

Espacios euclídeos

Manuel Ojeda Aciego

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 2015-2016

Producto escalar

Definición

Sea \mathcal{V} un espacio vectorial definido sobre el cuerpo \mathbb{R} . Un **producto escalar** es una función $\varphi: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica:

- ❶ $\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{v}, \vec{u})$
- ❷ $\varphi(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = \varphi(\vec{u}, \vec{v}) + \varphi(\vec{u}, \vec{w})$
- ❸ $\varphi(c\vec{u}, \vec{v}) = \varphi(\vec{u}, c\vec{v}) = c\varphi(\vec{u}, \vec{v})$
- ❹ $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) > 0$ y $\varphi(\vec{v}, \vec{v}) = 0$ si, y sólo si, $\vec{v} = \vec{0}$

☛ Un **producto escalar** se suele definir, de forma más sucinta, como una forma bilineal $\varphi: \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ simétrica y definida positiva.

Producto escalar

Ejemplo

La función $(\mid): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

es el **producto escalar euclídeo**.

- ✓ Para denotar el producto escalar de dos vectores \vec{v}, \vec{w} se suelen usar distintas notaciones, tales como

$$\varphi(\vec{v}, \vec{w}), \quad \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle, \quad (\vec{v} \mid \vec{w}), \quad \vec{v} \cdot \vec{w}$$

- ✓ Para distinguir el producto escalar euclídeo definido en \mathbb{R}^n de otros productos escalares usaremos la notación siguiente:

$\vec{v} \cdot \vec{w}$ representa el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^n

$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ representa el producto escalar general en un espacio vectorial \mathcal{V}

Producto escalar

Ejemplo

La función $\langle \cdot \rangle: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + 7x_2 y_2$$

es otro producto escalar en \mathbb{R}^2 .

Este ejemplo se puede generalizar demostrando que:

$$\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = c_1 v_1 w_1 + c_2 v_2 w_2 + \dots + c_n v_n w_n, \quad \text{con } c_i > 0$$

es un producto escalar en \mathbb{R}^n , en el que las constantes c_i se llaman **pesos**.

Espacio vectorial euclídeo

Definición

Se llama **espacio euclídeo** a un espacio vectorial real en el que se ha definido un producto escalar.

Ejemplo

Son espacios euclídeos:

- ❶ \mathbb{R}^n con el producto escalar euclídeo $(\mid): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

- ❷ \mathbb{R}^2 con el producto escalar $(\mid): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = x_1 y_1 + 7x_2 y_2$$

- ❸ \mathbb{R}^2 con el producto escalar $(\mid): \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definido

$$(\vec{x} \mid \vec{y}) = 2x_1 y_1 + x_2 y_1 + x_1 y_2 + 2x_2 y_2$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Llamamos **norma** de un vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ al número real

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}$$

Ejemplo

La norma del vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ del espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual es

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que $\vec{u} \in \mathcal{V}$ es un vector **unitario** si $\|\vec{u}\| = 1$

☛ Si \vec{v} es un vector no nulo, el vector $\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v}$ es unitario.

Ejemplo

En el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual, el vector

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

es unitario.

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Definición

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Llamamos **distancia** entre dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ al número real

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\|$$

Ejemplo

La distancia entre los vectores $\vec{v} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ y $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ de \mathbb{R}^2 con el producto escalar euclídeo es

$$d(\vec{v}, \vec{w}) = \|\vec{v} - \vec{w}\| = \sqrt{(7-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{17}$$

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Teorema (Propiedades de la norma)

Sea $(\mathcal{V}, \langle \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sean $c \in \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$.

- 1 $\|\vec{v}\| = 0$ si, y sólo si, $\vec{v} = 0$
- 2 $\|c\vec{v}\| = |c| \|\vec{v}\|$
- 3 $\|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ (Desigualdad triangular)

Teorema (Propiedades de la distancia)

Sean \vec{v}, \vec{w} vectores de un espacio euclideo $(\mathcal{V}, \langle \rangle)$. Entonces

- 1 $d(\vec{v}, \vec{w}) \geq 0$
- 2 $d(\vec{v}, \vec{w}) = 0$ si, y sólo si, $\vec{v} = \vec{w}$
- 3 $d(\vec{v}, \vec{w}) = d(\vec{w}, \vec{v})$
- 4 $d(\vec{v}, \vec{w}) \leq d(\vec{v}, \vec{u}) + d(\vec{u}, \vec{w})$ (Desigualdad triangular)

Espacio vectorial euclídeo

Norma de un vector. Distancias

Teorema (Desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sean \vec{v} , \vec{w} vectores de un espacio euclideo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$ Entonces

$$|\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwarz se obtiene $-1 \leq \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} \leq 1$

Luego, existe un único ángulo θ tal que $\cos \theta = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$

Definición

Sean \vec{v} y \vec{w} vectores en un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$. El **ángulo** entre dos vectores \vec{v} y \vec{w} , no nulos, viene dado por

$$\text{ang}(\vec{v}, \vec{w}) = \theta = \arccos \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|}$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre vectores. Ortogonalidad

Ejemplos

❶ En \mathbb{R}^4 con el producto escalar euclídeo, el ángulo de los vectores $\vec{v} = (1, 2, 1, 0)$ y $\vec{w} = (0, 1, 0, 1)$ es $\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \arccos \frac{1}{2\sqrt{3}}$

❷ En $\mathbb{R}_3(x)$ se considera el producto escalar $(p|q) = \sum_{i=1}^3 p(i)q(i)$

El ángulo determinado por los polinomios $x^2 + 1$ y $x^2 - 3x + 1$ es

$$\theta = \arccos \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} = \arccos \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{11}} = \arccos \sqrt{\frac{2}{11}}$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre vectores. Ortogonalidad

Definición (Vectores ortogonales)

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo y sean $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$. Se dice que \vec{v} es **ortogonal** a \vec{w} si su producto escalar es cero.

Cuando un vector \vec{v} es ortogonal a todos los vectores de un subespacio \mathcal{W} se dice que \vec{v} es **ortogonal** a \mathcal{W}

Teorema (Generalización del teorema de Pitágoras)

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Dos vectores $\vec{v}, \vec{w} \in \mathcal{V}$ son ortogonales si y sólo si verifican:

$$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$$

Espacio vectorial euclídeo

Ángulo entre vectores. Ortogonalidad

Ejemplo

En el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual, los vectores

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

son ortogonales.

- ✓ La ortogonalidad depende del producto escalar que se elige.
- ✓ Dos vectores pueden ser ortogonales con respecto a un producto escalar y **no** serlo con respecto a otro producto.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Sistema ortogonal)

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m\} \subset \mathcal{V}$ es **ortogonal** si cada vector \vec{v}_i es ortogonal a todos los demás.

Ejemplo

En el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual el sistema

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es ortogonal,

$$(1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \quad (1, 1, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (-1, 2, -1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Teorema

Si un sistema de vectores es ortogonal, entonces es linealmente independiente.

Corolario

En un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ de dimensión n cualquier sistema ortogonal de n vectores no nulos es una base de \mathcal{V} .

Ejemplo

En el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar canónico el sistema

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base, ya que es ortogonal.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Definición (Sistema ortonormal)

Sea $(\mathcal{V}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espacio vectorial euclídeo. Se dice que un sistema de vectores $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\} \subset \mathcal{V}$ es **ortonormal** si es un sistema ortogonal y cada vector \vec{u}_i es unitario.

Ejemplo

En el espacio \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual, el sistema

$$\left\{ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$$

es un sistema ortonormal.

Espacio vectorial euclídeo

Bases ortogonales y ortonormales

Teorema (Coordenadas en una base ortonormal)

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base ortonormal del espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Entonces la representación de cada vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ en la base \mathcal{B} viene dada por

$$\vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{u}_n \rangle \vec{u}_n$$

- Las coordenadas de un vector \vec{v} en la base ortonormal \mathcal{B} se llaman **coeficientes de Fourier** de \vec{v} respecto a la base \mathcal{B} .

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Definición (Proyección ortogonal)

Sean \vec{v} y \vec{w} vectores de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$, con $\vec{w} \neq 0$. La **proyección ortogonal** de \vec{v} sobre \vec{w} se define como

$$\text{proy}_{\vec{w}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle} \vec{w}$$

- Si \vec{w} es unitario, entonces $\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle = \|\vec{w}\|^2 = 1$, y la proyección de \vec{v} sobre \vec{w} queda

$$\text{proy}_{\vec{w}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \vec{w}$$

Espacio vectorial euclídeo

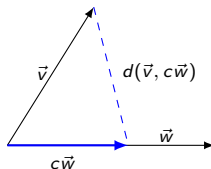
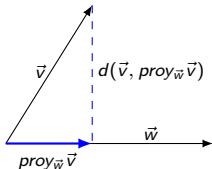
Proyección ortogonal

Teorema (Proyección ortogonal y distancia)

Sean \vec{v} y \vec{w} vectores de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, con $\vec{w} \neq 0$. Entonces

$$d(\vec{v}, \text{proy}_{\vec{w}} \vec{v}) < d(\vec{v}, c\vec{w}), \quad \text{si } c \neq \frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{\langle \vec{w}, \vec{w} \rangle}$$

☛ $\text{proy}_{\vec{w}} \vec{v}$ es el múltiplo escalar de \vec{w} más cercano a \vec{v} .



Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Definición (Proyección ortogonal sobre un subespacio \mathcal{W})

Sea $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_r\}$ una base ortogonal de un subespacio vectorial \mathcal{W} de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. La **proyección ortogonal** de un vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ sobre \mathcal{W} , denotada por $\text{proj}_{\mathcal{W}} \vec{v}$ viene dada por

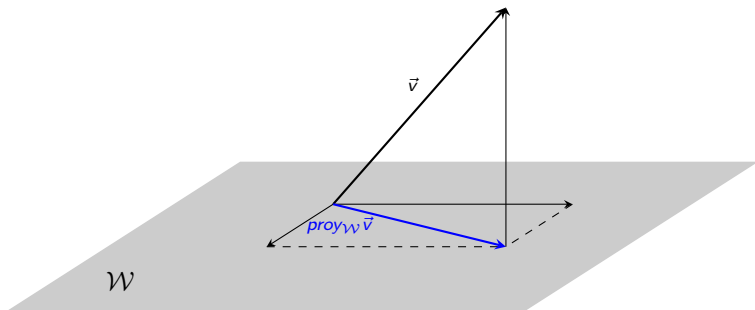
$$\text{proj}_{\mathcal{W}} \vec{v} = \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 + \dots + \frac{\langle \vec{v}, \vec{w}_r \rangle}{\langle \vec{w}_r, \vec{w}_r \rangle} \vec{w}_r$$

Si $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$ es una base ortonormal de \mathcal{W} entonces la expresión de la proyección ortogonal de $\vec{v} \in \mathcal{V}$ sobre \mathcal{W} , se expresa como

$$\text{proj}_{\mathcal{W}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 + \dots + \langle \vec{v}, \vec{u}_r \rangle \vec{u}_r$$

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal



Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Definición (Complemento ortogonal)

Sea \mathcal{W} un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$.

El **complemento ortogonal** de \mathcal{W} , denotado \mathcal{W}^\perp es

$$\mathcal{W}^\perp = \left\{ \vec{x} \in \mathcal{V} \mid \langle \vec{x}, \vec{w} \rangle = 0, \text{ para todo } \vec{w} \in \mathcal{W} \right\}$$

Teorema

Sea \mathcal{W} un subespacio vectorial de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$. Entonces

- 1 \mathcal{W}^\perp es subespacio vectorial de \mathcal{V} .
- 2 $\mathcal{W} \cap \mathcal{W}^\perp = \{\vec{0}\}$
- 3 Si $\dim \mathcal{V} = n$, entonces $\dim \mathcal{W}^\perp = n - \dim \mathcal{W}$.

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Teorema (Descomposición ortogonal)

Sea \mathcal{W} un subespacio vectorial finito de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$. Entonces todo vector $\vec{v} \in \mathcal{V}$ tiene una representación única de la forma

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

donde $\vec{v}_1 \in \mathcal{W}$ y $\vec{v}_2 \in \mathcal{W}^\perp$.

Los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 se determinan muy fácilmente pues, respectivamente, son la proyección ortogonal de \vec{v} sobre \mathcal{W} y la componente de \vec{v} ortogonal a \mathcal{W} .

$$\vec{v}_1 = \text{proy}_{\mathcal{W}} \vec{v}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \text{proy}_{\mathcal{W}} \vec{v}$$

Espacio vectorial euclídeo

Proyección ortogonal

Ejemplo

Sea el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y el subespacio $\mathcal{W} = \mathcal{L}\left(\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix}\right)$.

La **proyección ortogonal** del vector \vec{v} **sobre** el subespacio \mathcal{W} es

$$\text{proy}_{\mathcal{W}} \vec{v} = \langle \vec{v}, \vec{u}_1 \rangle \vec{u}_1 + \langle \vec{v}, \vec{u}_2 \rangle \vec{u}_2 = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{5}\right) \begin{pmatrix} -4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix}$$

La **componente de \vec{v} ortogonal a \mathcal{W}** es

$$\vec{v} - \text{proy}_{\mathcal{W}} \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4/25 \\ 1 \\ -3/25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21/25 \\ 0 \\ 28/25 \end{pmatrix}$$

Espacio vectorial euclídeo

Existencia de bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

Teorema

Todo espacio euclídeo de dimensión finita tiene una base ortonormal.

La demostración desarrolla el **Método de Ortonormalización de Gram-Schmidt**

- 1 En primer lugar, partiendo de una base cualquiera $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ se construye una base ortogonal $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$
- 2 A continuación, normalizando los vectores de \mathcal{B}' , se forma la base ortonormal $\mathcal{B}'' = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$

Espacio vectorial euclídeo

Método de Gram-Schmidt

Dada una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ de un espacio euclídeo $(\mathcal{V}, \langle \cdot \rangle)$.

- ❶ Se forma la base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$, donde los \vec{w}_j son

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\langle \vec{v}_2, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_3, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2$$

$$\vdots$$

$$\vec{w}_n = \vec{v}_n - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_1 \rangle}{\langle \vec{w}_1, \vec{w}_1 \rangle} \vec{w}_1 - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_2 \rangle}{\langle \vec{w}_2, \vec{w}_2 \rangle} \vec{w}_2 \dots - \frac{\langle \vec{v}_n, \vec{w}_{n-1} \rangle}{\langle \vec{w}_{n-1}, \vec{w}_{n-1} \rangle} \vec{w}_{n-1}$$

$\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ es una base ortogonal de \mathcal{V} .

- ❷ Normalizando los vectores de \mathcal{B}' obtenemos la siguiente base ortonormal

$$\mathcal{B}'' = \left\{ \frac{\vec{w}_1}{\|\vec{w}_1\|}, \frac{\vec{w}_2}{\|\vec{w}_2\|}, \dots, \frac{\vec{w}_n}{\|\vec{w}_n\|} \right\}$$

Espacio vectorial euclídeo

Método de Gram-Schmidt

Ejemplo

Aplique el método de Gram-Schmidt a la siguiente base de \mathbb{R}^3

$$B = \left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Primero formamos la base ortogonal $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \frac{\vec{v}_2 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{w}_3 = \vec{v}_3 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_1}{\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_1} \vec{w}_1 - \frac{\vec{v}_3 \cdot \vec{w}_2}{\vec{w}_2 \cdot \vec{w}_2} \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1/2}{1/2} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Espacio vectorial euclídeo

Existencia de bases ortogonales y ortonormales. Método de Gram-Schmidt

Luego

$$\mathcal{B}' = \{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \}$$

Normalizando cada vector de la base \mathcal{B}' obtenemos $\mathcal{B}'' = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3 \}$

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{\|\vec{w}_1\|} \vec{w}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{\|\vec{w}_2\|} \vec{w}_2 = \frac{1}{1/\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_3 = \frac{1}{\|\vec{w}_3\|} \vec{w}_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Definiciones (Aplicación ortogonal, Matriz ortogonal)

- Una aplicación lineal se dice **ortogonal** si conserva el producto escalar.
- Se dice que una matriz Q es **ortogonal** si $Q^t Q = I$. Es decir, $Q^t = Q^{-1}$.

Teorema

Sea $\mathcal{B} = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ una base ordenada de \mathbb{R}^n y sea P la matriz del cambio de base de \mathcal{B} a la base canónica \mathcal{C} . Entonces \mathcal{B} es una base ortonormal si y sólo si P es una matriz ortogonal.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo

La matriz ortogonal $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ es la matriz del cambio de la base ortonormal $\mathcal{B} = \left\{ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ a la base canónica.

Diagonalización ortogonal

Definición

Se dice que una matriz A es **diagonalizable ortogonalmente** si existe una matriz ortogonal P tal que $P^t A P = D$.

Ejemplo

Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

La matriz A es diagonalizable ortogonalmente, ya que

$$P^t A P = D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

Teorema

Una matriz A de orden n es diagonalizable ortogonalmente si y solo si A tiene un sistema de n vectores propios ortonormales.

Teorema

Si una matriz A es diagonalizable ortogonalmente, entonces es simétrica.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (Diagonalización ortogonal)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valores propios

$\lambda_1 = 2$, multiplicidad 2

$\lambda_2 = 5$, multiplicidad 1

Sus **subespacios propios** son:

$$\mathcal{U}_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \mathcal{L}\left[\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

$$\mathcal{U}_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - z = 0 \wedge y - z = 0\} = \mathcal{L}\left[\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios de A

$$\left\{ \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

- Podemos observar que

\vec{v}_3 es ortogonal a \vec{v}_1 y a \vec{v}_2 ; pero \vec{v}_1 **no** es ortogonal a \vec{v}_2 .

- Ortogonalizando la base de \mathcal{U}_2 , obtenemos la base

$$\vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

- Ahora, la base de vectores propios $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{v}_3\}$ ya es ortogonal.

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.)

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Base de vectores propios ortogonales de A

$$\left\{ \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Normalizando nos queda una base de vectores propios ortonormal

$$\left\{ \vec{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Diagonalización ortogonal

Ejemplo (cont.) Así, obtenemos la diagonalización ortogonal de la matriz simétrica A ,

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = P^t A P = P^t \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} P$$

donde P es la matriz ortogonal siguiente

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

Diagonalización ortogonal

- En este ejemplo ha sido decisivo que el vector propio \vec{v}_3 correspondiente al valor propio $\lambda_2 = 5$ fuese **ortogonal** a los vectores propios \vec{v}_1 y \vec{v}_2 correspondientes a $\lambda_1 = 2$.
- El siguiente teorema muestra que esta **ortogonalidad** no es casual, sino que es una consecuencia de la **simetría** de A .

Teorema

Si una matriz A es simétrica, entonces los vectores propios que pertenecen a subespacios propios distintos son ortogonales.

Diagonalización ortogonal

Teorema

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica. Entonces:

- 1 A sólo tiene valores propios reales.
- 2 Si un valor propio λ tiene orden de multiplicidad k , la dimensión del subespacio propio \mathcal{U}_λ es k .

Corolario

Toda matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable ortogonalmente.

Diagonalización ortogonal

Procedimiento para diagonalizar ortogonalmente una matriz simétrica A

- 1 Se encuentra una base para cada subespacio propio de A .
- 2 Se aplica el proceso de Gram-Schmidt a cada una de estas bases para obtener una base ortonormal de cada subespacio propio.
- 3 Se forma una matriz P cuyas columnas son los vectores de las bases ortonormales obtenidas.

Esta matriz diagonaliza ortogonalmente a la matriz A .

$$P^t A P = D$$