

# Cálculo para la computación

24-10-2011 – Primera prueba parcial

---

1. (Hasta 2 puntos) Expresa  $\sin^5 \theta$  en términos de senos de múltiplos de  $\theta$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}\sin^5 \theta &= \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^5 = \frac{1}{32i} \left( e^{5i\theta} - 5e^{4i\theta}e^{-i\theta} + 10e^{3i\theta}e^{-2i\theta} - 10e^{2i\theta}e^{-3i\theta} + 5e^{i\theta}e^{-4i\theta} - e^{-5i\theta} \right) = \\ &= \frac{1}{32i} \left( e^{5i\theta} - 5e^{3i\theta} + 10e^{i\theta} - 10e^{-i\theta} + 5e^{-3i\theta} - e^{-5i\theta} \right) = \\ &= \frac{1}{32i} \left( (e^{5i\theta} - e^{-5i\theta}) - 5(e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + 10(e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right) = \\ &= \frac{1}{32i} (2i \sin 5\theta - 10i \sin 3\theta + 20i \sin \theta) = \frac{1}{16} \sin 5\theta - \frac{5}{16} \sin 3\theta + \frac{5}{8} \sin \theta\end{aligned}$$

---

2. (Hasta 2 puntos) Consideremos el número complejo  $z = \frac{-1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$ .

- a) Expresa  $z$  en forma exponencial.
- b) Calcule las raíces cuartas de  $z$  y exprese el resultado en forma binómica.
- c) Represente gráficamente el número complejo  $z$  y sus raíces cuartas.

**Solución:**

- a) Calculamos el módulo y el argumento:  $|z| = \sqrt{\frac{1}{32^2} + \frac{3}{32^2}} = \sqrt{\frac{4}{32^2}} = \frac{2}{32} = \frac{1}{16}$ ;  
si  $\theta = \text{Arg}(z)$ , entonces  $\text{tg } \theta = \sqrt{3}$  y, dado que  $z$  está en el tercer cuadrante,  $\theta = \frac{4\pi}{3}$ .  
Por lo tanto:  $z = \frac{1}{16} \exp\left(\frac{4\pi}{3}i\right)$ .

- b) Teniendo en cuenta que

$$z = \frac{1}{16} \exp\left(\frac{4\pi}{3}i\right) = \frac{1}{16} \exp\left(\left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)i\right) = \frac{1}{16} \exp\left(\left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right)i\right) = \frac{1}{16} \exp\left(\left(\frac{4\pi}{3} + 6\pi\right)i\right),$$

deducimos que las cuatro raíces cuartas son:

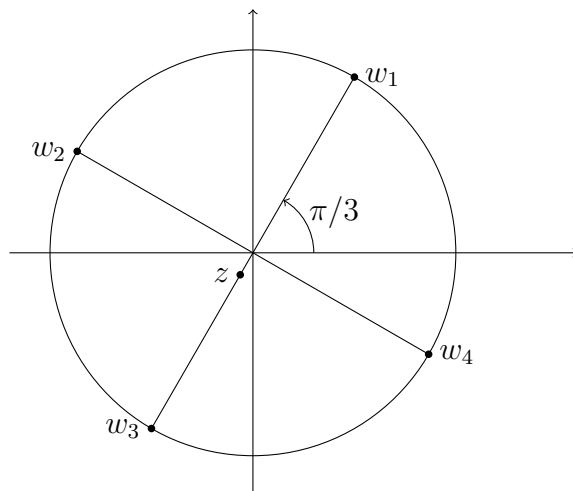
$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \exp\left(\frac{1}{4} \frac{4\pi}{3}i\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\frac{\pi}{3}i\right) = \frac{1}{2} \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \exp\left(\frac{1}{4} \left(\frac{4\pi}{3} + 2\pi\right)i\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}\right)i\right) = \frac{-\sqrt{3}}{4} + i \frac{1}{4}.$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \exp\left(\frac{1}{4} \left(\frac{4\pi}{3} + 4\pi\right)i\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right)i\right) = \frac{-1}{4} + i \frac{-\sqrt{3}}{4}.$$

$$w_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} \exp\left(\frac{1}{4} \left(\frac{4\pi}{3} + 6\pi\right)i\right) = \frac{1}{2} \exp\left(\left(\frac{\pi}{3} + \frac{3\pi}{2}\right)i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} - i \frac{1}{4}.$$

c) La representación gráfica de los 5 puntos es:



3. (Hasta 3 puntos)

- Determine el polinomio de Taylor de orden 4 de la función  $f(x) = \log(1+x)$  en el punto 0.
- Utilice el método de Horner para evaluar el polinomio obtenido en el apartado anterior en  $x = -2/3$  y determinar así un valor aproximado de  $\log 3$ .
- Determine el polinomio de Taylor de orden 4 de la función  $g(x) = \log(1-x^2)$  en el punto 0.

**Solución:**

- a) Determinamos en primer lugar las cuatro primeras derivadas de  $f$ :

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \quad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \quad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \quad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

Y las evaluamos en 0:

$$f'(0) = 1; \quad f''(0) = -1; \quad f'''(0) = 2; \quad f^{(4)}(0) = -6$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 4 de  $f(x) = \log(1+x)$  en el punto 0 es

$$T_{f,4}(x) = 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

b)

$$\begin{array}{c|cccccc} & -1/4 & 1/3 & -1/2 & 1 & 0 \\ -2/3 & & 1/6 & -1/3 & 5/9 & -28/27 \\ \hline & -1/4 & 1/2 & -5/6 & 14/9 & -28/27 \end{array}$$

$T_{f,4}(-2/3) = -28/27$  es una aproximación de  $\log(1 - \frac{2}{3}) = \log(\frac{1}{3}) = -\log 3$  y en consecuencia  $28/27$  es una aproximación de  $\log 3$ .

- c) La función  $g(x) = \log(1-x^2)$  es la composición de la función  $f(x) = \log(1+x)$  con la función  $h(x) = -x^2$ . Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 4 de  $g = f \circ h$  en el punto  $f(h(0)) = f(0) = 0$  es la composición del polinomio  $T_{f,4}$  con  $-x^2$ , despreciando los términos de grado mayor que 4:

$$T_{g,4}(x) = (-x^2) - \frac{(-x^2)^2}{2} + \frac{(-x^2)^3}{3} - \frac{(-x^2)^4}{4} = -x^2 - \frac{x^4}{2}$$

4. (Hasta 3 puntos) Si es posible, factorice en  $\mathbb{R}$  el polinomio  $P(x) = x^4 - 3x^2 + 18x - 20$

**Solución:** Lo primero que podríamos intentar es encontrar alguna raíz del polinomio entre los divisores de 20, aunque en este caso llegamos a la conclusión de que no tiene ninguna raíz entera. Dado que el polinomio tiene grado 4, siempre podremos factorizarlo como producto de dos polinomios de grado 2 en  $\mathbb{R}$ :

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$$

Expandiendo el producto de la derecha obtenemos la igualdad:

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = x^4 + (C + A)x^3 + (B + D + AC)x^2 + (AD + BC)x + BD$$

Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que debemos resolver en  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} C + A &= 0 \\ B + D + AC &= -3 \\ AD + BC &= 18 \\ BD &= -20 \end{aligned}$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la guía docente, utilizamos la primera ecuación para reducir la incógnita,  $C = -A$ , en las ecuaciones segunda y tercera, para llegar a un sistema en  $B$  y  $D$  que resolvemos en función de  $A$ :

$$\begin{aligned} B + D &= A^2 - 3 \\ B - D &= \frac{-18}{A} \end{aligned} \tag{1}$$

(Obsérvese que podemos dividir por  $A$ , ya que no puede ser 0, según la tercera ecuación del sistema inicial).

Sumando las ecuaciones (1) obtenemos  $B = \frac{1}{2} \left( A^2 - 3 - \frac{18}{A} \right)$ .

Restando las ecuaciones (1) obtenemos  $D = \frac{1}{2} \left( A^2 - 3 + \frac{18}{A} \right)$ .

Finalmente utilizamos la cuarta ecuación del sistema original,  $BD = -20$ , en donde sustituimos los valores de  $B$  y  $D$  obtenidos anteriormente en función de  $A$  para obtener una ecuación en  $A$ , que se simplifica hasta convertirla en polinómica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( A^2 - 3 + \frac{18}{A} \right) \frac{1}{2} \left( A^2 - 3 - \frac{18}{A} \right) &= -20 \\ \left( A^2 - 3 + \frac{18}{A} \right) \left( A^2 - 3 - \frac{18}{A} \right) &= -80 \\ (A^2 - 3)^2 - \frac{18^2}{A^2} &= -80 \\ A^2(A^2 - 3)^2 - 324 &= -80A^2 \\ A^2(A^4 - 6A^2 + 9) - 324 &= -80A^2 \\ A^6 - 6A^4 + 89A^2 - 18^2 &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver más fácilmente esta ecuación, efectuamos el cambio de variable  $A^2 = z$ ,

$$z^3 - 6z^2 + 89z - 324 = 0$$

y buscamos las soluciones entre los divisores de 324. Comprobamos que  $z = 4$  es una solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 89 & -324 \\ 4 & & 4 & -8 & 324 \\ \hline & 1 & -2 & 81 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, podemos considerar  $A = 2$  (sabemos que la otra posibilidad nos llevará a la misma factorización y no es necesario analizarla) y terminamos de calcular el resto de coeficientes:

$$A = 2, \quad B = \frac{1}{2} \left( 2^2 - 3 - \frac{18}{2} \right) = -4, \quad C = -2, \quad D = \frac{1}{2} \left( 2^2 - 3 + \frac{18}{2} \right) = 5$$

En consecuencia:

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = (x^2 + 2x - 4)(x^2 - 2x + 5)$$

Comprobamos finalmente si alguno de los dos polinomios de grado 2 obtenidos tiene raíces reales y deducimos que el primero sí tiene, pero el segundo no:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}; \quad \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = -1 \pm 2i \notin \mathbb{R}$$

Concluimos así que la factorización en  $\mathbb{R}$  del polinomio propuesto es

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})(x^2 - 2x + 5)$$


---