E. T. S. I. Informática – 19/11/2012

Segundo examen parcial - Curso 2012/2013

Cálculo para la Computación

Grados Ing. Informática, Sotware y Computadores

---

1. (Hasta 1 punto) Determine si las funciones son o no son infinitésimos equivalentes en 0:

$$f(x) = x\mathrm{e}^x - \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

Solución: Comprobamos en primer lugar que ambas funciones son infinitésimos en 0. Dado que las dos son continuas en $\mathbb{R}$, basta evaluar las funciones en ese punto: $f(0) = 0 \cdot \mathrm{e}^0 - \operatorname{sen} 0 = 0$ y $g(0) = 0^2 = 0$.

Para comprobar que son equivalentes, calculamos el límite del cociente en 0, para lo que utilizamos dos veces el teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\mathrm{e}^x - \operatorname{sen} x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x - \cos x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x + \operatorname{sen} x}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Por lo tanto, efectivamente f y g son infinitésimos equivalentes en 0.

---

2. (Hasta 2 puntos) Consideremos la ecuación $x^3 + x^2 = 1$

   a) Utilice el método de Newton para definir una sucesión convergente a una solución de la ecuación.

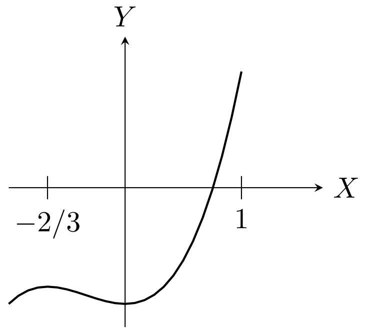
   b) Para la sucesión anterior, proporcione una acotación del error al tomar cada término de la sucesión como solución de la ecuación.

Solución:

a) Si consideramos la función $f(x) = x^3 + x^2 - 1$, la ecuación planteada se escribe como $f(x) = 0$:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x = x(3x + 2); \qquad f''(x) = 6x + 2$$

Teniendo en cuenta que los puntos críticos son $x = 0$ y $x = -2/3$, es fácil observar que la representación gráfica del polinomio f es la siguiente:



Si evaluamos la función en 0 y en 1, obtenemos un cambio de signo, $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. Sin embargo, no podemos utilizar el intervalo $[0, 1]$ para definir la sucesión del método de Newton y tener garantizada su convergencia, ya que $f'(0) = 0$. Recurrimos al método de las bisecciones para encontrar el siguiente candidato:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 1 = \frac{-5}{8}$$

Por lo tanto, consideramos el intervalo $[\frac{1}{2}, 1]$, en el que sí se verifican las condiciones del teorema de convergencia del método de Newton:

$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 3x^2 + 2x \geq \frac{3}{4} + 1 > 0$$
$$\frac{1}{2} \leq x \leq 1 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6x + 2 \geq 3 + 2 > 0$$

Para construir la sucesión, tenemos en cuenta que $f(1) = 1 > 0$ y $f''(1) = 8 > 0$, por lo que $a_0 = 1$ y:

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{a_n^3 + a_n^2 - 1}{3a_n^2 + 2a_n} = \frac{2a_n^3 + a_n^2 + 1}{3a_n^2 + 2a_n}$$

b) Si $m = \text{mín}\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$, entonces el término a_n aproxima la solución de la ecuación con un error menor que $\frac{f(a_n)}{m}$. Dado que $f'(1) = 5$ y $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} + \frac{2}{2} = \frac{7}{4} < 5$, el término n-ésimo de la sucesión aproxima la solución de la ecuación con un error menor que:

$$\epsilon < \frac{f(a_n)}{f'(1/2)} = \frac{4}{7} f(a_n)$$

---

3. (Hasta 2,5 puntos) Determine el campo de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}(x-5)^n$

Solución: Utilizamos el criterio del cociente para estudiar la convergencia absoluta de la serie y deducir el radio de convergencia:

$$\text{lím} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \text{lím} \frac{((n+1)!)^3 |x-5|^{n+1} (3n)!}{(3n+3)!(n!)^3 |x-5|^n} = \text{lím} \frac{(n+1)^3 |x-5|}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{1}{27}|x-5|$$

Por lo tanto, la serie converge absolutamente si $|x-5| < 27$:

$$|x-5| < 27 \quad \Longleftrightarrow \quad -27 < x-5 < 27 \quad \Longleftrightarrow \quad -22 < x < 32$$

Estudiamos ahora la convergencia en los extremos del intervalo de convergencia:

- Si $x = 32$, entonces la serie queda: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} 27^n$. Del cálculo anterior deducimos que, en este caso:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{27(n+1)^3}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{\cancel{(3n+3)}(3n+3)(3n+3)}{\cancel{(3n+3)}(3n+2)(3n+1)} > 1$$

  Por lo tanto, a_n es creciente y, al ser de términos positivos, su límite no puede ser 0. Por lo tanto, por la condición necesaria de convergencia, esta serie no converge. También podemos llegar a la misma conclusión utilizando la fórmula de Stirling:

$$\text{lím} \frac{(n!)^3 27^n}{(3n)!} = \text{lím} \frac{n^{3n} \mathrm{e}^{-3n} \sqrt{8\pi^3 n^3}\, 27^n}{(3n)^{3n} \mathrm{e}^{-3n} \sqrt{6\pi n}} = \text{lím} \sqrt{\frac{4}{3}\pi^2 n^2} = \text{lím} \frac{2\pi n}{\sqrt{3}} = +\infty$$

- Si $x = -22$, entonces la serie queda: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}(-27)^n$. En el apartado anterior, hemos visto que la sucesión de los valores absolutos no converge a 0 y, por lo tanto, la sucesión alternada tampoco. Por lo tanto, por la condición necesaria de convergencia, la serie no converge.

---

4. (Hasta 2 puntos) Sume la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} x^n$.

Solución: Calculemos las constantes a y b tales que:

$$n^2 - 1 = n(n-1) + an + b = n^2 + (a-1)n + b$$

Identificando coeficientes, deducimos que $a = 1$ y $b = -1$. A partir de esa igualdad, deducimos la suma de la serie como sigue:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} x^n = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!} x^n = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n(n-1)}{n!} x^n + \frac{n}{n!} x^n - \frac{1}{n!} x^n \right) =$$
$$= -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(n-1)}{n!} x^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = -1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-2)!} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$$
$$= -1 + x^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + x \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} =$$
$$= -1 + x^2 e^x + x(e^x - 1) - (e^x - 1 - x) = e^x(x^2 + x - 1)$$

---

5. (Hasta 2,5 puntos) Considere la función $f(x) = x\cos(x^2)$. Utilice las series de Taylor para aproximar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con tres cifras decimales exactas.

Solución: Vamos a construir la serie de Taylor de f a partir de la serie del coseno y evaluarla en $\frac{1}{2}$:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$
$$\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}$$
$$x\cos(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}$$
$$x = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{4n+1}(2n)!}$$

Esta serie es alternada, por lo que el error cometido al tomar la suma parcial N-ésima se acota por el valor absoluto del sumando $N+1$:

$$\varepsilon < \frac{1}{2^{4N+5}(2N+2)!} < \frac{1}{2000} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^{4N+5}(2N+2)! > 2000$$

No hace falta hacer muchos cálculos para comprobar que con $N = 1$ conseguimos esta desigualdad. Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{4}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^6} = \frac{31}{64}, \quad \varepsilon < \frac{1}{2}10^{-3}$$

También podríamos haber utilizado el polinomio de Taylor y la expresión del resto de Lagrange de la función coseno en el 0:

$$\cos x = \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right) + (-1)^{N+1}\frac{\operatorname{sen}(c)}{(2N+1)!}x^{2N+1}; \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } x$$

$$\cos(x^2) = \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}\right) + (-1)^{N+1}\frac{\operatorname{sen}(c)}{(2N+1)!}x^{4N+2}; \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } x^2$$

$$x\cos(x^2) = \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{x^{4n+1}}{(2n)!}\right) + (-1)^{N+1}\frac{\operatorname{sen}(c)}{(2N+1)!}x^{4N+3}; \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } x^2$$

$$x = \frac{1}{2}: \quad \frac{1}{2}\cos(\frac{1}{4}) = \left(\sum_{n=0}^{N}(-1)^n \frac{1}{2^{4n+1}(2n)!}\right) + (-1)^{N+1}\frac{\operatorname{sen}(c)}{2^{4N+3}(2N+1)!}; \quad c \text{ entre } 0 \text{ y } \frac{1}{4}$$

El enunciado nos pide determinar N de tal forma que el error dado por la suma parcial sea menor que $\frac{1}{2}10^{-3}$, es decir:

$$\frac{|\operatorname{sen}(c)|}{2^{4N+3}(2N+3)!} < \frac{1}{2^{4N+3}(2N+3)!} < \frac{1}{2000} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2^{4N+3}(2N+1)! > 2000$$

El primer natural que verifica esta desigualdad es $N = 2$, y por lo tanto:

$$\frac{1}{2}\cos(\frac{1}{4}) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^9 4!} = \frac{5953}{12288}$$