1. Siendo $P(x) = x^4 + 3x - 2$

   a) obtener su factorización en $\mathbb{R}$

   b) obtener su factorización en $\mathbb{C}$

2. Sabiendo que $cos\,\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$, calcular $cos\,3\theta$

Solución

1. *a*) Puesto que el polinomio $P(x) = x^4+3x-2$ no posee término de grado 3, nuestro problema se traduce en el de determinar cuatro coeficientes reales A, B, C y D tales que

$$x^4 + 3x - 2 = (x^2 + Ax + B)\cdot(x^2 + Cx + D) =$$
$$= x^4 + (A + C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (AD + BC)x + BD$$

La identificación de coeficientes nos conduce a que los coeficientes buscados son las soluciones reales del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left.\begin{array}{lrcl} (e_1^{[1]}) & A + C & = & 0 \\ (e_2^{[1]}) & B + AC + D & = & 0 \\ (e_3^{[1]}) & AD + BC & = & 3 \\ (e_4^{[1]}) & BD & = & -2 \end{array}\right\} \text{que es equivalente a} \left\{\begin{array}{lrcl} (e_1^{[2]}) & C & = & -A \\ (e_2^{[2]}) & B + D & = & A^2 \\ (e_3^{[2]}) & -B + D & = & \dfrac{3}{A} \\ (e_4^{[2]}) & BD & = & -2 \end{array}\right.$$

(ya que A no puede ser 0 pues, de serlo, a la vista de la ecuación $e_1^{[1]}$, C también tendría que ser 0 con lo que la ecuación $e_3^{[1]}$ no se verificaría nunca). Sumando las ecuaciones $e_2^{[2]}$ y $e_3^{[2]}$ obtenemos que $D = \dfrac{A^2 + \frac{3}{A}}{2}$ y restándolas obtenemos que $B = \dfrac{A^2 - \frac{3}{A}}{2}$, con lo que podemos afirmar que nuestro sistema es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lrcl} (e_1^{[3]}) & C & = & -A \\ (e_2^{[3]}) & B & = & \dfrac{A^2 - \frac{3}{A}}{2} \\ (e_3^{[3]}) & D & = & \dfrac{A^2 + \frac{3}{A}}{2} \\ (e_4^{[3]}) & \left(\dfrac{A^2 - \frac{3}{A}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{A^2 + \frac{3}{A}}{2}\right) & = & -2 \end{array}\right\}$$

La ecuación $e_4^{[3]}$ es equivalente a $A^4 - \dfrac{9}{A^2} = -8$. Así, puesto que $A \neq 0$, multiplicando por A^2 obtenemos que los valores reales de A deben cumplir que

$$A^6 + 8A^2 - 9 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $Z = A^2$ y teniendo el cuenta el algoritmo de factorización de Ruffini, podemos afirmar que esta ecuación es equivalente a

$$(Z-1)\cdot(Z^2+Z+9)=0$$

Puesto que los valores de Z que anulan al segundo factor son complejos (y por tanto, no se corresponden con ningún valor real de A), podemos afirmar que las únicas soluciones reales de la ecuación $e_4^{[3]}$ son $A = 1$ y $A = -1$, de donde podemos afirmar que $P(x)$ lo podemos factorizar como $(x^2+x-1)\cdot(x^2-x+2)$, pudiéndose comprobar con una sencilla multiplicación de polinomios. Sin embargo, ésta no es la factorización pedida ya que, aunque x^2-x+2 es irreducible en $\mathbb{R}$, no ocurre así con x^2+x-1. Como las raíces de x^2+x-1 son $x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+4}}{2}$, la descomposición pedida es

$$P(x) = x^4+3x-2 = \left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2-x+2\right)$$

b) A la vista de la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{R}$, para obtener la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{C}$ lo único que nos quedaría por hacer es encontrar en $\mathbb{C}$ las raíces de x^2-x+2. Así, puesto que estas raíces son $\dfrac{1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{1\pm i\sqrt{7}}{2}$, la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{C}$ es

$$P(x) = x^4+3x-2 = \left(x+\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x-\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)$$

2. Sabiendo que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ y teniendo en cuenta la fórmula de De Moivre $\left(e^{ni\theta} = cos(n\theta)+i\,sen(n\theta)\right)$, podemos afirmar que

$$cos\,3\theta = Re\left(e^{3i\theta}\right) = Re\left(\left(e^{i\theta}\right)^3\right) = Re\left((cos\theta + i\,sen\theta)^3\right) =$$

$$= Re\left(cos^3\theta + 3\,i\,cos^2\theta\,sen\,\theta - 3\,cos\,\theta\,sen^2\theta - i\,sen^3\theta\right) = cos^3\theta - 3\,cos\,\theta\,sen^2\theta$$

de donde, utilizando que $sen^2\theta = 1 - cos^2\theta$, podemos concluir que

$$cos\,3\theta = cos^3\theta - 3\,cos\,\theta\left(1-cos^2\theta\right) = 4\,cos^3\theta - 3\,cos\,\theta$$

Así, sustituyendo $cos\,\theta$ por $\dfrac{-1}{\sqrt{6}}$ llegamos a que

$$cos\,3\theta = 4\cdot\left(\frac{-1}{\sqrt{6}}\right)^3 - 3\cdot\frac{-1}{\sqrt{6}} = \frac{-4}{6\sqrt{6}}+\frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3-\frac{2}{3}\right) = \frac{7}{3\sqrt{6}} = \frac{7\sqrt{6}}{18}$$

1. Siendo $P(x) = x^4 - 3x - 2$

   a) obtener su factorización en $\mathbb{R}$

   b) obtener su factorización en $\mathbb{C}$

2. Determinar todas las soluciones en $\mathbb{C}$ del sistema $\left\{\begin{array}{l} zw + 4i = 0 \\ z^2 - 2w = 0 \end{array}\right.$ dando sus soluciones en forma binómica.

Solución

1. *a*) Puesto que el polinomio $P(x) = x^4 - 3x - 2$ no posee término de grado 3, nuestro problema se traduce en el de determinar cuatro coeficientes reales A, B, C y D tales que

$$x^4 - 3x - 2 = (x^2 + Ax + B) \cdot (x^2 + Cx + D) =$$

$$= x^4 + (A + C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (AD + BC)x + BD$$

La identificación de coeficientes nos conduce a que los coeficientes buscados son las soluciones reales del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\left.\begin{array}{lrcl} (e_1^{[1]}) & A + C & = & 0 \\ (e_2^{[1]}) & B + AC + D & = & 0 \\ (e_3^{[1]}) & AD + BC & = & -3 \\ (e_4^{[1]}) & BD & = & -2 \end{array}\right\} \text{ que es equivalente a } \left\{\begin{array}{lrcl} (e_1^{[2]}) & C & = & -A \\ (e_2^{[2]}) & B + D & = & A^2 \\ (e_3^{[2]}) & -B + D & = & \dfrac{-3}{A} \\ (e_4^{[2]}) & BD & = & -2 \end{array}\right.$$

(ya que A no puede ser 0 pues, de serlo, a la vista de la ecuación $e_1^{[1]}$, C también tendría que ser 0 con lo que la ecuación $e_3^{[1]}$ no se verificaría nunca). Sumando las ecuaciones $e_2^{[2]}$ y $e_3^{[2]}$ obtenemos que $D = \dfrac{A^2 - \dfrac{3}{A}}{2}$ y restándolas obtenemos que $B = \dfrac{A^2 + \dfrac{3}{A}}{2}$, con lo que podemos afirmar que nuestro sistema es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lrcl} (e_1^{[3]}) & C & = & -A \\ (e_2^{[3]}) & B & = & \dfrac{A^2 + \dfrac{3}{A}}{2} \\ (e_3^{[3]}) & D & = & \dfrac{A^2 - \dfrac{3}{A}}{2} \\ (e_4^{[3]}) & \left(\dfrac{A^2 + \dfrac{3}{A}}{2}\right) \cdot \left(\dfrac{A^2 - \dfrac{3}{A}}{2}\right) & = & -2 \end{array}\right\}$$

La ecuación $e_4^{[3]}$ es equivalente a $A^4 - \dfrac{9}{A^2} = -8$. Así, puesto que $A \neq 0$, multiplicando por A^2 obtenemos que los valores reales de A deben cumplir que

$$A^6 + 8A^2 - 9 = 0$$

Haciendo el cambio de variable $Z = A^2$ y teniendo el cuenta el algoritmo de factorización de Ruffini, podemos afirmar que esta ecuación es equivalente a

$$(Z-1)\cdot(Z^2+Z+9) = 0$$

Puesto que los valores de Z que anulan al segundo factor son complejos (y por tanto, no se corresponden con ningún valor real de A), podemos afirmar que las únicas soluciones reales de la ecuación $e_4^{[3]}$ son $A = 1$ y $A = -1$, de donde podemos afirmar que $P(x)$ lo podemos factorizar como $(x^2+x+2)\cdot(x^2-x-1)$, pudiéndose comprobar con una sencilla multiplicación de polinomios. Sin embargo, ésta no es la factorización pedida ya que, aunque x^2+x+2 es irreducible en $\mathbb{R}$, no ocurre así con x^2-x-1. Como las raíces de x^2-x-1 son $x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$, la descomposición pedida es

$$P(x) = x^4 - 3x - 2 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x^2+x+2\right)$$

b) A la vista de la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{R}$, para obtener la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{C}$ lo único que nos quedaría por hacer es encontrar en $\mathbb{C}$ las raíces de x^2+x+2. Así, puesto que estas raíces son $\dfrac{-1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \dfrac{-1\pm i\sqrt{7}}{2}$, la factorización de $P(x)$ en $\mathbb{C}$ es

$$P(x) = x^4 - 3x - 2 = \left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)\left(x + \frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)$$

2. Despejando w de la segunda ecuación obtenemos que $w = \dfrac{z^2}{2}$ y, sustituyéndolo en la primera, podemos afirmar que los complejos z que sean solución del sistema cumplirán que $\dfrac{z^3}{2} + 4i = 0$ o, equivalentemente, que $z^3 = -8i = 8\,exp\left(\dfrac{3\pi i}{2}\right)$. Las raíces cúbicas de $8\,exp\left(\dfrac{3\pi i}{2}\right)$ las podemos describir como $r\,exp\left(\dfrac{\left(\frac{3}{2}+2k\right)\pi\, i}{3}\right)$, siendo $r = \sqrt[3]{8} = 2$ y $k = 0, 1, 2$, es decir, $2\,exp\left(\dfrac{\pi i}{2}\right)$, $2\,exp\left(\dfrac{7\pi i}{6}\right)$ y $2\,exp\left(\dfrac{11\pi i}{6}\right)$. Así, como $w = \dfrac{z^2}{2}$, o bien

a) $z = 2\,exp\left(\dfrac{\pi i}{2}\right) = 2\,i \Rightarrow w = -2$

b) $z = 2\,exp\left(\dfrac{7\pi i}{6}\right) = 2\left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - i \Rightarrow w = \dfrac{3-1+2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\,\sqrt{3}$

c) $z = 2\,exp\left(\dfrac{11\pi i}{6}\right) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - i\,\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} - i \Rightarrow w = \dfrac{3-1-2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\,\sqrt{3}$