Prueba S1: 13 de octubre de 2010

1. Siendo $P(x) = x^4 + 3x - 2$:

   a) obtener su factorización en $\mathbb{R}$

   b) obtener su factorización en $\mathbb{C}$

2. Sabiendo que $cos\theta = \dfrac{-1}{\sqrt{6}}$, calcular $\cos 3\theta$

Soluciones

1. En primer lugar, comprobamos que ninguna de los cuatro divisores del término independiente son raíces del polinomio:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\
-1 & & -1 & 1 & -1 & -2 \\
\hline
 & 1 & -1 & 1 & 2 & \boxed{-4}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 4 & \boxed{2}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\
-2 & & -2 & 4 & -8 & 10 \\
\hline
 & 1 & -2 & 4 & -5 & \boxed{8}
\end{array}
\quad
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\
2 & & 2 & 4 & 8 & 22 \\
\hline
 & 1 & 2 & 4 & 11 & \boxed{20}
\end{array}
$$

Buscamos entonces una factorización del tipo:

$$
\begin{aligned}
x^4 + 3x - 2 &= (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + \mathrm{D}) = \\
&= x^4 + (A + C)x^3 + (B + AC + \mathrm{D})x^2 + (A\mathrm{D} + BC)x + B\mathrm{D}
\end{aligned}
$$

Para hallar los parámetros introducidos, planteamos el siguiente sistema

$$
\begin{aligned}
A + C &= 0 \\
B + AC + \mathrm{D} &= 0 \\
A\mathrm{D} + BC &= 3 \\
B\mathrm{D} &= -2
\end{aligned}
$$

Trabajamos en primer lugar con las tres primeras ecuaciones para escribir B y D en función de A:

$$
\left.
\begin{array}{l}
A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -A \\[2ex]
B + AC + \mathrm{D} = 0 \\[2ex]
A\mathrm{D} + BC = 3
\end{array}
\right\}
\begin{array}{l}
\Rightarrow\ B + \mathrm{D} = A^2 \\[2ex]
\Rightarrow\ \mathrm{D} - B = \dfrac{3}{A}
\end{array}
\left.\right\}
\begin{array}{l}
\text{(Sum.)} \quad 2\mathrm{D} = A^2 + \dfrac{3}{A} \\[2ex]
\text{(Res.)} \quad 2B = A^2 - \dfrac{3}{A}
\end{array}
\left.\right\}
\begin{array}{l}
\mathrm{D} = \dfrac{A^2}{2} + \dfrac{3}{2A} \\[2ex]
B = \dfrac{A^2}{2} - \dfrac{3}{2A}
\end{array}
\left.\right\}
$$

De esta forma, la cuarta ecuación del sistema inicial se convierte en una ecuación polinomica en A:

$$
\begin{aligned}
B\mathrm{D} = -2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{A^2}{2} - \frac{3}{2A}\right)\left(\frac{A^2}{2} + \frac{3}{2A}\right) = -2 \quad &\Rightarrow \quad \frac{A^4}{4} - \frac{9}{4A^2} = -2 \\
&\Rightarrow \quad A^6 - 9 = -8A^2 \quad \Rightarrow \quad A^6 + 8A^2 - 9 = 0
\end{aligned}
$$

Esta ecuación sí se puede resolver utilizando sus raíces enteras; concretamente, $A = 1$ es una solución: $1^6 + 8 \cdot 1^2 - 9 = 0$; dado que la factorización del polinomio es única, ya que hemos igualdado a 1 los coeficientes de los términos de mayor grado, es suficiente con considerar esta solución que determina el resto de los parámetros: $A = 1$, $B = -1$, $C = -1$ y $\mathrm{D} = 2$:

$$x^4 + 3x - 2 = (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 2)$$

2. La fórmula de De Moivre es el método más simple para obtener la fórmula necesaria:

$$\cos 3\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta = (\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^3$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \mathrm{Re}((\cos\theta + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^3) \\ &= \cos^3\theta + 3(\cos^2\theta)(\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta) + 3\cos\theta(\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^2 + (\mathrm{i}\,\mathrm{sen}\,\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta\end{aligned}$$

Finalmente, utilizamos que $\mathrm{sen}^2\,\theta = 1 - \cos^2\theta$ y sustituimos $\cos\theta$ por el valor dado en el enunciado:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ &= 4(\frac{-1}{\sqrt{6^3}}) - 3(\frac{-1}{\sqrt{6}}) \ = \ \frac{-4}{6\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} \ = \ \frac{-2}{3\sqrt{6}} + \frac{3}{\sqrt{6}} \ = \ \frac{7}{3\sqrt{6}} \ = \ \frac{7\sqrt{6}}{18}\end{aligned}$$