TEMA 4

Sucesiones y series numéricas

Contenido:

- LECCIÓN 4.1: SUCESIONES. Estudio de las propiedades de una sucesión. Sucesiones recursivas. Límites de sucesiones. Infinitésimos e infinitos equivalentes.
- LECCIÓN 4.2: SERIES NUMÉRICAS. Suma de series. Criterios de convergencia. Series de potencias. Series de Taylor. Evaluación aproximada de funciones elementales.

Prerrequisitos: Manipulación de expresiones y propiedades de las funciones elementales. Concepto de límite de una función y cálculo de límites (regla de L'Hôpital).

Objetivos: Los objetivos son: estudiar las propiedades de una sucesión numérica, saber aplicar criterios para estudiar la convergencia de series numéricas, saber estudiar la convergencia de series de potencias, saber sumar de forma exacta y aproximada algunas series numéricas y de potencias.

Resultados de aprendizaje:

- Saber estudiar las características de monotonía y acotación de una sucesión escrita en forma explícita o en forma recursiva.
- Saber calcular límites de sucesiones que se puedan resolver mediante operaciones algebraicas, utilizando el número e y equivalencia de infinitésimos e infinitos.
- Saber estudiar la convergencia de sucesiones recursivas.
- Reconocer y sumar algunos tipos de series numéricas, como geométricas (mediante fórmula), aritmético-geométricas, hipergeométricas,... También se sumarán aquellas que se puedan sumar calculando el límite de la sucesión de sumas parciales utilizando las técnicas aprendidas en este tema.
- Saber estudiar el carácter de una serie usando los siguientes criterios: del cociente, comparación por paso al límite, convergencia absoluta y Leibniz.

- Saber interpretar y aplicar criterios de convergencia que se indiquen explícitamente.
- Saber hallar el campo de convergencia de series de potencias utilizando los criterios de convergencia de series numéricas.
- Saber el polinomio y la serie de Taylor de las funciones exponencial, logaritmo neperiano, seno y arco tangente y usarlas para sumar otras series.
- Saber utilizar el resto de Lagrange para aproximar las funciones exponencial, logaritmo neperiano y seno.
- Saber utilizar las propiedades algebraicas, de derivación e integración para sumar series de potencias a partir de la serie geométrica.

LECCIÓN 4.1

Sucesiones

Una *sucesión* de números reales es una enumeración de los elementos de un conjunto de números reales, es decir, una regla que asocia un número real a cada número natural; por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow & \dots \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} & \dots \end{array} \tag{4.1}$$

Formalmente, una sucesión no es más que una aplicación $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Sin embargo, para las sucesiones es habitual escribir la variable como subíndice, es decir, a_n en lugar de $a(n)$. Por ejemplo, la sucesión representada en (4.1) se definiría

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Para representar la sucesión completa se utiliza la notación $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, aunque también es habitual escribir simplemente a_n si esta simplificación no conduce a error. Los números reales $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ son los *términos* de la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y decimos que a_n es el *término n-ésimo*, el *término de índice* n o el término que ocupa la posición n.

Para simplificar, cuando hablamos de sucesiones de forma general, suponemos que $n \geq 0$, sin embargo, en ejemplos concretos, puede ser necesario considerar que los valores de la variable n empiezan en un valor mayor. Por ejemplo, la sucesión

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

tiene sentido para $n \geq 2$.

EJEMPLO 4.1.1

- Los términos de la sucesión $b_n = (-1)^n$ con $n \geq 0$ son

  $$1, -1, 1, -1, 1, \dots$$

  Como vemos, los números que ocupan una determinada posición pueden repetirse en otra. El conjunto de los términos de esta sucesión es $\{-1, 1\}$, sin embargo, en una sucesión no solo importa el conjunto de términos, sino la posición que ocupan en la enumeración.

- Los términos de la sucesión $c_n = \dfrac{2^n - 1}{n^2}$ con $n \geq 1$ son

  $$\begin{array}{ccccc} \frac{2^1-1}{1^2}, & \frac{2^2-1}{2^2}, & \frac{2^3-1}{3^2}, & \frac{2^4-1}{4^2}, & \dots \\ \| & \| & \| & \| & \\ 1, & \frac{3}{4}, & \frac{7}{9}, & \frac{15}{16}, & \dots \end{array}$$

- Los términos de la sucesión $d_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^n} = \dfrac{1}{n^n}\sum_{k=1}^{n} k$ con $n \geq 1$ son

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{1}{1^1}, & \dfrac{1+2}{2^2}, & \dfrac{1+2+3}{3^3}, & \dfrac{1+2+3+4}{4^4}, & \dots \\
\| & \| & \| & \| & \\
1, & \dfrac{3}{4}, & \dfrac{2}{9}, & \dfrac{5}{128}, & \dots
\end{array}$$

□

Hemos definido las sucesiones del ejemplo anterior dando una fórmula para el término n-ésimo en función de n, es decir, a partir del *término general*. Otra forma de definir sucesiones, de gran importancia en computación, es mediante *recurrencias*, es decir, utilizando definiciones *recursivas*.

Ejemplo 4.1.2

- Consideremos la sucesión

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = n + a_{n-1} \quad \text{si } n > 1 \end{cases}$$

Como vemos, para determinar un término de la sucesión, debemos conocer los anteriores. Los términos de esta sucesión son

$$1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \dots$$

En este ejemplo, es fácil deducir una expresión para el término general.

$$\begin{aligned}
a_n = 1+2+\cdots+n &= \frac{1}{2}(1+2+\cdots+n+n+(n-1)+\cdots+2+1) = \\
&= \frac{1}{2}((1+n)+(2+n-1)+(2+n-2)+\cdots+(n-1+2)+(n+1)) = \\
&= \frac{1}{2}((n+1)+(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)+(n+1)) = \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) \qquad (4.2)
\end{aligned}$$

Sin embargo, en la mayoría de los casos, esta conversión suele ser bastante complicada y deberemos estudiar las características de la sucesión a partir de su definición recursiva.

- En las definiciones recursivas, podemos utilizar más de un elemento previo de la sucesión. La siguiente sucesión, conocida como sucesión de Fibonacci, define cada término a partir de los dos inmediatamente anteriores.

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{si } n > 2 \end{cases}$$

Los términos de esta sucesión son $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots\}$ y su término general es

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n;$$

la demostración de esta igualdad queda fuera de los contenidos de este curso, aunque sí será abordada en la asignatura de *Matemática Discreta*.

Definición 4.1.3 *Sea a_n una sucesión de números reales:*

1. *Decimos que a_n es* creciente *si $a_n \leq a_{n+1}$ para todo n.*
2. *Decimos que a_n es* decreciente *si $a_n \geq a_{n+1}$ para todo n.*

También hablaremos de sucesiones *estrictamente* crecientes o decrecientes si las desigualdades de las definiciones anteriores son estrictas, es decir, $<$ y $>$ respectivamente. En general, decimos que una sucesión es *monótona* si es creciente o decreciente. Para estudiar la monotonía de una sucesión, podemos utilizar los siguientes métodos

- Utilizar las propiedades de la relación de orden para "transformar" la desigualdad $n < n+1$ en otra que relacione a_n con a_{n+1}.
- Comparar 0 con la diferencia $a_{n+1} - a_n$
- Comparar 1 con el cociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
- Inducción, en caso de funciones definidas recursivamente.
- Utilizar la caracterización de la monotonía de una función usando su derivada (teorema 1.1.15, página 17) y la siguiente propiedad

  Si f es una función creciente en $[N, \infty)$, entonces $a_n = f(n)$ es una sucesión creciente para $n \geq N$.

Usaremos uno u otro método dependiendo de la definición concreta de la sucesión.

Ejemplo 4.1.4 Vamos a analizar la monotonía de algunas sucesiones.

1. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ es estrictamente decreciente:

$$\begin{aligned} n &< n+1 \\ n+1 &< n+2 \quad \text{(Orden cerrado para la suma)} \\ \frac{n+1}{n+2} &< 1 \quad \text{(Orden cerrado para el producto, } n+2>0\text{)} \\ \frac{1}{n+2} &< \frac{1}{n+1} \quad \text{(Orden cerrado para el producto, } n+1>0\text{)} \\ a_{n+1} &< a_n \end{aligned}$$

2. La sucesión $b_n = (-1)^n$ no es monótona: mientras que $b_1 = -1 < b_2 = 1$, se verifica que $b_2 = 1 > b_3 = -1$.

3. La sucesión $d_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^n}$ es estrictamente decreciente:

$$\begin{aligned}\frac{d_{n+1}}{d_n} &= \frac{(1+2+3+\cdots+n+(n+1))n^n}{(1+2+3+\cdots+n)(n+1)^{n+1}} = \\ &= \frac{2(n+1)(n+2)n^n}{2n(n+1)(n+1)^{n+1}} = \\ &= \frac{n+2}{n(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1\cdot 1^n = 1\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad hemos usado la fórmula de la suma de los n primeros números naturales que demostramos en (4.2.4) (página 229). Además, para el último paso, hemos utilizado que $\dfrac{n+2}{n(n+1)} < 1$, lo cual es cierto para todo $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} n &\geq 2 \\ n^2 &\geq 2^2 > 2 \\ n+n^2 &> n+2 \\ n(n+1) &> n+2 \\ 1 &> \frac{n+2}{n(n+1)}\end{aligned}$$

Dado que $\dfrac{d_{n+1}}{d_n} < 1$, entonces $d_{n+1} < d_n$ y, por lo tanto, d_n es estrictamente decreciente si $n \geq 2$.

4. La sucesión $c_n = \dfrac{2^n-1}{n^2}$ es creciente si $n \geq 2$. Para demostrarlo, consideraremos la función $f(x) = \dfrac{2^x-1}{x^2}$ para $x \geq 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2^x-1}{x^2} \\ f'(x) &= \frac{2^x x^2 \log 2 - 2x(2^x-1)}{x^4} \\ f'(x) &= \frac{2^x}{x^3}(x\log 2 - 2) + \frac{2}{x^3}\end{aligned}$$

"Ordenar" los factores y términos de $f'(x)$ ha sido la parte complicada del proceso. Si $x > \dfrac{2}{\log 2} \approx 2.88$, entonces $x\log 2 - 2 > 0$, y además $2^x > 0$ y $x^3 > 0$, y en consecuencia $f'(x) > 0$. Por lo tanto, f es estrictamente creciente en $[3, +\infty)$ y c_n lo es si $n \geq 3$. □

Definición 4.1.5 *Decimos que una sucesión a_n está acotada si existe un número real M tal que $|a_n| \leq M$.*

Siguiendo esta definición, M es una *cota superior* de la sucesión y $-M$ es una *cota inferior*. Normalmente, determinaremos estas cotas por separado y hablaremos de sucesiones acotadas *superiormente* o *inferiormente*.

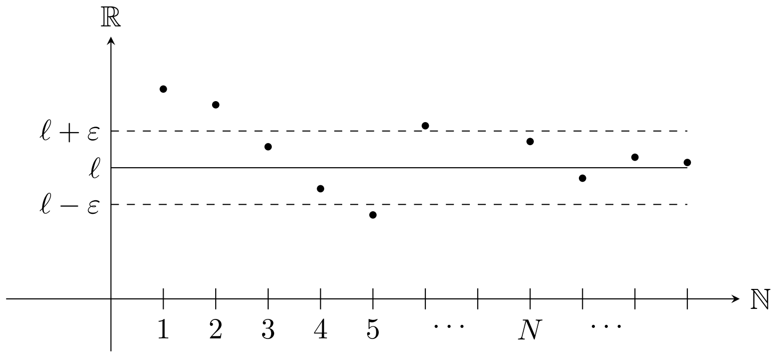


Figura 4.1: Si $\lim a_n = \ell$ entonces para $n \geq N$ los términos de la sucesión distan de ℓ menos de ε.

Ejemplo 4.1.6

1. La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n+1}$ está acotada, ya que trivialmente $a_n > 0$ y $a_n \leq 1$.
2. La sucesión $b_n = (-1)^n$ está acotada, ya que $|(-1)^n| = 1$.
3. La sucesión $c_n = \dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^n}$ está acotada. Trivialmente, $c_n > 0$ y además,
$$\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^n} < \frac{n\cdot n}{n^n} = \frac{1}{n^{n-2}} \leq 1$$

4.1.1. Límites de sucesiones.

Las sucesiones se utilizan para describir la forma en la que nos acercamos o aproximamos a un número real que sea solución de un determinado problema. La noción de acercamiento o aproximación se formaliza con los conceptos de límite y convergencia.

Definición 4.1.7 *Decimos que $\ell \in \mathbb{R}$ es el* límite *de la sucesión a_n si para todo $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que $|a_n - \ell| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$ (véase la figura 4.1). En tal caso escribimos* $\lim a_n = \ell$ *y decimos que a_n es* convergente *y* converge *a ℓ.*

Igual que para funciones, también podemos obtener límites cuyo valor sea $+\infty$ o $-\infty$; no incluimos las definiciones detalladas ya que suponemos que son conocidas por el alumno y porque no necesitaremos trabajar con ellas. Hablaremos de *divergencia a infinito* o a *menos infinito* si el límite es $+\infty$ o $-\infty$ respectivamente.

La definición de límite no establece un método para calcularlos, solo enuncia la propiedad que debemos verificar para comprobar si un número es o no límite. En este caso, las propiedades algebraicas y los límites de funciones serán las herramientas básicas para el estudio de límites de sucesiones. No detallamos aquí las propiedades algebraicas, ya que deben ser conocidas por el alumno y coinciden con las enunciadas para funciones en la proposición 1.1.6 (página 12), pero sí introducimos el siguiente resultado que relaciona límites de sucesiones y límites de funciones; en el enunciado, utilizamos el conjunto $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, que se denomina $\mathbb{R}$ *ampliado.*

Teorema 4.1.8 *Sean a_n, b_n son dos sucesiones convergentes tales que $a_n < b_n$. Entonces* $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Corolario 4.1.9 (Teorema de Compresión)

1. *Sean a_n, b_n y c_n tres sucesiones tales que $a_n \leq c_n \leq b_n$, $\lim a_n = \lim b_n = \ell$, en donde $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$; entonces, $\lim c_n = \ell$.*
2. *Sea a_n una sucesión convergente a 0 y b_n una sucesión acotada; entonces, $\lim a_n b_n = 0$.*

Ejemplo 4.1.10 Aplicando el segundo apartado del teorema 4.1.9, podemos deducir que

$$\lim \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0,$$

pues la sucesión $x_n = \dfrac{\operatorname{sen} n}{n}$ se puede expresar como producto de una sucesión acotada $b_n = \operatorname{sen} n$, por otra sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ convergente a 0. □

Teorema 4.1.11 (Caracterización secuencial) *Sean $a, \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si y solo si: para toda sucesión $\{x_n\} \subset D$, con $x_n \neq a$ para todo n, y $\lim x_n = a$, se verifica que $\lim f(x_n) = \ell$.*

Si trabajamos con funciones continuas, entonces podemos sustituir ℓ por $f(a)$ en el teorema. Este resultado tiene importantes consecuencias prácticas respecto del cálculo de límites, usado conjuntamente con la propiedad de continuidad de las funciones definidas en términos de funciones elementales.

Ejemplo 4.1.12

$$\lim \operatorname{sen} \frac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

ya que $\lim \dfrac{\pi n - 1}{2 + 3n} = \dfrac{\pi}{3}$, y $\lim\limits_{x\to\pi/3} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{3}$, por ser continua la función seno. □

Ejemplo 4.1.13 También podemos usar la caracterización secuencial para demostrar que una función no tiene límite en algún punto. Por ejemplo, la función $\operatorname{sen} x$ no tiene límite en $+\infty$, es decir, *“ $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x$ no existe”*. Para probar esto, tomamos dos sucesiones divergentes a $+\infty$,

$$x_n = 2\pi n, \qquad y_n = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

y dado que

$$\lim \operatorname{sen} x_n = \lim 0 = 0 \neq 1 = \lim 1 = \lim \operatorname{sen} y_n,$$

podemos concluir que la función $\operatorname{sen} x$ no tiene límite en $+\infty$. □

Otra importante consecuencia de la caracterización secuencial es que podemos deducir límites de sucesiones a partir de límites de funciones calculados con técnicas específicas, como la regla de L'Hôpital.

Ejemplo 4.1.14 Para calcular el límite de sucesiones $\lim \dfrac{\log n}{n}$, consideramos el límite de la función $\dfrac{\log x}{x}$ cuando x tiende a $+\infty$, es decir $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x}$. Esté límite se puede calcular usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Si tomamos $x_n = n$, se verifica que $\lim x_n = \lim n = +\infty$ y por la caracterización secuencial, sustituyendo x por $x_n = n$, obtenemos que $\lim \dfrac{\log n}{n} = 0$. □

Ejemplo 4.1.15 Para calcular el límite de $\lim \dfrac{n}{2^n}$, consideramos la función $\dfrac{x}{2^x}$ y calculamos su límite en $+\infty$, que calculamos usando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2^x \cdot (\log 2)} = 0$$

Si tomamos $x_n = n$, se verifica que $\lim x_n = \lim n = +\infty$ y por la caracterización secuencial obtenemos que $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$.

En general, podemos utilizar el mismo procedimiento, aplicando la regla de L'Hôpital tantas veces como sea necesario para demostrar que

$$\lim \frac{p(n)}{a^n} = 0$$

para cualquier polinomio $p(n)$ y cualquier número real $a > 1$. □

Obsérvese que en los ejemplos anteriores, no se ha aplicado la regla de L'Hôpital en el límite de sucesiones sino en un límite de funciones. Es decir, cambiar la n por x no es un simple cambio de letra, sino que pasamos a considerar la expresión como función en lugar de como sucesión.

Para trabajar con las expresiones del tipo $a_n^{b_n}$ es conveniente utilizar la igualdad

$$a_n^{b_n} = \exp(b_n \log a_n)$$

De esta forma, la caracterización secuencial del límite de funciones permitirá calcular el límite de $a_n^{b_n}$ a partir del límite de $b_n \log a_n$.

Ejemplo 4.1.16 Si reescribimos la sucesión $a_n = \sqrt[n]{n}$ utilizando la función logaritmo como acabamos de indicar, observamos que una primera evaluación de su límite nos conduce a una indeterminación

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \exp\left(\frac{1}{n} \log n\right) = \exp(0 \cdot \infty)$$

Sin embargo, podemos calcular el límite de la sucesión que ha quedado dentro de la función exponencial como hemos visto en el ejemplo 4.1.14 y completar el cálculo:

$$\lim \sqrt[n]{n} = \lim \exp\left(\frac{1}{n}\log n\right) = \exp(\lim \frac{\log n}{n}) = \mathrm{e}^0 = 1 \qquad \square$$

Recordamos a continuación la relación entre las propiedades de convergencia, monotonía y acotación. En primer lugar, no es difícil deducir que toda sucesión convergente está acotada, pero no es cierto que, en general, las sucesiones acotadas sean convergentes. En el primer tema, enunciamos el teorema 1.3.1 (página 28) que establecía la propiedad que distingue al conjunto de los números reales del de los números racionales: *toda sucesión monónota y acotada de números reales es convergente.* A lo largo del tema, iremos viendo distintas consecuencias de esta propiedad que extendemos y detallamos en el siguiente resultado.

Proposición 4.1.17

- *Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.*
- *Toda sucesión decreciente y acotada inferiormente es convergente.*
- *Toda sucesión creciente y no acotada superiormente diverge a* $+\infty$.
- *Toda sucesión decreciente y no acotada inferiormente diverge a* $-\infty$.

Ejemplo 4.1.18 La sucesión

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es una sucesión creciente y acotada y en consecuencia es convergente. El límite de esta sucesión es un número irracional y *transcendente* (es decir, no es raíz de ningún polinomio de coeficientes racionales). Así se define el número denotado por e y que es base del logaritmo neperiano y de la función exponencial. Podemos aproximar el valor de este número tomando valores suficientemente altos de n, aunque más adelante aprenderemos otras formas más eficientes para hacerlo. En concreto, las cinco primeras cifras significativas del número e son: $\mathrm{e} \approx 2.7182\ldots$. □

Ejemplo 4.1.19 Consideramos la sucesión a_n definida recursivamente por

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2} + \dfrac{1}{a_n} \quad \text{si} \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Vamos a demostrar que a_n es decreciente, acotada inferiormente y que su límite es $\sqrt{2}$. En primer lugar, demostramos por inducción que la sucesión está acotada inferiormente por 1 y superiormente por 2:

(i) $2 \geq a_0 = 2 > 1$.

(ii) Supongamos que $1 \leq a_k \leq 2$ y demostremos la desigualdad para a_{k+1}:
Aplicando el inverso a la desigualdad de la hipótesis de inducción: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{a_k} \leq 1$;
dividiendo por 2 la desigualdad de la hipótesis de inducción: $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{a_k}{2} \leq 1$;
sumando término a término las dos desigualdades anteriores: $1 \leq \dfrac{a_k}{2} + \dfrac{1}{a_k} \leq 2$,
o lo que es lo mismo: $1 \leq a_{k+1} \leq 2$, que es lo que queríamos demostrar.

Por lo tanto, por el principio de inducción, $1 \leq a_n \leq 2$ para todo n.

Para demostrar el decrecimento de la sucesión, observamos en primer lugar que

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n}{2} - \frac{1}{a_n} = \frac{a_n^2 - 2}{2a_n}$$

Por lo tanto, solo tenemos que demostrar que $a_n^2 \geq 2$ para todo n. Esta desigualdad la vamos a demostrar también por inducción.
Trivialmente, $a_0^2 = 4 > 2$; si $a_k^2 \geq 2$, entonces

$$a_{k+1}^2 = \left(\frac{a_k}{2} + \frac{1}{a_k}\right)^2 = \frac{a_k^2}{4} + \frac{1}{a_k^2} + 1 \overset{(*)}{\geq} 2\frac{a_k}{2}\frac{1}{a_k} + 1 = 2$$

La desigualdad $(*)$ es consecuencia de que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$, ya que

$$\begin{aligned} (x-y)^2 &\geq 0 \\ x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 \\ x^2 + y^2 &\geq 2xy \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión a_n es decreciente y acotada y en consecuencia es convergente.
Supongamos que $\ell = \lim a_n$; entonces a_{n+1} también converge a ℓ y por lo tanto:

$$\ell = \lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{\ell}{2} + \frac{1}{\ell} = \frac{\ell^2 + 2}{2\ell}$$

y por lo tanto el número ℓ verifica que $\ell^2 = 2$, es decir, $\ell = \sqrt{2}$. □

4.1.2. Introducción al cálculo numérico

Hemos presentado el conjunto de los números reales como un cuerpo ordenado con la propiedad de que *toda sucesión monótona y acotada es convergente*. Esta propiedad se conoce como *completitud*, y el cuerpo de los reales es el único cuerpo que la tiene. Por lo tanto, esta es la propiedad que permite construir o describir a los números reales; concretamente, podemos establecer un propiedad un poco más fuerte y que es la que realmente usamos: *todo número real puede ser construido como límite de una sucesión (monótona) de números racionales*. Por ejemplo, hemos definido el número e como límite de la sucesión $(1 + {}^1\!/\!_n)^n$.

La representación decimal de los números, no es más que una forma de definir una sucesión de números racionales cuyo límite es el número deseado. Por ejemplo, si dividimos 1 entre 3, vamos generando una sucesión que sabemos convergente a $1/3$:

$$0.3, \quad 0.33, \quad 0.333, \quad 0.3333, \quad \cdots \to \frac{1}{3}$$

Algoritmos como el de la raíz cuadrada, tienen el mismo objetivo, generando dígito a dígito obtenemos la sucesión que converge a la raíz. Sin embargo, en general, no es posible describir fácilmente la sucesión de dígitos.

En général, un *método numérico* es un método para resolver un problema cuya solución consiste en dar uno o varios números. Por ejemplo, un método numérico para calcular una aproximación de la derivada $f'(x)$ sería calcular $f(x+h)$, $f(x-h)$, para un número h "pequeño" y tomar

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$$

Normalmente, querremos aproximar una solución a un problema dentro de un grado de *precisión* o *tolerancia*. El primer paso será encontrar un método numérico para determinar esa solución y después describir un algoritmo basado en este método, es decir, una secuencia finita de pasos necesarios para obtener la solución deseada con el grado de precisión deseado.

Habitualmente, los métodos numéricos describen sucesiones numéricas convergentes a la solución deseada y el algoritmo consistirá en obtener términos de esta sucesión hasta lograr la precisión deseada.

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ es la solución exacta de un determinado problema y r es un número racional que aproxima esta solución, la precisión o exactitud se expresa por un número ε tal que

$$|\alpha - r| < \varepsilon.$$

Se introduce el valor absoluto porque la aproximación puede ser por *exceso* o por *defecto*. La forma más habitual para expresar este error será mediante números del tipo 10^{-d} para algún $d \in \mathbb{N}$, o incluso $\frac{1}{2}10^{-d}$, ya que en este caso, por lo general, la expresión decimal del número α esté redondeada correctamente en el d-ésimo decimal, es decir, los primeros d decimales son *significativos*.

Como ejemplo, vamos a ver dos métodos para resolver de forma aproximada ecuaciones numéricas. Es decir, nos planteamos la resolución de ecuaciones

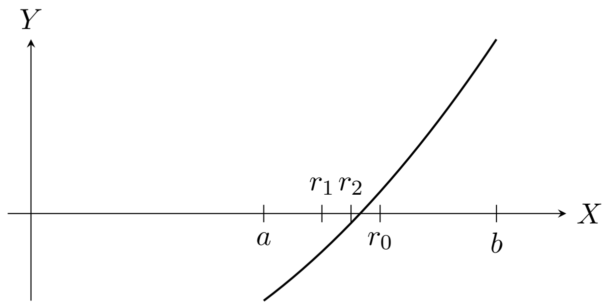
$$f(x) = 0$$

en donde f es una función continua; dicho de otra forma, buscamos métodos para calcular de forma aproximada los *ceros* o *raíces* de f.

Método de las bisecciones. El método más simple se deduce de un importante resultado sobre funciones continuas:

Teorema 4.1.20 (de Bolzano) *Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(a)f(b)<0$, entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.*

Este resultado se traduce en la característica gráfica más importante de las funciones continuas: su grafo, en un intervalo, se puede trazar "sin levantar el bolígrafo". El método de las bisecciones comienza localizando dos puntos sobre los cuales la función tome signos distintos y que por lo tanto nos dan una cota superior e inferior de la raíz; si tomamos después el punto medio, la función tomará en él un signo positivo o negativo y lo podremos utilizar para mejorar la cota superior o inferior de la raíz.



Si dividimos sucesivamente por el punto medio del intervalo que contiene la raíz, determinamos una sucesión cuyo límite es esta raíz. Esta sucesión se define formalmente como sigue:

$$r_0=a,\quad r_1=b,$$
$$r_{n+1}=\frac{r_n+r_m}{2}, \text{en donde } m<n \text{ es el mayor índice tal que } f(r_n)f(r_m)<0$$

Por lo tanto, si $\alpha=\lim r_n$,

$$|r_n-\alpha|\le\frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Ejemplo 4.1.21 Vamos a construir los términos de la sucesión r_n definida anteriormente hasta conseguir aproximar una solución de

$$x^2-2=0$$

con un error menor $\frac{1}{2}10^{-2}$. Consideramos la función $f(x)=x^2-2$; elegimos $a=1$, $b=2$, ya que $f(1)=-1<0$ y $f(2)=2>0$. De esta forma, necesitaremos determinar el término r_9 para conseguir el error deseado, ya que

$$\frac{b-a}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{200}\iff 2^{n-1}>200\iff n\ge 9$$

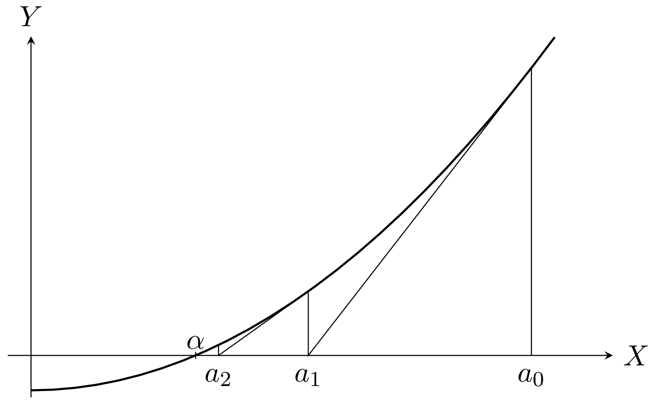


Figura 4.2: Representación gráfica del método de Newton.

Los 10 primeros términos de la sucesión son:

$$
\begin{aligned}
r_0 &= 1, \quad f(1) < 0 \\
r_1 &= 2, \quad f(2) > 0 \\
r_2 &= \frac{3}{2}, \quad f(3/2) > 0 \\
r_3 &= \frac{r_2 + r_0}{2} = \frac{5}{4}, \quad f(5/4) < 0 \\
r_4 &= \frac{r_3 + r_2}{2} = \frac{11}{8}, \quad f(11/8) < 0 \\
r_5 &= \frac{r_4 + r_2}{2} = \frac{23}{16}, \quad f(23/16) > 0 \\
r_6 &= \frac{r_5 + r_4}{2} = \frac{45}{32}, \quad f(45/32) < 0 \\
r_7 &= \frac{r_6 + r_5}{2} = \frac{91}{64}, \quad f(91/64) > 0 \\
r_8 &= \frac{r_7 + r_6}{2} = \frac{181}{128}, \quad f(181/128) < 0 \\
r_9 &= \frac{r_8 + r_7}{2} = \frac{363}{256}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $\frac{363}{256}$ nos da una aproximación hasta la segunda cifra decimal de la solución positiva de la ecuación, es decir, de $\sqrt{2}$,

$$\sqrt{2} \approx \frac{363}{256} \approx 1.41 \qquad \square$$

Método de Newton. El método de las bisecciones no es computacionalmente eficiente, es decir, son necesarios muchos términos de la sucesión para conseguir una buena precisión. El método de Newton que presentamos ahora construye una sucesión que, si es convergente, converge más rápidamente a la raíz de la función dada.

La figura 4.2 muestra gráficamente como se construye una sucesión que puede converger a un cero de f, es decir, $\lim a_n = \alpha$, siendo $f(\alpha) = 0$. Dado un término

a_n de la sucesión, para construir el siguiente término, trazamos la recta tangente en el punto $(a_n, f(a_n))$,

$$y - f(a_n) = f'(a_n)(x - a_n); \tag{4.3}$$

el siguiente elemento de la sucesión es la abscisa del punto de corte de esta recta con el eje OX; por lo tanto, si hacemos $y = 0$ en (4.3), entonces $x = a_{n+1}$, y podemos despejar a_{n+1} para obtener la definición recursiva de a_n:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \tag{4.4}$$

Ejemplo 4.1.22 Para determinar una solución de la ecuación $x^2 - 2 = 0$, tomamos la función $f(x) = x^2 - 2$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 2 \\
f'(x) &= 2x \\
a_0 &= 2 \\
a_{n+1} &= a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^2 - 2}{2a_n} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

Esta es la sucesión que estudiamos en el ejemplo 4.1.19 (página 216) y en él vimos que efectivamente es convergente a $\sqrt{2}$. Sin embargo, en general la sucesión (4.4) puede no ser convergente para algunas elecciones de a_0; además, determinados valores podrían conducir a una sucesión mal definida si, tras N iteraciones, $f'(a_N) = 0$. En la práctica, mediante el método de las bisecciones, buscaremos un intervalo $[a, b]$ que contenga el cero y lo suficientemente pequeño para que tanto f' como f'' sean monótonas; en tal caso, la sucesión sí es convergente y el error dado por un termino de la sucesión está acotado como sigue

$$|a_n - \alpha| < \left| \frac{f(a_n)}{m} \right|$$

en donde $m = \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$. La función del ejemplo 4.1.22 verifica estas condiciones en el intervalo $[1, 2]$,

$$\begin{aligned}
a_0 &= 2 \\
a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 0
\end{aligned}$$

Vamos a calcular los primeros términos y la estimación del error teniendo en cuenta que $m = \min\{|f'(1)|, |f'(2)|\} = \min\{2, 4\} = 2$.

$$\begin{aligned}
a_1 &= 3/2 \\
a_2 &= \frac{17}{12}, \quad \varepsilon_2 < \frac{1}{2}(a_2^2 - 2) = \frac{1}{238} < \frac{1}{2}10^{-2} \\
a_3 &= \frac{577}{408}, \quad \varepsilon_3 < \frac{1}{2}(a_3^2 - 2) = \frac{1}{332928} < \frac{1}{2}10^{-5}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $a_2 = \dfrac{17}{12}$ nos da dos decimales significativos, mientras que con el método de las bisecciones necesitamos 9 términos para conseguir la misma precisión. Con solo un término más, $a_3 = \dfrac{577}{408}$, conseguimos cinco decimales significativos:

$$\sqrt{2} \approx \frac{577}{408} \approx 1.41421$$

□

4.1.3. Infinitésimos e infinitos equivalentes

Una de las aplicaciones del cálculo de límites es el estudio de la equivalencia de funciones y sucesiones convergentes a 0 o a infinito.

Definición 4.1.23 *Dos funciones f y g son* equivalentes en *a si*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1;$$

y lo escribimos más brevemente como "$f(x) \sim g(x)$ en $x = a$".

La equivalencia de funciones es realmente importante en los casos en que las dos funciones converge a 0 o divergen a $\pm\infty$, ya que en ellos la definición de equivalencia da indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ y $\frac{\infty}{\infty}$ respectivamente.

Definición 4.1.24

1. *Decimos que la función $f(x)$ es un infinitésimo en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ y $f(x) \neq 0$ en un entorno de a.*

2. *Decimos que la función $f(x)$ es un infinito en a si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.*

Ejemplo 4.1.25 Para ver que $\operatorname{sen} x$ y x son dos infinitésimos equivalentes necesitamos comprobar que

1. efectivamente son infinitésimos:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} x = 0;$$

2. y que son equivalentes:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \overset{(L'H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \qquad \square$$

Ejemplo 4.1.26 Las funciones polinómicas son infinitos en $+\infty$ y $-\infty$ y son equivalentes al monomio de mayor grado:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{a_n x^n} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}\right) = 1 \qquad \square$$

En el teorema siguiente vemos cómo se puede utilizar la equivalencia de funciones en el cálculo de límites de funciones.

Teorema 4.1.27 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y $h(x)$ otra función definida en un entorno de a. Entonces: $\lim\limits_{x\to a} f(x)h(x)$ existe si y solo si $\lim\limits_{x\to a} g(x)h(x)$ existe, y en tal caso coinciden.*

Este teorema justifica la técnica que se conoce como *sustitución de infinitésimos o infinitos equivalentes* ya que, en la práctica, las equivalencias dadas en el enunciado, se convierten en igualdades, de forma que, en las condiciones del teorema, escribimos:

$$\lim_{x\to a} h(x)f(x) = \lim_{x\to a} h(x)g(x)$$

Los infinitésimos e infinitos también pueden sustituirse si aparecen dividiendo al resto de la función y en general tendríamos que, en las condiciones del teorema anterior, y para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(f(x))^\alpha} = \lim_{x\to a} \frac{h(x)}{(g(x))^\alpha}$$

No podemos sustituir infinitésimos o infinitos en cualquier situación y, en particular, no se pueden sustituir si aparecen como sumando.

Ejemplo 4.1.28 Demostramos a continuación las equivalencias más importantes; en el primero, usamos una equivalencia de infinitésimos y en el resto, usamos el teorema de L'Hôpital.

1. $\operatorname{tg} x \sim x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$$

   En la primera igualdad, hemos usado la equivalencia demostrada en el ejemplo 4.1.25.

2. $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2/2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

3. $\operatorname{arcsen} x \sim x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^2} = 1$$

5. $\mathrm{e}^x - 1 \sim x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1$$

6. $\log(1+x) \sim x$ en 0:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x} = 1$$

El siguiente resultado nos permite construir otras equivalencias a partir de las demostradas en el ejemplo anterior.

Teorema 4.1.29 *Sean f y g dos infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en a y sea $h(x)$ continua en b y tal que $h(b) = a$. Entonces, $f \circ h$ y $g \circ h$ son infinitésimos (resp. infinitos) equivalentes en b.*

En este enunciado, queda implícito que las composiciones se pueden realizar en un entorno de b.

Ejemplo 4.1.30 Las siguientes equivalencias son deducibles a partir de las equivalencias básicas y el resultado anterior Con estos resultados se pueden deducir otras equivalencias:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(x^2-1) &\sim x^2-1 && \text{en } 1 \\ a^x - 1 &\sim x \log a && \text{en } 0 \\ \log x &\sim x-1 && \text{en } 1 \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.1.31 La continuidad de la función exponencial y la propiedad de sustitución de infinitésimos, nos permite deducir la siguiente regla para la resolución de indeterminaciones del tipo (1^∞). Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 1$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, entonces

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to a} \exp(g(x)\log f(x)) = \lim_{x\to a} \exp(g(x)(f(x)-1)) = \\ = \exp\left(\lim_{x\to a} g(x)(f(x)-1)\right) \end{aligned}$$

□

Igual que para funciones, también podemos introducir la noción de equivalencia de infinitésimos e infinitos en sucesiones. Estas equivalencias son una herramienta muy útil para el cálculo de límites y para el estudio de *series numéricas* que veremos en la lección siguiente.

Definición 4.1.32

1. *Dos sucesiones a_n y b_n, son equivalentes si* $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = 1$.
2. *La sucesión a_n es un* infinitésimo *si* $\lim a_n = 0$ *y* $a_n \neq 0$ *para todo* $n \geq N$.
3. *La sucesión a_n es un* infinito *si* $\lim a_n = +\infty$.

La caracterización secuencial de límite de función, permite convertir las equivalencias básicas entre funciones en equivalencias entre sucesiones.

- $\operatorname{sen} x_n \sim x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\operatorname{tg} x_n \sim x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $1 - \cos x_n \sim \dfrac{x_n^2}{2}$ si $\lim x_n = 0$.
- $\operatorname{arcsen} x_n \sim x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\operatorname{arctg} x_n \sim x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $e^{x_n} - 1 \sim x_n$ si $\lim x_n = 0$.
- $\log x_n \sim x_n - 1$ si $\lim x_n = 1$.

Por ejemplo, la equivalencia

$$\operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}$$

es válida, ya que $\lim 1/n = 0$.

Ejemplo 4.1.33

$$\lim \left(\frac{3n}{3n-1}\right)^{2n} = \lim \exp\left(2n \log\left(1 + \frac{1}{3n-1}\right)\right) =$$
$$= \lim \exp\left(2n\frac{1}{3n-1}\right) = \mathrm{e}^{2/3} \qquad \square$$

Aunque habitualmente utilizamos las equivalencias para "sustituir" funciones arbitrarias por polinomios, en algunos ocasiones puede que necesitemos introducir otro tipo de funciones cuyas propiedades faciliten mejor las simplificaciones posteriores. Este es el caso de la función logaritmo, que puede ayudar a eliminar exponentes. Vamos a utilizar esta idea en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.1.34 Una primera evaluación del límite que calculamos a continuación conduce a una indeterminación $(\infty - \infty)$, pero sacando factor común, la convertimos en una indeterminación $\infty \cdot 0$ y ya podemos utilizar equivalencia de infinitésimos.

$$\begin{aligned}
\lim(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) &= \lim \sqrt[3]{n}\left(\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} - 1\right) = \\
&= \lim \sqrt[3]{n} \log \sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} = \\
&= \lim \frac{1}{3}\sqrt[3]{n} \log \frac{n+1}{n} = \\
&= \lim \frac{1}{3}\sqrt[3]{n}\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \\
&= \lim \frac{1}{3}\sqrt[3]{n}\frac{1}{n} = \lim \frac{1}{3n^{2/3}} = \left(\frac{1}{\infty}\right) = 0
\end{aligned}$$

Tanto en la segunda como en la cuarta igualdad hemos utilizado la equivalencia

$$\log x \sim x - 1, \quad \text{en } 1;$$

primero para poder "eliminar" el exponente $1/3$ y después para "eliminar" la función logaritmo. $\square$

LECCIÓN 4.2

Series numéricas

Estamos acostumbrados a sumar una cantidad finita de números (dos números, tres, cuatro,...) pero ¿es posible sumar un conjunto infinito de números? La intuición nos puede jugar una mala pasada, haciéndonos pensar que al sumar "infinitos" números se obtendrá "infinito". Y, aunque en algunas ocasiones sea así, también es posible que el resultado de sumar "infinitos" números sea un número real.

Por ejemplo, supongamos que nos colocamos a un metro de distancia a un determinado punto y que nos acercamos a él dando pasos de la siguiente forma: cada paso tiene como longitud exactamente la mitad de la distancia que nos separa del destino. Si fuéramos capaces de dar pasos "tan pequeños", está claro que nunca llegaríamos a nuestro objetivo, es decir, por muchos pasos que demos, como mucho recorreríamos 1 metro. Si pudiésemos dar pasos indefinidamente, la distancia recorrida sería

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

y esta "suma infinita" valdría exactamente 1.

Además de formalizar la noción de suma infinita, en esta lección nos vamos a plantear dos cuestiones. Por un lado, vamos a estudiar condiciones que debe cumplir una sucesión de números para poder afirmar que puede ser sumada; por otra parte, en aquellos casos en los que podamos obtener la suma, estudiaremos si es posible hallar el valor exacto o, en caso contrario, cómo aproximarla.

Empezamos con una sección en la que repasamos algunas propiedades del operador sumatorio, que utilizaremos en el resto del tema.

4.2.1. Operador sumatorio

El operador $\sum$ o *sumatorio* se utiliza para expresar sumas con un cantidad variable de sumandos:

$$\sum_{k=m}^{n} f(k) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

Los sumandos se expresan en función de una variable k que tomará valores consecutivos entre dos números naturales m y n tales que $m \leq n$. Este operador también es frecuente en los lenguajes de programación, en los que toma una sintaxis similar a

$$\texttt{sum}(f(k), k, m, n)$$

Este operador será usado en distintas asignaturas, por lo que es muy conveniente aprender a manejarlo correctamente. Vemos a continuación algunos ejemplos sencillos pero que ayudarán a entender algunas propiedades de este operador.

Ejemplo 4.2.1

1. La variable utilizada como *índice* de cada sumando no influye en el resultado y podremos cambiarla por la letra que deseemos siempre que no interfiera en el resto del problema. Por ejemplo, en los sumatorios siguientes utilizamos índices distintos pero obtenemos el mismo resultado:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$
$$\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$$

2. Obtenemos un ejemplo curioso, pero bastante frecuente, cuando el índice no aparece en la expresión del sumatorio, por ejemplo, $\sum_{k=1}^{10} 2$: esta expresión tiene 10 sumandos, pero ninguno depende de k, todos valen 2, y por lo tanto:

$$\sum_{k=1}^{10} 2 = 2+2+2+2+2+2+2+2+2+2 = 10 \cdot 2$$

3. Un sumatorio no es más que una suma, y por lo tanto le podemos aplicar las propiedades de esta operación. Por ejemplo, la siguiente igualdad no es más que la aplicación de la propiedad asociativa:

$$\sum_{k=1}^{8} k = \left(\sum_{k=1}^{4} k\right) + \left(\sum_{k=5}^{8} k\right)$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8 = (1+2+3+4) \ + \ (5+6+7+8)$$

4. De la misma forma, si la expresión que hay dentro del sumatorio es también una suma, las propiedades de asociatividad y conmutatividad nos permitirán manipulaciones como la mostrada en el siguiente ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{4} (k+1) = \left(\sum_{k=1}^{4} k\right) + \left(\sum_{k=1}^{4} 1\right)$$
$$(1+1)+(2+1)+(3+1)+(4+1) = (1+2+3+4) \ + \ (1+1+1+1)$$

Usaremos la igualdad anterior de derecha a izquierda para unificar la suma de dos sumatorios. En tal caso, tendremos que asegurarnos de que el rango del índice es el mismo en los dos; una forma de conseguir esto, es 'apartando' los sumandos que sea necesario:

$$\left(\sum_{k=1}^{5} k\right) + \left(\sum_{k=2}^{6} k^2\right) = 1 + \left(\sum_{k=2}^{5} k\right) + \left(\sum_{k=2}^{5} k^2\right) + 36 =$$
$$= 1 + \left(\sum_{k=2}^{5} (k+k^2)\right) + 36 = 37 + \sum_{k=2}^{5} (k+k^2)$$

5. Otra propiedad asociada a la suma es la distributividad, que también admite una formulación muy útil en combinación con los sumatorios.

$$\sum_{k=1}^{5} 2k = 2\sum_{k=1}^{5} k$$

$$2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + 2\cdot 4 + 2\cdot 5 = 2\cdot(1+2+3+4+5) \qquad \square$$

Debemos asegurarnos de que todas las transformaciones que realicemos estén respaldadas por las propiedades de la suma y el producto, tal y como hemos hecho en los apartados del ejemplo anterior. En el ejemplo siguiente recogemos algunos errores bastante frecuentes en la manipulación de sumatorios.

Ejemplo 4.2.2

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} k^2 \neq \left(\sum_{k=1}^{5} k\right)^2$. Estas dos expresiones son distintas, ya que, en general, el cuadrado de una suma no es igual a la suma de los cuadrados

$$1^2 + 2^2 + 3^3 + 4^2 + 5^2 \neq (1+2+3+4+5)^2$$

2. Hemos visto anteriormente que gracias a la propiedad distributiva podemos sacar un factor común a todos los sumandos del sumatorio. Sin embargo:

$$\sum_{k=1}^{5} k(k+1) \neq k\left(\sum_{k=1}^{5}(k+1)\right)$$

   La variable k toma un valor distinto en cada sumando y por lo tanto no se puede considerar común a todos ellos. Debemos pensar siempre que la variable que funciona como índice solo tiene sentido dentro del sumatorio. $\square$

Para poder simplificar correctamente expresiones que involucran sumatorios, es conveniente saber modificar su índice. Recordemos que el índice sirve para generar una secuencia de números naturales consecutivos; por ejemplo, en el sumatorio $\displaystyle\sum_{k=1}^{10} f(k)$, el índice k genera la lista 1, 2, 3, ..., 10. Sin embargo, esta misma lista de números la podemos generar de otras formas, tal y como ilustramos en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 4.2.3 Consideremos la siguiente suma, en la cual f puede ser cualquier función.

$$S = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) + f(6) + f(7) + f(8) + f(9) + f(10)$$

Las siguientes expresiones describen esa misma suma:

$$S = \sum_{k=1}^{10} f(k) \;=\; \sum_{k=0}^{9} f(k+1) \;=\; \sum_{k=2}^{11} f(k-1) \;=\; \sum_{k=0}^{9} f(10-k)$$

Partiendo de la primera, obtenemos las siguientes sustituyendo la variable k por otra expresión que también genere la misma secuencia de números naturales consecutivos (creciente o decreciente), modificando adecuadamente el valor inicial y final del índice. □

Veamos un último ejemplo en el que utilizamos las propiedades anteriores para evaluar un sumatorio.

Ejemplo 4.2.4 Vamos a calcular la suma de los n primeros números naturales, es decir, vamos a evaluar la suma

$$S = \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$$

Vamos a hacer la suma para $n = 5$ para entender la idea que queremos utilizar. Si en lugar de sumar una vez la lista de números la sumamos dos veces, tendríamos lo siguiente:

$$S = \frac{1}{2}\big((1+2+3+4+5) + (1+2+3+4+5)\big)$$

En lugar de sumarlos tal y como aparecen en esta expresión, vamos a reordenarlos y agruparlos como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2}\big((1 \quad &+2 \quad +3 \quad +4 \quad +5) \\ +(5 \quad &+4 \quad +3 \quad +2 \quad +1)\big) = \\ = \frac{1}{2}\big((1+5) \quad &+(2+4) \quad +(3+3) \quad +(4+2) \quad +(5+1)\big) = \\ = \frac{1}{2}(6 \quad &+6 \quad +6 \quad +6 \quad +6) = \frac{1}{2}\cdot 5 \cdot 6 \end{aligned}$$

Ahora, vamos a repetir el mismo proceso utilizando sumatorios y sus propiedades.

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

En primer lugar, cambiamos el orden de los sumandos del segundo sumatorio y lo hacemos con el siguiente cambio de índices: $k \to (n+1-k)$.

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right)$$

A continuación, unimos los dos sumatorios usando la propiedad asociativa:

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k)\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+(n+1-k))\right)$$

Tras simplificar la expresión del sumatorio, obtenemos otra independiente del índice cuya suma es igual a la expresión por el número de sumandos.

$$S = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(k+(n+1-k))\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}(n+1)\right) = \frac{1}{2}n(n+1)$$ □

4.2.2. Series numéricas

DEFINICIÓN 4.2.5 *Sea a_n una sucesión de números reales.*

1. *La sucesión* $S_n = a_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *se denomina* serie numérica asociada a a_n *y se denota* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.
2. *El número* a_n *se denomina* término n-ésimo de la serie *y el número* S_n *es* la n-ésima suma parcial de la serie.
3. *Denominaremos* suma de la serie *al límite, si existe, de la sucesión de sumas parciales y escribiremos*
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim S_n$$
Si este límite es un número real, diremos que la serie es convergente *o que la sucesión* a_n *es* sumable, *en caso contrario diremos que la serie es* divergente.
4. *La convergencia o divergencia de una serie se denomina* carácter de la serie.

En la definición anterior hemos considerado que el primer elemento de la suma es a_1; esto lo hacemos por simplicidad, pero en la práctica podremos iniciar la suma en cualquier término de la sucesión. En estos casos, debemos entender que suma parcial S_n es la suma hasta el término a_n. Por otra parte, el sumando inicial repercute en el valor de la suma, pero como veremos más adelante, no influye en el carácter de la serie.

EJEMPLO 4.2.6 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ es convergente. Vamos a calcular su suma utilizando la descomposición en funciones racionales simples que aprendimos en el primer tema:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big) = \lim S_n = \\ &= \lim \Big(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\Big) + \Big(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\Big) + \Big(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\Big) + \cdots + \Big(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\Big) = \\ &= \lim \Big(1 - \frac{1}{n+1}\Big) = 1\end{aligned}$$
□

EJEMPLO 4.2.7 Como hemos visto en el ejemplo anterior, en algunos ocasiones será suficiente con simplificar la expresión de S_n reescribiéndola de forma adecuada. En este tipo de procedimientos, un error muy común es ignorar que S_n es una suma finita y olvidarse de los últimos sumandos:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} &= \sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) - \log n) = \\ &= (\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \ldots\end{aligned}$$

Aparentemente, se simplifican “todos” los sumandos excepto $-\log 2$, por lo que podríamos concluir que esta es la suma de la serie. Ese resultado no es correcto, tal y como podemos comprobar si escribimos correctamente la suma parcial:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty} \log \frac{n+1}{n} &= \sum_{n=2}^{\infty} (\log(n+1) - \log n) = \lim S_n = \\ &= \lim(\cancel{\log 3} - \log 2) + (\cancel{\log 4} - \cancel{\log 3}) + (\cancel{\log 5} - \cancel{\log 4}) + \\ &\qquad\qquad + \cdots + (\log(n+1) - \cancel{\log n}) = \\ &= \lim \Big(-\log 2 + \log(n+1) \Big) = +\infty \end{aligned}$$

□

Ejemplo 4.2.8 Consideremos la sucesión $a_n = \dfrac{1}{2^n}$, $n \geq 0$. La sucesión de sumas parciales de la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} \tag{4.5}$$

Para simplificar esta expresión, vamos a seguir el siguiente proceso. En primer lugar, multiplicamos la sucesión de sumas parciales por $\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} S_n = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \tag{4.6}$$

Vemos que la expresión de la derecha contiene “casi” los mismos sumandos que la expresión de S_n. A continuación, restamos las igualdades (4.5) y (4.6) miembro a miembro:

$$\begin{aligned} S_n - \frac{1}{2} S_n &= 1 + \cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2^n}} - \Big(\cancel{\frac{1}{2}} + \cdots + \cancel{\frac{1}{2^n}} + \frac{1}{2^{n+1}} \Big) \\ \frac{1}{2} S_n &= 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \\ S_n &= 2 - \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \lim S_n = \lim \Big(2 - \frac{1}{2^n} \Big) = 2$$

□

Generalizamos a continuación la serie del ejemplo anterior.

Teorema 4.2.9 (Serie Geométrica) *La serie* $\displaystyle\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ *se dice que es* geométrica *de* razón r, *si* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ *para todo* n *(es decir, el cociente se puede simplificar hasta obtener una constante). Esta serie converge si y solo si* $|r| < 1$ *y en tal caso*

$$\sum_{n=N}^{\infty} a_n = \frac{a_N}{1-r}$$

No es difícil observar que todas las series geométricas se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a r^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \ldots,$$

en donde $a \neq 0$ coincide con el primer sumando.

Para obtener la suma que aparece en el resultado anterior, basta seguir el método que hemos visto en el último ejemplo; si $r \neq 1$

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n & = & a & + & ar & + & ar^2 & + & \dots & + & ar^n & & \\ -rS_n & = & & - & ar & - & ar^2 & - & \dots & - & ar^n & - & ar^{n+1} \\ \hline (1-r)S_n & = & a & & & & & & & & & - & ar^{n+1} \end{array}$$

La igualdad que aparece debajo de la línea se obtiene sumando miembro a miembro las dos anteriores. La misma igualdad se puede obtener trabajando con el operador sumatorio y sus propiedades, tal y como hemos visto en la sección anterior.

$$\begin{aligned} S_n - r\cdot S_n &= \sum_{k=0}^{n} ar^k - r\sum_{k=0}^{n} ar^k = \sum_{k=0}^{n} ar^k - \sum_{k=0}^{n} ar^{k+1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n} ar^k - \sum_{k=1}^{n+1} ar^k = a + \cancel{\sum_{k=1}^{n} ar^k} - \cancel{\sum_{k=1}^{n} ar^k} - ar^{n+1} = a - ar^{n+1} \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$S_n = \frac{a - ar^{n+1}}{1-r},$$

y esta sucesión solo converge si $|r| < 1$ y, en tal caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \lim S_n = \lim \frac{a - ar^{n+1}}{1-r} = \frac{a}{1-r}$$

Ejemplo 4.2.10 Estudiamos las siguientes series geométricas

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n+2}}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{3^{n+2}}{3^{n+3}} = \dfrac{1}{3}$, entonces la serie es geométrica de razón $1/3$ y primer término $1/27$; por tanto, la serie es convergente y su suma es $1/18$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}}{7^n}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{2^{3n+3}7^n}{7^{n+1}2^{3n}} = \dfrac{8}{7}$, entonces la serie es geométrica de razón $8/7$ y en consecuencia divergente a $+\infty$.
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5^{n-1}}$: Como $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{-1}{5}$, entonces la serie es geométrica de razón $-1/5$ y primer término 1; por tanto, la serie es convergente y su suma es $5/6$.

□

Proposición 4.2.11 *Si la sucesión b_n se obtiene a partir de la sucesión a_n añadiendo, eliminando o modificando un conjunto finito de términos, entonces las series asociadas tienen el mismo carácter.*

Esta propiedad es de gran utilidad, pues nos dice que, al igual que ocurre con las sucesiones, cuando estudiamos la convergencia de una serie, podemos prescindir de los primeros términos (cualquier conjunto finito de términos); por ejemplo, las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=5}^{\infty} a_n$ tienen el mismo carácter. Sin embargo, debemos tener en cuenta que, aunque el carácter sea el mismo, la suma de serie será, por lo general, distinta.

Teorema 4.2.12 *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b$*, entonces se verifica que*

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = a + b$*, y*
2. $\sum_{n=1}^{\infty} c \cdot a_n = c \cdot a$*, para todo* $c \in \mathbb{R}$.

Teorema 4.2.13 (Condición Necesaria) *Si una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es convergente, entonces* $\lim a_n = 0$.

La demostración de esta propiedad se basa en la siguiente relación entre el término n-ésimo de la serie y la sucesión de sumas parciales:

$$S_n = S_{n-1} + a_n$$

Si S_n es convergente, S_{n-1} es convergente y tiene el mismo límite; por lo tanto, necesariamente $\lim a_n = 0$.

El resultado anterior se denomina *condición necesaria de convergencia* por que establece que es "necesario" que la sucesión converja a 0 para que sea sumable. Sin embargo, esta condición no es suficiente. Por ejemplo, la sucesión $a_n = \log \frac{n+1}{n}$ no es sumable, tal y como vimos en el ejemplo 4.2.7, y sin embargo

$$\lim \log \frac{n+1}{n} = \log 1 = 0$$

Por esta razón, la condición necesaria se utiliza como método de refutación en el estudio de la convergencia de una serie.

Corolario 4.2.14 *Si* $\lim a_n \neq 0$*, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente.*

Ejemplo 4.2.15 Aplicando la condición necesaria, deducimos la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$, pues $\lim \frac{n}{n+1} = 1 \neq 0$. □

Una familia de series de gran importancia en el estudio de este tema son las conocidas como *series p-armónicas* o *p-series*, es decir, las series de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p},$$

en donde p es cualquier número real positivo. Para $p = 1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ y se denomina simplemente *serie armónica*.

Teorema 4.2.16 (Series p-armónicas) *Si $p > 1$, la serie p-armónica converge y si $p \leq 1$, la serie p-armónica diverge.*

Por lo general, no es sencillo obtener la suma de las series p-armónicas convergentes, y los métodos que permiten sumar algunas de ellas quedan fuera de los objetivos de este curso. Sin embargo, sí veremos más adelante, resultados que nos permiten probar el resultado anterior.

Ejemplo 4.2.17 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$ es divergente. Para demostrarlo, vamos a razonar por *reducción al absurdo*.

Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)$ fuera convergente, entonces, por el teorema 4.2.12, la siguiente serie también lo sería:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n},$$

Sin embargo, esto no es cierto, ya que está en contradicción con el teorema 4.2.16.□

El razonamiento realizado en el ejemplo anterior se puede generalizar fácilmente para demostrar el siguiente resultado

Corolario 4.2.18 *Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ es convergente y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ es divergente, entonces la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ es divergente.*

Terminamos esta sección introduciendo otros tipos de series fácilmente sumables.

Teorema 4.2.19 (Serie Aritmético-Geométrica) *Las series del tipo*

$$\sum_{n=N}^{\infty}(an+b)r^n, \quad a \neq 0,$$

se denominan series aritmético-geométricas y convergen si y solo si $|r| < 1$.

En el caso de que sean convergentes, las series aritmético-geométricas se suman aplicando un proceso similar al utilizado en las series geométricas. Concretamente, repitiendo dos veces el mismo proceso para llegar a una expresión simplificada de S_n.

Ejemplo 4.2.20 La serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+3}{2^n}$ es una serie aritmético geométrica de razón $\frac{1}{2}$ y, por lo tanto, convergente. En este ejemplo, vamos a utilizar las propiedades del operador sumatorio en lugar de los puntos suspensivos. En primer lugar, multiplicamos la sucesión S_n por la razón de la serie aritmético-geométrica.

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{k+3}{2^k}$$
$$\frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{k+3}{2^k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{k+3}{2^{k+1}}$$

A continuación restamos los dos sumatorios, pero sin juntarlos

$$S_n - \frac{1}{2}S_n = \frac{1}{2}S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{2^k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{2^{k+1}}$$

Cambiamos el índice del segundo sumatorio para conseguir que el exponente de 2 dentro de cada sumatorio sea el mismo:

$$\frac{1}{2}S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k+3}{2^k} - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k+2}{2^k}$$

A continuación, apartamos los sumandos necesarios para que los dos sumatorios tengan los mismos extremos y así poder juntarlos:

$$\frac{1}{2}S_n = 3 - \frac{n+3}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k+3}{2^k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{k+2}{2^k}$$

$$\frac{1}{2}S_n = 3 - \frac{n+3}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k+3}{2^k} - \frac{k+2}{2^k}\right)$$

Tras simplificar, podemos despejar S_n, en cuya expresión quedará la suma parcial de una serie geométrica, cuyo límite ya sabemos calcular:

$$\frac{1}{2}S_n = 3 - \frac{n+3}{2^{n+1}} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$S_n = 6 - \frac{n+3}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+3}{2^n} = \lim S_n = 6 - \lim \frac{n+3}{2^n} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 6 - 0 + 2 = 8$$

Obsérvese que en el cálculo del límite hemos utilizado que $\lim \dfrac{n}{2^n} = 0$, tal y como hemos demostrado en el ejemplo 4.1.15 de la página 215. □

Definición 4.2.21 *Se dice que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* hipergeométrica *si* $a_n > 0$ *para todo* n *y*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$$

Teorema 4.2.22 (Serie hipergeométrica) *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *hipergeométrica con* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ *es convergente si y sólo si* $\gamma > \alpha + \beta$.

En el caso de que sean convergentes, las series hipergeométricas se suman aplicando el siguiente proceso: (1) Escribimos por filas la igualdad $a_{k+1}(\alpha k+\gamma) = a_k(\alpha k+\beta)$ para $k = 1$, $k = 2$,…,$k = n$; (2) sumamos todos los miembros derechos y todos los miembros izquierdos; (3) operamos para obtener una expresión de S_n lo más simplificada posible para poder calcular su límite. En el siguiente ejemplo utilizamos el operador sumatorio para representar este proceso.

Ejemplo 4.2.23 La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es hipergeométrica y convergente, ya que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{n}{n+2}$ y $\gamma=2>1+0=\alpha+\beta$. De la primera igualdad deducimos que $(n+2)a_{n+1}-na_n=0$ para todo n y de ahí:

$$\sum_{k=1}^{n}((k+2)a_{k+1}-ka_k)=0$$

A continuación, dividimos el sumatorio por la diferencia y cambiamos el índice para que las sucesiones que aparecen dentro del sumatorio tengan el mismo subíndice.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(k+2)a_{k+1}-\sum_{k=1}^{n}ka_k&=0\\ \sum_{k=2}^{n+1}(k+1)a_k-\sum_{k=1}^{n}ka_k&=0\end{aligned}$$

Ahora, separamos los sumandos necesarios para que los límites de los dos sumatorios coincidan y poder juntarlos otra vez.

$$\begin{aligned}(n+2)a_{n+1}-a_1+\sum_{k=2}^{n}(k+1)a_k-\sum_{k=2}^{n}ka_k&=0\\ (n+2)a_{n+1}-a_1+\sum_{k=2}^{n}((k+1)a_k-ka_k)&=0\\ (n+2)a_{n+1}-a_1+\sum_{k=2}^{n}a_k&=0\end{aligned}$$

Tras simplificar nos ha quedado un sumatorio que coincide "casi" con la suma parcial de la serie; añadimos el sumando que falta y lo restamos fuera de él para poder despejar finalmente la suma parcial.

$$\begin{aligned}(n+2)a_{n+1}-a_1-a_1+\sum_{k=1}^{n}a_k&=0\\ (n+2)a_{n+1}-2a_1+S_n&=0\\ S_n&=2a_1-(n+2)a_{n+1}\\ S_n&=2\frac{1}{2}-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=\lim S_n=\lim\left(1-\frac{n+2}{(n+1)(n+2)}\right)&=1\end{aligned}$$

□

4.2.3. Criterios de convergencia

Estudiar la convergencia de una serie utilizando las sumas parciales no siempre será sencillo y encontrar una expresión para las sumas parciales que permita calcular su límite es, en general, un problema bastante difícil. Por esta razón, el estudio de las series se hará en dos etapas: en primer lugar, se estudiará solamente el carácter de la serie; en segundo lugar, si la serie es convergente, afrontaremos el cálculo de su suma o bien aproximaremos su valor.

En esta sección, vamos a estudiar algunos resultados que establecen condiciones que permiten deducir la convergencia de una serie. Estos resultados se conocen como *criterios de convergencia* y en su aplicación es muy importante comprobar todas las condiciones exigidas.

Aunque en los resultados que vemos en esta sección escribimos series con $n = 1$ como primer sumando, las conclusiones son válidas independientemente de cual sea el primer sumando, tal y como hemos visto anteriormente. Por otra parte, los primeros resultados que veremos son aplicables solamente a series cuyos términos (todos, o a partir de uno dado) son positivos; estas series verifican la siguiente propiedad.

PROPOSICIÓN 4.2.24 *Si a_n es una sucesión de términos positivos, la sucesión de sumas parciales asociada a ella es creciente y en consecuencia, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es o bien convergente o bien divergente a $+\infty$.*

TEOREMA 4.2.25 (CRITERIO DE COMPARACIÓN) *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series tales que $0 \leq a_n \leq b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

1. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ también converge.*

2. *Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge entonces $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ también diverge.*

EJEMPLO 4.2.26 La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$ es convergente ya que

$$\frac{1}{2^n + n} \leq \frac{1}{2^n}$$

y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente (geométrica de razón $\frac{1}{2}$). □

No siempre podremos probar de esta forma que dos series "parecidas" tengan el mismo criterio; por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ es "parecida" a la del ejemplo anterior e intuimos que también será convergente, sin embargo, no podemos utilizar el criterio de comparación. El siguiente resultado, permite hacer la comparación mediante límites.

TEOREMA 4.2.27 (COMP. POR PASO AL LÍMITE) *Sean $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ dos series de términos positivos, tal que $b_n \neq 0$ para todo n. Si $\ell = \lim \frac{a_n}{b_n}$ entonces se verifica:*

1. *Si $\ell > 0$ ambas series tienen el mismo carácter.*

2. *Si* $\ell = 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también converge. Equivalentemente, si* $\ell = 0$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también también es divergente.*

3. *Si* $\ell = +\infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *también converge. Equivalentemente, si* $\ell = +\infty$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *es divergente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *también también es divergente.*

Ejemplo 4.2.28 Veamos varios ejemplos:

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n - n}$ es convergente ya que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ es convergente y
$$\lím \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n-n}} = \lím \left(1 - \frac{n}{2^n}\right) = 1$$

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} n \operatorname{sen} \frac{1}{n^2}$ es divergente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge y
$$\lím \frac{n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}}{1/n} = \lím \frac{\operatorname{sen} \dfrac{1}{n^2}}{1/n^2} = 1$$

3. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log n}$ es divergente pues $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es divergente y
$$\lím \frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\log n}} = \lím \frac{\log n}{n} = 0$$

El último límite está demostrado en el ejemplo 4.1.14 de la página 215. □

El criterio de comparación por paso al límite se utiliza frecuentemente para eliminar expresiones "despreciables" en el término general de una serie, antes de aplicar otro criterio, con el fin de que los cálculo sean más sencillos.

Ejemplo 4.2.29 En el denominador de la expresión $\frac{3n-1}{2^n + 5n + \log n}$ el término $5n + \log n$ es "despreciable" frente a 2^n para valores "grandes" de n. Estas afirmaciones las comprobamos comparando la expresión $\frac{3n-1}{2^n}$ con la original
$$\lím \frac{\dfrac{3n-1}{2^n}}{\dfrac{3n-1}{2^n+5n+\log n}} = \lím \frac{2^n + 5n + \log n}{2^n} = \lím \left(1 + \frac{5n}{2^n} + \frac{\log n}{2^n}\right) = 1$$

Omitimos los detalles del cálculo del último límite, que puede hacerse con la caracterización secuencial y la regla de L'Hôpital. Aplicando el criterio de comparación por paso al límite se deduce que las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n + 5n + \log n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n}$$

tienen el mismo carácter. Dado que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n}$ es aritmético-geométrica de razón $\frac{1}{2}$, es convergente y podemos afirmar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{2^n + 5n + \log n}$ también es convergente.

□

Para buscar series con las que comparar una serie dada, podemos ayudarnos de las equivalencias de infinitésimos: si una sucesión es sumable, entonces es un infinitésimo, y si dos sucesiones son equivalentes, por el criterio de comparación, la series asociadas tienen el mismo carácter. Estas observaciones constituyen la demostración del siguiente resultado.

COROLARIO 4.2.30 *Sean* a_n *y* b_n *dos sucesiones positivas e infinitésimos equivalentes; entonces las series* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*,* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *tienen el mismo carácter.*

Es conveniente tener en cuenta que el criterio de comparación solo permite concluir que dos series tienen el mismo carácter, pero no establece ninguna relación entre las sumas. Por ejemplo, las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$ tienen el mismo carácter,

$$\text{lím} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2+n}} = \text{lím} \frac{n^2+n}{n^2} = 1;$$

sin embargo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = 1$ (ver ejemplos 4.2.6 y 4.2.23) y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, aunque la demostración de esta igualdad requiere métodos que quedan fuera de este curso.

La siguiente propiedad se deduce fácilmente aplicando el criterio de comparación a las sucesiones a_n y $1/n$, y es útil para el cálculo de algunos límites y la suma de algunas series.

COROLARIO 4.2.31 *Sea* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y convergente. Entonces, si existe, el límite* $\text{lím}\, n\, a_n$ *es igual a* 0*.*

La demostración es inmediata usando reducción al absurdo: si el límite existiera pero fuera distinto de cero,

$$0 \neq \text{lím}\, n a_n = \text{lím} \frac{a_n}{1/n},$$

entonces la serie tendría el mismo carácter que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que es divergente.

Vamos a utilizar este resultado en el siguiente ejemplo en el que sumamos una serie hipergeométrica.

Ejemplo 4.2.32 Vamos a sumar la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!}$$

Para ello, vamos a comprobar que es hipergeométrica y aplicaremos el método aprendido anteriormente en el ejemplo 4.2.23 de la página 236. La series es hipergeométrica, ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}(2n-1)2^n n!}{2^{n+1}(n+1)!\cancel{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}} =$$

$$= \frac{(2n-1)\cancel{2^n}\cancel{n!}}{2 \cdot \cancel{2^n}(n+1)\cancel{n!}} = \frac{2n-1}{2n+2} = \frac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma} \qquad (4.7)$$

Ademas, es convergente ya que

$$\gamma = 2 > 1 = 2 - 1 = \alpha + \beta$$

Multiplicando en cruz en la igualdad (4.7), obtenemos $(2n+2)a_{n+1} - (2n-1)a_n = 0$ para todo n y de ahí:

$$\sum_{k=2}^{n} \big((2k+2)a_{k+1} - (2k-1)a_k\big) = 0$$

Separamos el sumatorio por la diferencia y cambiamos el índice para que el termino de la sucesión que estamos sumando, y que aparecen dentro de los sumatorios, tengan el mismo subíndice.

$$\sum_{k=2}^{n}(2k+2)a_{k+1} - \sum_{k=2}^{n}(2k-1)a_k = 0$$
$$\sum_{k=3}^{n+1} 2ka_k - \sum_{k=2}^{n}(2k-1)a_k = 0$$

Sacamos los sumandos necesarios para que los límites de los dos sumatorios coincidan y poder juntarlos otra vez.

$$2(n+1)a_{n+1} + \sum_{k=3}^{n} 2ka_k - \sum_{k=3}^{n}(2k-1)a_k - 3a_2 = 0$$
$$2(n+1)a_{n+1} + \sum_{k=3}^{n} \big(2ka_k - (2k-1)a_k\big) - 3a_2 = 0$$
$$2(n+1)a_{n+1} + \sum_{k=3}^{n} a_k - 3a_2 = 0$$
$$2(n+1)a_{n+1} + S_n - a_2 - 3a_2 = 0$$
$$2(n+1)a_{n+1} + S_n - 4a_2 = 0$$
$$S_n = 4a_2 - 2(n+1)a_{n+1}$$

Dado que la serie es convergente, la sucesión S_n es convergente, y por lo tanto, necesariamente $(n+1)a_{n+1} = \frac{1}{2}(S_n - 4a_2)$ también es convergente; además, por el corolario 4.2.31, $\lim(n+1)a_{n+1} = 0$, lo que nos permite completar el cálculo de la suma de la serie.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} = \lim S_n = \lim \big(4a_2 - 2(n+1)a_{n+1}\big) = 4a_2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-3)}{2^n n!} = 4a_2 = 4\frac{1}{2^2 \cdot 2} = \frac{1}{2} \qquad \square$$

Los criterios que estudiamos en el resto de la sección establecen condiciones sobre el término general para deducir su carácter.

Corolario 4.2.33 (Criterio del cociente) *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos y consideremos el límite* $\ell = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$*; entonces:*

1. *Si* $\ell < 1$ *la serie converge.*
2. *Si* $\ell > 1$ *la serie diverge.*

El caso $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ queda fuera del teorema anterior, ya que a partir de él no podemos deducir nada: $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ y $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ verifican que el límite de la condición vale 1 para ambas series y, sin embargo, la primera es divergente y la segunda es convergente.

Una de las características del criterio del cociente es que también nos da información para estimar errores, ya que es consecuencia del siguiente resultado.

Lema 4.2.34 *Supongamos que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$*. Sea* S_n *su sucesión de sumas parciales y* $N \in \mathbb{N}$*. Si existe* r *tal que* $0 \le \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1$ *para todo* $n \ge N$*, entonces:*

$$S - S_N \le \frac{a_{N+1}}{1-r}$$

Si a_n es positiva a partir de un término, y $\lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es estrictamente menor que 1, existe un término de la sucesión a partir del cual todos estarán acotados entre 0 y un número estrictamente menor que 1, por lo que podremos aplicar el lema anterior. Entonces, para acotar el error cometido al tomar una suma parcial en lugar de la suma exacta, necesitamos determinar los números N y r adecuados. En la mayoría de los casos, será suficiente estudiar la monotonía de la sucesión $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, tal y como vemos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 4.2.35 Aplicamos los resultados anteriores a la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ para demostrar que es convergente y determinar la suma parcial que estima su suma con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim \frac{1}{n+1} = 0$$

Entonces, por el criterio del cociente, la serie es convergente. Además, dado que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{1}{n+1}$ es decreciente, para todo $N \geq 1$ y todo $n \geq N$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{N+1} < 1$$

Entonces, para cada N podemos tomar $r = \dfrac{1}{N+1}$ en el lema 4.2.34; por lo tanto, si S es la suma de la serie, S_n la sucesión de sumas parciales y $N \geq 1$:

$$S - S_N < \frac{a_{N+1}}{1-r} = \frac{1/(N+1)!}{1 - \dfrac{1}{N+1}} = \frac{1}{N \cdot N!}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 6$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{1}{n!} = \frac{1957}{720} \approx 2.718$$

Más adelante, veremos que la suma de esta serie es el número e y el valor aproximado que nos da cualquier calculadora es 2.718281828. □

Ejemplo 4.2.36 Para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ podemos utilizar los mismos resultados:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\dfrac{1}{n2^n}} = \lim \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2}$$

y por el criterio del cociente, la serie es convergente.

Vamos a aproximar su suma con un error menor $\frac{1}{2}10^{-3}$. Para aplicar el lema 4.2.34, analizamos en primer lugar la monotonía de $x_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{n}{2(n+1)}$:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2(n+2)} \cdot \frac{2(n+1)}{n} = \frac{2(n+1)^2}{2n(n+2)} = \frac{2n^2+4n+2}{2n^2+4n} > 1$$

Deducimos entonces que $x_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es creciente; por lo tanto, para cada $n \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} < 1$$

y podemos considerar $r = \frac{1}{2}$ para cada N en el lema 4.2.34. Es decir, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$S - S_N < \frac{a_{N+1}}{1-r} = \frac{\dfrac{1}{(N+1)2^{N+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{(N+1)2^N}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 8$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} \approx \sum_{n=1}^{8} \frac{1}{n2^n} = \frac{148969}{215040} \approx 0.693$$

Más adelante, veremos que la suma de esta serie es $\log 2$ y la aproximación que nos da cualquier calculadora es 0.6931471805. □

Los teoremas vistos hasta ahora son válidos solamente para series de términos positivos. A continuación, vamos a ver dos resultados que permiten estudiar algunas series con términos de signo arbitrario.

Definición 4.2.37 *Decimos que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es* absolutamente convergente *si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente.*

Teorema 4.2.38 *Toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Una serie convergente que no sea absolutamente convergente se dice *condicionalmente convergente.*

Definición 4.2.39 *Una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice* alternada *si para todo* n *se verifica que* $\dfrac{a_n}{a_{n+1}} < 0$*; es decir, su término general es de la forma* $(-1)^n b_n$ *o* $(-1)^{n+1} b_n$*, en donde* $b_n > 0$ *para todo* n*.*

Teorema 4.2.40 (Criterio de Leibniz) *Si* $a_n > 0$*,* $\lim a_n = 0$ *y* a_n *es decreciente, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ *es convergente.*

La condición $\lim a_n = 0$ es necesaria para la convergencia de cualquier serie, el criterio de Leibniz establece que es suficiente que a_n sea decreciente para que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ sea convergente.

Proposición 4.2.41 *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie en las condiciones del criterio de Leibniz,* S_n *su sucesión de sumas parciales y* S *su suma; entonces:*

$$|S_N - S| \leq |a_{N+1}|$$

En la acotación del error tenemos que usar el valor absoluto, ya que en este caso el error puede ser por exceso o por defecto.

Ejemplo 4.2.42 Por el criterio de Leibniz, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ es convergente, ya que $\dfrac{1}{n}$ es decreciente y convergente a 0. Vamos a estimar su suma con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

Por la proposición anterior, si S es la suma de la serie y S_n la sucesión de sumas parciales:

$$|S_N - S| \le \frac{1}{N+1}$$

Si queremos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta considerar $N = 2000$. Más adelante, calcularemos la suma exacta de esta serie y demostraremos que $S = \log 2$. Si utilizamos un ordenador para calcular la suma parcial, obtendremos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} \approx \sum_{n=1}^{2000}\frac{(-1)^{n+1}}{n} \approx 0.693$$

mientras que el valor aproximado de $\log 2$ que nos da cualquier calculadora es 0.6931471805. □

4.2.4. Resumen de técnicas

En esta sección vamos a presentar algunas estrategias para abordar el estudio de la convergencia de series numéricas. El siguiente esquema resume los criterios que hemos introducido en el orden más adecuado para su aplicación.

1. Comprobar si es una serie conocida: geométrica, armónica, cociente de polinomios, ...
2. Condición necesaria. Si el límite es fácil de calcular, esta es la primera comprobación que debe hacerse.
3. Si la serie es de términos positivos, probaremos con el criterio del cociente.
4. Si la serie es de términos positivos y el criterio del cociente no es concluyentes, intentaremos buscar una serie conocida con la que poder compararla. La equivalencia de infinitésimos y de infinitos nos ayudará a buscar estas series.
5. Si la serie es alternada, estudiaremos en primer lugar la convergencia absoluta, utilizando los puntos anteriores. Si la serie no es absolutamente convergente intentaremos aplicar el criterio de Leibniz.

El cociente a_{n+1}/a_n. Como ya se habrá comprobado, el estudio del cociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ es de gran utilidad al trabajar con series.

1. Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r \in \mathbb{R}$ (no depende de n) entonces la serie es una serie geométrica de razón r.

2. Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{\alpha n + \beta}{\alpha n + \gamma}$ con $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, la serie es hipergeométrica.

3. Si $a_n > 0$ y $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es creciente y por tanto su límite no puede ser 0: *la serie es divergente.*

4. Si $a_n > 0$ y $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ para todo $n > N$, la sucesión a_n es decreciente, lo que permitirá aplicar algunos resultados, como el criterio de Leibniz.

Sucesiones decrecientes. Algunos resultados, como el criterio de Leibniz incluyen, entre sus condiciones, el decrecimiento de una sucesión. Repasamos a continuación los distintos métodos que hemos visto y utilizado para demostrar que una sucesión es decreciente:

1. Si $a_n - a_{n+1} > 0$, entonces a_n es decreciente.

2. Si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, entonces a_n es decreciente.

3. Si $f\colon [N, +\infty) \to \mathbb{R}$ es una función decreciente tal que $f(n) = a_n$ para todo $n \geq N$, entonces a_n es una sucesión decreciente a partir de N (para determinar si una función es decreciente podemos utilizar su derivada).

4. Por último, podemos utilizar las propiedades algebraicas de la relación de orden para deducir algunas propiedades sobre monotonía de sucesiones y funciones como por ejemplo:

   a) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f + g$ creciente.

   b) Si f y g son funciones crecientes y positivas, entonces $f \cdot g$ es creciente.

   c) f es creciente si y solo si $-f$ es decreciente.

   d) Si f es positiva, entonces f es creciente si y solo si $1/f$ es decreciente.

   e) Si f y g son funciones crecientes, entonces $f \circ g$ es creciente.

   f) Si f es una función creciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(d_n)$ es una sucesión decreciente.

   g) Si h es una función decreciente y d_n es una sucesión decreciente, entonces $f(d_n)$ es una sucesión creciente.

4.2.5. Series de potencias

Algunas de las series que hemos estudiado hasta ahora contenían parámetros en su término general, incluso hemos podido sumar alguna de ellas dando su suma en función de ese parámetro:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Como hemos podido comprobar, no siempre es asequible sumar una serie, pero aún así podemos estar interesados en estudiar las propiedades de la serie e incluso la relación de dependencia de la serie respecto de ese parámetro.

En esta sección y en la siguiente, vamos a estudiar funciones definidas usando series cuyo término general depende de la variable de la función: las series de potencias.

DEFINICIÓN 4.2.43 *Una* serie de potencias *es una función definida por una expresión de la forma:*

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \qquad a, a_n \in \mathbb{R}$$

La constante a se denomina centro *de la serie y la sucesión de* coeficientes*, a_n no puede incluir la variable x.*

EJEMPLO 4.2.44

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ es una serie de potencias centrada en 1; en este caso, $a_n = \dfrac{1}{n}$.
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{sen}^n x$ no es una serie de potencias.
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^{2n}}{n^3}$ es una serie de potencias centrada en 3. □

TEOREMA 4.2.45 *Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n$, existe un intervalo I tal que:*

- *La serie converge si y solo si $x \in I$*
- *O bien $I = \mathbb{R}$, o bien $(a-R, a+R) \subset I \subset [a-R, a+R]$, para algún $R \in \mathbb{R}$. En el segundo caso, el número R se denomina* radio de convergencia *de la serie.*

El intervalo I se denomina *campo de convergencia* de la serie y es el dominio de la función determinada por la serie de potencias. Por las características de la expresión de una serie de potencias, bastará con aplicar el criterio del cociente para hallar el radio de convergencia. Sin embargo, necesitaremos trabajar algo más para estudiar la convergencia de la serie en los dos extremos del campo.

EJEMPLO 4.2.46 Para hallar el campo de convergencia de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{\log n}$, aplicamos el criterio del cociente a la sucesión de valores absolutos:

$$\text{lím} \frac{|x-1|^{n+1}}{\log(n+1)} \cdot \frac{\log n}{|x-1|^n} = |x-1| \,\text{lím} \frac{\log n}{\log(n+1)} = |x-1|$$

Por lo tanto, la serie converge si $|x-1| < 1$. Por el teorema anterior, solo tenemos que analizar la convergencia de la serie para $|x-1| = 1$, es decir, para $x = 0$ y $x = 2$.

Para $x = 0$, la serie resultante es $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$ cuya convergencia podemos deducir con el criterio de Leibniz. Para $x = 2$, la serie resultante es $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\log n}$, cuya divergencia podemos deducir con el criterio de comparación (ver apartado 3 del ejemplo 4.2.28, en la página 238). Por lo tanto, el campo de convergencia de la serie es $[0, 2)$. □

El siguiente resultado establece la continuidad y derivabilidad de las funciones definidas por series de potencias y extiende la propiedades algebraicas de la derivación e integración a series.

TEOREMA 4.2.47 *Para la serie de potencias* $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n$ *se verifica que:*

1. *(Teorema de Abel) la función S es continua en su campo de convergencia.*
2. *S es una función derivable en el interior del campo de convergencia y su derivada se obtiene "derivando término a término la serie":*
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$
Además, el radio de convergencia de la derivada coincide con el radio de S.
3. *Una primitiva de la función S se obtiene "integrando término a término la serie":*
$$\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n\right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1}$$
Además, el radio de convergencia de la primitiva coincide con el radio de S.

En los dos últimos puntos del teorema anterior se afirma la coincidencia de los "radios" de convergencia, pero no de los "campos" de convergencia, es decir, la convergencia en los extremos del campo puede variar al derivar o integrar.

EJEMPLO 4.2.48 El campo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ es $[-1, 1]$, sin embargo, la serie de las derivadas, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$, converge en $x = -1$ pero no converge en $x = 1$ y por lo tanto su campo de convergencia es $[-1, 1)$. □

Las propiedades de derivación e integración de series de potencias constituyen una herramienta fundamental para sumar series, tal y como vemos en el ejemplo siguiente.

EJEMPLO 4.2.49 En la sección anterior hemos probado que:
$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

Aplicando el apartado 3 del teorema 4.2.47, obtenemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log|1-x| + C = -\log(1-x) + C, \qquad \text{si } |x| < 1.$$

Evaluando ambas expresiones en $x = 0$, deducimos que $C = 0$. Además, para $x = -1$, la serie converge (criterio de Leibniz) y por el Teorema de Abel (Teorema 4.2.47(1)), la igualdad también se verifica en ese punto. Por lo tanto:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x), \qquad \text{si } -1 \le x < 1. \qquad \square$$

4.2.6. Series de Taylor

Las funciones expresadas mediante series de potencias se comportan esencialmente como polinomios, por esta razón, nos planteamos en esta sección expresar cualquier función como serie de potencias. Vamos a ver que, en particular, todas las funciones elementales pueden representarse de esta forma.

Aunque en algunos casos, el método seguido en el ejemplo 4.2.49 permitirá expresar una función como series de potencias, en la mayoría de los casos necesitaremos construirla a partir de su polinomio de Taylor. Recordemos que el polinomio de Taylor de orden n de una función f en el punto x_0 es un polinomio de grado menor o igual que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f. Su expresión análitica es:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots$$
$$\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{n}\frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}(x-x_0)^i$$

Aunque tiene sentido determinar el polinomio de Taylor en cualquier punto, en la práctica solo es interesante en aquellos puntos para los cuales es posible hallar el valor de sus derivadas sucesivas de manera exacta y poder obtener así polinomios cuyos coeficientes sean números racionales. En la sección 4.2.7 veremos la lista completa de los desarrollos de Taylor de todas las funciones elementales en el punto más adecuado.

El primer resultado fundamental para los objetivos de este tema caracteriza los polinomios de Taylor de una función como su mejor aproximación polinómica.

TEOREMA 4.2.50 *Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0. Entonces, T_n es el único polinomio de grado menor o igual a n tal que y:*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Es decir, el polinomio T_n es la “mejor aproximación”, en un entorno de x_0, por polinomios de grado menor o igual que n. Por ejemplo, en las figuras de la página 61 podemos ver que los polinomios de Taylor de la función exponencial “se parecen” cada vez más a esta función según aumentamos el grado del polinomio, y que el intervalo en el que más se parecen es cada vez más amplio. Lo mismo observamos en las páginas 254 y 256 para las funciones seno y arcotangente respectivamente.

Por otra parte, la posibilidad de aproximar el valor de una expresión matemática, solo es útil si podemos controlar el error que se comete. El teorema siguiente nos da un método para hacerlo cuando usamos polinomios de Taylor.

TEOREMA 4.2.51 (DE LAGRANGE) *Sea f una función definida en un entorno abierto de x_0 y supongamos que f es $(n+1)$-veces derivable en este entorno. Sea T_n el polinomio de Taylor de orden n de f en x_0 y $E_n(x) = f(x) - T_n(x)$. Entonces, para cada $x \neq x_0$ existe un número c (que depende de x y de n) comprendido estrictamente entre x y x_0 y tal que:*

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

La fórmula del resto dada en este teorema se conoce como *fórmula de Lagrange.* Aunque no es la única posible, sí es la más utilizada por su simplicidad. La expresión E_n puede ser negativa, sin embargo, al trabajar con errores, no distinguimos entre errores por exceso y por defecto, y por eso entendemos que el error es su valor absoluto: $\varepsilon = |E_n|$.

EJEMPLO 4.2.52 Para aproximar el número ‘e’ con un tres decimales correctos, debemos evaluar la función exponencial en el punto $x = 1$ con un error $\varepsilon < \frac{1}{2}10^{-3}$. Si utilizamos el polinomio de Taylor de orden n en 0 de la función exponencial que calculamos en el primer tema (ver sección 4.2.7), cometeremos el siguiente error:

$$\varepsilon = \left| \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} 1^{n+1} \right| = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}, \quad c \in (0,1)$$

Dado que no conocemos el valor de c (y no podemos, ni pretenderemos calcularlo), no podemos conocer el error exacto. Por esta razón, lo que hacemos es “estimar” dicho error en función de n, sustituyendo el valor de c, o las subexpresiones en dónde aparece, por valores mayores pero cercanos. En este caso, $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^1 = \mathrm{e} < 3$ y por lo tanto:

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

Si queremos que el error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, basta con encontrar el primer número natural n tal que $\dfrac{3}{(n+1)!} < \frac{1}{2}10^{-3}$, es decir, tal que $(n+1)! > 6000$. Con $n = 7$ lo conseguimos y por lo tanto:

$$\mathrm{e} \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} = \frac{685}{252} \approx 2.718$$

Solo podemos estar seguros de los tres primeros decimales, aunque podemos comprobar que los cuatro primeros decimales coinciden con los que nos da cualquier calculadora. □

No es difícil observar que los polinomios de Taylor no son más que la sucesión de sumas parciales de la serie asociada a la sucesión $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$; la correspondiente serie se denomina *serie de Taylor* de la función f.

DEFINICIÓN 4.2.53 *Dada una función f infinitamente derivable en un intervalo abierto I, denominamos* serie de Taylor de f en $x_0 \in I$ *a la serie:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad x \in I$$

Decimos que la serie representa a f en x *si converge a $f(x)$, es decir:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x)$$

Evidentemente, la serie de Taylor para x_0 representa a f en x_0 pero puede no hacerlo en otros puntos. La representación de la serie en otros puntos está caracterizada por la convergencia a 0 de la expresión del resto.

TEOREMA 4.2.54 *La serie de Taylor de f en x_0 representa a f en x si y solo si:*

$$\text{lím}\, E_n(x) = \text{lím}\, \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = 0$$

EJEMPLO 4.2.55 La serie de Taylor de la función exponencial la representa en todo su dominio, $\mathbb{R}$:

$$\text{lím}\, E_n(x) = \text{lím}\, \frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Para comprobar que este límite es 0, podemos trabajar más fácilmente con su valor absoluto. Si $x < 0$, entonces $\mathrm{e}^c < 1$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}|x|^{n+1} < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Si $x > 0$, $\mathrm{e}^c < \mathrm{e}^x$ y por lo tanto

$$\frac{\mathrm{e}^c}{(n+1)!}x^{n+1} < \mathrm{e}^x \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Para demostrar los dos límites anteriores, basta tener en cuenta la condición necesaria de convergencia de series aplicada a las series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{(n+1)!}$, que son convergentes para cada $a > 0$; esto, a su vez, lo demostramos usando el criterio del cociente. □

EJEMPLO 4.2.56 A partir de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$ podemos sumar todas las series del tipo $\sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{P(n)}{(n+q)!}$, en donde P es un polinomio de grado p y $q \in \mathbb{Z}$; el criterio del cociente permite demostrar que todas ellas son convergentes y el método que presentamos en el ejemplo siguiente permite calcular su suma. Por ejemplo, vamos a sumar la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!}$, y para ello, vamos a expresar el polinomio del numerador de la siguiente forma

$$n^3 = A(n+1)n(n-1) + B(n+1)n + C(n+1) + D$$

Cada sumando, está formado por productos de expresiones consecutivas y todas empezando por $n+1$, que es la expresión cuyo factorial aparece en el denominador del término general de la serie; esto permitirá simplificar cada sumando con el denominador. Esta expresión se puede obtener para cualquier polinomio $P(n)$ y cualquier monomio $n+\alpha$.

Eliminando los paréntesis y agrupando los términos, podemos hallar los valores de los parámetros A, B, C y D usando identificación de coeficientes.

$$\begin{aligned} n^3 = A(n+1)n(n-1) + B(n+1)n + C(n+1) + D =& \\ = An^3 + Bn^2 + (B-A+C)n + (C+D),& \end{aligned}$$

Por lo tanto, $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -1$ y de ahí:

$$\frac{n^3}{(n+1)!} = \frac{(n+1)n(n-1) + (n+1) - 1}{(n+1)!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

Obsérvese que la simplificación en el primer sumando solo es válida para $n \geq 2$, aunque la serie propuesta se suma desde $n = 1$; para evitar este problema, solo tenemos que separar ese primer sumando antes de aplicar la igualdad anterior.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} \right) \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{2} + \mathrm{e} + (\mathrm{e} - 1 - 1) - (\mathrm{e} - 1 - 1 - \frac{1}{2}) = \mathrm{e} + 1 \end{aligned}$$

En la cuarta igualdad hemos cambiado los índices para que sea más fácil ver que los sumatorios obtenidos se corresponden con la serie del número e salvo por los primeros sumandos, que debemos restarle. □

4.2.7. Funciones elementales

En esta sección, vamos a ver los desarrollos de Taylor de todas las funciones elementales y las correspondientes expresiones del resto de Lagrange. Debemos tener en cuenta todas estas series para estudiar la convergencia o sumar series numéricas.

Función Exponencial.

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{e}^{c_n}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (c_n \text{ entre } 0 \text{ y } x)$$

En el ejemplo 1.4.20 (página 60), calculamos los polinomio de Taylor de la función exponencial y en el ejemplo 4.2.55 hemos deducido que la serie de Taylor representa a la función exponencial en todo su dominio:

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

Función Logaritmo Neperiano. Su dominio es el intervalo $(0, \infty)$ y hallamos su desarrollo en $x_0 = 1$:

$$\log x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n + \frac{(-1)^n}{c_n^{n+1}(n+1)}(x-1)^{n+1}$$

Estando c_n entre 1 y x. En el ejemplo 4.2.49 (página 247), hicimos los cálculos necesarios para establecer la convergencia de esta serie; concretamente, obtuvimos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1} = -\log(1-x), \qquad x \in [-1, 1),$$

y por lo tanto,

$$\log x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(1-x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \qquad x \in (0, 2]$$

Alternativamente, esta serie se puede escribir como:

$$\log(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} \qquad x \in (-1, 1]$$

Ejemplo 4.2.57 Vamos a usar la serie anterior para aproximar $\log 3$ con un error menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$. El desarrollo de Taylor de la función logaritmo permite evaluar $\log a$ si $a \in (0, 2]$, por lo que no podemos considerar $a = 3$; sin embargo, teniendo en cuenta las propiedades del logaritmo, tenemos que

$$\log 3 = -\log\frac{1}{3}$$

y $a = \frac{1}{3}$ sí está dentro del campo de convergencia de la serie,

$$\log 3 = -\log\frac{1}{3} = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(\frac{1}{3}-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{(-2)^n}{3^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n3^n}$$

Para decidir la suma parcial necesaria para obtener un determinado error, podemos utilizar, en principio, dos métodos.

- Utilizando la expresión del resto de Lagrange, el error sería:

  $$\varepsilon = \left|\frac{(2/3)^{n+1}}{c^{n+1}(n+1)}\right|,$$

  en donde $\frac{1}{3} < c < 1$. Por lo tanto, $\frac{1}{c} < 3$ y de ahí deducimos que:

  $$\varepsilon = \left|\frac{(2/3)^{n+1}}{c^{n+1}(n+1)}\right| < \frac{(2/3)^{n+1}3^{n+1}}{n+1} = \frac{2^{n+1}}{n+1}$$

  La expresión de la derecha es creciente en n, por lo que no es posible hacerla tan pequeña como queramos. Por lo tanto, no podemos usar el resto de Lagrange para determinar la suma parcial adecuada. Esto ocurrirá siempre que evaluemos la serie del logaritmo en un número entre 0 y $\frac{1}{2}$, por lo que este método solo lo podremos utilizar para calcular $\log a$ si $\frac{1}{2} < a < 2$.

- Podemos utilizar la proposición 4.2.34 (página 241), dado que el criterio del cociente permite concluir la convergencia de la serie. En este caso

  $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)3^{n+1}}\frac{n3^n}{2^n} = \frac{2n}{3(n+1)}$$

  es creciente y por lo tanto $\dfrac{2n}{3(n+1)} \leq \text{lím}\,\dfrac{2n}{3(n+1)} = \dfrac{2}{3}$ para todo n, por lo que, para cada N:

  $$\text{Error} = \log 3 - S_N < \frac{\frac{2^{N+1}}{(N+1)3^{N+1}}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{2^{N+1}}{(N+1)3^N}$$

  Por lo tanto, si $N \geq 14$ conseguimos que este error sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$.

  $$\log 3 \approx \sum_{n=1}^{14}\frac{2^n}{n3^n} = \frac{26289603908}{23938759845} \approx 1.098202 \qquad \square$$

Función Seno.

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{n+1}(\operatorname{sen} c)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. La correspondiente serie de Taylor representa a la función en todo su dominio, $\mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

En la figura de la página 254, podemos ver las gráficas de la función seno y de algunos de sus polinomios de Taylor. Vemos que, igual que ocurre con la función exponencial, la convergencia de la serie es "muy rápida", es decir, con pocos sumandos conseguimos unas aproximaciones muy buenas en entornos de 0 bastante amplios.

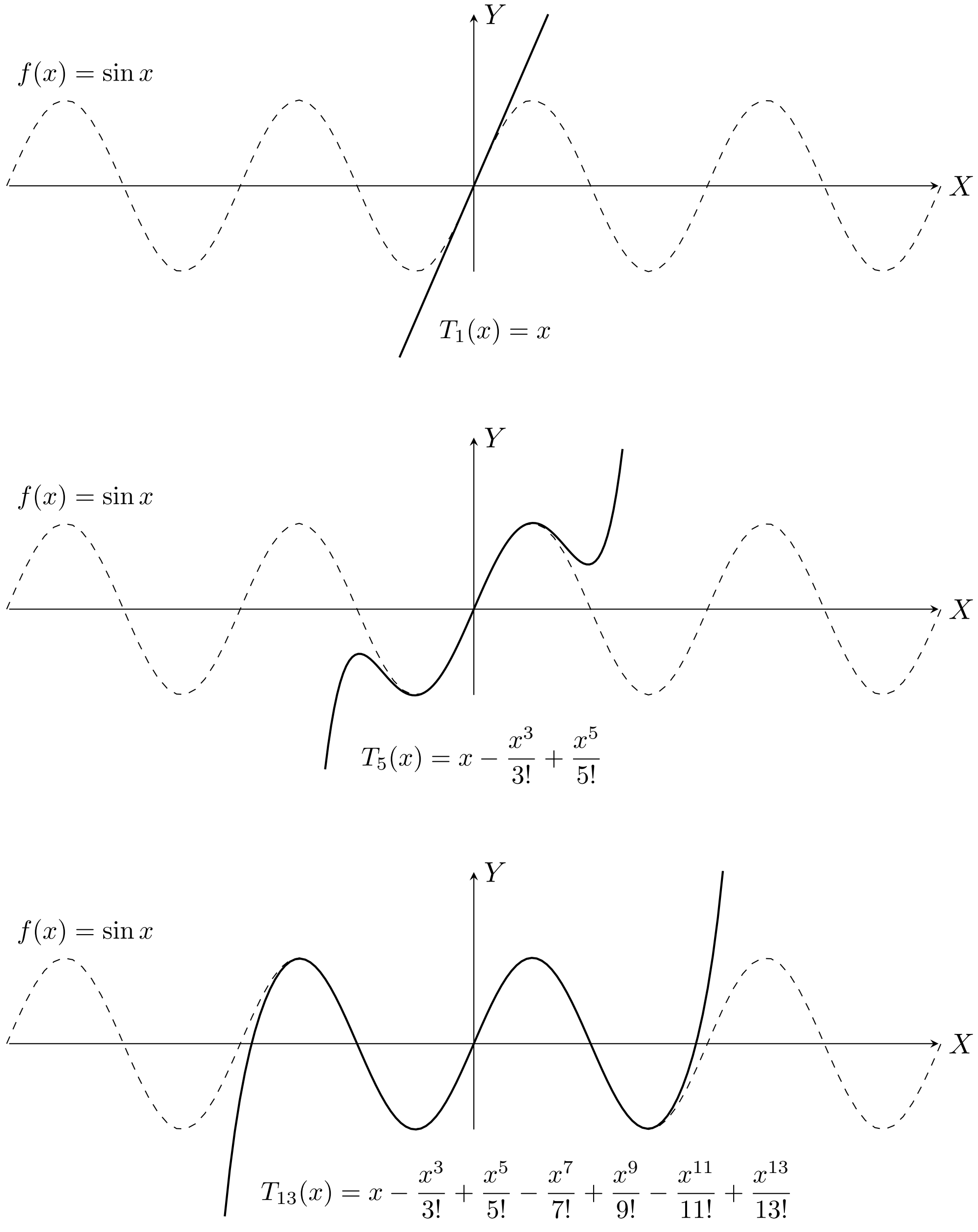


Figura 4.3: Función seno y algunos polinomios de Taylor.

Función Coseno.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} (\operatorname{sen} c) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

siendo c un número entre 0 y x. Además, la serie de Taylor representa a la función coseno en todo su dominio:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Función Arco–tangente. Recordemos que el dominio de esta función es $\mathbb{R}$ y su codominio es el intervalo $[{}^{-\pi}\!/_2, {}^{\pi}\!/_2]$. Nuevamente, obtenemos la serie de Taylor a partir de su derivada:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctg} x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad |x| < 1$$

Integrando y deduciendo la convergencia en los extremos con el criterio de Leibniz, obtenemos:

$$\operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x| \leq 1$$

Para evaluar la función arcotangente fuera del intervalo $[-1, 1]$, podemos utilizar la igualdad

$$\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

Ejemplo 4.2.58 Podemos usar la serie de Taylor de la función arcotangente para aproximar π, ya que $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{4}) = 1$:

$$\pi = 4 \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{2n+1}$$

La serie es alternada, por lo que el corolario del criterio de Leibniz nos ayuda a estimar el error dado por las sumas parciales. Sin embargo, este método no es muy bueno, ya que nos hacen falta muchos sumandos para conseguir errores pequeños. La razón es que estamos evaluando la serie en el extremo del campo de convergencia. □

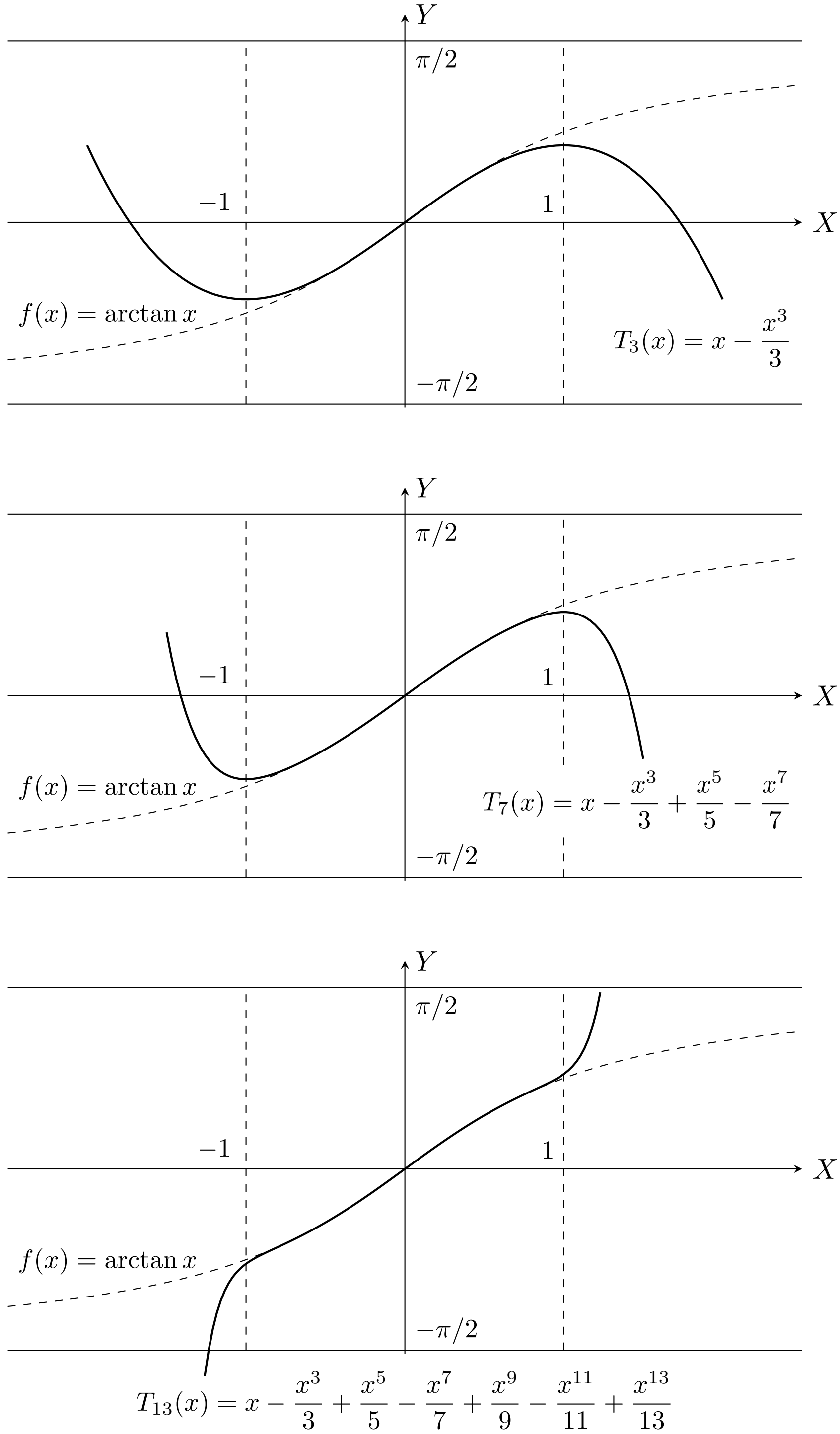


Figura 4.4: Función arcotangente y algunos polinomios de Taylor.

Relación de ejercicios 4.1

1. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, \qquad b_n = \frac{n}{n+1}, \qquad c_n = \frac{2^n}{n}, \qquad d_n = \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

2. Calcule los siguientes límites

$$a)\ \lim \frac{n+3}{n^3+4} \qquad b)\ \lim \frac{n+3n^3}{n^3+4} \qquad c)\ \lim \frac{3-n^5}{n^3+4}$$

   Deduzca la regla que determina el límite del cociente de dos polinomios.

3. Calcule los siguientes límites:

$$a)\ \lim \left(\frac{n+2}{n+4}\right)^{5-n} \qquad b)\ \lim \left(n - \sqrt[4]{n^3(n-1)}\,\right)$$

4. *a*) Calcule el límite $\lim \dfrac{\log(n^2+1)}{\log n}$.

   b) Demuestre que si $p(n)$ es un polinomio de grado k, entonces $\log p(n)$ y $k \log n$ son infinitos equivalentes.

   c) Utilice la equivalencia del apartado anterior para calcular el límite

$$\lim \frac{\log(n^5-7)}{5\log(3n-2)}$$

5. Consideremos la sucesión $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$

   a) Calcule los primeros términos de las sucesiones y deduzca "intuitivamente" las características de las sucesiones (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

6. Consideremos la sucesión $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = \sqrt{1+a_{n-1}} \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$

   a) Determine los 5 primeros términos de la sucesión.

   b) Demuestre por inducción que la sucesión es decreciente.

   c) Demuestre por inducción que $1 \leq a_n \leq 3$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

d) ¿Podemos afirmar que la sucesión es convergente? En tal caso, calcule su límite.

7. *a*) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$

   b) Demuestre por inducción sobre $m \in \mathbb{N}$ que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^m}{\mathrm{e}^x} = 0$

   c) Deduzca que, si $p(x)$ un polinomio, entonces

$$\lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{\mathrm{e}^x} = 0, \qquad \lim \frac{p(n)}{\mathrm{e}^n} = 0$$

Relación de ejercicios 4.2

1. Utilice el símbolo $\sum$ para expresar las siguientes sumas. Tenga en cuenta que en los últimos apartados, se indica cual debe ser el primer valor del índice.

   a) $\dfrac{6}{2-1}+\dfrac{8}{3-1}+\dfrac{10}{4-1}+\cdots+\dfrac{22}{10-1}$

   b) $1^{10}+2^9+3^8+\cdots+10^1$

   c) $1+3+5+\cdots+(2n-1)=\sum\limits_{k=1}$

   d) $\dfrac{n}{n+1}+\dfrac{n}{n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n+n}=\sum\limits_{k=3}$

2. Sume las siguientes series simplificando la sucesión de sumas parciales.

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n(n^2-1)}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$

3. Utilice las propiedades elementales para estudiar la convergencia de las siguientes series y obtenga la suma de las convergentes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(5\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{3n}{5-2n}\right)$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\frac{3^{2n}}{9^{2n-1}}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{n}$

4. Determine cuáles de las siguientes series son aritmético-geométricas y sume las que sean convergentes siguiendo el método descrito en ejemplo 4.2.20 de la página 234.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(2n-1)\mathrm{e}^n$

5. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n}$ partiendo del mismo procedimiento usado para las series aritmético-geométricas.

6. Determine cuáles de las siguientes series son hipergeométricas y sume las que sean convergentes utilizando el método descrito en el ejemplo 4.2.23 de la página 236.

   a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

7. Estudie el carácter de las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(2n+1)^n}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{sen}\frac{1}{n}$ *e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\log n}$ *f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\log\frac{2n}{n-1}$

8. Estudie el carácter de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^a}{(3n)!}$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$.

9. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n n!}$ es convergente y encuentre la suma parcial que aproxima su suma con un error menor que 10^{-3}.

10. Demuestre que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \log n}{n}$ es convergente y encuentre la suma parcial que aproxima su suma con un error menor que 10^{-3}.

11. El *Criterio de condensación* establece:

    Si a_n es una sucesión decreciente de términos positivos, entonces las series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ tienen el mismo carácter.

    Si es posible, utilice el criterio de condensación para determinar el carácter de las series

    a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, *b)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n}$, *c)* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log n}{n}$

Relación de ejercicios 4.3

1. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x-5)^n$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n!}$

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^2}(x-1)^n$ *e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{n^n}(x-1)^n$ *f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$

2. Obtenga la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2}{2^{n+1}}$ usando el siguiente proceso:

   a) Sume la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$ usando las propiedades de derivación y las propiedades algebraicas de las series para reducirla a una serie más simple.

   b) Evalúe la serie del apartado anterior en un valor de x adecuado para poder sumar la serie propuesta.

3. Sume las siguientes series numéricas

   a) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n2^n}$, *b*) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$

4. Determine la serie de Taylor de la función $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)^2}$ partiendo de la derivada de $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. ¿Para qué valores de x la serie de Taylor representa a $f(x)$?

5. Considere la función $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-x}$. Utilice el polinomio de Taylor de la función exponencial, su expresión del resto de Lagrange y las propiedades algebraicas para obtener el polinomio de Taylor de f y una expresión de su resto. Utilícelo para hallar $f(1/4)$ con un error menor que 10^{-4}.

6. Calcule $\sqrt{\mathrm{e}}$ con un error menor que 10^{-3}.

7. Calcule $\log \dfrac{6}{5}$ con un error menor que 10^{-3}.

8. Siguiendo el método del ejemplo 4.2.56 (página 251), sume la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-2}{n!}$.

Relación de ejercicios 4.4

1. Consideremos las siguientes sucesiones:

$$a_n = \frac{-3n+5}{n}, \qquad b_n = (-3)^n, \qquad c_n = \frac{n^2-3n}{n!}, \qquad \mathrm{d}_n = \frac{1}{\sqrt{n+4}}$$

   Para cada una de ellas, calcule los primeros términos, analice intuitivamente sus propiedades (monotonía, acotación y convergencia) y finalmente estúdielas formalmente.

2. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} - 3 \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

3. Consideramos la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$\begin{cases} b_1 = 3 \\ b_n = b_{n-1} + n \quad \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   a) Calcule los diez primeros términos de la sucesión y analice intuitivamente sus características (monotonía, acotación y convergencia).

   b) Estudie formalmente las propiedades de monotonía, acotación y convergencia.

   c) Deduzca el término general de la sucesión.

4. Justifique que las siguientes sucesiones son convergentes y calcule sus límites

$$\begin{cases} c_1 = \sqrt{2} \\ c_n = 2\sqrt{c_{n-1}} \end{cases} \qquad \begin{cases} d_1 = a, \ 0 \le a \le \frac{1}{4} \\ d_n = a + (d_{n-1})^2 \end{cases}$$

5. Resuelva los siguientes límites:

$$a)\ \lim \left(n - \sqrt{(n+a)(n+b)}\right) \qquad b)\ \lim n^2 \left(\sqrt[n]{a} - \sqrt[n-1]{a}\right)$$

6. Utilice la caracterización secuencial para calcular los siguientes límites:

$$a)\ \lim \sqrt[n]{n^2+n}, \qquad b)\ \lim \frac{(\log n)^2}{n}$$

7. Demuestre que para todo $\alpha > 1$, las sucesiones $(n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $\alpha n^{\alpha-1}$ son infinitos equivalentes.

8. Calcule la suma de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n+1)}{n(n+1)}$ simplificando la sucesión de sumas parciales.

9. Estudie el carácter y sume si es posible las siguientes series:

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n+4^n}{5^n}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}}{3^n}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{5^n}$

10. Sume la serie $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2+4+8+\cdots+2^n}{3^n}$

11. Sume las siguientes series aritmético-geométricas:

    a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{10^n}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1-n}{5^n}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n-2}{2^n}$

12. Demuestre que la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots(3n-5)}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n-4)}$ es hipergeométrica y súmela si es posible.

13. El *Criterio del logaritmo* establece:

    Sea $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ *una serie de términos positivos y*

    $$\ell = \lim \frac{\log\frac{1}{a_n}}{\log n},$$

    entonces: Si $\ell < 1$ *la serie diverge y si* $\ell > 1$ *la serie converge.*

    a) Utilice el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de las series p-armónicas.

    b) Si es posible, aplique el criterio del logaritmo para estudiar la convergencia de las siguientes series:

    a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty}n$ *d*) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n}$

14. Aplique infinitos equivalentes para encontrar series p-armónicas con el mismo carácter que las siguientes y deduzca su carácter:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5n+8}{n-2} \qquad b)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4n^2+5n-3}{2-3n^5}$$

15. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2-1}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n!} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{(3n+2)\cdot n^{4/3}} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n!}\right) \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$$

$$g)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$$

16. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}^3 n}{n^4}, \quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\cos^2 n}{n^3}, \quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4n^2}\right), \quad d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos^2\frac{\pi n}{3}$$

17. *a*) Calcule el límite $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\log x)^2}{x}$

b) Demuestre por inducción sobre $k\in\mathbb{N}$ que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\log x)^k}{x}=0$

c) Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^k}$ en función de $k\in\mathbb{N}$

d) Determine el carácter de $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^n}$

18. Estudie el carácter de las siguientes series:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1} \qquad c)\ \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\log n}$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n} \qquad f)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

19. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n} \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{1+2n}}x^n$$

$$d)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n \qquad e)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(x+2)^n \qquad f)\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-\sqrt{n}}$$

20. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^n$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n+1}x^n$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^3}{3^n}(x+3)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^n(x-1)^n$ *e*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{n^n}$ *f*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{5^n}(x-2)^n$

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{(n+1)!}(x-2)^n$

21. Halle los campos de convergencia de las series de potencias siguientes:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\log n)x^n,$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n}x^n,$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{(\log n)^n}$

22. *a*) Calcule e con un error menor que 10^{-8}. ¿Cuántas cifras decimales de esta aproximación son exactas?

b) Calcule $\operatorname{sen} 1$ con un error menor que 10^{-4}.

c) Calcule $\log 1'5$ con un error menor que 10^{-4}.

23. Para $f(x) = x^2\cos x$, hallar $f(7\pi/8)$ con un error menor que 10^{-4}.

24. Sume las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!},$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(n+2)!},$ *c*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+3n-1}{n!}.$

25. Represente mediante serie de potencias de x las siguientes funciones:

a) $f(x) = \operatorname{senh} x$ *b*) $f(x) = \log\dfrac{1+x}{1-x}$

26. Sume las siguientes series de potencias

a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(n+1)x^n$ *b*) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-n}.$