Sea $f(x, y) = x^2 + 4x + 2y^4 + 4y^2 - 8xy$

1. (2) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x, y) = f(1, 1)$ en el punto $(1, 1)$
2. (2) Considerando en el espacio la superficie $z = f(x, y)$, ¿la recta normal a dicha superficie en el punto $(1, 1, 3)$ pasa por el origen de coordenadas?
3. (4) ¿El punto $(6, 2)$ es punto crítico de $f(x, y)$? En caso afirmativo, clasifícalo. ¿Y el punto $(-10, -2)$? En caso afirmativo, clasifícalo.
4. (2) Determina y clasifica todos los puntos críticos de $f(x, y)$
(Nota: La ecuación general de una de las muchas rectas del plano es $x - 4y + 2 = 0$)

Solución

1. Ya que las derivadas parciales de $f(x, y)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4 - 8y \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y^3 + 8y - 8x$$

podemos afirmar que el vector $\nabla f(1, 1)$ es $(-2, 8)$. Así, puesto que dicho vector es perpendicular a la curva $f(x, y) = f(1, 1)$, también lo es el vector $(-1, 4)$. Por tanto, la recta tangente a la curva $f(x, y) = f(1, 1)$ en el punto $(1, 1)$ está formada por los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$(x - 1, y - 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$$

con lo que su ecuación general es $-x+1+4y-4 = 0$ que podemos reescribir como $x-4y+3 = 0$

2. La superficie $z = x^2 + 4x + 2y^4 + 4y^2 - 8xy$ la podemos escribir de la forma $F(x, y, z) = 0$ siendo $F(x, y, z) = x^2 + 4x + 2y^4 + 4y^2 - 8xy - z$. Las parciales de esta función $F(x, y, z)$ son

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + 4 - 8y$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 8y^3 + 8y - 8x$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) = -1$$

Por tanto, podemos afirmar que el vector $\nabla F(1, 1, 3) = (-2, 8, -1)$ es perpendicular a la superficie $z = x^2 + 4x + 2y^4 + 4y^2 - 8xy$ en el punto $(1, 1, 3)$, con lo que un punto (x_0, y_0, z_0) del espacio pertenecerá a la recta normal a esa superficie en dicho punto si, y sólo si, existe un escalar λ tal que

$$(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 3) + \lambda \cdot (-2, 8, -1)$$

Así, el punto $(0, 0, 0)$ pertenecerá a dicha recta si, y sólo si, existe λ tal que

$$0 = 1 - 2\lambda \quad ; \quad 0 = 1 + 8\lambda \quad ; \quad 0 = 3 - \lambda$$

Como ningún valor λ hace que se verifiquen simultáneamente esas tres ecuaciones, podemos afirmar que dicha recta no pasa por el origen de coordenadas.

3. Puesto que el vector $\nabla f(6,2) = (0,32) \neq (0,0)$, el punto $(6,2)$ no es punto crítico de $f(x,y)$. El punto $(-10,-2)$ sí es punto crítico de $f(x,y)$ ya que $\nabla f(-10,-2) = (0,0)$. Además, teniendo en cuenta que la matriz hessiana de f es $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 24y^2+8 \end{pmatrix}$, particularizada para el punto $(-10,-2)$ es $Hf(-10,-2) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 104 \end{pmatrix}$, con lo que podemos afirmar que $(-10,-2)$ es mínimo local con cualquiera de los siguientes razonamientos:

a) $|Hf(-10,-2)| = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 104 \end{vmatrix} = 144 > 0$ y además $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-10,-2) = 2 > 0$

b) $q(u_1,u_2) = (u_1,u_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 104 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (2u_1 - 8u_2, -8u_1 + 104u_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

$$= 2u_1^2 - 16u_1u_2 + 104u_2^2 = 2 \cdot (u_1 - 4u_2)^2 + 72\, u_2^2$$

y los coeficientes 2 y 72 son ambos positivos.

c) el polinomio $p(u) = |Hf(-10,-2) - u \cdot I_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 2-u & -8 \\ -8 & 104-u \end{vmatrix} =$

$$= (u-2)\cdot(u-104) - 64 = u^2 - 106u + 208 - 64 = u^2 - 106u + 144$$

tiene grado 2 y sus coeficientes son todos no nulos y tienen signos alternados.

4. Los puntos críticos de $f(x,y)$ son aquellos que anulan simultáneamente las derivadas parciales de $f(x,y)$ con lo que, para determinarlos, lo único que tenemos que hacer es resolver el siguiente sistema de 2 ecuaciones no lineales con 2 incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 2\cdot(x+2-4y) &= 0 \\ 8\cdot(y^3+y-x) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Puesto que la primera ecuación es equivalente a $x = 4y - 2$, llevando esta igualdad a la segunda ecuación obtenemos que $y^3 - 3y + 2 = 0$. Para resolver esta ecuación de tercer grado, podemos utilizar el algoritmo de Ruffini para factorizar el polinomio $y^3 - 3y + 2$. Así, a la vista de

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & 2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 1 & & 1 & 2 & \\ \hline & 1 & 2 & \boxed{0} & \end{array}$$

podemos afirmar que $y^3 - 3y + 2 = (y-1)^2(y+2)$, con lo que las únicas soluciones de nuestro sistema (y por tanto, los únicos puntos críticos de $f(x,y)$) son $(2,1)$ y $(-10,-2)$. Además, puesto que el segundo punto crítico ya lo hemos clasificado anteriormente, únicamente nos faltaría clasificar el punto $(2,1)$. Sin embargo, ninguno de los métodos utilizados en el apartado anterior nos permite decidir nada acerca de su naturaleza ya que la matriz hessiana de f en el punto $(2,1)$ es $Hf(2,1) = \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix}$, y por tanto:

a) $|Hf(2,1)| = \begin{vmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 32 \end{vmatrix} = 64 - 64 = 0$

b) $q(u_1,u_2) = (u_1,u_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 & -8 \\ -8 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (2u_1 - 8u_2, -8u_1 + 32u_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

$$= 2u_1^2 - 16u_1u_2 + 32u_2^2 = 2\cdot(u_1 - 4u_2)^2 + 0$$

y los coeficientes 2 y 0 ni son ambos positivos, ni son ambos negativos, ni hay dos que tengan signos distintos.

c) el polinomio $p(u) = |Hf(-10,-2) - u \cdot I_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 2-u & -8 \\ -8 & 32-u \end{vmatrix} =$

$$= (u-2)\cdot(u-32) - 64 = u^2 - 34u + 0$$

tiene grado 2, sus coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente y sus coefcientes no nulos tienen signos alternados.

Para poder clasificarlo, consideremos la recta $x = 4y - 2$ indicada en la nota del enunciado. Dicha recta pasa por el punto $(2,1)$ y la función

$$g(y) = f(4y-2, y) = (4y-2)^2 + 4(4y-2) + 2y^4 + 4y^2 - 8(4y-2)y =$$

$$= 16y^2 - 16y + 4 + 16y - 8 + 2y^4 + 4y^2 - 32y^2 + 16y = 2y^4 - 12y^2 + 16y - 4$$

tiene un punto crítico en $y = 1$ (ya que $g'(y) = 8y^3 - 24y + 16$, con lo que $g'(1) = 0$).

Sin embargo, $y = 1$ no es extremo local de $g(y)$ ya que la primera derivada que no es nula en $y = 1$ es de orden impar (concretamente la de orden 3) puesto que $g''(y) = 24y^2 - 24$ (con lo que $g''(1) = 0$) y además $g'''(y) = 48y$ (con lo que $g'''(1) = 48 \neq 0$).

En consecuencia, el punto crítico $(2,1)$ de la función $f(x,y)$ no es extremo local de $f(x,y)$ puesto que, de serlo, el punto $y = 1$ sería extremo local de $g(y)$

Sea $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$

1. (2) Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x,y) = f(1,1)$ en el punto $(1,1)$
2. (2) Considerando en el espacio la superficie $z = f(x,y)$, ¿la recta normal a dicha superficie en el punto $(1,1,1)$ pasa por el origen de coordenadas?
3. (4) ¿El punto $(2,1)$ es punto crítico de $f(x,y)$? En caso afirmativo, clasifícalo. ¿Y el punto $(2,-1)$? En caso afirmativo, clasifícalo.
4. (2) Determina y clasifica todos los puntos críticos de $f(x,y)$

Solución

1. Ya que las derivadas parciales de $f(x,y)$ son

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy + 12$$

podemos afirmar que el vector $\nabla f(1,1)$ es $(-9,18)$. Así, puesto que dicho vector es perpendicular a la curva $f(x,y) = f(1,1)$, también lo es el vector $(-1,2)$. Por tanto, la recta tangente a la curva $f(x,y) = f(1,1)$ en el punto $(1,1)$ está formada por los puntos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tales que

$$(x-1, y-1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

con lo que su ecuación general es $-x+1+2y-2=0$ que podemos reescribir como $x-2y+1=0$

2. La superficie $z = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$ la podemos escribir de la forma $F(x,y,z) = 0$ siendo $F(x,y,z) = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y - z$. Las parciales de esta función $F(x,y,z)$ son

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 15$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6xy + 12$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = -1$$

Por tanto, podemos afirmar que el vector $\nabla F(1,1,1) = (-9,18,-1)$ es perpendicular a la superficie $z = x^3 + 3xy^2 - 15x + 12y$ en el punto $(1,1,1)$, con lo que un punto (x_0, y_0, z_0) del espacio pertenecerá a la recta normal a esa superficie en dicho punto si, y sólo si, existe un escalar λ tal que

$$(x_0, y_0, z_0) = (1,1,1) + \lambda \cdot (-9, 18, -1)$$

Así, el punto $(0,0,0)$ pertenecerá a dicha recta si, y sólo si, existe λ tal que

$$0 = 1 - 9\lambda \quad ; \quad 0 = 1 + 18\lambda \quad ; \quad 0 = 1 - \lambda$$

Como ningún valor λ hace que se verifiquen simultáneamente esas tres ecuaciones, podemos afirmar que dicha recta no pasa por el origen de coordenadas.

3. Puesto que el vector $\nabla f(2,1) = (0,24) \neq (0,0)$, el punto $(2,1)$ no es punto crítico de $f(x,y)$. El punto $(2,-1)$ sí es punto crítico de $f(x,y)$ ya que $\nabla f(2,-1) = (0,0)$. Además, teniendo en cuenta que la matriz hessiana de f es $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}$, particularizada para el punto $(2,-1)$ es $Hf(2,-1) = \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}$, con lo que podemos afirmar que $(2,-1)$ es mínimo local con cualquiera de los siguientes razonamientos:

a) $|Hf(2,-1)| = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ y además $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1) = 12 > 0$

b) $q(u_1,u_2) = (u_1,u_2) \cdot \begin{pmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (12u_1 - 6u_2, -6u_1 + 12u_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

$$= 12u_1^2 - 12u_1u_2 + 12u_2^2 = 12 \cdot \left(u_1 - \frac{1}{2}u_2\right)^2 + 9\,u_2^2$$

y los coeficientes 12 y 9 son ambos positivos.

c) el polinomio $p(u) = |Hf(2,-1) - u \cdot I_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 12-u & -6 \\ -6 & 12-u \end{vmatrix} =$

$$= (u-12)\cdot(u-12) - 36 = u^2 - 24u + 144 - 36 = u^2 - 24u + 108$$

tiene grado 2 y sus coeficientes son todos no nulos y tienen signos alternados.

4. Los puntos críticos de $f(x,y)$ son aquellos que anulan simultáneamente las derivadas parciales de $f(x,y)$ con lo que, para determinarlos, lo único que tenemos que hacer es resolver el siguiente sistema de 2 ecuaciones no lineales con 2 incógnitas:

$$\left.\begin{array}{rl} 3\cdot(x^2+y^2-5) & = 0 \\ 6\cdot(xy+2) & = 0 \end{array}\right\}$$

A la vista de la segunda ecuación, podemos afirmar que x no puede ser cero (pues si $x = 0$, la segunda ecuación no se verificaría). Puesto que la segunda ecuación es equivalente a $xy = -2$, despejando y obtenemos que $y = \dfrac{-2}{x}$. Llevando esta igualdad a la primera ecuación obtenemos que $x^2 + \dfrac{4}{x^2} - 5 = 0$. Multiplicar por x^2 (puesto que $x \neq 0$) nos conduce a la ecuación bicuadrada $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, que es equivalente a la anterior. De aquí, podemos afirmar que

$$x^2 = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2}$$

con lo que las soluciones de nuestra ecuación bicuadrada original son $x = 2$, $x = -2$, $x = 1$ y $x = -1$. Teniendo en cuenta que $y = \dfrac{-2}{x}$, podemos afirmar que los únicos puntos críticos de $f(x,y)$ son $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(1,-2)$ y $(-1,2)$. Así, puesto que el primer punto crítico ya lo hemos clasificado anteriormente, únicamente nos faltaría clasificar los otros tres, pudiendo utilizar el mismo método utilizado en el apartado anterior:

- Puesto que la matriz hessiana de f en el punto $(-2,1)$ es $Hf(-2,1) = \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}$, podemos afirmar que $(-2,1)$ es máximo local con cualquiera de los siguientes razonamientos:

  a) $|Hf(-2,1)| = \begin{vmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{vmatrix} = 108 > 0$ y además $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-2,1) = -12 < 0$

  b) $q(u_1,u_2) = (u_1,u_2) \cdot \begin{pmatrix} -12 & 6 \\ 6 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (-12u_1 + 6u_2, 6u_1 - 12u_2) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

  $$= -12u_1^2 + 12u_1u_2 - 12u_2^2 = -12 \cdot \left(u_1 - \frac{1}{2}u_2\right)^2 - 9\,u_2^2$$

  y los coeficientes -12 y -9 son ambos negativos.

c) el polinomio $p(u) = |Hf(-2,1) - u \cdot I_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} -12-u & 6 \\ 6 & -12-u \end{vmatrix} =$

$$= (u+12)\cdot(u+12) - 36 = u^2 + 24u + 144 - 36 = u^2 + 24u + 108$$

tiene grado 2 y sus coeficientes son todos no nulos y tienen todos el mismo signo.

- Puesto que la matriz hessiana de f en el punto $(1,-2)$ es $Hf(1,-2) = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix}$, podemos afirmar que $(1,-2)$ no es extremo local (es punto de silla) con cualquiera de los siguientes razonamientos:

  a) $|Hf(1,-2)| = \begin{vmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{vmatrix} = -108 < 0$

  b) $q(u_1,u_2) = (u_1,u_2)\cdot \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -12 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (6u_1 - 12u_2, -12u_1 + 6u_2)\cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

  $$= 6u_1^2 - 24u_1u_2 + 6u_2^2 = 6\cdot(u_1 - 2u_2)^2 - 18\,u_2^2$$

  y los coeficientes 6 y -18 no tienen el mismo signo.

  c) el polinomio $p(u) = |Hf(1,-2) - u \cdot I_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} 6-u & -12 \\ -12 & 6-u \end{vmatrix} =$

  $$= (u-6)\cdot(u-6) - 144 = u^2 - 12u + 36 - 144 = u^2 - 12u - 108$$

  tiene grado 2 y ni sus coeficientes son todos no nulos y con el mismo signo, ni sus coeficientes son todos no nulos y tienen signos alternados, ni los coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente y los no nulos tienen el mismo signo, ni los coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente y los no nulos tienen signos alternados.

- Puesto que la matriz hessiana de f en el punto $(-1,2)$ es $Hf(x,y) = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$, podemos afirmar que $(-1,2)$ no es extremo local (es punto de silla) con cualquiera de los siguientes razonamientos:

  a) $|Hf(-1,2)| = \begin{vmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{vmatrix} = -108 < 0$

  b) $q(u_1,u_2) = (u_1,u_2)\cdot \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = (-6u_1 + 12u_2, 12u_1 - 6u_2)\cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} =$

  $$= -6u_1^2 + 24u_1u_2 - 6u_2^2 = -6\cdot(u_1 - 2u_2)^2 + 18\,u_2^2$$

  y los coeficientes -6 y 18 no tienen el mismo signo.

  c) el polinomio $p(u) = |Hf(-1,2) - u \cdot I_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} -6-u & 12 \\ 12 & -6-u \end{vmatrix} =$

  $$= (u+6)\cdot(u+6) - 144 = u^2 + 12u + 36 - 144 = u^2 + 12u - 108$$

  tiene grado 2 y ni sus coeficientes son todos no nulos y con el mismo signo, ni sus coeficientes son todos no nulos y tienen signos alternados, ni los coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente y los no nulos tienen el mismo signo, ni los coeficientes nulos están seguidos y llegan hasta el término independiente y los no nulos tienen signos alternados.