1. (1/3) ¿La sucesión $a_n = \dfrac{(n!)^2}{2 \cdot 7 \cdot 14 \cdot \ldots \cdot (n^2+2n-1)}$ es sumable? (Justificar la respuesta)

2. (4/9 + 2/9) Determinar el campo de convergencia de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{n} x^n$ y expresar $S(x)$ en términos de las funciones elementales.

Solución

1. Aunque el criterio del cociente no nos permite decidir si $\{a_n\}$ es sumable o no, puesto que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)\cdot \cancel{n!} \cdot (n+1) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \ldots \cdot \cancel{(n^2+2n-1)}}{\cancel{2} \cdot \cancel{7} \cdot \ldots \cdot \cancel{(n^2+2n-1)} \cdot (n^2+4n+2) \cdot \cancel{n!} \cdot \cancel{n!}} = \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+2} \longrightarrow 1$$

utilizando la expresión obtenida para $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ y aplicando el criterio de Raabe, sí podemos afirmar que la sucesión propuesta es sumable ya que

$$n \cdot \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n \cdot \left(1 - \frac{n^2+2n+1}{n^2+4n+2}\right) = \frac{2n^2+n}{n^2+4n+2} \longrightarrow 2 > 1$$

2. Podemos determinar el radio de convergencia de la serie de potencias propuesta sin más que imponer que

$$\lim \frac{\left|\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{n+1} \cdot x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{2^n+3^n}{n} \cdot x^n\right|} = \lim |x| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n} =$$

$$= \lim |x| \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \frac{2 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 3}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n + 1} = 3 \cdot |x| < 1$$

habiendo dividido, en la segunda igualdad, el numerador y el denominador del último factor entre 3^n y teniendo en cuenta que, como $\dfrac{2}{3} < 1$ entonces $\lim \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = 0$. Así, el intervalo básico de convergencia es $\left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{1}{3}\right)$. Podemos decidir qué ocurre en los extremos de dicho intervalo teniendo en cuenta que

- para $x = \dfrac{1}{3}$, la sucesión $x_n = \dfrac{2^n+3^n}{n \cdot 3^n} = \dfrac{1}{n} \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^n + \dfrac{1}{n}$ no es sumable puesto que $y_n = \dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{n}$ sí es sumable[1] y si x_n fuera sumable, entonces la sucesión $\dfrac{1}{n}$ también sería sumable puesto que $\dfrac{1}{n} = x_n - y_n$, lo que nos llevaría a una contradicción.
- para $x = \dfrac{-1}{3}$, la sucesión $x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{2^n+3^n}{n \cdot 3^n} = (-1)^n \cdot \dfrac{(2/3)^n}{n} + (-1)^n \cdot \dfrac{1}{n}$ sí que es sumable ya que $(-1)^n \cdot \dfrac{(2/3)^n}{n}$ sí que es sumable (por serlo en valor absoluto tal y como se muestra en[1]) y $\dfrac{(-1)^n}{n}$ también es sumable.

[1]Ya que $\dfrac{y_{n+1}}{y_n} = \dfrac{(2/3)^{n+1}}{n+1} \cdot \dfrac{n}{(2/3)^n} = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{n}{n+1} \to \dfrac{2}{3} < 1$

Así, el campo de convergencia de la serie de potencias propuesta es $\left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Además, puesto que el interior del campo de convergencia la sumabilidad es absoluta se puede afirmar que, para todo $x \in \left(\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, se cumple que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot x^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{n} =$$

$$= -ln(1-2x) - ln(1-3x) = -ln((1-2x)(1-3x)) = ln\left(\frac{1}{6x^2 - 5x + 1}\right)$$

habiendo tenido en cuenta que, para todo $t \in (-1, 1)$ se cumple que $-ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$
Además, gracias al teorema de Abel, podemos extender dicha igualdad al extremo izquierdo del intervalo para poder afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{n} \cdot \left(\frac{-1}{3}\right)^n = ln\left(\frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{5}{3} + \frac{3}{3}}\right) = ln\left(\frac{3}{10}\right) = ln\,3 - ln\,10$$

1. (1/3) ¿La sucesión $a_n = \dfrac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\ldots\cdot(3n-2)}{3^{n+1}\cdot(n+2)!}$ es sumable? Justificar la respuesta y, en caso afirmativo, determinar el término general de su sucesión de sumas parciales y calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

2. (4/15 + 4/15 + 2/15) Determinar el campo de convergencia de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{2^n\cdot(n+1)}x^n$, expresar $S(x)$ en términos de las funciones elementales y, utilizando dicha expresión, calcular $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{n+2}{2^n\cdot(n+1)}$

Solución

1. Sí, porque es hipergeomética con $(\alpha,\beta,\gamma)=(3,1,9)$ (y por tanto, verificando que $\gamma>\alpha+\beta$) ya que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{4}\cdot\ldots\cdot\cancel{(3n-2)}\cdot(3n+1)\cdot\cancel{3^{n+1}}\cdot(n+2)!}{\cancel{3^{n+1}}\cdot 3\cdot(n+3)\cdot\cancel{(n+2)!}\cdot\cancel{1}\cdot\cancel{4}\cdot\ldots\cdot\cancel{(3n-2)}} = \frac{3n+1}{3n+9}$$

Así, puesto que para todo $n\in\mathbb{N}$ se cumple que $(3n+9)\cdot a_{n+1} = (3n+1)\cdot a_n$, podemos afirnar que

$$\begin{array}{rcl}
12\cdot a_2 &=& 4\cdot a_1\\
15\cdot a_3 &=& 7\cdot a_2\\
18\cdot a_4 &=& 10\cdot a_3\\
&\vdots&\\
(3n+6)\cdot a_n &=& (3n-2)\cdot a_{n-1}\\
(3n+9)\cdot a_{n+1} &=& (3n+1)\cdot a_n\\
\hline
5a_2+5a_3+5a_4+\ldots+5a_n+3(n+3)a_{n+1} &=& 4a_1
\end{array}$$

De donde podemos obtener que

$$5\cdot S_n = 5(a_1+a_2+\ldots+a_n) = 9a_1 - 3(n+3)a_{n+1}$$

Teniendo en cuenta que $\lim n\cdot a_n = \lim (n+1)\cdot a_{n+1}$ y que el criterio de Pringsheim nos permite afimar que $\lim n\cdot a_n = 0$ (pues de no ser cero, la sucesión $\{a_n\}$ no sería sumable ya que la sucesión $\dfrac{1}{n}$ no lo es y eso contradiría lo anteriormente probado), podemos afirmar que el límite de la sucesión $\{S_n\}$ de sumas parciales es $\dfrac{9\cdot a_1}{5}$ y, por tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{9\cdot\frac{1}{9\cdot 6}}{5} = \frac{1}{30}$

2. Podemos determinar el radio de convergencia de la serie de potencias propuesta sin más que imponer que

$$\lim\frac{\left|\dfrac{n+3}{2^{n+1}\cdot(n+2)}\cdot x^{n+1}\right|}{\left|\dfrac{n+2}{2^n\cdot(n+1)}\cdot x^n\right|} = \lim\frac{(n+3)\cdot(n+1)}{2\cdot(n+2)\cdot(n+2)}\cdot|x| = \frac{|x|}{2} < 1$$

Así, el intervalo básico de convergencia es $(-2,2)$ que, en esta ocasión, coincide con el campo de convergencia puesto que para $x=2$ la sucesión $x_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ no es sumable porque no tiende a cero, siendo éste el mismo motivo que nos permite afirmar que, para $x=-2$, la sucesión

$x_n = (-1)^n \cdot \dfrac{n+2}{n+1}$ no es sumable. Además, como la sumabilidad es absoluta en el interior del intervalo de convergencia, podemos afirmar que, para todo $x \in (-2,2) - \{0\}$, se tiene que

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{2^n \cdot (n+1)} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1+1}{2^n \cdot (n+1)} \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n + \frac{2}{x} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n+1}}{n+1} =$$

$$= \frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x}{2}} + \frac{2}{x} \cdot \left[-ln\left(1-\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\right] = \frac{x}{2-x} - \frac{2}{x} \cdot ln\left(\frac{2-x}{2}\right) - 1$$

Por tanto, puesto que $-1 \in (-2,2) - \{0\}$, podemos afirmar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{n+2}{2^n \cdot (n+1)} = S(-1) = \frac{-1}{3} + 2 \cdot ln\left(\frac{3}{2}\right) - 1 = 2 \cdot ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{4}{3}$$