Prueba S7: 2 de febrero de 2011

1. Calcula y clasifica los puntos críticos del campo $f(x,y) = y^2 + 4y + 2x^4 + 4x^2 + 8xy + 3$.

Solución: Hallamos el gradiente de f y planteamos el sistema:

$$\nabla f(x,y) = (8x^3 + 8x + 8y, 2y + 4 + 8x)$$

$$\left.\begin{aligned} 8x^3 + 8x + 8y &= 0 \\ 2y + 4 + 8x &= 0 \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} x^3 + x + y &= 0 \\ y + 2 + 4x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

De la segunda ecuación deducimos que $y = -4x-2$; utilizamos esta igualdad para reducir la variable y en la primera ecuación y obtenemos:

$$0 = x^3 + x - 4x - 2 = x^3 - 3x - 2$$

Comprobamos si alguno de los divisores de -2 es solución de esta ecuación y vemos que $x = 2$ es efectivamente una de ellas. Dividiendo el polinomio entre $x - 2$ determinamos fácilmente el resto:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

$$0 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \quad \Rightarrow \quad x = -1$$

Utilizando la segunda ecuación del sistema inicial, deducimos fácilmente los correspondientes valores de y, y obtenemos que los puntos críticos de f son $(2,-10)$ y $(-1,2)$.

Para clasificar los puntos críticos, determinamos la matriz hessiana y la diferencial segunda.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x,y) &= \begin{pmatrix} 24x^2 + 8 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\
\nabla^2 f(2,-10) &= \begin{pmatrix} 104 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\
\mathrm{d}^2 f_{(2,-10)}(u_1,u_2) &= 104u_1^2 + 16u_1u_2 + 2u_2^2 = 2(u_2 + 4u_1)^2 + 72u_1^2 \\
\nabla^2 f(-1,2) &= \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\
\mathrm{d}^2 f_{(-1,2)}(u_1,u_2) &= 32u_1^2 + 16u_1u_2 + 2u_2^2 = 2(u_2 + 4u_1)^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos deducir que $(2,-10)$ es un mínimo local, pero no podemos concluir nada sobre $(-1,2)$. Para este punto, observamos que en la dirección $u_2 + 4u_1 = 0$, la diferencial segunda se anula, por lo que vamos a estudiar directamente el campo f sobre esta dirección, es decir, en la dirección del vector $(1,-4)$:

$$\begin{aligned}
g(t) &= f((-1,2) + t(1,-4)) = f(-1+t, 2-4t) = \\
&\qquad = (2-4t)^2 + 4(2-4t) + 2(-1+t)^4 + 4(-1+t)^2 + 8(-1+t)(2-4t) + 3 \\
g'(t) &= -8(2-4t) - 16 + 8(-1+t)^3 + 8(-1+t) + 8(2-4t) - 32(-1+t) \\
g''(t) &= 32 + 24(-1+t)^2 + 8 - 32 - 32 \\
g'''(t) &= 48(-1+t) \\
g'''(0) &= -48 \neq 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, 0 es un punto de inflexión de g y, en consecuencia, $(-1,2)$ no es un extremo local de f. Obsérvese que no hemos necesitado evaluar g' y g'' en 0, ya que por el estudio del gradiente y de la hessiana en $(-1,2)$ sabemos que ambos valores son 0.

2. Consideramos los campos $f(x,y) = x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 49y, \qquad g(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27$. ¿El punto $(1,-2)$ es un punto crítico de f sobre $g(x,y) = 0$?; en caso afirmativo, clasificalo. ¿Y el punto $(-3,0)$?; en caso afirmativo, clasifícalo.

   Solución: Los puntos críticos de $f(x,y)$ con la restricción $g(x,y) = 0$, son aquellos puntos para los cuales existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} 0 &= x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27 \\ \mathrm{D}_1 f(x,y) = 2x - 5y + 2 &= \lambda \mathrm{D}_1 g(x,y) = \lambda \cdot (3x^2 + y^2) \\ \mathrm{D}_2 f(x,y) = -5x + 2y + 49 &= \lambda \mathrm{D}_2 g(x,y) = \lambda \cdot (2xy + 3y^2 + 12) \end{aligned}$$

   El punto $(-3,0)$ verifica la primera ecuación, es decir, está en la restricción, pero no existe ningún número λ que verifique las otras dos ecuaciones

$$\begin{aligned} -4 &= 27\lambda \\ 64 &= 12\lambda, \end{aligned}$$

   ya que $\frac{-4}{27} \neq \frac{64}{12}$.
   El punto $(1,-2)$ sí es punto crítico, ya que verifica la primera ecuación y para $\lambda = 2$ se verifican las otras dos ecuaciones.

$$\begin{aligned} 0 &= 1^3 + 1 \cdot (-2)^2 + (-2)^3 + 12(-2) + 27 \\ 2 \cdot 1 - 5(-2) + 2 &= 2 \cdot (3 \cdot 1^2 + (-2)^2) \\ -5 \cdot 1 + 2(-2) + 49 &= 2 \cdot (2 \cdot 1(-2) + 3(-2)^2 + 12) \end{aligned}$$

   Para clasificar este punto, consideramos el campo

$$\begin{aligned} F(x,y) = f(x,y) - 2g(x,y) &= x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 49y - 2(x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27) = \\ &= -2x^3 - 2xy^2 - 2y^3 + x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 25y - 54 \\ \nabla F(x,y) &= (-6x^2 - 2y^2 + 2x - 5y + 2, -4xy - 8y^2 - 5x + 2y + 25) \\ \nabla^2 F(x,y) &= \begin{pmatrix} -12x + 2 & -4y - 5 \\ -4y - 5 & -4x - 16y + 2 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 F(1,-2) &= \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 3 & 30 \end{pmatrix} \\ \mathrm{d}^2 F_{(1,-2)}(u_1,u_2) &= -10u_1^2 + 6u_1u_2 + 30u_2^2 \end{aligned}$$

   Tenemos que determinar el signo de la diferencial segunda sobre los vectores tangentes a la restricción $g(x,y) = 0$, es decir, en la dirección normal al vector $\nabla g(1,-2)$. Dado que $\nabla g(1,-2) = (7,20)$, tenemos que analizar el signo de la diferencial segunda en la dirección $(20,-7)$:

$$\mathrm{d}^2 F_{(1,-2)}(20,-7) = -10 \cdot 20^2 - 6 \cdot 20 \cdot 7 + 30 \cdot 7^2 = -3370 < 0$$

   Por lo tanto, el punto es un máximo.

3. Determina una primitiva de la función $\sqrt{1+x^2}$.

Solución: Podemos utilizar dos dos cambios de variable para abordar el cálculo de la primitiva

a)

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\left[\begin{array}{l} x=\operatorname{senh} t \\ \mathrm{d}x=\cosh t\,\mathrm{d}t \end{array}\right.\\
\int \sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int \sqrt{1+\operatorname{senh}^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int \sqrt{\cosh^2 t}\cosh t\,\mathrm{d}t = \int \cosh^2 t\,\mathrm{d}t = \\
&= \int \left(\frac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{2}\right)^2 \mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t}+1}{4}\mathrm{d}t = \\
&= \int \frac{1+\cosh 2t}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}+\frac{\operatorname{senh} 2t}{4} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{argsenh} x + \frac{1}{4}\operatorname{senh} 2\operatorname{argsenh} x = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{argsenh} x + \frac{2}{4}\operatorname{senh}(\operatorname{argsenh} x)\cosh(\operatorname{argsenh} x) = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{argsenh} x + \frac{x}{2}\sqrt{1+\operatorname{senh}^2(\operatorname{argsenh} x)} = \\
&= \frac{1}{2}\operatorname{argsenh} x + \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\left[\begin{array}{l} x=\operatorname{tg} t \\ \mathrm{d}x=(1+\operatorname{tg}^2 t)\mathrm{d}t \end{array}\right.\\
\int \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}(1+\operatorname{tg}^2 t)\mathrm{d}t &= \int \sqrt{\frac{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}}\frac{\cos^2 t+\operatorname{sen}^2 t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{\cos^3 t}\,\mathrm{d}t = \\
&\qquad\left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{sen} t & (|u|\leq 1) \\ \mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t & \end{array}\right.\\
&= \int \frac{1}{\cos^3 t}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{\cos^4 t}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{(1-\operatorname{sen}^2 t)^2}\,\mathrm{d}u = \\
&= \int \frac{1}{(1-u^2)^2}\,\mathrm{d}u = \\
&= \int \left(\frac{1}{4(u+1)}+\frac{1}{4(u+1)^2}+\frac{1}{4(1-u)}+\frac{1}{4(u-1)^2}\right)\mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{4}\left(\log(u+1)-\frac{1}{u+1}+\log(1-u)+\frac{1}{1-u}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(\log(1-u^2)+\frac{2u}{1-u^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\log(1-\operatorname{sen}^2 t)+\frac{2\operatorname{sen} t}{1-\operatorname{sen}^2 t}\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(-\log(x^2+1)+\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}(x^2+1)\right) = \frac{-1}{2}\log\sqrt{x^2+1}+\frac{x}{2}\sqrt{1+x^2}
\end{aligned}
$$

Hemos usado que, si $x=\operatorname{tg} t$, entonces $x^2=\dfrac{1-\cos^2 t}{\cos^2 t}$ y por lo tanto, $\cos^2 t=\dfrac{1}{1+x^2}$ y $\operatorname{sen}^2 t=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

4. Resuelve la ecuación diferencial $y' = x - y$. ¿Cuál es la solución que verifica la condición inicial $y(-1) = 0$?

Solución: La ecuación es lineal. Resolvemos en primer lugar la ecuación lineal homogénea asociada: $y_h' = -y_h$:

$$y_h' = -y_h \quad \Rightarrow \quad \frac{y_h'}{y_h} = -1 \quad \Rightarrow \quad \int \frac{\mathrm{d}y_y}{y_h} = -\int \mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \log y_h = -x + C_1 \quad \Rightarrow \quad y_h = C\mathrm{e}^{-x}$$

Por la conjetura de Lagrange, existe una solución de la ecuación inicial de la forma $y = c(x)\mathrm{e}^{-x}$:

$$\begin{aligned}
y' = c'(x)\mathrm{e}^{-x} - c(x)\mathrm{e}^{-x} &= x - y = x - c(x)\mathrm{e}^{-x} \\
c'(x)\mathrm{e}^{-x} &= x \\
c'(x) &= x\mathrm{e}^{x} \\
c(x) &= \int x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x \\
&\left[\begin{array}{lcl} u = x & \rightarrow & \mathrm{d}u = \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}v = \mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x & \rightarrow & v = \mathrm{e}^{x} \end{array}\right. \\
c(x) &= x\mathrm{e}^{x} - \int \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C \\
y &= (x\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{x} + C)\mathrm{e}^{-x} = x - 1 + C\mathrm{e}^{-x}
\end{aligned}$$

Para que la solución verifique $y(-1) = 0$, debe verificarse

$$0 = -1 - 1 + C\mathrm{e} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{2}{\mathrm{e}}$$

Por lo tanto, la solución del problema de condiciones iniciales es $y = x - 1 + \dfrac{2}{\mathrm{e}^{x+1}}$.