Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática

Estructuras Algebraicas para la Computación

16 de junio de 2015

Apellidos y Nombre:.. **Grupo:** .....

DNI: .... **Titulación:** .... **Firma:** ....

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas. Para que un ejercicio se considere resuelto correctamente se debe indicar claramente el modelo matemático usado en la resolución y la justificación de su adecuación. No se valorará la mera coincidencia del resultado propuesto.
- No usar lápiz, se debe escribir con bolígrafo azul o negro.
- No se puede utilizar ningún dispositivo electrónico.

---

1. (3 pt.) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$\mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\} \qquad \mathcal{W} = \mathcal{L}\Big((2,1,-2,-1),(1,1,-1,-1),(1,2,-1,-2)\Big)$$

   a) Estudiar si $\mathcal{U}$ es subespacio ortogonal a $\mathcal{W}$.

   b) Hallar (si es posible) una base $\mathcal{B}_1$ de $\mathcal{U}$ y otra base $\mathcal{B}_2$ de $\mathcal{W}$ tales que $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sea una base ortonormal de $\mathbb{R}^4$.

   c) Dado $\vec{v} = (2,-1,2,2)$, encontrar vectores $\vec{u} \in \mathcal{U}$ y $\vec{w} \in \mathcal{W}$ tales que $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$.

   d) Determinar una matriz A cuyos valores propios sean 1 y -1 y estén asociados a los subespacios $\mathcal{U}$ y $\mathcal{W}$ respectívamente.

   e) Justificar si dicha matriz A es diagonalizable.

   f) Usar el teorema de Cayley-Hamilton para expresar A^{-1} en función de potencias de A.

2. (1 pt.) Dada la aplicación lineal $f\colon \mathbb{R}_3(t) \to \mathbb{R}_3(t)$ definida $f(p(t)) = p'(t)$, se pide:

   a) Obtener $Ker(f)$ e $Im(f)$.

   b) Deducir si f es inyectiva y/o sobreyectiva.

   c) Demostrar que $\mathcal{B} = \{1 - t + t^2, t^3, t - t^3, t^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_3(t)$.

   d) Hallar la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$.

3. (1 pt.) En el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ se consideran los subespacios

$$\mathcal{U} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_3 = 0,\ x_2 - x_4 = 0\} \qquad \mathcal{V} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0,\ x_2 + \alpha x_4 = 0\}$$

   - Hallar los posibles valores del parámetro α tales que

     i) $dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 0$ ii) $dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 1$ iii) $dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) = 2$

   - Hallar los posibles valores del parámetro α tales que

     iv) $dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 2$ v) $dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 3$ vi) $dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = 4$

4. (1 p.) En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se consideran los subconjuntos:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \le x \le 4\} \qquad B = \left\{ b_n = \frac{4n}{n+4} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

Determinar los cardinales de cada uno de los conjuntos:

(i) A (ii) B (iii) $A \cap B$ (iv) $B - A$

5. (1 p.) Se sabe que la matriz generadora de un cierto código es

$$\mathcal{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Determinar el mensaje que se enviará para comunicar $C\ D$ usando la equivalencia:

$$111\ A \quad 110\ D \quad 101\ R \quad 100\ S \quad 011\ Q \quad 010\ C \quad 001\ O \quad 000\ T$$

b) Si se recibe el mensaje 0101110 0110111 0100011 0010111 1101101, determinar qué palabras pertenecen o no al código calculando su síndrome.

c) Decodificar y traducir el mensaje recibido usando la equivalencia anterior.

6. (1 p.) Sean las expresiones booleanas

$$E_1(x,y,z) = \overline{x + \overline{z}} + \overline{y} \cdot z + \overline{y + z} \quad \text{y} \quad E_2(x,y,z) = \overline{x \cdot z + y \cdot \overline{z}} + \overline{y}$$

a) Determinar si $E_1(x,y,z)$ y $E_2(x,y,z)$ son equivalentes.

b) Estudiar si mediante la expresión booleana E_2 se puede especificar la función booleana $F(x,y,z) = \overline{x}z + \overline{y}$

c) Hallar la forma normal disyuntiva y la forma normal conjuntiva de la función booleana que se puede especificar mediante la expresión booleana $E_1(x,y,z)$.

7. (1 p.) Sea el conjunto parcialmente ordenado $(D_{300}, |)$.

a) Dibujar su diagrama de Hasse.

b) Determinar los elementos destacables del subconjunto $B = \{10, 15, 20, 50, 100\}$

c) Justificar que es un retículo acotado.

d) Estudiar si es complementado.

e) Dar una lista de átomos y otra lista de elementos $\sqcup-$ irreducibles.

f) Expresar 50 y 150 mediante elementos $\sqcup-$ irreducibles.

8. (1 p.) Dar ejemplos (si existen) de:

a) Un conjunto parcialmente ordenado que no sea retículo ordenado.

b) Un retículo distributivo que no sea complementado.

c) Un retículo complementado que no sea distributivo.

d) Un retículo con 16 elementos que sea álgebra de Boole.

e) Un retículo con 16 elementos que no sea álgebra de Boole.