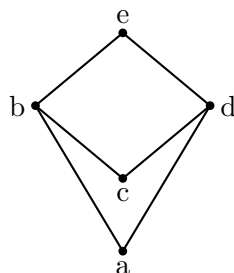
(c)



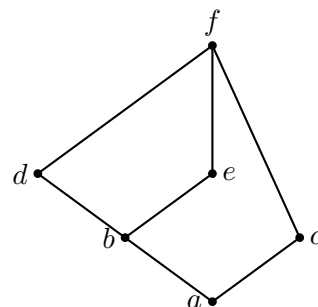
(d)

En caso afirmativo, estudia si es complementado y si es distributivo.

2. Justifica por qué no es **retículo** el conjunto parcialmente ordenado (A, \preceq)



(A, \preceq)



(\mathcal{M}, \preceq)

3. Justifica por qué no es distributivo el retículo (\mathcal{M}, \preceq) y estudia si es complementado.

4. Da ejemplos (si existen) de:

- Un **conjunto parcialmente ordenado** que no sea **retículo ordenado**.
- Un **retículo acotado** que no sea finito.
- Un **retículo distributivo** que no sea complementado.
- Un **retículo complementado** que no sea distributivo.
- Un álgebra de Boole con 24 elementos.

5. Sea D_{60} el conjunto de todos los divisores de 60 con la relación divisibilidad

- Dibuja su diagrama de Hasse.
- Da una lista de los átomos y otra lista de los elementos \sqcup -irreducibles de D_{60} .
- Expresa 60, 12 y 20 mediante elementos \sqcup -irreducibles (en más de una forma si es posible).
- Determina los elementos que tienen complemento.

6. Se considera el retículo $(D_n, |)$ con $n = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdots p_k^1$, donde cada $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ son primos. Estudia si es posible definir una función

$$\begin{array}{ccc} \bar{\cdot}: & D_n & \longrightarrow D_n \\ & x & \longmapsto \bar{x} \end{array}$$

tal que $m.c.d.(x, \bar{x}) = 1$ y $m.c.m.(x, \bar{x}) = n$.

7. En el conjunto $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ de las funciones de \mathbb{B}^2 en \mathbb{B} se considera la relación \preceq definida:

$$f \preceq g \iff f(x) \leq g(x) \text{ para cada } x \in \mathbb{B}^2$$

- Dibuja el diagrama de Hasse de $(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq)$.
- Señala los átomos y superátomos.
- Estudia si es posible definir una función

$$\begin{array}{ccc} -: & \mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}) & \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}) \\ & f & \longmapsto g \end{array}$$

tal que $(f+g)(x) = 1$ y $(f \bullet g)(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{B}^2$.

- Justifica si $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ es un álgebra de Boole.

8. En un álgebra de Boole \mathcal{A} se define la operación \oplus (xor) de la siguiente manera: $a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$.

- Determina $a \oplus a$, $a \oplus 0$, $a \oplus 1$ y $a \oplus \bar{a}$.
- Demuestra o refuta cada una de las siguientes afirmaciones

$$\begin{array}{ll} i) a \oplus b = b \oplus a & ii) a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c \\ iii) a \oplus b = \bar{a} \oplus \bar{b} & iv) a \oplus bc = (a \oplus b)(a \oplus c) \\ v) a(b \oplus c) = ab \oplus ac & vi) \overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b = a \oplus \bar{b} \\ vii) a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b & viii) a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c \end{array}$$

9. Encuentra un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y \mathbb{B}^5 sean isomorfos como álgebras de Boole.

10. Sea el conjunto $A = \{a, b, c\}$. Estudia si es posible definir un isomorfismo $\phi: D_{105} \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

En caso afirmativo, halla $\phi(35)$ y $\phi(21)$.

11. Se consideran las álgebras de Boole $\mathcal{A}_1 = D_{2310}$ y $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$ y se define la función $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ del siguiente modo:

$$f(2) = \{a\} \quad f(3) = \{b\} \quad f(5) = \{c\} \quad f(7) = \{d\} \quad f(11) = \{e\}$$

- Expresa, si es posible, los elementos 110, 210 y 330 en función de **átomos** y **superátomos**.
- Determina cuáles deben ser las imágenes de $f(35)$, $f(110)$, $f(210)$ y $f(330)$ para que f sea isomorfismo de álgebras de Boole.
- Estudia si se puede definir otra función $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$ que también sea **isomorfismo de álgebras de Boole**.
- En caso afirmativo, determina $g(110)$, $g(210)$ y $g(330)$.
- ¿Cuántos isomorfismos diferentes se pueden definir entre \mathcal{A}_1 y \mathcal{A}_2 ?

12. Demuestra o refuta:

- a) Todo conjunto ordenado es un retículo.
- b) Si \mathcal{L} es un retículo finito, entonces es acotado.
- c) Si \mathcal{L} es un retículo complementado, entonces es un álgebra de Boole.
- d) Si \mathcal{A} es un álgebra de Boole y $a, b, c \in \mathcal{A}$ son tales que $a + b = a + c$, entonces $b = c$.
- e) Existe $n \in \mathbb{N}_{250}$ tal que D_n y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B})$ son isomorfos como álgebras de Boole.
- f) En el álgebra de Boole $(D_{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, +, \cdot)$ se verifica

$$\overline{(x \cdot 3)} \cdot (77 + 3) = 231\bar{x} + 77$$

- g) En el álgebra de Boole $(D_{210}, +, \cdot)$ se verifica

$$\overline{(x \cdot 3)} \cdot (35 + 3) = 105\bar{x} + 35$$

13. Define una función booleana de \mathbb{B}^3 en \mathbb{B} y halla su forma normal disyuntiva.

14. Halla la forma normal disyuntiva de la función booleana $F : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$ dada en forma conjuntiva

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})$$

15. Sean las expresiones booleanas

$$E_1(x, y, z) = \overline{x + \bar{z}} + \bar{y} \cdot z + \overline{y + z} \quad \text{y} \quad E_2(x, y, z) = \overline{x \cdot z + y \cdot \bar{z}} + \bar{y}$$

- a) Determina si $E_1(x, y, z)$ y $E_2(x, y, z)$ son equivalentes.
- b) Estudia si mediante la expresión booleana E_2 se puede especificar la función booleana

$$F(x, y, z) = \bar{x}z + \bar{y}$$

- c) Halla la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana que se puede especificar mediante la expresión booleana $E_1(x, y, z)$.