Relaciones de Orden

Mariam Cobalea

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 15/16

Relaciones

Introducción

- Las conexiones entre elementos de conjuntos se representan usando una estructura llamada **relación**.

Definición

Una **relación binaria definida sobre un conjunto** A *es cualquier subconjunto* $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Ejemplo

Son relaciones binarias:

1. La inclusión $\subseteq$ definida en el conjunto $\mathcal{P}(S)$ de un conjunto S.
2. $|$ **divisibilidad** definida en $\mathbb{N}$.
3. $\leq$ entre números reales.
4. $||$ **paralelismo** entre rectas.
5. $\perp$ **perpendicularidad** entre rectas.

Relación binaria definida en un conjunto

Propiedades que puede verificar una relación binaria

Definición

Sea $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida sobre un conjunto* A. *Se dice que*

- $\mathcal{R}$ es **reflexiva** *si para todo* $a \in A$: $a\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ es **simétrica** *si para todo* $a, b \in A$: $a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$
- $\mathcal{R}$ es **antisimétrica** *si para todo* $a, b \in A$: $a\mathcal{R}b$ *y* $b\mathcal{R}a \implies a = b$
- $\mathcal{R}$ es **transitiva** *si para todo* $a, b, c \in A$: $a\mathcal{R}b$ *y* $b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$
- $\mathcal{R}$ es **conexa** *si para todo* $a, b \in A$: $a\mathcal{R}b$, *o bien* $b\mathcal{R}a$

Relaciones de orden

☛ Las relaciones de orden permiten **comparar** los elementos de un conjunto.

Definición (Relación de orden parcial)

Sea $\mathcal{R}$ *una relación binaria definida sobre un conjunto no vacío* A.

- *Se dice que* $\mathcal{R}$ *es una* **relación de orden parcial** *si es* **reflexiva**, **antisimétrica** *y* **transitiva**.
- *El par* $(A, \mathcal{R})$ *se llama* ***conjunto parcialmente ordenado.***

Ejemplo

Son conjuntos parcialmente ordenados:

- $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$
- $(A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}, \mid)$
- $(\mathbb{N}, |)$

Relaciones de orden

Notación: Para denotar las relaciones de orden usaremos los símbolos

$$\preceq \qquad\qquad \ll \qquad\qquad \sqsubseteq$$

Vocabulario : Cuando $a \preceq b$, se dice que:

- el elemento a ***es anterior*** al elemento b,
- el elemento b ***es posterior*** al elemento a,

- el elemento a ***precede*** al elemento b,
- el elemento b ***supera*** al elemento a.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$ se puede representar gráficamente usando un grafo simplificado teniendo en cuenta las propiedades de la relación: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

✓ Por ser reflexiva, tenemos asegurados los arcos (a, a).

✓ por ser antisimétrica, no habrá arcos de ida y vuelta, es decir, si aparece (a, b), no aparecerá (b, a) y,

✓ por ser transitiva, si aparecen los arcos (a, b) y (b, c), también contamos con el arco (a, c).

✓ Por todo ello, podemos **simplificar** la gráfica prescindiendo de los arcos que tenemos asegurados por estas propiedades.

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Para determinar qué arcos son imprescindibles definimos los siguientes conceptos.

Definición

*Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sean a y $b \in A$. Se dice que son elementos **comparables** si $a \preceq b$ o bien $b \preceq a$.*
*Se dice que el elemento b es **sucesor inmediato** del elemento a si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $a \preceq b$
2. *No existe* $c \in A$, $a \preceq c \preceq b$.

Se denota $a \ll b$.

Ejemplo

En el conjunto parcialmente ordenado $(A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}, \mid)$,
20 es sucesor inmediato de 4, pero no es sucesor inmediato de 5,
ya que existe 10 tal que $5 \mid 10$ y $10 \mid 20$

Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Teniendo en cuenta estos conceptos, podemos describir una representación gráfica de una relación de odren parcial en un conjunto finito: el ***diagrama de Hasse***.

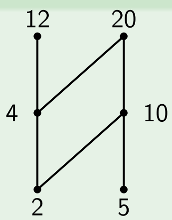
- Empezamos representando cada elemento del conjunto A con un punto del plano, colocándolos de abajo hacia arriba (el punto a por debajo del b, si $a \preceq b$).
- Se dibuja una línea ascendente desde cada elemento hasta cada uno de sus sucesores inmediatos.
- Se suprimen las orientaciones, pues todas las líneas son ascendentes.

Ejemplo

El diagrama de Hasse del

conjunto parcialmente ordenado

$(A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}, \mid)$ es:

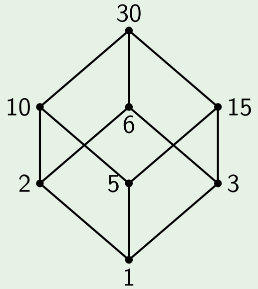


Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejemplo

1. El conjunto $\mathcal{D}_{30}$ de los divisores de 30 con la relación de orden parcial divisibilidad se representa:



Relaciones de orden

Representación: Diagramas de Hasse

Ejercicio

En el conjunto $T = \{a, b, c, d, e, f\}$ se define la relación

$$\mathcal{R} = \{(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (a,f), (b,b), (b,d), (b,e), (b,f),$$
$$(c,c), (c,d), (c,e), (c,f), (d,d), (d,f), (e,e), (e,f), (f,f)\}$$

1. Demuestra que $(T, \mathcal{R})$ es un conjunto parcialmente ordenado.
2. Dibuja su diagrama de Hasse.

Relaciones de orden

Orden producto

Definición (Orden Producto)

Sean $(A, \preceq_1)$ *y* $(B, \preceq_2)$ *dos conjuntos parcialmente ordenados.*
En el conjunto $A \times B$ *se define la relación* $\preceq$:

$$(a_1, b_1) \preceq (a_2, b_2) \iff a_1 \preceq_1 a_2 \quad \wedge \quad b_1 \preceq_2 b_2$$

Teorema (Orden Producto)

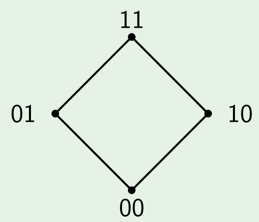
$(A \times B, \preceq)$ *es un conjunto parcialmente ordenado.*

Relaciones de orden

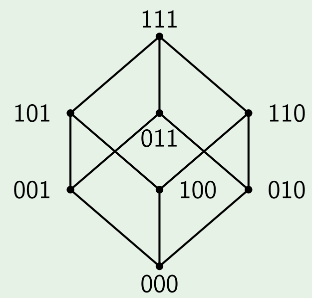
Orden producto

Ejemplo

$(\mathbb{B}, \preceq)$



$(\mathbb{B}^2, \preceq)$



$(\mathbb{B}^3, \preceq)$

Relaciones de orden

Orden producto

Ejercicio

En $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se considera el **orden producto** construido a partir de la relación $\leq$.
Representa gráficamente con qué puntos del plano se relaciona el punto $(1,2)$.

Relaciones de orden

Orden Lexicográfico

Definición (Orden Lexicográfico)

Sean $(A, \preceq_1)$ y $(B, \preceq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. En el conjunto $A \times B$ se define la relación $\sqsubseteq$, llamada **orden lexicográfico**

$$(a_1, b_1) \sqsubseteq (a_2, b_2) \iff a_1 \preceq_1 a_2 \quad \vee \quad (a_1 = a_2 \quad \wedge \quad b_1 \preceq_2 b_2)$$

Teorema

$(A \times B, \sqsubseteq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

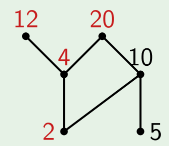
Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $x \in B$ es ***maximal*** *de B, si no existe ningún $b \in B$ posterior.*

- El ***maximal*** es posterior a todo elemento comparable con él.

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_1 = \{2, 4, 12, 20\}$

12 es maximal de B_1

20 es maximal de B_1

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

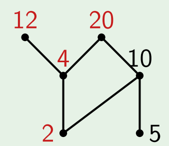
Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $x \in B$ es ***minimal*** *de B, si no existe ningún $b \in B$ anterior.*

- El ***minimal*** es anterior a todo elemento comparable con él.

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_1 = \{2, 4, 12, 20\}$

2 es minimal de B_1

Relaciones de orden

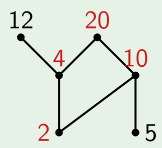
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $x \in B$ es ***máximo*** *de B, si x es posterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_2 = \{2, 4, 10, 20\}$

20 es máximo de B_2, ya que

$20 \in B_2$ y $2|20$, $4|20$, $10|20$ y $20|20$

Teorema

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
El máximo de B (si existe) es único.

Relaciones de orden

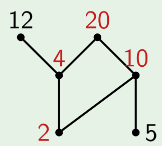
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $x \in B$ es ***mínimo*** *de B, si x es anterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_2 = \{2, 4, 10, 20\}$

2 es mínimo de B_2, ya que

$2 \in B_2$ y $2|2$, $2|4$, $2|10$ y $2|20$

Teorema

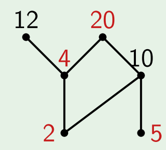
Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
El mínimo de B (si existe) es único.

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.

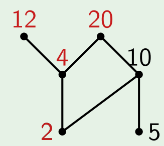


$B_3 = \{2, 4, 5, 20\}$

20 es máximo de B_3, ya que

$20 \in B_3$ y $2|20, 4|20, 5|20$ y $20|20$

¿Tiene mínimo B_3?



$B_4 = \{2, 4, 12, 20\}$

2 es mínimo de B_4, ya que

$2 \in B_4$ y $2|2, 2|4, 2|12$ y $2|20$

¿Tiene máximo B_4?

Relaciones de orden

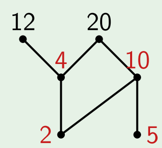
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
Se dice que $x \in B$ es ***máximo*** *de B, si x es posterior a todo $b \in B$.*
Se dice que $x \in B$ es ***mínimo*** *de B, si x es anterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_5 = \{2, 4, 5, 10\}$

¿Tiene máximo B_5?

¿Tiene mínimo B_5?

Relaciones de orden

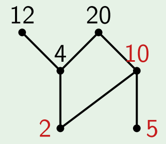
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $c \in A$ es **cota superior** de B, si c es posterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_6 = \{2, 5, 10\}$

10 es cota superior de B_6,

20 es cota superior de B_6,

$C_S(B_6) = \{10, 20\}$

Relaciones de orden

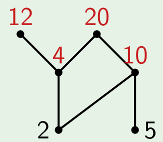
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $c \in A$ es **cota inferior** de B, si c es anterior a todo $b \in B$.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_7 = \{4, 10, 12, 20\}$

2 es cota inferior de B_7,

$C_i(B_7) = \{2\}$

Relaciones de orden

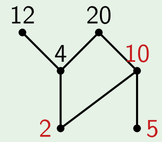
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $m \in A$ es la **mínima cota superior** o **supremo** de B, si m es el mínimo del conjunto $C_s(B)$ de las cotas superiores de B.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_6 = \{2, 5, 10\}$ $C_S(B_6) = \{10, 20\}$

$\text{mín}\left(C_S(B_6)\right) = 10$

Relaciones de orden

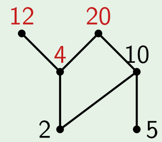
Elementos destacables en una ordenación

Definición

Sea B un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado $(A, \preceq)$.
*Se dice que $M \in A$ es la **máxima cota inferior** o **ínfimo** de B, si M es el máximo del conjunto $C_i(B)$ de las cotas inferiores de B.*

Ejemplo

$A = \{2, 4, 5, 10, 12, 20\}$ con la relación $|$ de divisibilidad.



$B_8 = \{4, 12, 20\}$ $C_i(B_6) = \{2, 4\}$

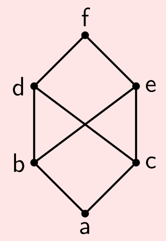
$\text{máx}\left(C_i(B_8)\right) = 4$

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Ejercicio

Sea el conjunto parcialmente ordenado $T = \{a, b, c, d, e, f\}$



Determina los elementos destacables de los siguientes subconjuntos:

$B_1 = \{a, b, c\}$, $B_2 = \{c, d\}$ y $B_3 = \{d, e\}$

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Ejercicio

Sea D_{60} el conjunto de los divisores de 60.

- Dibuja el diagrama de Hasse de $(D_{60}, |\,)$
- Halla los elementos destacables de los subconjuntos

$B_1 = \{1, 2, 3, 5\}$, $B_2 = \{3, 4\}$ y $B_3 = \{4, 15\}$

Relaciones de orden

Elementos destacables en una ordenación

Ejercicio

Sea D_{72} el conjunto de los divisores de 72.

- Dibuja el diagrama de Hasse de $(D_{72}, |\,)$.
- Halla los elementos destacables de los subconjuntos

$B_1 = \{3, 6, 12, 18\}$, $B_2 = \{4, 6, 12, 18\}$ y $B_3 = \{6, 9, 12, 18, 36\}$

Ejercicio

Sea D_{2310} el conjunto de los divisores de 2310.

- Halla los elementos destacables de los subconjuntos

$B_1 = \{2, 6, 10, 14, 22\}$, $B_2 = \{6, 14, 15, 42\}$ y $B_3 = \{6, 15, 21, 35\}$

Relaciones de orden

Orden total compatible con un orden dado

Lema

Sea $(A, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Si A es finito y no vacío, entonces tiene un elemento minimal.

Demostración:

- Por ser A no vacío, existe un elemento $x_1 \in A$.
- Si x_1 es minimal, entonces el lema queda demostrado.
- En caso contrario, existe un $x_2 \neq x_1$ tal que $x_2 \preceq x_1$.
- Si x_2 es minimal, queda demostrado el lema.
- En caso contrario, existe $x_3 \neq x_2$ tal que $x_3 \preceq x_2$.
- Como el conjunto A es finito, el proceso debe terminar.
  Así obtenemos el elemento minimal.

Relaciones de orden

Orden total compatible con un orden dado

Aplicando el lema anterior repetidamente podemos encontrar una relación de orden total $\ll$ **compatible** con $\preceq$; es decir, una relación de orden total $\ll$ que contenga a la relación de orden parcial $\preceq$ dada:

$$\text{para todo} \quad a, b \in A \quad \text{si} \quad a \preceq b, \quad \text{entonces} \quad a \ll b$$

El proceso de construcción de un orden total como $\ll$ se llama

clasificación u ***ordenación topológica***.

Relaciones de orden

Algoritmo de ordenación topológica

Sea $\preceq$ una relación de orden parcial definida en un conjunto finito no vacío A.

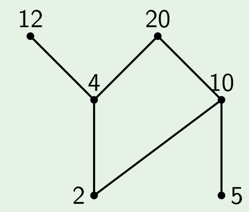
Nos planteamos encontrar una relación de orden total $\ll$ compatible con $\preceq$, esto es, para todo $a, b \in A$ si $a \preceq b$, entonces $a \ll b$.

1. Se empieza eligiendo un elemento minimal $a_1 \in A$.
2. Si $A - \{a_1\}$ no es vacío, se elige un elemento minimal $a_2 \in A - \{a_1\}$.
3. Se repite este proceso hasta elegir todos los elementos de A.
4. La secuencia $a_1 \ll a_2 \ll ... \ll a_n$ nos proporciona un orden total.

Relaciones de orden

Algoritmo de ordenación topológica

Ejemplo



- *Solución 1:* $5 \ll 2 \ll 10 \ll 4 \ll 20 \ll 12$
- *Solución 2:* $2 \ll 4 \ll 12 \ll 5 \ll 10 \ll 20$

Bibliografía

Matemática Discreta N.L.Biggs (Ed. Vicens Vives)

Matemática Discreta F. García Merayo (Ed. Paraninfo)

Problemas resueltos de Matemática Discreta F. García Merayo, G. Hernández Peñalver y A. Nevot Luna (Ed. Thomson)

Matemáticas Discreta y combinatoria R.P. Grimaldi (Ed. Addison Wesley)

Matemática Discreta R. Johnsonbaugh (Ed. Prentice Hall)

Estructuras de Matemáticas Discretas para la Computación B. Kolman y R.C. Busby (Ed. Prentice Hall)

2000 Problemas resueltos de Matemática Discreta S. Lipschutz y M. Lipson (Ed. McGraw Hill)

Matemática Discreta y sus aplicaciones K. Rosen (Ed. McGraw Hill)

Matemática Discreta K.A. Ross y C.R.B. Wright (Ed. Prentice Hall)