Aplicaciones Lineales

Mariam Cobalea Vico

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 15/16

Aplicaciones Lineales

Definición (Aplicación Lineal)

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$. Se dice que la aplicación $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es una **aplicación lineal** *de $\mathcal{V}$ en $\mathcal{W}$ si para todo $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$ y todo $c \in \mathcal{K}$ se verifica:*

1. $\varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v})$
2. $\varphi(c\vec{u}) = c\varphi(\vec{u})$

Ejemplo

La siguiente función es una aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Nótese que cada componente se corresponde con una expresión lineal.

Aplicaciones Lineales

Para las aplicaciones lineales se usa la misma terminología que para las funciones.

Dada la aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$,

- $\mathcal{V}$ se llama **dominio**
- $\mathcal{W}$ se llama **codominio**
- Si $\vec{v} \in \mathcal{V}$ y $\vec{w} \in \mathcal{W}$ son tales que $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$, se dice que $\vec{w}$ es la **imagen** de $\vec{v}$ mediante φ.
- El conjunto de todas las imágenes se llama **imagen** de φ.
- El conjunto de todos los $\vec{v}$, tales que $\varphi(\vec{v}) = \vec{w}$, es la **preimagen** de $\vec{w}$.

Aplicaciones Lineales

Ejemplos

Dos aplicaciones lineales muy simples son:

- la **aplicación cero**

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{W} \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{0} \end{array}$$

- la **aplicación identidad**

$$\begin{array}{rccc} 1_{\mathcal{V}}\colon & \mathcal{V} & \to & \mathcal{V} \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Ejemplos

- Sea $\mathcal{C}'[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones con derivada continua en $[a,b]$. La función derivada $\mathcal{D}_x$ definida

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{D}_x: & \mathcal{C}'[a,b] & \to & \mathcal{C}[a,b] \\ & f & \mapsto & \frac{d}{dx}[f] \end{array}$$

es una aplicación lineal, ya que para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}'[a,b]$ y $c \in \mathbb{R}$ sabemos que se verifica:

$$\begin{array}{rcccccl} \mathcal{D}_x(f+g) & = & \frac{d}{dx}[f+g] & = & \frac{d}{dx}[f] + \frac{d}{dx}[g] & = & \mathcal{D}_x(f) + \mathcal{D}_x(g) \\ \mathcal{D}_x(c \cdot f) & = & \frac{d}{dx}[c \cdot f] & = & c \cdot \left(\frac{d}{dx}[f]\right) & = & c \cdot \mathcal{D}_x(f) \end{array}$$

La aplicación lineal $\mathcal{D}_x$ se llama **operador derivada.**

Aplicaciones Lineales

Ejemplos

- Sea $\mathbb{R}(x)$ el espacio vectorial de las funciones polinómicas.
La aplicación integración entre 0 y 1, definida:

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{I}: & \mathbb{R}(x) & \to & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \int_a^b p(x)dx \end{array}$$

es lineal ya que para cualesquiera $p, q \in \mathbb{R}(x)$ y $c \in \mathbb{R}$ sabemos que se verifica:

$$\mathcal{I}(p+q) = \int_a^b [p(x)+q(x)]\,dx = \int_a^b p(x)dx + \int_a^b q(x)dx = \mathcal{I}(p) + \mathcal{I}(q)$$

$$\mathcal{I}(c \cdot p) = \int_a^b [c \cdot p(x)]\,dx = c \cdot \int_a^b p(x)dx = c \cdot \mathcal{I}(p)$$

Aplicaciones Lineales

Teorema

Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal y sean $\vec{u}, \vec{v} \in \mathcal{V}$, entonces

1. $\varphi(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$
2. $\varphi(-\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$
3. $\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v})$
4. $\varphi(c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_m\vec{v}_m) = c_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + c_m\varphi(\vec{v}_m)$.

Teorema

Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Se verifica:

1. *Si $\mathcal{V}_1$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$, entonces $\varphi(\mathcal{V}_1)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{W}$.*
2. *Si $\{\vec{u}_1, \cdots, \vec{u}_k\}$ es un sistema generador de un subespacio vectorial $\mathcal{U}$ de $\mathcal{V}$, entonces $\{\varphi(\vec{u}_1), \cdots, \varphi(\vec{u}_k)\}$ es un sistema generador de $\varphi(\mathcal{U})$.*
3. *Si $\mathcal{W}_1$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{W}$, entonces la preimagen $\varphi^{-1}(\mathcal{W}_1)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.*

Aplicaciones Lineales

Teorema

La composición $\psi \circ \varphi$ de dos aplicaciones lineales $\varphi\colon \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ y $\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es también una aplicación lineal definida como

$$\begin{array}{rccl} \psi\circ\varphi\colon & \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ & \vec{u} & \mapsto & (\psi\circ\varphi)(\vec{u}) = \psi(\varphi(\vec{u})) \end{array}$$

Ejemplo

La composición de $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ y $\psi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donde

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 - x_3 \\ 2x_3 + x_4 \end{pmatrix} \qquad \psi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 + 4x_3 \end{pmatrix}$$

es la aplicación $\psi\circ\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 4x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 5x_3 + 4x_4 \end{pmatrix}$

Aplicaciones Lineales

Aplicación lineal definida por una matriz

Teorema

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. La aplicación T definida por

$$T(\vec{v}) = A\vec{v}$$

es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, su aplicación lineal asociada $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida como

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y-2z \\ -x+2y+3z \end{pmatrix}$$

Aplicaciones Lineales

Ejemplos

- La **simetría** respecto al eje OY es una aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- La **simetría** respecto al eje OX es una aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi_2 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- La **simetría** respecto al origen de coordenadas es una aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi_3 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Ejemplos

- La **rotación** de $\theta \in [0, 2\pi)$ radianes

$$\begin{array}{cccccc} \varrho: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & & \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

- Si $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ son dos subespacios suplementarios de un espacio vectorial $\mathcal{V}$, las **proyecciones** sobre cada subespacio

$$\begin{array}{cccc} p_1: & \mathcal{V} & \to & \mathcal{U}_1 \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u}_1 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} p_2: & \mathcal{V} & \to & \mathcal{U}_2 \\ & \vec{u} & \mapsto & \vec{u}_2 \end{array}$$

donde $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ es la descomposición de un vector $\vec{u} \in \mathcal{V}$ como suma de $\vec{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ y $\vec{u}_2 \in \mathcal{U}_2$ es una aplicación lineal.

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Definición (Núcleo de una aplicación lineal)

*El **núcleo** de una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, denotado $\ker(\varphi)$, es el conjunto de vectores de $\mathcal{V}$ cuya imagen es el vector nulo de $\mathcal{W}$.*

$$\ker(\varphi) = \{\vec{v} \in \mathcal{V} \mid \varphi(\vec{v}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}\} = \varphi^{-1}(\{\vec{0}_{\mathcal{W}}\})$$

Nótese que $\ker\varphi \neq \varnothing$, ya que $\varphi(\vec{0}_{\mathcal{V}}) = \vec{0}_{\mathcal{W}}$

Teorema

El núcleo de una aplicación lineal $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es subespacio vectorial de $\mathcal{V}$.

Corolario

Si $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una aplicación lineal dada por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, el núcleo de T es el espacio de soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $A\vec{x} = \vec{0}$.

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Ejemplo

Calculemos el núcleo de la aplicación lineal

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Solución: Por definición,

$$\ker(\varphi) = \left\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{R}^2}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Solución (cont.):

- Por lo tanto, los vectores de $\ker \varphi$ verifican:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & & & = & 0 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 0 \end{array}\right\}$$

- Este sistema homogéneo es indeterminado, y sus soluciones expresadas paramétricamente son

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcr} x_1 & = & x_3 \\ x_2 & = & -x_3 \\ x_3 & = & x_3 \end{array}\right\}$$

- Una base de $\ker(\varphi)$ viene dada por $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Definición (Imagen de una aplicación lineal)

La **imagen** *de una aplicación lineal* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, *denotada* $Im(\varphi)$, *es el conjunto de vectores de* $\mathcal{W}$ *que son imágenes de vectores de* $\mathcal{V}$.

$$Im(\varphi) = \{\vec{w} \in \mathcal{W} \mid \exists \vec{v} \in \mathcal{V},\ \varphi(\vec{v}) = \vec{w}\} = \varphi(\mathcal{V})$$

Teorema

- *La imagen de una aplicación lineal* $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *es subespacio vectorial de* $\mathcal{W}$.
- *Sea* $\mathcal{U}$ *subespacio vectorial de* $\mathcal{V}$, *y sea* $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ *una* **base** *de* $\mathcal{U}$, *entonces* $\{\varphi(\vec{v}_1), \ldots, \varphi(\vec{v}_m)\}$ *es un* **sistema generador** *de* $\varphi(\mathcal{U})$.

Corolario

Si $\mathcal{V}$ *tiene dimensión finita, entonces* $Im(\varphi)$ *también es un espacio vectorial de dimensión finita. Además* $\dim(Im(\varphi)) \leq \dim(\mathcal{V})$.

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Ejemplo

Sea la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$

- Consideramos la base estándar de $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, entonces para cada $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, se tiene que $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$.
- Así pues, $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + x_3\varphi(\vec{e}_3)$
- De donde un sistema generador de $Im(\varphi)$ viene dado por

$$\left\{\varphi(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\quad \varphi(\vec{e}_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\quad \varphi(\vec{e}_3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

Corolario

Dada una aplicación lineal definida por $T(\vec{x}) = A\vec{x}$, *la imagen de* T *coincide con el espacio de columnas de* A.

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Definición (Rango y nulidad de una aplicación lineal)

Sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. La dimensión del núcleo de φ se llama **nulidad** *de φ y se denota nul(φ). La dimensión de Im(φ) se llama* **rango** *de φ y se denota rango(φ).*

Teorema (de la dimensión)

Sean $\mathcal{V}$ un espacio vectorial de dimensión finita y $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal. Entonces $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\ker\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi) = \operatorname{nul}(\varphi) + \operatorname{rango}(\varphi)$

Ejemplo

Para la aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \\ x_1 + x_2 + x_4 \end{pmatrix}$

se tiene que $\operatorname{rango}(\varphi) = \dim(\operatorname{Im}\varphi) = 3$ y $\operatorname{nul}(\varphi) = \dim(\ker\varphi) = 1$, de donde

$$4 = \dim(\ker\varphi) + \dim(\operatorname{Im}\varphi).$$

Aplicaciones Lineales

Núcleo e Imagen

Ejercicio

Sea la aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida

$$\varphi\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_3 \\ x_1 + x_2 - x_3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

1. Determina el núcleo y la imagen.
2. Comprueba el teorema de la dimensión.

Aplicaciones Lineales

Inyectividad y sobreyectividad

- Dada una aplicación lineal, sabemos que la imagen de un sistema generador también es un sistema generador.
- Sin embargo, la imagen de un sistema linealmente independiente no es, necesariamente, linealmente independiente.

Teorema (Caracterización de la inyectividad)

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$.

1. *La aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es inyectiva si y solo si* $\ker(\varphi) = \{\vec{0}_{\mathcal{V}}\}$
2. $\ker\varphi = \{\vec{0}_{\mathcal{V}}\}$ *si y solo si todo sistema linealmente independiente de $\mathcal{V}$ tiene por imagen un sistema linealmente independiente de $\mathcal{W}$.*

Corolario

Si $\mathcal{V}$ es de dimensión finita

- φ *es inyectiva si y solo si* $\dim(\mathcal{V}) = \dim(\mathrm{Im}\ \varphi)$.

Aplicaciones Lineales

Inyectividad y sobreyectividad

Teorema (Caracterización de la sobreyectividad)

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales, tales que $\mathcal{W}$ es de dimensión finita. Una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es sobreyectiva si y solo si el rango de φ es igual a la dimensión de $\mathcal{W}$.

Ejemplo

La aplicación lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$ es:

- Sobreyectiva, pues φ tiene rango 2, igual que el espacio imagen.
- Por el teorema de la dimensión se obtiene que $\dim\big(\ker(\varphi)\big) = 1$, de donde se deduce que φ NO es inyectiva.

Aplicaciones Lineales

Isomorfismos

Definición (Isomorfismo)

- *Una aplicación $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ inyectiva y sobreyectiva se llama* **isomorfismo**.
- *Un isomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ recibe el nombre de* **automorfismo**.

Ejemplo

La aplicación $\varphi\colon \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$, dada por $\varphi(A) = A^t$ es un automorfismo.

Teorema

1. *La composición de isomorfismos es también un isomorfismo.*
2. *Si $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ es isomorfismo entonces $\varphi^{-1}\colon \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ también es isomorfismo.*

Aplicaciones Lineales

Isomorfismos

Teorema

Sea $\mathcal{V}$ un espacio vectorial **de dimensión finita**:

1. *Dada $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal, se tiene que φ es un isomorfismo si y solo si* $\dim(\mathcal{V}) = \dim\big(Im(\varphi)\big) = \dim(\mathcal{W})$.
2. *$\psi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ es un automorfismo si y solo si es bien inyectiva o bien es sobreyectiva.*

Ejemplo

La aplicación $\varphi\colon \mathbb{R}_n(x) \to \mathbb{R}^{n+1}$, definida abajo, es un isomorfismo

$$\varphi(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) = (a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$$

Teorema

Dos espacios vectoriales $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, de dimensión finita, son isomorfos si y solo si tienen la misma dimensión.

Aplicaciones Lineales

Determinación y Existencia de una aplicación lineal

¿Qué datos son necesarios para determinar una aplicación lineal?

Es evidente que no hará falta conocer las imágenes de todos los vectores, bastará conocer las imágenes de algunos vectores y, a partir de esto, sabiendo que la aplicación es lineal, podemos hallar las imágenes de los demás vectores.

A continuación vamos a localizar este número mínimo de imágenes de vectores que determinan, una aplicación lineal.

Aplicaciones Lineales

Determinación y Existencia de una aplicación lineal

Teorema

Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathcal{K}$.

- *Si $\dim(\mathcal{V}) = n$ y $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ es una base de $\mathcal{V}$ y si $\mathcal{S} = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_n\}$ es un sistema cualquiera de vectores de $\mathcal{W}$, entonces existe una única aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tal que $\varphi(\vec{v}_i) = \vec{w}_i, \quad i : 1, \cdots, n$.*
- *Si además $\mathcal{S}$ es un sistema linealmente independiente, la aplicación φ es inyectiva.*

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

- Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo $\mathcal{K}$ y sea $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ una aplicación lineal.
- Considerando las bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ de $\mathcal{W}$, tenemos

$$\begin{array}{rccc} \varphi\colon & \mathcal{V} & \longrightarrow & \mathcal{W} \\ & \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) = \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \end{array}$$

- Estudiaremos la conexión que existe entre las coordenadas de $[\vec{x}]_{\mathcal{B}_1}$ y las coordenadas de su imagen $[\varphi(\vec{x})]_{\mathcal{B}_2}$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

- Buscamos una expresión que nos permita hallar las coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}_2$ de la imagen de cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ a partir de sus coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}_1$.
- Hemos estudiado que la aplicación lineal φ queda determinada dando las imágenes de los vectores $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ de la base $\mathcal{B}_1$;
es decir, especificando $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)$.
- Así, dado $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendremos

$$\begin{aligned} \vec{y} = \varphi(\vec{x}) &= \varphi(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = \\ &= x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n) \end{aligned}$$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

$$\begin{array}{rcrcccccc} \vec{y} & = & \varphi(\vec{x}) & = & \varphi(x_1\vec{v}_1 & + & \cdots & + & x_n\vec{v}_n) & = \\ & & & = & x_1\varphi(\vec{v}_1) & + & \cdots & + & x_n\varphi(\vec{v}_n) \end{array}$$

- Ya que $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n) \in \mathcal{W}$, podremos expresarlos respecto a $\mathcal{B}_2$

$$\begin{array}{ccccccccc} \varphi(\vec{v}_1) & = & a_{11}\vec{w}_1 & + & a_{21}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{m1}\vec{w}_m \\ \varphi(\vec{v}_2) & = & a_{12}\vec{w}_1 & + & a_{22}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{m2}\vec{w}_m \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ \varphi(\vec{v}_n) & = & a_{1n}\vec{w}_1 & + & a_{2n}\vec{w}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\vec{w}_m \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

- Sustituyendo $\varphi(\vec{v}_1), \cdots, \varphi(\vec{v}_n)$ por su expresión respecto a la base $\mathcal{B}_2$ y efectuando las operaciones, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{y} &= \varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{v}_1 + \cdots + x_n\vec{v}_n) = x_1\varphi(\vec{v}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{v}_n) \\ &= x_1(a_{11}\vec{w}_1 + \cdots + a_{m1}\vec{w}_m) + \cdots + x_n(a_{1n}\vec{w}_1 + \cdots + a_{mn}\vec{w}_m) \\ &= (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n)\vec{w}_1 + \cdots + (a_{m1}x_1 + \cdots a_{mn}x_n)\vec{w}_m \\ &= y_1\vec{w}_1 + \cdots + y_m\vec{w}_m \end{aligned}$$

- Por lo tanto,

$$\left.\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & a_{1n}x_n \\ y_2 & = & a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ y_m & = & a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & a_{mn}x_n \end{array}\right\}$$

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

Consideremos una aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$, así como dos bases $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ para $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ para $\mathcal{W}$.

Definición

- La matriz $A = (a_{ij})$ se llama **matriz asociada** a la aplicación lineal φ respecto a las bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ si se cumple la siguiente relación:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} \quad \text{esto es} \quad A\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}_1} = [\vec{y}]_{\mathcal{B}_2}$$

Nótese que cada columna de la matriz A coincide con las **coordenadas** de la imagen de cada vector $\vec{v}_j$ de la base $\mathcal{B}_1 = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$ expresado respecto de la base $\mathcal{B}_2 = \{\vec{w}_1, \cdots, \vec{w}_m\}$ de $\mathcal{W}$.

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

Ejemplo

Calculemos la matriz asociada a la aplicación lineal

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

respecto a las bases $\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Para hallar la matriz asociada a φ respecto de $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ se calculan las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base $\mathcal{B}_1$ expresados en la base $\mathcal{B}_2$.

Aplicaciones Lineales

Expresión matricial de una aplicación lineal

Solución:

$$\varphi\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a_{11} & = & 2 \\ a_{21} & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = a_{12}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_{22}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a_{12} & = & 1 \\ a_{22} & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\varphi\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = a_{13}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + a_{23}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} a_{13} & = & 0 \\ a_{23} & = & 1 \end{array}\right.$$

La matriz asociada a la aplicación lineal φ es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones Lineales

Cambio de base como aplicación lineal

- Consideremos dos bases $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n\}$ y $\mathcal{B}' = \{\vec{v'}_1, \cdots, \vec{v'}_n\}$ sobre un mismo espacio vectorial $\mathcal{V}$.
- Cada vector $\vec{x} \in \mathcal{V}$ tendrá distintas coordenadas según qué base se use

$$\begin{array}{rcll} \vec{x} & = & \boldsymbol{x}_1\vec{v}_1 + \boldsymbol{x}_2\vec{v}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_n\vec{v}_n & \text{en la base } \mathcal{B} \\ \vec{x} & = & \boldsymbol{x'}_1\vec{v'}_1 + \boldsymbol{x'}_2\vec{v'}_2 + \cdots + \boldsymbol{x'}_n\vec{v'}_n & \text{en la base } \mathcal{B}' \end{array}$$

- Hemos visto una expresión que nos permite hallar las coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}$ de cada $\vec{x} \in \mathcal{V}$ a partir de las coordenadas respecto a la base $\mathcal{B}'$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \qquad P\,[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

- Cada columna de la matriz asociada P coincide con las **coordenadas** de cada vector de la base $\mathcal{B}'$ expresado respecto a la nueva base $\mathcal{B}$.

Aplicaciones Lineales

Cambio de base como aplicación lineal

- La expresión matricial del cambio de base

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad P[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} = [\vec{x}]_{\mathcal{B}}$$

se corresponde con la del automorfismo identidad

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow[P]{1_{\mathcal{V}}} & \mathcal{V} \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x} \\ [\vec{x}]_{\mathcal{B}'} & & [\vec{x}]_{\mathcal{B}} = P[\vec{x}]_{\mathcal{B}'} \end{array}$$

Aplicaciones Lineales

Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Fijadas las bases $\mathcal{B}_1$ en $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2$ en $\mathcal{W}$, cada aplicación lineal $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tiene asociada una matriz A

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1 & & \mathcal{B}_2 \\ \mathcal{V} & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathcal{W} \\ \vec{x} & \mapsto & \varphi(\vec{x}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} & & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_2} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}_1} \end{array}$$

Si consideramos otras bases $\mathcal{B}_1'$ en $\mathcal{V}$ y $\mathcal{B}_2'$ en $\mathcal{W}$, ¿qué matriz estará asociada a φ respecto a las nuevas bases?

Aplicaciones Lineales

Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Teorema

Si $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ tiene asociada la matriz A respecto de unas bases $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$, entonces la matriz asociada a φ respecto de las bases $\mathcal{B}'_1$ y $\mathcal{B}'_2$ es la matriz

$$B = Q^{-1}AP$$

donde P es la matriz de paso de la base $\mathcal{B}'_1$ a la base $\mathcal{B}_1$ y Q es la matriz de paso de la base $\mathcal{B}'_2$ a la base $\mathcal{B}_2$.

Corolario

Si el endomorfismo $\varphi\colon \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ tiene asociada la matriz A respecto de la base $\mathcal{B}$, entonces la matriz asociada a φ respecto de la base $\mathcal{B}'$ es la matriz

$$B = P^{-1}AP$$

donde P es la matriz de paso de la base $\mathcal{B}'$ a la base $\mathcal{B}$.

Aplicaciones Lineales

Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Ejemplo

Se sabe que el endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tiene asociada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

con respecto a la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.
Determinemos la matriz B que corresponde a dicho endomorfismo en otra base $\mathcal{B}' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ dada por

$$\begin{cases} \vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \end{cases}$$

Aplicaciones Lineales

Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Solución: Para determinar la matriz asociada a φ respecto a la base $\mathcal{B}'$ debemos calcular las coordenadas de las imágenes de cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}'$ expresados respecto a la misma base.

$$\varphi(\vec{u}_1) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$\varphi(\vec{u}_2) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Luego la matriz asociada a la aplicación lineal φ respecto al base $\mathcal{B}'$ es

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones Lineales

Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Solución: Al mismo resultado podemos llegar teniendo en cuenta que cada cambio de base puede considerarse un automorfismo identidad cuya matriz asociada es la matriz de paso $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\
\mathbb{R}^2 & \xrightarrow[P]{1_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[A]{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow[P^{-1}]{1_{\mathbb{R}^2}} & \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & \mapsto & \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}
\end{array}$$

La matriz de la aplicación lineal φ respecto a la base $\mathcal{B}'$ es

$$P^{-1}AP = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Aplicaciones Lineales

Influencia del cambio de base en la matriz asociada a una aplicación lineal

Ejercicio

Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_3 \end{pmatrix}$$

Determina la matriz asociada a f respecto de:

1. las bases canónicas.
2. las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Bibliografía

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal y sus aplicaciones David C. Lay (Ed. Pearson)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)