UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática (5–2–14)

Examen del tema 4 - Curso 2013/14

Cálculo para la Computación

Apellidos:. . . . . **Nombre:**. . . . .

DNI: . . . . **Grado/Grupo:**. . . . .

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas, indicando los resultados más importantes que se aplican en cada momento.
- Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).
- No se puede utilizar la calculadora.

---

1. *a*) (Hasta 2 puntos) Si α es un número real estrictamente positivo, demuestre que las sucesiones

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} k^{\alpha}, \qquad\qquad b_n = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

son infinitos equivalentes.

b) (Hasta 1.5 puntos) ¿Cuál es el carácter de las siguientes series?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}, \qquad\qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\cdots+\sqrt{n}}$$

2. (Hasta 2.5 puntos) Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$.

Indicación: $S = \dfrac{c}{a} - \log b$, en donde a, b y c son números naturales consecutivos.

3. *a*) (Hasta 1 punto) Calcule la suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1}$, indicando cual es su campo de convergencia.

b) (Hasta 2 puntos) Deduzca del apartado anterior la siguiente igualdad e indique los valores de x para los cuales es válida.

$$\log \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

c) (Hasta 1 punto) Utilice el apartado anterior para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,4^n}$

Indicación: $S = \log \dfrac{a+1}{a}$, en donde a es un número natural.

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática (14–1–14)

Examen del tema 3 - Curso 2013/14

Cálculo para la Computación

Apellidos: .... **Nombre:** ....

DNI: .... **Grado/Grupo:** ....

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas, indicando los resultados más importantes que se aplican en cada momento.
- Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).
- No se puede utilizar la calculadora.

---

1. (Hasta 2 puntos) Calcule la integral

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\cos x}{2\cos x + \operatorname{sen} x} dx$$

(Indicación: el resultado es $\dfrac{\pi + \log(a/b)}{c}$, en donde a, b y c son números naturales coprimos.)

2. Consideramos la ecuación diferencial: $x^2 y' = x^2 y^2 - xy - 4$

   a) (Hasta 2 puntos) Halle la solución general de la ecuación utilizando el cambio de variable

$$y = \frac{1}{z} + \frac{2}{x}.$$

   b) (Hasta 0.5 puntos) Compruebe que $y = \dfrac{2}{x}$ es una solución que pasa por el punto $(2, 1)$.

   c) (Hasta 0.5 puntos) ¿Hay más soluciones que pasen por el punto $(2, 1)$?

   (Indicación: En el primer apartado, el cambio de variable conduce a una ecuación lineal cuya solución general es $z = \dfrac{-x}{4} + \dfrac{C}{x^3}$)

3. (Hasta 2.5 puntos) Determine el número de puntos necesarios para aproximar la integral

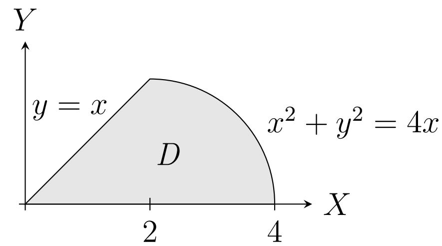
$$I = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

   con el método de los puntos medios y un error menor que $\dfrac{1}{1200}$, y escriba la suma de Riemann correspondiente usando el operador sumatorio.

   (Indicación: $I \approx \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a}{(2k-1)^2 + b}$, en donde n, a, b son números naturales.)

4. (Hasta 2.5 puntos) Utiliza el cambio a coordenadas polares para calcular la siguiente integral

$$\iint_D \frac{y}{x}\,dx\,dy$$



(Indicación: el resultado es un número natural.)

- $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{n,k})$$
  $x_{n,k} = a + \frac{b-a}{2n}(2k-1)$, Error $\leq \dfrac{M(b-a)^3}{24n^2}$, $M = \max\{|f''(x)| \colon a \leq x \leq b\}$
- Cambios de variable para funciones trigonométricas:

$$R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{sen} x = t.$$

$$R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x) \quad \rightsquigarrow \quad \cos x = t.$$

$$R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x) \quad \rightsquigarrow \quad \operatorname{tg} x = t$$

$$(dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2})$$

Otros casos $\rightsquigarrow$ $\operatorname{tg}(x/2) = t$

$$(dx = \frac{2}{1+t^2}dt, \quad \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2})$$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática (14–01–2014)

Examen del tema 3 - Curso 2013/14

Cálculo para la Computación

Apellidos:... **Nombre:**.............................

DNI: .... **Grado/Grupo:**.......................................

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas, indicando los resultados más importantes que se aplican en cada momento.
- Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).
- No se puede utilizar la calculadora.

---

1. (Hasta 4 puntos) Consideremos la elipse que tiene las siguientes características:

   - El centro de la elipse es el punto $(0, -1)$.
   - Uno de los ejes de la elipse está en la dirección del vector $(1, 2)$.
   - Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 3)$ pertenecen a la elipse.

   Se pide:

   a) Determine una ecuación cartesiana de la elipse.

   b) Proporcione una parametrización de la elipse.

2. (Hasta 1.5 puntos) Demuestre que las curvas $x^2 + 4y^2 = 3$, $2y = 3x^4$, son ortogonales en los puntos de intersección.

3. (Hasta 1.5 puntos) Clasifique el punto crítico (a, b, c) del campo escalar $f(x, y, z)$ sabiendo que

$$\nabla^2 f(a, b, c) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

4. (Hasta 3 puntos) Consideremos la función $f(x, y) = -3xy^2 + 4y^2 - 10xy + 12y + 4x^2 - 15x + 14$.

   a) Compruebe que $(1, -1)$ es un punto crítico de $f(x, y)$ sujeto a la condición $x - 2y - 3e^{x+y} = 0$.

   b) Clasifique el punto crítico del apartado anterior.

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática (3–12–2013)

Examen del tema 2 - Curso 2013/14

Cálculo para la Computación

Apellidos: .... **Nombre:** ....

DNI: .... **Grado/Grupo:** ....

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas, indicando los resultados más importantes que se aplican en cada momento.
- Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).
- No se puede utilizar la calculadora.

---

1. (Hasta 4 puntos) Consideramos la cónica $4x^2 + 4xy + y^2 + 15x = 0$

   a) Determine los elementos fundamentales para clasificarla y dibujarla.

   b) Determine una parametrización.

   c) Halle los puntos de tangencia horizontal y vertical y represéntelos en el dibujo hecho en el primer apartado.

2. (Hasta 2 puntos) Determine los puntos del grafo de $f(x, y) = \log(x^2y + 1)$ en donde el plano tangente sea paralelo al plano
$$-2y + 2z - 5 = 0$$

3. (Hasta 4 puntos) Determine y clasifique los puntos críticos del campo $f(x, y) = \mathrm{e}^{x-y}(x^2 + y^2)$ sujeto a la condición $x^2 + y^2 = 2$.

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática (5-11-2013)

Examen del tema 1 - Curso 2013/14

Cálculo para la Computación

Apellidos:... **Nombre:**..............................

DNI:...................... **Grado/Grupo:**......................................

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas, indicando los resultados más importantes que se aplican en cada momento.
- Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).
- No se puede utilizar la calculadora.

---

1. (Hasta 3 puntos) Consideramos el polinomio $P(z) = z^4 - 8z^3 + 23z^2 - 28z + 13$.

   a) Utilice un cambio de variable $t = z - a$, para algún valor de a, que conduzca a un polinomio $Q(t)$ sin término con t^3.

   b) Ayudándose del apartado anterior, factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(z)$.

2. (Hasta 3 puntos) Consideramos la función $f(x) = \operatorname{sen}^5(x)$.

   a) Demuestre que $f(x) = \dfrac{1}{16}\operatorname{sen}(5x) - \dfrac{5}{16}\operatorname{sen}(3x) + \dfrac{5}{8}\operatorname{sen}(x)$

   b) Calcule la integral de $f(x)$.

3. (Hasta 3 puntos) Consideramos la función $f(x) = \sqrt{1+2x}$.

   a) Comprueba que el polinomio de Taylor de orden 4 de f en $x_0 = 0$ es

   $$T(x) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} - \frac{5x^4}{8}.$$

   b) ¿Qué aproximación de $f(1/4) = \sqrt{3/2}$ obtenemos con T?

4. (Hasta 1 punto) Consideramos la suma $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2-1}$. Indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones es igual a S:

   ☐ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k(k+2)}$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n^2-1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k}{(n-k)^2-1}$

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA
Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática (5-11-2013)

Examen del tema 1 - Curso 2013/14

Cálculo para la Computación

Apellidos y Nombre:...

DNI: ....   **Titulación:**......................................

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas, indicando los resultados más importantes que se aplican en cada momento.
- Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).
- No se puede utilizar la calculadora.

---

1. (Hasta 3 puntos) Consideramos el polinomio $p(z) = z^4 + 4z^3 + 5z^2 + 2z + 1$.

   a) Utilice un cambio de variable $t = z - a$, para algún valor de a, que conduzca a un polinomio $q(t)$ sin término con t^3.

   b) Ayudándose del apartado anterior, factorice en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{C}$ el polinomio $P(z)$.

2. (Hasta 3 puntos) Consideramos la función $f(x) = \cos^5(x)$.

   a) Demuestre que $f(x) = \dfrac{1}{16}\cos(5x) + \dfrac{5}{16}\cos(3x) + \dfrac{5}{8}\cos(x)$

   b) Calcule la integral de $f(x)$.

3. (Hasta 3 puntos) Consideramos la función $f(x) = (1 + 2x)^{-1/2}$.

   a) Comprueba que el polinomio de Taylor de orden 3 de f en $x_0 = 0$ es

   $$T(x) = 1 - x + \frac{3x^2}{2} - \frac{5x^3}{2}.$$

   b) ¿Qué aproximación de $f(1/4) = \sqrt{2/3}$ obtenemos con T?

4. (Hasta 1 punto) Consideramos la suma $S = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k^2 - 1}$. Indica cuál o cuáles de las siguientes expresiones son iguales a S:

   ☐ $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-2} \frac{n-k}{(n-k)^2 - 1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{n}{n^2 - 1}$ ☐ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k+1}{k(k+2)}$