

# Retículos y Álgebras de Boole

Mariam Cobalea Vico

Universidad de Málaga  
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 16/17

## Tema 2: Retículos y Álgebras de Boole

- Retículos ordenados y retículos algebraicos.
- Tipos de retículos y propiedades.
  - ▶ Distributivos
  - ▶ Acotados
  - ▶ Complementados
- Álgebras de Boole. Expresiones y funciones booleanas.

# Retículos ordenados

## Definición

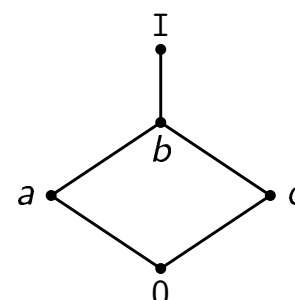
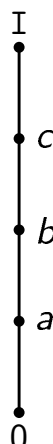
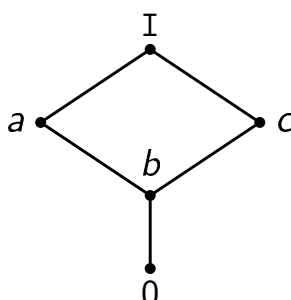
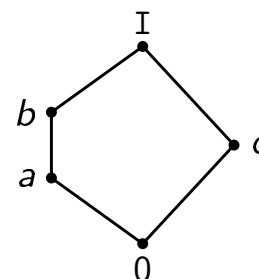
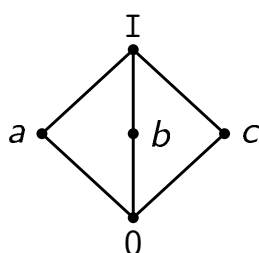
Un conjunto parcialmente ordenado  $(\mathcal{L}, \preceq)$  es un **retículo (ordenado)** si cada par de elementos  $a, b \in \mathcal{L}$  tiene supremo e ínfimo, esto es,

$$\sup\{a, b\} \in \mathcal{L} \quad \text{e} \quad \inf\{a, b\} \in \mathcal{L}$$

El retículo se dice **completo** si todo subconjunto  $X$  tiene supremo e ínfimo.

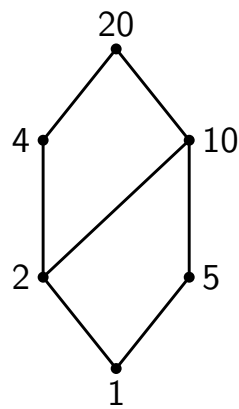
- Ciertos retículos son importantes en teorías abstractas de computación, desarrolladas a partir de la noción de *aproximación*; también pueden usarse para representar el comportamiento de programas.
- Cierta tipo de retículos se usa como generalización de las *álgebras de Boole* en lógicas no clásicas.

## Algunos ejemplos de retículos ordenados I

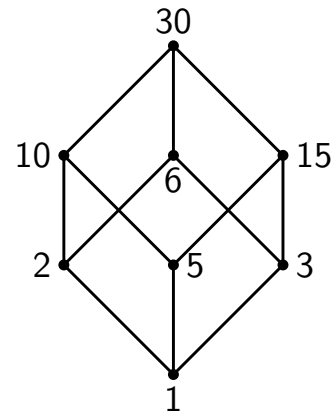


## Algunos ejemplos de retículos ordenados II

- $(D_n, |)$ , en particular para  $n = 20$  y  $n = 30$ :



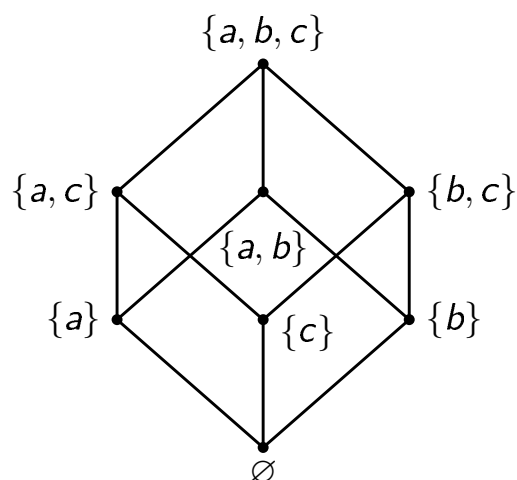
$(D_{20}, |)$



$(D_{30}, |)$

## Algunos ejemplos de retículos ordenados III

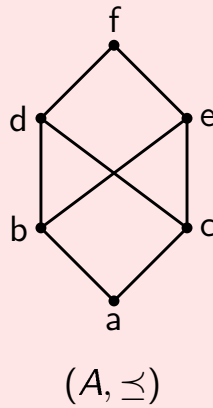
- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ , en particular para  $S = \{a, b, c\}$



## Retículos ordenados

### Ejercicio

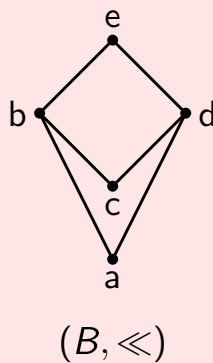
¿Es retículo el conjunto parcialmente ordenado  $(A, \preceq)$ ?



## Retículos ordenados

### Ejercicio

¿Es retículo el conjunto parcialmente ordenado  $(B, \ll)$ ?



# Retículos ordenados

## Supremo e ínfimo como operaciones algebraicas

Usando la definición de retículo ordenado, en todo retículo  $(\mathcal{L}, \preceq)$  se pueden definir dos operaciones binarias  $\sqcup$  y  $\sqcap$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sqcup: \quad \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ (a, b) &\longmapsto \sup\{a, b\} = a \sqcup b\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sqcap: \quad \mathcal{L} \times \mathcal{L} &\longrightarrow \mathcal{L} \\ (a, b) &\longmapsto \inf\{a, b\} = a \sqcap b\end{aligned}$$

# Retículos ordenados

## Supremo e ínfimo como operaciones algebraicas

### Ejemplos

- ❶ En el retículo ordenado  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  se definen las operaciones:

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(S), \quad A \sqcup B = \sup\{A, B\} = A \cup B \in \mathcal{P}(S),$$

$$A \sqcap B = \inf\{A, B\} = A \cap B \in \mathcal{P}(S)$$

- ❷ En el retículo ordenado  $(\mathbb{Z}^+, |)$  se definen las operaciones:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}^+, \quad a \sqcup b = \sup\{a, b\} = m.c.m.(a, b) \in \mathbb{Z}^+,$$

$$a \sqcap b = \inf\{a, b\} = m.c.d.(a, b) \in \mathbb{Z}^+$$

# Retículos ordenados

## Supremo e ínfimo como operaciones algebraicas

### Teorema

Sea el retículo  $(\mathcal{L}, \preceq)$  y sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  el sistema algebraico que determina. En  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  se verifican las siguientes propiedades:

- |                  |   |   |
|------------------|---|---|
| 1. Conmutativa : | $a \sqcup b = b \sqcup a$                       | $a \sqcap b = b \sqcap a$                       |
| 2. Asociativa :  | $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$ | $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ |
| 3. Absorción :   | $a \sqcup (a \sqcap b) = a$                     | $a \sqcap (a \sqcup b) = a$                     |

Estas propiedades se usan para dar una definición axiomática de **retículo algebraico**.

## Retículos algebraicos $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$

### Definición

Sean  $\sqcup$  y  $\sqcap$  dos operaciones binarias definidas en un conjunto  $\mathcal{L}$ . Se dice que  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  es un **retículo algebraico** si para todo  $a, b, c \in \mathcal{L}$  se verifican:

- |                 |   |   |
|-----------------|---|---|
| 1. Conmutativa: | $a \sqcup b = b \sqcup a$                       | $a \sqcap b = b \sqcap a$                       |
| 2. Asociativa:  | $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$ | $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$ |
| 3. Absorción:   | $a \sqcup (a \sqcap b) = a$                     | $a \sqcap (a \sqcup b) = a$                     |

### Ejemplo

$(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$  es un retículo algebraico, pues verifica:

- |    |   |   |
|----|---|---|
| 1. | $A \cup B = B \cup A$                   | $A \cap B = B \cap A$                   |
| 2. | $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ | $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ |
| 3. | $A \cup (A \cap B) = A$                 | $A \cap (A \cup B) = A$                 |

# Principio de Dualidad

## Teorema

Dado un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \preceq)$ , para cada  $a, b \in A$  se define la relación  $a \succeq b$  si y solo si  $b \preceq a$ . Obviamente, se verifica:

- 1  $(A, \succeq)$  también es un conjunto parcialmente ordenado.
- 2 Si  $(A, \preceq)$  es un retículo, entonces  $(A, \succeq)$  también lo es.

Los conjuntos  $(A, \preceq)$  y  $(A, \succeq)$  están muy relacionados, concretamente:

- la operación  $\sqcup$  de  $(A, \preceq)$  coincide con la operación  $\sqcap$  de  $(A, \succeq)$  y
- la operación  $\sqcap$  de  $(A, \preceq)$  coincide con la operación  $\sqcup$  de  $(A, \succeq)$ .

## Principio de Dualidad

Si un enunciado se verifica para un retículo, entonces también se verifica el que resulta al reemplazar la relación  $\preceq$  por la relación  $\succeq$ , la operación  $\sqcup$  por la operación  $\sqcap$  y la operación  $\sqcap$  por la operación  $\sqcup$ .

# Retículos algebraicos $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$

## Teorema

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo algebraico. Se verifican las propiedades:

**4. Idempotencia:**  $a \sqcup a = a, \quad a \sqcap a = a, \text{ para todo } a \in \mathcal{L}$

**5. Cotas:**  $a \sqcup b = b \iff a \sqcap b = a, \text{ para todo } a, b \in \mathcal{L}$

## Retículo algebraico $\Rightarrow$ Retículo ordenado

- Según hemos visto, a partir de un **retículo ordenado** se puede llegar a un **retículo algebraico**.
- A continuación, se establece que a partir de un **retículo algebraico** podemos obtener un **retículo ordenado**.

### Teorema

Dado el retículo algebraico  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ , se define una relación  $\ll$  en  $\mathcal{L}$  de la siguiente manera:

$$a \ll b \iff a \sqcup b = b$$

Entonces  $(\mathcal{L}, \ll)$  es un retículo ordenado en el que para todo  $a, b \in \mathcal{L}$ , se verifica que  $\sup\{a, b\} = a \sqcup b$  e  $\inf\{a, b\} = a \sqcap b$ .

## Subretículos

### Definición

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo y sea  $\mathcal{M}$  un subconjunto no vacío de  $\mathcal{L}$ .

Se dice que  $\mathcal{M}$  es un **subretículo** de  $\mathcal{L}$  si para todo  $x, y \in \mathcal{M}$ ,

$$x \sqcup y \in \mathcal{M}, \quad x \sqcap y \in \mathcal{M}$$

Es decir,  $\mathcal{M}$  es **subretículo** de  $\mathcal{L}$  si tiene estructura de retículo con respecto a la restricción de las operaciones  $\sqcup$  y  $\sqcap$  de  $\mathcal{L}$  sobre  $\mathcal{M}$ .

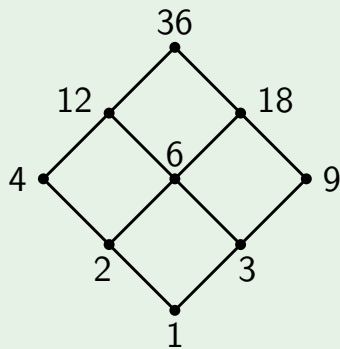


# Subretículos

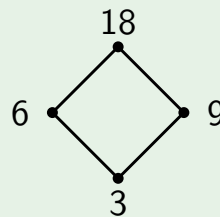
## Ejemplos de subretículos

### Ejemplos

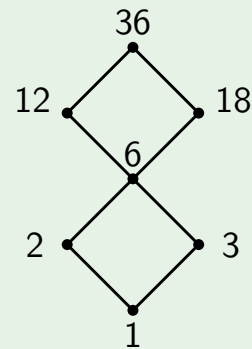
Los subconjuntos parcialmente ordenados  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  son subretículos de  $D_{36}$ .



$D_{36}$



$\mathcal{M}_1$

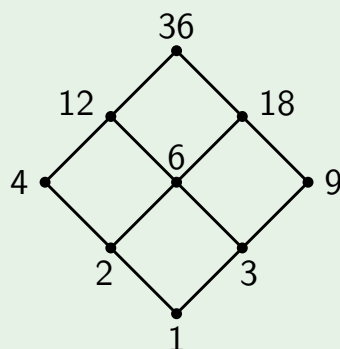


$\mathcal{M}_2$

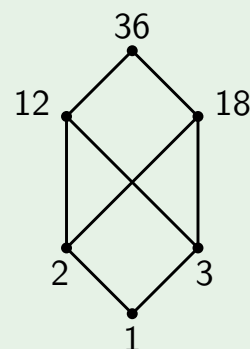
# Subretículos

## Contraejemplos de subretículos

### Ejemplo



$D_{36}$



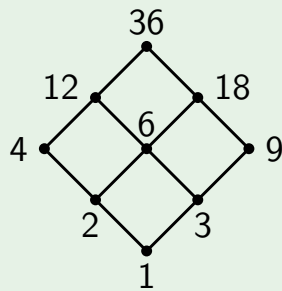
$\mathcal{M}_3$

- El subconjunto parcialmente ordenado  $\mathcal{M}_3 = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$  **no** tiene estructura de retículo, puesto que **no** existe  $\sup\{2, 3\}$ .  
Por lo tanto,  $\mathcal{M}_3$  **no** es un subretículo de  $D_{36}$ .

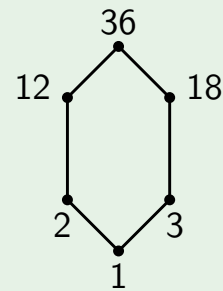
# Subretículos

## Contraejemplos de subretículo

### Ejemplo



$D_{36}$



$\mathcal{M}_4$

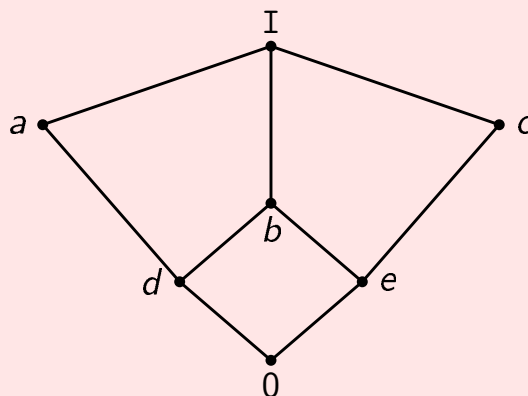
- $\mathcal{M}_4 = \{1, 2, 3, 12, 18, 36\}$  **no** es subretículo del retículo  $D_{36}$ , ya que  

$$12 \sqcap 18 = 6 \notin \mathcal{M}_4$$
- Sin embargo, en  $\mathcal{M}_4$  se pueden definir operaciones  $\sqcup'$  y  $\sqcap'$  que le dan estructura de retículo.
- ☛ Un subconjunto parcialmente ordenado que sea retículo, puede no ser subretículo.

# Subretículos

## Ejercicio

Estudia si  $\mathcal{M} = \{0, a, b, c, I\}$  es subretículo del retículo  $\mathcal{L} = \{0, a, b, c, d, e, I\}$



# Retículo producto

## Teorema

Sean  $(\mathcal{L}_1, \preceq_1)$  y  $(\mathcal{L}_2, \preceq_2)$  retículos. Entonces  $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$  es un retículo con la relación de orden producto  $\preceq$  y las operaciones  $\sqcup$  y  $\sqcap$  definidas mediante

$$(x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2) \iff x_1 \preceq_1 y_1 \quad \wedge \quad x_2 \preceq_2 y_2$$

$$(x_1, x_2) \sqcup (y_1, y_2) = (x_1 \sqcup_1 y_1, x_2 \sqcup_2 y_2)$$

$$(x_1, x_2) \sqcap (y_1, y_2) = (x_1 \sqcap_1 y_1, x_2 \sqcap_2 y_2)$$

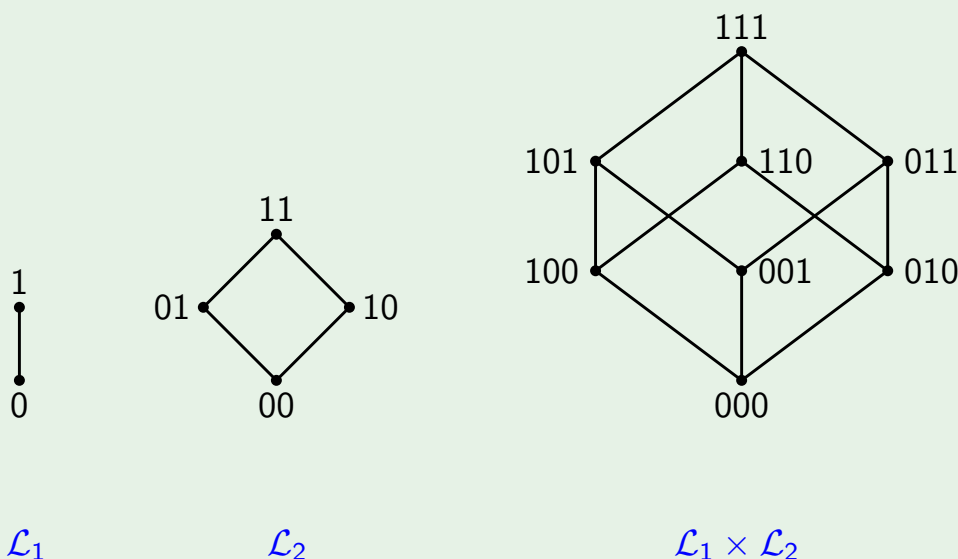
Al retículo  $\mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$  se le llama **retículo producto**.

# Retículo producto

## Ejemplos

### Ejemplo

$$\mathcal{L}_1 = \mathbb{B}, \quad \mathcal{L}_2 = \mathbb{B}^2$$



# Homomorfismos e isomorfismos de retículos

## Definición

Sean los retículos  $(\mathcal{L}_1, \sqcup_1, \sqcap_1)$  y  $(\mathcal{L}_2, \sqcup_2, \sqcap_2)$  y sea  $f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ .

Se dice que  $f$  es un

- ❶  $\sqcup$ -homomorfismo, si  $x \sqcup_1 y = z$  implica que  $f(x) \sqcup_2 f(y) = f(z)$
- ❷  $\sqcap$ -homomorfismo, si  $x \sqcap_1 y = z$  implica que  $f(x) \sqcap_2 f(y) = f(z)$
- ❸ homomorfismo de orden, si  $x \leq_1 y$  implica que  $f(x) \leq_2 f(y)$

Se dice que  $f$  es un **homomorfismo de retículos** si  $f$  es  $\sqcup$ -homomorfismo y  $\sqcap$ -homomorfismo.

Los homomorfismos de retículos si son inyectivos, sobreyectivos o biyectivos se llaman **monomorfismos**, **epimorfismos** o **isomorfismos** respectivamente.

# Homomorfismos e isomorfismos de retículos

## Teorema

Si  $f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  es un  $\sqcup$ -homomorfismo o bien un  $\sqcap$ -homomorfismo, entonces es un homomorfismo de orden. Es decir,

$$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \\ \text{(1) } f(x \sqcup_1 y) = f(x) \sqcup_2 f(y) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \\ \text{(3) } x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y) \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \\ \text{(2) } f(x \sqcap_1 y) = f(x) \sqcap_2 f(y) \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2 \\ \text{(3) } x \leq_1 y \implies f(x) \leq_2 f(y) \end{array} \right\}$$

El recíproco no es cierto. No toda función entre retículos que conserva el orden, conserva también las operaciones  $\sqcup$  y  $\sqcap$ .

# Homomorfismos e isomorfismos de retículos

## Teorema

Sean  $(\mathcal{L}_1, \leq_1)$  y  $(\mathcal{L}_2, \leq_2)$  retículos. La función  $f: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  es un *isomorfismo de retículos* si y sólo si es biyectiva y para todo  $a, b \in \mathcal{L}_1$ ,

$$a \leq_1 b \iff f(a) \leq_2 f(b)$$

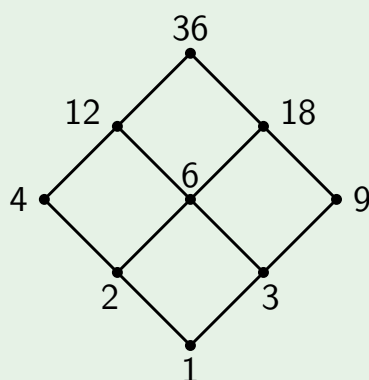
$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ biyectiva} \\ f(a \sqcup_1 b) = f(a) \sqcup_2 f(b) \\ f(a \sqcap_1 b) = f(a) \sqcap_2 f(b) \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ biyectiva} \\ a \leq_1 b \iff f(a) \leq_2 f(b) \end{array} \right\}$$

- ☛ Dos retículos **isomorfos** son **idénticos algebraicamente** y también como **conjuntos parcialmente ordenados**.
- ☛ Por lo tanto, sus **diagramas de Hasse** sólo se diferenciarán en las **etiquetas de los vértices**.

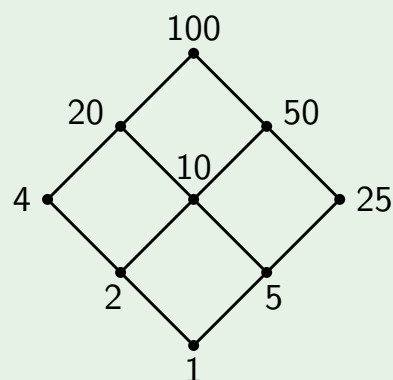
## Isomorfismos de retículos

### Ejemplo

$(D_{36}, |)$  y  $(D_{100}, |)$  son retículos isomorfos:



$D_{36}$

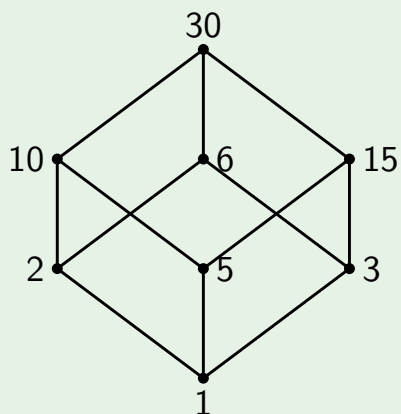


$D_{100}$

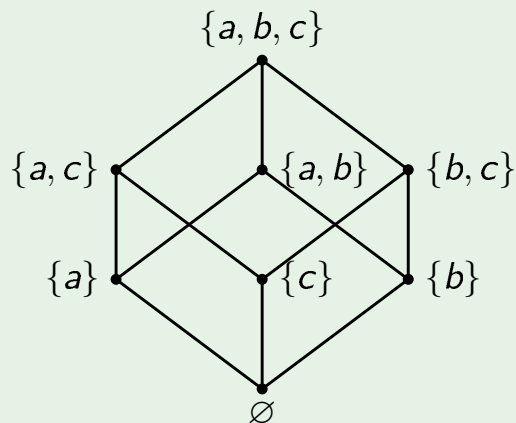
## Isomorfismos de retículos

### Ejemplo

$(D_{30}, |)$  y  $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$  son retículos isomorfos:



$(D_{30}, |)$

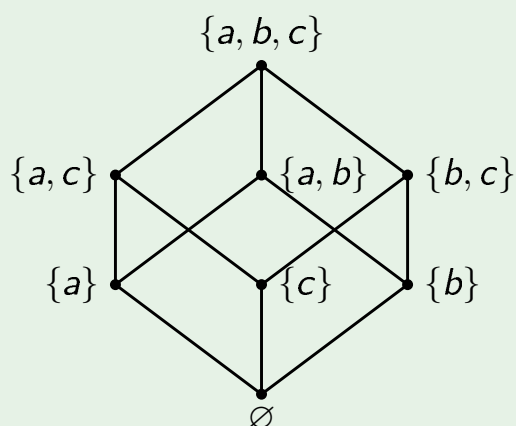


$(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$

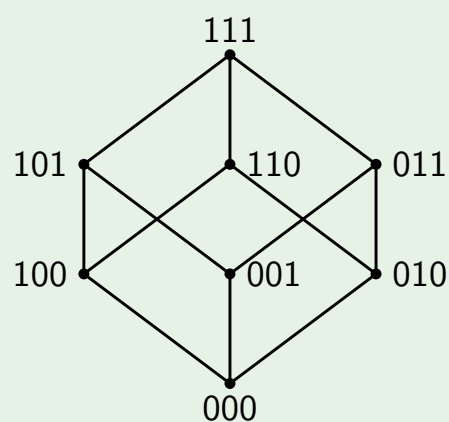
## Isomorfismos de retículos

### Ejemplo

Son retículos isomorfos  $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$  y  $(\mathbb{B}_3, \preceq)$



$(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \subseteq)$



$(\mathbb{B}^3, \preceq)$

# Retículos distributivos

## Definición

Se dice que el retículo  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  es **distributivo** si para cada  $a, b, c \in \mathcal{L}$  se verifica:

$$a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$$

$$a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$$

## Ejemplos

- $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap)$  es distributivo.  
En general,  $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$  es un retículo distributivo.
- $D_6, D_{12}, D_{36}, \dots$  son retículos distributivos.  
En general,  $D_n$  es un retículo distributivo.

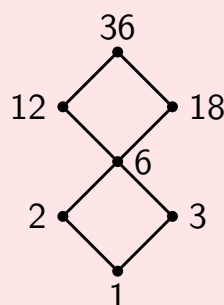
# Retículos distributivos

## Teorema

Si  $\mathcal{L}'$  es un subretículo de un retículo distributivo  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$ , entonces  $\mathcal{L}'$  también es distributivo.

## Ejercicio

Estudia si el retículo de la figura es distributivo.



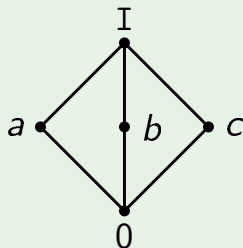
**Solución:** Se comprueba fácilmente que es distributivo, teniendo en cuenta que es un subretículo de  $D_{36}$  y aplicando el teorema anterior.

# Retículos no distributivos

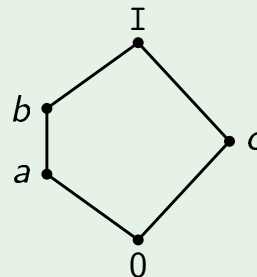
## Ejemplo

Los dos casos de retículos no distributivos más representativos son:

Diamante



Pentágono



$$\left\{ \begin{array}{l} a \sqcap (b \sqcup c) = a \sqcap I = a \\ (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) = 0 \sqcup 0 = 0 \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} a \sqcup (b \sqcap c) = a \sqcup 0 = a \\ (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c) = b \sqcap I = b \end{array} \right\}$$

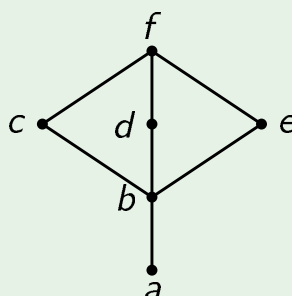
## Caracterización de retículos no distributivos

### Teorema

*Un retículo es no distributivo si y sólo si contiene un subretículo isomorfo al diamante o al pentágono del ejemplo anterior.*

### Ejemplo

El siguiente retículo no es distributivo, pues contiene el subretículo  $\{b, c, d, e, f\}$  que es isomorfo al diamante.

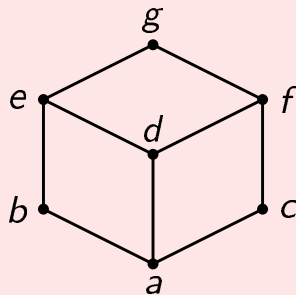




## Retículos distributivos

### Ejercicio

Estudia si es distributivo el retículo



## Retículos distributivos

### Teorema

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo distributivo y sean  $a, b, c \in \mathcal{L}$  tales que

$$a \sqcup b = a \sqcup c \quad \text{y} \quad a \sqcap b = a \sqcap c$$

Entonces  $b = c$ .

*Demostración:*

$$b \stackrel{(Abs.)}{=} b \sqcup (b \sqcap a) \stackrel{(Conm.)}{=} b \sqcup (a \sqcap b) \stackrel{(Hip.)}{=} b \sqcup (a \sqcap c)$$

$$\stackrel{(Dist.)}{=} (b \sqcup a) \sqcap (b \sqcup c) \stackrel{(Conm.)}{=} (a \sqcup b) \sqcap (b \sqcup c)$$

$$\stackrel{(Hip.)}{=} (a \sqcup c) \sqcap (b \sqcup c) \stackrel{(Dist.)}{=} (a \sqcap b) \sqcup c \stackrel{(Hip.)}{=} (a \sqcap c) \sqcup c \stackrel{(Abs.)}{=} c$$

# Retículos Acotados

## Definición

Sea  $(\mathcal{L}, \preceq)$  un retículo. Se llama **mínimo** de  $\mathcal{L}$  al elemento que es anterior a todo elemento del retículo, se denota por  $0$  y se le llama también **primer elemento**. Se llama **máximo** de  $\mathcal{L}$  al elemento que es posterior a todo elemento del retículo. Se denota  $1$  y se le llama también **último elemento**.

## Definición

Un retículo  $\mathcal{L}$  se dice **acotado** si tiene primer y último elemento.

## Ejemplos

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  es retículo acotado, con mínimo  $\emptyset$  y máximo  $S$ .
- Dado un entero positivo  $n$ , en el retículo  $(D_n, |)$  el primer elemento es  $1$  y el último elemento es  $n$ .
- En  $(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \preceq)$  el primer elemento es la función cero y el último elemento es la función uno.

# Retículos acotados

- Si  $S$  es un conjunto infinito, entonces  $\mathcal{P}(S)$  también es infinito. En este caso tenemos que  $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$  es un **retículo infinito** que es **acotado**.

- Sin embargo, no todos los retículos infinitos serán acotados.
- Por ejemplo,  $(\mathbb{Z}, \leq)$  no es acotado, ya que no tiene primer ni último elemento.
- Por el contrario, en el caso finito tenemos

## Teorema

*Todo retículo finito es acotado.*

# Retículos acotados

## Teorema

Sea  $(\mathcal{L}, \preceq)$  un retículo acotado. Para todo elemento  $a \in \mathcal{L}$  se verifica:

- ①  $a \sqcup 0 = a \quad a \sqcap 0 = 0$
- ②  $a \sqcap I = a \quad a \sqcup I = I$

### Demostración:

- ① Por definición de primer elemento, para todo elemento  $a \in \mathcal{L}$ :

$$0 \preceq a \implies a \sqcup 0 = a \iff a \sqcap 0 = 0$$

- ② Por definición de último elemento, para todo elemento  $a \in \mathcal{L}$ :

$$a \preceq I \implies a \sqcap I = a \iff a \sqcup I = I$$

# Retículos acotados

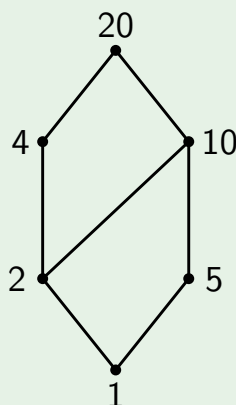
## Átomos y superátomos

### Definición

Sea  $(\mathcal{L}, \preceq)$  un retículo acotado. Se llama **átomo** a cada elemento que es sucesor inmediato del primer elemento. Se llama **superátomo** a cada elemento cuyo sucesor inmediato es el último elemento del retículo.

### Ejemplo

- Los átomos del retículo  $D_{20}$  son 2 y 5; sus superátomos son 4 y 10.

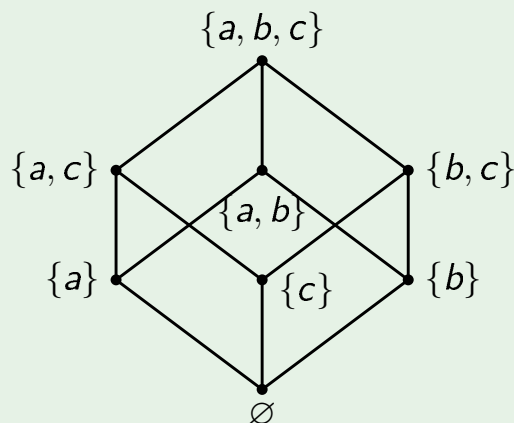


# Retículos acotados

## Átomos y superátomos

### Ejemplos

- En  $P(S)$  los átomos son los subconjuntos unitarios; los superátomos los que subconjuntos con **dos** elementos.



- Los átomos de  $F(S, \mathbb{B})$  son las funciones que toman el valor 1 exactamente en **un** elemento del dominio; los superátomos son las que toman el valor 0 exactamente en **un** elemento.

# Retículos acotados

## Elementos $\sqcup$ -irreducibles

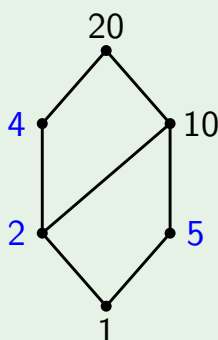
### Definición

Se dice que  $x \in \mathcal{L}$  es un elemento  $\sqcup$ -irreducible si no se puede expresar como el supremo de otros elementos, es decir:

$$\text{Si } x = y \sqcup z \text{ entonces o bien } x = y \text{ o bien } x = z$$

### Ejemplo

Los elementos  $\sqcup$ -irreducibles de  $D_{20}$  son 2, 4 y 5.



# Retículos acotados

## Elementos $\sqcup$ -irreducibles

### Teorema

Sea  $x \neq 0 \in \mathcal{L}$ , se tiene que  $x$  es un elemento  $\sqcup$ -irreducible si y solo si es sucesor inmediato de exactamente un elemento.

### Corolario

Los átomos son elementos  $\sqcup$ -irreducibles.

El recíproco no es cierto.

### Contraejemplo

En el retículo  $(D_{36}, |)$ , el elemento 4 es  $\sqcup$ -irreducible, pero **no** es un átomo ya que no es sucesor inmediato del primer elemento.

# Retículos acotados

## Descomposición en unión de elementos $\sqcup$ -irreducibles no redundantes

### Teorema

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo finito. Entonces cada  $a \in \mathcal{L}$  se puede expresar

$$a = d_1 \sqcup d_2 \sqcup \cdots \sqcup d_t$$

donde los  $d_i$  son elementos  $\sqcup$ -irreducibles no redundantes.

¿Qué quiere decir que los elementos  $d_i$  son **no redundantes**?

- ✓ Si  $d_j \preceq d_k$ , es decir,  $d_j \sqcup d_k = d_k$ , entonces se puede suprimir  $d_j$  de la descomposición de  $a$ .
- ✓ Así, la expresión es **no redundante** si todos los  $d_i$  son incomparables en  $\preceq$ .

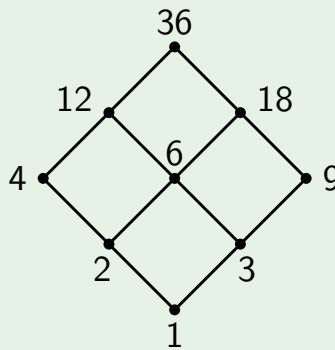
# Retículos acotados

Descomposición como suma de elementos  $\sqcup$ -irreducibles no redundantes

## Ejemplo

En  $D_{36}$  el elemento 18 se expresa de la forma:

$$18 = \sup(6, 9) = \sup(\sup(2, 3), 9) = \sup(2, \sup(3, 9))$$



$$18 = 6 \sqcup 9 = (2 \sqcup 3) \sqcup 9 = 2 \sqcup (3 \sqcup 9) = 2 \sqcup 9$$

# Retículos acotados

Descomposición como suma de elementos  $\sqcup$ -irreducibles irredundantes

## Ejercicio

- 1 Dibuja el diagrama de Hasse de  $(D_{150}, |)$ .
- 2 Da una lista de los átomos y otra lista de los elementos  $\sqcup$ -irreducibles.
- 3 Expresa 150, 50 y 75 mediante elementos  $\sqcup$ -irreducibles (en más de una forma si es posible).

# Elementos Complementarios

## Definición

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo acotado, con primer elemento  $0$  y último elemento  $I$  y sean  $a, b \in \mathcal{L}$ . Se dice que  $a$  y  $b$  son **complementarios** (uno es el complemento del otro) si:

$$a \sqcup b = I \quad \text{y} \quad a \sqcap b = 0$$

También se dice que  $b$  es **complemento** de  $a$  y que  $a$  es **complemento** de  $b$ .

En todo retículo acotado se verifica que  $0$  e  $I$  son complementarios.

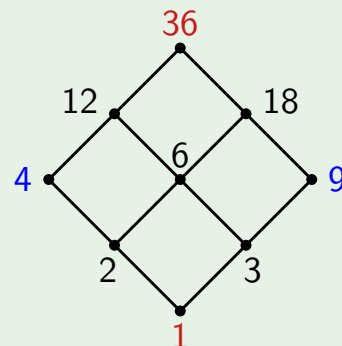
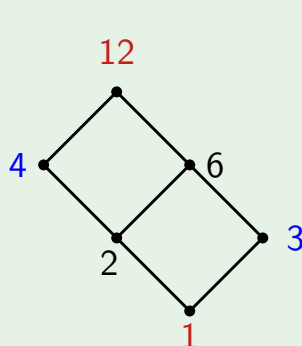
## Observación

En un retículo acotado un elemento  $x \in \mathcal{L}$  puede no tener complemento, tener un único complemento o puede tener más de un complemento.

# Elementos Complementarios

## Ejemplos

- En el retículo  $(D_{12}, |)$  no tienen complemento 2, ni 6;  
3 tiene un único complemento que es 4; son complementarios 1 y 12.



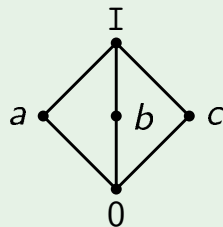
- En el retículo  $(D_{36}, |)$  no tienen complemento 2, 3, 6, 12 ni 18;  
4 tiene un único complemento que es 9; son complementarios 1 y 36.

# Elementos Complementarios

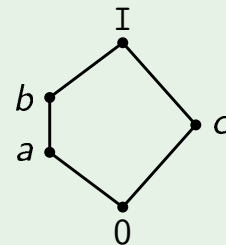
## Ejemplos

- En el diamante

- ▶  $a$  y  $b$  son complementarios, ya que  $a \sqcup b = I$  y  $a \sqcap b = 0$
- ▶  $a$  y  $c$  son complementarios, ya que  $a \sqcup c = I$  y  $a \sqcap c = 0$
- ▶  $b$  y  $c$  son complementarios, ya que  $b \sqcup c = I$  y  $b \sqcap c = 0$



diamante



pentágono

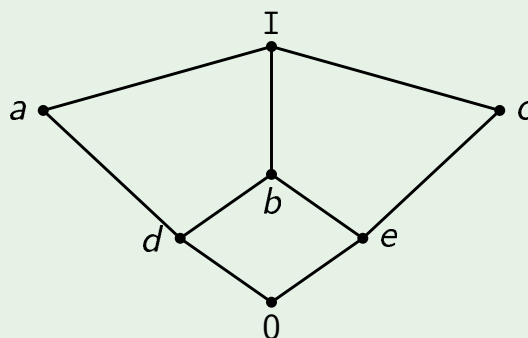
- En el pentágono:

- ▶  $a$  y  $c$  son complementarios, ya que  $a \sqcup c = I$  y  $a \sqcap c = 0$
- ▶  $b$  y  $c$  son complementarios, ya que  $b \sqcup c = I$  y  $b \sqcap c = 0$

# Elementos Complementarios

## Ejemplo

- En el retículo



- ▶  $0$  y  $I$  son complementarios.
- ▶  $a$  y  $c$  son complementarios, ya que  $a \sqcup c = I$  y  $a \sqcap c = 0$ .
- ▶  $a$  y  $e$  son complementarios, ya que  $a \sqcup e = I$  y  $a \sqcap e = 0$ .
- ▶  $d$  y  $c$  son complementarios, ya que  $d \sqcup c = I$  y  $d \sqcap c = 0$ .
- ▶  $b$  no tiene complemento.



# Retículos complementados

## Definición

Un retículo  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  se llama **complementado** si cada elemento tiene al menos un complemento.

## Ejemplo

- $(D_n, m.c.m., m.c.d.)$  es complementado para  $n = 6$ .

Sin embargo no lo es para  $n = 12$ , ya que 2 no tiene complemento en  $D_{12}$ .

## Teorema

$(D_n, m.c.m., m.c.d.)$  es complementado si y sólo si  $n = p_1^1 \cdot p_2^1 \cdots p_k^1$ , donde cada  $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$  son primos distintos.

# Complemento de un elemento

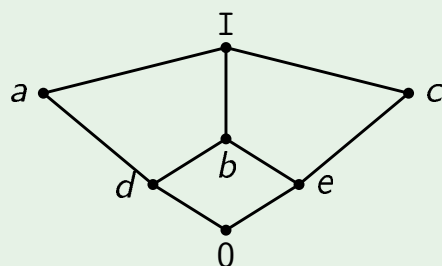
## Teorema

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo distributivo y acotado con 0 y I. Entonces cada elemento  $a \in \mathcal{L}$  tiene a lo sumo un complemento.

- ☛ Como consecuencia, si en un retículo acotado encontramos un elemento que tiene más de un complemento, podemos deducir que no es distributivo.

## Ejemplo

El retículo



no es distributivo, ya que hemos encontrado que  $c$  tiene dos complementos  $a$  y  $d$ .

## Operación complemento

### Definición

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap)$  un retículo complementado y distributivo y sea  $a \in \mathcal{L}$ .

El **complemento** del elemento  $a \in \mathcal{L}$  es el único elemento  $\bar{a} \in \mathcal{L}$  tal que

$$a \sqcup \bar{a} = I \quad \text{y} \quad a \sqcap \bar{a} = 0$$

En todo retículo distributivo y complementado podemos definir una función de  $\mathcal{L}$  en sí mismo que asigna a cada elemento  $a \in \mathcal{L}$  su complemento  $\bar{a}$ .

$$\begin{aligned} - & : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \\ a & \mapsto \bar{a} \end{aligned}$$

### Ejemplo

En  $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap)$  el complemento de cada  $X \subseteq S$  es el conjunto  $\bar{X} = S \setminus X$ .

$$\begin{aligned} - & : \mathcal{P}(S) \rightarrow \mathcal{P}(S) \\ X & \mapsto \bar{X} = S \setminus X \end{aligned}$$

## Operación complemento

### Ejemplo

$(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \leq)$  es un retículo complementado.

En el retículo  $(\mathcal{F}(\mathbb{B}^2, \mathbb{B}), \leq)$  cada elemento tiene un único complemento.

El complemento de la función  $f: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$  es la función

$$\bar{f}: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}$$

definida como

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) = 1 \\ 1, & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$$

# Retículos de Boole

## Definición

Se llama **retículo de Boole** a un retículo distributivo y complementado.

## Ejemplo

- $\mathbb{B} = \{0, 1\}$  con su orden habitual  $\leq$  es un retículo ordenado. Las operaciones  $\sqcup$  y  $\sqcap$  asociadas son las siguientes:

| $\sqcup$ | 0 | 1 |
|----------|---|---|
| 0        | 0 | 1 |
| 1        | 1 | 1 |

| $\sqcap$ | 0 | 1 |
|----------|---|---|
| 0        | 0 | 0 |
| 1        | 0 | 1 |

Se puede demostrar fácilmente que  $(\mathbb{B}, \sqcup, \sqcap)$  es un retículo distributivo y complementado.

# Retículos de Boole

## Propiedades

Un retículo de Boole es un conjunto con dos operaciones binarias  $\sqcup$  y  $\sqcap$  y una operación unaria  $-$  que verifica las propiedades que hemos visto. Además, se tiene:

## Teorema

Sea  $(\mathcal{L}, \sqcup, \sqcap, -)$  un retículo de Boole. Para todo  $a, b \in \mathcal{L}$  se verifican las propiedades:

- **De Morgan**  $\overline{(a \sqcup b)} = \bar{a} \sqcap \bar{b}$   $\overline{a \sqcap b} = \bar{a} \sqcup \bar{b}$
- **Involución**  $\bar{\bar{a}} = a$

A los retículos de Boole se les llama también **álgebras de Boole**.

Se usa el término **retículo de Boole** para hacer hincapié en el orden parcial subyacente, mientras que se usa **álgebra de Boole** cuando se quiere resaltar las operaciones algebraicas  $\sqcup$ ,  $\sqcap$  y  $-$ .

# Álgebras de Boole

## Definición algebraica

Las álgebras de Boole se pueden definir también usando sólo las operaciones algebraicas.

### Definición

Sea  $\mathcal{A}$  un conjunto no vacío que contiene dos elementos especiales  $0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}}$ ,  $0_{\mathcal{A}} \neq 1_{\mathcal{A}}$ . En  $\mathcal{A}$  se consideran dos operaciones binarias  $+$  y  $\cdot$  y una operación unaria  $-$ . Se dice que  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  es un **álgebra de Boole** si para todo  $a, b, c \in \mathcal{A}$  se verifican:

|                       |   |   |
|-----------------------|---|---|
| <b>Identidad :</b>    | $a + 0_{\mathcal{A}} = a$                 | $a \cdot 1_{\mathcal{A}} = a$             |
| <b>Conmutativa :</b>  | $a + b = b + a$                           | $a \cdot b = b \cdot a$                   |
| <b>Distributiva :</b> | $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$ | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ |
| <b>Complemento :</b>  | $a + \bar{a} = 1_{\mathcal{A}}$           | $a \cdot \bar{a} = 0_{\mathcal{A}}$       |

### Ejemplo

$(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$  y  $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, -, \emptyset, S)$  son álgebras de Boole

## Retículo de Boole = Álgebra de Boole

### Teorema

Sea  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  un álgebra de Boole. La relación  $\preceq$  definida

$$a \preceq b \iff a + b = b$$

es un orden parcial.

### Ejercicio

Demuestra que para todo  $a \in \mathcal{A}$ , se verifica  $0_{\mathcal{A}} \preceq a \preceq 1_{\mathcal{A}}$ .

- Las álgebras de Boole cumplen **todas** las propiedades establecidas para los retículos distributivos y complementados.

### Teorema

Todo retículo de Boole es un álgebra de Boole y recíprocamente.

# Retículo de Boole = Álgebra de Boole

1. **Conmutativa:**  $a + b = b + a$   $a \cdot b = b \cdot a$
2. **Asociativa:**  $a + (b + c) = (a + b) + c$   $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. **Absorción:**  $a + (a \cdot b) = a$   $a \cdot (a + b) = a$
4. **Idempotencia:**  $a + a = a$   $a \cdot a = a$
5. **Cotas:**  $a \preceq b \iff a + b = b \iff a \cdot b = a$
6. **Extremos:**  $0, 1 \in \mathcal{A}, \quad 0 \preceq a \preceq 1$
7. **Identidad:**  $0 + a = a$   $a \cdot 1 = a$
8. **Dominancia:**  $a + 1 = 1$   $0 \cdot a = 0$
9. **Distributiva:**  $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$   $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$
10. **Complemento:**  $a + \bar{a} = 1$   $a \cdot \bar{a} = 0$
11. **DeMorgan:**  $\overline{(a + b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$   $\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
12. **Involución:**  $\bar{\bar{a}} = a$

## Álgebras de Boole

### Ejercicio

En un álgebra de Boole  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  se define la operación  $\oplus$  (xor) de la siguiente manera:

$$a \oplus b = a\bar{b} + \bar{a}b$$

❶ Determina  $a \oplus a$ ,  $a \oplus 0$ ,  $a \oplus 1$  y  $a \oplus \bar{a}$ .

❷ Demuestra o refuta cada una de las siguientes afirmaciones

i)  $a \oplus b = b \oplus a$

ii)  $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$

iii)  $a \oplus b = \bar{a} \oplus \bar{b}$

iv)  $a \oplus bc = (a \oplus b)(a \oplus c)$

v)  $a(b \oplus c) = ab \oplus ac$

vi)  $\overline{a \oplus b} = \bar{a} \oplus b = a \oplus \bar{b}$

vii)  $a \oplus b = 0 \Rightarrow a = b$

viii)  $a \oplus b = a \oplus c \Rightarrow b = c$

# Álgebras de Boole

## Átomos

### Definición

Un **átomo** en un álgebra de Boole es un elemento  $a \in \mathcal{A}$  tal que para todo  $b \in \mathcal{A}$ , si  $b \preceq a$ , entonces  $b = 0$  ó bien  $b = a$ .

### Ejemplo

En el álgebra de Boole  $(D_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$  los átomos son 2, 3 y 5.

En el álgebra de Boole  $(\mathcal{P}(\{a, b, c\}), \cup, \cap, -, \emptyset, \{a, b, c\})$  los átomos son  $\{a\}$ ,  $\{b\}$ ,  $\{c\}$ .

### Ejercicio

Sea  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  un álgebra de Boole. Demuestra que:

- Si  $a$  es un átomo, entonces para todo  $b \in \mathcal{A}$ , se verifica

$$ab = 0 \text{ ó bien } ab = a$$

- Si  $a_1$  y  $a_2$  son átomos, entonces  $a_1 \cdot a_2 = 0$ .

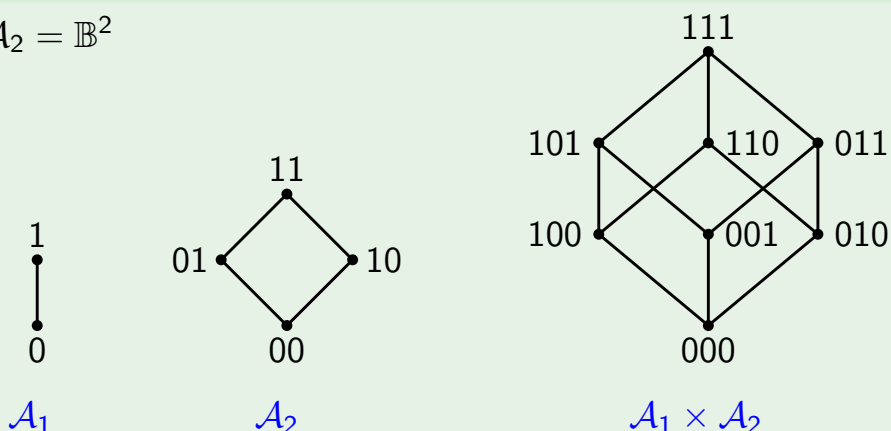
# Álgebra de Boole producto

### Teorema

Si  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son dos álgebras de Boole, entonces  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  también es un álgebra de Boole.

### Ejemplo

$$\mathcal{A}_1 = \mathbb{B}, \mathcal{A}_2 = \mathbb{B}^2$$



### Teorema

Si  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$  son álgebras de Boole, entonces  $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_n$  es un álgebra de Boole.

# Álgebra de Boole producto

## Ejemplo

Sea  $(\mathbb{B}, +, \cdot, -, 0, 1)$  el álgebra de Boole trivial.

Por el teorema anterior,  $\mathbb{B}^n = \{(b_1, b_2, \dots, b_n) \mid b_j \in \mathbb{B} \text{ para } j : 1, 2, \dots, n\}$  es también un álgebra de Boole.

- ✓ Dados  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$  y  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{B}^n$ , las operaciones  $+$  y  $\cdot$  están definidas

$$a + b = (a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

$$a \cdot b = (a_1, a_2, \dots, a_n) \cdot (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, \dots, a_n \cdot b_n)$$

- ✓ El complemento de cada elemento  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{B}^n$  es  $\bar{a} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n)$ .
- ✓ Además,  $0_{\mathbb{B}^n} = (0, 0, \dots, 0)$  y  $1_{\mathbb{B}^n} = (1, 1, \dots, 1)$
- ✓ Los átomos son:  $(1, 0, \dots, 0)$ ,  $(0, 1, 0, \dots, 0)$ , ...,  $(0, \dots, 0, 1)$

# Isomorfismos de Álgebras de Boole

## Definición

Sean  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  y  $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}})$  álgebras de Boole. Un **isomorfismo** de álgebras de Boole es una función  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  que es biyectiva y para todo  $a, b \in \mathcal{A}$  verifica:

- 1  $\phi(a + b) = \phi(a) \vee \phi(b)$
- 2  $\phi(a \cdot b) = \phi(a) \wedge \phi(b)$
- 3  $\phi(\bar{a}) = \overline{\phi(a)}$

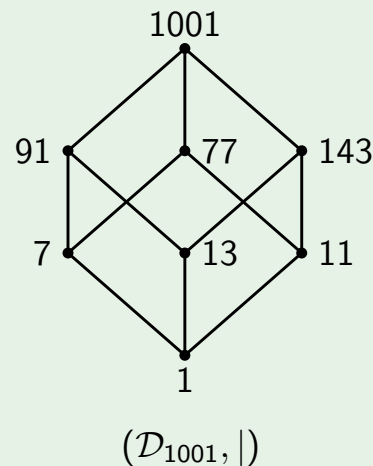
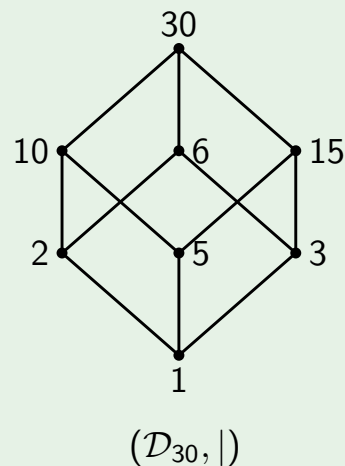
# Isomorfismos de Álgebras de Boole

## Ejemplo

La función  $\phi: \mathcal{D}_{30} \rightarrow \mathcal{D}_{1001}$  definida

$$\begin{array}{llll} \phi(1) = 1 & \phi(2) = 7 & \phi(5) = 13 & \phi(3) = 11 \\ \phi(10) = 91 & \phi(6) = 77 & \phi(15) = 143 & \phi(30) = 1001 \end{array}$$

es un isomorfismo de álgebras de Boole.

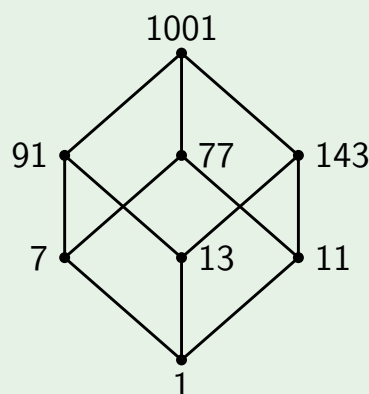


## Teorema de representación

### Lema

Sea  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  un álgebra de Boole finita. Si  $b$  es cualquier elemento distinto de cero en  $\mathcal{A}$ , y  $a_1, a_2, \dots, a_k$  son todos los átomos de  $\mathcal{A}$  tales que  $a_i \preceq b$ , entonces  $b = a_1 + a_2 + \dots + a_k$  de forma única.

## Ejemplo



$$1001 = 91 \sqcup 143 = (7 \sqcup 13) \sqcup (13 \sqcup 11) = 7 \sqcup 13 \sqcup 11$$



## Teorema de representación

- Del lema anterior se deduce que hay una biyección entre los elementos de un álgebra de Boole y los subconjuntos de sus átomos.
- De hecho, esta biyección es un isomorfismo de  $\mathcal{A}$  en  $\mathcal{P}(S)$ , donde  $S$  es el conjunto de átomos de  $\mathcal{A}$ .

### Teorema

Toda álgebra de Boole finita  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  es isomorfa al álgebra de Boole  $(\mathcal{P}(S), \cup, \cap, -, \emptyset, S)$ , donde  $S$  es el conjunto de átomos de  $\mathcal{A}$ .

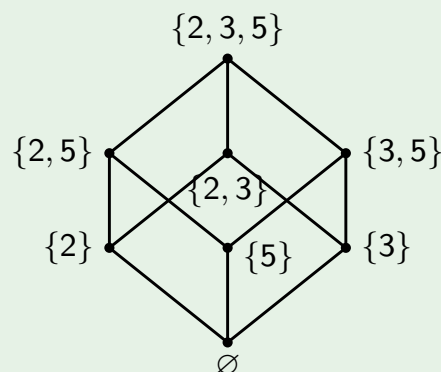
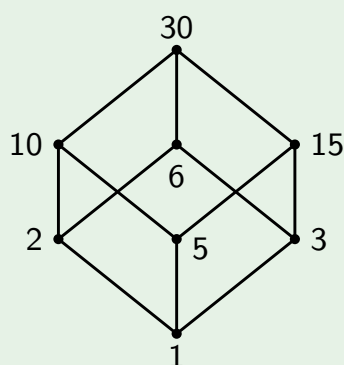
### Corolario

Si  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  es un álgebra de Boole finita con  $n$  átomos, entonces  $\mathcal{A}$  tiene  $2^n$  elementos.

## Teorema de representación

### Ejemplo

$(D_{30}, mcm, mcd, -, 1, 30)$  es isomorfo a  $(\mathcal{P}(\{2, 3, 5\}), \cup, \cap, -, \emptyset, \{2, 3, 5\})$



$$\phi: D_{30} \longrightarrow \mathcal{P}(\{2, 3, 5\})$$

|                       |                          |
|-----------------------|--------------------------|
| $\phi(1) = \emptyset$ | $\phi(2) = \{2\}$        |
| $\phi(3) = \{3\}$     | $\phi(5) = \{5\}$        |
| $\phi(6) = \{2, 3\}$  | $\phi(10) = \{2, 5\}$    |
| $\phi(15) = \{3, 5\}$ | $\phi(30) = \{2, 3, 5\}$ |

# Isomorfismos de Álgebras de Boole

## Teorema

Sea  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  un álgebra de Boole finita con conjunto de átomos  $\{a_1, \dots, a_n\}$ . Si  $(\mathcal{B}, \vee, \wedge, -, 0_{\mathcal{B}}, 1_{\mathcal{B}})$  es un álgebra de Boole finita con conjunto de átomos  $\{b_1, \dots, b_n\}$ , entonces existe una función  $\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tal que  $\phi(a_j) = b_j$ ,  $1 \leq j \leq n$ , que es un isomorfismo de álgebras de Boole.

## Ejemplo

$$\phi: \mathcal{D}_{30} \rightarrow \mathbb{B}^3$$

$$\begin{aligned} \phi(1) &= 000, & \phi(2) &= 100, & \phi(3) &= 010, & \phi(5) &= 001, \\ \phi(6) &= 110, & \phi(10) &= 101, & \phi(15) &= 011, & \phi(30) &= 111 \end{aligned}$$

## Ejercicio

Halla un conjunto  $S$  tal que  $\mathcal{P}(S)$  y  $\mathbb{B}^5$  sean isomorfos como álgebras de Boole.

# Isomorfismos de Álgebras de Boole

## Ejercicio

Se consideran las álgebras de Boole  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{D}_{2310}$  y  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\{a, b, c, d, e\})$  y se define la función  $f: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  del siguiente modo:

$$f(2) = \{a\} \quad f(3) = \{b\} \quad f(5) = \{c\} \quad f(7) = \{d\} \quad f(11) = \{e\}$$

- 1 Expresa, si es posible, los elementos 110, 210 y 330 en función de **átomos** y **superátomos**.
- 2 Determina cuáles deben ser las imágenes de  $f(35)$ ,  $f(110)$ ,  $f(210)$  y  $f(330)$  para que  $f$  sea isomorfismo de álgebras de Boole.
- 3 Estudia si se puede definir otra función  $g: \mathcal{A}_1 \rightarrow \mathcal{A}_2$  que también sea **isomorfismo de álgebras de Boole**.
- 4 En caso afirmativo, determina  $g(110)$ ,  $g(210)$  y  $g(330)$ .
- 5 ¿Cuántos isomorfismos diferentes se pueden definir entre  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$ ?

## El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

### Definición

Se llama **función booleana** de  $n$  variables a una función  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$ .  
El conjunto de todas las funciones booleanas de  $n$  variables se denota  $\mathcal{F}_n$ .

### Ejemplo

La función  $f: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$  definida

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $f(x_1, x_2, x_3)$ |
|-------|-------|-------|--------------------|
| 0     | 0     | 0     | 1                  |
| 0     | 0     | 1     | 1                  |
| 0     | 1     | 0     | 0                  |
| 0     | 1     | 1     | 1                  |
| 1     | 0     | 0     | 0                  |
| 1     | 0     | 1     | 0                  |
| 1     | 1     | 0     | 0                  |
| 1     | 1     | 1     | 1                  |

## El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

### Ejemplo

- Una función booleana de 3 variables es una función  $f$  tal que  $f(x_1, x_2, x_3)$  es 0 ó 1 para cada una de las  $2^3$  elecciones de  $x_1, x_2, x_3$ .
- Podemos pensar en poner 3 interruptores en una de las dos posiciones.
- Como hay 8 formas de poner los interruptores y cada posición lleva a alguna de las dos salidas, dependiendo de la función, hay  $2^3 = 256$  funciones booleanas de 3 variables. Esto es,  $|\mathcal{F}_3| = 2^{2^3} = 256$ .
- En general,  $|\mathcal{F}_n| = 2^{2^n}$ .

## El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

### Definición

Sean  $f$  y  $g$  dos funciones booleanas de  $n$  variables,  $f, g \in \mathcal{F}_n$

La **suma booleana**  $f + g$  y el **producto booleano**  $f \cdot g$  se definen

$$(f + g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$(f \cdot g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot g(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

para cualesquiera  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{B}^n$ .

El **complemento** de la función booleana  $f$  es la función booleana  $\bar{f}$  definida

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = \overline{f(x_1, \dots, x_n)}$$

### Teorema

$\mathcal{F}_n$  es un álgebra de Boole con las operaciones booleanas definidas.

## El álgebra de Boole $\mathcal{F}_n$

### Ejemplo

Las operaciones booleanas de  $\mathcal{F}_2$  se ilustran en la siguiente tabla

| $x_1$ | $x_2$ | $f$ | $g$ | $f + g$ | $f \cdot g$ | $\bar{f}$ |
|-------|-------|-----|-----|---------|-------------|-----------|
| 0     | 0     | 1   | 0   | 1       | 0           | 0         |
| 0     | 1     | 0   | 1   | 1       | 0           | 1         |
| 1     | 0     | 1   | 1   | 1       | 1           | 0         |
| 1     | 1     | 0   | 0   | 0       | 0           | 1         |

## El álgebra de Boole $\mathcal{F}_2$

### Ejemplo

En la siguiente tabla aparecen todas las funciones booleanas de dos variables

$$\mathcal{F}_2 = \{f_j: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}, j: 0, \dots, 15\}$$

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 0   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        |
| 0   | 1   | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1        | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        |
| 1   | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 1   | 1   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        |

Los átomos del álgebra de Boole  $\mathcal{F}_2$  son:  $f_1, f_2, f_4$  y  $f_8$ .

Cada elemento de  $\mathcal{F}_2$  se puede expresar como suma de átomos. Por ejemplo

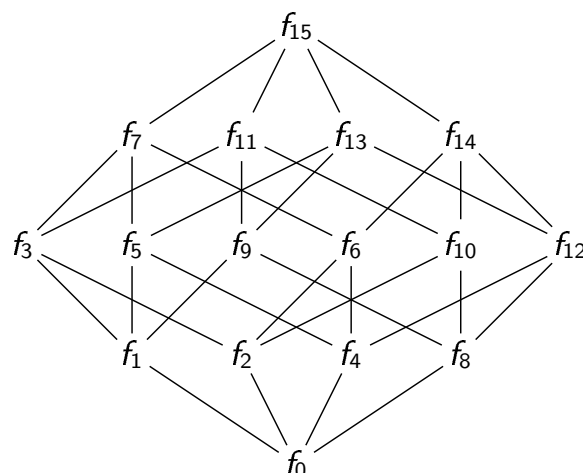
$$f_7 = f_1 + f_2 + f_4, \quad f_{10} = f_2 + f_8, \quad f_{14} = f_2 + f_4 + f_8$$

Nos interesa escribir cada elemento del álgebra de Boole  $\mathcal{F}_n$ , en este caso  $\mathcal{F}_2$ , como suma de átomos.

## El álgebra de Boole $\mathcal{F}_2$

$$\mathcal{F}_2 = \{f_j: \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}, j: 0, \dots, 15\}$$

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 0   | 0   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        |
| 0   | 1   | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1        | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        |
| 1   | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 1   | 1   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        |



# Expresiones booleanas

## Definición

Una **expresión booleana** sobre el álgebra de Boole  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$  se define recursivamente de la siguiente manera:

- [B] Cualquier elemento de  $\mathcal{A}$  y cualquier símbolo de variable  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son expresiones booleanas.
- [R] Si  $E_1$  y  $E_2$  son expresiones booleanas, entonces  $E_1 + E_2$ ,  $(E_1 \cdot E_2)$  y  $\overline{E_1}$  son también expresiones booleanas.

## Ejemplo

- $E(x) = (\overline{5 \vee x}) \vee \overline{6}$  es una expresión booleana en  $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$ .
- $E(x, y, z) = \overline{x} \cdot z + \overline{x} \cdot y + \overline{z}$  es una expresión booleana en  $\mathbb{B}$ .

- ✓ Las expresiones booleanas representan cálculos con elementos no específicos de un cierto álgebra de Boole  $\mathcal{A}$ .
- ✓ Se pueden manipular usando las propiedades de las operaciones definidas en el álgebra de Boole correspondiente.

# Expresiones booleanas

- ✓ Para una asignación de valores a las variables, podemos evaluar la expresión  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  mediante la sustitución de las variables en la expresión por sus valores y obtendremos como resultado un elemento de  $\mathcal{A}$ .

## Ejemplos

- Reemplazando  $x$  por 2 en la expresión booleana  $E(x) = (\overline{5 \vee x}) \vee \overline{6}$  definida en  $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$ , obtenemos

$$E(2) = (\overline{5 \vee 2}) \vee \overline{6} = (\overline{10}) \vee 5 = 3 \vee 5 = 15$$

- Reemplazando  $x$  por 0,  $y$  por 1 y  $z$  por 1 en la expresión booleana  $E(x, y, z) = \overline{x} \cdot z + \overline{x} \cdot y + \overline{z}$  definida en  $\mathbb{B}$ , obtenemos

$$E(0, 1, 1) = \overline{0} \cdot 1 + \overline{0} \cdot 1 + \overline{1} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 = 1 + 1 + 0 = 1$$

# Expresiones booleanas

## Definición

Se dice que dos expresiones booleanas son **equivalentes** si toman los mismos valores para las mismas asignaciones a las variables.

## Ejemplo

Las expresiones booleanas  $E_1(x) = \bar{x} \vee 5$  y  $E_2(x) = (\bar{5} \vee x) \vee \bar{6}$  definidas en  $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$  son equivalentes, ya que

|          | 1  | 2  | 3  | 5  | 6 | 10 | 15 | 30 |
|----------|----|----|----|----|---|----|----|----|
| $E_1(x)$ | 30 | 15 | 10 | 30 | 5 | 15 | 10 | 5  |
| $E_2(x)$ | 30 | 15 | 10 | 30 | 5 | 15 | 10 | 5  |

# Expresiones booleanas

- ✓ Dos expresiones booleanas  $E_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  serán **equivalentes** si es posible transformar una en la otra con manipulaciones booleanas.

- ✓ En este caso, escribimos

$$E_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = E_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

## Ejercicio

Demuestra que:

- 1 En el álgebra de Boole  $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$

$$\bar{x} \vee 5 = (\bar{5} \vee x) \vee \bar{6}$$

- 2 En el álgebra de Boole  $(D_{2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11}, \vee, \wedge)$

$$\overline{(x \wedge 3)} \wedge (77 \vee 3) = (231 \wedge \bar{x}) \vee 77$$

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

¿Cómo debemos especificar una función de  $\mathcal{A}^n$  en  $\mathcal{A}$  a partir de una expresión booleana  $E(x_1, x_2, \dots, x_n)$  sobre  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ ?

- ✓ Cada asignación de valores a las variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  será una  $n$ -tupla ordenada en el dominio  $\mathcal{A}^n$  y
- ✓ el correspondiente valor de  $E(x_1, \dots, x_n)$  será la imagen en el codominio  $\mathcal{A}$ .

### Ejemplo

La expresión booleana  $E(x) = (\overline{5 \vee x}) \vee \overline{6}$  sobre el álgebra de Boole  $(D_{30}, \vee, \wedge, -, 1, 30)$  define la función  $f: D_{30} \rightarrow D_{30}$  dada por

|     | 1  | 2  | 3  | 5  | 6 | 10 | 15 | 30 |
|-----|----|----|----|----|---|----|----|----|
| $f$ | 30 | 15 | 10 | 30 | 5 | 15 | 10 | 5  |

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

- En general, dada un álgebra de Boole  $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0_{\mathcal{A}}, 1_{\mathcal{A}})$ , **no toda función** de  $\mathcal{A}^n$  en  $\mathcal{A}$  equivale a una expresión booleana sobre  $\mathcal{A}$ , aunque ...

### Teorema

*Toda función  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}$  se puede especificar mediante una expresión booleana.*

### Ejemplo

La función  $f: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$  dada en la tabla se corresponde con las expresiones lógicas que la siguen:

|                  |                  |
|------------------|------------------|
| $f(0, 0, 0) = 1$ | $f(1, 0, 0) = 0$ |
| $f(0, 0, 1) = 0$ | $f(1, 0, 1) = 0$ |
| $f(0, 1, 0) = 1$ | $f(1, 1, 0) = 0$ |
| $f(0, 1, 1) = 0$ | $f(1, 1, 1) = 1$ |

$$(x_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (x_1 + \overline{x}_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\overline{x}_1 + x_2 + \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 + \overline{x}_2 + x_3) \\ (\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3) + (\overline{x}_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$



# Expresiones booleanas / Funciones booleanas

## Definición

Las expresiones booleanas que constan de una única variable o su complemento se llaman **literales**.

## Definición

- Decimos que una expresión booleana de  $n$  variables es un **minitérmino** si es de la forma

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$$

donde usamos  $y_j$  para denotar  $x_j$  o bien  $\bar{x}_j$ .

- Se dice que una expresión booleana está en su **forma normal disyuntiva** si es una suma de minitérminos.

## Ejemplo

$(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$  es una expresión booleana en forma normal disyuntiva, con tres minitérminos:

$$(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3), (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) \text{ y } (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3).$$

# Expresiones booleanas/Funciones booleanas

## Ejemplo

- La expresión  $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$  es un minitérmino en las tres variables  $x_1, x_2, x_3$ . La función correspondiente en  $\mathcal{F}_3$  toma el valor 1 solamente en  $(1, 0, 1)$ .
- La expresión  $x_1 \cdot \bar{x}_3$  es un minitérmino en dos variables  $x_1, x_3$ . Pero no es un minitérmino en las tres variables  $x_1, x_2, x_3$ . La función correspondiente en  $\mathcal{F}_3$  toma el valor 1 en  $(1, 0, 0)$  y en  $(1, 1, 0)$ .
- La expresión  $x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_1$  no es un minitérmino ya que involucra a la variable  $x_1$  en más de un literal.

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

### Ejemplo

- En la siguiente tabla se da una lista de los 8 elementos de  $\mathbb{B}^3$  y los minitérminos correspondientes que toman el valor 1 en los elementos indicados.

| $(a, b, c)$ | Minitérminos con valor 1 en $(a, b, c)$                    |
|-------------|--|
| $(0, 0, 0)$ | $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$ |
| $(0, 0, 1)$ | $\overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$            |
| $(0, 1, 0)$ | $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$            |
| $(0, 1, 1)$ | $\overline{x_1} \cdot x_2 \cdot x_3$                       |
| $(1, 0, 0)$ | $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_3}$            |
| $(1, 0, 1)$ | $x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot x_3$                       |
| $(1, 1, 0)$ | $x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3}$                       |
| $(1, 1, 1)$ | $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$                                  |

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Dada una función de  $\mathbb{B}^n$  en  $\mathbb{B}$ , podemos obtener una expresión booleana en forma normal disyuntiva correspondiente a esta función de la siguiente manera:

- 1 Hacemos corresponder un minitérmino a cada uno de los elementos de  $\mathbb{B}^n$  para los cuales el valor de la función es 1.
- 2 Para cada una de estos elementos obtenemos un minitérmino

$$y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_n$$

en el cual  $y_j$  es  $x_j$  si la componente  $j$  de la  $n$ -tupla es 1 y es  $\overline{x_j}$  si la componente  $j$  de la  $n$ -tupla es 0.

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

### Ejemplo

A la función  $f: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$  dada por la tabla

|           | $f$ |
|-----------|-----|
| (0, 0, 0) | 1   |
| (0, 0, 1) | 0   |
| (0, 1, 0) | 1   |
| (0, 1, 1) | 0   |
| (1, 0, 0) | 0   |
| (1, 0, 1) | 0   |
| (1, 1, 0) | 0   |
| (1, 1, 1) | 1   |

le corresponde la expresión booleana

$$(\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3) + (\bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3) + (x_1 \cdot x_2 \cdot x_3)$$

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

### Definición

- Decimos que una expresión booleana en  $n$  variables es un **maxitérmino** si es de la forma

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

donde usamos  $y_j$  para denotar  $x_j$  o bien  $\bar{x}_j$ .

- Se dice que una expresión booleana está en su **forma normal conjuntiva** si es un producto de maxitérminos.

### Ejemplo

$$(x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)$$

es una expresión en forma normal conjuntiva que consta de cinco maxitérminos.

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

Dada una función de  $\mathbb{B}^n$  en  $\mathbb{B}$ , podemos obtener una expresión booleana en forma normal conjuntiva correspondiente a esta función de la siguiente manera:

- 1 Hacemos corresponder un maxitérmino a cada uno de los elementos de  $\mathbb{B}^n$  para los cuales el valor de la función es 0.
- 2 Para cada una de estos elementos obtenemos un maxitérmino

$$y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

en el cual  $y_j$  es  $x_j$  si la componente  $j$  de la  $n$ -tupla es 0 y es  $\bar{x}_j$  si la componente  $j$  de la  $n$ -tupla es 1.

## Expresiones booleanas/Funciones booleanas

### Ejemplo

A la función  $f: \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$  dada por la tabla

|           | $f$ |
|-----------|-----|
| (0, 0, 0) | 1   |
| (0, 0, 1) | 0   |
| (0, 1, 0) | 1   |
| (0, 1, 1) | 0   |
| (1, 0, 0) | 0   |
| (1, 0, 1) | 0   |
| (1, 1, 0) | 0   |
| (1, 1, 1) | 1   |

le corresponde la expresión booleana

$$(x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + x_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3)$$

# Expresiones booleanas/Funciones booleanas

## Ejercicio

Halla la forma normal disyuntiva de la función booleana  $F : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$  dada en forma conjuntiva

$$F(x, y, z) = (x + y + z)(x + y + \bar{z})(x + \bar{y} + \bar{z})$$

## Ejercicio

Sean las expresiones booleanas

$$E_1(x, y, z) = \overline{x + \bar{z}} + \bar{y} \cdot z + \overline{y + \bar{z}} \quad \text{y} \quad E_2(x, y, z) = \overline{x \cdot z + y \cdot \bar{z}} + \bar{y}$$

- ❶ Determina si  $E_1(x, y, z)$  y  $E_2(x, y, z)$  son equivalentes.
- ❷ Estudia si mediante la expresión booleana  $E_2$  se puede especificar la función booleana  $F(x, y, z) = \bar{x}z + \bar{y}$
- ❸ Halla la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana que se puede especificar mediante la expresión booleana  $E_1(x, y, z)$ .

## Bibliografía

**Matemáticas discreta y combinatoria** R.P. Grimaldi (Ed. Addison Wesley)

**Estructuras de matemáticas discretas para la computación**

B. Kolman y R.C. Busby (Ed. Prentice Hall)

**2000 problemas resueltos de Matemática Discreta**

S. Lipschutz y M. Lipson (Ed. McGraw Hill)

**Matemática Discreta y sus aplicaciones** K. Rosen (Ed. McGraw Hill)

**Matemática Discreta** K.A. Ross y C.R.B. Wright (Ed. Prentice Hall).