

Cálculo para la Computación

Curso 2016-2017

E.T.S. Ingeniería Informática



Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga





Cálculo para la computación

©2016, Agustín Valverde Ramos.




Este trabajo está editado con licencia “Creative Commons” del tipo:

Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 3.0 España.

Usted es libre de:

-  Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.
-  Hacer obras derivadas.

Bajo las condiciones siguientes:

-  **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
-  **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
-  **Compartir bajo la misma licencia.** Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Índice general

1. Preliminares	5
1.1. Funciones reales	9
1.2. Ecuaciones y sistemas de ecuaciones	22
1.3. Los números complejos	27
1.4. Polinomios	49
2. Cálculo diferencial	85
2.1. Curvas planas	87
2.2. Campos escalares	117
2.3. Optimización de campos escalares	139
3. Cálculo integral	171
3.1. Cálculo de primitivas	173
3.2. Ecuaciones diferenciales	185
3.3. Integración de funciones de una variable	199
3.4. Integración doble	211
4. Sucesiones y series numéricas	235
4.1. Sucesiones	237
4.2. Series numéricas	256

Preliminares

Contenidos.

- LECCIÓN 1.1: FUNCIONES REALES. Funciones elementales. Límites y continuidad. Derivabilidad.
- LECCIÓN 1.2: ECUACIONES Y SISTEMAS DE ECUACIONES.
- LECCIÓN 1.3: LOS NÚMEROS COMPLEJOS. Definición de número complejo. Binomio de Newton. Funciones destacadas sobre los números complejos. Exponencial compleja. Fórmula de De Moivre
- LECCIÓN 1.4: POLINOMIOS. Evaluación de polinomios: método de Horner. Compleción de cuadrados. Cambio de centro de un polinomio. Funciones racionales. Polinomios de Taylor.

Prerrequisitos. Gran parte del contenido de este tema debe ser conocido por el alumno, por lo que uno de los objetivos es recordar algunos conocimientos: saber manejar con soltura expresiones algebraicas (resolución de ecuaciones, simplificación, ...) en las que aparezcan funciones elementales de tipo polinómico, potenciales, logarítmicas y trigonométricas. También será necesario saber derivar funciones de una variable y calcular primitivas inmediatas.

Objetivos. Los objetivos fundamentales del tema son recordar y reforzar la manipulación de expresiones algebraicas, en especial los polinomios; recordar y reforzar las técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones; saber operar con números complejos; saber utilizar los números complejos como herramienta en la resolución de problemas con números reales; y saber calcular polinomios de Taylor.

Resultados de aprendizaje.

- *Números complejos:* Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, con o sin funciones específicas de complejos. Resolución de ecuaciones y factorización de polinomios que requieran el cálculo de raíces complejas. Conversión de

funciones tipo $\cos nz$ o $\sin nz$. Conversión de funciones tipo $\cos^n z$ o $\sin^n z$ y cálculo de sus primitivas.

- *Identificación de coeficientes*: Factorización de polinomios. Descomposición de funciones racionales en suma de racionales simples y cálculo de sus primitivas.
- *Cambio del centro de un polinomio*: Primitivas de funciones racionales con denominador $(x - a)^n$. Compleción de cuadrados para calcular primitivas. Resolución de ecuaciones.
- *Polinomio de Taylor*: Calcular el polinomio de Taylor de orden n de una función elemental. Calcular el polinomio de Taylor de un orden dado de cualquier función, usando la definición o las propiedades algebraicas.

Los contenidos de este primer tema giran alrededor de dos nociones básicas: los *polinomios* y los *números complejos*. Sin embargo, el tema está concebido para que gran parte del trabajo necesario para su estudio sea repasar y reforzar conceptos y técnicas que el alumno debe conocer al iniciar unos estudios universitarios. El contenido y los objetivos de este tema son, por lo tanto, fundamentalmente transversales; aparte del trabajo de repaso, los métodos y conceptos nuevos que se aprenden se utilizarán de forma instrumental a lo largo del resto del curso.

Dentro de la lección dedicada a los polinomios, aparecen los polinomios de Taylor. Si bien hasta el tema dedicado a las series no aprenderemos sus aplicaciones, la inclusión en este tema servirá para que el alumno repase las reglas de derivación y las funciones elementales, a la vez que aprende algo nuevo. De la misma forma, los números complejos no representan un tema especialmente difícil de forma aislada, pero requiere que el alumno recuerde propiedades y técnicas de manipulación de potencias, logaritmos y funciones trigonométricas.

Por último, debemos tener en cuenta que con este primer tema el alumno empieza a enfrentarse a un texto científico estructurado siguiendo unos convenios a los que debe adaptarse y cuyo aprendizaje también es importante para su formación posterior. Destacamos aquí algunos aspectos importantes:

- Las definiciones, teoremas, ejemplos, ... se numeran para poder localizarlos fácilmente cuando se haga referencia a ellos en otras partes del libro. De la misma forma, también se numeran algunas fórmulas y expresiones expuestas de forma destacada.
- Aunque en pocas ocasiones, usaremos *notas a pie de página* para incluir referencias externas y establecer relaciones con otras asignaturas, libros o temas de interés. Su contenido no es fundamental para el desarrollo y preparación de la asignatura.
- Los enunciados etiquetados con “Observación” se usarán para recoger aclaraciones sobre lenguaje matemático, símbolos y notaciones. El alumno debe

aprender a utilizar con corrección el lenguaje matemático, lo que también repercutirá en su evaluación.

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

LECCIÓN 1.1

Funciones reales

Los conceptos y resultados que recogemos en esta lección deben ser conocidos por el alumno y, por lo tanto, su objetivo es que sirva para repasar y como referencia para el resto del curso.

Una *función real de variable real* es una relación que, a cada número de un conjunto $D \subset \mathbb{R}$, que se llama *dominio*, le asocia un único número real. Si llamamos f a la función, escribimos

$$f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

y usamos $f(x)$ para representar al único número real asociado por f al número x . Habitualmente, las funciones se determinan mediante fórmulas que describen esta relación. Así por ejemplo, presentaremos una función diciendo:

$$\text{“sea } f: (1, 2] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}\text{”}.$$

En este caso, el intervalo $(1, 2]$ es el dominio de f , lo que podemos indicar igualmente con $\text{Dom}(f) = (1, 2]$.

Aunque normalmente necesitaremos especificar el dominio de la función en el que vamos a trabajar, también es habitual que nos centremos solamente en la fórmula que define la función; en estos casos, consideramos que el dominio es el mayor conjunto sobre el que está definida dicha fórmula. Por ejemplo, si presentamos una función diciendo “sea $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ” entendemos que $\text{Dom}(f) = (-1, 1)$.

El *recorrido* o *imagen* de una función es el conjunto de los posibles valores que toma la función, es decir: $\text{Im}(f) = \{f(x); x \in \text{Dom}(f)\}$.

OBSERVACIÓN 1.1.1 Antes de continuar, es conveniente hacer algunas observaciones sobre determinados aspectos de la notación utilizada hasta ahora.

1. En las expresiones matemáticas, se utilizan letras para representar variables y constantes, ya sea para denotar números o funciones. Para distinguir entre constantes y variables, es habitual utilizar letras cursivas para variables e incógnitas (x, y, \dots) y letras en redonda para representar constantes (por ejemplo, el número e o la unidad imaginaria i). El mismo criterio se sigue para las funciones: $f(x)$ representa una función arbitraria, mientras que $\cos(x)$ es la función coseno y $\exp(x)$ es la función exponencial. Este tipo de convenios tiene su contrapartida en los lenguajes de programación, que pueden utilizar determinadas restricciones para expresar objetos constantes y objetos variables.
2. Tal y como hemos visto antes, la notación $f(x)$ indica que f es el nombre dado a la función y (x) indica la letra usada en la expresión como variable *independiente*. De esta forma, siempre que queramos sustituir esta variable por un

número o expresión, lo escribiremos delimitado por los paréntesis. Por lo tanto, deberemos escribir, por ejemplo, $\cos(\theta)$, $\exp(2x)$, $\log(x+1)$,... Sin embargo, es habitual en el lenguaje matemático prescindir de los paréntesis siempre y cuando esto no provoque confusión o ambigüedad. Así, podremos escribir $\cos \theta$ o $\exp 2x$ y entenderemos que $\log x + 1$ es igual a $1 + \log(x)$. Tendremos que prestar mucha atención a este tipo de simplificaciones y añadir los paréntesis cuando no estemos seguros de que su ausencia provoque ambigüedades. En los lenguajes de programación, estas simplificaciones se usan raras veces.

Funciones elementales. En este curso, vamos a trabajar principalmente con funciones definidas en *términos de funciones elementales*, es decir, funciones determinadas por la composición y operaciones algebraicas (suma, resta, producto y división) entre funciones elementales. Recordamos a continuación la lista de funciones que conocemos como *funciones elementales*:

- *Funciones polinómicas*, a las cuáles dedicaremos una lección más adelante en este tema.
- *Funciones potenciales*: $p_\alpha(x) = x^\alpha$, siendo α cualquier número real. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, la correspondiente función potencial es un polinomio. El dominio de estas funciones depende de α .
- *Función exponencial*: $\exp(x) = e^x$. Solo consideremos como elemental a la de base e, ya que el resto se pueden definir a partir de ella.
- *Función logaritmo neperiano*: $\log(x) = \ln(x) = L(x)$. Estas son las tres notaciones habituales para el logaritmo con base e, aunque en este curso utilizaremos principalmente \log . El resto de los logaritmos no se consideran como elementales, ya que se pueden definir a partir del neperiano. El dominio de la función logaritmo es $(0, +\infty)$.
- *Función seno*: $\sin(x)$
- *Función coseno*: $\cos(x)$. A partir de las funciones seno y coseno se definen el resto de las funciones trigonométricas como la tangente: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- *Función arcoseno*: $\arcsen(x)$, que es la función *inversa* del seno. Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y consideramos que su recorrido es $[-\pi/2, \pi/2]$
- *Función arcocoseno*: $\arccos(x)$, que es la función *inversa* del coseno. Su dominio es el intervalo $[-1, 1]$ y consideramos que su recorrido es $[0, \pi]$
- *Función arcotangente*: $\operatorname{arctg}(x)$, que es la función *inversa* de la tangente. Su dominio es el intervalo \mathbb{R} y consideramos que su recorrido es $[-\pi/2, \pi/2]$

EJEMPLO 1.1.2 Aunque solo consideramos como elementales las anteriores, hay otras funciones importantes y con “nombre propio”:

1. Las funciones exponenciales con base distinta de e se pueden definir fácilmente a partir de la función exponencial:

$$a^x = \exp(\log(a^x)) = \exp(x \log a)$$

2. De la misma forma, los logaritmos con base distinta de e , se pueden definir a partir del logaritmo neperiano:

$$\begin{aligned} y &= \log_a(x) \\ a^y &= x \\ \log(a^y) &= \log(x) \\ y \log(a) &= \log(x) \\ y &= \frac{\log x}{\log a} \\ \log_a(x) &= \frac{\log x}{\log a} \end{aligned}$$

3. Es conveniente conocer el resto de las funciones trigonométricas, su definición a partir del seno y el coseno y las propiedades fundamentales de todas ellas:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{cos} x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{sen} x}, \quad \sec x = \frac{1}{\operatorname{cos} x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

4. Las *funciones hiperbólicas* se definen a partir de la función exponencial; las fundamentales son el *seno hiperbólico*, \sinh , y el *coseno hiperbólico*, \cosh , que se definen como

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

A partir de ellas se pueden definir el resto de las funciones hiperbólicas siguiendo el mismo esquema que para las funciones trigonométricas.

5. Podremos manejar expresiones potenciales en donde la variable aparece tanto en la base como en el exponente, como por ejemplo: $f(x) = (1+x)^{2x}$. Estas expresiones se definen a partir de las funciones exponencial y logaritmo como sigue:

$$g(x)^{h(x)} = \exp(\log g(x)^{h(x)}) = \exp(h(x) \log g(x)). \quad \square$$

Límites y continuidad. Recordemos la definición de límite de una función real de variable real.

DEFINICIÓN 1.1.3 Sea $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que el límite de f cuando x tiende a $a \in \mathbb{R}$ es $\ell \in \mathbb{R}$ si: para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in D$, $x \neq a$ y $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - \ell| < \varepsilon$. En tal caso, escribimos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$$

También podemos calcular límites cuando x tiene a $+\infty$ o a $-\infty$ así como concluir que el valor de un límite sea $+\infty$ o a $-\infty$. No incluimos la definición detallada de todas las situaciones posibles, ya que entendemos que deben ser conocidas por el alumno y además no necesitaremos trabajar con las definiciones.

En cualquier caso, estas definiciones no establecen métodos para decidir si un límite existe o no y en tal caso, determinarlo. La propiedad de *continuidad* de las funciones elementales y las propiedades algebraicas del operador límite son las herramientas básicas para el estudio y cálculo de límites.

DEFINICIÓN 1.1.4 Decimos que la función f es continua en $a \in \text{Dom}(f)$, si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Todas las funciones elementales son continuas en su dominio, así como todas las que se pueden definir en términos de funciones elementales.

TEOREMA 1.1.5 Si una función está definida, en un entorno de un punto a , por una única expresión determinada por la composición y operaciones algebraicas (suma, producto y cociente) entre funciones elementales, entonces la función es continua en a .

Este resultado permite concluir que el interés práctico del estudio de cálculo de límites está exclusivamente en aquellos puntos que quedan fuera del dominio y en $\pm\infty$. En estos casos, las propiedades algebraicas que enunciamos a continuación y el teorema de L'Hôpital que recordaremos más adelante serán suficientes para calcular estos límites.

PROPOSICIÓN 1.1.6

1. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) + \lim_{x \rightarrow a} (g(x))$ si ambos límites son reales.
2. $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x)) \cdot \lim_{x \rightarrow a} (g(x))$ si ambos límites son reales.
3. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow a} (f(x))}$
4. Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$

En los tres primeros apartados de esta proposición, solo consideramos límites reales. Para los límites infinitos se verifican también estas propiedades con algunas excepciones; vemos a continuación las operaciones válidas entre estos límites:

- $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$, $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ y $a \pm \infty = \pm\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.
- $(\pm\infty) \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$, $a \cdot (\pm\infty) = \pm\infty$ si $a \neq 0$. En ambos casos, aplicamos la regla de los signos para determinar el signo correcto.

- $\frac{1}{\pm\infty} = 0$, $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$. En donde, 0^+ indica que el límite del denominador es 0 pero que la función es positiva y 0^- indica que el límite del denominador es 0 pero que la función es negativa.

Las situaciones que no están consideradas en las igualdades anteriores son:¹

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \cdot (\pm\infty) \quad (+\infty) - (+\infty)$$

Si, en una primera evaluación, nos encontramos con uno de estos casos, diremos que el límite está *indeterminado (a priori)*; necesitaremos, por lo tanto, realizar transformaciones algebraicas que conviertan la expresión de la función en otra que sí permita calcular el límite, o bien aplicar otras técnicas, como la sustitución de *infinitésimos equivalentes* o la regla de L'Hôpital.

EJEMPLO 1.1.7

1. No podemos calcular el límite $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1)$ como suma de los límites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^2 + 1) = -\infty,$$

ya que nos encontramos con una indeterminación $(\infty - \infty)$. Sin embargo, si sacamos el factor común x^3 , convertimos la expresión en un producto, cuyo límite sí se puede calcular con las propiedades algebraicas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = (+\infty \cdot 1) = +\infty$$

2. La idea utilizada en el apartado anterior permite calcular los límites en $+\infty$ y $-\infty$ de cualquier función racional.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2}{x^3 + 3x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4}{x^3} \cdot \frac{1 - \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot \frac{1 - \frac{2}{x^4}}{1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}} = (-\infty \cdot 1) = -\infty \quad \square \end{aligned}$$

Debemos recordar que en muchas ocasiones necesitaremos calcular *límites laterales* para estudiar algunos límites.

EJEMPLO 1.1.8 Evaluando el siguiente límite como cociente de funciones, nos encontramos una indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

Esto significa que los dos polinomios son divisibles por $x - 1$; por lo tanto, podemos factorizar numerador y denominador y simplificar el factor $x - 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x - 1} = \left(\frac{2}{0}\right)$$

¹La indeterminación $(+\infty) - (+\infty)$ se denota más brevemente por $(\infty - \infty)$ y puede aparecer tanto en una suma, $(+\infty) + (-\infty)$ como en una resta $(+\infty) - (+\infty)$

Para poder terminar la evaluación del límite, debemos determinar el signo de la función alrededor del punto 1 y, para ello, debemos evaluar límites laterales.

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x - 1} &= \left(\frac{2}{0^+} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x - 1} &= \left(\frac{2}{0^-} \right) = -\infty\end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite inicial no existe. \square

Tal y como hemos visto en el apartado 5 del ejemplo 1.1.2 en la página 11 las funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ deben ser expresadas como funciones exponenciales a través de la igualdad

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x) \log f(x)).$$

De esta forma, las indeterminaciones que podemos obtener al calcular límites sobre este tipo de funciones, se derivan de las indeterminaciones que obtengamos en el producto que queda dentro de la función exponencial. Concretamente, las posibles indeterminaciones son

$$1^\infty, \quad 0^0, \quad \infty^0.$$

Derivabilidad. Recordamos ahora la noción de derivabilidad de funciones reales, sus propiedades más importantes y sus aplicaciones.

DEFINICIÓN 1.1.9 Decimos que f es derivable en $a \in \text{Dom}(f)$ si el siguiente límite existe y es un número real

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

En tal caso, este límite se denota por $f'(a)$, que se denomina derivada de f en a .

Otra forma equivalente de expresar el límite que define la derivada en un punto es la siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Una notación alternativa de la derivada es la conocida como notación Leibniz:

$$\frac{df}{dx}(x).$$

Mientras que la notación “comilla” solo se puede utilizar sobre el nombre dado a la función ($f'(x)$, $\cos'(x)$, $\exp'(x) \dots$), la notación de Leibniz se puede usar también sobre expresiones; por ejemplo:

$$\frac{d}{dx}(x^3 - \sin x).$$

Siendo en este segundo caso en donde es especialmente útil. Cuando queremos expresar la derivada en un punto concreto, podemos utilizar las siguientes notaciones:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{d}{dx}(f(x)) \right|_{x=a}$$

Para las derivadas n -ésimas también disponemos de los dos tipos de notación:

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}(x)$$

En la mayoría de los casos, es suficiente con las propiedades algebraicas de la derivación y las derivadas de las funciones elementales para calcular la derivada de cualquier función.

EJEMPLO 1.1.10 Aunque suponemos que el alumno debe conocer las derivadas de las funciones elementales, incluimos este ejemplo para que tenga un punto de referencia en caso de dudas.

- $\frac{d}{dx} x^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. Obsérvese que si $0 < \alpha < 1$, la función potencial es continua en $x = 0$ pero no es derivable.
- $\frac{d}{dx} e^x = e^x$
- $\frac{d}{dx} \log x = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$
- $\frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\frac{d}{dx} \arctg x = \frac{1}{1+x^2}$ □

PROPOSICIÓN 1.1.11 (PROPIEDADES ALGEBRAICAS)

1. *Linealidad:* $(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x)$, para todo par de números reales α, β .
2. $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
3. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
4. *Regla de la cadena:* $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Aunque es consecuencia de la regla del cociente, también es útil recordar la siguiente fórmula

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{-f'(x)}{(f(x))^2}$$

EJEMPLO 1.1.12 Vamos a calcular las derivadas de algunas funciones del ejemplo 1.1.2 (página 10).

- $\frac{d}{dx} a^x = \frac{d}{dx} \exp(x \log a) = \exp(x \log a) \log a = a^x \log a.$
- $\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\log x}{\log a} \right) = \frac{1}{x \log a}$
- $\frac{d}{dx} \operatorname{tg} x = \frac{d}{dx} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \right) = \frac{(\cos x)(\cos x) + (\operatorname{sen} x)(\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
- $\frac{d}{dx} \sec x = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\cos x} \right) = \frac{-(-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$
- $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$
- $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$
- $\frac{d}{dx} (1+x)^{2x} = \frac{d}{dx} \exp(2x \log(1+x)) =$
 $= \exp(2x \log(1+x)) \cdot \left(2 \log(1+x) + \frac{2x}{1+x} \right) = (1+x)^{2x} \left(2 \log(1+x) + \frac{2x}{1+x} \right)$
- Las derivadas de la función $\operatorname{arctg} x$ (y del resto de las funciones inversas) se determinan usando las propiedades algebraicas y el procedimiento llamado *derivación implícita*.

$$f(x) = \operatorname{arctg} x$$

$$\operatorname{tg}(f(x)) = x$$

Dado que estas funciones son iguales, sus derivadas también son iguales. En el lado izquierdo, derivamos usando la regla de la cadena:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \operatorname{tg}(f(x)) &= \frac{d}{dx}(x) \\ (1 + \operatorname{tg}^2 f(x)) f'(x) &= 1 \\ (1 + x^2) f'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{1 + x^2} \end{aligned} \quad \square$$

TEOREMA 1.1.13 (DE L'HÔPITAL)

1. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$ y existe el límite $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

EJEMPLO 1.1.14

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{1}{6} \quad \square$$

Otra importante aplicación de la derivada es que nos permite estudiar la monotonía y la concavidad de las funciones usando los siguientes resultados.

TEOREMA 1.1.15 *Si I es un intervalo y $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es creciente en I . Análogamente, si I es un intervalo y $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es decreciente en I .*

TEOREMA 1.1.16 *Si I es un intervalo y $f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es convexa en I (con forma de \smile). Análogamente, si I es un intervalo y $f''(x) \leq 0$ para todo $x \in I$, entonces f es cóncava en I (con forma de \frown).*

Primitivas. El cálculo de primitivas es la parte del cálculo integral que consiste en buscar una función cuya derivada coincida con una expresión dada. Por esta razón, se dice que el cálculo de primitivas es el proceso inverso a la derivación. Por ejemplo, dada la función $f(x) = 3x^2$, el objetivo es encontrar una función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$; en este caso, podemos considerar la función $F(x) = x^3$, pues $F'(x) = 3x^2 = f(x)$.

Sin embargo, a diferencia del cálculo de derivadas, el cálculo de primitivas no es un proceso automático. Es más, en muchos casos no es posible calcular una primitiva de una expresión en términos de funciones elementales, por ejemplo, para las funciones $f(x) = e^{-x^2}$ o $g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$ se sabe que existen primitivas pero no es posible expresarlas en términos de funciones elementales.

DEFINICIÓN 1.1.17 *Una función F es una primitiva de f en el intervalo I si verifica que $F'(x) = f(x)$ para todo x en I .*

Obsérvese que cualquier otra función construida a partir de la función $F(x)$ sumándole una constante también sería una primitiva, pues la derivada de cualquier función constante es 0. Así, $F_C(x) = x^3 + C$ es también una primitiva de $f(x) = 3x^2$ ya que $F'_C(x) = 3x^2 = f(x)$.

PROPOSICIÓN 1.1.18 *Si F es una primitiva de f en un intervalo I entonces la función G es primitiva de f si y sólo si G es de la forma:*

$$G(x) = F(x) + C \quad \text{para todo } x \text{ en } I$$

donde C es una constante.

De esta forma, llamamos *integral indefinida* a la familia de todas las primitivas de una función y escribimos

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

siendo F una primitiva de f . En esta expresión, $f(x)$ se llama *integrando*, dx se lee *diferencial de x* e indica la variable de integración y C se denomina *constante de integración*. La relación que existe entre los conceptos de derivada y primitiva

Fórmulas de derivación	Fórmulas de integración	
$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$ $\alpha \in \mathbb{R}$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$	$\int (f(x))^\alpha f'(x) dx = \frac{(f(x))^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $\alpha \neq -1$
$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}$ $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int \frac{1}{x} dx = \log x $ $\int e^x dx = e^x$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x) $ $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)}$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$ $\frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \cos x dx = \sin x$ $\int \sin x dx = -\cos x$ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$	$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x))$ $\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x))$ $\int \frac{f'(x)}{1+f(x)^2} dx = \operatorname{arctg} f(x)$

Figura 1.1: Derivadas e integrales inmediatas.

permite deducir fácilmente las propiedades de linealidad del operador, tal y como establecemos en el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 1.1.19 *La integral indefinida verifica las siguientes propiedades:*

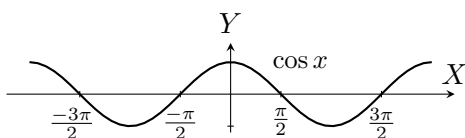
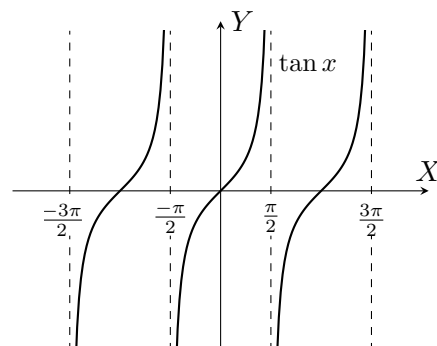
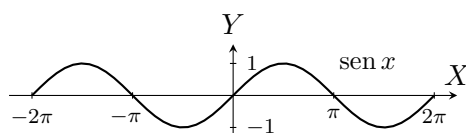
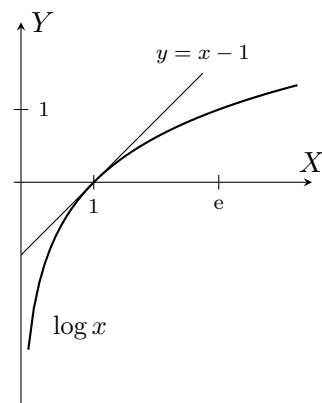
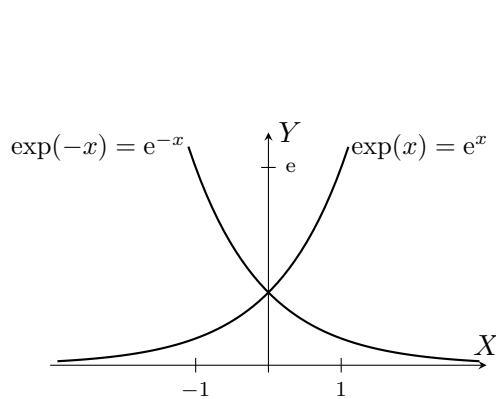
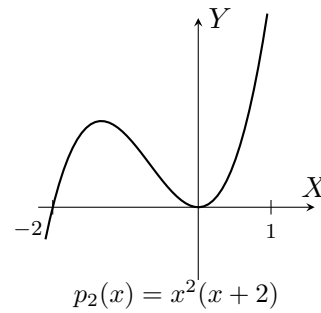
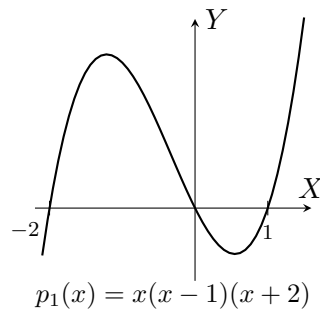
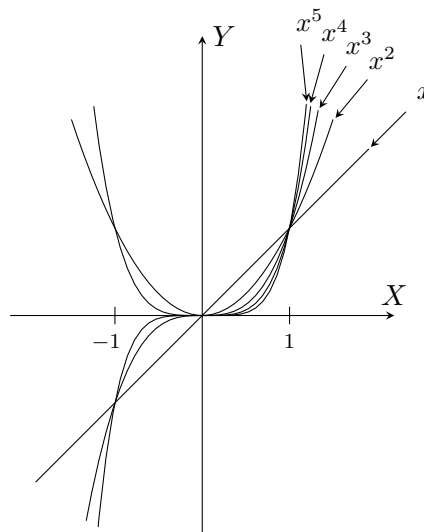
$$\begin{aligned} \int (f(x) + g(x)) dx &= \int f(x) dx + \int g(x) dx \\ \int k \cdot f(x) dx &= k \cdot \int f(x) dx, \quad \text{para todo } k \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

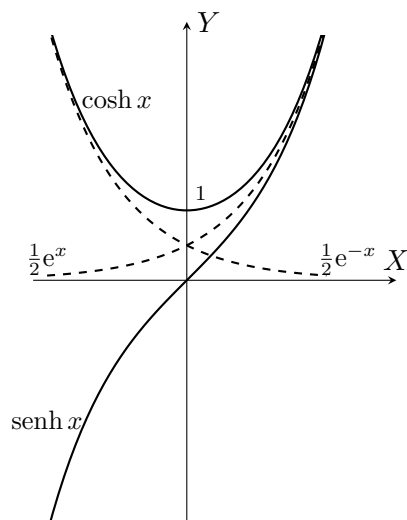
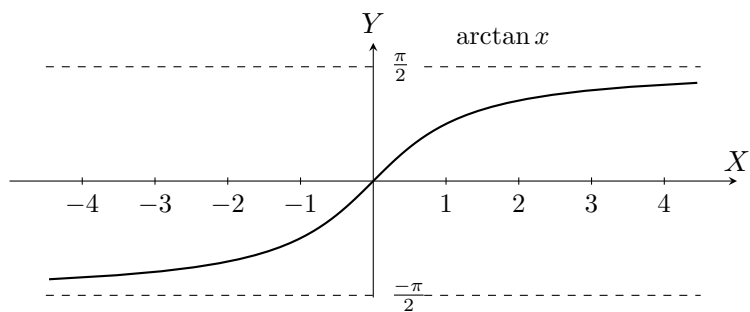
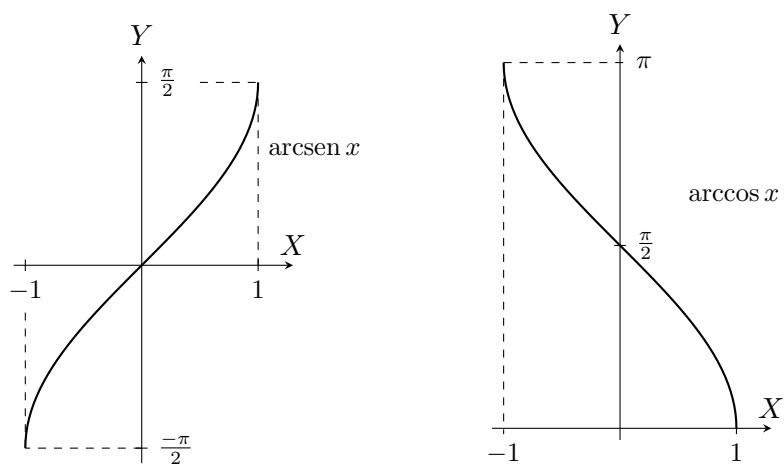
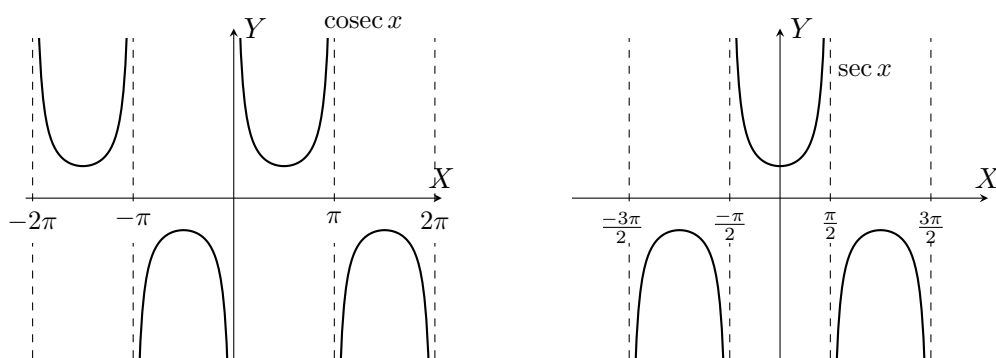
EJEMPLO 1.1.20 La integral indefinida de la función $15x^2 - 3 \sin x$ es

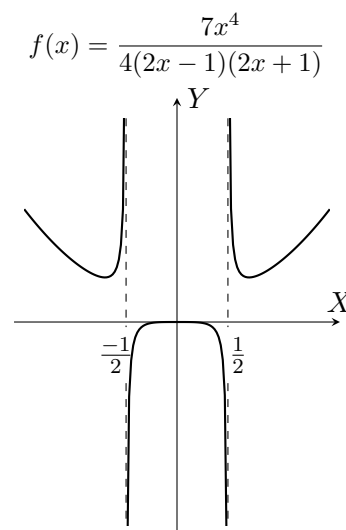
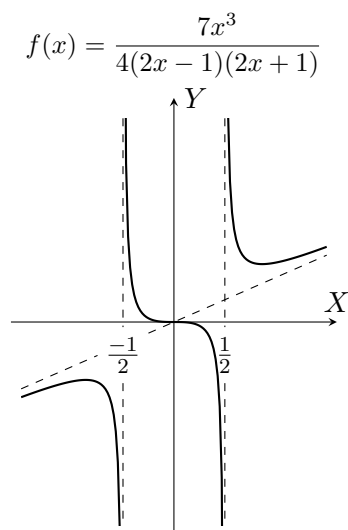
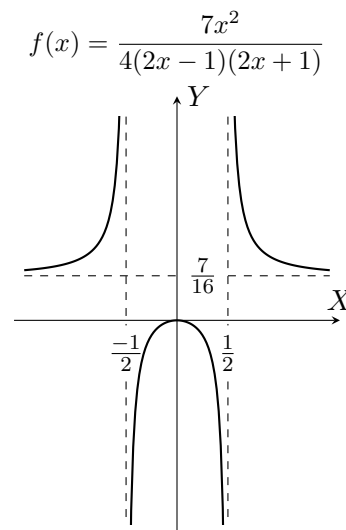
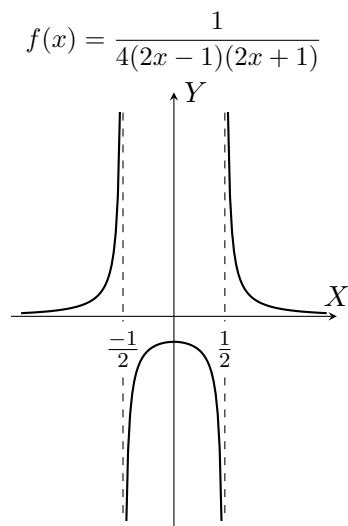
$$\begin{aligned} \int (15x^2 - 3 \sin x) dx &= \int (5(3x^2) + 3(-\sin x)) dx = \\ &= 5 \int 3x^2 dx + 3 \int -\sin x dx = \\ &= 5x^3 + 3 \cos x + C \end{aligned} \quad \square$$

En el tema 3 aprenderemos varias técnicas para calcular primitivas en términos de funciones elementales. Todas ellas requieren identificar, en algún momento, lo que se denominan *integrales inmediatas*, es decir, aquellas primitivas que pueden determinarse aplicando de forma inversa una regla de derivación. La tabla 1.1 recoge las integrales inmediatas básicas.

Funciones elementales: gráficas. Cerramos esta lección recogiendo las gráficas de las funciones elementales para que el alumno tenga un lugar de referencia cuando necesite recordarlas o resolver alguna duda. En el caso de las funciones polinómicas y de las racionales, solo hemos incluido algunos ejemplos. También añadimos las gráficas de otras funciones que, aunque no son elementales, sí será habitual su uso y por lo tanto también conviene visualizar rápidamente, como las funciones hiperbólicas.







LECCIÓN 1.2

Ecuaciones y sistemas de ecuaciones

La resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones es una herramienta básica en el desarrollo de múltiples ejercicios tanto de matemáticas como de otras materias científicas. Las técnicas de resolución se basan en las propiedades básicas de las operaciones algebraicas. Aunque el alumno debe conocer las técnicas básicas para el estudio de ecuaciones, en los ejemplos que componen esta sección establecemos algunas pautas, indicaciones y advertencias.

EJEMPLO 1.2.1 Vamos a resolver la ecuación

$$\sqrt{x} = \sqrt{x^2 + x - 1}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Antes de empezar, recordemos que, cuando trabajamos con números reales, \sqrt{x} representa la raíz positiva; de esta forma, si queremos expresar la raíz negativa, escribiremos $-\sqrt{x}$.

El primer paso en la resolución es elevar al cuadrado ambos lados de la igualdad para eliminar las raíces, pero además tendremos que descartar las soluciones que lleven a radicandos negativos, es decir, la ecuación es equivalente a:

$$x = x^2 + x - 1, \quad x \geq 0,$$

De la misma forma, la raíz cuadrada “cancela” un cuadrado, pero el resultado debe ser positivo, por lo que el resultado debe escribirse con valor absoluto:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{|a|^2} = |a|, \text{ para todo } a \in \mathbb{R}.$$

Siguiendo con la ecuación del ejemplo:

$$x = x^2 + x - 1, \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = x^2 - 1, \quad x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1.$$

Obsérvese que, en el último paso, hemos descartado la solución negativa de la ecuación. □

EJEMPLO 1.2.2 Vamos a resolver la ecuación

$$x^3 - 2x^2 + x = 0.$$

Un error bastante frecuente es efectuar directamente la siguiente simplificación:

$$x^2 - 2x + 1 = 0.$$

Hacemos esto porque dividimos ambos lados entre x , pero para hacer esto, debemos suponer que $x \neq 0$. Es preferible razonar de la siguiente forma. Sacando factor común x en la ecuación, obtenemos

$$x(x^2 - 2x + 1) = 0,$$

Dado que el producto de dos números es cero si y solo si uno de los dos lo es, esta ecuación se convierte en dos ecuaciones que debemos estudiar por separado:

$$x = 0, \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

La primera es trivial y la segunda lleva a la solución $x = 1$.

La factorización de expresiones es, en general, una técnica bastante útil para la resolución de ecuaciones, como podremos comprobar en las lecciones siguientes. \square

EJEMPLO 1.2.3 De los sistemas de ecuaciones, solo los denominados *sistemas lineales* son resolubles de manera mecánica; es decir, siempre es posible decidir si tienen o no soluciones y, en tal caso, determinarlas. Entendemos que el alumno debe conocer la teoría básica asociada a estos sistemas, así que solo vamos a resolver un ejemplo para insistir en que el método más simple y eficiente para resolverlos es el denominado *método de Gauss* o *reducción*. La asignatura *Estructuras algebraicas para la computación* dedicará un tema a este tipo de problemas.

En el desarrollo siguiente, utilizamos etiquetas para indicar para las operaciones realizadas: $(e2) - (e1) \rightarrow (e2)$ indica que restamos la primera a la segunda ecuación y que el resultado pasa a ser la nueva segunda ecuación.

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 2 \\ -x + y + 3z = -2 \end{array} \right\} \xrightarrow{(e2)-(e1) \rightarrow (e2)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ -x + y + 3z = -2 \end{array} \right\}$$

$$\xrightarrow{(e3)+(e1) \rightarrow (e3)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ y + 3z = 1 \\ 2y + 2z = -1 \end{array} \right\} \xrightarrow{(e3)-2*(e2) \rightarrow (e3)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ 2y + 6z = 2 \\ -4z = -3 \end{array} \right\}$$

El objetivo ha sido obtener un sistema “triangular”, que se resuelve fácilmente de abajo hacia arriba.

$$\left. \begin{array}{l} (e3) \Rightarrow \boxed{z = \frac{3}{4}} \\ (e2) \end{array} \right\} \Rightarrow 2y + 6\frac{3}{4} = 2 \Rightarrow \boxed{y = -\frac{5}{4}} \left. \begin{array}{l} \\ (e1) \end{array} \right\} \Rightarrow x - \frac{5}{4} - \frac{3}{4} = 1 \Rightarrow \boxed{x = 3}$$

\square

Para los sistemas no lineales, no disponemos de algoritmos similares al de Gauss para calcular, si existe, la solución de cualquier sistema. En estos casos, solo podemos utilizar “heurísticas”, es decir, reglas que, sin ser generales, son aplicables a muchos casos y, por lo tanto, es recomendable utilizarlas en primer lugar. No obstante, solo la experiencia y la intuición ayudarán a abordar con éxito este tipo de problemas.

1. *Sustitución*: Buscamos una ecuación que permita despejar fácilmente una variable, directamente o a partir de una factorización que divida el sistema en

varios casos. La variable despejada se sustituye en el resto de las ecuaciones, obteniendo uno o varios sistemas con menos variables.

2. *Igualación:* Si una de las variables se puede despejar en todas las ecuaciones en las que aparece, podemos hacerlo y a partir de ahí, generar por igualación un sistema equivalente pero con menos variables.
3. *Reducción:* Este método de simplificación consiste en sumar o restar ecuaciones, posiblemente multiplicadas por constantes o por expresiones; el proceso es similar al utilizado en sistemas lineales. Aunque no consigamos eliminar una variable, intentaremos reducir de esta forma la complejidad de las ecuaciones antes de aplicar las otras técnicas.

En los ejemplos siguientes mostramos cómo aplicar las técnicas anteriores.

EJEMPLO 1.2.4 Para resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 - y = 5 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$$

nos fijamos en la segunda ecuación, que permite despejar fácilmente una variable en función de la otra.

$$\left. \begin{array}{l} \text{(e2)} \Rightarrow y = 3x - 1 \\ \text{(e1)} x^2 - y = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 - 3x + 1 = 5 \Rightarrow x = 4, x = -1$$

Debemos tener cuidado al escribir las soluciones de un sistema y asociar correctamente los distintos valores que tome cada variable. En este ejemplo, $x = 4$ conduce a $y = 11$, mientras que $x = -1$ conduce a $y = -4$; por lo tanto, debemos escribir las soluciones dejando claras las asociaciones correctas:

$$\{x_1 = 4, y_1 = 11\}, \quad \{x_2 = -1, y_2 = -4\}. \quad \square$$

En los sistemas de ecuaciones lineales caben tres posibilidades: que no tengan solución, que tengan solamente una solución o que tengan infinitas soluciones. Como podemos ver en el ejemplo anterior, en los sistemas no lineales tenemos más posibilidades y puede haber más de una solución aunque estas no sean infinitas.

EJEMPLO 1.2.5 En el sistema

$$\begin{cases} 2x - xy = 0 \\ x - yz = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases} \quad x, y, z \in \mathbb{R},$$

elegimos en primer lugar la primera ecuación para factorizarla, sacando x como factor común:

$$0 = 2x - xy = x(2 - y).$$

De esta forma, obtenemos dos posibilidades, o bien $x = 0$, o bien $y = 2$, lo que permite simplificar las otras ecuaciones para obtener dos sistemas más sencillos:

$$(1) \begin{cases} x = 0 \\ yz = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y = 2 \\ x - 2z = 0 \\ x^2 + 4 + z^2 = 1 \end{cases}$$

La segunda ecuación de (1), conduce a dos posibilidades, o bien $y = 0$, o bien $z = 0$, que generan dos sistemas triviales:

$$(1.1) \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z^2 = 1 \end{cases} \quad (1.2) \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Las soluciones obtenidas a partir de estos son

$$\begin{aligned} \{x_1 = 0, y_1 = 0, z_1 = -1\}, & \quad \{x_2 = 0, y_2 = 0, z_2 = 1\}, \\ \{x_3 = 0, y_3 = -1, z_3 = 0\}, & \quad \{x_4 = 0, y_4 = 1, z_4 = 0\}. \end{aligned}$$

El sistema (2) no tiene soluciones en \mathbb{R} , ya que su tercera ecuación es equivalente a $x^2 + z^2 = -3$. \square

EJEMPLO 1.2.6 Vamos a resolver el sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x = yz \\ y = xz + 1 \end{cases}$$

La variable z aparece en las ecuaciones segunda y tercera, y en ambas podemos despejarla fácilmente:

$$z = \frac{x}{y} \quad z = \frac{y-1}{x} \quad (1.1)$$

Dado que hemos dividido entre x e y , posteriormente tendremos que analizar los casos en que $x = 0$ o $y = 0$. Aplicando *igualación* en (1.1) obtenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{y-1}{x} \Rightarrow x^2 - y^2 + y = 0,$$

por lo que nuestro sistema inicial se ha convertido en

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 1 &= 0 \\ x^2 - y^2 + y &= 0 \end{aligned}$$

Ahora vemos que podemos simplificar fácilmente el término x^2 restando las dos ecuaciones, para llegar a una ecuación en y :

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1, y = -\frac{1}{2}.$$

Utilizando la primera ecuación, $x^2 + y^2 - 1 = 0$, y que $z = \frac{x}{y}$, completamos la resolución:

$$\begin{aligned} \{x_1 = 0, y_1 = 1, z_1 = 0\}, \quad \{x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_2 = \frac{-1}{2}, z_2 = -\sqrt{3}\}, \\ \{x_3 = \frac{-\sqrt{3}}{2}, y_3 = \frac{-1}{2}, z_3 = \sqrt{3}\}. \end{aligned}$$

Finalmente, debemos analizar qué ocurre si $x = 0$ o $y = 0$. El caso $x = 0$ conduce fácilmente a la primera solución obtenida anteriormente. Por la segunda ecuación, si $y = 0$, entonces $x = 0$, lo cual es imposible atendiendo a la primera ecuación del sistema inicial. \square

LECCIÓN 1.3

Los números complejos

En principio, los *números complejos* que introducimos en esta lección fueron definidos para cubrir una carencia de los números reales: hay ecuaciones polinómicas que no tienen solución en \mathbb{R} ; por ejemplo, no hay ningún número real x , tal que $x^2 + 1 = 0$. Esta propiedad es la que los determina, pero veremos que podremos utilizarlos para resolver o analizar otros problemas geométricos y trigonométricos. En el campo de la ingeniería electrónica, los números complejos se usan en la descripción de señales periódicas y en el estudio de redes eléctricas.

Antes de introducir los números complejos, es conveniente recordar algunos conceptos. En concreto, vamos a repasar los conjuntos numéricos y las propiedades que rigen las operaciones dentro de ellos. En la asignatura de *Estructuras algebraicas para la computación* estudiaremos con detalle la estructura y propiedades de los siguientes conjuntos, aquí nos limitamos a recordar su denominación y notación.

- *Números naturales:* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- *Números enteros:* $\mathbb{Z} = \{0, 1, 2, 3, \dots\} \cup \{-1, -2, -3, \dots\}$.
- *Números racionales:* $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}; p, q \text{ enteros primos entre sí, } q \neq 0\right\}$.

Finalmente, el conjunto de los *números reales* se denota por \mathbb{R} , pero no es posible hacer una descripción sencilla de ellos tal y como hemos hecho con los otros. Tanto el conjunto de los números racionales como el de los reales con las operaciones de suma y producto, tienen estructura de *cuerpo ordenado*, es decir, en ellos se verifican las propiedades que enunciamos a continuación.

- *Asociatividad:* Todos los números reales a , b y c verifican

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

- *Existencia de elemento neutro y de unidad:* el número 0 es el elemento neutro para la suma y el número 1 es la unidad para el producto, es decir, para todo número real a

$$a + 0 = 0 + a = a, \quad a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

- *Existencia de elementos opuestos e inversos:* el número $-a$ es el opuesto de a respecto de la suma, es decir, $a + (-a) = (-a) + a = 0$ para todo número real a . El número $a^{-1} = \frac{1}{a}$ es el inverso de a respecto del producto, es decir, $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, para todo número real $a \neq 0$.

- *Conmutatividad:* Todos los números reales a y b verifican

$$a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a$$

- *Distributividad*: Todos los números reales a , b y c verifican

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Si aplicamos estas igualdades de derecha a izquierda, decimos que *sacamos un factor común*.

- *Ley de tricotomía*: Cada par de números reales a y b verifica una y solo una de las siguientes relaciones:

$$a = b \quad a < b \quad b < a$$

Esta propiedad también se enuncia diciendo que el orden entre números reales es *total*.

- *La suma es cerrada para el orden*: Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$
- *El producto es cerrado para el orden*: Si $a > b$, $c > 0$, entonces $a \cdot c > b \cdot c$

La última propiedad no se verifica si $c < 0$, pero es fácil deducir lo que ocurre en ese caso. Si $a > b$, $c < 0$, entonces $0 = c - c < 0 - c = -c$ y $a \cdot (-c) > b \cdot (-c)$; sumando $a \cdot c$ y $b \cdot c$ en ambos lados, obtenemos que $b \cdot c > a \cdot c$

El alumno debe conocer estas propiedades, ya que las habrá usado para resolver ecuaciones e inecuaciones y para simplificar expresiones algebraicas en la resolución de múltiples ejercicios. Es conveniente que, a partir de ahora, se vaya acostumbrando a sus denominaciones y a entender su significado.

Como ya hemos dicho, no es posible describir fácilmente a los números reales para distinguirlos de los números racionales. Ambos conjuntos numéricos comparten las propiedades que acabamos de recordar, pero el conjunto de los números reales posee una propiedad adicional que no tiene el de los racionales y que recogemos en el resultado siguiente.

TEOREMA 1.3.1 *Toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.*

Dejaremos para el tema 4, dedicado a las sucesiones y series de números reales, el estudio del significado y de las consecuencias de esta propiedad.

OBSERVACIÓN 1.3.2

1. La operación producto se expresa indistintamente con los símbolos ‘ \cdot ’ o ‘ \times ’, aunque en este curso, solo usaremos ‘ \cdot ’. Incluso omitiremos este símbolo si ello no conduce a error. Esta omisión es habitual porque, normalmente, utilizamos un único carácter para representar variables; de esta forma si, por ejemplo, nos encontramos la expresión ab , necesariamente tiene que corresponder al producto de a por b . Sin embargo, en los programas y lenguajes informáticos, es habitual utilizar variables con varios caracteres, por lo que se hace imprescindible hacer explícito el operador producto. También será imprescindible

usar explícitamente el operador para expresar el producto de dos números, por ejemplo, $2 \cdot 3 = 6$. Y en general lo escribiremos siempre que sea necesario para evitar confusiones.

2. A lo largo del curso vamos a usar muchas veces la palabra *algebraico*: hablamos de *expresiones algebraicas* para referirnos a expresiones en las que solo intervienen las operaciones de suma, diferencia, producto y cociente entre números y variables. Por otra parte, hablamos de *propiedades algebraicas* de un concepto, de una función o de un operador, para referirnos a las propiedades en relación con esas mismas operaciones.

En el conjunto de los números reales, podemos formular ecuaciones polinómicas sin solución. Por ejemplo, dado que $x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, no existe ningún número real tal que $x^2 = -1$, es decir, tal que $x^2 + 1 = 0$. Los números complejos se introducen para cubrir esta limitación, y la ecuación $x^2 + 1 = 0$ es la base de su definición.

DEFINICIÓN 1.3.3 *El conjunto de los números complejos es el menor cuerpo que contiene a \mathbb{R} y al número i que verifica $i^2 = -1$.*

Esta definición debe considerarse intuitiva e informal; la introducción formal queda fuera de los objetivos de este curso.

El número $i \notin \mathbb{R}$ se denomina *unidad imaginaria*. La definición anterior establece que los números complejos son expresiones algebraicas que involucran a la unidad imaginaria i y a cualquier número real. Sin embargo, las propiedades de cuerpo y la identidad $i^2 = -1$ permitirán simplificar estas expresiones hasta llegar a una del tipo $a + b \cdot i$, en donde, a y b son números reales; esta forma de escribir los números complejos se denomina *binómica* o *rectangular*.

EJEMPLO 1.3.4 Vemos a continuación dos ejemplos de como simplificar cualquier expresión algebraica con complejos hasta reducirla a su forma binómica.

$$\begin{aligned}(2 + i)(1 - 2i) &= 2 - 4i + i - 2i^2 \quad (\text{distributividad}) \\ &= 2 - 4i + i + 2 \quad (\text{definición de } i) \\ &= 4 - 3i\end{aligned}$$

Si $z = x + iy \in \mathbb{C}$, con $x, y \in \mathbb{R}$, el número x se denomina *parte real* de z , $\text{Re}(z) = x$, mientras que y se denomina *parte imaginaria*, $\text{Im}(z) = y$. La figura 1.2 muestra la representación habitual de los números complejos como puntos en el plano, de forma que la abscisa se corresponde con la parte real y la ordenada se corresponde con la parte imaginaria.

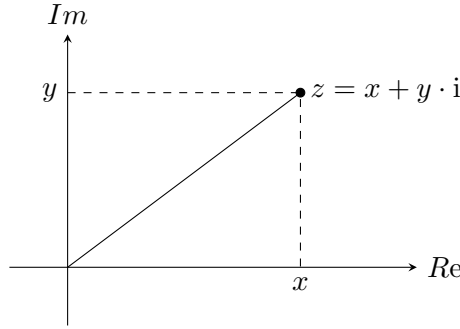


Figura 1.2: Representación gráfica de los números complejos

DEFINICIÓN 1.3.5 En los apartados siguientes, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$:

- *Conjugado de un número complejo:*

$$\bar{\cdot}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad \overline{x + iy} = x - iy$$

- *Parte real de un número complejo:*

$$\operatorname{Re}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{Re}(x + iy) = x, \quad \operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(\bar{z} + z)$$

- *Parte imaginaria de un número complejo:*

$$\operatorname{Im}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im}(x + iy) = y, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = \frac{i}{2}(\bar{z} - z)$$

EJEMPLO 1.3.6 Para simplificar divisiones entre números complejos, utilizaremos un simple “truco”: multiplicar y dividir por el conjugado del denominador.

$$\frac{2 + i}{1 - 2i} = \frac{(2 + i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} = \frac{5i}{5} = i. \quad \square$$

En general, la resolución de ecuaciones algebraicas y sistemas de ecuaciones puede hacerse utilizando los mismos métodos que empleamos para ecuaciones y sistemas en el cuerpo de los reales. Esto se debe a que las transformaciones y simplificaciones necesarias son consecuencia de las propiedades de cuerpo. En particular, podemos utilizar la fórmula que nos ayuda a resolver las ecuaciones de segundo grado.

EJEMPLO 1.3.7 Resolvemos en \mathbb{C} la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ utilizando la fórmula para la resolución de ecuaciones de segundo grado

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 13}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{16}\sqrt{-1}}{2} = \frac{6 \pm 4 \cdot i}{2} = 3 \pm 2i$$

Por lo tanto, las dos soluciones de la ecuación son $x_1 = 3 + 2i$, $x_2 = 3 - 2i$. \square

EJEMPLO 1.3.8 En este ejemplo, vamos a resolver en \mathbb{C} un sistema de ecuaciones lineales utilizando el método de *reducción*.

$$\begin{cases} ix - y = 2 \\ 2x + y = i \end{cases}$$

$$\begin{cases} ix - y = 2 \\ 2x + y = i \end{cases} \xrightarrow[\text{i}*(e2) \rightarrow (e2)]{2*(e1) \rightarrow (e1)} \begin{cases} 2ix - 2y = 4 \\ 2ix + iy = -1 \end{cases} \xrightarrow{(e2) - (e1)} (2+i)y = -5$$

Terminamos de despejar y :

$$y = \frac{-5}{2+i} = \frac{-10+5i}{(2+i)(2-i)} = \frac{-10+5i}{4+1} = -2+i$$

Y utilizando la segunda ecuación inicial, determinamos x :

$$x = \frac{i-y}{2} = \frac{i+2-i}{2} = 1 \quad \square$$

Las técnicas que hemos repasado en la lección 1.2 también son aplicables a sistemas de ecuaciones en los que sea posible obtener soluciones complejas.

EJEMPLO 1.3.9 Vamos a resolver en \mathbb{C} el sistema

$$\begin{cases} xy^2 - y + 1 = 0 \\ x^2y - x + 2 = 0 \end{cases}$$

usando el método de *reducción*. Si multiplicamos la primera ecuación por x y la segunda por y , obtenemos

$$\begin{aligned} x^2y^2 - xy + x &= 0 \\ x^2y^2 - xy + 2y &= 0 \end{aligned}$$

(Esta operación puede añadir soluciones tales que $x = 0$ o $y = 0$, que deberemos comprobar sobre el sistema inicial). Ahora podemos eliminar los términos x^2y^2 y xy restando las dos ecuaciones para llegar a que $2y - x = 0$. Esta ecuación es más simple que cualquiera de las iniciales y, en particular, permite expresar x en función de y : $x = 2y$; llevando esta igualdad a la primera ecuación del sistema inicial, obtenemos

$$2y^3 - y + 1 = 0$$

Recordando que en un polinomio con coeficientes enteros, los divisores del término independiente son candidatos a raíz del polinomio, buscamos soluciones enteras de esta ecuación con el método de Ruffini, y deducimos que $y = -1$ es una solución:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & & -2 & 2 & -1 \\ \hline & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto,

$$0 = 2y^3 - y + 1 = (y+1)(2y^2 - 2y + 1)$$

Para resolver la ecuación $2y^2 - 2y + 1 = 0$ utilizamos la fórmula que ya conocemos para ecuaciones de segundo grado:

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{4} = \frac{2 \pm 2i}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}i$$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son:

$$\{y_1 = -1, x_1 = -2\}, \quad \{y_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, x_2 = 1 + i\}, \quad \{y_3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i, x_3 = 1 - i\}.$$

□

1.3.1. El binomio de Newton

La fórmula del binomio de Newton permite expandir cualquier potencia de una suma de expresiones, es decir, vamos a generalizar la igualdad

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

a cualquier exponente natural. Para expandir una potencia como $(a + b)^7$, bastaría con multiplicar siete veces la expresión $(a + b)$, eliminando los paréntesis adecuadamente con la propiedad distributiva; el binomio de Newton es simplemente una fórmula que nos “ahorra” parte de ese trabajo. En la fórmula vamos a utilizar unos cuantos elementos que debemos introducir previamente: *factorial*, *números combinatorios* y *sumatorios*.

DEFINICIÓN 1.3.10 (FACTORIAL) *Definimos el factorial de un número natural n , denotado por $n!$, como sigue:*

$$0! = 1$$

$$n! = (n - 1)! \cdot n \quad \text{para todo } n \geq 1$$

Esta forma de definir una función se denomina *recursiva*: la definición llama al mismo operador que se define, pero aplicado a un número menor, hasta llegar a un *caso base*, en este caso $0!$. Otra forma de escribir la definición del operador es

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, \quad \text{para todo } n \geq 1$$

EJEMPLO 1.3.11

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 1 \cdot 2 = 2, \quad 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

$$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10 = 3\,628\,800$$

□

DEFINICIÓN 1.3.12 (NÚMEROS COMBINATORIOS) *Sean n y k dos números naturales tales que $0 \leq k \leq n$. Se define el número combinatorio $\binom{n}{k}$, que se lee “ n sobre k ”, como*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n - k)!}$$

EJEMPLO 1.3.13

$$\begin{aligned}
\blacksquare \quad \binom{10}{7} &= \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \cancel{7!}}{\cancel{7!} \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 \\
\blacksquare \quad \binom{0}{0} &= \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1 \\
\blacksquare \quad \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0! \cdot n!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\
\blacksquare \quad \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n! \cdot 0!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\
\blacksquare \quad \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k} \quad \square
\end{aligned}$$

La forma habitual de calcular los números combinatorios es la que se ha utilizado en el primer apartado del ejemplo 1.3.13, es decir, se expande parcialmente el factorial del numerador y se simplifica con el denominador. Esto lo podemos hacer de forma general para obtener una expresión alternativa para los números combinatorios.

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot \cancel{(n-k)!}}{k! \cdot \cancel{(n-k)!}} = \\
&= \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}
\end{aligned}$$

Obsérvese que en el numerador de la expresión obtenida hay exactamente k factores.

La siguiente propiedad es la más importante de los números combinatorios, siendo el fundamento del *triángulo de Tartaglia-Pascal*, que veremos a continuación.

PROPOSICIÓN 1.3.14 Para todo $n \in \mathbb{N}$ y todo $k \in \mathbb{N}$:

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

EJEMPLO 1.3.15 En este ejemplo, mostramos cómo se llega a esta igualdad en un caso particular; por esta razón, evitamos la realización de la mayoría de los cálculos intermedios. Este tipo de desarrollos nos ayudan a entender demostraciones generales, en las que manejamos variables y parámetros en lugar de números concretos.

$$\begin{aligned}
\binom{8}{3} + \binom{8}{4} &= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \frac{4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3!} + \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \\
&= \frac{4 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4!} = \frac{(4+5) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4!} = \binom{9}{4} \quad \square
\end{aligned}$$

Triángulo de Tartaglia-Pascal. La propiedad 1.3.14 permite calcular los números combinatorios usando una representación geométrica que se denomina *triángulo de Tartaglia* o *triángulo de Tartaglia-Pascal*. Construimos este triángulo colocando en el vértice superior, el número $\binom{0}{0}$ y debajo de él colocamos los números $\binom{1}{0}$ y $\binom{1}{1}$; formamos así un primer triángulo con solo tres números. A partir de aquí, vamos añadiendo nuevas filas usando la siguiente regla: debajo de cada par de números, colocamos su suma:

$$\begin{array}{ccc} \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} & \end{array} \quad \text{Prop. (1.3.14)} \quad \begin{array}{ccc} \binom{n}{k} & & \binom{n}{k+1} \\ & \searrow & \swarrow \\ & \binom{n+1}{k+1} & \end{array}$$

Adicionalmente, cada fila se comienza con $\binom{n}{0} = 1$ y se termina con $\binom{n}{n} = 1$. Vemos a continuación el triángulo resultante hasta la quinta fila, a la izquierda con los números combinatorios indicados y a la derecha con los valores resultantes.

$$\begin{array}{cccccc} & & \binom{0}{0} & & & & 1 \\ & & & & & & \\ & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & 1 & 1 \\ & & & & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & 1 & 3 & 3 & 1 \\ & & & & & & \\ & & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\ & & & & & & \\ & & \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \end{array}$$

Operador sumatorio. El operador \sum o *sumatorio* se utiliza para expresar sumas con un cantidad variable de sumandos:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = f(m) + f(m+1) + \cdots + f(n)$$

Los sumandos se expresan en función de una variable k que tomará valores consecutivos entre dos números naturales m y n tales que $m \leq n$. Por ejemplo,

$$\sum_{k=2}^5 (2k-1)^2 = 3^2 + 5^2 + 7^2 + 9^2$$

Este operador también es frecuente en los lenguajes de programación, en los que toma una sintaxis similar a

$$\text{sum}(f(k), k, m, n)$$

Este operador será usado en distintas asignaturas, por lo que es muy conveniente aprender a manejarlo correctamente. Vemos a continuación algunos ejemplos sencillos pero que ayudarán a entender algunas propiedades de este operador.

La variable utilizada como *índice* de cada sumando no influye en el resultado y podremos cambiarla por la letra que deseemos siempre que no interfiera en el resto

del problema. Por ejemplo, en los sumatorios siguientes utilizamos índices distintos pero obtenemos el mismo resultado:

$$\sum_{k=1}^{10} k = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

$$\sum_{j=1}^{10} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Binomio de Newton. Ya tenemos todos los elementos necesarios para expresar la fórmula del binomio de Newton.

TEOREMA 1.3.16 (FÓRMULA DEL BINOMIO DE NEWTON) *Para todo par de números a y b y todo número natural n , se verifica que*

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

También podemos escribir la fórmula del binomio usando “puntos suspensivos”:

$$\begin{aligned} (a + b)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \\ &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n. \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3.17

- $(x - y)^2 = \binom{2}{0} x^2 (-y)^0 + \binom{2}{1} x (-y) + \binom{2}{2} x^0 (-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
- $(s + t)^3 = \binom{3}{0} s^3 t^0 + \binom{3}{1} s^2 t + \binom{3}{2} s t^2 + \binom{3}{3} s^0 t^3 = s^3 + 3s^2 t + 3s t^2 + t^3$
- $(z - 2)^6 = z^6 - 12z^5 + 60z^4 - 160z^3 + 240z^2 - 192z + 64$
- $2^n = (1 + 1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ □

EJEMPLO 1.3.18 Vamos a expresar en forma binómica el número $(1 - i)^5$.

$$\begin{aligned} (1 - i)^5 &= \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} (-i)^k \cdot 1^{5-k} = (-i)^0 + 5(-i)^1 + 10(-i)^2 + 10(-i)^3 + 5(-i)^4 + (-i)^5 = \\ &= 1 - 5i + 10i^2 - 10i^3 + 5i^4 - i^5 = 1 - 5i - 10 + 10i + 5 - i = -4 + 4i \quad \square \end{aligned}$$

1.3.2. Teorema fundamental del álgebra

Este resultado recoge la propiedad que anunciábamos al principio de la lección y que caracteriza al cuerpo de los números complejos.

TEOREMA 1.3.19 (TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA) *Toda ecuación polinómica con coeficientes en \mathbb{C} tiene solución en \mathbb{C} . Equivalentemente, todo polinomio de grado mayor o igual que 1 con coeficientes en \mathbb{C} puede factorizarse en factores de grado menor o igual a 1:*

$$P(z) = z_0(z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_n)^{m_n},$$

en donde, $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$.

Los números complejos z_1, \dots, z_n en el teorema anterior son las raíces o ceros del polinomio P y son igualmente las soluciones de la ecuación polinómica $P(z) = 0$. Para cada z_i , el número natural m_i se denomina *multiplicidad* de la raíz o cero.

Una de las lecciones de este tema está dedicada al estudio de los polinomios, pero entendemos que el alumno debe conocer la teoría básica y en particular la relación entre factorización de polinomios y ecuaciones polinómicas que se utiliza en el teorema fundamental del álgebra.

DEFINICIÓN 1.3.20 *Decimos que un polinomio está factorizado en \mathbb{R} si está escrito como producto de polinomios irreducibles, de grado menor o igual que 2 y con coeficientes en \mathbb{R} . Decimos que está factorizado en \mathbb{C} si está escrito como producto de polinomios de grado menor o igual a 1 con coeficientes en \mathbb{C} .*

EJEMPLO 1.3.21 El polinomio $x^2 + 1$ es irreducible en \mathbb{R} , pero admite la siguiente factorización en \mathbb{C} :

$$x^2 + 1 = x^2 - i^2 = (x + i)(x - i) \quad \square$$

EJEMPLO 1.3.22 La identidad $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, que también hemos usado en el ejemplo anterior, es suficiente para factorizar el siguiente polinomio:

$$\begin{aligned} x^4 - 1 &= (x^2 + 1)(x^2 - 1) = (x^2 - (-1))(x + 1)(x - 1) = \\ &= (x + i)(x - i)(x + 1)(x - 1) \end{aligned}$$

Y a partir de ella, resolvemos la ecuación polinómica $x^4 - 1 = 0$:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = i, \quad x_4 = -i \quad \square$$

EJEMPLO 1.3.23 Para factorizar $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ intentamos buscar alguna raíz entre los divisores del término independiente usando el método de Ruffini; en este caso, encontramos que $x = -1$ es una de sus raíces:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & & -1 & -1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto, el polinomio es divisible por $x + 1$:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Resolviendo la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$, vemos que sus soluciones son complejas, por lo que podemos afirmar que la anterior es la factorización en \mathbb{R} .

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo tanto, la factorización en \mathbb{C} es:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x + 1)\left(x + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \square$$

EJEMPLO 1.3.24 En el ejemplo 1.3.7 de la página 30 hemos resuelto la ecuación $x^2 - 6x + 13 = 0$ llegando a que sus soluciones son:

$$x_1 = 3 + 2i, \quad x_2 = 3 - 2i$$

Por lo tanto, la factorización en \mathbb{C} del polinomio $x^2 - 6x + 13 = 0$ es:

$$x^2 - 6x + 13 = (x - 3 - 2i)(x - 3 + 2i)$$

Polinomios de grado cuatro. Vamos a ver unos ejemplos en los que mostramos cómo es posible obtener la factorización de polinomios de grado cuatro. Naturalmente, tal y como hemos hecho en ejemplos anteriores, primero buscaremos raíces entre los divisores del término independiente y en caso de que no tenga este tipo de ceros, usaremos los métodos explicados en los siguientes ejemplos.

Por otra parte, en estos ejemplos trabajamos con polinomios en los cuales el coeficiente del término de grado 3 es nulo. Para factorizar un polinomio general, primero tendríamos que cambiar el centro del polinomio, tal y como aprenderemos en la siguiente lección. En las relaciones de ejercicios factorizaremos polinomios generales de grado cuatro.

EJEMPLO 1.3.25 Vamos a factorizar el polinomio $x^4 - 3x^2 - 6x - 2$ en \mathbb{R} y en \mathbb{C} . En primer lugar vamos escribirlo como producto de dos polinomios en \mathbb{R} y de grado 2.

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

Para determinar los números A , B , C y D , utilizamos identificación de coeficientes (ver teorema 1.4.1, en la página 49), y para ello, expandimos el producto del lado derecho.

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = x^4 + (A + C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (AD + BC)x + BD$$

Dado que dos polinomios son iguales si y solo si los coeficientes correspondientes a los términos del mismo grado son iguales, podemos construir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + AC + D &= -3 \\ AD + BC &= -6 \\ BD &= -2 \end{aligned}$$

Este sistema se puede resolver fácilmente porque proviene de un polinomio sin término de tercer grado, pero para ello, conviene seguir el camino que indicamos a continuación.

1. De la primera ecuación deducimos que $C = -A$; sustituimos C por $-A$ en las dos ecuaciones centrales y obtenemos

$$\begin{aligned} D + B &= -3 + A^2 \\ D - B &= \frac{-6}{A} \end{aligned}$$

Sumando las dos ecuaciones, podemos expresar D en función de A , y restándolas, podemos expresar B en función de A :

$$D = \frac{1}{2} \left(-3 + A^2 - \frac{6}{A} \right), \quad B = \frac{1}{2} \left(-3 + A^2 + \frac{6}{A} \right)$$

2. A continuación, utilizamos la última ecuación del sistema inicial, $BD = -2$; sustituyendo B y D por las expresiones obtenidas en el punto anterior, obtenemos una ecuación en A :

$$\begin{aligned} -2 &= BD = \frac{1}{4} \left((-3 + A^2) - \frac{6}{A} \right) \left((-3 + A^2) + \frac{6}{A} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left((-3 + A^2)^2 - \frac{36}{A^2} \right) = \frac{1}{4} \left(9 - 6A^2 + A^4 - \frac{36}{A^2} \right) \end{aligned}$$

Multiplicando por $4A^2$ en los dos extremos de la igualdad anterior

$$-8A^2 = 9A^2 - 6A^4 + A^6 - 36$$

Y reagrupando los términos en las potencias de A , obtenemos la siguiente ecuación polinómica

$$A^6 - 6A^4 + 17A^2 - 36 = 0$$

Aparentemente, el problema se ha complicado, ya que pasamos de una ecuación de grado 4 a una ecuación de grado 6. Sin embargo, observamos que en esta última ecuación, todas las potencias de A son pares, por lo que podemos hacer un cambio de variable, $A^2 = z$, obteniendo una ecuación de grado 3.

$$z^3 - 6z^2 + 17z - 36 = 0$$

Utilizando el algoritmo de Ruffini, buscamos una solución entre los divisores de 36, y la encontramos en $z = 4$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -6 & 17 & -36 \\ 4 & & 4 & -8 & 36 \\ \hline & 1 & -2 & 9 & 0 \end{array}$$

Dado que la factorización de un polinomio es única, basta tomar una de las soluciones en A , ya que cualquier otra solución nos conducirá a la misma factorización. En este caso, una posible solución verifica $A^2 = 4$, y podemos considerar $A = 2$.

3. A partir del valor de A , ya podemos calcular el valor del resto de los parámetros:

$$C = -A = -2$$

$$B = \frac{1}{2} \left(-3 + A^2 + \frac{6}{A} \right) = \frac{1}{2}(-3 + 4 - 3) = 2$$

$$D = \frac{1}{2} \left(-3 + A^2 - \frac{6}{A} \right) = \frac{1}{2}(-3 + 4 + 3) = -1$$

$$\text{Por lo tanto: } x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x - 1)$$

Todavía no podemos concluir que esta sea la factorización en \mathbb{R} , antes debemos comprobar si los dos polinomios son irreducibles.

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \implies x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2} = -1 \pm i$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

Por lo tanto, el primer polinomio de grado 2 es irreducible en \mathbb{R} , pero el segundo no lo es. En cualquier caso, ya podemos escribir las dos factorizaciones:

Factorización en \mathbb{R} :

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = (x^2 + 2x + 2)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2})$$

Factorización en \mathbb{C} :

$$x^4 - 3x^2 - 6x - 2 = (x + 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 - \sqrt{2})(x - 1 + \sqrt{2}) \quad \square$$

EJEMPLO 1.3.26 En este ejemplo, vamos a factorizar el polinomio $x^4 + 4$ en \mathbb{R} siguiendo el método del ejemplo anterior.

$$x^4 + 4 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D), \quad A, B, C, D \in \mathbb{R}$$

Expandiendo el lado derecho de la igualdad y agrupando los términos obtenemos

$$x^4 + 4 = x^4 + (A + C)x^3 + (B + AC + D)x^2 + (AD + BC)x + BD.$$

Identificamos coeficientes y obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ B + AC + D &= 0 \\ AD + BC &= 0 \\ BD &= 4 \end{aligned}$$

De la primera ecuación deducimos que $C = -A$, y sustituyendo C por $-A$ en las dos ecuaciones centrales obtenemos:

$$\begin{aligned} D + B &= A^2 \\ A(D - B) &= 0 \end{aligned}$$

Necesariamente, $A \neq 0$, ya que en caso contrario, el sistema se reduciría a $B + D = 0$, $BD = 4$, y de ahí: $-B^2 = 4$, lo que es imposible. Por lo tanto, las ecuaciones quedan:

$$\begin{aligned} D + B &= A^2 \\ D - B &= 0; \end{aligned}$$

y sumándolas y restándolas, podemos escribir B y D en función de A :

$$D = \frac{A^2}{2}, \quad B = \frac{A^2}{2}.$$

Sustituyendo en la última ecuación del sistema inicial, $BD = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{A^2}{2} \cdot \frac{A^2}{2} &= 4 \\ A^4 &= 16 \end{aligned}$$

Nos quedamos con la solución $A = \sqrt{2}$ y terminamos de calcular el resto de coeficientes

$$C = -A = -\sqrt{2}, \quad B = \frac{A^2}{2} = 1, \quad D = \frac{A^2}{2} = 1$$

y escribimos la factorización obtenida:

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$$

En este caso, los dos polinomios de grado 2 son irreducibles, por lo que esa es la factorización en \mathbb{R} . \square

Dado que todas las magnitudes físicas se pueden medir con números reales, se podría pensar que los números complejos solo son un objeto matemático abstracto sin interés práctico. Sin embargo, la utilidad de estos números no está en la descripción de magnitudes físicas, sino que constituyen una herramienta para resolver problemas algebraicos y geométricos. En el ejemplo anterior, hemos factorizado un polinomio en \mathbb{R} usando solamente números reales; en el siguiente ejemplo, vamos a resolver el mismo ejercicio pero ayudándonos de los números complejos.

EJEMPLO 1.3.27 Vamos a factorizar el polinomio $P(x) = x^4 + 4$ en \mathbb{C} y en \mathbb{R} . Introduciendo números complejos, podemos realizar fácilmente la siguiente factorización:

$$x^4 + 4 = x^4 - (2i)^2 = (x^2 - 2i)(x^2 + 2i).$$

Para seguir factorizando, resolvemos las ecuaciones $x^2 - 2i = 0$ y $x^2 + 2i = 0$. Para la primera, buscamos $x = a + bi$, con $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $(a + bi)^2 = 2i$, es decir,

$$a^2 - b^2 + 2abi = 2i$$

A partir de esta igualdad, comparando las partes reales e imaginarias, construimos el siguiente sistemas de ecuaciones en \mathbb{R} :

$$a^2 - b^2 = 0, \quad ab = 1,$$

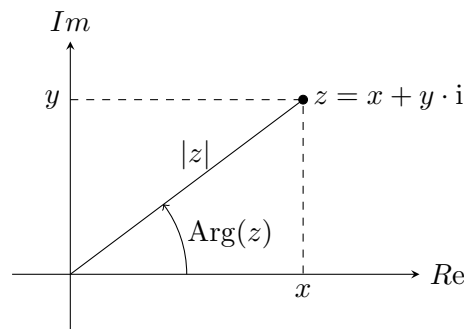


Figura 1.3: Representación gráfica de los números complejos

cuyas soluciones son $\{a_1 = 1, b_1 = 1\}$, $\{a_2 = -1, b_2 = -1\}$; es decir, las soluciones de $x^2 - 2i = 0$ son

$$1 + i, \quad -1 - i$$

Siguiendo el mismo método, obtenemos las soluciones de $x^2 + 2i = 0$:

$$1 - i, \quad -1 + i$$

En consecuencia, la factorización en \mathbb{C} del polinomio $x^4 + 1$ es

$$x^4 + 1 = (x - 1 - i)(x + 1 + i)(x - 1 + i)(x + 1 - i)$$

Para obtener la factorización en \mathbb{R} basta multiplicar los factores correspondientes a las raíces conjugadas. De esa forma, la identidad $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ elimina la unidad imaginaria.

$$\begin{aligned} x^4 + 1 &= ((x + 1) - i)((x + 1) + i)((x - 1) - i)((x - 1) + i) = \\ &= ((x + 1)^2 + 1)((x - 1)^2 + 1) = \\ &= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \end{aligned} \quad \square$$

El esquema seguido en este ejemplo es muy habitual en matemáticas: para resolver un problema en \mathbb{R} , lo estudiamos antes en \mathbb{C} para aprovecharnos de las propiedades adicionales; posteriormente volvemos a \mathbb{R} para dar las soluciones deseadas. A lo largo del tema veremos más ejemplos de esta metodología.

También nos hemos encontrado en estos dos últimos ejemplos con algo que será muy recurrente en matemáticas: los problemas admiten distintos caminos para llegar a su solución. Debemos aprender las distintas herramientas y métodos alternativos y saber elegir en cada momento el más adecuado y simple.

Si consideramos la representación gráfica de un número complejo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, tal y como aparece en la figura 1.3, la longitud del segmento que une el origen de coordenadas y el número complejo se denomina *módulo* y el ángulo que forma este segmento con la parte positiva del eje OX , se denomina *argumento principal*.

DEFINICIÓN 1.3.28 En los siguientes apartados, $x, y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{C}$:

- *Módulo de un número complejo:*

$$|\cdot|: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

- *Argumento principal de un número complejo:* $\text{Arg}: \mathbb{C}^* \rightarrow [0, 2\pi)$.
Si $x = 0$, entonces

$$\text{Arg}(iy) = \frac{\pi}{2}, \text{ si } y > 0, \quad \text{Arg}(iy) = \frac{3\pi}{2}, \text{ si } y < 0;$$

si $y = 0$, entonces

$$\text{Arg}(x) = 0, \text{ si } x > 0, \quad \text{Arg}(x) = \pi, \text{ si } x < 0;$$

en cualquier otro caso, $\text{Arg}(x + iy) = \theta$, en donde $\text{tg } \theta = \frac{y}{x}$,

$$\theta \in [0, \pi] \text{ si } y \geq 0,$$

$$\theta \in (\pi, 2\pi) \text{ si } y < 0.$$

Hemos hecho uso de la siguiente notación: $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. En general, el superíndice $*$ sobre cualquier conjunto numérico, indica que excluimos al número 0.

Obsérvese que, por su definición, el módulo de un número complejo es siempre positivo y su argumento principal es un ángulo entre 0 y 2π .

EJEMPLO 1.3.29

- $\text{Re}(3 - 2i) = 3$
- $\text{Im}(-1 + i) = 1$
- $|1 - i| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$
- $\text{Arg}(-1 + i) = \frac{3\pi}{4}$. Los dos ángulos entre 0 y 2π cuyas tangentes son -1 son $\frac{3\pi}{4}$ y $\frac{7\pi}{4}$, pero dado que la parte imaginaria es positiva, el argumento principal es el primero de ellos. \square

PROPOSICIÓN 1.3.30 El operador conjugado verifica las siguientes propiedades:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}.$$

La demostración de esta proposición es una simple comprobación que debería ser fácilmente desarrollada por el estudiante. La principal consecuencia de esta propiedad es la siguiente.

PROPOSICIÓN 1.3.31 Si $P(x)$ es un polinomio con coeficientes en \mathbb{R} y $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de P , entonces \bar{z} también es raíz de P .

En el ejemplo 1.3.27 de la página 40 hemos visto que las raíces del polinomio $P(x) = x^4 + 4$ son:

$$1 + i, \quad -1 + i, \quad 1 - i, \quad -1 - i,$$

y efectivamente observamos que se verifica la propiedad de la proposición anterior. La demostración del resultado es bastante simple; supongamos que

$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0,$$

y que $z \in \mathbb{C}$ es raíz de P ; en el desarrollo siguiente, solo utilizamos la proposición anterior y que el conjugado de un número real es él mismo:

$$\begin{aligned} a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 &= 0 \\ \overline{a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0} &= 0 \\ \overline{a_n} \cdot \bar{z}^n + \cdots + \overline{a_1} \cdot \bar{z} + \overline{a_0} &= 0 \\ a_n \bar{z}^n + \cdots + a_1 \bar{z} + a_0 &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente \bar{z} también es raíz del polinomio.

1.3.3. Exponencial compleja y fórmula de De Moivre

Una representación alternativa para los números complejos se obtiene al usar la función exponencial. Para introducirla, necesitamos en primer lugar, extender la definición de esta función a todos los números complejos.

DEFINICIÓN 1.3.32 *Definimos la función exponencial en el cuerpo de los números complejos como: $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.*

Es evidente que esta definición es coherente con la exponencial sobre números reales, ya que si $y = 0$:

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x(\cos 0 + i \sin 0) = e^x$$

La otra razón por la que esta función se denomina exponencial es que comparte las propiedades algebraicas de su versión real.

PROPOSICIÓN 1.3.33

1. $e^z e^w = e^{z+w}$, para todo $z, w \in \mathbb{C}$
2. $(e^z)^n = e^{nz}$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y todo $n \in \mathbb{N}$

La segunda propiedad es una consecuencia de la primera y la demostración de la primera hace uso, solamente, de las fórmulas del seno y coseno de la suma de ángulos. Consideramos $z = x_1 + iy_1$, $w = x_2 + iy_2$,

$$\begin{aligned} e^z e^w &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 \\ &\quad + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2} e^{i(y_1+y_2)} = e^{z+w} \end{aligned}$$

Forma exponencial. Si $r = |z|$ y $\theta = \text{Arg}(z)$, entonces

$$re^{i\theta} = r(\cos \theta + i \sen \theta) = r \cos \theta + i r \sen \theta = z$$

Por esta razón, la expresión $re^{i\theta}$ se denomina *forma exponencial* del número z . Una representación alternativa a partir del módulo y argumento de un número complejo es la *forma polar*, que se suele escribir como r_θ ; las dos representaciones son equivalentes en cuanto a sus consecuencias prácticas, pero preferimos utilizar la forma exponencial, ya que la manipulación de la misma se basa en las propiedades conocidas de la función exponencial.

EJEMPLO 1.3.34

■ $-1 = e^{i\pi}$, ya que $|-1| = 1$ y $\text{Arg}(-1) = \pi$

■ $-i = e^{i3\pi/2}$, ya que $|-i| = 1$ y $\text{Arg}(-i) = 3\pi/2$

■ $1 - i = \sqrt{2}e^{i7\pi/4}$

□

La igualdad $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sen \theta$, se conoce como *igualdad de Euler* y en el caso particular $\theta = \pi$ conduce a una identidad que relaciona las constantes matemáticas más importantes:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Como consecuencia del segundo apartado de la proposición 1.3.33, obtenemos que $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ y a partir de aquí, deducimos la fórmula de De Moivre.

COROLARIO 1.3.35 (FÓRMULA DE DE MOIVRE) Para todo número natural n y todo real θ :

$$(\cos \theta + i \sen \theta)^n = \cos n\theta + i \sen n\theta.$$

Una importante aplicación de esta fórmula es obtener expresiones para simplificar funciones trigonométricas, según mostramos en los siguientes ejemplos.

EJEMPLO 1.3.36 Si expandimos la igualdad de De Moivre para $n = 2$ obtenemos:

$$\cos 2\theta + i \sen 2\theta = (\cos \theta + i \sen \theta)^2 = \cos^2 \theta + 2i \sen \theta \cos \theta - \sen^2 \theta$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros, obtenemos la siguientes igualdades:

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sen^2 \theta$$

$$\sen 2\theta = 2 \sen \theta \cos \theta$$

Es decir, hemos obtenido expresiones para escribir el seno y el coseno del doble de un ángulo en terminos del seno y el coseno del mismo ángulo. □

En combinación con el binomio de Newton, podemos obtener fórmulas similares para cualquier múltiplo, que nos ayudarán a simplificar expresiones en las que aparezcan distintos múltiplos de un mismo ángulo.

EJEMPLO 1.3.37 Si expandimos la igualdad de De Moivre para $n = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta &= (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)^3 = \\ &= \binom{3}{0} \cos^3 \theta + \binom{3}{1} i \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta + \binom{3}{2} i^2 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta + \binom{3}{3} i^3 \operatorname{sen}^3 \theta = \\ &= \cos^3 \theta + 3i \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta - i \operatorname{sen}^3 \theta\end{aligned}$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias de ambos miembros, obtenemos la siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos^3 \theta - 3 \cos \theta \operatorname{sen}^2 \theta \\ \operatorname{sen} 3\theta &= 3 \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta - \operatorname{sen}^3 \theta\end{aligned}\quad \square$$

En otras ocasiones, nos interesará un proceso opuesto al del ejemplo anterior, es decir, reducir potencias de funciones trigonométricas a expresiones en términos del seno y coseno de múltiplos del ángulo. Para deducir estas expresiones partimos de las igualdades

$$\begin{aligned}\cos x &= \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\ \operatorname{sen} x &= \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\end{aligned}\quad (1.2)$$

que se deducen fácilmente sumando y restando respectivamente, las siguientes:

$$\begin{aligned}e^{ix} &= \cos x + i \operatorname{sen} x \\ e^{-ix} &= \cos x - i \operatorname{sen} x\end{aligned}$$

Vemos a continuación un ejemplo de como usar las igualdades (1.2) para el objetivo buscado.

EJEMPLO 1.3.38 Vamos a transformar $\operatorname{sen}^2 \theta$ en una expresión sin potencias:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}^2 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^2 = \\ &= \frac{-1}{4} (e^{2i\theta} - 2e^{i\theta}e^{-i\theta} + e^{-2i\theta}) = \\ &= \frac{-1}{4} (e^{2i\theta} - 2 + e^{-2i\theta}) = \\ &= \frac{-1}{4} ((e^{2i\theta} + e^{-2i\theta}) - 2) = \\ &= \frac{-1}{4} (2 \cos(2\theta) - 2) = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}\end{aligned}\quad \square$$

En combinación con el binomio de Newton, podemos obtener fórmulas similares para cualquier potencia.

EJEMPLO 1.3.39 Vamos a transformar $\sin^3 \theta$ en una expresión sin potencias:

$$\begin{aligned}
 \sin^3 \theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \\
 &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{2i\theta}e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}e^{-2i\theta} - e^{-3i\theta}) = \\
 &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}) = \\
 &= \frac{-1}{8i} (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta} - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})) = \\
 &= \frac{-1}{8i} (2i \sin 3\theta - 3 \cdot 2i \sin \theta) = \\
 &= \frac{-1}{4} (\sin 3\theta - 3 \sin \theta) \quad \square
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 1.3.40 Otra de las aplicaciones de la fórmula de De Moivre es el cálculo de las raíces de los números complejos, que nos aparecen en la resolución de ecuaciones polinómicas. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular los números complejos w , tales que $w^4 = -4$; es decir, las *raíces cuartas* de -4 y raíces del polinomio $P(z) = z^4 + 4$. Para calcularlas, partimos de la forma exponencial de -4 ,

$$-4 = e^{i\pi}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Sin embargo, el ángulo π no es el único que permite obtener una igualdad similar a la anterior; en general tenemos que:

$$-4 = 4 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}$$

Las raíces $w = re^{i\theta}$ que buscamos verifican entonces que:

$$w^4 = r^4 e^{4i\theta} = -4 = 4 \cdot e^{i(\pi+2k\pi)}.$$

De donde deducimos que

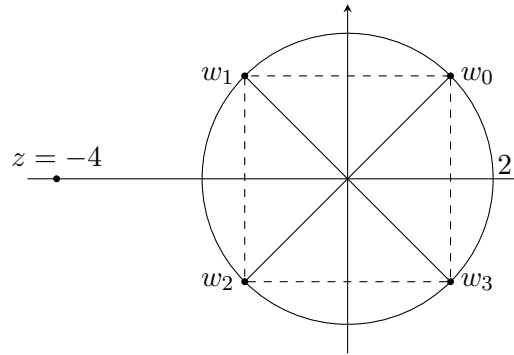
$$r = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} \quad 4i\theta = i(\pi + 2k\pi)$$

De la segunda igualdad, deducimos que solo cuatro valores de θ son argumentos principales de números complejos, los correspondientes a $k = 0, 1, 2, 3$:

$$\theta_0 = \frac{\pi}{4}, \quad \theta_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{4}, \quad \theta_3 = \frac{7\pi}{4}$$

En consecuencia, -4 tiene cuatro raíces cuartas:

$$\begin{aligned}
 w_0 &= \sqrt{2}e^{i\theta_0} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 + i \\
 w_1 &= \sqrt{2}e^{i\theta_1} = \sqrt{2}e^{3i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 + i \\
 w_2 &= \sqrt{2}e^{i\theta_2} = \sqrt{2}e^{5i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -1 - i \\
 w_3 &= \sqrt{2}e^{i\theta_3} = \sqrt{2}e^{7i\pi/4} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 1 - i
 \end{aligned}$$

Figura 1.4: Raíces cuartas de $z = -4$

En la figura 1.4, se puede ver la representación de estas raíces en el plano complejo. Por otra parte, en el ejemplo 1.3.27 (página 40), resolvimos el mismo problema a partir de la ecuación polinómica; como ya hemos mencionado antes, debemos acostumbrarnos a que un mismo problema puede resolverse de varias formas y debemos aprender a elegir la forma más adecuada según los datos concretos. \square

TEOREMA 1.3.41 *Para cada número complejo $z = re^{i\theta}$ existen n números complejos distintos w_0, \dots, w_{n-1} que verifican $w_k^n = z$. Estos números complejos son:*

$$w_k = \sqrt[n]{r} \exp\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}i\right), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Hemos utilizado en este enunciado una notación alternativa para la función exponencial

$$\exp(x) = e^x,$$

que es de gran ayuda cuando escribimos expresiones grandes en el exponente.

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

LECCIÓN 1.4

Polinomios

En las lecciones anteriores ya hemos trabajado con polinomios, ya que entendemos que el alumno conoce las operaciones entre ellos y sus propiedades más importantes. Sin embargo, la importancia de estas funciones elementales hace conveniente dedicar una lección a ellas, para seguir recordando propiedades y aprender algunas operaciones nuevas.

A lo largo de la lección, consideraremos que la siguiente expresión es la *forma normalizada* de un polinomio y que también se denomina *forma expandida*:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0 \quad (1.3)$$

El número n debe ser *natural* y se denomina *grado* del polinomio; los *coeficientes* a_k pueden ser reales o complejos y x es la variable. Para cada k , el *monomio* $a_k x^k$ se denomina *término* k -ésimo o término de grado k y el número a_k se denomina *coeficiente* k -ésimo.

Cualquier expresión algebraica dada con sumas y productos de números complejos y una variable, debe ser considerada polinomio, ya que las propiedades de cuerpo permiten transformarla hasta llegar a la forma expandida dada por (1.3).

La propiedad que enunciamos en el siguiente teorema justifica la técnica denominada *identificación de coeficientes*, que ya hemos usado en el ejemplo 1.3.26.

TEOREMA 1.4.1 *La función polinómica*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

es nula ($P(x) = 0$ para todo x) si y solo si $a_k = 0$ para todo k .

EJEMPLO 1.4.2 ¿Cuál es el valor de a si la siguiente igualdad es válida para todo x ?

$$x^2 + ax + 4 = (x - 2)^2$$

Obsérvese que, al decir que la igualdad debe ser válida para todo x , estamos estableciendo algo más fuerte que una ecuación, estamos estableciendo una identidad entre funciones.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + 4 &= (x - 2)^2 \\ x^2 + ax + 4 - (x - 2)^2 &= 0 \\ x^2 + ax + 4 - x^2 + 4x - 4 &= 0 \\ (a + 4)x &= 0 \end{aligned}$$

Aplicando el teorema anterior a la última identidad entre funciones, podemos deducir que $a = -4$. El proceso seguido para el desarrollo de este ejemplo se denomina

identificación de coeficientes, ya que podemos abreviarlo diciendo que dos polinomios son iguales si y solo si coinciden los coeficientes de los términos del mismo grado. \square

El teorema anterior nos puede llevar a la conclusión de que la mejor forma de trabajar con un polinomio es a través de su forma expandida. Sin embargo, existen otras formas normales para una expresión polinómica que pueden ser más adecuadas según el ejercicio concreto que queramos abordar. Por ejemplo, ya hemos comprobado que la *forma factorizada* es conveniente para la resolución de ecuaciones polinómicas.

Ya hemos dedicado varios ejemplos de la lección 1.3 a la forma factorizada de los polinomios y a su relación con la resolución de ecuaciones polinómicas.

1.4.1. Evaluación de polinomios: método de Horner

La evaluación de un polinomio para valores concretos de la variable se basa en la realización de multiplicaciones y de sumas. Aunque esto puede parecer simple, si el grado del polinomio es elevado, este proceso supone la realización de muchas operaciones. Incluso si estas las hace un ordenador, el tiempo necesario puede ser alto. Para reducir el número de operaciones necesarias, vamos a introducir en esta sección el *Método de Horner*, que se basa simplemente en reescribir el polinomio en una forma más adecuada. Este proceso es muy simple y basta con analizarlo sobre un ejemplo para entenderlo, tal y como hacemos a continuación:

$$2x^3 + 3x^2 - 4x + 1 = x(2x^2 + 3x - 4) + 1 = x(x(2x + 3) - 4) + 1$$

Es decir, separando el término independiente, sacamos la variable x como factor común; en el polinomio de grado 2 que aparece como subexpresión, repetimos el proceso. Podemos observar que, si evaluamos el polinomio en su forma inicial, tenemos que realizar $3 + 2 + 1$ multiplicaciones y 3 sumas; sin embargo, si evaluamos el polinomio en la forma obtenida a la derecha, realizamos también 3 sumas pero solo 3 multiplicaciones. En general, si el polinomio tiene grado n , la evaluación del polinomio en su forma expandida requiere $\frac{n(n+1)}{2}$ multiplicaciones y n sumas, mientras que el método de Horner efectúa solamente n productos y n sumas.

La forma más simple de utilizar este método es mediante el algoritmo de Ruffini, que nos sirve para dividir polinomios, pero que también evalúa el polinomio en el punto. La justificación es la siguiente, si dividimos un polinomio $P(x)$ entre $x - x_0$, obtenemos la igualdad

$$P(x) = C(x)(x - x_0) + r, \quad r \in \mathbb{C},$$

en donde r es el resto de la división; de esta igualdad se deduce fácilmente que

$P(x_0) = r$. Por ejemplo, si dividimos $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ entre $x - i$, obtenemos

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 2 & 2 & 1 \\ i & & i & 2i - 1 & -2 + i \\ \hline & 1 & 2 + i & 2i + 1 & -1 + i \end{array}$$

De donde deducimos que $P(i) = -1 + i$. No es difícil observar que la secuencia de operaciones realizadas para llegar al resto en el método de Ruffini coincide con la secuencia dada por el método de Horner.

1.4.2. Compleción de cuadrados

La completación de cuadrados es una simple transformación de polinomios de grado 2, pero cuya aplicación permite resolver muchos problemas: resolución de ecuaciones e inecuaciones de segundo grado, estudio y representación de parábolas, simplificación de expresiones, cálculo de primitivas,...

El objetivo de la transformación es que, en la expresión resultante, la variable aparezca solo una vez. Por ejemplo,

$$x^2 + 2x - 1 = (x + 1)^2 - 2;$$

en la expresión de la derecha, la variable x aparece solamente en $(x + 1)^2$. Naturalmente, dado que estamos trabajando con polinomios, en la expresión transformada solo podrán aparecer sumas, restas y productos.

EJEMPLO 1.4.3 El primer método para conseguir esta transformación es utilizar identificación de coeficientes. Por ejemplo, para completar cuadrados en el polinomio $2x^2 - 3x + 1$ podemos buscar parámetros A y B tales que:

$$2x^2 - 3x + 1 = 2(x + A)^2 + B$$

A partir de aquí, expandiendo la expresión de la derecha e identificando coeficientes, obtenemos un sistema de ecuaciones que permite determinar la expresión buscada.

$$\begin{aligned} 2x^2 - 3x + 1 &= 2(x + A)^2 + B \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 2(x^2 + 2Ax + A^2) + B \\ 2x^2 - 3x + 1 &= 2x^2 + 4Ax + 2A^2 + B \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 4A = -3 &\Rightarrow A = -\frac{3}{4} \\ 2A^2 + B = 1 &\Rightarrow B = 1 - 2\frac{9}{16} = \frac{-1}{8}, \end{aligned}$$

$$\text{y de ahí: } 2x^2 - 3x + 1 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}.$$

□

Debemos acostumbrarnos, no obstante, a realizar esta transformación de una forma más rápida. Si nos fijamos en el caso particular $x^2 + bx$ y recordamos la fórmula del cuadrado de un binomio, es fácil concluir que la compleción de cuadrados tendrá la siguiente forma:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \dots$$

Si elevamos al cuadrado “mentalmente”, nos aparece el número $b^2/4$, que no está en el lado izquierdo, y por lo tanto debemos “eliminarlo”, es decir:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}$$

Si aprendemos a desarrollar mentalmente la igualdad anterior, el proceso de compleción de cuadrados podrá hacerse sin necesidad de recurrir a ecuaciones.

EJEMPLO 1.4.4 Vamos a transformar el polinomio $2x^2 - 4x + 1$ usando el proceso explicado anteriormente:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4x - 1 &= 2 \left(\underbrace{x^2 - 2x}_{\left((x-1)^2 - 1\right)} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2 \left(\underbrace{\left((x-1)^2 - 1\right)}_{\left((x-1)^2 - 2 - 1\right)} - \frac{1}{2} \right) = \\ &= 2(x-1)^2 - 2 - 1 = \\ &= 2(x-1)^2 - 3 \end{aligned} \quad \square$$

EJEMPLO 1.4.5 En el ejemplo anterior, hemos sacado factor común al coeficiente de x^2 para que los cálculos siguientes sean más simples. En algunos casos será más sencillo proceder directamente sin hacer este paso.

$$\begin{aligned} \underbrace{4x^2 - 3x}_{\left(\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)} + 1 &= \left(\underbrace{\left(\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16}\right)}_{\left(2x - \frac{3}{4}\right)^2} + 1 \right) = \\ &= \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} \end{aligned}$$

También podemos obtener otras expresiones en las condiciones indicadas:

$$4x^2 - 3x + 1 = \left(2x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{16} = \frac{(8x-3)^2}{16} + \frac{7}{16} = \frac{1}{16}((8x-3)^2 + 7) \quad \square$$

EJEMPLO 1.4.6 Ya hemos resuelto varias ecuaciones de segundo grado aplicando la fórmula que todo estudiante sabe desde sus años de educación primaria. En realidad, no es más que una consecuencia de la compleción de cuadrados que hemos aprendido en esta sección. Resolvemos en este ejemplo una ecuación sin utilizar la fórmula y dejamos al alumno el ejercicio de deducir la fórmula para una ecuación general

$ax^2 + bx + c = 0$ siguiendo los mismos pasos.

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 2 &= 0 \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 2 &= 0 \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} &= 0 \\
 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 &= \frac{9}{4} \\
 x - \frac{1}{2} &= \frac{3}{2}, \quad x - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\
 x &= 2, \quad x = -1
 \end{aligned}$$

De forma equivalente, también podríamos utilizar completación de cuadrados y la identidad $A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$ para factorizar directamente los polinomios. Por ejemplo, sobre el mismo ejemplo anterior, podemos hacer lo siguiente:

$$\begin{aligned}
 x^2 - x - 2 &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3^2}{2^2} = \\
 &= \left(x - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x + 1)(x - 2) \quad \square
 \end{aligned}$$

1.4.3. Cambio de centro de un polinomio

Un polinomio *centrado en* x_0 es una expresión algebraica de la forma

$$a_n(x - x_0)^n + a_{n-1}(x - x_0)^{n-1} + \cdots + a_2(x - x_0)^2 + a_1(x - x_0) + a_0 \quad (1.4)$$

También se dice que el polinomio está expresado en *términos de* $(x - x_0)$. Naturalmente, estas expresiones son polinomios y con la ayuda del binomio de Newton podemos transformarlas fácilmente en su forma expandida. Por otra parte, la forma expandida de un polinomio no es mas que el polinomio centrado en $x_0 = 0$.

Veremos que esta forma alternativa de escribir un polinomio puede ser más conveniente que la expandida para determinadas operaciones y por lo tanto es muy importante disponer del siguiente resultado.

TEOREMA 1.4.7 *Para todo número x_0 , cualquier polinomio $P(x)$ puede ser escrito de forma única como polinomio centrado en x_0 .*

Vamos a apoyarnos en unos ejemplos sencillos para describir los métodos de obtener la forma centrada de un polinomio en un punto determinado.

EJEMPLO 1.4.8 Haciendo uso de simples operaciones algebraicas y del binomio de Newton, vamos a expresar el polinomio

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1$$

EJEMPLO 1.4.10 Vamos a repetir el ejemplo anterior pero usando las derivadas sucesivas del polinomio. La igualdad que queremos conseguir es la siguiente,

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0.$$

Para determinar los coeficientes a_k , vamos a hallar las derivadas sucesivas del polinomio en sus dos representaciones, la inicial y la centrada en -1 , y evaluaremos ambas expresiones en el nuevo centro:

$$\begin{array}{rcl} P(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 1 \Rightarrow P(-1) = -7 & \left. \begin{array}{l} \\ P(x) = a_3(x+1)^3 + a_2(x+1)^2 + a_1(x+1) + a_0 \Rightarrow P(-1) = a_0 \end{array} \right\} & a_0 = -7 \\ \hline P'(x) = 6x^2 - 2x + 3 \Rightarrow P'(-1) = 11 & \left. \begin{array}{l} \\ P'(x) = 3a_3(x+1)^2 + 2a_2(x+1) + a_1 \Rightarrow P'(-1) = a_1 \end{array} \right\} & a_1 = 11 \\ \hline P''(x) = 12x - 2 \Rightarrow P''(-1) = -14 & \left. \begin{array}{l} \\ P''(x) = 3 \cdot 2a_3(x+1) + 2a_2 \Rightarrow P''(-1) = 2a_2 \end{array} \right\} & a_2 = -14/2 = -7 \\ \hline P'''(x) = 12 \Rightarrow P'''(-1) = 12 & \left. \begin{array}{l} \\ P'''(x) = 3 \cdot 2a_3 \Rightarrow P'''(-1) = 3 \cdot 2a_3 \end{array} \right\} & a_3 = 12/6 = 2 \end{array}$$

Esto nos lleva a la misma expresión que obtuvimos en los ejemplos anteriores:

$$2x^3 - x^2 + 3x - 1 = 2(x+1)^3 - 7(x+1)^2 + 11(x+1) - 7 \quad \square$$

Si aplicamos el proceso mostrado en el ejemplo anterior a un polinomio genérico, deducimos el resultado de la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 1.4.11 Si $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$, entonces $a_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$.

Esta proposición es la clave para la construcción de los polinomios de Taylor que estudiamos en la sección siguiente.

1.4.4. Funciones racionales y fracciones simples

Las funciones expresadas como cociente de polinomios se denominan *funciones racionales*. En esta sección, vamos a trabajar con polinomios con coeficientes reales y estamos interesados en la transformación de las expresiones racionales en una forma normal dada como suma de un polinomio y *fracciones simples*.

En primer lugar, hablaremos de funciones racionales *propias* si el grado del denominador es estrictamente mayor que el grado del numerador, como por ejemplo

$$\frac{5x+4}{x^2-2x-8}, \quad \frac{1}{x^5-8}.$$

Hablaremos de funciones racionales *impropias* si el grado del denominador es menor o igual que el grado del numerador, como por ejemplo

$$\frac{x^2-x}{x+3}, \quad \frac{x^2+3x-4}{x^2-2x-8}$$

PROPOSICIÓN 1.4.12 *Cualquier función racional se puede expresar como suma de un polinomio y de una función racional propia.*

La transformación necesaria para conseguir la descomposición es simplemente la división de polinomios, tras la cual llegamos a la igualdad

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

en donde $C(x)$ el cociente y $R(x)$ el resto de dividir $P(x)$ entre $Q(x)$.

EJEMPLO 1.4.13 La función racional $\frac{x^6 - 2}{x^4 + x^2}$ no es propia; dividimos para obtener la expresión de la proposición anterior.

$$\begin{array}{r} x^6 - 2 \\ \underline{-x^6 - x^4} \\ x^4 - 2 \\ \underline{-x^4 + x^2} \\ x^2 - 2 \end{array} \quad \begin{array}{l} x^4 + x^2 \\ \hline x^2 - 1 \end{array}$$

Mostramos, pero no explicamos, los detalles de la división, que pueden consultarse en cualquier manual de matemáticas de secundaria. Ya podemos escribir la descomposición deseada.

$$\frac{x^6 - 2}{x^4 + x^2} = x^2 - 1 + \frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2} \quad \square$$

DEFINICIÓN 1.4.14 (FRACCIÓN SIMPLE) *Las funciones racionales*

$$\frac{A}{(ax + b)^n}, \quad \frac{Ax + B}{(ax^2 + bx + c)^n},$$

en donde, $n \in \mathbb{N}$, $A, B, a, b, c \in \mathbb{R}$ y $ax^2 + bx + c$ no tiene raíces reales, se denominan fracciones simples.

Por ejemplo,

$$\frac{\frac{3}{2x+1}}{x}, \quad \frac{\frac{-5}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}}{1-x} = \frac{-5}{(x-1)^3},$$

$$\frac{1}{2x^2 + 2x + 1}, \quad \frac{1}{x^4 + 8x^2 + 16} = \frac{1}{(x^2 + 4)^2},$$

son fracciones simples. Sin embargo,

- $\frac{x}{x-2}$ no es fracción simple, ya que el denominador tiene grado 1 y el numerador no es una constante;
- $\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$ no es simple, ya que el numerador tiene grado 2;
- $\frac{1}{x^3 + 4x}$ no es simple, ya que el denominador, $x(x^2 + 4)$, no se corresponde con una potencia de un polinomio de grado 1, ni con una potencia de un polinomio de grado 2;

- $\frac{2x+5}{(x^2-4)^3}$ no es simple, ya que el polinomio x^2-4 tiene raíces reales.

PROPOSICIÓN 1.4.15 *Cualquier función racional propia $\frac{P(x)}{Q(x)}$, se puede expresar como suma de fracciones simples. Concretamente, si*

$$Q(x) = a(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\dots(x-a_p)^{n_p} \\ (x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}\dots(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$$

es la factorización en \mathbb{R} del polinomio $Q(x)$, entonces existen números reales A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} , tales que:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & \left(\frac{A_{11}}{x-a_1} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{A_{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} \right) + \\ & + \left(\frac{A_{21}}{x-a_2} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^2} + \dots + \frac{A_{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} \right) + \\ & + \dots + \\ & + \left(\frac{A_{p1}}{x-a_p} + \frac{A_{p2}}{(x-a_p)^2} + \dots + \frac{A_{pn_p}}{(x-a_p)^{n_p}} \right) + \\ & + \left(\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \dots + \frac{B_{1m_1}x+C_{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} \right) + \\ & + \left(\frac{B_{21}x+C_{21}}{x^2+b_2x+c_2} + \dots + \frac{B_{2m_2}x+C_{2m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}} \right) + \\ & + \dots + \\ & + \left(\frac{B_{q1}x+C_{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \dots + \frac{B_{qm_q}x+C_{qm_q}}{(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}} \right) \end{aligned} \quad (1.5)$$

El número de sumandos de la descomposición descrita en el resultado es la suma de las multiplicidades de los factores de Q . Para cada raíz real, se consideran tantos sumandos como su multiplicidad; los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son constantes. Para cada factor de grado 2 irreducible (par de raíces complejas conjugadas), se consideran tantos sumandos como su multiplicidad; los denominadores son las potencias sucesivas del correspondiente factor y los numeradores son polinomios de grado menor o igual a 1.

Por lo tanto, para determinar la descomposición, partimos de la factorización del denominador y planteamos la igualdad (1.5) para determinar, mediante identificación de coeficientes, los números A_{ij} , B_{ij} , C_{ij}

EJEMPLO 1.4.16 Mostramos el proceso de descomposición en fracciones simples de

la función racional propia $\frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2}$.

[Factorizamos el denominador,...

$$\frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2} = \frac{x^2 - 2}{x^2(x^2 + 1)}$$

[aplicamos el esquema de descomposición,...

$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

[sumamos...

$$= \frac{Ax(x^2 + 1) + B(x^2 + 1) + x^2(Cx + D)}{x^2(x^2 + 1)}$$

[y agrupamos.

$$= \frac{(A + C)x^3 + (B + D)x^2 + Ax + B}{x^2(x^2 + 1)}$$

Al igualar los coeficientes de los polinomios de los numeradores, obtenemos el siguiente sistema lineal de 4 ecuaciones y 4 incógnitas:

$$\begin{array}{rclcl} x^3 & \rightarrow & A + C & = & 0 \\ x^2 & \rightarrow & B + D & = & 1 \\ x^1 & \rightarrow & A & = & 0 \\ x^0 & \rightarrow & B & = & -2 \end{array}$$

cuya solución es $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$ y $D = 3$. Por lo tanto:

$$\frac{x^2 - 2}{x^4 + x^2} = -\frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^2 + 1} \quad \square$$

EJEMPLO 1.4.17 La siguiente función racional también es propia y por lo tanto no es necesario dividir los polinomios:

$$\frac{6x^5 + 16x^4 + 22x^3 + 18x^2 + 20x - 1}{(x - 1)^2(x + 2)(x^2 + x + 1)^2}$$

El denominador ya está factorizado, así que podemos pasar directamente a escribir la descomposición en fracciones simples:

$$\begin{aligned} \frac{6x^5 + 16x^4 + 22x^3 + 18x^2 + 20x - 1}{(x - 1)^2(x + 2)(x^2 + x + 1)^2} &= \\ &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2} + \frac{Dx + E}{x^2 + x + 1} + \frac{Fx + G}{(x^2 + x + 1)^2} \end{aligned}$$

Sumamos la expresión de la derecha tomando el denominador inicial como mínimo

común múltiplo y obtenemos la siguiente igualdad de numeradores

$$\begin{aligned}
 & 6x^5 + 16x^4 + 22x^3 + 18x^2 + 20x - 1 = \\
 & = A(x-1)(x+2)(x^2+x+1)^2 + B(x+2)(x^2+x+1)^2 + C(x-1)^2(x^2+x+1)^2 + \\
 & \quad + (Dx+E)(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1) + (Fx+G)(x-1)^2(x+2) = \\
 & = (A+C+D)x^6 + (3A+B+D+E)x^5 + (3A+4B-2D+E+F)x^4 + \\
 & \quad + (A+7B-2C-D-2E+G)x^3 + (-3A+8B-D-E-3F)x^2 + \\
 & \quad + (-3A+5B+2D-E+2F-3G)x + (-2A+2B+C+2E+2G)
 \end{aligned}$$

Por lo que, igualando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de siete ecuaciones lineales con siete incógnitas:

$$\left. \begin{array}{lcl} x^6 & \rightarrow & 0 = A + C + D \\ x^5 & \rightarrow & 6 = 3A + B + D + E \\ x^4 & \rightarrow & 16 = 3A + 4B - 2D + E + F \\ x^3 & \rightarrow & 22 = A + 7B - 2C - D - 2E + G \\ x^2 & \rightarrow & 18 = -3A + 8B - D - E - 3F \\ x^1 & \rightarrow & 20 = -3A + 5B + 2D - E + 2F - 3G \\ x^0 & \rightarrow & -1 = -2A + 2B + C + 2E + 2G \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} A & = & 1 \\ B & = & 3 \\ C & = & -1 \\ D & = & 0 \\ E & = & 0 \\ F & = & 1 \\ G & = & -2 \end{array} \right.$$

Por tanto, la descomposición final es:

$$\begin{aligned}
 \frac{6x^5 + 16x^4 + 22x^3 + 18x^2 + 20x - 1}{(x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2} &= \\
 &= \frac{1}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} - \frac{1}{x+2} + \frac{x-2}{(x^2+x+1)^2}
 \end{aligned}$$

□

1.4.5. Polinomios de Taylor

Los polinomios son las funciones elementales más simples, ya que solo hacen uso de las operaciones suma, resta y producto. La situación ideal sería que el resto de las funciones elementales se pudieran convertir en polinomios, pero esto no es cierto en ningún caso. Sin embargo, sí es posible “aproximar” cualquier función elemental con polinomios, así como cualquier función que se pueda construir a partir de ellas en determinadas condiciones. Como veremos más detalladamente en el último tema, para establecer un método de aproximación adecuado, debemos saber construir una aproximación de una función dada y también debemos poder mejorar la aproximación cuanto deseemos. En esta sección, solo vamos a aprender a construir los polinomios aproximantes, y será en el último tema cuando aprendamos a controlar los errores de este método de aproximación.

DEFINICIÓN 1.4.18 *El polinomio de Taylor de orden n (o n -ésimo polinomio de Taylor) de la función f en el punto x_0 es un polinomio T , de grado menor o igual*

que n tal que su valor en x_0 y el valor de las n primeras derivadas coinciden con los de f :

$$T^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$$

Como consecuencia de la proposición 1.4.11, podemos deducir fácilmente la expresión de los polinomios de Taylor como polinomios centrados en x_0 .

COROLARIO 1.4.19 *El polinomio de Taylor de la definición anterior, es único y viene dado por:*

$$\begin{aligned} T(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots \\ &\dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \end{aligned}$$

El polinomio de Taylor en $x_0 = 0$ se denomina igualmente polinomio de McLaurin.

EJEMPLO 1.4.20 Para la función $f(x) = e^x$, se verifica que $f^{(n)}(x) = e^x$ y por tanto, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para todo n . Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden n de la función exponencial en el punto 0 es:

$$T(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

En la figura 1.5, aparecen representadas la función exponencial y los polinomios de Taylor de orden 1, 2 y 4. En primer lugar, apreciamos el parecido de la función y sus polinomios, mayor cuanto mayor es el orden y cuanto más cerca estamos del punto $x_0 = 0$. Además, para el caso $n = 1$, observamos que la recta obtenida en su representación coincide con la recta tangente en el punto $x_0 = 0$. \square

Los polinomios de Taylor pueden evaluarse en cualquier punto, pero debemos tener en cuenta las siguientes consideraciones:

- Si queremos utilizarlos para aproximar magnitudes, solo tiene sentido usar los polinomios en los puntos para los cuales los coeficientes obtenidos sean números racionales, ya que el objetivo es estimar magnitudes reales con magnitudes racionales; esto será analizado con más detalle en el último tema.
- Solo tendremos la posibilidad de controlar los errores cometidos para las funciones elementales y para algunas funciones construidas a partir de ellas.
- Sí trabajaremos con funciones arbitrarias cuando utilicemos los polinomios para deducir *propiedades locales* de la funciones, es decir, para estudiar qué es lo que ocurre en un entorno “muy pequeño” alrededor de un punto. Por ejemplo, todos los resultados de clasificación de puntos críticos en los problemas de optimización, se basan en los desarrollos de Taylor.

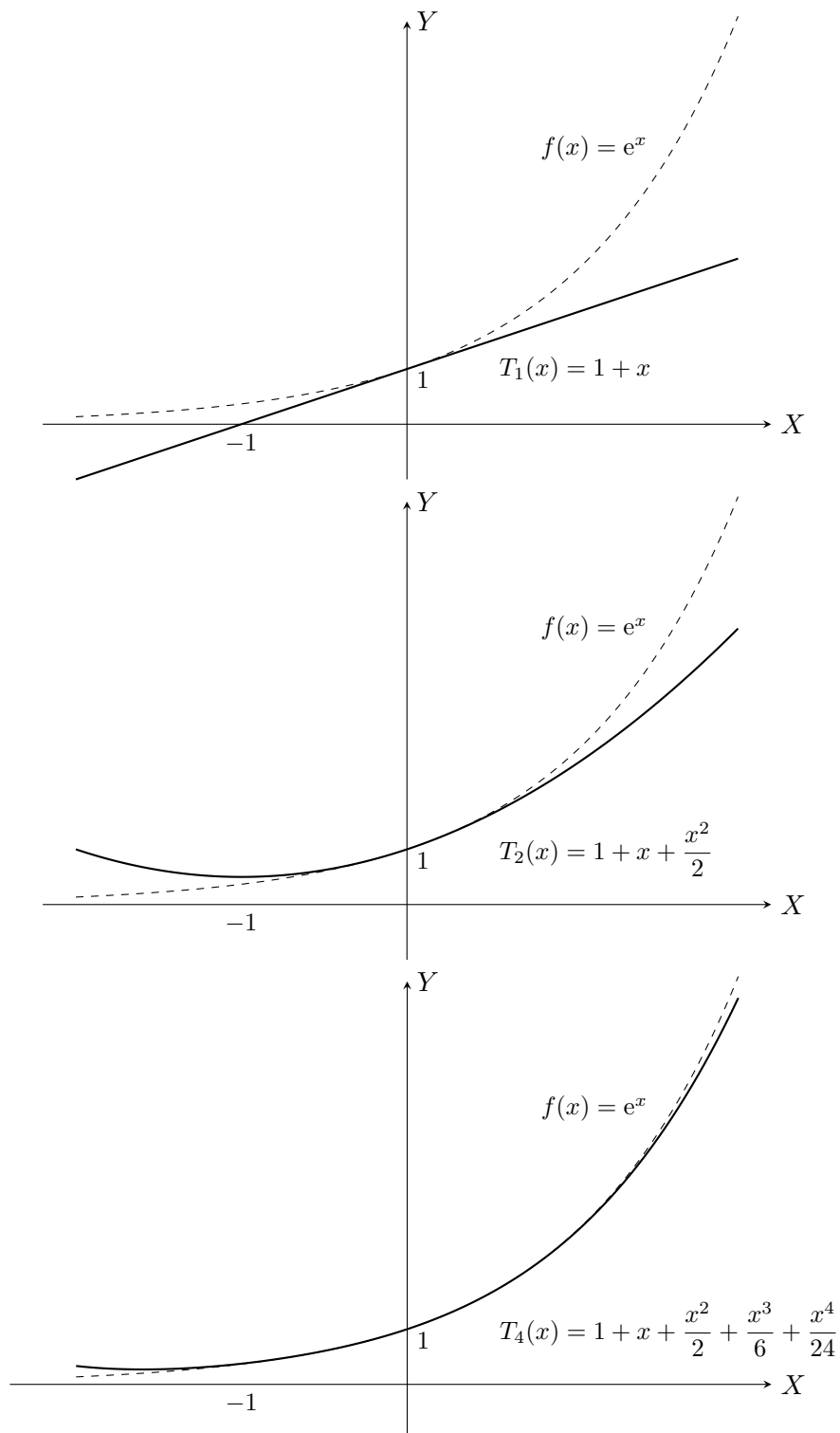


Figura 1.5: Función exponencial y algunos polinomios de Taylor.

EJEMPLO 1.4.21 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de la función $\log x$ (logaritmo neperiano) en $x_0 = 1$. No podemos elegir a 0 como centro, ya que ese punto no está en el dominio; además, el número 1 es el único punto del dominio tal que el valor de la función en ese punto y sus derivadas sucesivas son números racionales. Empezamos calculando las primeras derivadas sucesivas de la función $f(x) = \log x$, $x > 0$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= x^{-1} \\f''(x) &= -x^{-2} \\f'''(x) &= 2x^{-3} \\f^{(4)}(x) &= -3 \cdot 2x^{-4} \\f^{(5)}(x) &= 4 \cdot 3 \cdot 2x^{-5}\end{aligned}$$

Podemos observar que:

- Aparece alternativamente el signo “-”: las derivadas pares incluyen el signo, y las impares no. Por lo tanto, para el orden de derivación n , el signo será $(-1)^{n-1}$.
- No hemos multiplicado las constantes para poder observar como se construyen: en cada paso de derivación multiplicamos por el siguiente número natural. De esta forma, la constante correspondiente al orden de derivación n es $(n-1)!$.
- Finalmente, en cada derivada, la variable x aparece con un exponente negativo, cuyo valor absoluto coincide con el orden de derivación.

Es decir, con la observación de estas primeras derivadas podemos “intuir” que

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}, \quad n \geq 1 \quad (1.6)$$

Sin embargo, deberíamos hacer una demostración formal de esta afirmación usando *inducción matemática*.

- (i) Para $n = 1$: $(-1)^{1-1}(1-1)!x^{-1} = 1 \cdot 1x^{-1} = x^{-1} = f'(x)$.
- (ii) Supongamos que la fórmula es válida para n y a partir de ahí, vamos a deducirla para $n + 1$.

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n} \\f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}(f^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx}((-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}) \\f^{(n+1)}(x) &= -n(-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n-1} \\f^{(n+1)}(x) &= (-1)^n n!x^{-(n+1)}\end{aligned}$$

Efectivamente, la última igualdad se corresponde con la fórmula (1.6) sustituyendo n por $n + 1$.

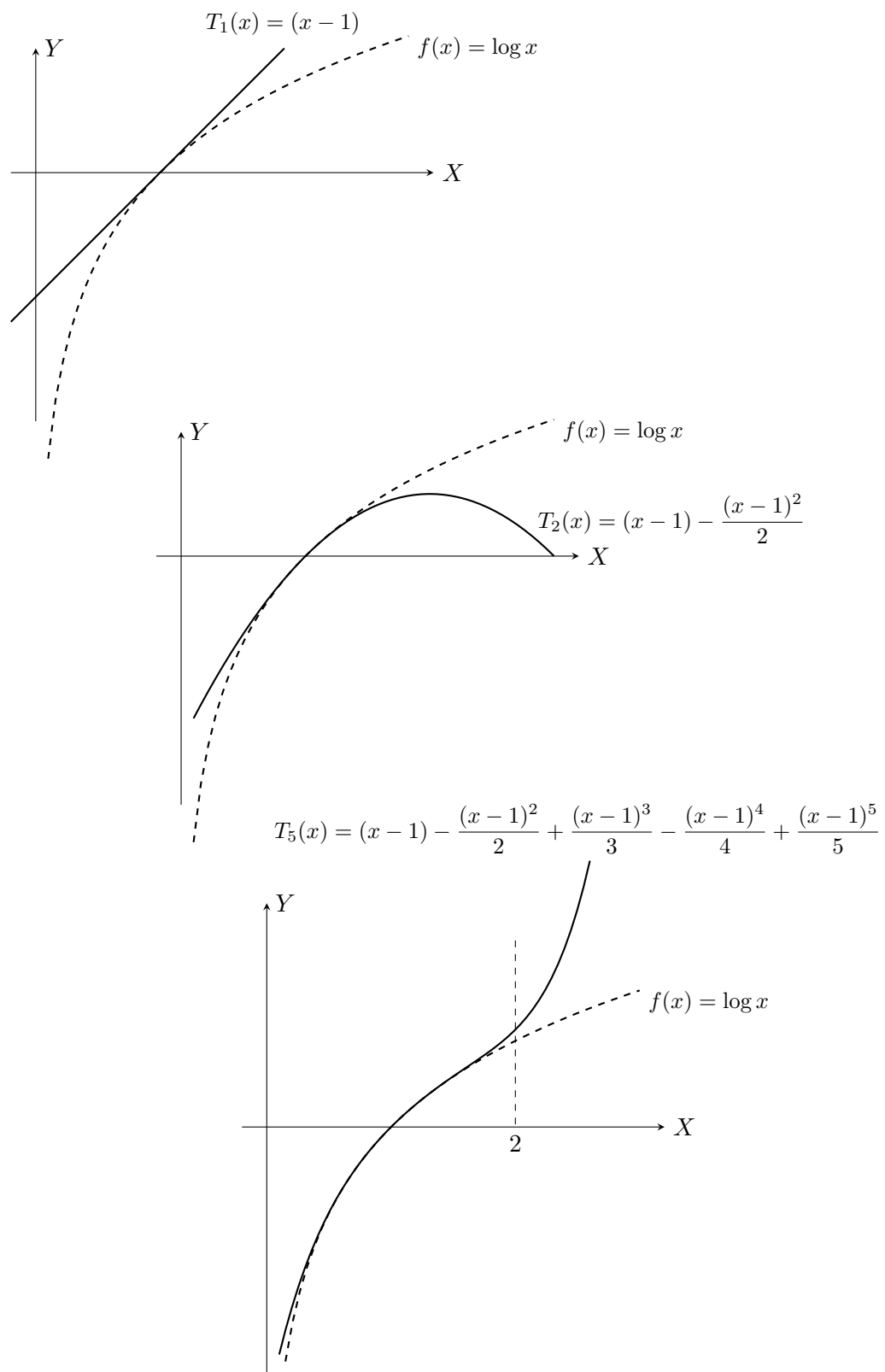


Figura 1.6: Función logaritmo y algunos polinomios de Taylor.

Por lo tanto, podemos concluir que la fórmula es válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

El resto del ejemplo consiste simplemente en aplicar la fórmula del polinomio de Taylor:

$$\begin{aligned} f(1) &= \log 1 = 0, & f^{(n)}(1) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \\ T(x) &= 0 + 1 \cdot (x-1) - \frac{1!}{2!}(x-1)^2 + \frac{2!}{3!}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!}(x-1)^n \\ T(x) &= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}(x-1)^n \\ T(x) &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k} (x-1)^k \end{aligned}$$

En la figura 1.6 de la página 63 podemos ver la gráfica de la función logaritmo junto a algunos polinomios de Taylor. En este caso observamos que al aumentar el grado del polinomio, el parecido entre este y la función solo aumenta en el intervalo $(0, 2)$, mientras que por encima de dos, polinomio y función logaritmo se van separando cada vez más. En el tema 4 estudiaremos por qué ocurre esto y a determinar, para cada función, en qué intervalos podemos considerar los polinomios de Taylor como método de aproximación. \square

En general, puede ser bastante complicado hallar los polinomios de Taylor de funciones no elementales a partir de la definición, pero como es habitual en matemáticas, podemos facilitar estos cálculos estudiando el comportamiento respecto de las operaciones algebraicas y de la derivación.

PROPOSICIÓN 1.4.22 (PROPIEDADES ALGEBRAICAS DEL POLINOMIO DE TAYLOR)

1. *El n -ésimo polinomio de Taylor de $f+g$ es la suma de los n -ésimos polinomios de Taylor de f y g*
2. *El n -ésimo polinomio de Taylor de $f \cdot g$ es el producto de los n -ésimos polinomios de Taylor de f y g desechando los sumandos de grado mayor que n .*
3. *El n -ésimo polinomio de Taylor de $f \circ g$ es la composición de los n -ésimos polinomios de Taylor de f y g desechando los sumandos de grado mayor que n .*
4. *La derivada del $(n+1)$ -ésimo polinomio de Taylor de f , es el n -ésimo polinomio de Taylor de f' . Esta propiedad se suele aplicar en sentido inverso, a partir del polinomio de f' , se obtiene el polinomio de f .*

A partir de estas propiedades y de los desarrollos de funciones elementales, es posible estudiar una amplia familia de funciones. Debemos observar sin embargo, que no siempre es práctico o útil el uso de los desarrollos de Taylor para funciones arbitrarias, ya que su cálculo directo puede ser imposible y, aunque la aplicación de las propiedades anteriores ayude en algunos casos, no proporciona una forma alternativa para calcular los *restos*, necesarios en el control de errores, según veremos en el último tema. No obstante, estas propiedades son útiles para otras aplicaciones de los polinomios de Taylor.

Relación de ejercicios 1.1

1. Determine la forma binómica de los siguientes números complejos.

$$a) (5 + 3i)(2 - i) - (3 + i) \quad b) \frac{1}{i} \quad c) i^{-17} \quad d) \frac{18 + i}{3 - 4i}$$

2. Desarrolle y simplifique las siguientes expresiones

$$a) \left(4x - \frac{1}{2}\right)^4 \quad b) (1 - 2i)^3$$

3. Resuelva en \mathbb{C} la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$\frac{2z}{1 + i} - \frac{2z}{i} = \frac{5}{2 + i}$$

4. Resuelva en \mathbb{C} el siguiente sistema y exprese las soluciones en su forma binómica:

$$\begin{cases} 4z + 3w = 23 \\ z + iw = 6 + 8i \end{cases}$$

5. Ayudándose de la fórmula del binomio de Newton calcule: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)^5}{(n+1)^6 - n^6}$.

6. Resuelva en \mathbb{C} la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$z^2 + 2\bar{z} - 1 = 0$$

7. Exprese en forma exponencial los siguientes números

$$a) 1 - i \quad b) -\sqrt{3} + i \quad c) -1 - i\sqrt{3}$$

8. Escriba $\sin 4\theta$ en términos de $\sin \theta$ y $\cos \theta$

9. a) Exprese $\sin^6 \theta$ en función del seno y coseno de múltiplos de θ
 b) Utilice la expresión obtenida en el apartado anterior y las *propiedades de linealidad* de la integral para calcular la integral $\int \sin^6 \theta d\theta$

10. a) Calcule las raíces cúbicas de $4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$ y expresaselas en forma binómica. (Indicación: $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} - \sqrt{2})$, $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$, $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$. Estos valores se calcularán en el ejercicio 12 de la relación 1.3.)
 b) Represente gráficamente las raíces calculadas en el apartado anterior.
 c) A partir de los ejemplos y ejercicios sobre raíces complejas, deduzca cómo es la representación gráfica de las raíces n -ésimas de un número complejo $z = re^{i\theta}$

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

Relación de ejercicios 1.2

1. Factorice en \mathbb{R} y en \mathbb{C} el polinomio $x^3 - 5x^2 + 11x - 15$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^3 - 5x^2 + 11x - 15 = 0$?
2. Factorice en \mathbb{R} y en \mathbb{C} el polinomio $x^4 - 2x^2 + 8x - 3$. ¿Cuáles son las soluciones de la ecuación $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$?
3. Obtenga la forma centrada en -1 del polinomio $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Resuelva este ejercicio usando las distintas formas estudiadas en el tema.
4. Transforme los polinomios usando la técnica de completar cuadrados:

$$a) \quad 5x^2 + 7x + 2$$

$$b) \quad 3x^2 + 1$$

5. a) Transforme el polinomio $9x^2 - 6x + 2$ usando la técnica de completar cuadrados.
b) Utilice la expresión anterior para calcular la integral $\int \frac{3}{9x^2 - 6x + 2} dx$
6. Descomponga en suma de polinomio y fracciones simples la función $\frac{x^3 + 2x + 9}{x^2 + x - 2}$
7. Utilice la descomposición en fracciones simples para calcular la integral

$$\int \frac{x^2 + 6x + 5}{x^3 - x^2 - x - 2} dx$$

8. a) Obtenga la forma centrada en 2 del polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 + 1$
b) Utilice la expresión obtenida en el apartado anterior para obtener la descomposición en fracciones simples de la función $\frac{P(x)}{(x-2)^4}$
c) Utilice la expresión obtenida en el apartado anterior para calcular la integral $\int \frac{P(x)}{(x-2)^4} dx$
9. Utilice el método de Horner para evaluar el polinomio de McLaurin de orden 5 de la función exponencial en $x = 1/2$. Utilice una calculadora para comparar el resultado con $e^{1/2} = \sqrt{e}$
10. Para la función $f(x) = \sin x$, determine los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en $x_0 = 0$. Deduzca la expresión de su polinomio de Taylor de cualquier orden.
11. Consideremos la función $f(x) = x^2 \sin x$:
 - a) Use la definición para determinar el polinomio de Taylor de $f(x)$, de orden 5 en el punto $x_0 = 0$
 - b) Use las propiedades algebraicas del Polinomio de Taylor como forma alternativa para hallar el mismo polinomio del apartado anterior.

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

Relación de ejercicios 1.3

1. Simplifique y exprese el resultado en forma binómica:

$$a) \frac{1-i}{1+i} \quad b) \frac{5}{1-3i} - \frac{5}{1+3i} \quad c) \frac{1}{2}(1+i)^2 \quad d) i^{2014} \quad e) (1-i)^8$$

2. Exprese en forma binómica las soluciones de la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{z} = \frac{2}{2+3i} + \frac{i}{3-2i}$$

3. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} z - w + u = 2 - i \\ z + iw = 6 + 8i \\ w + 2iu = -2i \end{cases}$$

4. Resuelva la siguiente ecuación y exprese la solución en forma binómica:

$$z + \bar{z}i - 5 = \frac{3 - z\bar{z}}{2i}$$

5. Calcule el módulo de $z = \frac{(1+2i)^3(4-3i)^4}{(3+4i)^4(2-i)^3}$

6. Exprese en forma exponencial los siguientes números

$$a) \sqrt{2} - i\sqrt{2} \quad b) (\sqrt{2} - i\sqrt{2})^2 \quad c) -2 + 2i \quad d) -\sqrt{3} - i \quad e) 1 - i\sqrt{3}$$

7. Use la fórmula del binomio de Newton para desarrollar las siguientes potencias:

$$a) (a+b)^7 \quad b) (x-1)^4 \quad c) \left(2x^3 - \frac{2}{5x^2}\right)^2 \\ d) (x-2)^5 \quad e) (1-2x)^3 \quad f) (z+1/2)^3$$

8. Calcule las siguientes exponenciales complejas

$$a) \exp(1 - \pi i) \quad b) \exp\left(1 - \frac{5\pi}{3}i\right) \quad c) e^{\frac{\pi}{2}i} e^{1 - \frac{3\pi}{4}i}$$

9. Exprese $\sin 3\theta$, $\cos 6\theta$ y $\sin 5\theta$ como polinomios en $\sin \theta$.

10. Exprese $\cos^4 \theta$, $\sin^3 \theta$ y $\cos^5 \theta$ en términos de senos y cosenos de múltiplos de θ .

11. Encuentre y represente gráficamente los siguientes números: las raíces quintas de -1 , las raíces sextas de $-i$, las raíces cuartas de $32(1 - i\sqrt{3})$

12. Consideramos los números complejos $z = 1 + i$, $w = -\sqrt{3} + i$

- a) Calcule y simplifique el producto zw
 b) Utilizando la forma exponencial de z y w , calcule el producto zw y exprese el resultado en forma exponencial y forma binómica.
 c) A partir de los resultados obtenidos en los dos apartados anteriores, deduzca el valor de $\cos \frac{\pi}{12}$, $\sin \frac{\pi}{12}$ y $\operatorname{tg} \frac{\pi}{12}$

13. Factorice en \mathbb{R} y en \mathbb{C} los siguientes polinomios.

- a) $z^3 + 8$ b) $y^4 + 81$ c) $z^4 + 5z^2 + 4$
 d) $t^6 - 2t^4 + 4t^2$ e) $3x^3 - x^2 - 7x + 5$ f) $x^3 - 12x + 16$
 g) $16x^4 - 56x^2 - 256x + 561$ h) $4x^4 + 8x^3 + 17x^2 + 2x + 4$

14. En este ejercicio vamos a aprender a factorizar un polinomio de grado 4 con término cúbico. Consideremos el polinomio $P(x) = x^4 - 4x^3 + 9x^2 - 4x + 8$:

- a) Expresa el polinomio P cambiando su centro a 1 y, mediante el cambio de variable $t = x - 1$ conviértalo en otro polinomio $Q(t)$. (Que no debe contener término de grado 3).
 b) Factorice el polinomio $Q(t)$ usando identificación de coeficientes.
 c) Obtenga la factorización en \mathbb{R} de $P(x)$ deshaciendo el cambio de variable y finalmente, factorice el polinomio en \mathbb{C} .

15. En este ejercicio vamos a calcular $\cos \frac{\pi}{5}$ utilizando números complejos.

- a) Utilice la fórmula de De Moivre para demostrar que

$$\cos(5\theta) = 16 \cos^5 \theta - 20 \cos^3 \theta + 5 \cos \theta$$

- b) Deduzca que $\cos \frac{\pi}{5}$ es raíz del polinomio $P(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x + 1$
 c) Factorice el polinomio $P(x)$ determinando una raíz “a ojo” y usando identificación de coeficientes para factorizar el polinomio de grado 4 resultante como producto de dos polinomios de grado 2.
 d) A partir de la factorización del apartado anterior, calcule $\cos \frac{\pi}{5}$

16. Expresa los siguientes polinomios en términos de los monomios indicados:

- a) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ en potencias de $(x - 1)$
 b) $2x^5 - 3x^2 + x - 4$ en potencias de $(x - 1)$
 c) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ en potencias de $(x + 2)$

17. a) ¿Cuál es el polinomio de Taylor de orden 10 en el punto $x_0 = 3$ de la función $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$?

b) ¿Es cierto que el polinomio de Taylor de *orden 5* de una función tiene *grado 5*?

c) Si el polinomio de orden 5 de una función f en el punto $x_0 = -2$ es $P(x) = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$, ¿Cuánto vale la derivada tercera de f en “-2”, $f^{(3)}(-2)$? ¿Podemos conocer el valor exacto de $f(0)$?

18. Calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en el punto $x_0 = 0$ de la función $\cos x$.

19. Calcule los polinomios de Taylor de órdenes 1, 2, 3, 4 y 5 en el punto $x_0 = 1$ de la función \sqrt{x} .

20. Calcule el polinomio de Taylor de orden 12 de la función $f(x) = \sin(x^2)$ en el punto $x = 0$.
21. Halle los polinomios de Taylor de las siguientes funciones en los puntos indicados y de los órdenes indicados:
- a) $f(x) = \sin x$, orden $2n$ en $\pi/2$ b) $f(x) = \sqrt{x}$, orden 4 en 4
c) $f(x) = e^x \sin x$, orden 8 en 0 d) $f(x) = \operatorname{tg} x$, orden 5 en 0
22. Calcule el polinomio de Taylor de orden 3 de la función $f(x) = e^{-x} \sin x$ en el punto $x = 0$
23. Descomponga en suma de polinomios y fracciones simples:

a) $\frac{2x-3}{x^2-9}$	b) $\frac{8}{x^2+6x+5}$	c) $\frac{x-1}{x^3+x^2-6x}$
d) $\frac{x+1}{x^3+6x^2+9x}$	e) $\frac{x^2+3x-2}{(x+1)^2(x+2)^2}$	f) $\frac{4-x}{2x^2-x-3}$
g) $\frac{2x-1}{x^2+3x+10}$	h) $\frac{1}{(x+1)(x^2+1)}$	i) $\frac{x^2}{1-x^4}$
j) $\frac{1}{x^6-2x^4+4x^2}$	k) $\frac{x^4+x^3-5x-1}{x^4+5x^2+4}$	

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)