UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática

Estructuras Algebraicas para la Computación

19 de junio de 2017

Apellidos y Nombre: .... **Grupo:** ....

DNI: .... **Titulación:** .... **Firma:** ....

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas. Para que un ejercicio se considere resuelto correctamente se debe indicar claramente el modelo matemático usado en la resolución y la justificación de su adecuación. No se valorará la mera coincidencia del resultado propuesto.
- No usar lápiz, se debe escribir con bolígrafo azul o negro.
- No se puede utilizar ningún dispositivo electrónico.

Al responder cada pregunta, define cada uno de los conceptos que aparecen en negrita.

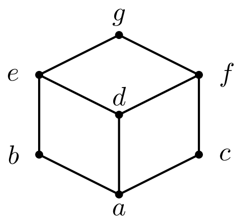
1. (0,5 pt.) Justifica si es posible encontrar un alfabeto finito Σ tal que $\mathcal{P}(\Sigma^*)$ sea un **conjunto numerable**.

2. (0,5 pt.) Sea D_{1372} el conjunto de todos los divisores de 1372 con la relación de orden divisibilidad.

   a) Dibuja su diagrama de Hasse.

   b) Dado el subconjunto $B = \{14, 28, 49, 98\}$, halla (si existen) **minimales**, **maximales**, **mínimo**, **máximo**, **cotas superiores**, **cotas inferiores**, **mínima cota superior** y **máxima cota inferior**.

3. (0,5 pt.) Consideramos el **retículo ordenado** de la figura



   a) Justifica por qué no es distributivo.

   b) Determina los elementos que tienen complemento.

4. (0,75 pt.) Sea $\mathbb{B}$ el **álgebra de Boole** binaria y sea $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ el álgebra de Boole de las funciones booleanas de tres variables.

   a) Da una lista de los **átomos** y otra lista de los **superátomos** de $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$.

   b) ¿Existe un conjunto S tal que $\mathcal{P}(S)$ y $\mathcal{F}(\mathbb{B}^3, \mathbb{B})$ son álgebras de Boole isomorfas?
   En caso afirmativo, define un **isomorfismo**.

5. (0,5 p.) Halla la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana $F(x, y, z)$ que se puede especificar mediante la expresión booleana $E(x, y, z) = x \cdot (y + \overline{z}) + \overline{(\overline{x} + y) + z} + \overline{\overline{(x + y)} + \overline{z}} + \overline{(x + \overline{y}) + \overline{z}}$

6. (0,5 pt.) Se sabe que la matriz generadora de un cierto **código de grupo** es

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

   Halla (si existen):

   a) Dos palabras que se codifiquen como 1010011

   b) Dos palabras que se decodifiquen igual que 1001001.

7. (0,75 p.) En el **anillo** de matrices $(\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ se consideran los subconjuntos

$$\mathcal{A} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ a, b \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \mathcal{M}(\mathbb{Z}) = \left\{ M = \begin{pmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Justifica que:

a) $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ es **cuerpo**.

b) Para cualesquiera A, B y $C \in \mathcal{A}$, (con $A \neq 0$), siempre que $A \cdot B = A \cdot C$ se verifica $B = C$.

c) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}), \cdot)$ es **grupo abeliano**.

d) $(\mathcal{M}(\mathbb{Z}), +, \cdot)$ no es **anillo**.

8. (0,5 pt.) Usa la factorización ***LU*** para resolver el sistema $Ax = b$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 3 & 1 \\ -1 & -4 & 8 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix}$$

9. (0,5 pt.) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran el **subespacio vectorial** $\mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, \ x_2 + \alpha x_4 = 0\}$ y el subespacio $\mathcal{W}$ generado por el sistema de vectores

$$\Big\{(1,1,1,1), (1,-2,1,-2), (1,0,1,0), (3,-3,3,-3)\Big\}$$

Halla los posibles valores del parámetro α tales que

I) $dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 1$ II) $dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{W}) = 2$ III) $dim(\mathcal{U} + \mathcal{W}) = 4$

10. (2,75 pt.) Se considera la **aplicación lineal** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por

$$f(x,y,z) = (x + 2y - z, 2x + y + \beta z, -x + \beta y + z, \beta x + y + 2z)$$

a) Determina la veracidad de los siguientes enunciados:

1) El vector $(3,0,3) \in Ker(f)$ para algún valor de $\beta \in \mathbb{R}$.

2) Para algún valor de $\beta \in \mathbb{R}$, el vector $(4, 2+2\beta, -2\beta, 2+2\beta) \in Im(f)$.

b) Para $\beta = 1$, halla la matriz asociada a f en las bases

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{y} \quad \mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

c) Determina si f es **inyectiva** y/o **sobreyectiva**.

11. (2,25 pt.) Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & b & 3 \end{pmatrix}$$

a) Determina los valores de los parámetros a y b para los que $\vec{v} = (1,1,1)$ es un **vector propio** de A.

b) Para los valores hallados en el apartado anterior, estudia si A es **diagonalizable**.

c) Estudia si es posible encontrar valores de los parámetros a y b para los que existe una **matriz ortogonal** Q tal que $Q^t A Q$ sea una matriz diagonal D.

d) Asigna valores adecuados a los parámetros y halla Q y D.

e) Enuncia el teorema de Cayley-Hamilton y compruébalo asignando valores adecuados a los parámetros.