Diagonalización

Mariam Cobalea Vico

Universidad de Málaga
Dpto. de Matemática Aplicada

Curso 15/16

Diagonalización

Introducción

Fijada una base $\mathcal{B}$ en $\mathbb{R}^n$, cada endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene asociada una matriz A respecto de $\mathcal{B}$. Si consideramos otra base $\mathcal{B}'$, la matriz asociada a φ será una matriz B **semejante** a A.

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathcal{B}' & & \mathcal{B} & & \mathcal{B} & & \mathcal{B}' \\
\mathbb{R}^n & \xrightarrow[\mathbf{P}]{id_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\mathbf{A}]{\varphi} & \mathbb{R}^n & \xrightarrow[\mathbf{P}^{-1}]{id_{\mathbb{R}^n}} & \mathbb{R}^n \\
\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} & & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & & \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} & & \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}
\end{array}$$

Es decir, tendremos

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = P^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = P^{-1}A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Diagonalización

Introducción

- La diagonalización de un endomorfismo φ consiste en realizar un cambio de base tal que la matriz asociada a φ respecto a $\mathcal{B}$ sea precisamente una matriz diagonal D.
- Si la matriz asociada a φ es A, entonces tendremos que $D = P^{-1}AP$, donde P es la matriz del cambio de base.
- Como consecuencia de que φ se pueda expresar en términos de una matriz

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}$$

diagonal, se obtiene que para todo vector $\vec{v}_j$ de la nueva base $\mathcal{B}$ se cumple que

$$\varphi(\vec{v}_j) = d_j \vec{v}_j, \qquad j : 1, \dots, n$$

Diagonalización

Introducción

Ejemplo

Consideremos el endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

y expresémoslo en la siguiente base $\mathcal{B} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \}$ de $\mathbb{R}^2$.

Basta considerar las imágenes de los elementos de $\mathcal{B}$, esto es

$$\varphi\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \qquad y \qquad \varphi\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

La matriz asociada a φ respecto de la base $\mathcal{B}$ es $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Diagonalización

Definición (Valor y vector propio de un endomorfismo)

Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Se dice que un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un **vector propio** *de φ si verifica que*

$$\varphi(\vec{v}) = \lambda\vec{v}, \text{ para algún } \lambda \in \mathbb{R}$$

Este escalar λ se llama **valor propio** *asociado al vector propio $\vec{v}$.*

Ejemplo

En el endomorfismo φ dado por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

- $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ cumple que $\varphi(\vec{v}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, luego es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_1 = 2$.
- $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ cumple que $\varphi(\vec{v}_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, luego es un vector propio asociado al valor propio $\lambda_2 = 3$.

Diagonalización

Valores y vectores propios de un endomorfismo

Propiedades

- Todo vector propio debe ser no nulo, pero puede haber valores propios nulos.
- Si $\vec{v}$ es un vector propio, entonces existe un **único** valor propio asociado a $\vec{v}$.
- Si $\vec{v}$ es un vector propio asociado al valor propio λ, entonces $\alpha\vec{v}$ también es un vector propio asociado a λ, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

Teorema

Dado un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. El conjunto $\mathcal{U}_\lambda$ de vectores propios asociados a un mismo valor propio λ junto con el vector $\vec{0}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

El espacio $\mathcal{U}_\lambda$ se llama **subespacio propio** asociado al valor propio λ. También se llama **subespacio invariante** ya que $\varphi(\mathcal{U}_\lambda) \subseteq \mathcal{U}_\lambda$.

Se cumple que

$$\mathcal{U}_\lambda = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\} = \ker(\varphi - \lambda id_{\mathbb{R}^n})$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de un endomorfismo

Ejemplo

En el endomorfismo

$$\begin{array}{cccc} \varphi\colon & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1+3x_2 \end{pmatrix} \end{array}$$

los valores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 3$ y los subespacios propios son

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{U}_{\lambda_2} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Teorema

Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo y sea A la matriz asociada a φ respecto de la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$. Entonces:

1. *Un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de φ con valor propio asociado λ si y solo si $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$. Y esto es cierto si y solo si $(A - \lambda\mathcal{I})\vec{v} = \vec{0}$.*
2. *λ es un valor propio de φ si y solo si λ es una raíz de la ecuación $|A - \lambda\mathcal{I}| = 0$.*

Ejemplo

Sea el endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 3x_1+2x_2 \\ x_1+2x_2 \end{pmatrix}$.

Calculemos sus valores y vectores propios.

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

Ya que, $\varphi\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ y $\varphi\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ sabemos que la matriz del endomorfismo φ respecto a la base canónica $\mathcal{C}$ es $A=\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}$

Los valores propios λ surgen de calcular $\ker(\varphi-\lambda 1_{\mathbb{R}^2})$, luego hemos de resolver el siguiente sistema homogéneo:

$$\left[\begin{pmatrix}3&2\\1&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

que tiene solución distinta de la trivial si y solo si $\begin{vmatrix}3-\lambda&2\\1&2-\lambda\end{vmatrix}=0.$

Resolviendo la ecuación obtenemos dos valores propios: $\lambda_1=4$ y $\lambda_2=1$.

Diagonalización

Cálculo de valores y vectores propios de un endomorfismo

- Para $\lambda_1=4$, tenemos que $\mathcal{U}_4=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid (A-4\mathtt{I})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$(A-4\mathtt{I})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-4&2\\1&2-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&2\\1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathcal{U}_4\iff\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x_2\\x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\implies\mathcal{U}_4=\mathcal{L}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$$

- Para $\lambda_2=1$, tenemos $\mathcal{U}_1=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \mid (A-\mathtt{I})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$

$$(A-\mathtt{I})\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3-1&2\\1&2-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\in\mathcal{U}_1\iff\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x_2\\x_2\end{pmatrix}=x_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\implies\mathcal{U}_1=\mathcal{L}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Definición (Valor y vector propio de una matriz cuadrada)

- *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se dice que un vector $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ es un* **vector propio** *de A si se cumple que $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*
- *Este escalar λ se llama* **valor propio** *asociado al vector propio $\vec{v}$.*

Ejemplo

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ es un vector propio de la matriz } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ya que

$$A\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Teorema (Cálculo de valores y vectores propios)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada.

1. *Un escalar λ es un valor propio de A si y solo si $|A - \lambda I| = 0$*
2. *Los vectores propios de A asociados al valor propio λ son las soluciones no nulas de $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$.*

Definición (Polinomio característico)

Sea A una matriz cuadrada. El polinomio $p(\lambda) = |A - \lambda I|$ se llama **polinomio característico** *de A y la ecuación $|A - \lambda I| = 0$ se llama* **ecuación característica** *de A.*

☛ Los valores propios de A son las raíces de la ecuación característica.

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Ejemplo

Calculemos los valores y vectores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Solución: La ecuación característica es $p(\lambda) = |A - \lambda \mathtt{I}| = 0$

$$|A - \lambda \mathtt{I}| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Por tanto, los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_1 = 1$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - \mathtt{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - \mathtt{I}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x_3 \\ x_2 &= x_3 \\ x_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

- Los vectores propios asociados al valor propio $\lambda_2 = 2$ son las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - 2\mathtt{I})\vec{x} = \vec{0}$

$$(A - 2\mathtt{I}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= x_2 + x_3 \\ x_2 &= x_2 \\ x_3 &= \qquad\; x_3 \end{aligned}\right\}$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathcal{U}_1$ y $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es base de $\mathcal{U}_2$.

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Teorema

Si A y B son dos representaciones matriciales de un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico.

Definición

El **polinomio característico** *de un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es el polinomio de cualquiera de las representaciones matriciales de φ.*

Ejemplo

El recíproco del teorema **no** es cierto. Por ejemplo, las matrices siguientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

tienen el mismo polinomio característico, pero representan a distintos endomorfismos.

Diagonalización

Valores y vectores propios de una matriz cuadrada. Polinomio característico

Teorema

Sean A y B matrices semejantes, con $B = P^{-1}AP$. Si $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son, respectivamente, vectores propios de A y B correspondientes al mismo valor propio λ, entonces $\vec{v} = P\vec{w}$

Teorema

Los valores propios de una matriz triangular A son los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 11 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = |A - \lambda \mathrm{I}| = (1-\lambda)(-1-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda)$$

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Definición (Endomorfismo diagonalizable)

Se dice que un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es **diagonalizable** *si existe una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$ tal que la representación matricial de φ respecto a la base $\mathcal{B}$ es una matriz D diagonal.*

Ejemplo

El endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$

es diagonalizable, ya que respecto a la base $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

su matriz asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Ejemplo

El endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \varphi\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

es diagonalizable, ya que respecto de la base

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

su matriz asociada es

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Teorema

Un endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y solo si existe una base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ de vectores propios.

En otras palabras,

1. La matriz asociada al endomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ respecto de la base $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$ es diagonal si y solo si cada uno de los vectores de la base $\mathcal{B}$ es un vector propio de φ.
2. Si D es una matriz diagonal asociada al endomorfismo φ respecto a la base $\mathcal{B}$, entonces cada d_j es el valor propio asociado al vector propio $\vec{v}_j$, para $j = 1, \dots, n$.

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Definición (Matriz diagonalizable)

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz cuadrada. Se dice que A es **diagonalizable** *si es semejante a una matriz diagonal D. Es decir, A es diagonalizable si existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D$*

- En general, un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ puede no tener una representación matricial diagonal.
- Análogamente, una matriz A puede que no sea semejante a una matriz diagonal.
- A continuación, estudiamos las condiciones que se deben verificar para que un endomorfismo o una matriz sean diagonalizables.

Diagonalización

Lema

Sean $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ valores propios de un endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,tales que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Si $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m$ son vectores propios asociados a los valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ respectivamente, entonces $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_m\}$ es linealmente independiente.

Teorema

Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tiene n valores propios distintos, entonces es diagonalizable.

Corolario

Si $A \in \mathcal{M}_n$ tiene una ecuación característica $|A - \lambda\mathcal{I}| = 0$ con n raíces distintas, entonces es semejante a una matriz diagonal D, donde las componentes de la diagonal son las raíces de la ecuación característica. Esto es, existe una matriz invertible P tal que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}$

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

¿Qué ocurre si las raíces de la ecuación característica se repiten?

Definición

- *Decimos que un valor propio λ_j tiene* **multiplicidad algebraica** α_j *si $(\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j}$ es un factor del polinomio característico $p(\lambda)$, pero $(\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j+1}$ no lo es.*
- *Se llama* **multiplicidad geométrica** *del valor propio λ_j a la dimensión del subespacio propio $\mathcal{U}_{\lambda_j}$*

El polinomio característico se expresará:

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Lema

Sea $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un endomorfismo. Si λ_j es un valor propio con multiplicidad α_j, entonces $1 \leq \dim\ \mathcal{U}_{\lambda_j} \leq \alpha_j$

Teorema

El endomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es diagonalizable si y solo si $\dim\ \mathcal{U}_{\lambda_j} = \alpha_j$ *para todo $j = 1, \ldots, r$.*

Corolario

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con polinomio característico

$$p(\lambda) = (-1)^n(\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1}(\lambda - \lambda_2)^{\alpha_2} \ldots (\lambda - \lambda_r)^{\alpha_r}$$

A es diagonalizable si y solo si rango$(A - \lambda_j \mathcal{I}) = n - \alpha_j$ para todo $j = 1, \ldots, r$

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Ejemplo

$$\begin{array}{cccc} \varphi: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ 2x_1 + 2x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Sus valores propios son $\lambda_1 = -1,\ \alpha_1 = 2$ y $\lambda_2 = 8,\ \alpha_2 = 1.$

Sus subespacios propios son

$$\mathcal{U}_{\lambda_1} = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad \mathcal{U}_{\lambda_2} = \mathcal{L}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, φ es diagonalizable.

Diagonalización

Criterios de diagonabilidad

Ejemplo

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Su polinomio característico es $p(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 1)$

Sus valores propios son

$$\lambda_1 = 2,\ \alpha_1 = 2 \quad \text{y} \quad \lambda_2 = -1,\ \alpha_2 = 1$$

$$rango(A - 2\mathrm{I}) = rango \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 1 = 3 - 2$$

Por ser $rango(A - 2\mathrm{I}) \neq 1$, la matriz A **no** es diagonalizable.

Diagonalización

Teorema de Cayley-Hamilton

Teorema (Cayley-Hamilton)

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ con polinomio característico $p(\lambda) = |A - \lambda I|$
Entonces $p(A) = 0$.

Ejemplo

Sea la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos el polinomio característico de A para comprobar el teorema de Cayley-Hamilton.

Diagonalización

Teorema de Cayley-Hamilton

Solución:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad p(\lambda) = -(\lambda-2)^2(\lambda+1)$$

$$\begin{aligned} p(A) &= -(A-2\mathtt{I})^2(A+\mathtt{I}) \\ &= -\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= -\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diagonalización

Aplicaciones del Teorema de Cayley-Hamilton

Ejemplo

Determine si existe la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ y exprésela como un polinomio en A de grado menor que 2.

$$p(A) = A^2 + 3A + 2\mathtt{I} = 0$$

$$A^2 + 3A + 2\mathtt{I} = 0 \implies \begin{aligned} A^2 + 3A &= -2\mathtt{I} \\ A(A+3\mathtt{I}) &= -2\mathtt{I} \\ A[-\tfrac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{3}\mathtt{I})] &= \mathtt{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^{-1} = -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{A}+\mathbf{3}\mathtt{I})$$

Diagonalización

Aplicaciones del Teorema de Cayley-Hamilton

Ejemplo

Exprese la potencia A^5 en términos de un polinomio en A de grado menor que la dimensión de A.

$$p(A) = A^2 + 3A + 2\mathtt{I} = 0 \implies A^2 = -3A - 2\mathtt{I}$$

$$\begin{aligned} A^5 &= A^2 \cdot A^2 \cdot A \\ &= (-3A - 2\mathtt{I}) \cdot (-3A - 2\mathtt{I}) \cdot A \\ &= (9A^2 + 12A + 4\mathtt{I}) \cdot A \\ &= [9(-3A - 2\mathtt{I}) + 12A + 4\mathtt{I}] \cdot A \\ &= (-15A - 14\mathtt{I}) \cdot A \\ &= -15A^2 - 14A = -15(-3A - 2\mathtt{I}) - 14A \\ &= 31A + 30\mathtt{I} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$A^5 = 31A + 30\mathtt{I} = 31 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} + 30 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 61 & -62 \\ 93 & -94 \end{pmatrix}$$

Bibliografía

Algebra lineal J. de Burgos (Ed. McGraw Hill)

Algebra lineal J.B. Fraleigh y R.A. Beauregard (Ed. Addison Wesley)

Algebra lineal con aplicaciones y Mathlab
B. Kolman y D. Hill (Ed. Prentice Hall)

Algebra lineal R. Larson, B.H. Edwards y D.C. Falvo (Ed. Pirámide)

Algebra lineal y sus aplicaciones David C. Lay (Ed. Pearson)

Algebra lineal con aplicaciones G. Nakos y D. Joyner (Ed. Thomson)

Algebra lineal y sus aplicaciones G. Strang (Ed. Addison Wesley)

Problemas de Álgebra
A. de la Villa (Librería I.C.A.I. Univ. Pontifícia de Comillas)