Prueba S2: 27 de octubre de 2010

1. Factorice $x^4+2x^3+5x^2+8x+4$ sabiendo que sus raíces reales son enteras. ¿Es posible descomponer
$$\frac{5x^3+9x^2+10x+1}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4}$$
en fracciones simples? En caso negativo, justificar la respuesta. En caso afirmativo determinar la descomposición.

2. Sabiendo que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)$, obtenega una fórmula para la derivada n-ésima de $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, deduzca la fórmula de su derivada n-ésima. ¿Cuál es el polinomio de Taylor de $f(x)$ centrado en 0 y de orden 9?

Soluciones

1. Sabiendo que las raíces reales son enteras, buscamos entre los divisores del término independiente, $-1, 1, -2, 2, -4$ y 4. En este caso, -1 es raíz doble:

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 \\
-1 & & -1 & -1 & -4 & -4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

El polinomio x^2+4 es irreducible en $\mathbb{R}$, y por lo tanto la factorización pedida es:
$$x^4+2x^3+5x^2+8x+4 = (x+1)^2(x^2+4)$$

Dado que el grado del numerador es estrictamente menor que el del denominador, podemos descomponer la función racional en suma de funciones racionales simples con el siguiente esquema:

$$\begin{aligned}
\frac{5x^3+9x^2+10x+1}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} &= \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+\mathrm{D}}{x^2+4} = \\
&= \frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+\mathrm{D})(x+1)^2}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} = \\
&= \frac{(A+C)x^3 + (A+B+2C+\mathrm{D})x^2 + (4A+C+2\mathrm{D})x + (4A+4B+\mathrm{D})}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4}
\end{aligned}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones lineales obtenido al identificar los coeficientes de los polinomios de numerador. Para ello, utilizamos el método de Gauss y en primer lugar, reordenamos las incógnitas y las ecuaciones para que el sistema resultantes sea más sencillo:

$$\left\{\begin{array}{lrrrrl}
(\mathrm{e}_1) & B & +\mathrm{D} & +2C & +A & = 9 \\
(\mathrm{e}_2) & 4B & +\mathrm{D} & & +4A & = 1 \\
(\mathrm{e}_3) & & +2\mathrm{D} & +C & +4A & = 10 \\
(\mathrm{e}_4) & & & C & +A & = 5
\end{array}\right\} \Rightarrow
\left\{\begin{array}{lrrrrl}
(\mathrm{e}_1) & B & +\mathrm{D} & +2C & +A & = 9 \\
(\mathrm{e}_2-4\mathrm{e}_1) & & -3\mathrm{D} & -8C & & = -35 \\
(\mathrm{e}_3) & & +2\mathrm{D} & +C & +4A & = 10 \\
(\mathrm{e}_4) & & & C & +A & = 5
\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{lrrrrl}
(\mathrm{e}_1) & B & +\mathrm{D} & +2C & +A & = 9 \\
(\mathrm{e}_2) & & -3\mathrm{D} & -8C & & = -35 \\
(3\mathrm{e}_3+2\mathrm{e}_2) & & & -13C & +12A & = -40 \\
(\mathrm{e}_4) & & & C & +A & = 5
\end{array}\right\} \Rightarrow
\left\{\begin{array}{lrrrrl}
(\mathrm{e}_1) & B & +\mathrm{D} & +2C & +A & = 9 \\
(\mathrm{e}_2) & & -3\mathrm{D} & -8C & & = -35 \\
(\mathrm{e}_3) & & & -13C & +12A & = -40 \\
(13\mathrm{e}_4+\mathrm{e}_3) & & & & 25A & = 25
\end{array}\right\}$$

El sistema triangular obtenido tras realizar las tres reducciones, se resuelve fácilmente:

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{r}(\mathrm{e}_4) \Rightarrow A=1\\ (\mathrm{e}_3)\end{array}\right\} \Rightarrow C=4\\ (\mathrm{e}_2)\end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{D}=1\\ (\mathrm{e}_1)\end{array}\right\} \Rightarrow B=-1$$

Por lo tanto, la descomposición en fracciones simples es:

$$\frac{5x^3+9x^2+10x+1}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{4x+1}{x^2+4}$$

2. Consideramos la función $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ y calculamos sus nueve primeras derivadas que evaluamos en 0:

$$\begin{array}{rlcrr|rlcrr}
f(x) &= \operatorname{sen}^2 x & \Rightarrow & f(0) = & 0 & f^{(5)}(x) = & 2^4 \operatorname{sen} 2x & \Rightarrow & f^{(5)}(0) = & 0\\
f'(x) &= 2\operatorname{sen} x\cos x = \operatorname{sen} 2x & \Rightarrow & f'(0) = & 0 & f^{(6)}(x) = & 2^5 \cos 2x & \Rightarrow & f^{(6)}(0) = & 2^5\\
f''(x) &= 2\cos 2x & \Rightarrow & f''(0) = & 2 & f^{(7)}(x) = & -2^6 \operatorname{sen} 2x & \Rightarrow & f^{(7)}(0) = & 0\\
f'''(x) &= -2^2\operatorname{sen} 2x & \Rightarrow & f'''(0) = & 0 & f^{(8)}(x) = & -2^7 \cos 2x & \Rightarrow & f^{(7)}(0) = & -2^7\\
f^{(4)}(x) &= -2^3\cos 2x & \Rightarrow & f^{(4)}(0) = & -2^3 & f^{(9)}(x) = & 2^8 \operatorname{sen} 2x & \Rightarrow & f^{(9)}(0) = & 0
\end{array}$$

De aquí podemos deducir que

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}\big(-1\big)^{\frac{n-1}{2}}2^{n-1}\operatorname{sen} 2x & \text{si } n \text{ es impar}\\[2em] \big(-1\big)^{\frac{n+2}{2}}2^{n-1}\cos 2x & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$

Y el polinomio de Taylor de orden 9 en 0 es:

$$\begin{aligned}T(x) &= \frac{2}{2}x^2-\frac{2^3}{4!}x^4+\frac{2^5}{6!}x^6-\frac{2^7}{8!}x^8=\\
&= x^2-\frac{\cancel{2}^{\cancel{3}}}{\cancel{2}^{\cancel{2}}(3\cdot\cancel{2})}x^4+\frac{\cancel{2}^{\cancel{4}}2}{(3\cdot\cancel{2})5\cdot\cancel{2}^{\cancel{2}}\cdot 3\cdot\cancel{2}}x^6-\frac{\cancel{2}^{\cancel{7}}}{\cancel{2}^{\cancel{3}}\cdot 7\cdot(3\cdot\cancel{2})\cdot 5\cdot\cancel{2}^{\cancel{2}}\cdot 3\cdot\cancel{2}}x^6=x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6-\frac{1}{315}x^8\end{aligned}$$