E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2015/2016

Estructuras Algebraicas para la Computación Relación 7 de Ejercicios

1. En el espacio vectorial \mathbb{R}^3 se consideran los siguientes endomorfismos:

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2, -x_1 + 3x_2 + x_3, x_2 + x_3)$$

$$\varphi_3(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$

- a) Halla los valores y vectores propios de cada uno.
- b) Estudia si son diagonalizables.

2. Estudia para qué valores del parámetro a son diagonalizables los siguientes endomorfismos

•
$$f_1(x, y, z) = (x, ax + y, x + y + 2z)$$

•
$$f_2(x,y,z) = (x-2y-(2+a)z,y+az,z)$$

3. De un endomorfismo $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se sabe que (1,1) es un vector propio asociado al valor propio $\lambda = 2$ y que $\varphi(0,1) = (1,2)$.

- a) Encuentra la matriz del endomorfismo respecto de la base canónica.
- b) Halla, si es posible, una base respecto a la cual la matriz de φ sea una matriz diagonal.
- 4. Halla los valores y vectores propios de cada una de las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Estudia la diagonabilidad de cada una de las siguientes matrices según los valores de los parámetros

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & b \\ 3 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\alpha \\ -\alpha & 0 & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & 0 \end{pmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

6. Estudia para qué valores $t \in \mathbb{R}$ la matriz A es diagonalizable

$$A = \left(\begin{array}{cc} t+3 & t^2 - 10\\ 1 & t+1 \end{array}\right)$$

1

7. Dada la matriz

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

- a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.
- b) Usa el apartado anterior para calcular A^{200}
- c) Sin efectuar nuevos cálculos, ¿podrías decir si existe la inversa de A?

8. Dada la matriz

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

- a) Estudia si es diagonalizable y, en caso afirmativo, expresa A en función de sus valores y vectores propios.
- b) Usa el apartado anterior para calcular A^{2011} y determina (si es posible) A^{-2011} .
- c) Comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.

9. Para las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a) Encuentra la ecuación característica $p(\lambda) = 0$ y comprueba el teorema de Cayley-Hamilton.
- b) Usa el apartado anterior para calcular la inversa (si existe) o bien justificar que no existe.

10. Demuestra:

- a) Si λ es un valor propio de una matriz A inversible, entonces $\lambda \neq 0$ y $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} .
- b) Si λ es un valor propio de una matriz A, entonces λ^2 es un valor propio de A^2 . En general, λ^n es un valor propio de A^n .

11. Halla los valores propios de A^9 , siendo

$$A = \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

(Sugerencia: Utiliza el ejercicio anterior)