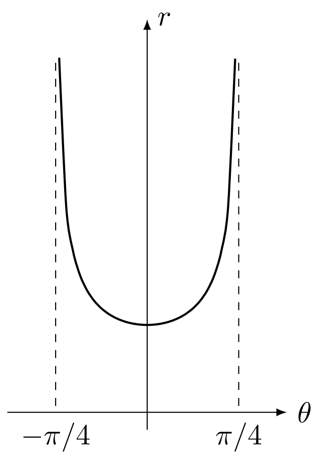
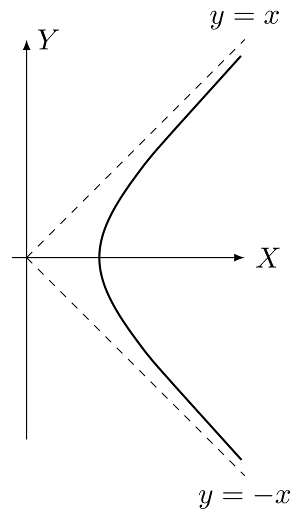
Prueba S6: 12 de enero de 2011

1. Dibuje la curva polar $r = \dfrac{1}{\sqrt{\cos 2\theta}}$, $\theta \in \left(\dfrac{-\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right)$, analizando la existencia de asíntotas en $\theta \to \pi/4$ y $\theta \to -\pi/4$.

   Solución:



Representación cartesiana de f



Representación polar de f

Los siguientes cálculos justifican las asíntotas que se muestran en la figura.

$$\lim_{\theta\to\pi/4} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{\cos 2\theta}\cos(\theta)} = \lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}}{\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos(\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(\pi/4)}{\cos(\pi/4)} = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\lim_{\theta\to\pi/4} (y(\theta) - 1\cdot x(\theta)) = \lim_{\theta\to\pi/4} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}} - \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) = \lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)-\cos(\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}} =$$

$$\overset{\text{(R.Lôp.)}}{=} \lim_{\theta\to\pi/4} \frac{\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(2\theta)(\cos(2\theta))^{-1/2}} = \lim_{\theta\to\pi/4} (\cos(2\theta))^{1/2}\frac{\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(2\theta)} = 0$$

$$\lim_{\theta\to-\pi/4} \frac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim_{\theta\to-\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)\sqrt{\cos 2\theta}}{\sqrt{\cos 2\theta}\cos(\theta)} = \lim_{\theta\to-\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}}{\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}\cos(\theta)} = \frac{\operatorname{sen}(-\pi/4)}{\cos(-\pi/4)} = -1$$

$$\lim_{\theta\to-\pi/4} (y(\theta) - (-1)\cdot x(\theta)) = \lim_{\theta\to-\pi/4} \left(\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}} + \frac{\cos(\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}}\right) = \lim_{\theta\to-\pi/4} \frac{\operatorname{sen}(\theta)+\cos(\theta)}{\sqrt{\cos 2\theta}} =$$

$$\overset{\text{(R.Lôp.)}}{=} \lim_{\theta\to-\pi/4} \frac{\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(2\theta)(\cos(2\theta))^{-1/2}} = \lim_{\theta\to-\pi/4} (\cos(2\theta))^{1/2}\frac{\cos(\theta)+\operatorname{sen}(\theta)}{-\operatorname{sen}(2\theta)} = 0$$

2. Identifique el lugar geométrico $x^2 - 4y^2 - 6x - 16y - 7 = 0$.

   Solución: Dado que la expresión no tiene término en xy, y los coeficientes en x^2 e y^2 tienen signos opuestos, concluimos que la cónica es una hipérbola o una cónica degenerada:

   $$0 = x^2-4y^2-6x-16y-7 = x^2-6x-4y^2-16y-7 = (x-3)^2-9-4(y+2)+16-7 = (x-3)^2-4(y+2)^2$$

   Por lo tanto, se trata de una cónica degenerada:

   $$0 = (x-3)^2 - 4(y+2)^2 = (x-3-2(y+2))(x-3+2(y+2)) = (x-2y-7)(x+2y+1)$$

   Es decir, el lugar geométrico está formado por las rectas $x - 2y - 7 = 0$, $x + 2y + 1 = 0$.

3. Determine todas las características necesarias para identificar y dibujar la siguiente cónica y obtenga una parametrización:

   $$12x^2 - 12xy + 3y^2 - x - 2y + 5 = 0$$

   Solución: Dado que $12^2 = 4\cdot 12\cdot 3$, sabemos que la cónica es o bien degenerada o bien una parábola. En primer lugar, simplificamos la expresión como sigue:

   $$0 = 12x^2 - 12xy + 3y^2 - x - 2y + 5 = 3(4x^2 - 4xy + y^2) - x - 2y + 5 = 3(2x - y)^2 - x - 2y + 5$$

   Por lo que podemos afirmar que existen constantes A, B y C tales que:

   $$\begin{aligned} 3(2x-y)^2 - x - 2y + 5 &= 3(2x - y + A)^2 + B(x + 2y + C) = \\ &= 3(2x-y)^2 + 6A(2x-y) + 3A^2 + B(x + 2y + C) = \\ &= 3(2x-y)^2 + (12A + B)x + (-6A + 2B)y + 3A^2 + BC \end{aligned}$$

   Hallamos estas constantes resolviendo el sistema

   $$\begin{aligned} 12A + B &= -1 \\ -6A + 2B &= -2 \\ 3A^2 + BC &= 5 \end{aligned}$$

   Las dos primeras forma un sistema lineal en A y B cuya solución es $A = 0$ y $B = -1$; de la tercera ecuación deducimos entonces que $C = -5$. Por lo tanto, la ecuación normalizada de la parábola es:

   $$3(2x - y)^2 - (x + 2y - 5) = 0$$

   Si no sacamos factor común 3 antes de introducir las constantes, obtendríamos el siguiente procedimiento: existen constantes A, B y C tales que:

   $$\begin{aligned} 12x^2 - 12xy + 3y^2 - x - 2y + 5 &= (x\sqrt{12} - y\sqrt{3} + A)^2 + B(x\sqrt{3} + y\sqrt{12} + C) = \\ &= (2x\sqrt{3} - y\sqrt{3} + A)^2 + B(x\sqrt{3} + 2y\sqrt{3} + C) = \\ &= 12x^2 - 12xy + 3y^2 + (4A\sqrt{3} + B\sqrt{3})x + (-2A\sqrt{3} + 2B\sqrt{3})y + A^2 + BC \end{aligned}$$

   Y de ahí:

   $$\left.\begin{aligned} 4A\sqrt{3} + B\sqrt{3} &= -1 \\ -2A\sqrt{3} + 2B\sqrt{3} &= -2 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 4A\sqrt{3} + B\sqrt{3} &= -1 \\ -4A\sqrt{3} + 4B\sqrt{3} &= -4 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} 4A\sqrt{3} + B\sqrt{3} &= -1 \\ 5B\sqrt{3} &= -5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow B = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$

$$\left.\begin{array}{rl} 4A\sqrt{3}+B\sqrt{3} & =-1 \\ -2A\sqrt{3}+2B\sqrt{3} & =-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} -8A\sqrt{3}-2B\sqrt{3} & =2 \\ -2A\sqrt{3}+2B\sqrt{3} & =-2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 4A\sqrt{3}+B\sqrt{3} & =-1 \\ -10A\sqrt{3} & =0 \end{array}\right\} \Longrightarrow A=0$$

Además, $A^2+BC=5$ y por lo tanto, $C=-5\sqrt{3}$. En consecuencia, la forma normalizada queda:

$$\begin{aligned} (2x\sqrt{3}-y\sqrt{3})^2-\frac{1}{\sqrt{3}}(x\sqrt{3}+2y\sqrt{3}-5\sqrt{3}) &= 0 \\ (\sqrt{3})^2(2x-y)^2-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}(x+2y-5) &= 0 \\ 3(2x-y)^2-(x+2y-5) &= 0 \end{aligned}$$

La recta $2x-y=0$ es el eje de la parábola y la recta $x+2y-5=0$ es la tangente al vértice, que determinamos calculando la solución del sistema:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x-y & =0 \\ x+2y-5 & =0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 4x-2y & =0 \\ x+2y-5 & =0 \end{array}\right\} 5x-5=0 \Longrightarrow x=1$$

$$\left.\begin{array}{rl} 2x-y & =0 \\ x+2y-5 & =0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 2x-y & = \\ -2x-4y+10 & =0 \end{array}\right\} -5y+10=0 \Longrightarrow y=2$$

Dado que $B=-1<0$, la apertura de la parábola está en la dirección del vector $(1,2)$.

Finalmente, obtenemos una parametrización resolviendo el siguiente sistema lineal:

$$\left.\begin{array}{rl} 2x-y & =t \\ x+2y-5 & =3t^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 4x-2y & =2t \\ x+2y-5 & =3t^2 \end{array}\right\} 5x-5=3t^2+2t \Longrightarrow x=\frac{1}{5}(3t^2+2t+5)$$

$$\left.\begin{array}{rl} 2x-y & =t \\ x+2y-5 & =3t^2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{rl} 2x-y & =t \\ 2x+4y-10 & =6t^2 \end{array}\right\} 5y-10=6t^2-t \Longrightarrow y=\frac{1}{5}(6t^2-t+10)$$