Estructuras algebraicas para la computación

Tercera prueba

04–06–2013

Apellidos y Nombre:...

DNI:........................ **Especialidad y Grupo:**...............................

---

1. Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, 3y - z)$. Se pide:

   a) Obtener, si es posible, una base del núcleo (Ker$f$) de la aplicación y determinar su dimensión.

   b) Determinar si los vectores $(3, -4)$ y $(1, 2, 3)$ pertenecen al núcleo de f (justifique la respuesta).

   c) Obtener, si es posible, una base y las ecuaciones cartesianas y paramétricas de la imagen (Imf).

   d) Determinar si los vectores $(3, -4)$ y $(0, 0)$ pertenecen a la imagen de f (justifique la respuesta).

   e) Determinar si la aplicación es inyectiva, sobreyectiva y/o biyectiva (justifique la respuesta).

   f) Calcular la matriz asociada a la aplicación lineal respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y la base $\{(1, -2), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

   se pide:

   a) El valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que la matriz A sea diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

   b) Con dicho valor de a, halle su forma diagonal, una matriz de paso y A^n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

   c) Si existe, de la expresión de A^{-1} mediante el teorema de Cayley-Hamilton.

   d) ¿Es posible diagonalizar ortogonalmente? Si es así, dar la matriz de paso ortogonal.

3. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

   con autovalores $\lambda_1 = 2$ con $m_a(2) = 2$ y $\lambda_2 = -1$ con $m_a(-1) = 1$ y con subespacios propios correspondientes $V_2 =< \{(1, -1, 0)(1, 0, -1)\} >$ y $V_{-1} =< \{(1, 1, 1)\} >$, diagonalícela ortogonalmente.

4. Dada la forma bilineal $f \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f((x_1, x_2, x_3)(y_1, y_2, y_3)) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$$

   Se pide:

   a) Demostrar que f define un producto escalar y definir la norma asociada.

   b) Respecto de este producto escalar, ortogonalizar la siguiente base de base $\mathbb{R}^3$:

$$B = \{(-2, 1, 3), (1, 2, 0), (2, -1, 1)\}$$

NO SE PUEDE UTILIZAR CALCULADORA