Cálculo para la computación

26–10–2011 – Primera prueba parcial

---

1. Exprese la función $\cos^4\theta$ en términos de cosenos de múltiplos de θ.

   Solución: En primer lugar, recordamos como podemos expresar las funciones trigonométricas a partir de la exponencial compleja:

$$\begin{array}{rl} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} & = \cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta \\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & = \cos\theta - \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta \\ \hline \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} & = 2\cos\theta \\ \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2} & = \cos\theta \end{array}$$

   Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \cos^4\theta &= \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})^4 = \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + 4\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + 6\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + 4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}) = \\ &= \frac{1}{16}(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\theta} + 4\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} + 6 + 4\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}) = \frac{1}{16}(2\cos 4\theta + 8\cos 2\theta + 6) = \\ &= \frac{1}{8}\cos 4\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{3}{8} \end{aligned}$$

---

2. Factorice en $\mathbb{C}$ y en $\mathbb{R}$ el polinomio $p(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 3$.

   Solución: Todo polinomio de grado 4 puede ser factorizado como producto de dos polinomios en $\mathbb{R}$ de grado 2:

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 6x + 3 &= (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D) = \\ &= x^4 + (C + A)x^3 + (D + AC + B)x^2 + (AD + BC)x + BD \end{aligned}$$

   Lo que nos conduce al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} C + A &= 0 \\ D + AC + B &= -5 \\ AD + BC &= 6 \\ BD &= 3 \end{aligned}$$

   Seguimos el proceso de resolución descrito en la guía docente: de la primera ecuación deducimos que $C = -A$, igualdad que usamos para reducir las ecuaciones segunda y tercera.

$$\begin{aligned} D + B &= A^2 - 5 \\ D - B &= \frac{6}{A} \end{aligned}$$

Sumando y restando respectivamente estas dos ecuaciones, llegamos a expresar D y B en función de A:

$$D = \frac{1}{2}(A^2 - 5) + \frac{3}{A}, \qquad B = \frac{1}{2}(A^2 - 5) - \frac{3}{A}$$

Usando la cuarta ecuación, $BD = 3$, llegamos a una ecuación polinómica en A:

$$3 = DB = \left(\frac{1}{2}(A^2 - 5) + \frac{3}{A}\right)\left(\frac{1}{2}(A^2 - 5) - \frac{3}{A}\right) =$$
$$= \frac{1}{4}(A^2 - 5)^2 - \frac{9}{A^2} = \frac{1}{4}(A^4 - 10A^2 + 25) - \frac{9}{A^2}$$

Multiplicando por $4A^2$ en ambos lados de la igualdad

$$12A^2 = A^6 - 10A^4 + 25A^2 - 36 \qquad \Longrightarrow \qquad A^6 - 10A^4 + 13A^2 - 36 = 0$$

Probando con los divisores de 36 y utilizando el algoritmo de Ruffini, deducimos que $A = 3$ es una solución de esta ecuación polinómica. Utilizando las ecuaciones intermedias generadas anteriormente deducimos fácilmente que:

$$B = \frac{1}{2}(3^2 - 5) - \frac{3}{3} = 1, \qquad D = \frac{1}{2}(3^2 - 5) + \frac{3}{3} = 3, \qquad C = -3$$

Y de ahí:

$$x^4 - 5x^2 + 6x + 3 = (x^2 + 3x + 1)(x^2 - 3x + 3)$$

Para completar la factorización, debemos resolver las ecuaciones:

$$x^2 + 3x + 1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$$
$$x^2 - 3x + 3 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{3 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto:

- Factorización en $\mathbb{R}$: $x^4 - 5x^2 + 6x + 3 = \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)(x^2 - 3x + 3)$
- Factorización en $\mathbb{C}$:
  $x^4 - 5x^2 + 6x + 3 = \left(x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

---

3. *a*) Indique las formas posibles de determinar el polinomio de Taylor de orden 5 en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$; utilice una de ellas para hallarlo.

   Solución: Las dos formas para hallar el polinomio de Taylor son: (1) utilizar directamente la expresión basada en las derivadas sucesivas de la función en 0; (2) hallar en primer lugar el polinomio de la función $\operatorname{sen} x$ y utilizar las propiedades algebraicas para hallar el polinomio del cuadrado.

   En el examen se pide utilizar solo uno de los dos métodos, pero a continuación mostramos los dos desarrollos.

1) Hallamos las cinco primeras derivadas de la función y las evaluamos en $x_0 = 0$:

$$\begin{array}{rcr}
f(x) = \operatorname{sen}^2 x, & \Longrightarrow & f(0) = 0 \\
f'(x) = 2 \operatorname{sen} x \cos x = \operatorname{sen} 2x, & \Longrightarrow & f'(0) = 0 \\
f''(x) = 2\cos 2x, & \Longrightarrow & f''(0) = 2 \\
f'''(x) = -4 \operatorname{sen} 2x, & \Longrightarrow & f'''(0) = 0 \\
f^{(4)}(x) = -8\cos 2x, & \Longrightarrow & f^{(4)}(0) = -8 \\
f^{(5)}(x) = 16 \operatorname{sen} 2x, & \Longrightarrow & f^{(5)}(0) = 0
\end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor en 0 de orden 5 de la función $\operatorname{sen}^2 x$ es:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{5} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \frac{2}{2}x^2 - \frac{8}{4!}x^4 = x^2 - \frac{x^4}{3}$$

2) Para el segundo método, podemos usar el polinomio de Taylor de la función seno en 0 hasta el orden 5, si lo recordamos de memoria, o lo podemos calcular hallando las cinco primeras derivadas en 0:

$$\begin{array}{rcr}
g(x) = \operatorname{sen} x, & \Longrightarrow & g(0) = 0 \\
g'(x) = \cos x, & \Longrightarrow & g'(0) = 1 \\
g''(x) = -\operatorname{sen} x, & \Longrightarrow & g''(0) = 0 \\
g'''(x) = -\cos x, & \Longrightarrow & g'''(0) = -1 \\
g^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x, & \Longrightarrow & g^{(4)}(0) = 0 \\
g^{(5)}(x) = \cos x, & \Longrightarrow & g^{(5)}(0) = 1
\end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio de orden 5 de la función seno en 0 es:

$$T(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Utilizando las propiedades algebraicas del polinomio de Taylor, sabemos que el polinomio de $\operatorname{sen}^2 x$ es $T(x)^2$ menos los sumandos de grado mayor que 5:

$$P(x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)^2 - \{\text{términos de grado} > 5\} = x^2 - 2x\frac{x^3}{6} = x^2 - \frac{x^4}{3}$$

b) Evalúe, de la forma más eficiente posible, el polinomio hallado en el apartado anterior en $x = -\dfrac{1}{2}$.

Solución: La forma más eficiente de evaluar el polinomio es utilizando el método de Horner:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & -\frac{1}{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & -\frac{11}{24} & \frac{11}{48} \\
\hline
 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{11}{12} & -\frac{11}{24} & \boxed{\frac{11}{48}}
\end{array}$$

Por lo tanto: $T(-1/2) = \dfrac{11}{48}$