Prueba S3: 9 de noviembre de 2010

1. Demuestre que, si $\alpha > 1$, entonces las sucesiones $a_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ y $b_n = \alpha n^{\alpha-1}$ son infinitos equivalentes.
   Indicación: vea el ejemplo 2.2.19.

   Solución: Dado que $\alpha > 1$,
   $$\text{lím}\, b_n = \text{lím}\, \alpha n^{\alpha-1} = +\infty$$
   Ahora, vamos a calcular el límite del cociente de las sucesiones:
   $$\begin{aligned}
   \text{lím}\, \frac{(n+1)^\alpha - n^\alpha}{\alpha n^{\alpha-1}} &= \text{lím}\, \frac{n^\alpha\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right)}{\alpha n^{\alpha-1}} \\
   &= \text{lím}\, \frac{n}{\alpha}\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha - 1\right) \\
   &= \text{lím}\, \frac{n}{\alpha}\log\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \\
   &= \text{lím}\, \frac{n\alpha}{\alpha}\log\frac{n+1}{n} = \text{lím}\, n\log\frac{n+1}{n} \\
   &= \text{lím}\, n\left(\frac{n+1}{n} - 1\right) = \text{lím}\, \frac{n}{n} = \text{lím}\, 1 = 1
   \end{aligned}$$
   Por lo tanto, las dos sucesiones son equivalentes y, dado que el denominador es un infinito, el numerador también lo es.

2. Consideramos la siguiente sucesión definida recursivamente: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}$

   - Demuestre por inducción que a_n es creciente.
   - Demuestre por inducción que a_n está acotada superiormente por 4.
   - Calcule el límite de a_n.

   Solución:

   - $a_2 = 2\sqrt[4]{2}$ y por lo tanto
     $$\frac{a_2}{a_1} = \frac{2\sqrt[4]{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\sqrt[4]{2} > 1 \cdot 1 = 1$$
     Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_k < a_{k+1}$ y demostremos que $a_{k+1} < a_{k+2}$:
     $$a_{k+1} = 2\sqrt{a_k} \overset{(H.I.)}{<} 2\sqrt{a_{k+1}} = a_{k+2}$$
     Por lo tanto, $a_n < a_{n+1}$ para todo n, es decir, a_n es creciente.
   - Trivialmente, $\sqrt{2} < 4$. Supongamos, por hipótesis de inducción, que $a_k < 4$ y demostremos que $a_{k+1} < 4$:
     $$a_{k+1} = 2\sqrt{a_k} \overset{(H.I.)}{<} 2\sqrt{4} = 2 \cdot 2$$
     Por lo tanto, $a_n < 4$ para todo n, es decir, a_n está acotada superiormente por 4.
   - Dado que la sucesión es creciente y acotada superiormente, también es convergente. Sea $\ell = \text{lím}\, a_n$, entonces $\text{lím}\, a_{n+1} = \ell$ y:
     $$\ell = \text{lím}\, a_{n+1} = \text{lím}\, 2\sqrt{a_n} = 2\sqrt{\ell}$$
     Por lo tanto, $\ell^2 = 4\ell$ y en consecuencia $\ell = 4$. El límite no puede ser 0, ya que, al ser la sucesión creciente, $a_n > a_1 = \sqrt{2} > 0$.

3. Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Escriba la suma de Riemmann de la función f en el intervalo $[1, 2]$ dada por una partición regular de 5 subintervalos y considerando como elección, los puntos medios de cada subintervalo.
   Observación: simplifique todo lo posible cada sumando, pero no es necesario efectuar la suma final.

   Solución: Los puntos de la partición regular de cinco subintervalos P, es

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1+\frac{1}{5} = \frac{6}{5}, \quad x_2 = 1+\frac{2}{5} = \frac{7}{5}, \quad x_3 = 1+\frac{3}{5} = \frac{8}{5}, \quad x_4 = 1+\frac{4}{5} = \frac{9}{5}, \quad x_5 = 1+\frac{5}{5} = 2$$

   Y la elección ξ, determinada por los puntos medios de cada subintervalo, son

$$x_1^* = 1+\frac{1}{10} = \frac{11}{10}, \quad x_2^* = 1+\frac{3}{10} = \frac{13}{10}, \quad x_3^* = 1+\frac{5}{10} = \frac{15}{10}, \quad x_4^* = 1+\frac{7}{10} = \frac{17}{10}, \quad x_5^* = 1+\frac{9}{10} = \frac{19}{10},$$

   Por lo tanto, la suma de Riemmann asociada a esta partición y a esta elección es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(P, \xi) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)(x_k - x_{k-1}) = \frac{1}{5}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) = \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{11/10}{(11/10)+1} + \frac{13/10}{(13/10)+1} + \frac{15/10}{(15/10)+1} + \frac{17/10}{(17/10)+1} + \frac{19/10}{(19/10)+1}\right) = \\
&= \frac{1}{5}\left(\frac{11}{21} + \frac{13}{23} + \frac{15}{25} + \frac{17}{27} + \frac{19}{29}\right)
\end{aligned}$$