Prueba S5: 15 de diciembre de 2010

1. Determina una serie cuya suma sea $\sqrt[3]{3}$. Calcula la suma parcial con el menor número de sumandos que aproxime dicho número con un error menor que 10^{-3}.

   Solución: Escribiendo $\sqrt[3]{3} = 3^{1/3}$, observamos que la mejor opción es considerar la función potencial $p(x) = (1+x)^{1/3}$ para construir la serie pedida. Sin embargo, no podemos considerar $x = 2$, ya que este punto queda fuera del campo de convergencia de la serie de Taylor de p.

   Consideraremos entonces la siguiente igualdad:

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8\frac{3}{8}} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{8}} = 2\left(1 - \frac{5}{8}\right)^{1/3}$$

   De esta forma, podemos utilizar la serie de la función potencial para $x = \frac{-5}{8}$:

$$\sqrt[3]{3} = 2\left(1 - \frac{5}{8}\right)^{1/3} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\binom{1/3}{n}\left(\frac{-5}{8}\right)^n$$

   Segunda parte - primer método: Usando el resto de Lagrange. El teorema de Lagrange afirma que el error al considerar el polinomio de Taylor de orden N (suma parcial N-ésima) como aproximación es:

$$\varepsilon = \left|2\binom{1/3}{N+1}(1+c)^{(1/3)-N-1}(\frac{5}{8})^{N+1}\right| = \left|2\binom{1/3}{N+1}(1+c)^{-(N+(2/3))}(\frac{5}{8})^{N+1}\right|,$$

   en donde $\frac{-5}{8} < c < 0$. Para simplificar la expresión del error, utilizamos el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} \frac{-5}{8} &< c \\ \frac{3}{8} &< 1 + c \\ (\frac{3}{8})^{N+(2/3)} &< (1+c)^{N+(2/3)} \\ (1+c)^{-(N+(2/3))} &< (\frac{3}{8})^{-(N+(2/3))} = (\frac{8}{3})^{N+(2/3)} \end{aligned}$$

   Por lo tanto,

$$\varepsilon = \left|2\binom{1/3}{N+1}(1+c)^{-(N+(2/3))}(\frac{5}{8})^{N+1}\right| < \left|2\binom{1/3}{N+1}(\frac{8}{3})^{N+(2/3)}(\frac{5}{8})^{N+1}\right|,$$

   y buscaríamos el menor natural N que haga que esta expresión sea menor que 10^{-3}.

   Segunda parte - segundo método: Usando el criterio del cociente. En primer lugar, debemos observar que la serie NO es alternada, y por lo tanto no podemos utilizar el criterio de Leibniz. El cociente $r_n = a_{n+1}/a_n$ nos permite deducir esta afirmación e iniciar el proceso de estimación asociado al criterio del cociente.

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)\left(\frac{1}{3}-(n+1)+1\right)n!(-5/8)^{n+1}}{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)(n+1)!(-5/8)^n} =$$

$$= \frac{\cancel{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}\left(\frac{1}{3}-(n+1)+1\right)\cancel{n!}(-5/8)^{\cancel{n+1}}}{\cancel{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{3}-n+1\right)}(n+1)\cancel{!}\cancel{(-5/8)^n}} =$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{3}-(n+1)+1\right)(-5/8)}{n+1} = \frac{15n-5}{24n+8}$$

Por lo tanto, si $n \geq 1$ los cocientes de términos consecutivos tienen el mismo y la serie no es alterna. Además, $r = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{5}{8} < 1$, por lo que, efectivamente, el criterio del cociente afirma que la serie es convergente.

Para utilizar r_n para estimar el error de una suma parcial, debemos estudiar su monotonía:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(15(n+1)-5)(24n+8)}{(24(n+1)+8)(15n-5)} = \frac{9n^2+9n+2}{9n^2+9n-4} = \frac{9n^2+9n+2}{(9n^2+9n+2)-6} > 1$$

Por lo tanto, r_n es decreciente y para cada N:

$$S - S_N < \frac{a_{N+1}}{1-r} = 2\binom{1/3}{N+1}\left(\frac{-5}{8}\right)^{N+1}\frac{8}{3}$$

Por lo tanto, tomaremos el menor natural N que haga que la expresión anterior sea menor que 10^{-3}. Usando el ordenador se puede deducir que $N = 7$.

2. Determine la serie de Taylor de la función $f(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$ usando el siguiente proceso.

   a) A partir de la serie de $\frac{1}{1-x}$, obtenga por derivación la de $\frac{1}{(1-x)^2}$.

   b) Exprese la función f como suma de fracciones simples.

   c) Utilice las propiedades algebraicas y los apartados anteriores para construir la serie de Taylor de f.

Solución: La función $\frac{1}{1-x}$ es la suma de la serie geométrica de razón x y primer sumando 1, por lo que podemos realizar el siguiente desarrollo.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{1-x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=0}^{\infty} x^n \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n
\end{aligned}$$

La descomposición en fracciones simples de la función f se obtiene fácilmente y a partir de ella encontramos la serie pedida.

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^n$$