1. Calcular $lim \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{n^3}{n^2+1}}$

2. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente a cero que además cumple que $a_{n+1} = a_n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$

   a) Calcular a_1 y, utilizando los valores de la siguiente tabla, expresa a_{10} como $\dfrac{A}{B}$ siendo A y B números naturales:

n	6	7	8	9	10	11	12
3^n	729	2187	6561	19683	59049	177147	531441
5^n	15625	78125	390625	1953125	9765625	48828125	244140625

   b) Demuestra que $\{a_n\}$ es sumable y, teniendo en cuenta los valores de la tabla anterior, expresa $\displaystyle\sum_{n=10}^{\infty} a_n$ como $\dfrac{C}{D}$ siendo C y D números naturales

Solución

1. Partiendo de que $\lim \left(\dfrac{n^2-n+1}{n^2+n-2}\right)^{\frac{n^3}{n^2+1}} = \lim \left(\dfrac{n^2+n-2}{n^2-n+1}\right)^{\frac{-n^3}{n^2+1}}$ y teniendo en cuenta que la división de n^2+n-2 entre n^2-n+1 es

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{n^2} & +n & -2 & n^2-n+1 \\ \cancel{-n^2} & +n & -1 & 1 \\ \hline & 2n & -3 & \end{array}$$

podemos asegurar que el límite coincide con

$$\lim \left(1+\frac{2n-3}{n^2-n+1}\right)^{\frac{-n^3}{n^2+1}} = \lim \left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+1}{2n-3}}\right)^{\frac{-n^3}{n^2+1}} =$$

$$= \lim \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n+1}{2n-3}}\right)^{\frac{n^2-n+1}{2n-3}}\right]^{\frac{-(2n-3)n^3}{(n^2-n+1)(n^2+1)}}$$

Así, el límite propuesto existe y vale e^{-2} puesto que, cuando n tiende a infinito, la expresión entre corchetes tiende a e y el exponente a -2

2. Teniendo en cuenta que $a_{n+1} = a_n - \left(\dfrac{3}{5}\right)^n$, se tiene que,

   - para $n=1$, $a_2 = a_1 - \dfrac{3}{5}$
   - para $n=2$, $a_3 = a_2 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = a_1 - \left(\dfrac{3}{5} + \left(\dfrac{3}{5}\right)^2\right)$

- para $n=3$, $a_4 = a_3 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 = a_1 - \left(\frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3\right)$

$$\vdots$$

Podemos intuir que, para cualquier natural n, se tiene que $a_{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k$, pudiendo probar dicha igualdad por inducción ya que es evidentemente cierta para $n=1$ y, si suponemos que es cierta para algún natural n, se tiene que

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n+1}\left(\frac{3}{5}\right)^k$$

Así, puesto que, tal y como se afirma en el enunciado, la sucesión a_n converge a 0 se tiene que

$$0 = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim\left(a_1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k\right) = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^k = a_1 - \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} = a_1 - \frac{3}{2}$$

de donde podemos afirmar que $a_1 = \frac{3}{2}$. Además, denotando por

$$S_n = \frac{3}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{3}{5}\right)^n$$

multiplicando por $\frac{-3}{5}$ para obtener que

$$\frac{-3}{5}\cdot S_n = \quad - \left(\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^3 - \ldots - \left(\frac{3}{5}\right)^n - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

y sumando ambas igualdades obtenemos que

$$\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot S_n = \frac{2}{5}\cdot S_n = \frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

de donde, despejando convenientemente, obtenemos que $S_n = \dfrac{\frac{3}{5} - \left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}}{\frac{2}{5}}$ y, operando convenientemente, que $S_n = \frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$. Así, llevando esta igualdad a la expresión obtenida anteriormente obtenida para a_{n+1}, y teniendo en cuenta que $a_1 = \frac{3}{2}$, se tiene que

$$a_{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{5}\right)^k = \frac{3}{2} - \left(\frac{3}{2} - \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}\right) = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

Así, podemos afirmar que $a_{10} = \frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^{10} = \frac{3^{10}}{10\cdot 5^8} = \frac{59049}{3906250}$, que la sucesión $\{a_n\}$ es sumable puesto que es geométrica de razón $\frac{3}{5} < 1$ y además

$$\sum_{n=10}^{\infty} a_n = \sum_{n=10}^{\infty}\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{5}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{10}}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{10}}{\frac{2}{5}} = \frac{5^2\cdot 3^{10}}{4\cdot 5^{10}} = \frac{3^{10}}{4\cdot 25\cdot 5^6} = \frac{59049}{1562500}$$

1. Calcular $lim\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^3}{n^2+4}}$

2. Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente a cero que además cumple que $a_{n+1}=a_n-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

   a) Calcular a_1 y, utilizando los valores de la siguiente tabla, expresa a_{10} como $\dfrac{A}{B}$ siendo A y B números naturales:

n	6	7	8	9	10	11	12
5^n	15625	78125	390625	1953125	9765625	48828125	244140625

   b) Demuestra que $\{a_n\}$ es sumable y, teniendo en cuenta los valores de la tabla anterior, expresa $\displaystyle\sum_{n=12}^{\infty} a_n$ como $\dfrac{C}{D}$ siendo C y D números naturales

Solución

1. Partiendo de que $\lim\left(\dfrac{n^2-n-1}{n^2+2n-3}\right)^{\frac{n^3}{n^2+4}}=\lim\left(\dfrac{n^2+2n-3}{n^2-n-1}\right)^{\frac{-n^3}{n^2+4}}$ y teniendo en cuenta que la división de n^2+2n-3 entre n^2-n-1 es

$$\begin{array}{rrr|l} \cancel{n^2} & +2n & -3 & n^2-n-1 \\ \cancel{-n^2} & +\ n & +1 & 1 \\ \hline & 3n & -2 & \end{array}$$

podemos asegurar que el límite coincide con

$$\lim\left(1+\frac{3n-2}{n^2-n-1}\right)^{\frac{-n^3}{n^2+4}}=\lim\left(1+\frac{1}{\dfrac{n^2-n-1}{3n-2}}\right)^{\frac{-n^3}{n^2+4}}=$$

$$=\lim\left[\left(1+\frac{1}{\dfrac{n^2-n-1}{3n-2}}\right)^{\frac{n^2-n-1}{3n-2}}\right]^{\frac{-(3n-2)n^3}{(n^2-n-1)(n^2+4)}}$$

Así, el límite propuesto existe y vale e^{-3} puesto que, cuando n tiende a infinito, la expresión entre corchetes tiende a e y el exponente a -3

2. Teniendo en cuenta que $a_{n+1}=a_n-\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, se tiene que,

   - para $n=1$, $a_2=a_1-\dfrac{1}{5}$
   - para $n=2$, $a_3=a_2-\left(\dfrac{1}{5}\right)^2=a_1-\left(\dfrac{1}{5}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^2\right)$

- para $n=3$, $a_4 = a_3 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 = a_1 - \left(\frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3\right)$

$$\vdots$$

Podemos intuir que, para cualquier natural n, se tiene que $a_{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k$, pudiendo probar dicha igualdad por inducción ya que es evidentemente cierta para $n=1$ y, si suponemos que es cierta para algún natural n, se tiene que

$$a_{n+2} = a_{n+1} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n+1} \left(\frac{1}{5}\right)^k$$

Así, puesto que, tal y como se afirma en el enunciado, la sucesión a_n converge a 0 se tiene que

$$0 = \lim a_n = \lim a_{n+1} = \lim \left(a_1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k\right) = a_1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^k = a_1 - \frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = a_1 - \frac{1}{4}$$

de donde podemos afirmar que $a_1 = \frac{1}{4}$. Además, denotando por

$$S_n = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

multiplicando por $\frac{-1}{5}$ para obtener que

$$\frac{-1}{5} \cdot S_n = - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^3 - \dots - \left(\frac{1}{5}\right)^n - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

y sumando ambas igualdades obtenemos que

$$\left(1 - \frac{1}{5}\right) \cdot S_n = \frac{4}{5} \cdot S_n = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

de donde, despejando convenientemente, obtenemos que $S_n = \dfrac{\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}}{\frac{4}{5}}$ y, operando convenientemente, que $S_n = \frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$. Así, llevando esta igualdad a la expresión obtenida anteriormente obtenida para a_{n+1}, y teniendo en cuenta que $a_1 = \frac{1}{4}$, se tiene que

$$a_{n+1} = a_1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{5}\right)^k = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n+1}$$

Así, podemos afirmar que $a_{10} = \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10} = \frac{1}{4 \cdot 5^9} = \frac{1}{100 \cdot 5^7} = \frac{1}{7812500}$, que la sucesión $\{a_n\}$ es sumable puesto que es geométrica de razón $\frac{1}{5} < 1$ y además

$$\sum_{n=12}^{\infty} a_n = \sum_{n=12}^{\infty} \frac{5}{4} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{5}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{12}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{\left(\frac{1}{5}\right)^{12}}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{4 \cdot 4 \cdot 5^{10}} = \frac{1}{4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 5^6} = \frac{1}{156250000}$$