Prueba S4: 22 de noviembre de 2010

1. Consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^{n+1}(n+1)!}$. Analice si es convergente y, en tal caso, súmela calculando el límite de la sucesión de sumas parciales.

Solución: El cociente $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ nos permite deducir que es una serie hipergeométrica:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)(2n-1)2^{n+1}(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)2^{n+2}(n+2)!}=\frac{\cancel{1\cdot 3\cdots(2n-3)}(2n-1)\cancel{2^{n+1}}\cancel{(n+1)!}}{\cancel{1\cdot 3\cdots(2n-3)}\cancel{2^{n+2}}(n+2)\cancel{!}}=\frac{2n-1}{2(n+2)}$$

Y por el criterio de Raabe, deducimos que es convergente:

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim n\left(1-\frac{2n-1}{2(n+2)}\right)=\lim\frac{5n}{2n+4}=\frac{5}{2}>1$$

A partir de la igualdad $(2n+4)a_{n+1}=(2n-1)a_n$, desarrollamos el método de sumación de las series hipergeométricas:

$$\begin{aligned}
(\cancel{5}+3)a_3&=3a_2\\
(\cancel{7}+3)a_4&=\cancel{5a_3}\\
(\cancel{9}+3)a_5&=\cancel{7a_4}\\
\dots&=\dots\\
(\cancel{(2n-1)}+3)a_n&=\cancel{(2n-3)a_{n-1}}\\
(2n+4)a_{n+1}&=\cancel{(2n-1)a_n}\\
\hline
3(a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n)+(2n+4)a_{n+1}&=3a_2\\
3(a_2+a_3+a_4+a_5+\cdots+a_n)+(2n+4)a_{n+1}&=6a_2\\
3S_n+(2n+4)a_{n+1}&=6a_2\\
S_n&=2a_2-\frac{1}{3}(2n+4)a_{n+1}\\
\lim S_n&=2a_2=\frac{2}{2^3 3!}=\frac{1}{48}
\end{aligned}$$

En el cálculo del límite hemos tenido en cuenta que, al ser a_n sumable, $\lim a_n=\lim na_n=0$.

2. Estudie la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2\cdot 7\cdot 14\cdots(n^2+2n-1)}$. En caso de ser convergente, ¿cómo determinamos el menor número de sumandos que necesitamos para calcular su suma con un error menor que 10^{-3}?

Solución: Intentamos, en primer lugar, utilizar el criterio del cociente:

$$\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\frac{((n+1)\cancel{!})^2\cancel{2\cdot 7\cdot 14\cdots(n^2+2n-1)}}{\cancel{2\cdot 7\cdot 14\cdots(n^2+2n-1)}((n+1)^2+2(n+1)-1)\cancel{(n!)^2}}=$$

$$=\lim\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+2(n+1)-1}=1$$

Por lo tanto, el criterio del cociente no nos da información sobre el carácter de la serie. Pasamos a intentarlo con el criterio de Raabe:

$$\lim n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim n\left(1-\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+2(n+1)-1}\right)=\lim\frac{2n(n+1)-n}{(n+1)^2+2(n+1)-1}=2>1$$

Por lo tanto, la serie es convergente.

Consideramos entonces la sucesión

$$r_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{2n(n+1) - n}{(n+1)^2 + 2(n+1) - 1} = \frac{2n^2 + n}{n^2 + 4n + 2}$$

y analicemos su monotonía:

$$\begin{aligned}\frac{r_{n+1}}{r_n} &= \frac{(2(n+1)^2 + (n+1))(n^2+4n+2)}{((n+1)^2 + 4(n+1) + 2)(2n^2+n)} = \frac{(2n^2+5n+3)(n^2+4n+2)}{(n^2+6n+7)(2n^2+n)} = \\ &= \frac{2n^4 + 13n^3 + 27n^2 + 22n + 6}{2n^4 + 13n^3 + 20n^2 + 7n} = \frac{(2n^4 + 13n^3 + 20n^2 + 7n) + 7n^2 + 15n + 6}{2n^4 + 13n^3 + 20n^2 + 7n} > 1\end{aligned}$$

Por lo tanto, r_n es creciente. Si consideramos la suma parcial S_N como aproximación de la serie, el error se puede acotar como sigue

$$S - S_N < \frac{N a_{N+1}}{r_N - 1}$$

Aquí acabaría el ejercicio del examen, no es necesario determinar el índice N.