Cardinalidad. Relaciones de orden

Manuel Ojeda Aciego

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 2015-2016

Para comenzar . . . un clásico

Considerad cuál es vuestro origen:
no fuisteis hechos para vivir como brutos,
sino para conseguir virtud y conocimiento.

La Divina Comedia
Infierno, Canto XXVI

Dante Alighieri
1265-1321

Cardinalidad

Definición (Conjuntos equipotentes)

Se dice que el conjunto A *es* **equipotente** *al conjunto* B *si existe una función biyectiva* $f : A \to B$. *Se escribe* $A \approx B$.

Ejemplo

Los siguientes conjuntos $A = \{000, 001, 010, 100, 011, 101, 110, 111\}$ y $B = \{0, 1, \cdots, 7\}$ son equipotentes

Ejercicio

Dado un conjunto X con 10 elementos, consideramos los conjuntos

$$\begin{aligned} A &= \{Y \subseteq X \mid \quad Y \text{ tiene 7 elementos}\} \\ B &= \{Z \subseteq X \mid \quad Z \text{ tiene 3 elementos}\} \end{aligned}$$

Demuestre que $A \approx B$.

Cardinalidad

Teorema

Sean A, B y C conjuntos cualesquiera. Se verifica:

1. $A \approx A$
2. *Si* $A \approx B$, *entonces* $B \approx A$
3. *Si* $A \approx B$ *y* $B \approx C$, *entonces* $A \approx C$.

Demostración: Trivial a partir de las propiedades de las funciones biyectivas:

1. La identidad es una biyección.
2. La inversa de un función biyectiva es también un función biyectiva.
3. La composición de biyecciones también es biyección.

Cardinalidad

- Este teorema nos dice que dada una colección $\mathcal{S}$ de conjuntos, la relación $\approx$ es una relación de equivalencia en $\mathcal{S}$.
- En cada clase de equivalencia estarán los conjuntos equipotentes.
- A cada clase de equivalencia se le asigna un objeto: el cardinal de cada elemento en la clase.
- De esta forma, a los conjuntos $\{1\}, \{a\}, \ldots$ que tienen **un** elemento se les asigna el cardinal 1;

  a los conjuntos $\{1, 2\}, \{a, b\}, \cdots$ que tienen **dos** elementos se les asigna el cardinal 2; ...

  a los conjuntos $\{1, 2, ..., n\}, \{a_1, a_2, ..., a_n\}, \cdots$ que tienen **n** elementos se les asigna el cardinal n; ...

Cardinalidad

Para conjuntos finitos, ser equipotentes significa *tener el mismo número de elementos*. En estos conjuntos el cardinal coincide con la idea intuitiva de 'tamaño' del conjunto. Sin embargo, **no** siempre ocurre esto.

Ejemplo

Existen conjuntos equipotentes que **NO** tienen el mismo 'tamaño'.
Sea $P = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \text{ es par } \}$. La función $f : \mathbb{Z} \to P$ definida como $f(x) = 2x$ nos permite afirmar que $\mathbb{Z}$ tiene el **mismo** cardinal que P.
(¡¡¡ A pesar de que P tiene la mitad de los elementos de $\mathbb{Z}$!!!)

Conjuntos finitos y conjuntos infinitos

Definición

Se dice que un conjunto A es **finito** si para algún número natural n se puede establecer una biyección entre el conjunto $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \dots, n\}$ y el conjunto A. Este entero n se llama **cardinal** de A. Se denota $|A| = n$.
(Para $A = \varnothing$, $|A| = 0$)

- Establecer una biyección entre $\{1, 2, \dots, n\}$ y un conjunto A equivale a **contar** el número de elementos de A.

Definición

Se dice que un conjunto A es **infinito** *si no es finito (es decir, si no existe un número natural $n \in \mathbb{N}$ tal que se puede establecer una biyección entre el conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ y el conjunto A).*

- Para probar que un conjunto A es infinito usando esta definición se debe probar que no existe ninguna biyección de $\{1, 2, \dots, n\}$ en A para ningún n.
- Esto es difícil debido a que hay que descartar infinitas posibilidades.

Conjuntos Infinitos

Teorema

$\mathbb{N}$ *es un conjunto infinito.*

Teorema

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *A es un conjunto infinito.*
2. *Existe una inyección de $\mathbb{N}$ en A.*
3. *Existe una inyección $f : A \to A$ tal que $f(A) \subset A$.*

Corolario

Sea $f : A \to B$ una función inyectiva. Si A es infinito entonces B es infinito.

Conjuntos infinitos

Teorema

Dados $A \subseteq B$ se cumple que si A es infinito entonces B es infinito.
Equivalentemente, si B es finito entonces A es finito.

Corolario

Si A es infinito entonces $A \cup B$ y $\mathcal{P}(A)$ son infinitos. Además, si $B \neq \varnothing$ entonces $A \times B$ también es infinito.

Ejemplo

Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$ se tiene que Σ^* es infinito.

- En efecto, sea $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ definida por $f(w) = aw$.
- Esta función es inyectiva y su imagen es un subconjunto propio de Σ^*, pues $f(\Sigma^*)$ es el subconjunto de las cadenas que empiezan con la letra a.
- Luego, Σ^* es infinito.

Conjuntos infinitos

- La técnica usada para establecer el cardinal de un conjunto infinito es esencialmente la misma que se usa para conjuntos finitos:
  Cada conjunto de la forma $\{1, 2, ..., n\}$ se usa como *conjunto estándar* con el que comparar otros conjuntos mediante una biyección.
- Hemos demostrado que el conjunto $\mathbb{N}$ es infinito. Y ya que ningún número natural puede ser el cardinal de $\mathbb{N}$, tomamos el propio $\mathbb{N}$ como conjunto estándar y denotamos por $\aleph_0$ su cardinal.

Definición

Se dice que un conjunto A tiene cardinal $\boldsymbol{\aleph}_0$, si existe una función biyectiva de $\mathbb{N}$ en A. Se escribe $|A| = \aleph_0$.

Conjuntos numerables

La existencia de biyección de $\mathbb{N}$ o algún conjunto $\{1, 2, ..., n\}$ en A sugiere la posibilidad de **contar** los elementos de A, incluso aunque el proceso de recuento pudiera ser interminable.

Definición

Un conjunto A es **infinito numerable** *si existe una biyección de $\mathbb{N}$ en A.*

El conjunto A se llama **numerable** *si es finito o infinito numerable.*

En otro caso, se dice que el conjunto A es **no numerable**.

☛ Si A es un conjunto infinito numerable, $|A| = \aleph_0$.

Conjuntos numerables

Ejemplo

Dado cualquier alfabeto finito Σ, el conjunto Σ^* es infinito numerable.

Esto se puede demostrar exponiendo los elementos de Σ^* en un orden standard.

En particular, si $\Sigma = \{0, 1\}$ y 0 precede a 1 en el orden 'alfabético' de Σ, entonces la enumeración de Σ^* en el orden estándar es

$$\langle \lambda, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, \dots \rangle$$

Ejercicios

- Sea $k \in \mathbb{Z}, \quad k \neq 0$. Demuestre que el conjunto $k\mathbb{Z}^+$ es numerable.
- Determine el cardinal del conjunto $A = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$.
- Halle el cardinal de los conjuntos siguientes:

$$A = \{10, 20, 30, 40, \dots\}, \quad B = \{6, 7, 8, 9, \dots\}, \quad C = \left\{ c_n = \frac{2n}{n+6} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Conjuntos numerables

Teorema

El producto cartesiano de dos conjuntos infinitos numerables es infinito numerable

El orden de la enumeración se especifica en el grafo dirigido

$$
\begin{array}{c|ccccccccc}
 & b_1 & & b_2 & & b_3 & & b_4 & & b_5 \\
\hline
a_1 & (a_1, b_1) & & (a_1, b_2) & \rightarrow & (a_1, b_3) & & (a_1, b_4) & \rightarrow & (a_1, b_5) \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
a_2 & (a_2, b_1) & & (a_2, b_2) & & (a_2, b_3) & & (a_2, b_4) & & \cdots \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & \\
a_3 & (a_3, b_1) & & (a_3, b_2) & & (a_3, b_3) & & (a_3, b_4) & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & \swarrow & & \nearrow & & & \\
a_4 & (a_4, b_1) & & (a_4, b_2) & & (a_4, b_3) & & & & \\
 & & \swarrow & & \nearrow & & & & & \\
a_5 & (a_5, b_1) & & (a_5, b_2 1) & & & & & & \\
 & \downarrow & \nearrow & & & & & & & \\
a_6 & (a_6, b_1) & & & & & & & &
\end{array}
$$

Corolario

El conjunto de los números racionales positivos $\mathbb{Q}$ es infinito numerable.

Conjuntos numerables

Teorema

- *Si A_1 y A_2 son conjuntos numerables entonces $A_1 \cup A_2$ es un conjunto numerable.*
- *La unión de una colección numerable de conjuntos numerables es numerable.*
- *Si A es finito, B^A es numerable.*

Ejemplo

Son numerables los siguientes conjuntos:

1. $\mathbb{N}^n$, $\mathbb{Z}^n$ y $\mathbb{Q}^n$ para cualquier valor de n.
2. El conjunto de todos los polinomios de grado n con coeficientes racionales.
3. El conjunto de todos los polinomios con coeficientes racionales.
4. El conjunto de todas las matrices $n \times m$ con componentes racionales.
5. El conjunto de todas las matrices de dimensión finita arbitraria con componentes racionales.

Conjuntos numerables

Teorema

Cada conjunto infinito contiene un subconjunto infinito numerable.

Teorema

Si B es un conjunto numerable no vacío y $A \subseteq B$, entonces A es numerable.

Del teorema anterior se puede deducir que:

- ✓ Un conjunto dado no vacío S es numerable si y solo si S tiene el mismo cardinal que un subconjunto de $\mathbb{Z}^+$.
- ✓ Así, es suficiente que exista una función inyectiva $f : S \to \mathbb{Z}^+$ (no necesariamente una biyección), para afirmar que S es numerable, ya que $S \approx f(S)$ (es decir, $|S| = |f(S)|$ y $f(S)$ es numerable.)

Conjuntos no numerables

Diagonalización de Cantor

Teorema (Cantor)

El subconjunto de números reales $[0, 1]$ *no es numerable.*

Demostración:

- Para demostrar que $[0, 1]$ no es numerable, basta mostrar que ninguna función $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ es sobreyectiva.
- Sea $f : \mathbb{N} \to [0, 1]$ una función cualquiera. Se colocan los elementos $f(1), f(2), \ldots$, en una lista usando la representación decimal para cada $f(n)$:

$$\begin{array}{rcl} f(1) & = & 0, x_{11}x_{12}x_{13}\ldots \\ f(2) & = & 0, x_{21}x_{22}x_{23}\ldots \\ f(3) & = & 0, x_{31}x_{32}x_{33}\ldots \\ & \vdots & \end{array}$$

donde x_{nj} es el j-ésimo dígito en la expansión decimal de $f(n)$.

Conjuntos no numerables

Diagonalización de Cantor

Demostración:(cont.)

- Ahora especificamos un número real $y \in [0,1]$ como sigue: $y = 0, y_1 y_2 y_3 \ldots$, donde
$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{jj} \neq 1 \\ 2, & \text{si } x_{jj} = 1 \end{cases}$$
- El número y está determinado por los dígitos en la diagonal.
- Claramente, $y \in [0,1]$.
- Sin embargo, y difiere de cada $f(n)$ al menos en un dígito de la expansión (a saber, el n-ésimo dígito).
- Por lo tanto, $y \neq f(n)$ para cualquier n.
- Y se concluye que la función $f : \mathbb{N} \to [0,1]$ no es sobreyectiva.
- Puesto que la función f era arbitraria, esto establece que $[0,1]$ es infinito, pero **no numerable**.

Conjuntos no numerables

Teorema

El conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ es no numerable.

- Los conjuntos $[0,1]$ y $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ son ejemplos de conjuntos infinitos pero no numerables.
- Elegimos $[0,1]$ como el conjunto estándar para esta cardinalidad y damos la siguiente definición:

Definición

Un conjunto A tiene cardinal $\aleph_1$ si hay una biyección de $[0,1]$ en A.

Al cardinal de $[0,1]$ también se le denota **c** (por **continuo**).

Conjuntos no numerables

Conjuntos de cardinal $\aleph_1$

Ejemplos

1. Un intervalo cerrado $[a, b]$, con $a < b$, tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$, ya que $h\colon [0, 1] \to [a, b]$ definida como $h(x) = (b - a)x + a$ es biyectiva.
2. El intervalo abierto $(0, 1)$ tiene el mismo cardinal que $[0, 1]$, puesto que existe una biyección $f : [0, 1] \to (0, 1)$ definida como

$$\begin{cases} f(0) & = & \frac{1}{2} & \\ f(\frac{1}{n}) & = & \frac{1}{n+2} & n \in \mathbb{Z}^+ \\ f(x) & = & x & x \in [0,1] - \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \end{cases}$$

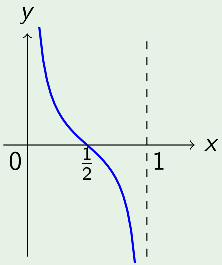
Conjuntos no numerables

Conjuntos de cardinal $\aleph_1$

Ejemplo

El conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales tiene cardinal $\aleph_1$.

La función $g\colon (0,1) \to \mathbb{R}$ definida como $g(x) = \dfrac{(\frac{1}{2} - x)}{x(1-x)}$ es una biyección.



Comparación de números cardinales

Definición

Sean A y B conjuntos cualesquiera. Se dice que:

- $|A| \preceq |B|$ *si existe una función inyectiva de* A *en* B.
- $|A| \prec |B|$ *si existe una función inyectiva* $f : A \rightarrow B$, *pero no existe ninguna función biyectiva de* A *en* B.

  Es decir, $|A| \prec |B|$ *si, y sólo si,* $|A| \preceq |B|$ *y* $|A| \neq |B|$

Teorema (Zermelo)

Sean los conjuntos A *y* B. *Se verifica una de las tres situaciones siguientes:*

$$(1)\quad |A| \prec |B| \qquad\qquad (2)\quad |A| = |B| \qquad\qquad (3)\quad |B| \prec |A|$$

Comparación de números cardinales

Teorema (Cantor-Schröder-Bernstein)

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Si se cumple que $|A| \preceq |B|$ y $|B| \preceq |A|$, entonces $|A| = |B|$.

Ejemplo

Podemos demostrar más fácilmente que $[0, 1]$ y $(0, 1)$ tienen el mismo cardinal dando una función inyectiva de uno en otro, como sigue:

- $f : (0, 1) \to [0, 1]$ definida como $f(x) = x$
- $g : [0, 1] \to (0, 1)$ definida como $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$

Análogamente, podemos demostrar que $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})| = \aleph_1$

Comparación de números cardinales

Teorema

Sea A un conjunto finito. Entonces $|A| \prec \aleph_0 \prec \aleph_1$

Teorema

Sea A un conjunto infinito. Entonces $\aleph_0 \preceq |A|$

Teorema (Cantor)

Sea A un conjunto cualquiera. Entonces $|A| \prec |\mathcal{P}(A)|$.

A partir de este teorema podemos afirmar la existencia de una jerarquía de cardinales infinitos.

Comparación de números cardinales

- Podemos construir un conjunto infinito numerable de números cardinales, siendo cada uno de ellos inferior al siguiente:

$$|A| \prec |\mathcal{P}(A)| \prec |\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)| \prec \dots$$

- Como consecuencia de esta jerarquía no existe un cardinal infinito máximo.
- No obstante, existe un cardinal infinito mínimo, $\aleph_0$, el cardinal de $\mathbb{N}$.

Relaciones de orden

Definición (Relación de orden parcial)

Sea $\mathcal{R}$ una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío A.

- *Se dice que $\mathcal{R}$ es una* **relación de orden parcial** *si es* **reflexiva**, **antisimétrica** *y* **transitiva**.
- *El par $(A, \mathcal{R})$ se llama* **conjunto parcialmente ordenado.**

Para denotar las relaciones de orden usaremos los símbolos $\preceq$, $\ll$ o $\sqsubseteq$.

Ejemplos

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.
- En el conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ la relación $\mid$ de divisibilidad nos genera la siguiente relación de orden:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\mid} \; = \; & \{(2,2),(2,4),(2,10),(2,12),(2,20),(4,4),(4,12),(4,20), \\ & (5,5),(5,10),(5,20),(10,10),(10,20),(12,12),(20,20)\} \end{aligned}$$

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Una relación de orden parcial $\preceq$ sobre un conjunto A se puede representar usando un grafo simplificado teniendo en cuenta las propiedades de la relación: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- ✓ Por ser reflexiva, tenemos asegurados los arcos (a, a).
- ✓ Por ser antisimétrica, no habrá arcos de ida y vuelta, es decir, si aparece (a, b), no aparecerá (b, a).
- ✓ Por ser transitiva, si aparecen los arcos (a, b) y (b, c), también contamos con el arco (a, c).
- ✓ Por todo ello, podemos **simplificar** la gráfica prescindiendo de los arcos que están asegurados.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Para determinar qué arcos son imprescindibles definimos los siguientes conceptos.

Definición

Sean a *y* b *elementos de un conjunto parcialmente ordenado* $(A, \preceq)$.

- *Se dice que son elementos* **comparables** *si* $a \preceq b$ *o bien* $b \preceq a$.
- *Se dice que el elemento* b *es* **sucesor inmediato** *del elemento* a *si se verifican las siguientes condiciones:*
  - $a \preceq b$
  - *No existe* $c \in A$*, tal que* $a \preceq c \preceq b$.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Teniendo en cuenta lo anterior, podemos describir un grafo de la relación más simple: el **diagrama de Hasse**.

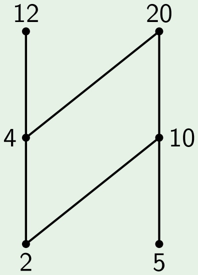
- Empezamos representando cada elemento del conjunto A con un punto del plano, colocándolos de abajo hacia arriba (el punto a por debajo del b, si $a \preceq b$).
- Dibujamos una línea ascendente desde cada elemento hasta cada uno de sus sucesores inmediatos.
- Se suprimen las orientaciones, pues todas las líneas son ascendentes.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo

El conjunto $A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación de orden parcial divisibilidad se representa mediante el diagrama de Hasse:

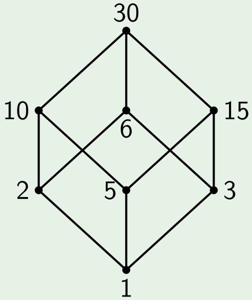


Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo

El conjunto $\mathcal{D}_{30}$ de los divisores de 30 con la relación de orden parcial divisibilidad se representa como se indica:



Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejercicio

En el conjunto $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,b),(b,d),(b,e),(b,f),$$

$$(c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(d,d),(d,f),(e,e),(e,f),(f,f)\}$$

1. Demuestre que $(T, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado.
2. Dibuje su diagrama de Hasse.

Relaciones de orden

Orden producto

Definición (Orden Producto)

Sean $(A, \leq)$ *y* $(B, \sqsubseteq)$ *dos conjuntos parcialmente ordenados.*
En el conjunto $A \times B$ *se define la relación* $\preceq$*:*

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 \leq a_2 \quad y \quad b_1 \sqsubseteq b_2$$

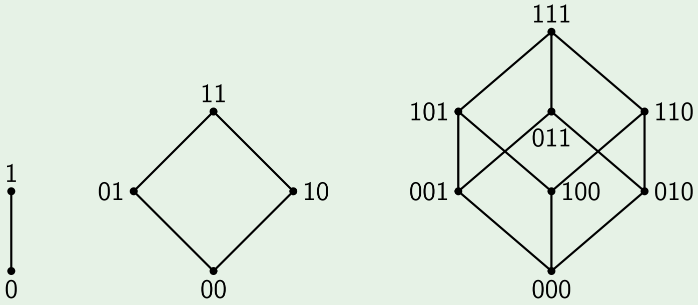
Teorema

$(A \times B, \preceq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Relaciones de orden

Orden producto

Ejemplo



$(\mathbb{B}, \leq)$ $(\mathbb{B}^2, \preceq)$ $(\mathbb{B}^3, \preceq)$

Relaciones de orden

Definición (Orden Lexicográfico)

Sean $(A, \leq)$ *y* $(B, \sqsubseteq)$ *dos conjuntos parcialmente ordenados. En el conjunto* $A \times B$ *se define la relación* $\preccurlyeq$ *(llamada* **orden lexicográfico***)*

$$(a_1, b_1) \preccurlyeq (a_2, b_2) \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 < a_2 \quad o \quad \big(a_1 = a_2 \quad y \quad b_1 \sqsubseteq b_2\big)$$

Teorema

1. $(A \times B, \preccurlyeq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*
2. *Si* $(A, \leq)$ *y* $(B, \sqsubseteq)$ *son órdenes totales, el orden lexicográfico también es total.*

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.

1. *Se dice que $x \in B$ es* **maximal** *de B, si no existe ningún $b \in B$ posterior.*
2. *Se dice que $x \in B$ es* **máximo** *de B, si x es posterior a todo $b \in B$.*
3. *Se dice que $x \in B$ es* **minimal** *de B, si no existe ningún $b \in B$ anterior.*
4. *Se dice que $x \in B$ es* **mínimo** *de B, si x es anterior a todo $b \in B$.*

Teorema

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.

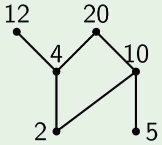
1. *El máximo de B (si existe) es único.*
2. *El mínimo de B (si existe) es único.*

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación de divisibilidad.



12 y 20 son maximales de $B_1 = \{2, 4, 12, 20\}$

20 es máximo de $B_2 = \{2, 4, 10, 20\}$

2 y 5 son minimales de $B_3 = \{2, 5, 12, 20\}$

2 es minimal (y mínimo) de B_1

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.

1. *Se dice que $c \in A$ es* **cota superior** *de B, si c es posterior a todo $b \in B$.*
2. *Se dice que $c \in A$ es* **cota inferior** *de B, si c es anterior a todo $b \in B$.*
3. *Se dice que $m \in A$ es la* **mínima cota superior** *o* **supremo** *de B, si m es el mínimo del conjunto $C_s(B)$ de las cotas superiores de B.*
4. *Se dice que $M \in A$ es la* **máxima cota inferior** *o* **ínfimo** *de B, si M es el máximo del conjunto $C_i(B)$ de las cotas inferiores de B.*

Relaciones de orden

Orden total compatible con un orden dado

Lema

Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si A es finito y no vacío, entonces tiene un elemento minimal.

Aplicando el lema anterior repetidamente podemos encontrar una relación de orden total $\ll$ **compatible** con $\preceq$; es decir, una relación de orden total $\ll$ que contenga a la relación de orden parcial $\preceq$ dada:

$$\text{para todo } a, b \in A \text{ si } a \preceq b, \quad \text{entonces } a \ll b$$

El proceso de construcción de un orden total como $\ll$ se llama

clasificación u **ordenación topológica**.

Relaciones de orden

Algoritmo de ordenación topológica

Dada una relación de orden parcial $\preceq$ en un conjunto finito no vacío A, nos planteamos encontrar una relación de orden total $\ll$ compatible con $\preceq$, esto es, para todo $a, b \in A$ si $a \preceq b$, entonces $a \ll b$.

1. Se empieza eligiendo un elemento minimal $a_1 \in A$.
2. Si $A \setminus \{a_1\}$ no es vacío, se elige un elemento minimal $a_2 \in A \setminus \{a_1\}$.
3. Se repite este proceso hasta elegir todos los elementos de A.
4. La secuencia $a_1 \ll a_2 \ll \cdots \ll a_n$ nos proporciona un orden total.