E.T.S. de INGENIERÍA INFORMÁTICA

Curso 2015/2016

Estructuras Algebraicas para la Computación

Relación 6 de Ejercicios

1. Sea la aplicación $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$f(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 - x_2,\ 3x_2)$$

   a) Demuestra que es lineal.

   b) Halla una base de $Ker(f)$ y las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por las ecuaciones

$$y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \qquad y_2 = x_1 + x_2 - x_3 \qquad y_3 = x_3$$

   donde (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3) son las coordenadas de un vector y su transformado en la base canónica. Halla una base de $Ker(f)$ y las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$.

3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el endomorfismo definido por

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3,\ x_1 + x_3,\ x_2 - x_1)$$

   a) Halla la matriz de f respecto a la base canónica.

   b) Halla una base de $Ker(f)$ y deduce si f es inyectiva.

   c) Halla las ecuaciones cartesianas de $Im(f)$ y su dimensión. Deduce si f es sobreyectiva.

4. Sea el endomorfismo $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definido por

$$f(x, y, z, t) = (x + y + t, ax + ay + z + (1 + a)t, x + (1 - a)y + 2az + (1 + a)t, x + 2z + 2t)$$

   a) Halla la matriz asociada a f respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   b) Estudia si el vector $(1, 1 + a, 1 + 2a, a) \in Im(f)$ para algún $a \in \mathbb{R}$.

   c) Halla, según los valores de a, una base de $Ker(f)$ y comprueba el teorema de la dimensión.

5. Sea la aplicación lineal $\tau : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida

$$\begin{aligned} \tau(1, 3, 5) &= (1, 0) \\ \tau(0, 1, 1) &= (1, 0) \\ \tau(0, 0, 1) &= (0, 0) \end{aligned}$$

   a) Halla la matriz asociada a τ respecto de las bases canónicas.

   b) Encuentra las ecuaciones cartesianas del subespacio $\tau(\mathcal{U})$, siendo

$$\mathcal{U} = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 - x_3 = 0,\ x_2 - x_3 = 0 \right\}$$

6. Sea la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ definida $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_2-x_1, x_3-x_2, x_4-x_3)$.

   Determina la matriz asociada a f respecto de:

   a) las bases canónicas.

   b) las bases $\mathcal{B} = \{(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0),(1,1,1,1)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$.

7. En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios $\mathcal{U} = \mathcal{L}(1,1,1)$ y $\mathcal{W} = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1+x_2+x_3 = 0\}$. Encuentra una aplicación lineal $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, tal que $Im\varphi = \mathcal{W}$ y $Ker\varphi = \mathcal{U}$.

8. Sea $f : \mathbb{R}_2(x) \to \mathbb{R}_2(x)$ una aplicación lineal tal que:

$$f(1) = 1 \qquad f(x) = x^2 \qquad f(x^2) = x + x^2$$

   a) Halla $f(a+bx+cx^2)$ para todo $a,b,c \in \mathbb{R}$

   b) Determina $Ker(f)$ e $Im(f)$

   c) Deduce si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

9. Sea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden dos y sea $\mathcal{E}$ el conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix}, \qquad a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$

   a) Prueba que $\mathcal{E}$ es un espacio vectorial y que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base.

   b) Halla la matriz del endomorfismo $\psi : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ definido

$$\psi \begin{pmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b+c \\ -2b+c & 0 \end{pmatrix}$$

   en la base $\mathcal{B}$.

   c) Determina el núcleo y la imagen de ψ.

10. En los espacios vectoriales $\mathbb{R}_3(x)$ y $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ se consideran las bases

$$\mathcal{B} = \{x^3, x^2, x, 1\} \qquad \text{y} \qquad \mathcal{B}^* = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

   Se define el homomorfismo $\psi : \mathbb{R}_3(x) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$\psi(ax^3+bx^2+cx+d) = \begin{pmatrix} a & b-d \\ c-b & 0 \end{pmatrix}$$

   a) Halla la matriz de ψ en las bases citadas.

   b) Encuentra una base del núcleo y las ecuaciones implícitas del subespacio imagen.

11. El endomorfismo $\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tiene asociada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ en la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$.

    Determina la matriz B que corresponde a dicho endomorfismo en otra base $\mathcal{B}' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ dada por

$$\vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad\qquad \vec{w}_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$$