
Cálculo diferencial

Contenidos

- LECCIÓN 2.1: CURVAS PARAMETRIZADAS. Estudio de curvas parametrizadas. Representación gráfica. Asíntotas. Curvas polares. Cónicas.
- LECCIÓN 2.2: CAMPOS ESCALARES. Campos escalares lineales. Derivadas direccionales, derivadas parciales y diferenciabilidad. Vector gradiente. Plano tangente a una superficie. Derivadas de orden superior.
- LECCIÓN 2.3: OPTIMIZACIÓN DE CAMPOS ESCALARES. Extremos locales. Clasificación de puntos críticos con la matriz hessiana. Extremos condicionados y multiplicadores de Lagrange. Extremos absolutos.

Prerrequisitos: Conocimientos básicos de álgebra lineal y geometría (ecuaciones de una recta, vectores, etc.). Trigonometría. Cálculo de límites y derivación. Representación gráfica de funciones de una variable (determinar dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos, intervalos de concavidad y convexidad, puntos de inflexión, etc.)

Objetivos: Los objetivos del tema son: reconocer una curva a partir de una parametrización y estudiar sus características, incluidas las curvas polares; reconocer y saber identificar las características de las curvas cónicas; saber calcular y aplicar las propiedades del vector gradiente de un campo escalar; plantear y resolver problemas de optimización de campos escalares.

Resultados de aprendizaje

- **Curvas parametrizadas y polares:** Representar curvas parametrizadas y polares. Hallar la recta tangente y la recta normal a una curva en un punto. Saber determinar puntos de tangencia horizontal y puntos de tangencia vertical. Saber determinar las asíntotas de una curva parametrizada.
- **Cónicas:** Identificar y deducir las características de una cónica (degenerada o no) a partir de su expresión $P(x, y) = 0$ (ejes, vértices, centro, asíntotas, ...). Obtener una parametrización de una cónica a partir de su ecuación normalizada. Obtener la ecuación y parametrización de una cónica a partir de determinadas características.
- **Campos escalares:** Hallar el vector gradiente. Utilizar el vector gradiente para obtener propiedades geométricas (plano tangente, rectas normales, ortogonalidad de superficies o curvas, ...). Calcular derivadas direccionales. Utilizar el vector gradiente como la dirección en donde la derivada direccional es máxima.
- **Optimización:** Hallar y clasificar puntos críticos de campos de dos o tres variable usando la matriz hessiana o el comportamiento del campo en rectas o curvas que pasan por el punto crítico. Hallar y clasificar puntos críticos de campos de dos variables con una restricción, usando multiplicadores de Lagrange o reducción de variables. Hallar los máximos y mínimos absolutos de campos de dos variables sobre regiones acotadas.

LECCIÓN 2.1

Curvas planas

El objetivo último de las matemáticas es *modelizar* el mundo real. Es decir, representar y describir diversos aspectos del mundo real mediante conceptos matemáticos que ayuden a estudiarlo. En particular, en esta lección nos centramos en la representación de objetos y figuras que genéricamente denominamos *lugares geométricos*. Podemos entender fácilmente cuál es nuestro objetivo con el siguiente problema: *traza en un papel tres rectas que se corten formando un triángulo y luego dale indicaciones a un compañero para que haga exactamente el mismo dibujo*. Seguramente, las indicaciones dadas estarán basadas en objetos matemáticos: sistemas de referencias, distancias, ángulos,...

Para lograr resolver el problema anterior no se necesitan demasiados elementos, pero ¿cómo haríamos lo mismo si en lugar de rectas quisiéramos describir una *curva*? Este es el problema general que abordamos en esta lección. Aprenderemos a describir curvas, a dibujarlas a partir de una descripción y, en particular, conoceremos un conjunto de curvas ampliamente usadas en matemáticas y física y que se denominan *cónicas*.

Aunque toda la teoría que vamos a mostrar se puede aplicar fácilmente a curvas en el espacio o incluso en dimensiones mayores a 3, nos vamos a centrar solamente en curvas en el plano.

2.1.1. Curvas parametrizadas

Es fácil imaginar una curva como una recta a la que se aplica una determinada deformación. Es decir, una curva es una figura de una única dimensión pero que no sigue una dirección constante. Esta imagen intuitiva nos lleva a la representación más sencilla de una curva: la descripción de cada punto de la misma en función de *un parámetro*. Por ejemplo, si queremos describir la trayectoria que seguimos en un paseo, bastaría con dar nuestra posición en cada instante de tiempo; en este caso, el tiempo sería el parámetro que describe la curva trazada por nuestra trayectoria.

DEFINICIÓN 2.1.1 *Un conjunto $C \subset \mathbb{R}^2$ se dice que es una curva parametrizada si existe un intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$ y dos funciones $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ tales que*

$$C = \{(x(t), y(t)) \mid t \in I\}$$

Habitualmente, presentamos las curvas parametrizadas escribiendo:

$$\begin{cases} X = x(t) \\ Y = y(t) \\ t \in I \end{cases}$$

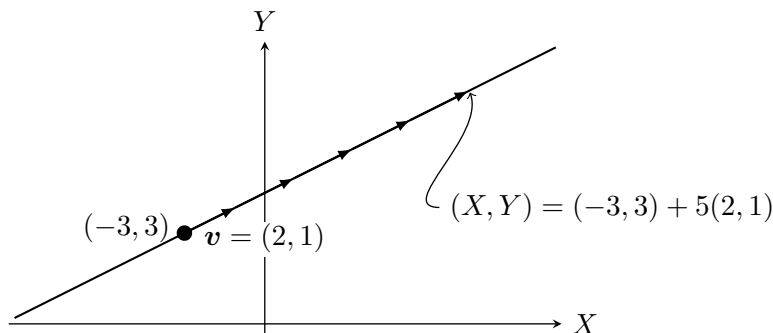
o de forma más compacta $(X, Y) = (x(t), y(t))$, $t \in I$. Estas ecuaciones se denominan *ecuaciones paramétricas de la curva* y la variable t se denomina *parámetro*.

EJEMPLO 2.1.2 *Ecuaciones paramétricas de una recta.* La recta que pasa por un punto (a, b) en la dirección del vector $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ es:

$$\begin{cases} X = a + v_1 t \\ Y = b + v_2 t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En este caso, el parámetro t representa la distancia al punto (a, b) , siendo la unidad de medida el módulo del vector \mathbf{v} , es decir, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

En la figura siguiente, representamos la recta que pasa por $(-3, 3)$ y toma la dirección $(2, 1)$, es decir, $(X, Y) = (-3, 3) + t(2, 1) = (-3 + 2t, 3 + t)$. En la figura, destacamos el punto correspondiente a $t = 5$.



□

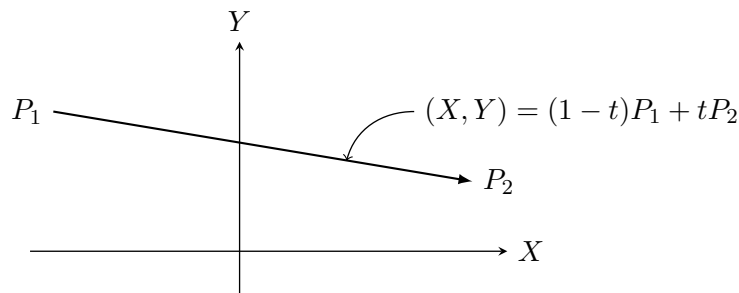
En este ejemplo hemos utilizado la notación $\|\mathbf{v}\|$ para representar el módulo del vector \mathbf{v} ; esta función se denomina igualmente *norma* y otras notaciones que podemos encontrar en la bibliografía son $|\mathbf{v}|$ ó $\|\mathbf{v}\|_2$.

El uso de letras en matemáticas es imprescindible para representar variables, constantes, parámetros, ... Ya hemos advertido que habitualmente usamos letras cursivas (mayúsculas o minúsculas) para representar variables que a su vez pueden corresponder a cualquier objeto matemático: números naturales, racionales, reales, complejos, puntos en un plano, vectores, ... También hemos podido observar que solemos usar determinadas letras para objetos específicos: x para incógnitas de ecuaciones o para la abscisa de puntos; n, k para números naturales; z para números complejos; t para representar el tiempo, ... Debe de quedar claro que estas identificaciones se hacen por tradición y para ayudar a la lectura de fórmulas y expresiones, pero no es obligatorio y en muchos casos no respetaremos estas asociaciones.

Por otra parte, en el ejemplo anterior, hemos usado letras en negrita para representar vectores. Siguiendo con la idea del párrafo anterior, es habitual usar algún elemento distintivo para estos objetos, como la letra negrita que usaremos en el curso o flechas sobre las letras que podemos encontrar en algunos textos. También debe

quedar claro que estos elementos no son imprescindibles y solo se usan para facilitar la lectura.

EJEMPLO 2.1.3 *Parametrización de un segmento.* En el ejemplo anterior, las ecuaciones se corresponden con una recta infinita. Sin embargo, es frecuente que solo estemos interesados en el segmento que une dos puntos P_1, P_2 .



Para parametrizar este segmento, tomamos el vector director $\mathbf{v} = \overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1$ y aplicamos las ecuaciones del ejemplo anterior: $(X, Y) = P_1 + t\overrightarrow{P_1P_2}$. Sustituyendo el vector por su definición obtenemos

$$(X, Y) = (1-t)P_1 + tP_2, \quad t \in [0, 1] \quad (2.1)$$

En este caso, el parámetro t es la proporción de la distancia a P_1 respecto de la longitud del segmento, es decir, si $Q = (x(t), y(t))$ es el punto correspondiente al valor t del parámetro, entonces $t = \frac{|P_1Q|}{|P_1P_2|}$. Por ejemplo, el segmento que une los puntos $(-1, -1)$ con $(0, 2)$ es:

$$(X, Y) = (1-t)(-1, -1) + t(0, 2) = (t-1, 3t-1), \quad t \in [0, 1]$$

Es interesante observar que esta parametrización no da únicamente información de los puntos que forman el segmento, también describe cómo lo recorremos. En concreto, en la ecuación (2.1), el valor $t = 0$ nos devuelve el punto P_1 , mientras que el valor $t = 1$ nos devuelve P_2 , es decir, recorremos el segmento desde el punto P_1 al P_2 . La siguiente parametrización también corresponde al mismo segmento, pero recorriéndolo en sentido contrario:

$$(X, Y) = (1-t)P_2 + tP_1, \quad t \in [0, 1] \quad \square$$

EJEMPLO 2.1.4 Ya sabemos que todas las funciones reales de variable real pueden representarse mediante su gráfica. Esta gráfica es un ejemplo de curva parametrizada que se denomina *grafo*:

$$\text{gr}(f) = \{(t, f(t)) \mid t \in \text{Dom}(f)\}$$

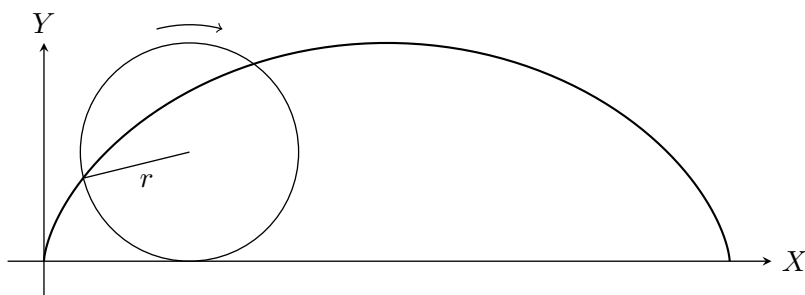
Es decir, las siguientes ecuaciones parametrizan el grafo:

$$\begin{cases} X = t \\ Y = f(t) \\ t \in \text{Dom}(f) \end{cases}$$

En este caso, el parámetro coincide con la abscisa del punto. Se podría pensar que todas las curvas pueden ser representadas como grafos de una función, sin embargo, esto no es cierto. Por ejemplo, ninguna función tiene como gráfica a toda una circunferencia, aunque sí trozos de la misma. \square

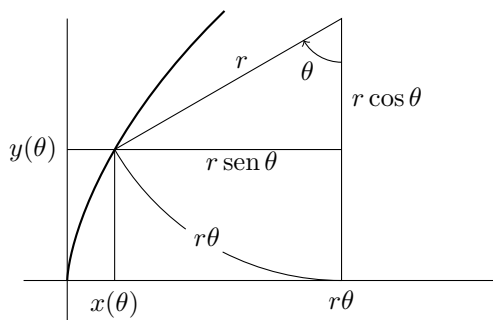
El problema de dar la parametrización de una curva descrita mediante propiedades geométricas suele ser bastante sencillo, ya que, en la mayoría de los casos, solo necesitamos aplicar elementos básicos de geometría.

EJEMPLO 2.1.5 En este ejemplo, parametrizamos la curva que se denomina *cicloide* y que se define como sigue: *curva que describe un punto fijo de una circunferencia que rueda sobre una recta*.



Si elegimos como parámetro el ángulo de giro de la circunferencia, podemos deducir las ecuaciones de la cicloide:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta - \sin \theta) \\ y(\theta) = r(1 - \cos \theta) \end{cases}$$



\square

El concepto matemático que nos ayuda a manejar formalmente las ecuaciones paramétricas es el de *función vectorial de variable real*.

DEFINICIÓN 2.1.6 Una función vectorial de variable real con dominio $D \subset \mathbb{R}$ es una aplicación $\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$. Esta función \mathbf{f} viene determinada por n funciones reales de variable real, $f_i: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, de modo que $\mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$.

Habitualmente, trabajaremos con curvas con un aspecto suave y sin rupturas; para conseguir esto, necesitaremos que las parametrizaciones tengan ciertas características.

DEFINICIÓN 2.1.7 Sea $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n): D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$:

1. Decimos que \mathbf{f} es continua en $a \in D$ si todas la funciones f_i son continuas en a . Decimos que \mathbf{f} es continua en D si lo es en cada punto.
2. Decimos que \mathbf{f} es derivable o diferenciable en $a \in D$, si todas la funciones f_i son derivables en a y el vector $\mathbf{f}'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$ se denomina derivada de \mathbf{f} en a .

Si una curva $(x(t), y(t))$ es continua, se puede dibujar “un solo trazo” o “sin levantar el lápiz del papel”. Sabemos que la gráfica de una función derivable tiene un aspecto “suave”, “sin picos”, sin embargo, para que una curva parametrizada tenga este aspecto, no es suficiente con que la parametrización sea diferenciable, necesitaremos que sea *regular*.

DEFINICIÓN 2.1.8 Una curva $(x(t), y(t))$, $t \in I$, es regular en t_0 si es diferenciable en t_0 y $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$.

2.1.1.1. Representación de curvas

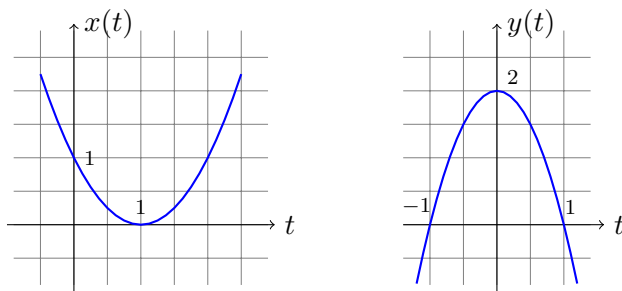
En general, no es fácil identificar una curva a partir de una parametrización, sin embargo, no resulta difícil deducir determinadas características que ayudan a esbozar su forma. A continuación mostramos algunas:

- Si $x(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de izquierda a derecha; si es decreciente, se recorre de derecha a izquierda.
- Si $y(t)$ es creciente en un intervalo, la curva se recorre de abajo hacia arriba; si es decreciente, se recorre de arriba hacia abajo.
- La ecuación $x(t) = 0$ determina los puntos de corte con el eje OY y la ecuación $y(t) = 0$ determina los puntos de corte con el eje OX .

EJEMPLO 2.1.9 Vamos a esbozar la curva con la siguiente parametrización:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

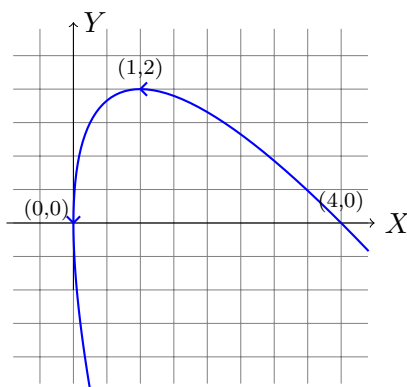
En primer lugar, vamos a representar gráficamente las funciones $x(t)$ e $y(t)$; para ello, son suficientes los conocimientos de cálculo en una variable y por ello no mostramos los detalles



La función x pasa de decrecer a crecer en $t = 1$ y la función y pasa de crecer a decrecer en $t = 0$; los puntos correspondientes a estos valores del parámetro son:

$$(x(0), y(0)) = (1, 2), \quad (x(1), y(1)) = (0, 0)$$

Por lo tanto: hasta $(1, 2)$ la curva se recorre de derecha a izquierda y de abajo a arriba; desde $(1, 2)$ hasta $(0, 0)$ la curva se recorre de derecha a izquierda y de arriba a abajo; desde el punto $(0, 0)$ se recorre de izquierda a derecha y de arriba a abajo. Con la información anterior y situando los puntos de corte con los ejes, es fácil dibujar la curva:



□

Como hemos mencionado antes, si una curva es regular en un punto, entonces en ese punto la curva no tiene un pico. Geométricamente, esto se traduce en que es posible trazar una recta tangente a la curva en ese punto. Esta recta tangente se define a partir de la derivada de la parametrización.

DEFINICIÓN 2.1.10 Sea $X = x(t)$, $Y = y(t)$, $t \in I$ una parametrización de la curva C . Si $(x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0, 0)$, las siguientes ecuaciones determinan la recta tangente a C en el punto $(x(t_0), y(t_0))$:

$$\begin{aligned} x &= x(t_0) + \lambda x'(t_0) \\ y &= y(t_0) + \lambda y'(t_0) \end{aligned}$$

En donde λ es el parámetro de la recta.

En la definición anterior, la recta tangente se define usando una parametrización; podemos eliminar el parámetro para obtener su ecuación cartesiana:

$$x'(t_0)(y - y(t_0)) = y'(t_0)(x - x(t_0))$$

EJEMPLO 2.1.11 Si la curva es el grafo de una función real de variable real, es decir, $(X, Y) = (t, f(t))$, entonces, $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = f(x_0)$, $x'(t_0) = 1$ e $y'(t_0) = f'(t_0)$. Sustituyendo en la ecuación anterior, obtenemos la conocida expresión de la recta tangente a la gráfica de una función.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad \square$$

EJEMPLO 2.1.12 En la curva del ejemplo 2.1.9,

$$\begin{cases} x(t) = t^2 - 2t + 1 \\ y(t) = 2 - 2t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

el vector tangente en $(x(t), y(t))$ es:

$$(x'(t), y'(t)) = (2t - 2, -4t)$$

Por lo tanto, el vector tangente en $t = 0$ es $(x'(0), y'(0)) = (-2, 0)$ y la recta tangente en $(x(0), y(0)) = (1, 2)$ es paralela al eje OX ; el vector tangente en $t = 1$ es $(0, -4)$ y la recta tangente en $(x(1), y(1)) = (0, 0)$ es paralela al eje OY . \square

Otra interpretación del vector derivada proviene del campo de la física. Si la parametrización corresponde a la trayectoria de un movimiento en función del tiempo, la derivada se corresponde con el vector velocidad.

2.1.1.2. Asíntotas

Intuitivamente, una recta es asíntota de una curva si la distancia entre ambas va decreciendo a 0. El estudio de la existencia de una asíntota es diferente dependiendo de si la recta es vertical, horizontal u oblicua. El siguiente resultado muestra las condiciones que debemos comprobar para determinar la existencia de asíntotas.

PROPOSICIÓN 2.1.13 Consideremos una curva $(x(t), y(t))$, $t \in I$.

1. Si para un valor del parametro t_0 , $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = \infty$, entonces la recta $x = a$ es una asíntota vertical de la curva.
2. Si para un valor del parametro t_0 , $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = \infty$ y $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = a$, entonces la recta $y = a$ es una asíntota horizontal de la curva.

3. Si para un valor del parametro t_0 ,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow t_0} x(t) &= \pm\infty, & \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) &= \pm\infty, \\ \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{y(t)}{x(t)} &= m \in \mathbb{R}, & \lim_{t \rightarrow t_0} (y(t) - mx(t)) &= n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

entonces $y = mx + n$ es una asíntota de la curva.

Los tres apartados se verifican igualmente si consideremos t_0 igual a $\pm\infty$.

Obsérvese que las asíntotas se localizan en valores del parámetro que no pertenecen al dominio de, al menos, una de las dos coordenadas.

EJEMPLO 2.1.14 Vamos a estudiar si la siguiente curva tiene asíntotas.

$$x(t) = \frac{5 - t^3}{1 + t^2}, \quad y(t) = \frac{-t^3}{1 + t^2}, \quad t \in \mathbb{R}$$

El dominio de las funciones $x(t)$ e $y(t)$ es \mathbb{R} , y por lo tanto, si la curva tiene asíntotas, estas deben estar en $+\infty$ o en $-\infty$. Las dos funciones verifican la tercera condición en los dos casos:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5 - t^3}{1 + t^2} = -\infty, & \lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{1 + t^2} = -\infty \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{5 - t^3}{1 + t^2} = \infty, & \lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-t^3}{1 + t^2} = \infty \end{aligned}$$

Intentamos calcular las pendientes de las asíntotas:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{1 + t^2} \cdot \frac{1 + t^2}{5 - t^3} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-t^3}{5 - t^3} = 1 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{y(t)}{x(t)} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-t^3}{1 + t^2} \cdot \frac{1 + t^2}{5 - t^3} = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-t^3}{5 - t^3} = 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, si la curva tiene asíntotas, sus pendientes son igual a 1. Terminamos de calcular los últimos límites que demuestran que efectivamente la curva tiene asíntotas.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} (y(t) - x(t)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{-t^3}{1 + t^2} - \frac{5 - t^3}{1 + t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-5}{1 + t^2} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow -\infty} (y(t) - x(t)) &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{-t^3}{1 + t^2} - \frac{5 - t^3}{1 + t^2} \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{-5}{1 + t^2} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta $y = x$ es asíntota de la curva tanto en $+\infty$ como en $-\infty$ (ver figura 2.1). \square

2.1.2. Curvas polares

Hemos visto en el tema anterior que una forma alternativa de representar los puntos de un plano es mediante *coordenadas polares*. En general, un sistema de coordenadas polares queda determinado por un punto O , llamado *polo*, y una semirrecta

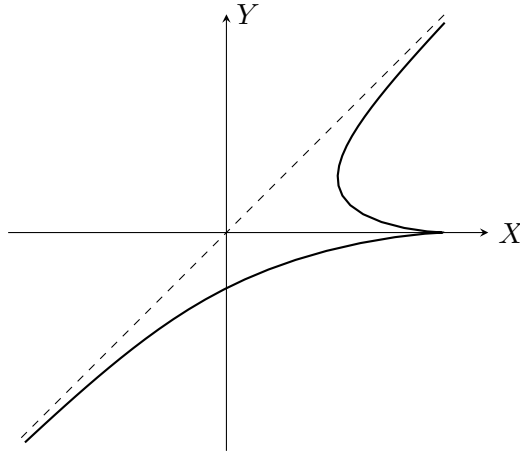


Figura 2.1: Curva del ejemplo 2.1.14.

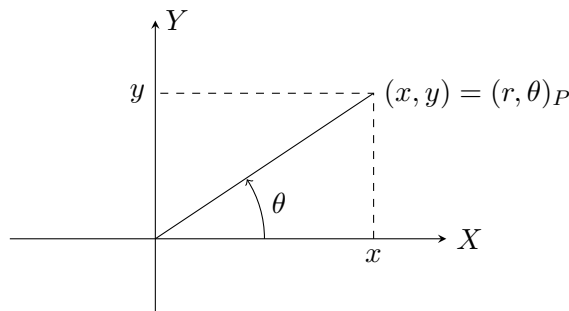


Figura 2.2: Sistema de representación polar.

con extremo en O , llamada *eje polar*. Dado un punto Q en el plano, consideramos la semirrecta R con extremo en el polo y que pasa por Q (*recta radial* del punto); la posición de Q en coordenadas polares se fija por *distancia del punto al polo*, r , y el *ángulo* θ entre el *eje polar* y la *recta radial* medido en el sentido contrario a las agujas del reloj; el par $(r, \theta)_P$ es la descripción por *coordenadas polares* del punto Q .

El sistema cartesiano y el sistema polar se superponen identificando el polo con el origen de coordenadas y el eje polar con el semieje positivo de OX , tal y como se muestra en la figura 2.2.

DEFINICIÓN 2.1.15 Dada una función $f: D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, llamamos *curva polar asociada a f* al conjunto de puntos $(f(\theta), \theta)_P$ del plano polar.

Es decir, la curva polar asociada a f queda determinada por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = f(\theta) \cos \theta \\ y = f(\theta) \sin \theta \\ \theta \in D \end{cases}$$

Aunque la parametrización anterior permite estudiar las curvas polares como cual-

quier curva paramétrica, es conveniente utilizar las propiedades específicas de este tipo de curvas.

PROPOSICIÓN 2.1.16 *Si f es derivable, $f(\theta_0) \neq 0$ y $f'(\theta_0) = 0$, entonces la curva polar correspondiente y la circunferencia de centro en el origen y radio $|f(\theta_0)|$ son tangentes en el punto $(f(\theta_0), \theta_0)_P$.*

PROPOSICIÓN 2.1.17 *Si f es derivable y $f(\theta_0) = 0$, entonces la recta radial con ángulo θ_0 es tangente a la curva polar correspondiente en el origen de coordenadas.*

La demostración de este resultado es inmediata considerando la parametrización correspondiente a la curva polar:

$$\begin{aligned}x'(\theta) &= f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \operatorname{sen} \theta \\y'(\theta) &= f'(\theta) \operatorname{sen} \theta + f(\theta) \cos \theta\end{aligned}$$

Si $f(\theta_0) = 0$, el segundo sumando de las dos derivadas anteriores se anula al evaluarlas en θ_0 :

$$\begin{aligned}x'(\theta_0) &= f'(\theta_0) \cos \theta_0 \\y'(\theta_0) &= f'(\theta_0) \operatorname{sen} \theta_0\end{aligned}$$

Por lo que, efectivamente, el vector $(x'(\theta_0), y'(\theta_0))$ es paralelo a $(\cos \theta_0, \operatorname{sen} \theta_0)$

EJEMPLO 2.1.18 Vamos a dibujar la curva polar $r = 1 + 2 \cos \theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$. La parametrización de esta curva es:

$$\begin{cases} X = (1 + 2 \cos \theta) \cos \theta \\ Y = (1 + 2 \cos \theta) \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

Pero en lugar de usarla para dibujar la curva, vamos a representar primero la función en el plano cartesiano y a trasladar la gráfica al plano polar usando las propiedades establecidas en los resultados anteriores, según se muestra en la página 85.

En primer lugar, dibujamos sobre los ejes de coordenadas un “mallado polar” sobre el que dibujaremos la curva. Esta malla es similar a la cuadrícula que dibujamos en el plano cartesiano y que nos sirve de referencia; pero en este caso, la malla está formada por rectas radiales correspondientes a ángulos significativos y circunferencias centradas en el origen con diferentes radios.

Podemos observar que para $\theta \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$, $f(\theta) \leq 0$, por lo que los puntos correspondiente quedan entre el primer y cuarto cuadrante. Además, $f(\frac{2\pi}{3}) = 0$, por lo que la recta tangente en el correspondiente punto de la curva es la recta radial de ángulo $\frac{2\pi}{3}$. Lo mismo ocurre en $\theta = \frac{4\pi}{3}$ □

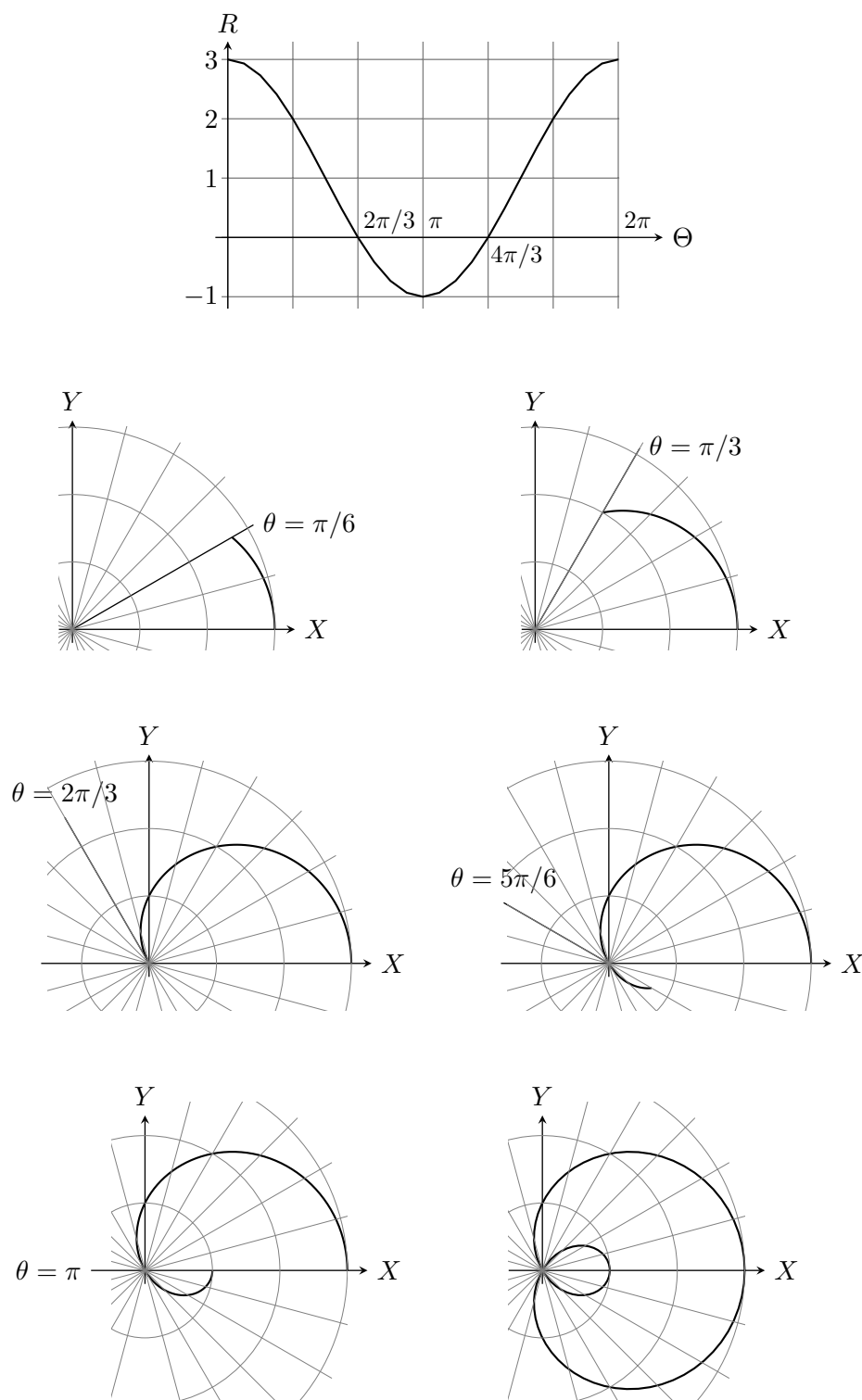


Figura 2.3: Representación de la curva polar $r = 1 + 2 \cos \theta$ (Ejemplo 2.1.18)

2.1.3. Cónicas

Una forma alternativa de describir *lugares geométricos* del plano es mediante *ecuaciones cartesianas*. Si $P(x, y)$ es cualquier expresión en la que aparecen involucradas las variables x e y , la igualdad $P(x, y) = 0$ se denomina ecuación cartesiana del siguiente conjunto de puntos:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid P(x, y) = 0\}$$

Dependiendo de la expresión, este conjunto puede ser vacío, contener un único punto o un conjunto finito de puntos, describir una o varias rectas, una o varias curvas e incluso una región del plano. Para abreviar, en muchas ocasiones nos referiremos al conjunto anterior como “la curva $P(x, y) = 0$ ”.

EJEMPLO 2.1.19 Si $P(x, y)$ es un polinomio de grado uno, entonces $P(x, y) = 0$ es una recta. Por ejemplo, $x - 2y - 3 = 0$ describe una recta, de la cual sabemos que el vector $(1, -2)$ es un vector perpendicular a ella, es decir, $(2, 1)$ es un *vector director*; substituyendo x por un valor cualquiera, obtenemos un punto de la recta: para $x = 0$, $-2y - 3 = 0$, es decir, $(0, -3/2)$ es un punto de la recta. A partir de aquí, deducimos fácilmente una parametrización:

$$(X, Y) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) + t(2, 1) = \left(2t, t - \frac{3}{2}\right) \quad \square$$

En esta sección, nos vamos a centrar en las ecuaciones cartesianas definidas por un polinomio de grado dos en las variables x e y :

$$P(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (2.2)$$

Para que el polinomio en (2.2) tenga grado 2, necesariamente al menos uno de los coeficientes a , b o c tiene que ser distinto de cero; en tal caso, el lugar geométrico se denomina *cónica*. También están incluidos algunos lugares geométricos que visualmente no son curvas propiamente dichas y que se denominan *cónicas degeneradas*; en el siguiente ejemplo mostramos ejemplos sencillos de este tipo de cónicas.

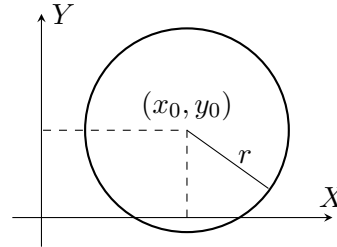
EJEMPLO 2.1.20

1. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 1 = 0\} = \emptyset$
2. $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\} = (0, 0)$
3. $\{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$ está formado por las rectas $x + y = 0$, $x - y = 0$ \square

Aparte de los tres casos del ejemplo anterior, si el polinomio tiene grado dos, la ecuación (2.2) puede definir una de las cuatro curvas que presentamos en los apartados siguientes.

Circunferencia. El lugar geométrico de los puntos cuya distancia a un punto fijo $C = (x_0, y_0)$ es constantemente $r > 0$, se denomina *circunferencia de centro C y radio r* y su ecuación cartesiana es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$



La circunferencia es un caso particular de elipse, que definimos en el ítem siguiente, aunque por su importancia, la destacamos como un tipo distinto.

EJEMPLO 2.1.21 La ecuación $x^2 + y^2 = 4$ determina una circunferencia centrada en el origen y de radio 2. Si con el mismo radio, queremos que esté centrada en $(-1, 2)$, la ecuación será:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0 \quad \square$$

Observamos en este ejemplo que, al desarrollar los cuadrados, el polinomio no tiene término en xy y los coeficientes en x^2 e y^2 son iguales; de hecho, podemos caracterizar a las circunferencias como sigue: *si $b = 0$ y $a = c$, entonces la ecuación 2.2 representa una circunferencia o una cónica degenerada*. Para deducir si es degenerada u obtener el centro y el radio de la circunferencia, basta con aplicar la técnica de completar cuadrados a los sumandos en x y a los sumandos en y .

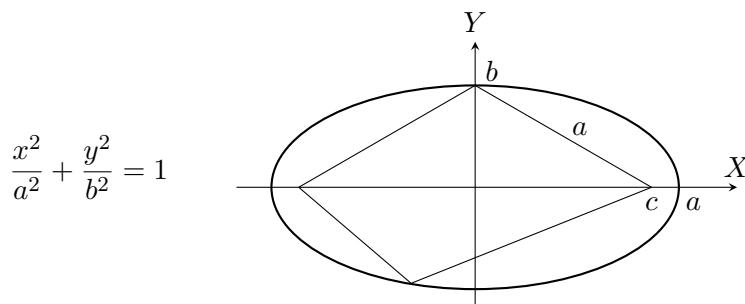
EJEMPLO 2.1.22 La ecuación $9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y + 116 = 0$ corresponde a una circunferencia:

$$\begin{aligned} 0 = 9x^2 + 9y^2 - 36x + 54y + 116 &= 9(x - 2)^2 + 9(y + 3)^2 - 1 \Longleftrightarrow \\ &\Longleftrightarrow (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{9} \end{aligned}$$

Es decir, su centro es $(2, -3)$ y su radio es $1/3$. \square

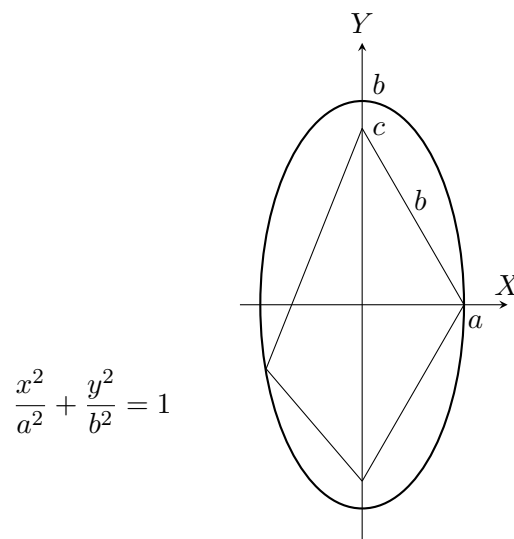
Elipse. El lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constante se denomina *elipse*. El *centro* de la elipse es el punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Si los focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$, y la suma de las distancias a los focos es $2a$, la ecuación

queda como sigue:



verificándose que $a^2 = c^2 + b^2$, por lo que, necesariamente, $a > b$.

Si los focos están en los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$, con $c > 0$, y la suma de las distancias a los focos es $2b$, la ecuación que se obtiene es la misma,



verificándose la igualdad $b^2 = c^2 + a^2$, por lo que necesariamente $b > a$.

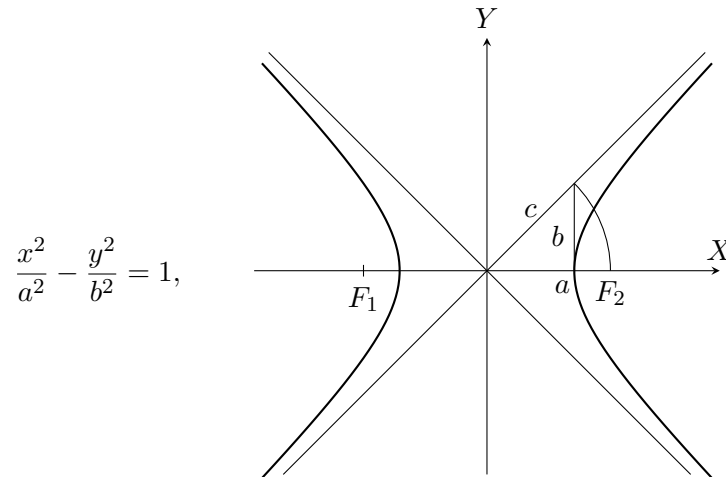
Si desplazamos la elipse para que tenga su centro en (x_0, y_0) , la ecuación que obtenemos es

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

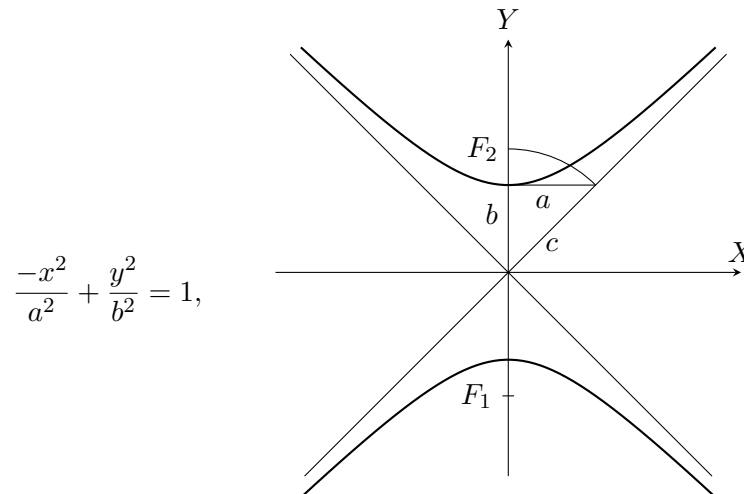
Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos un polinomio sin término en xy , aunque en este caso los coeficientes de x^2 e y^2 son distintos pero con el mismo signo.

Hipérbola. El lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos F_1 y F_2 es constante se denomina *hipérbola*. El *centro* de la hipérbola es el punto medio del segmento que une los dos focos, es decir, $\frac{1}{2}(F_1 + F_2)$. Si los focos están en los puntos $(-c, 0)$ y $(c, 0)$, con $c > 0$, y $2a$ es la diferencia de las distancias

a los focos, la ecuación de la hipérbola es



en donde $a^2 + b^2 = c^2$. Si los focos están en los puntos $(0, -c)$ y $(0, c)$, con $c > 0$, y $2b$ es la diferencia de las distancias a los focos, la ecuación de la hipérbola es



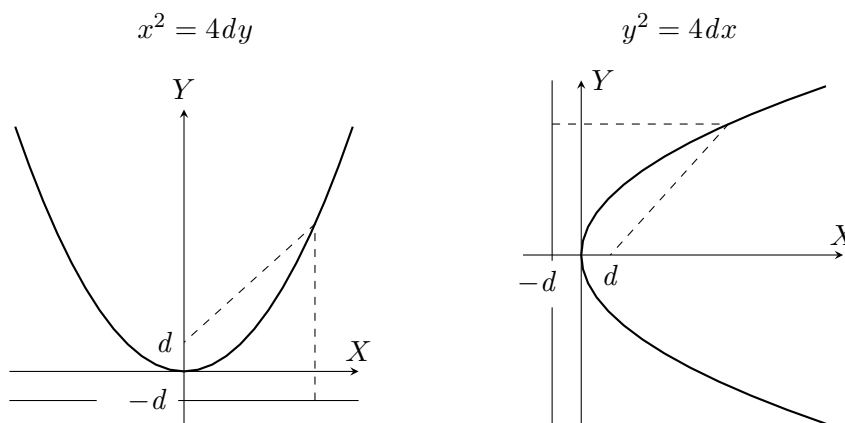
en donde igualmente $a^2 + b^2 = c^2$. Como se observa en las figuras, en ambos casos las rectas $bx - ay = 0$, $bx + ay = 0$ están muy próximas a la curva pero no la cortan; estas rectas son las *asíntotas* de la hipérbolas.

Si desplazamos las hipérbolas para que tengan su centro en (x_0, y_0) , las ecuaciones que obtenemos son

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \frac{-(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

Si desarrollamos los cuadrados, obtendremos polinomios sin término en xy y los coeficientes de x^2 e y^2 tienen distinto signo.

Parábola. El lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta r y un punto F , se denomina *parábola con foco F y directriz r* . En la figura que aparece abajo, mostramos dos ejemplos de parábolas; si el foco es el punto $(0, d)$ y la directriz es $y = -d$, obtenemos la parábola de la izquierda; si el foco es el punto $(d, 0)$ y la directriz es $x = -d$, obtenemos la parábola de la derecha:

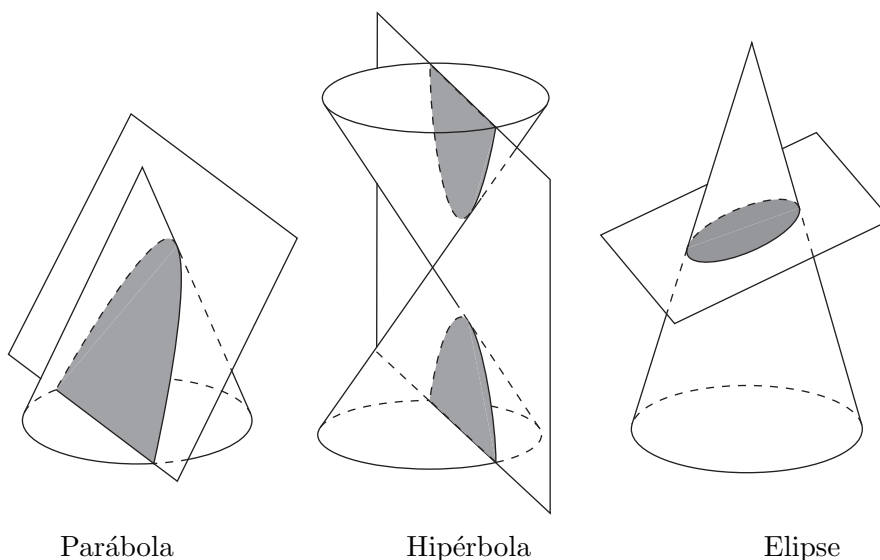


Si desplazamos estas parábolas para que tengan su vértice en (x_0, y_0) , las ecuaciones que obtenemos son:

$$(x - x_0)^2 = 4d(y - y_0), \quad (y - y_0)^2 = 4d(x - x_0)$$

Al desarrollar estas ecuaciones obtenemos polinomios en los que no hay término en xy y falta, o bien el término en x^2 , o bien el término en y^2 .

Otra forma de obtener estas curvas es mediante la siguiente descripción. Si consideramos un cono circular hueco y lo cortamos con un plano, la curva resultante en la sección es una *cónica* y dependiendo del ángulo de corte, se obtiene una u otra.



Si el corte es perpendicular al eje de cono, obtenemos una circunferencia; si el corte es paralelo a la generatriz se obtiene una parábola; si el corte es paralelo al eje se obtiene una hipérbola; cualquier otro corte, produce una elipse.

Naturalmente, también es posible describir una cónica mediante ecuaciones paramétricas. A continuación vemos la parametrizaciones de las cónicas en sus posiciones *típicas* y en la sección siguiente aprenderemos cómo parametrizar una cónica arbitraria.

Circunferencia con centro (x_0, y_0) y radio r :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + r \cos t \\ y(t) = y_0 + r \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

Elipse centrada en (x_0, y_0) y semiejes $a > 0$ y $b > 0$:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a \cos t \\ y(t) = y_0 + b \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

Hipérbola centrada (x_0, y_0) , con asíntotas paralelas a las rectas $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, $a > 0$, $b > 0$, y cortando al eje OX :

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a \cosh t \\ y(t) = y_0 + b \sinh t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 - a \cosh t \\ y(t) = y_0 + b \sinh t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Centrada (x_0, y_0) , con asíntotas paralelas a las rectas $bx + ay = 0$, $bx - ay = 0$, $a > 0$, $b > 0$, y cortando al eje OY :

$$-\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a \sinh t \\ y(t) = y_0 + b \cosh t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a \sinh t \\ y(t) = y_0 - b \cosh t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

En estos casos, necesitamos una parametrización distinta para cada rama de la hipérbola.

Parábola con vértice en (x_0, y_0) , eje paralelo a OY , $\frac{a}{4} > 0$ distancia del foco al vértice:

$$(x - x_0)^2 = a(y - y_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a \cdot t \\ y(t) = y_0 + a \cdot t^2 \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Con vértice en (x_0, y_0) , eje paralelo a OX , $\frac{a}{4} > 0$ distancia del foco al vértice:

$$(y - y_0)^2 = a(x - x_0) \quad \left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a \cdot t^2 \\ y(t) = y_0 + a \cdot t \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

En los ejemplos mostrados en las definiciones anteriores, hemos mantenido las curvas en su posición típica, es decir, con sus ejes paralelos a los ejes de coordenadas. Hemos observado que en todos los casos, el polinomio resultante no contenía término en xy ; si este término aparece, es decir, su coeficiente no es nulo, obtenemos los

mismos tipos de curvas, pero con sus ejes girados respecto de los ejes de coordenadas. El objetivo de las secciones siguientes es reconocer la cónica definida por cualquier ecuación de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

y determinar las características necesarias para poder dibujarla en el plano.

En primer lugar, vamos a agrupar y a poner nombre a los sumandos del polinomio:

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 &\rightarrow \text{parte cuadrática} \\ dx + ey &\rightarrow \text{parte lineal} \\ f &\rightarrow \text{término independiente} \end{aligned}$$

La parte cuadrática caracteriza el tipo de cónica y la orientación de sus ejes. Utilizando la técnica de *compleción de cuadrados* que aprendimos en el primer tema, podemos decidir fácilmente de qué cónica se trata. Concretamente, si completamos cuadrados en la variable x , obtendremos una igualdad de la forma

$$ax^2 + bxy + cy^2 = A(x + By)^2 + Cy^2$$

Los signos de A y C determinan la cónica:

1. Si A y C son no nulos y tienen el mismo signo, la cónica es una elipse o degenerada.
2. Si A y C son no nulos pero tienen signos opuestos, la cónica es una hipérbola o degenerada.
3. Si $A = 0$ o $C = 0$, la cónica es una parábola o degenerada.

Las mismas conclusiones se obtienen si completamos cuadrados sobre la variable y para obtener una igualdad del tipo $ax^2 + bxy + cy^2 = A(y + Bx)^2 + Cx^2$

EJEMPLO 2.1.23 Vamos a clasificar algunas cónicas:

1. Si la cónica $x^2 + 2xy + y^2 + 2x - 4y - 1 = 0$ no es degenerada, es una parábola, ya que

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$

2. Si la cónica $9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$ no es degenerada, es una elipse, ya que

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4xy + 6y^2 &= 9\left(x^2 + \frac{4}{9}xy\right) + 6y^2 = \\ &= 9\left(x + \frac{2}{9}y\right)^2 - 9\frac{4}{81}y^2 + 6y^2 = 9\left(x + \frac{2}{9}y\right)^2 + \frac{50}{9}y^2 \end{aligned}$$

3. Si la cónica $2xy - x + 1 = 0$ no es degenerada, es una hipérbola: dado que la parte cuadrática no tiene términos ni en x^2 ni en y^2 , hacemos un cambio de variable antes de empezar a completar cuadrados: $y = x + u$.

$$\begin{aligned}
 2xy &= 2x(x + u) = 2x^2 + 2xu \\
 &= 2\left(x + \frac{1}{2}u\right)^2 - \frac{1}{2}u^2 \\
 &= 2\left(x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2 \\
 &= 2\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right)^2 - \frac{1}{2}(y - x)^2
 \end{aligned}
 \quad \square$$

En las siguientes secciones estudiamos con más detalle cada una de las cónicas.

2.1.3.1. Parábolas

Si $a > 0$ y $4ac = b^2$, entonces la parte cuadrática de la expresión

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

es un cuadrado perfecto y se puede reescribir como

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = a\left(x + \frac{b}{2a}y\right)^2 + dx + ey + f;$$

por lo tanto, en caso de no ser una cónica degenerada, la cónica determinada por este polinomio será una parábola con eje perpendicular al vector $(2a, b)$. El siguiente teorema establece cómo obtener su forma normalizada, a partir de la cual obtendremos sus características más importantes.

TEOREMA 2.1.24 *Consideremos la curva*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (2.3)$$

siendo $a > 0$ y $b^2 - 4ac = 0$.

1. *Entonces existen constantes A , B y C tales que para todo $x, y \in \mathbb{R}$*

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = a\left(x + \frac{b}{2a}y + A\right)^2 + B\left(\frac{b}{2a}x - y\right) + C$$

2. *Si $B \neq 0$, entonces la curva es una parábola.*

3. *Si $B = 0$, la cónica es degenerada. Concretamente, si $C > 0$ la cónica no tiene puntos, si $C = 0$ la cónica es una recta y si $C < 0$, la cónica consta de dos rectas paralelas.*

Es decir, si $a > 0$ y $b^2 - 4ac = 0$, el lugar geométrico (2.3) coincide con

$$a\left(x + \frac{b}{2a}y + A\right)^2 + B\left(\frac{b}{2a}x - y\right) + C = 0 \quad (2.4)$$

que es su forma *normalizada*. Si $B \neq 0$ es fácil determinar las características de la parábola.

- La recta $x + \frac{b}{2a}y + A = 0$ es su eje y la recta $B\left(\frac{b}{2a}x - y\right) + C = 0$ es la tangente a su vértice. El vértice, entonces, queda determinado por la intersección de estas dos rectas.
- Si $B < 0$ la apertura de parábola está en la dirección y sentido del vector $(b, -2a)$ y si $B > 0$, en el sentido opuesto.
- Una parametrización $(x(t), y(t))$ de la parábola (2.4), se obtiene haciendo

$$x(t) + \frac{b}{2a}y(t) + A = B \cdot t$$

y sustituyendo en la forma normalizada 2.4:

$$B\left(\frac{b}{2a}x(t) - y(t)\right) + C = -a \cdot B^2 \cdot t^2$$

EJEMPLO 2.1.25 La curva

$$3x^2 + 6xy + 3y^2 + 8x + 4y + 1 = 0$$

es una parábola o una cónica degenerada, ya que $4 \cdot 3 \cdot 3 = 6^2$. Para aplicar el teorema anterior, vamos a calcular los números reales A , B y C tales que:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 6xy + 3y^2 + 8x + 4y + 1 &= 3(x + y + A)^2 + B(x - y) + C = \\ &= 3x^2 + 6xy + 3y^2 + (6A + B)x + (6A - B)y + (3A^2 + C) \end{aligned}$$

Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 6A + B = 8 \\ 6A - B = 4 \\ 3A^2 + C = 1 \end{cases}$$

Su única solución es $A = 1$, $B = 2$ y $C = -2$ y por lo tanto, la ecuación normalizada de queda:

$$3(x + y + 1)^2 + 2(x - y) - 2 = 0 \quad (2.5)$$

La recta $x + y + 1 = 0$ es el eje de la parábola y $2(x - y) - 2 = 0$ es la recta tangente al vértice. Su vértice es, por tanto, el punto $(0, -1)$, que es la solución del sistema

$$\begin{cases} x + y + 1 &= 0 \\ 2(x - y) - 2 &= 0 \end{cases}$$

Mirando el segundo sumando de la ecuación (2.5), deducimos la dirección y el sentido de la apertura de la parábola:

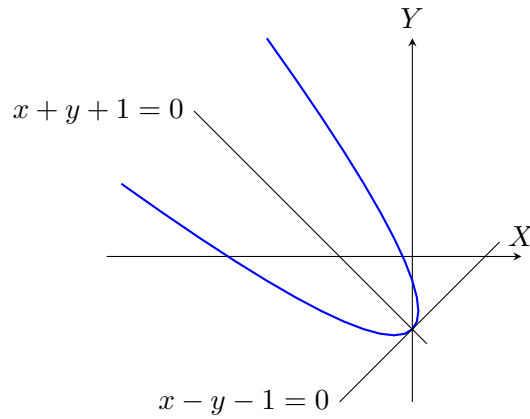
$$\begin{array}{ccc} +2 & (& x & -y &) - 2 \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \text{sentido opuesto a } & (& 1, & -1 &) \end{array} \quad (2.6)$$

Para obtener la parametrización de la parábola, planteamos las igualdades

$$\begin{aligned}x + y + 1 &= 2t \\ 2(x - y) - 2 &= -3 \cdot 4 \cdot t^2\end{aligned}$$

y despejamos x e y en función de t :

$$\begin{cases} x(t) = t - 3t^2 \\ y(t) = 3t^2 + t - 1 \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$$



Obsérvese que el vértice de la parábola corresponde al valor $t = 0$ del parámetro. \square

EJEMPLO 2.1.26 La curva

$$x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 8y - 5 = 0$$

es una parábola o una cónica degenerada, ya que $4 \cdot 1 \cdot 4 = (-4)^2$. Vamos a calcular los números reales A , B y C tales que:

$$\begin{aligned}x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x + 8y - 5 &= (x - 2y + A)^2 + B(2x + y) + C = \\ &= x^2 - 4xy + 4y^2 + (2A + 2B)x + (-4A + B)y + (A^2 + C)\end{aligned}$$

Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2A + 2B = -4 \\ -4A + B = 8 \\ A^2 + C = -5 \end{cases}$$

Su única solución es $A = -2$, $B = 0$ y $C = -9$ y por lo tanto, la ecuación normalizada queda:

$$(x - 2y - 2)^2 - 9 = 0$$

Por lo tanto es degenerada y no es difícil identificarla con dos rectas paralelas:

$$\begin{aligned}(x - 2y - 2)^2 - 9 &= 0 \\ (x - 2y - 2)^2 &= 9\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}x - 2y - 2 = 3 &\implies x - 2y - 5 = 0 \\ x - 2y - 2 = -3 &\implies x - 2y + 1 = 0\end{aligned}$$

\square

2.1.3.2. Elipses e hipérbolas

TEOREMA 2.1.27 Consideremos la curva

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (2.7)$$

y supongamos que $b^2 - 4ac \neq 0$.

1. Entonces existen constantes A, B, C, D, E y M tales que

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= \\ &= A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E \end{aligned}$$

2. Si $AC < 0$ y $E \neq 0$, entonces la curva es una hipérbola; si $AC > 0$ y $AE < 0$, la curva es una elipse; en cualquier otro caso, es una cónica degenerada.

Es decir, si $b^2 - 4ac \neq 0$, el lugar geométrico (2.7) coincide con

$$A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E = 0 \quad (2.8)$$

que es su forma *normalizada*. A partir de esta expresión, es fácil determinar las características de la cónica.

- Las rectas $x + My + B = 0$ y $Mx - y + D = 0$ son los ejes de la cónica y el punto de corte entre ellas es el centro de la cónica.
- Si (2.8) es una hipérbola, podemos obtener las parametrizaciones de las dos ramas utilizando las funciones hiperbólicas y la propiedad $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$. De esta forma, si $A/E < 0$, la parametrización de cada rama de la hipérbola se obtendría despejando $(x(t), y(t))$ en los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} \sqrt{\frac{-A}{E}}(x(t) + My(t) + B) &= \cosh t \\ \sqrt{\frac{C}{E}}(Mx(t) - y(t) + D) &= \sinh t \end{aligned} \right| \begin{aligned} \sqrt{\frac{-A}{E}}(x(t) + My(t) + B) &= -\cosh t \\ \sqrt{\frac{C}{E}}(Mx(t) - y(t) + D) &= \sinh t \end{aligned}$$

En el caso $A/E > 0$, los sistemas se obtendrían de forma análoga intercambiando las funciones hiperbólicas.

- Si (2.8) es una hipérbola, las rectas que se obtienen al sustituir E por 0 en (2.8), son sus asíntotas, es decir, las rectas que se obtienen de las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \sqrt{|A|}(x + My + B) &= \sqrt{|C|}(Mx - y + D) \\ \sqrt{|A|}(x + My + B) &= -\sqrt{|C|}(Mx - y + D) \end{aligned}$$

- Si (2.8) es una elipse, podemos obtener una parametrización despejando $x(t)$, e $y(t)$ a partir de las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \sqrt{-A/E}(x(t) + My(t) + B) &= \cos t \\ \sqrt{-C/E}(Mx(t) - y(t) + D) &= \sin t \end{aligned}$$

Los parámetros A, B, C, D, E y M se determinan mediante la identificación de los coeficientes de los polinomios en la identidad

$$\begin{aligned} ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E = \\ &= (CM^2 + A)x^2 + 2M(A - C)xy + (AM^2 + C)y^2 + \\ &\quad + (2CDM + 2AB)x + (2ABM - 2CD)y + (E + CD^2 + AB^2) \end{aligned}$$

que conduce al siguiente sistema no lineal de seis ecuaciones y seis incógnitas:

$$\begin{aligned} x^2 &\rightarrow a = A + M^2C \\ xy &\rightarrow b = 2M(A - C) \\ y^2 &\rightarrow c = C + M^2A \\ x &\rightarrow d = 2CDM + 2AB \\ y &\rightarrow e = 2ABM - 2CD \\ \text{ind.} &\rightarrow f = E + CD^2 + AB^2 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Es conveniente empezar por el sistema formado por las tres primeras ecuaciones (las correspondientes a la parte cuadrática), que permiten calcular los valores de A, C y M como sigue. Restamos la tercera ecuación a la primera para obtener:

$$a - c = (A - C) - M^2(A - C) = (A - C)(1 - M^2). \tag{2.10}$$

Suponemos que $b \neq 0$, ya que en caso contrario la cónica estaría en su posición típica y sería suficiente con utilizar completación de cuadrados para obtener los esquemas vistos en la página 90. Por lo tanto, de la segunda ecuación deducimos que $M \neq 0$, $A - C = \frac{b}{2M}$, y sustituyendo en (2.10)

$$a - c = \frac{b}{2M}(1 - M^2)$$

que se convierte en una ecuación de segundo grado en M al multiplicar ambos lados por M . A partir del valor de M , podemos determinar fácilmente A y C y sustituyendo los valores de estos tres parámetros en las tres últimas ecuaciones del sistema inicial, terminaremos de resolver el sistema para obtener la expresión normalizada de la cónica.

EJEMPLO 2.1.28 La curva

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$$

es una elipse o una hipérbola, ya que $4 \cdot 9 \cdot 6 \neq 4^2$. Por lo tanto, existen números reales A, B, C, D, E y M tales que

$$\begin{aligned} 9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 &= A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E = \\ &= (CM^2 + A)x^2 + 2M(A - C)xy + (AM^2 + C)y^2 + \\ &\quad + (2CDM + 2AB)x + (2ABM - 2CD)y + (E + CD^2 + AB^2) \end{aligned}$$

Siguiendo las indicaciones dadas anteriormente, nos fijamos en primer lugar en los coeficientes de los términos de segundo grado:

$$\begin{aligned}x^2 &\rightarrow 9 = A + M^2C \\xy &\rightarrow 4 = 2M(A - C) \\y^2 &\rightarrow 6 = C + M^2A\end{aligned}$$

De la segunda ecuación deducimos que $A - C = \frac{2}{M}$; restando la tercera a la primera, obtenemos que $3 = (A - C) - M^2(A - C)$ y, por lo tanto,

$$\begin{aligned}3 &= \frac{2}{M} - M^2 \frac{2}{M} = \frac{2}{M} - 2M \\3M &= 2 - 2M^2 \\2M^2 + 3M - 2 &= 0 \\M &= -2, \quad M = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Como hemos dicho anteriormente, podemos seguir solo con una de estas dos soluciones para M (aunque el alumno debería analizar la otra posibilidad para observar que se llega a la misma forma normalizada). Haciendo $M = -2$ en las dos primeras ecuaciones (correspondientes a x^2 y xy) obtenemos que

$$\begin{aligned}9 &= A + 4C \\4 &= -4A + 4C\end{aligned}$$

de donde se deduce fácilmente (basta restar la ecuaciones) que $A = 1$ y $C = 2$. Obsérvese que los coeficientes de la parte cuadrática son suficientes para determinar las direcciones de los ejes y deducir que, si no es degenerada, la cónica es una elipse.

A continuación, tomamos el sistema formado por el resto de los coeficientes:

$$\begin{aligned}2CDM + 2AB &= -14 &\implies &-8D + 2B = -14 \\2ABM - 2CD &= 8 &\implies &-4B - 4D = 8 \\E + CD^2 + AB^2 &= 10 &\implies &E + 2D^2 + B^2 = 10\end{aligned}$$

Las dos primeras ecuaciones forman un sistema lineal en B y D que se resuelve fácilmente para llegar a $B = -3$ y $D = 1$; finalmente, la última ecuación conduce a $E = -1$.

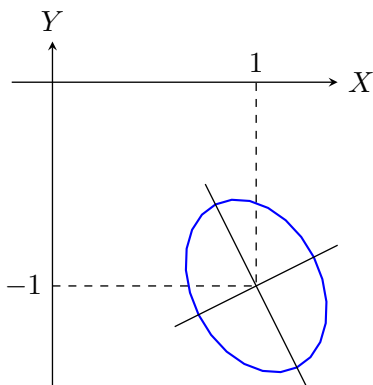
Por lo tanto, una forma normalizada de la elipse es:

$$(x - 2y - 3)^2 + 2(-2x - y + 1)^2 - 1 = 0$$

El centro es la intersección de sus ejes, $-2x - y + 1 = 0$, $x - 2y - 3 = 0$, es decir, $(x_0, y_0) = (1, -1)$. Una parametrización se obtiene a partir de la igualdades

$$x - 2y - 3 = \cos t, \quad \sqrt{2}(-2x - y + 1) = \sin t$$

Despejando x e y en función de t :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{-\sqrt{2}}{5} \operatorname{sen} t + \frac{1}{5} \cos t + 1 \\ y(t) = \frac{-\sqrt{2}}{10} \operatorname{sen} t - \frac{2}{5} \cos t - 1 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$


También podemos calcular los vértices de la elipse como los puntos de corte de los ejes con la curva y para ello utilizamos igualmente la forma normalizada. Por ejemplo, si hacemos $2x + y - 1 = 0$, obtenemos que $(x - 2y - 3)^2 = 1$, por lo que los dos puntos de corte son las soluciones de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x - 2y - 3 = -1 \end{cases}$$

Análogamente, los puntos de corte con el otro eje son las soluciones de los sistemas:

$$\begin{cases} \sqrt{2}(2x + y - 1) = 1 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sqrt{2}(2x + y - 1) = -1 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, los cuatro vértices son

$$(6/5, -7/5), (4/5, -3/5), (1 + \sqrt{2}/5, -1 + \sqrt{2}/10), (1 - \sqrt{2}/5, -1 - \sqrt{2}/10)$$

También podemos obtener los vértices a partir de la parametrización con los valores $t = 0$, $t = \pi/2$, $t = \pi$ y $t = 3\pi/2$. \square

EJEMPLO 2.1.29 Vamos a analizar la curva

$$-2xy + x - 1 = 0.$$

Se trata de una elipse o una hipérbola y su forma normalizada será de la forma:

$$-2xy + x - 1 = A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E$$

Desarrollando e identificando coeficientes tal y como hemos hecho en el ejemplo anterior, deducimos que realmente se trata de la siguiente hipérbola:

$$\frac{1}{2}(x - y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(-x - y + \frac{1}{2})^2 - 1 = 0.$$

Para obtener las parametrizaciones, hacemos

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + \frac{1}{2}) = \pm \cosh t \quad \text{y} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(-x - y + \frac{1}{2}) = \sinh t$$

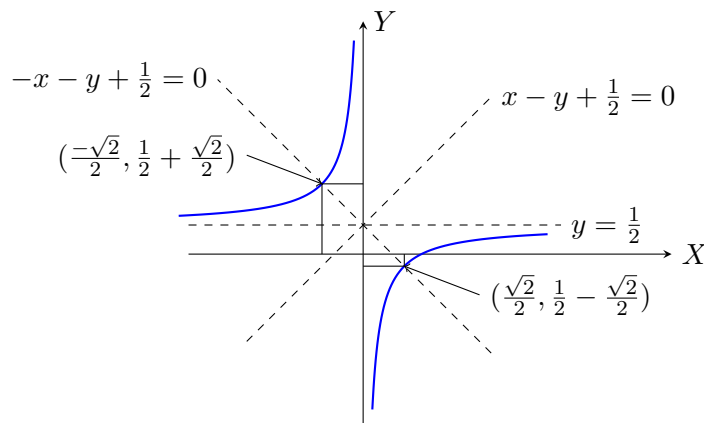


Figura 2.4: Hipérbola del ejemplo 2.1.29

y deducimos las ecuaciones paramétricas de las dos ramas de la hipérbola:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh t - \sinh t) \\ y_1(t) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh t + \sinh t) \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2(t) = \frac{-\sqrt{2}}{2}(\cosh t + \sinh t) \\ y_2(t) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cosh t - \sinh t) \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Las asíntotas coinciden con la cónica degenerada que se obtiene al eliminar el término independiente de la hipérbola, es decir:

$$\frac{1}{2}(x - y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2}(-x - y + \frac{1}{2})^2 = 0.$$

Cambiando de lado el sumando negativo y tomando raíces (positiva y negativa), obtenemos las ecuaciones de las dos rectas:

$$\begin{aligned} x - y + \frac{1}{2} &= -x - y + \frac{1}{2} \implies x = 0 \\ x - y + \frac{1}{2} &= -(-x - y + \frac{1}{2}) \implies y = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Finalmente, hallamos los vértices de la hipérbola buscando los puntos de corte de los ejes con la curva. El eje

$$x - y + \frac{1}{2} = 0$$

no corta a la hipérbola, ya que en ese caso, de la forma normalizada deducimos que

$$\frac{-1}{2}(-x - y + \frac{1}{2})^2 = 1,$$

que no puede tener solución porque los miembros tienen signos opuestos.

El otro eje, $-x - y + \frac{1}{2} = 0$, sí corta a la hipérbola; utilizando la forma normalizada obtenemos los sistemas lineales

$$\begin{aligned} -x - y + \frac{1}{2} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y + \frac{1}{2}) &= \pm 1 \end{aligned}$$

cuyas soluciones son $(\frac{-1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2})$, $(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2})$. También podemos determinar estos vértices a partir de las parametrizaciones evaluando en $t = 0$.

Con todos los elementos que hemos determinado llegamos a la representación de la hipérbola que aparece en la figura 2.4. \square

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

LECCIÓN 2.2

Campos escalares

En la lección anterior hemos trabajado con polinomios de dos variables, es decir, un ejemplo de función definida en el espacio \mathbb{R}^2 . En esta lección, vamos a trabajar con funciones generales con dos o más variables, es decir, vamos a trabajar con funciones definidas en espacios \mathbb{R}^m . Posiblemente, se haya trabajado en estos espacios utilizando su estructura de *espacio vectorial* pero ahora, estamos interesados en establecer las nociones de *continuidad* y *diferenciabilidad* de funciones definidas en ellos.

Para denotar los elementos de \mathbb{R}^m se suele utilizar una variable con un flecha encima, \vec{x} , o bien variables en “negrita”, \mathbf{x} ; a lo largo del curso utilizaremos esta segunda notación, ya que los elementos de \mathbb{R}^m pueden identificarse tanto con vectores como con puntos. Además, escribiremos las coordenadas de los vectores utilizando subíndices: $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$.

En general, cualquier función definida en un subconjunto de un espacio \mathbb{R}^m se denomina *función de varias variables*. Si la imagen está contenida en \mathbb{R} se denomina *campo escalar*,

$$f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

Si la imagen está contenida en \mathbb{R}^k se denomina *campo vectorial*,

$$f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$$

En este tema, nos centramos en los campos escalares, en la lección anterior hemos trabajado con funciones vectoriales y, más adelante en el curso, trabajaremos con campos vectoriales. En cualquiera de los dos casos, el conjunto D se denomina *dominio* del campo y se denota $\text{Dom}(f)$. Algunos problemas exigirán trabajar en un dominio determinado y en tal caso tendrá que ser especificado; en caso contrario, entenderemos que el dominio es el mayor posible.

EJEMPLO 2.2.1 La expresión $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$ define un campo de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} . El mayor dominio con el que podemos trabajar es el formado por los puntos tales que $x > y$, es decir:

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$

Gráficamente, los puntos del dominio son los que están estrictamente por debajo de la bisectriz del primer y tercer cuadrante del plano \mathbb{R}^2 . \square

Sabemos que la representación gráfica de las funciones reales de una variable es una herramienta muy útil para describir sus características; sin embargo, en campos escalares solo podremos utilizar esta herramienta en unos pocos casos. Por una parte, podemos definir el grafo de un campo escalar f como

$$\text{gr}(f) = \{(x_1, \dots, x_m, f(x_1, \dots, x_m)) \in \mathbb{R}^{m+1}; (x_1, \dots, x_m) \in \text{Dom}(f)\}$$

aunque solamente podremos visualizar este conjunto para $m = 1$ o $m = 2$, ya que en tal caso, este conjunto es una superficie de \mathbb{R}^3 .

EJEMPLO 2.2.2 El campo escalar definido por $f(x, y) = x^2 + y^2$ tiene por dominio a todo el espacio \mathbb{R}^2 . Su grafo es el conjunto:

$$\text{gr}(f) = \{(x, y, x^2 + y^2); (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

No es difícil imaginar cuál es la forma de esta superficie si observamos que, haciendo constante la coordenada z de cada punto, $x^2 + y^2 = c$, las curvas que obtenemos son circunferencias y si cortamos por cualquier plano que contenga al eje OZ , es decir, $y = mx$, las curvas que obtenemos son parábolas. Es decir, la superficie es la figura de revolución que se obtiene al girar una parábola sobre su eje. Esta superficie es la que nos encontramos, por ejemplo, en las antenas parabólicas. \square

Otra forma de representar los campos escalares es a través de las *superficies* y *curvas de nivel*: si $c \in \text{Im}(f)$, llamamos *superficie de nivel* de f asociada a c , al conjunto

$$N(f, c) = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = c\}$$

Si $m = 2$ estos conjuntos se denominan *curvas de nivel*.¹

EJEMPLO 2.2.3 En el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$, las curvas de nivel serían:

$$x^2 + y^2 = c, \quad c > 0$$

Sabemos de la lección anterior que estas curvas son circunferencias centradas en el origen y radio \sqrt{c} .

El campo $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ tiene las mismas curvas de nivel, circunferencias centradas en el origen:

$$\begin{aligned} \log(x^2 + y^2) &= c \\ x^2 + y^2 &= e^c \end{aligned}$$

Sin embargo, para cada valor c , su radio es $\sqrt{e^c}$. \square

Para poder visualizar los campos usando sus curvas nivel se hace la representación de la siguiente forma: elegimos varios valores equidistantes, c_1, c_2, \dots, c_n , y dibujamos las curvas correspondientes a estos valores, $f(\mathbf{x}) = c_i$. Por ejemplo, aunque los dos campos del ejemplo 2.2.3, $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g(x, y) = \log(x^2 + y^2)$, tienen las mismas curvas de nivel, su representación sería distinta, ya que para los mismos valores c_i , las circunferencias correspondientes a dichos valores, son distintas.

¹Como hemos visto en la lección anterior, los conjuntos descritos como $f(x, y) = 0$ no tienen que ser necesariamente curvas; este conjunto puede ser vacío, contener uno o varios puntos, una o varias rectas o curvas e incluso estar formado por regiones.

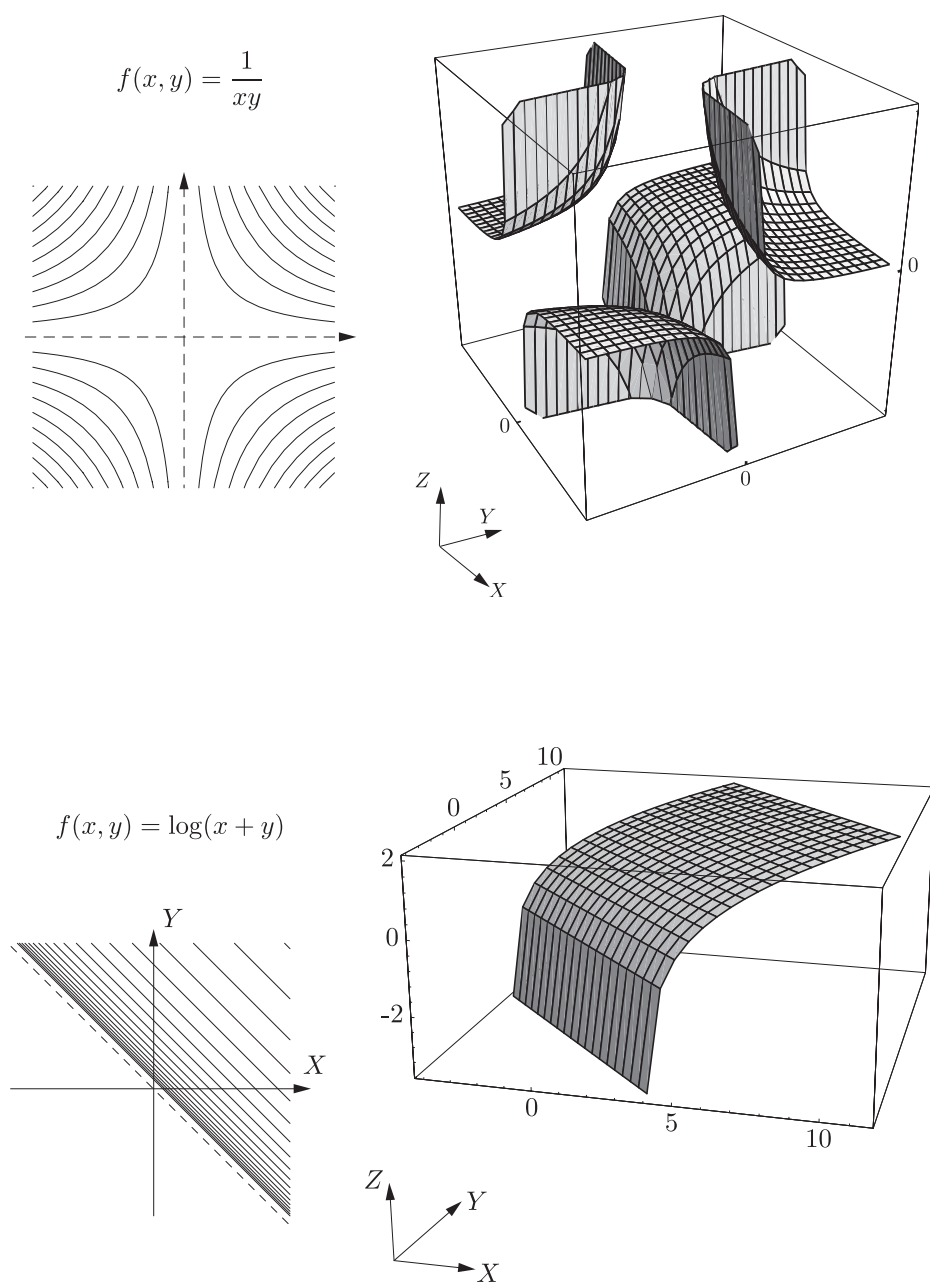


Figura 2.5: Representación de campos escalares

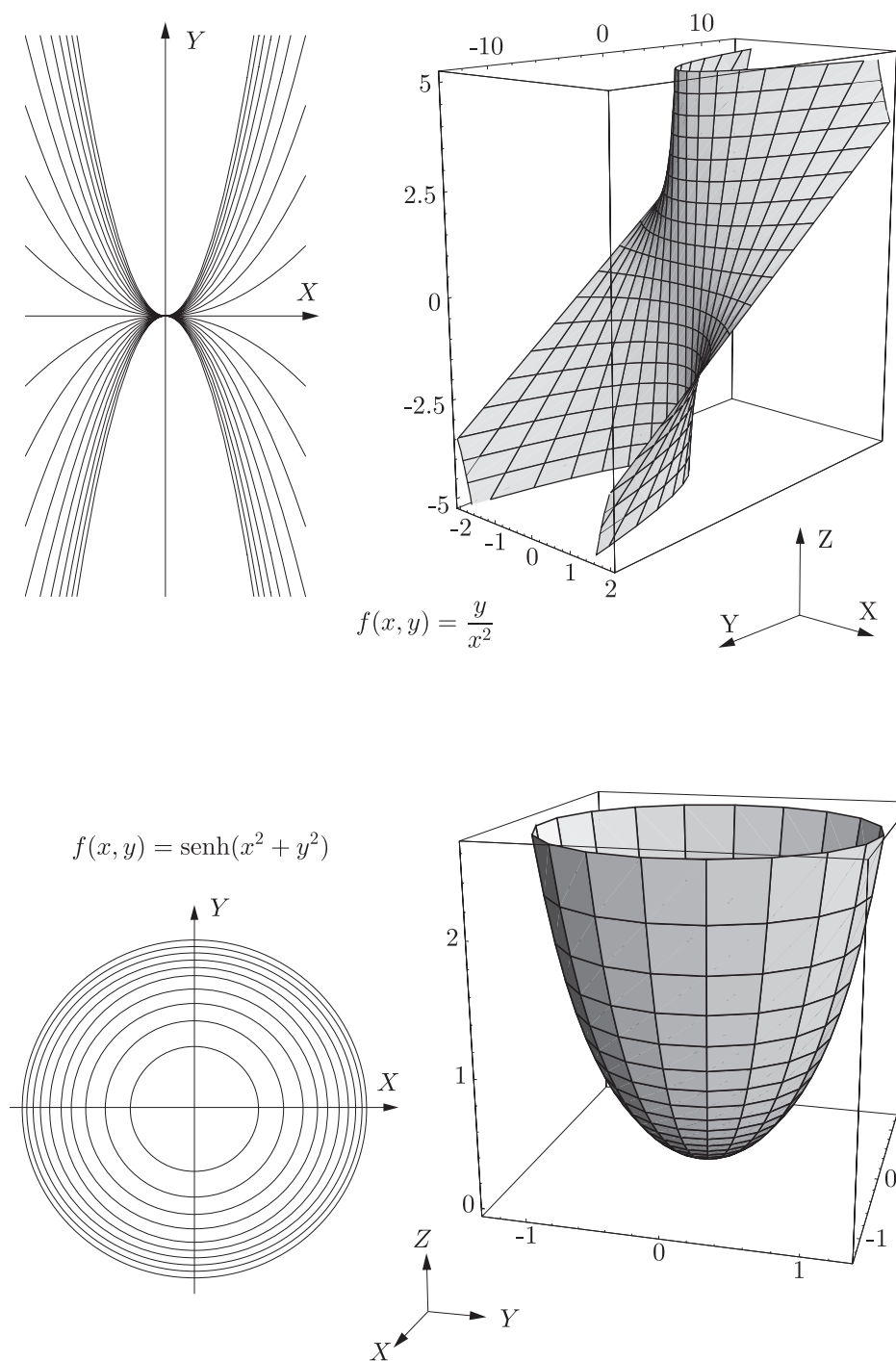


Figura 2.6: Representación de campos escalares

Podemos encontrar representaciones de campos mediante curvas de nivel en los mapas de temperaturas y de presiones; en estos casos, las curvas de nivel se denominan isotermas e isobaras respectivamente. En las figuras 2.5 y 2.6 vemos algunos ejemplos de campos escalares y sus representaciones haciendo uso del grafo y de curvas de nivel.

2.2.1. Campos escalares lineales

Dedicamos esta sección a un ejemplo de campo escalar: los *campos escalares lineales*. Estas aplicaciones serán la base para las definiciones y desarrollos asociados al concepto de diferenciabilidad.

Los *campos escalares lineales* en \mathbb{R}^n responden a la expresión:

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n$$

en donde a_1, \dots, a_n son números reales. La expresión $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ se denomina igualmente *forma lineal* y es un polinomio de grado 1 sin término independiente.

Estos campos se pueden escribir de varias formas. Por ejemplo, en forma matricial se definen a partir de la matriz $A = (a_1 \dots a_n) \in \mathcal{M}_{1 \times n}(\mathbb{R})$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = (a_1 \dots a_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\mathbf{x}$$

Aunque anteriormente hemos representado los vectores como (x_1, \dots, x_n) , cuando trabajamos matricialmente, los vectores deben tratarse como matrices columna:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

Para los objetivos de este tema y para los cálculos que realizaremos en él, es más adecuado, sin embargo, definir los campos escalares lineales usando el *producto escalar*; en este caso, el campo escalar lineal se define con el vector $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$$

No obstante, no debemos olvidar que las tres expresiones definen la misma función y que por lo tanto, solo son tres formas distintas de escribir lo mismo.

EJEMPLO 2.2.4 El campo $f(x, y, z) = 6x - y + 2z$ es un campo lineal y se puede escribir como:

$$f(x, y, z) = 6x - y + 2z = (6, -1, 2) \cdot (x, y, z) \quad \square$$

Recordemos ahora las propiedades más importantes de los campos lineales. Si f es un campo escalar lineal, entonces:

TEOREMA 2.2.5 Si f es un campo escalar lineal, entonces:

1. $f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$.
2. $f(k\mathbf{x}) = kf(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ y para todo $k \in \mathbb{R}$.
3. Si para cada i

$$a_i = f(\mathbf{e}_i) = f(0, \dots, \overset{i}{1}, \dots, 0)$$

y $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, entonces $f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x}$.

Las dos primeras propiedades caracterizan a las aplicaciones lineales y son usadas para definir este tipo de aplicaciones en espacios vectoriales generales. La tercera propiedad se usa fundamentalmente para hacer desarrollos sobre aplicaciones lineales desconocidas o arbitrarias, ya que nos da una forma de expresar los coeficientes a partir de la propia aplicación.

Los campos lineales no deben confundirse con los *campos afines*, que se definen a partir de ellos como sigue.

DEFINICIÓN 2.2.6 Un campo afín en \mathbb{R}^n responde a la expresión

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1 + \dots + a_nx_n + b$$

que puede ser escrita haciendo uso del producto escalar como

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} + b$$

En el caso particular de \mathbb{R}^2 , haremos uso de los grafos de los campos lineales y afines. Concretamente, el grafo del campo $f(x, y) = a_1x + a_2y$ es el plano

$$a_1x + a_2y - z = 0$$

que es normal (perpendicular) al vector $(a_1, a_2, -1)$ y pasa por el origen de coordenadas. De la misma forma, el grafo del campo afín $f(x, y) = a_1x + a_2y + b$ es el plano

$$a_1x + a_2y - (z - b) = 0$$

que pasa por el punto $(0, 0, b)$ y es normal al vector $(a_1, a_2, -1)$.

A lo largo del tema, trabajaremos con planos en \mathbb{R}^3 , por lo que es conveniente repasar las distintas formas de expresar analíticamente este tipo de conjuntos. En particular, para determinar un plano en \mathbb{R}^3 es suficiente con dar un punto del plano, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, y un vector normal, $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$; la ecuación del plano dado por estos dos elementos es

$$v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) = 0$$

Esto es consecuencia de la definición del producto escalar, por la cual, el producto de dos vectores perpendiculares es 0. En este caso, si $P = (x, y, z)$ es cualquier punto

del plano, entonces el vector $\overrightarrow{P_0P} = P - P_0$ es perpendicular al vector \mathbf{v} y por lo tanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} \cdot (P - P_0) &= 0 \\ (v_1, v_2, v_3) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) &= 0 \\ v_1(x - x_0) + v_2(y - y_0) + v_3(z - z_0) &= 0\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.2.7 El plano perpendicular al vector $(-2, 1, -1)$ y que pasa por el origen de coordenadas es:

$$-2x + y - z = 0$$

Si queremos que el plano pase por el punto $(-1, 0, 1)$, la ecuación es:

$$\begin{aligned}-2(x + 1) + y - (z - 1) &= 0 \\ -2x + y - z - 1 &= 0\end{aligned}\quad \square$$

2.2.2. Continuidad

De manera intuitiva, el límite de una función de una variable en un punto a es *el valor que debería tomar la función en ese punto deducido a partir de lo que ocurre a su alrededor*; de esta forma, una función es continua en el punto si el valor en él coincide con el valor previsto según lo que ocurre a su alrededor.

Por ejemplo, si consideramos el campo $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ y el punto $\mathbf{a} = (1, 2)$ de su dominio, podemos estudiar la existencia del límite en este punto considerando sucesiones x_n e y_n tales que $\lim x_n = 1$ y $\lim y_n = 2$; entonces:

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = \frac{1 \cdot 2^2}{1^2 + 2^2} = \frac{4}{5}$$

Dado que este límite no depende de las sucesiones x_n e y_n , podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = \frac{4}{5}$$

También podemos calcular de esta forma límites en puntos fuera del dominio. Por ejemplo, para el mismo campo, podemos calcular el límite en el punto $(0, 0)$ considerando sucesiones x_n e y_n tales que $\lim x_n = 0$ y $\lim y_n = 0$; en este caso, la evaluación del límite

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2}$$

nos lleva a una indeterminación, pero teniendo en cuenta que $\frac{y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \leq 1$, deducimos que

$$\left| \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} \right| \leq |x_n|$$

y dado que el límite de x_n es 0,

$$\lim f(x_n, y_n) = \lim \frac{x_n y_n^2}{x_n^2 + y_n^2} = 0$$

En este caso, el límite tampoco depende de las sucesiones x_n e y_n y podemos afirmar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} = 0$$

Sin embargo, por lo general no es sencillo eliminar las indeterminaciones como hemos hecho en este ejemplo o decidir que un límite no existe; el simple estudio de límites laterales que hacemos para funciones de una variable, se complica cuando tratamos con campos escalares. Por esta razón, vamos a dejar este tipo de problemas fuera de los objetivos de este curso y solo trabajaremos con funciones a las que se les puede aplicar el siguiente resultado.

COROLARIO 2.2.8 *Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas, ...) en un dominio D , entonces el campo es continuo en dicho dominio; es decir, el límite del campo coincide con el valor en el correspondiente punto.*

Gráficamente, la propiedad de continuidad de un campo se traduce en la continuidad de su grafo, es decir, este no presentará ni agujeros ni rupturas.

2.2.3. Diferenciabilidad

La definición de derivabilidad de funciones reales de variable real se introduce con dos objetivos:

- En términos geométricos, para formalizar la noción de *suavidad* de una curva y proveer una definición analítica de recta tangente.
- Desde el punto de vista de la física, para introducir la noción de tasa de cambio de una magnitud escalar; por ejemplo, la velocidad en el estudio del movimiento o la tasa de variación de la temperatura en un recinto sometido a una fuente de calor.

Si las magnitudes estudiadas dependen de varias variables (la medición de la temperatura en una sala será diferente según la posición del termómetro), también tiene sentido plantearnos las cuestiones anteriores y, por lo tanto, necesitaremos extender los conceptos planteados a estas nuevas situaciones. Usaremos ejemplos en \mathbb{R}^2 para motivar los conceptos, pero generalizaremos las definiciones a cualquier campo.

En primer lugar, antes de considerar el movimiento libre en cualquier dirección desde un punto, imaginemos que desde ese punto \mathbf{a} , nos movemos sobre una recta en una dirección \mathbf{v} . Entonces, el valor del campo sobre esta recta puede expresarse usando una función de una variable, $f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$. La tasa de cambio puntual en el punto \mathbf{a} y en la dirección \mathbf{v} viene entonces dada por la derivada de esta función en $t = 0$,

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}$$

ya que $f(\mathbf{a} + 0 \cdot \mathbf{u}) = f(\mathbf{a})$. Este límite también se denomina *diferencial de f en \mathbf{a} en la dirección \mathbf{v}* y, si el vector es unitario, se denomina *derivada direccional*.

DEFINICIÓN 2.2.9 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in D$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. Llamamos diferencial de f en \mathbf{a} al campo $df_{\mathbf{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido como sigue

$$df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{a} + t\mathbf{v}) \right|_{t=0}$$

Si el vector \mathbf{u} es unitario, al número $df_{\mathbf{a}}(\mathbf{u})$ lo llamamos derivada direccional de f en el punto \mathbf{a} y en la dirección \mathbf{u} y la denotamos por $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a})$.

Si el vector \mathbf{v} es el vector \mathbf{e}_i (de la base canónica), la derivada direccional se denomina derivada parcial i -ésima, que admite las siguientes notaciones:

$$df_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_i) = D_i f(\mathbf{a}) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) \quad (2.11)$$

Estas derivadas se pueden calcular fácilmente sin recurrir al cálculo de límites utilizando el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 2.2.10 La parcial i -ésima de un campo f en \mathbb{R}^n se calcula derivando la expresión del campo considerando la variable x_i como variable y el resto como constantes, es decir:

$$D_i f(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n) = \frac{d}{dx_i} f(x_1, \dots, x_n)$$

EJEMPLO 2.2.11

Vamos a calcular las derivadas parciales del campo $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ en el punto $\mathbf{a} = (2, -1)$. En primer lugar, derivamos la expresión de f usando la regla anterior:

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} (2x^2y - xy^2) = 4xy - y^2 \\ D_2 f(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} (2x^2y - xy^2) = 2x^2 - 2xy \end{aligned}$$

Por lo tanto, $D_1 f(2, -1) = -9$ y $D_2 f(2, -1) = 12$. □

Veamos la justificación de la proposición anterior para la primera variable de un campo de dos variables. Por (2.11):

$$\left. \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \right|_{(x,y)=(a,b)} = \left. \frac{d}{dt} f((a, b) + t(1, 0)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt} f((a + t, b)) \right|_{t=0}$$

y aplicando la regla de la cadena en la última expresión

$$\left. \frac{d}{dt} f((a + t, b)) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dx} f(x, b) \right|_{x=a} \left. \frac{d}{dt} (a + t) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dx} f(x, b) \right|_{x=a}$$

Por lo tanto, efectivamente

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{d}{dx} f(x, y)$$

Las derivadas direccionales también tienen su interpretación geométrica. Los vectores $(v_1, v_2, df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}))$ son tangentes al grafo de f en el punto \mathbf{a} . Si el campo es diferenciable, todos estos vectores forman un plano, el plano tangente al grafo f en el punto \mathbf{a} (ver figura 2.7). En este caso, $df_{\mathbf{a}}$ debe ser un campo escalar lineal y según hemos visto en la sección 2.2.1:

$$df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = (df_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_1), \dots, df_{\mathbf{a}}(\mathbf{e}_n)) \cdot \mathbf{v} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right) \cdot \mathbf{v}$$

DEFINICIÓN 2.2.12 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in D$ y supongamos que $df_{\mathbf{a}}$ es un campo lineal. Entonces, el vector $\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$ se denomina vector gradiente de f en \mathbf{a} , y se denota $\nabla f(\mathbf{a})$:

$$\nabla f(\mathbf{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right)$$

Por lo tanto, si la aplicación $df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v})$ es lineal (lo cual ocurrirá si f es diferenciable), se verifica que:

$$df_{\mathbf{a}}(\mathbf{v}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v}$$

Y, en particular, si \mathbf{u} es un vector unitario: $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u}$.

EJEMPLO 2.2.13 En el ejemplo 2.2.11 hemos calculado las derivadas parciales de $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$, y por lo tanto su vector gradiente:

$$\nabla f(x, y) = (4xy - y^2, 2x^2 - 2xy)$$

Evaluamos en el punto $\mathbf{a} = (2, -1)$ para calcular el gradiente y la diferencial en este punto:

$$\nabla f(2, -1) = (-9, 12)$$

$$df_{(2, -1)}(v_1, v_2) = \nabla f(2, -1) \cdot (v_1, v_2) = (-9, 12) \cdot (v_1, v_2) = -9v_1 + 12v_2 \quad \square$$

Ya podemos definir formalmente, *espacio vectorial tangente* y *espacio afín tangente*.

DEFINICIÓN 2.2.14 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar, $\mathbf{a} \in D$.

1. El conjunto de los vectores $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que:

$$D_1f(\mathbf{a}) \cdot v_1 + \dots + D_nf(\mathbf{a}) \cdot v_n - v_{n+1} = 0$$

se denomina *espacio vectorial tangente al grafo de f en el punto \mathbf{a}* .

2. El conjunto de los puntos $(x_1, \dots, x_n, z) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tales que:

$$D_1f(\mathbf{a}) \cdot (x_1 - a_1) + \dots + D_nf(\mathbf{a}) \cdot (x_n - a_n) - (z - f(\mathbf{a})) = 0$$

se denomina *espacio (afín) tangente al grafo de f en el punto \mathbf{a}* . Si $n = 2$ lo denominamos plano tangente y si $n = 1$ lo denominamos recta tangente.

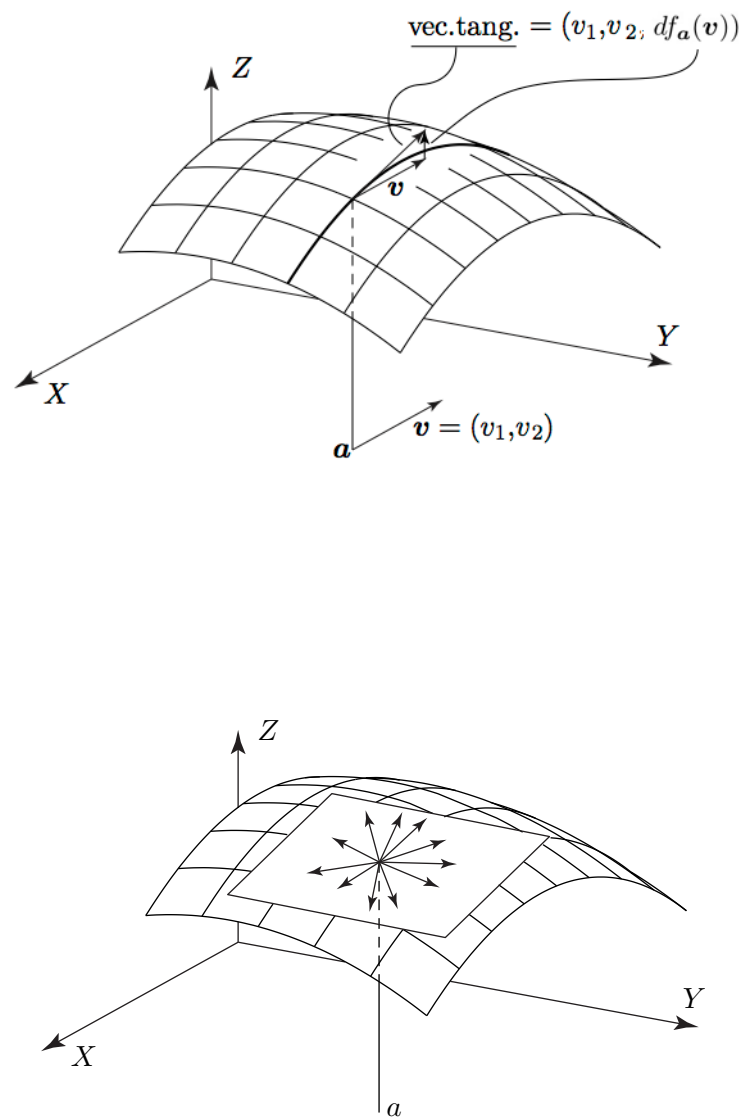


Figura 2.7: Representación de la derivada direccional y vectores tangentes

Hemos definido formalmente las nociones de derivada direccional, vector tangente y espacio tangente, y hemos utilizado varias veces la palabra *diferenciabilidad* sin definirla formalmente. La existencia de derivadas parciales y de derivadas direccionales, o el hecho de que todos los vectores tangentes formen un plano, no son características necesarias para hablar de diferenciabilidad. Necesitamos además que *la diferencial del campo sea el campo escalar lineal que mejor lo aproxime en las cercanías del punto \mathbf{a}* . Esta propiedad coincide con la que conocemos para funciones de una variable: *la recta tangente es la que mejor aproxima la función con polinomios de grado 1*.

DEFINICIÓN 2.2.15 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar y $\mathbf{a} \in D$ para el cual existe el vector gradiente $\nabla f(\mathbf{a})$. Decimos que f es diferenciable en \mathbf{a} si

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{1}{\|\mathbf{h}\|} (f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h}) = 0$$

Por lo tanto, el estudio de la propiedad de diferenciabilidad se basa en el cálculo de límites en varias variables que, como ya hemos dicho, no vamos a abordar en este curso. En la mayoría de los casos, será suficiente con aplicar los resultados que recogemos a continuación y que aseguran la diferenciabilidad de los campos expresados a partir de funciones elementales. A lo largo del curso, solo vamos a trabajar con este tipo de funciones, y por lo tanto, no será necesario estudiar la condición de diferenciabilidad a partir de la definición.

TEOREMA 2.2.16 Si existen todas las derivadas parciales del campo escalar f y son continuas en un entorno del punto \mathbf{a} , entonces f es diferenciable en \mathbf{a} .

La condición dada en este teorema es suficiente para garantizar la diferenciabilidad, pero no es una condición necesaria y, de hecho, se pueden establecer ejemplos bastantes simples de campos diferenciables cuyas derivadas parciales no son continuas. Si un campo es diferenciable y sus parciales son continuas, decimos que el campo es de *clase \mathcal{C}^1* .

COROLARIO 2.2.17 Si un campo escalar está determinado por operaciones algebraicas entre funciones elementales (polinomios, exponenciales, trigonométricas, ...), entonces el campo es continuo y diferenciable en el dominio común a todas sus derivadas parciales.

2.2.3.1. Notaciones posibles de derivadas y derivadas parciales

Hemos utilizado en las páginas anteriores varias notaciones para las derivadas de funciones reales y para las derivadas parciales de campos escalares. Una de estas notaciones es $D_i f(\mathbf{a})$, que se debe a Louis François Antoine Arbogast y extiende la notación $Df(a)$ para la derivada de funciones reales, aunque para funciones de una variable, la notación más utilizada es $f'(a)$, que se debe a Joseph-Louis Lagrange. Estas notaciones son adecuadas para aplicarlas sobre el nombre de la función. Sin

embargo, en muchas ocasiones trabajamos sobre campos sin utilizar un nombre específico, en estos casos, debemos utilizar la *notación de Leibniz*, que toma su nombre de Gottfried Wilhelm Leibniz,

$$\frac{d}{dx}f(x) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}f(x_1, \dots, x_n)$$

2.2.3.2. Propiedades del vector gradiente

La siguiente proposición establece que la relación entre continuidad y derivabilidad de las funciones reales se mantiene en la generalización a campos.

PROPOSICIÓN 2.2.18 *Si f es un campo escalar diferenciable en \mathbf{a} , entonces f es continuo en \mathbf{a} .*

Aunque en el estudio de campos concretos, no necesitaremos normalmente la aplicación de las propiedades algebraicas que vemos a continuación, estas pueden ser útiles en algunas situaciones para simplificar cálculos y realizar desarrollos teóricos simples.

PROPOSICIÓN 2.2.19 *Consideremos los campos $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, la función real $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y la función vectorial $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

1. *Si f y g son diferenciables en \mathbf{a} , entonces $f + g$ es diferenciable en \mathbf{a} y*

$$\nabla(f + g)(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) + \nabla g(\mathbf{a})$$

2. *Si f y g son diferenciables en \mathbf{a} , entonces fg también es diferenciable en \mathbf{a} y*

$$\nabla(fg)(\mathbf{a}) = g(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{a})\nabla g(\mathbf{a})$$

3. *Si f es diferenciable en \mathbf{a} y $f(\mathbf{a}) \neq 0$, entonces $1/f$ es diferenciable en \mathbf{a} y*

$$\nabla(1/f)(\mathbf{a}) = \frac{-1}{[f(\mathbf{a})]^2} \nabla f(\mathbf{a})$$

4. *Regla de la cadena: Si f es diferenciable en \mathbf{a} y ϕ es derivable en $f(\mathbf{a})$, entonces $\phi \circ f$ es diferenciable en \mathbf{a} y*

$$\nabla(\phi \circ f)(\mathbf{a}) = \phi'(f(\mathbf{a}))\nabla f(\mathbf{a})$$

5. *Regla de la cadena: Si γ es derivable en t_0 y f es diferenciable en $\gamma(t_0)$, entonces $f \circ \gamma$ es derivable en t_0 y*

$$(f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

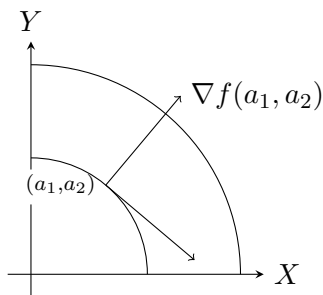


Figura 2.8: El gradiente da la dirección de derivada direccional máxima.

Deducimos a continuación una importante propiedad del vector gradiente. Si \mathbf{u} es un vector unitario, según hemos definido anteriormente, la derivada direccional de un campo f en un punto \mathbf{a} y en la dirección \mathbf{u} es:

$$D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = \|\nabla f(\mathbf{a})\| \cos \alpha$$

en donde α es el ángulo formado por los vectores \mathbf{u} y $\nabla f(\mathbf{a})$. Por lo tanto, dado que el módulo del vector gradiente es constante, el valor de la derivada direccional depende solamente del ángulo que el vector gradiente forma con la dirección considerada.

TEOREMA 2.2.20 *Sea α es ángulo formado por $\nabla f(\mathbf{a})$ y un vector unitario \mathbf{u} .*

1. *Si $\alpha = 0$ (los vectores \mathbf{u} y $\nabla f(\mathbf{a})$ tienen la misma dirección), el valor del coseno es máximo y por lo tanto, el valor de la derivada direccional es máximo e igual a $D_{\mathbf{u}}f(\mathbf{a}) = \|\nabla f(\mathbf{a})\|$.*
2. *Si $\alpha = \pi/2$ (los vectores \mathbf{u} y $\nabla f(\mathbf{a})$ son perpendiculares) el valor del coseno es 0, es decir, derivada direccional es nula en la dirección perpendicular al vector gradiente.*

En la figura 2.8 representamos dos curvas de nivel de un campo f . Si nos movemos desde el punto (a_1, a_2) y queremos sufrir el cambio más rápido en el valor del campo, tendremos que ir en la dirección que nos da mayor proximidad a la siguiente curva de nivel. El ítem 1 del teorema 2.2.20 indica que esta dirección es la dada por el vector gradiente de f en ese punto.

Pero si nos movemos sobre la curva de nivel, no sufrimos ninguna variación en el valor del campo, es decir, la derivada direccional es 0; el ítem 2 del teorema 2.2.20 dice que esta dirección es normal al vector gradiente. Esta propiedad es válida para cualquier campo, como probamos a continuación.

Sea $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ la parametrización de una curva contenida en una superficie de nivel de un campo f , es decir, $f(\gamma(t)) = c$ para todo t , y supongamos que esta curva pasa por el punto \mathbf{a} , es decir, $\gamma(t_0) = \mathbf{a}$. Una simple aplicación de la regla de la cadena justifica el siguiente desarrollo:

$$0 = (f \circ \gamma)'(t_0) = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$$

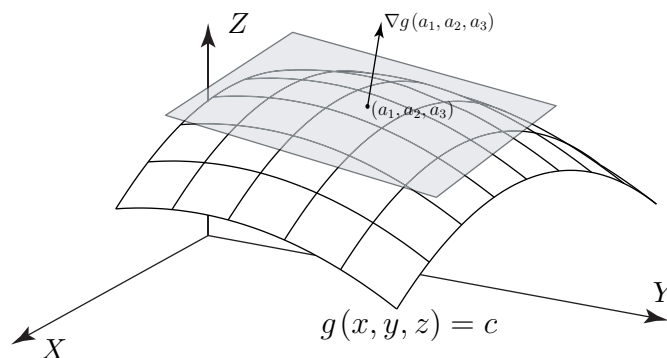


Figura 2.9: El gradiente es normal a la superficie de nivel.

El vector derivada $\gamma'(t_0)$ es tangente a la curva y por lo tanto a la superficie de nivel; en consecuencia, la igualdad anterior permite afirmar que estos vectores son perpendiculares al vector gradiente (ver figura 2.9).

TEOREMA 2.2.21 Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo diferenciable y consideremos una superficie de nivel $f(\mathbf{x}) = c$ y un punto \mathbf{a} en dicha superficie. Entonces, $\nabla f(\mathbf{a})$ es un vector normal al plano tangente a la superficie de nivel en punto \mathbf{a} . Por lo tanto, el espacio vectorial tangente a la superficie es:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{v} = 0$$

y el espacio afín tangente es:

$$\nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$$

Como casos particulares, vamos a mostrar las expresiones de las rectas y planos tangentes a curvas de nivel en \mathbb{R}^2 y superficies de nivel en \mathbb{R}^3 :

1. La recta tangente a la curva dada por $f(x, y) = c$ en un punto (x_0, y_0) es:

$$D_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2 f(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$$

2. Análogamente, el plano tangente a la superficie dada por $g(x, y, z) = c$ (ver figura 2.9) en un punto (x_0, y_0, z_0) es:

$$D_1 g(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + D_2 g(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + D_3 g(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

EJEMPLO 2.2.22 En la lección anterior, hemos aprendido a calcular las rectas tangentes a curvas parametrizadas. En particular, podríamos obtener la recta tangente a una cónica utilizando las parametrizaciones que hemos introducido para las cónicas. Ahora, haciendo uso del vector gradiente, podemos calcular más fácilmente estas rectas. Por ejemplo, la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

es una curva de nivel del campo

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

y por lo tanto, un vector normal a dicha curva en un punto (x_0, y_0) es

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2} \right)$$

En consecuencia, la recta tangente es:

$$\begin{aligned} \frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) &= 0 \\ \frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) &= 0 \\ \frac{x_0}{a^2}x - \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0}{b^2}y - \frac{y_0^2}{b^2} &= 0 \\ \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} \\ \frac{x_0}{a^2}x + \frac{y_0}{b^2}y &= 1 \end{aligned} \quad \square$$

EJEMPLO 2.2.23 Dado un campo escalar en \mathbb{R}^2 , su grafo puede considerarse como la superficie de nivel de un campo en \mathbb{R}^3 :

$$g(x, y, z) = f(x, y) - z.$$

Efectivamente, si $g(x, y, z) = 0$, entonces $z = f(x, y)$. Por lo tanto, el plano tangente a $g(x, y, z) = 0$ es normal al vector

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (D_1f(x_0, y_0), D_2f(x_0, y_0), -1),$$

que permite construir el plano tangente introducido en la definición 2.2.14:

$$D_1f(x_0, y_0)(x - x_0) + D_2f(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0 \quad \square$$

2.2.4. Derivadas de orden superior

Para un campo $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable hemos definido las derivadas parciales para cada punto del dominio y por lo tanto, estas definen un campo escalar para cada i con $1 \leq i \leq n$:

$$D_i f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

Tiene entonces sentido estudiar la diferenciabilidad de estos campos y calcular sus derivadas parciales. Las derivadas parciales de los campos $D_i f$ se denominan *derivadas de segundo orden* de f y las notaciones posibles para ellas son

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}, \quad D_i(D_j f) = D_{ij} f.$$

Por el corolario 2.2.17, la continuidad de las derivadas parciales de segundo orden asegura la diferenciabilidad de las derivadas parciales de f ; en tal caso, decimos que f es de *clase* C^2 . Una importante propiedad de estos campos queda establecida por el siguiente teorema, que asegura que el orden de derivación no influye en el resultado.

TEOREMA 2.2.24 (DE SCHWARZ) *Sea f un campo escalar tal que sus derivadas parciales de segundo orden son continuas; entonces, para cada i, j :*

$$D_{ij}f = D_{ji}f$$

Para los campos de clase \mathcal{C}^2 y para cada punto de su dominio, definimos la siguiente matriz $n \times n$, que se denomina *matriz Hessiana* de f en \mathbf{a} :

$$\nabla^2 f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} D_{11}f(\mathbf{a}) & D_{12}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{1n}f(\mathbf{a}) \\ D_{21}f(\mathbf{a}) & D_{22}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{2n}f(\mathbf{a}) \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ D_{n1}f(\mathbf{a}) & D_{n2}f(\mathbf{a}) & \cdots & D_{nn}f(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Obsérvese que, por el teorema de Schwarz, esta matriz es simétrica. A partir de ella, definimos el campo

$$d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^t \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{u},$$

que se denomina *segunda diferencial de f en \mathbf{a}* . Como ya dijimos anteriormente, cuando trabajamos con expresiones matriciales, los vectores deben tratarse como matrices columna y por esta razón escribimos la matriz transpuesta \mathbf{u}^t a la izquierda de la matriz hessiana.

EJEMPLO 2.2.25 Vamos a calcular $d^2 f_{\mathbf{a}}$ para $f(x, y) = 2x^2y - xy^2$ y $\mathbf{a} = (2, -1)$:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 2x^2y - xy^2 \\ \nabla f(x, y) &= (4xy - y^2, 2x^2 - 2xy) \\ \nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4y & 4x - 2y \\ 4x - 2y & -2x \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(2, -1) &= \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(2, -1)}(u_1, u_2) &= (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} -4 & 10 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(2, -1)}(u_1, u_2) &= -4u_1^2 + 20u_1u_2 - 4u_2^2 \quad \square \end{aligned}$$

Como vemos en este ejemplo, la expresión obtenida para $d^2 f_{(2, -1)}$ es un polinomio de grado 2 sin términos de grado 1 o grado 0; estas expresiones se denominan *formas cuadráticas*.

Todo el desarrollo mostrado en esta sección puede continuarse para definir las derivadas parciales de órdenes superiores (orden tres, cuatro, ...). Sin embargo, en este curso solo trabajaremos con las derivadas de segundo orden. Por ejemplo, con estas derivadas, podemos mejorar la aproximación dada por el vector gradiente en la definición de diferenciabilidad.

TEOREMA 2.2.26 (FÓRMULA DE TAYLOR) Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar dos veces diferenciable y con parciales de segundo orden continuas. Entonces:

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{u} + \|\mathbf{u}\|^2 E(\mathbf{a}, \mathbf{u}),$$

en donde $\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow 0} E(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = 0$.

Es decir, el campo $f(\mathbf{a} + \mathbf{u})$, en un entorno lo suficientemente pequeño de \mathbf{a} , tiene un comportamiento “parecido” al polinomio de segundo orden

$$f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^t \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{u}.$$

Este polinomio también lo podemos escribir como:

$$T(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2} (\mathbf{x} - \mathbf{a})^t \nabla^2 f(\mathbf{a}) (\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

EJEMPLO 2.2.27 Vamos a calcular el polinomio de Taylor de $f(x, y) = \sin(x^2 + y)$ de orden 2 en el punto $(0, 0)$:

$$\nabla f(x, y) = (2x \cos(x^2 + y), \cos(x^2 + y))$$

$$\nabla f(0, 0) = (0, 1)$$

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 \cos(x^2 + y) - 4x^2 \sin(x^2 + y) & -2x \sin(x^2 + y) \\ -2x \sin(x^2 + y) & -\sin(x^2 + y) \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x, y) \approx T(x, y) = 0 + (0, 1) \cdot (x, y) + \frac{1}{2} (x \ y) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y + x^2 \quad \square$$

LECCIÓN 2.3

Optimización de campos escalares

Una de las aplicaciones del concepto de diferenciabilidad es resolver problemas de *optimización*, es decir, encontrar los valores máximos y mínimos de una magnitud definida a partir de uno o varios parámetros. Estos problemas se resuelven fácilmente si la magnitud solo depende de un parámetro, utilizando las derivadas de orden superior de la función de una variable determinada por el problema. El objetivo de esta lección es generalizar esta técnica a campos escalares, es decir, optimizar magnitudes escalares que dependen de varios parámetros.

Empezamos introducción algunos conceptos y resultados básicos.

DEFINICIÓN 2.3.1 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que está acotado si existe $r > 0$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r$ para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$.*

Es decir, un conjunto está acotado si la distancia entre cualquier par de puntos es siempre menor que una cota fija.

DEFINICIÓN 2.3.2 *Un conjunto $D \subset \mathbb{R}^n$ se dice que es cerrado si para todo $\mathbf{x} \notin D$ existe $r > 0$ tal que: si $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < r$, entonces $\mathbf{y} \notin D$.*

Es decir, un conjunto es cerrado si cualquier punto que no pertenezca a él está “separado” del conjunto, es decir, la distancia a cualquier punto del conjunto es estrictamente positiva.

Sabemos que una función de una variable, continua en un dominio cerrado y acotado siempre alcanza un valor máximo y un valor mínimo en tal dominio. Esta propiedad también se verifica para campos escalares.

TEOREMA 2.3.3 *Sea f un campo escalar continuo en un conjunto D cerrado y acotado. Entonces existen $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in D$ tales que $f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_1)$ para todo $\mathbf{x} \in D$.*

Es decir, $f(\mathbf{x}_0)$ es el valor mínimo que toma el campo en el conjunto D y $f(\mathbf{x}_1)$ es el valor máximo. En tal caso, decimos que \mathbf{x}_0 es un punto mínimo y \mathbf{x}_1 es un punto máximo.

2.3.1. Extremos locales

Igual que en el caso real, para determinar los máximos y mínimos de un campo debemos empezar por determinar los máximos y mínimos locales o relativos, es decir, los máximos y mínimos respecto de los puntos cercanos a él.

DEFINICIÓN 2.3.4

1. $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un máximo local (o relativo) en $\mathbf{a} \in D$ si existe $r > 0$, tal que $f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$.

2. $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tiene un mínimo local (o relativo) en $\mathbf{a} \in D$ si existe $r > 0$, tal que $f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in D$ tal que $\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r$.

Utilizaremos la denominación genérica de *extremo* local para referirnos a un punto que sea máximo local o mínimo local. El siguiente teorema justifica la definición de puntos críticos, entre los cuales encontramos los extremos locales de un campo.

TEOREMA 2.3.5 Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar diferenciable y $\mathbf{a} \in D$ es un extremo local de f , entonces $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0} = (0, \dots, 0)$; es decir, todas las derivadas parciales de f en \mathbf{a} son nulas.

Gráficamente, para funciones de una variable sabemos que la recta tangente al grafo de la función en un extremo son paralelas al eje OX . Si $n = 2$ también obtenemos una propiedad parecida, ya que si $\nabla f(a_1, a_2) = (0, 0)$, entonces el plano tangente al grafo en el punto (a_1, a_2) es perpendicular al vector $(0, 0, -1)$, es decir, es paralelo al plano XY .

EJEMPLO 2.3.6

1. Para el campo $f(x, y) = x^2 + y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Es fácil razonar que este punto es mínimo del campo:

$$x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$$

2. Para el campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ se verifica que $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ y por lo tanto, su único punto crítico es $(x_0, y_0) = (0, 0)$. En este caso, el punto no es un extremo ya que $f(0, 0) = 0$, $f(x, 0) = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$, $f(0, y) = -y^2 < 0$ para todo $y \neq 0$. \square

En el ejemplo anterior, observamos que el recíproco del teorema 2.3.5 no es cierto, es decir, que el gradiente sea nulo no asegura que ese punto sea un extremo. Los puntos en los cuales el vector gradiente es nulo se denominan *puntos críticos* y los puntos críticos que no son extremos locales se denominan *puntos silla*.

Por lo tanto, para determinar los extremos locales de un campo escalar diferenciable, debemos localizar los puntos críticos y estudiar cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Esta clasificación puede hacerse comparando directamente el valor del campo en esos puntos con el valor en los puntos “ceranos” a él, como hemos hecho en el ejemplo anterior, aunque en muchos casos será preferible utilizar los métodos que vemos a continuación.

Criterio de la hessiana. La forma más sencilla de hacer la clasificación de los puntos críticos es utilizando, si es posible, el polinomio de Taylor. Recordemos que el teorema de Taylor dice que, en un entorno suficientemente pequeño de \mathbf{a}

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^t \nabla^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})$$

Si, además, \mathbf{a} es un punto crítico, entonces

$$f(\mathbf{x}) \approx f(\mathbf{a}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^t \nabla^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

y en consecuencia, la comparación de $f(\mathbf{a})$ y $f(\mathbf{x})$ se reduce a analizar el signo de

$$\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{a})^t \nabla^2 f(\mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

De esta forma, obtenemos el criterio análogo al criterio de la derivada segunda para funciones de una variable.

TEOREMA 2.3.7 Sea $\mathbf{a} \in D$ un punto crítico del campo $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de clase \mathcal{C}^2 y consideremos la segunda diferencial de f en \mathbf{a} : $d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}^t \nabla^2 f(\mathbf{a}) \mathbf{u}$.

1. Si $d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) > 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ (es decir, $d^2 f_{\mathbf{a}}$ es definida positiva), entonces \mathbf{a} es un mínimo local de f .
2. Si $d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) < 0$ para todo $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ (es decir, $d^2 f_{\mathbf{a}}$ es definida negativa), entonces \mathbf{a} es un máximo local de f .
3. Si $d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}_1) > 0$ y $d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}_2) < 0$ para algún $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$ (es decir, $d^2 f_{\mathbf{a}}$ es indefinida), entonces \mathbf{a} es un punto silla de f .

En cualquier otro caso, no considerado en el teorema, **no podemos deducir nada**; es decir, si la forma cuadrática es 0 en algunos vectores y positiva en el resto (semidefinida positiva), o bien si es 0 en algunos vectores y negativa en el resto (semidefinida negativa).

Para analizar el signo de la forma cuadrática, es suficiente con dar una expresión para la misma en terminos de sumas y diferencias de cuadrados, lo cual conseguiremos utilizando la técnica de completación de cuadrados que hemos aprendido en los temas anteriores.

EJEMPLO 2.3.8 Vamos a hallar y clasificar los puntos críticos del campo

$$f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$$

Empezamos calculado el gradiente del campo:

$$\nabla f(x, y) = (4x - y - 3, -x - 6y + 7)$$

El punto crítico es la solución del sistema

$$\begin{aligned} 4x - y - 3 &= 0 \\ -x - 6y + 7 &= 0, \end{aligned}$$

es decir, $(x_0, y_0) = (1, 1)$. La matriz hessiana del campo es:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$$

Y la segunda diferencial es:

$$\begin{aligned} d^2 f_{(1,1)}(u_1, u_2) &= (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \\ &= 4u_1^2 - 2u_1u_2 - 6u_2^2 = (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{1}{4}u_2^2 - 6u_2^2 = \\ &= (2u_1 - \frac{1}{2}u_2)^2 - \frac{25}{4}u_2^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $d^2 f_{(1,1)}(u_1, 0) = 4u_1^2 > 0$ y $d^2 f_{(1,1)}(u_1, u_2) = -\frac{25}{4}u_2^2 < 0$, si $2u_1 = \frac{1}{2}u_2$. En consecuencia, el punto $(1, 1)$ es un punto silla. \square

Utilizando el método de compleción de cuadrados como en el ejemplo anterior, siempre es posible expresar la forma cuadrática como:

$$d^2 f_a(\mathbf{u}) = a_1 \lambda_1(\mathbf{u})^2 + \cdots + a_m \lambda_m(\mathbf{u})^2,$$

en donde $m \leq n$, $a_i \neq 0$ para cada i , y $\lambda_1(\mathbf{u}) = 0, \dots, \lambda_m(\mathbf{u}) = 0$ es un sistema de m ecuaciones linealmente independientes. A partir de ahí, deducimos que:

1. Si $m = n$ y $a_i > 0$ para cada i , la forma cuadrática es definida positiva y estará asociada a un mínimo local.
2. Si $m = n$ y $a_i < 0$ para cada i , la forma cuadrática es definida negativa y estará asociada a un máximo local.
3. Si algún coeficiente es positivo y otro es negativo, la forma cuadrática es indefinida y estará asociada a un punto silla.

Cualquier otro caso no nos da información. Es decir, si $m < n$ y todos los coeficientes son o bien positivos o bien negativos, entonces la forma cuadrática se anula sobre las direcciones dadas por la solución del sistema $\lambda_1(\mathbf{u}) = 0, \dots, \lambda_m(\mathbf{u}) = 0$, y en consecuencia no podemos decidir nada sobre el punto al que está asociada.

EJEMPLO 2.3.9 Vamos a analizar el signo de la siguiente forma cuadrática en \mathbb{R}^3 utilizando el método de compleción de cuadrados para transformar su expresión:

$$q(x, y, z) = 4x^2 + 4z^2 + 8xy + 12xz + 16yz$$

Elegimos una variable que aparezca elevada al cuadrado y ajustamos los sumandos en los que aparece esta variable para que formen parte del cuadrado de un trinomio. En este caso, vamos a elegir la variable x ; dado que

$$4x^2 = (2x)^2, \quad 8xy = 2 \cdot (2x) \cdot (2y), \quad 12xz = 2 \cdot (2x) \cdot (3z),$$

los tres sumandos en los que aparece x son los tres sumandos de la expansión de $(2x + 2y + 3z)^2$ que contienen la variable x :

$$\begin{aligned} &\underline{4x^2} + 4z^2 + \underline{8xy} + \underline{12xz} + 16yz \\ &= \underline{(2x + 2y + 3z)^2} - 4y^2 - 9z^2 - 12yz + 4z^2 + 16yz \\ &= (2x + 2y + 3z)^2 - 4y^2 - 5z^2 + 4yz = \end{aligned}$$

De esta forma, conseguimos que la variable x aparezca solo dentro del primer paréntesis. A continuación, hacemos lo mismo utilizando la variable y :

$$\begin{aligned} &= (2x + 2y + 3z)^2 - (\underline{4y^2} + 5z^2 - \underline{4yz}) = \\ &= (2x + 2y + 3z)^2 - ((2y - z)^2 - z^2 + 5z^2) = \\ &= (2x + 2y + 3z)^2 - (2y - z)^2 - 4z^2 \end{aligned}$$

La expresión resultante es una combinación lineal de cuadrados y permite decidir que la forma cuadrática es indefinida, ya que contiene coeficientes positivos y coeficientes negativos. \square

EJEMPLO 2.3.10 Vamos a analizar el signo de la siguiente forma cuadrática en \mathbb{R}^3 :

$$q(x, y, z) = xy + xz + yz$$

En este caso, dado que ninguna variable aparece elevada al cuadrado, empezamos haciendo un cambio de variable: $y = x + u$. Utilizamos el método del ejemplo anterior para las variables x, z, u y terminaremos deshaciendo el cambio.

$$\begin{aligned} xy + xz + yz &= x(x + u) + xz + (x + u)z = x^2 + xu + xz + xz + zu = \\ &= x^2 + xu + 2xz + zu = (x + z + \frac{u}{2})^2 - z^2 - \frac{u^2}{4} - zu + zu = \\ &= (x + z + \frac{u}{2})^2 - z^2 - \frac{u^2}{4} = (x + z + \frac{y}{2} - \frac{x}{2})^2 - z^2 - \frac{1}{4}(y - x)^2 = \\ &= (\frac{x}{2} + z + \frac{y}{2})^2 - z^2 - \frac{1}{4}(y - x)^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la forma cuadrática es indefinida. \square

Otra herramienta que nos ayuda a la clasificación de los puntos críticos, son las funciones

$$f(\mathbf{a} + t\mathbf{v})$$

que introducimos para definir las derivadas direccionales, ya que nos dan información de lo que ocurre alrededor del punto, aunque de forma separada en cada dirección.

EJEMPLO 2.3.11 Vamos a clasificar los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3$.

$$D_1f(x, y) = 3x^2 \quad D_2f(x, y) = 3y^2$$

Por tanto, el único punto crítico es $(0, 0)$.

$$D_{11}f(x, y) = 6x \quad D_{21}f(x, y) = 0 \quad D_{22}f(x, y) = 6y$$

Por tanto, la matriz hessiana de f en $(0, 0)$ es $\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la forma cuadrática asociada es nula, por lo que no obtenemos información sobre la condición del punto crítico.

Para deducir que el punto $(0,0)$ es de hecho un punto silla, consideremos la función:

$$g(t) = f(0, t) = t^3$$

La tercera derivada de g en $t = 0$ es 6, y por lo tanto, g tiene un punto de inflexión en 0, es decir, $(0,0)$ no es ni máximo ni mínimo sobre la recta $x = 0$ y por lo tanto tampoco puede serlo sobre todo el dominio. \square

En el ejemplo anterior, hemos tenido que recurrir a un orden derivación mayor que 2 de la función $f(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v})$ para clasificar el punto crítico $t = 0$. Esto ocurrirá en aquellas direcciones en las que la forma cuadrática asociada al punto crítico se anula, ya que, en general, la regla de la cadena permite deducir la siguiente igualdad:

$$\frac{d^2}{dt^2} f(\mathbf{a} + t\mathbf{u}) = d^2 f_{\mathbf{a}}(\mathbf{u});$$

Por esta razón, puede ser conveniente seguir estudiando el punto crítico con la ayuda de las funciones $f(\mathbf{a} + t \cdot \mathbf{v})$, en las direcciones \mathbf{v} en las que se anula la diferencial segunda.

EJEMPLO 2.3.12 Vamos a calcular y clasificar los puntos críticos del campo

$$f(x, y) = y^2 + 4y + 2x^4 + 4x^2 + 8xy + 3.$$

Hallamos el gradiente de f y planteamos el sistema:

$$\nabla f(x, y) = (8x^3 + 8x + 8y, 2y + 4 + 8x)$$

$$\left. \begin{array}{l} 8x^3 + 8x + 8y = 0 \\ 2y + 4 + 8x = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x^3 + x + y = 0 \\ y + 2 + 4x = 0 \end{array} \right\}$$

De la segunda ecuación deducimos que $y = -4x - 2$; utilizamos esta igualdad para reducir la variable y en la primera ecuación y obtenemos:

$$0 = x^3 + x - 4x - 2 = x^3 - 3x - 2$$

Comprobamos si alguno de los divisores de -2 es solución de esta ecuación y vemos que $x = 2$ es efectivamente una de ellas. Dividiendo el polinomio entre $x - 2$ determinamos fácilmente la otra solución:

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

$$0 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \Rightarrow x = -1$$

Utilizando la segunda ecuación del sistema inicial, deducimos fácilmente los correspondientes valores de y , y obtenemos que los puntos críticos de f son $(2, -10)$ y $(-1, 2)$.

Para clasificar los puntos críticos, determinamos la matriz hessiana, las diferenciales de segundo orden en cada punto y transformamos las correspondiente expresiones para intentar clasificar los puntos:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 24x^2 + 8 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 f(2, -10) &= \begin{pmatrix} 104 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(2, -10)}(u_1, u_2) &= 104u_1^2 + 16u_1u_2 + 2u_2^2 = 2(u_2 + 4u_1)^2 + 72u_1^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, podemos deducir que $(2, -10)$ es un mínimo local. Sin embargo, en el punto $(-1, 2)$ encontramos una dirección sobre la cual se anula la diferencial segunda.

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(-1, 2) &= \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} \\ d^2 f_{(-1, 2)}(u_1, u_2) &= 32u_1^2 + 16u_1u_2 + 2u_2^2 = 2(u_2 + 4u_1)^2\end{aligned}$$

Por lo tanto, en la dirección $u_2 + 4u_1 = 0$, la diferencial segunda se anula, así que vamos a estudiar directamente el campo f sobre esta dirección, es decir, en la dirección del vector $(1, -4)$:

$$\begin{aligned}g(t) &= f((-1, 2) + t(1, -4)) = f(-1 + t, 2 - 4t) = \\ &= (2 - 4t)^2 + 4(2 - 4t) + 2(-1 + t)^4 + 4(-1 + t)^2 + 8(-1 + t)(2 - 4t) + 3 \\ g'(t) &= -8(2 - 4t) - 16 + 8(-1 + t)^3 + 8(-1 + t) + 8(2 - 4t) - 32(-1 + t) \\ g''(t) &= 32 + 24(-1 + t)^2 + 8 - 32 - 32 \\ g'''(t) &= 48(-1 + t) \\ g'''(0) &= -48 \neq 0\end{aligned}$$

Por lo tanto, 0 es un punto de inflexión de g y, en consecuencia, $(-1, 2)$ no es un extremo local de f . No hemos comprobado que $g'(0) = g''(0) = 0$, ya que lo podemos deducir del estudio del gradiente y de la hessiana en $(-1, 2)$; sin embargo, es conveniente hacer esta comprobación para verificar que no nos hemos confundido en algún cálculo intermedio. \square

En cualquier caso, debemos insistir en que el estudio del campo escalar sobre las rectas que pasan por el punto crítico, como hemos hecho en el ejemplo anterior, solo sirve para demostrar que un punto es punto de silla, pero no para demostrar que es extremo, tal y como muestra el siguiente ejemplo.

EJEMPLO 2.3.13 Vamos a intentar clasificar el punto crítico del campo

$$f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$$

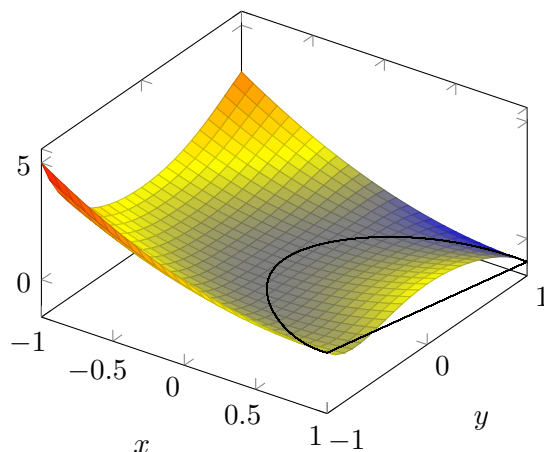


Figura 2.10: El campo del ejemplo 2.3.13 tiene un punto silla en $(0, 0)$.

Hallamos el gradiente de f y planteamos el sistema:

$$\nabla f(x, y) = (2x - 2y^2, -4xy + 4y^3 - 5y^4)$$

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 2y^2 = 0 \\ -4xy + 4y^3 - 5y^4 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = y^2 \\ -4y^3 + 4y^3 - 5y^4 = 0 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x = y^2 \\ -5y^4 = 0 \end{array} \right\}$$

La única solución de la segunda ecuación es $y = 0$ y por lo tanto $(0, 0)$ es el único punto crítico. Para clasificarlo, determinamos la matriz hessiana y la diferencial de segundo orden:

$$\nabla^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & -4y \\ -4y & -4x + 12y^2 - 20y^3 \end{pmatrix}$$

$$\nabla^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$d^2 f_{(0,0)}(u_1, u_2) = 2u_1^2$$

Por lo tanto, no podemos deducir que $(0, 0)$ sea un mínimo, ya que $d^2 f_{(0,0)}(0, 1) = 0$.

Si consideramos la función $g(t) = f((0, 0) + t(0, 1)) = f(0, t) = t^4 - t^5$, entonces $g^{(4)}(t) = 24 - 120t$ y $g^{(4)}(0) = 24 > 0$; es decir, 0 es un mínimo de $g(t)$. Por lo tanto, el estudio de la matriz hessiana y el estudio de la función g nos dice que el $(0, 0)$ es un mínimo local de f restringida a cada recta que pasa por ese punto. Sin embargo, eso no garantiza que el punto sea mínimo local de f . Por ejemplo, consideremos la curva $\gamma(t) = (t^2, t)$; esta curva pasa por el punto $(0, 0)$, ya que $\gamma(0) = (0, 0)$ en la dirección $(0, 1)$, ya que $\gamma'(t) = (2t, 1)$ y $\gamma'(0) = (0, 1)$. Si analizamos la función f restringida a esta curva

$$f(\gamma(t)) = f(t^2, t) = t^4 - 2t^2 t^2 + t^4 - t^5 = -t^5$$

deducimos $f(\gamma(t)) < 0$ si $t > 0$ y $f(\gamma(t)) > 0$ si $t < 0$, por lo que la $(0, 0)$ no es extremo local de f . En la figura 2.10 aparece la representación del campo y la curva

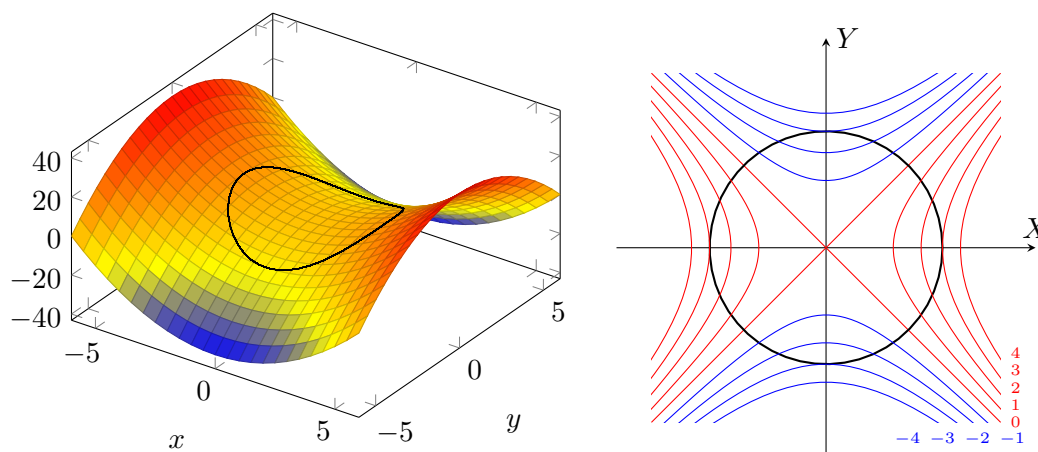


Figura 2.11: Representaciones de $f(x, y) = x^2 - y^2$ sobre $x^2 + y^2 = 9$.

sobre la que la función toma valores negativos. □

2.3.2. Extremos condicionados. Multiplicadores de Lagrange

En la sección anterior hemos afrontado el problema de hallar los extremos locales de un campo escalar, es decir, los extremos sobre *subconjuntos abiertos* dentro del dominio del campo. Sin embargo, en muchas ocasiones nos interesará estudiar los extremos sobre conjuntos cuyo interior es vacío; por ejemplo, estudiar los extremos de un campo sobre \mathbb{R}^2 restringiéndonos a una circunferencia. Esta es la situación que abordamos en esta sección; concretamente, nos planteamos el siguiente problema: encontrar los extremos del campo $f(x_1, \dots, x_n)$ sobre un conjunto S definido a partir de k campos escalares $g_i(x_1, \dots, x_n)$, $1 \leq k < n$:

$$S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, 1 \leq i \leq k\}$$

Más brevemente, enunciamos el problema diciendo: *encontrar los extremos del campo escalar f con las condiciones o restricciones $g_i(x_1, \dots, x_n) = 0$, para cada i tal que $1 \leq i \leq k < n$.*

En el ejemplo 2.3.6 de la página 122 hemos visto que el campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ no tiene extremos locales, es decir, el campo no alcanza ni máximo ni mínimo sobre ningún conjunto abierto. Sin embargo, en la figura 2.11, podemos apreciar que si restringimos el campo a la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, entonces sí aparecen varios extremos.

En el lado derecho de la misma figura 2.11, vemos la representación del mismo campo, pero mediante las curvas de nivel para $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$ y 4 ; también representamos la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ sobre la que queremos optimizar el campo. Si nos fijamos por ejemplo en el punto $(3, 0)$ de la circunferencia, observamos que la circunferencia y la curva de nivel que pasa por este punto son tangentes. Si

analizamos los valores del campo según nos desplazamos sobre la circunferencia desde algún punto por debajo de $(3, 0)$ hasta algún punto por encima de él, observamos que hasta llegar al $(3, 0)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores crecientes del campo, y a partir de $(3, 0)$ cortamos curvas de nivel correspondientes a valores decrecientes del campo. Por lo tanto, podemos afirmar que $(3, 0)$ es un máximo (local) de f sobre la circunferencia.

Este ejemplo, que más adelante completaremos analíticamente, motiva el siguiente resultado que afirma que los candidatos a extremos están entre los puntos tales que el conjunto de la restricción y la curva o superficie de nivel son tangentes.

TEOREMA 2.3.14 Sean $f, g_1, \dots, g_k: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ campos escalares diferenciables y con derivadas parciales continuas. Sea S el subconjunto de \mathbb{R}^n formado por los puntos que verifican las condiciones

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0 \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k$$

Si \mathbf{x}_0 es un extremo local de f restringida a S , y $\{\nabla g_i(\mathbf{x}_0) \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes, entonces existen números reales μ_i tales que

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mu_1 \nabla g_1(\mathbf{x}_0) + \dots + \mu_k \nabla g_k(\mathbf{x}_0)$$

A las constantes μ_1, \dots, μ_k se las denomina multiplicadores de Lagrange asociados a \mathbf{x}_0 .

La condición “ $\{\nabla g_i(\mathbf{x}_0) \mid 1 \leq i \leq k\}$ es un sistema de vectores no nulos linealmente independientes”, exigida en el teorema, se reduce en la práctica a observar que el problema está bien planteado, es decir, que no hay condiciones superfluas, y que están dadas *de la mejor forma posible*. Los ejemplos y ejercicios que planteemos a lo largo del tema estarán formulados de esta forma y, por lo tanto, no será necesario verificar esta condición.

Este teorema nos da el primer paso a seguir para la determinación de los extremos condicionados:

- Los extremos locales del campo f con las restricciones $g_1 = 0, \dots, g_k = 0$, se encuentran entre los puntos (x_1, \dots, x_n) cuyas coordenadas son solución del sistema:

$$g_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

...

$$g_k(x_1, \dots, x_n) = 0$$

$$D_1 f(\mathbf{x}) = \mu_1 D_1 g_1(\mathbf{x}) + \dots + \mu_k D_1 g_k(\mathbf{x})$$

...

$$D_n f(\mathbf{x}) = \mu_1 D_n g_1(\mathbf{x}) + \dots + \mu_k D_n g_k(\mathbf{x})$$

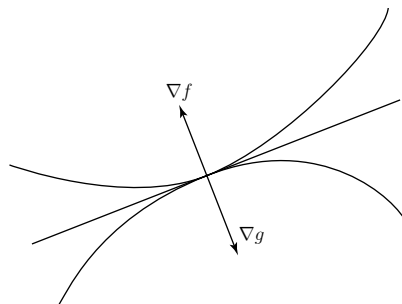


Figura 2.12: Relación entre gradientes en el método de los multiplicadores de Lagrange.

Si $x_1, \dots, x_n, \mu_1, \dots, \mu_k$ es una solución del sistema, (x_1, \dots, x_n) se denomina *punto crítico* de f con las restricciones g_1, \dots, g_k y μ_1, \dots, μ_k son sus multiplicadores de Lagrange asociados.

En particular, si $n = 2$ y $k = 1$, tanto las curvas de nivel como la restricción son curvas. Además una curva de nivel es tangente a la restricción en \mathbf{x}_0 si los vectores normales en \mathbf{x}_0 son iguales o proporcionales, tal y como vemos en la figura 2.12, es decir:

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mu \cdot \nabla g(\mathbf{x}_0)$$

EJEMPLO 2.3.15 Vamos a encontrar los puntos críticos del problema de extremos condicionados de la figura 2.11:

$$f(x, y) = x^2 - y^2 \quad g(x, y) = x^2 + y^2 - 9 = 0$$

El sistema de ecuaciones que tenemos que resolver es:

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + y^2 - 9 \\ 2x &= 2x\mu \\ -2y &= 2y\mu \end{aligned}$$

De la segunda ecuación obtenemos que o bien $x = 0$ o bien $\mu = 1$. En el primer caso obtenemos, por la primera ecuación, las posibilidades $y = 3$ o $y = -3$, y por la tercera, $\mu = -1$. Del caso $\mu = 1$, obtenemos de la tercera ecuación que $y = 0$, y por la primera llegamos a las posibilidades $x = 3$ o $x = -3$. De esta forma, los puntos críticos y sus correspondientes multiplicadores son:

$$\begin{aligned} (3, 0) &\rightarrow \mu = 1 \\ (-3, 0) &\rightarrow \mu = 1 \\ (0, -3) &\rightarrow \mu = -1 \\ (0, 3) &\rightarrow \mu = -1 \end{aligned}$$

En la figura 2.13 aparecen representadas las dos curvas de nivel tangentes a la res-

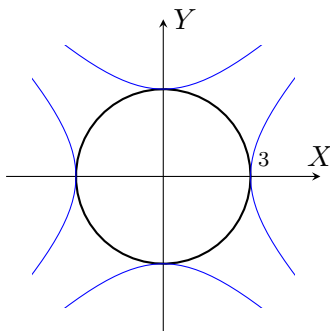


Figura 2.13: Puntos críticos del ejemplo 2.3.15.

tricción, $x^2 - y^2 = 9$, $x^2 - y^2 = -9$, aunque cada una de ellas tiene dos ramas.

□

Igual que para los extremos no condicionados, después de calcular los puntos críticos, el problema será decidir cuáles son máximos, cuáles mínimos y cuáles no son extremos. Para ello, recurrimos igualmente a la segunda derivada, es decir, a la matriz hessiana tal y como recoge el siguiente resultado. Este establece que, para determinar la naturaleza de un punto crítico \mathbf{a} , tenemos que estudiar el signo de la forma cuadrática $d^2F_{\mathbf{a}}$ restringiéndonos al subespacio T .

TEOREMA 2.3.16 *Sea \mathbf{a} un punto crítico de f sujeto a las restricciones $g_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, y sean $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ sus multiplicadores de Lagrange. Consideremos el campo $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definido por*

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - \alpha_1 g_1(\mathbf{x}) - \dots - \alpha_k g_k(\mathbf{x})$$

y sea T el espacio vectorial tangente a S en \mathbf{a} (la dimensión del subespacio T es $n - k$).

1. *Si $d^2F_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) > 0$ para todo $\mathbf{u} \in T$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{a} es punto mínimo local.*
2. *Si $d^2F_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}) < 0$ para todo $\mathbf{u} \in T$, $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{a} es punto máximo local.*
3. *Si $d^2F_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}_1) > 0$ para algún $\mathbf{u}_1 \in T$, $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$, y $d^2F_{\mathbf{a}}(\mathbf{u}_2) < 0$ para algún $\mathbf{u}_2 \in T$, $\mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0}$, entonces \mathbf{a} no es extremo.*

En cualquier otro caso, no considerado en el teorema anterior, no podemos deducir nada.

Vemos a continuación cómo queda este resultado si lo aplicamos a campos escalares de dos variables y una restricción.

COROLARIO 2.3.17 *Sea (a_1, a_2) un punto crítico de $f(x, y)$ sobre $g(x, y) = 0$, y α su multiplicador de Lagrange; consideremos el campo*

$$F(x, y) = f(x, y) - \alpha g(x, y)$$

y sea (u_1, u_2) un vector perpendicular a $\nabla g(a_1, a_2)$

1. Si $d^2F_{(a_1, a_2)}(u_1, u_2) > 0$, entonces (a_1, a_2) es punto mínimo local.
2. Si $d^2F_{(a_1, a_2)}(u_1, u_2) < 0$, entonces (a_1, a_2) es punto máximo local.

Como en el teorema general, si $d^2F_{(a_1, a_2)}(\mathbf{u}) = 0$, **no podemos deducir nada**.

EJEMPLO 2.3.18 Continuando con el ejemplo 2.3.15, vamos a clasificar los puntos críticos $(3, 0)$ y $(0, 3)$ (los otros dos se clasifican de forma similar).

Para estudiar el punto $(3, 0)$ con multiplicador 1, utilizamos el campo

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 - y^2 - (x^2 + y^2 - 9) = -2y^2 + 9 \\ \nabla F(x, y) &= (0, -4y) \\ \nabla^2 F(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 F(3, 0) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dado que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, tenemos que $\nabla g(3, 0) = (6, 0)$ y un vector perpendicular a él es $\mathbf{u} = (0, 1)$.

$$d^2F_{(3,0)}(0, 1) = (0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

En consecuencia, $(3, 0)$ es un máximo local.

Para estudiar el punto $(0, 3)$, con multiplicador -1 , utilizamos el campo

$$\begin{aligned} F(x, y) &= x^2 - y^2 + (x^2 + y^2 - 9) = 2x^2 - 9 \\ \nabla F(x, y) &= (4x, 0) \\ \nabla^2 F(x, y) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \nabla^2 F(0, 3) &= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dado que $\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$, tenemos que $\nabla g(0, 3) = (0, 6)$ y un vector perpendicular a él es $\mathbf{u} = (1, 0)$.

$$d^2F_{(0,3)}(1, 0) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

En consecuencia, $(0, 3)$ es un mínimo local. □

Realmente, el método de los multiplicadores de Lagrange solo es estrictamente necesario si no es posible reducir unas variables a otras a partir de las restricciones que determinan el enunciado. Incluso aunque tal reducción sea posible, el proceso resultante puede ser más complejo; por ejemplo, en la restricción $x^2 + y^2 = 1$ necesitaríamos cuatro igualdades para hacer esta reducción,

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2}, \quad x = \sqrt{1 - y^2}, \quad x = -\sqrt{1 - y^2},$$

y analizar posteriormente todos los puntos obtenidos. Sin embargo, cuando esta reducción sea asequible y el resultado sea sencillo, será el método más adecuado.

EJEMPLO 2.3.19 Vamos a calcular los extremos de $f(x, y, z) = x^2 + 6y - z^2$, sujeto a las restricciones $2x - y = 0$, $y + z = 0$, podemos reducir las variables y y z ,

$$\begin{aligned} y &= 2x \\ z &= -y = -2x \end{aligned}$$

de forma que el problema es equivalente a obtener los extremos de la función de una variable

$$g(x) = f(x, 2x, -2x) = x^2 + 6 \cdot 2x - (-2x)^2 = -3x^2 + 12x$$

Para esta función podemos aplicar las técnicas de optimización de funciones de una variable:

$$\begin{aligned} g(x) &= -3x^2 + 12x \\ g'(x) &= -6x + 12 \\ g'(x) &= 0 \Leftrightarrow x = 2 \\ g''(x) &= -6 \\ g''(2) &= -6 < 0 \Rightarrow x = 2 \text{ es máximo de } g \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(2, 2 \cdot 2, -2 \cdot 2) = (2, 4, -4)$ es un máximo local del campo f . □

2.3.3. Extremos absolutos

Para concluir la lección, vamos a analizar como tendríamos que resolver un problema en el que necesitemos obtener los extremos absolutos de un campo sobre un conjunto cerrado y acotado C .

En primer lugar, dividimos C en dos conjuntos, $C = U \cup B$, en donde U es el interior de C y B su frontera. Los candidatos a ser extremos absolutos de f sobre C son:

1. Los puntos críticos de f en U .
2. Los puntos críticos de f sobre B , que pueden ser obtenidos por el método de los multiplicadores de Lagrange, reduciendo variables, considerando distintas secciones en la frontera,...

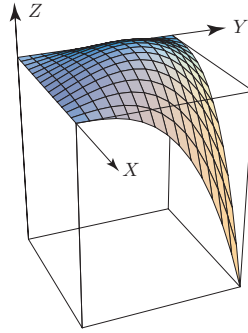


Figura 2.14: Representación del ejemplo 2.3.20.

3. Si hemos dividido la frontera en varias secciones, también deberemos considerar como candidatos los puntos en donde se unen estas secciones.

Para determinar los máximos y mínimos absolutos, basta con evaluar f sobre todos los puntos anteriores y determinar cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo.

EJEMPLO 2.3.20 Vamos a determinar los extremos absolutos del campo

$$f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$$

en el cuadrado $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (ver figura 2.14).

$$\begin{aligned} D_1 f(x, y, z) = y - 3x^2y - y^3 = 0, & \quad D_2 f(x, y, z) = x - 3y^2x - x^3 = 0 \\ y(1 - 3x^2 - y^2) = 0, & \quad x(1 - 3y^2 - x^2) = 0 \end{aligned}$$

Dado que buscamos puntos críticos en el interior del cuadrado, entonces $x \neq 0$, $y \neq 0$. A partir de las ecuaciones $1 - 3x^2 - y^2 = 0$ y $1 - 3y^2 - x^2 = 0$, es fácil deducir que $x = 1/2$ e $y = 1/2$.

Ahora hallamos los puntos críticos en los bordes del cuadrado usando la reducción de variables:

- Si $x = 0$, $g_1(y) = f(0, y) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $y = 0$, $g_2(x) = f(x, 0) = 0$, y debemos de considerar todos los puntos.
- Si $x = 1$, $g_3(y) = f(1, y) = -y^3$; el único punto crítico es $y = 0$ que queda en el extremo del intervalo.
- Si $y = 1$, $g_4(x) = f(x, 1) = -x^3$; el único punto crítico es $x = 0$ que queda en el extremo del intervalo.

Ahora solo tenemos que evaluar el campo en todos los puntos obtenidos y en los cuatro vértices del cuadrado para decidir cuál es el máximo y cuál el mínimo.

$$f(1/2, 1/2) = 1/8$$

$$f(x, 0) = 0$$

$$f(0, y) = 0$$

$$f(1, 1) = -1$$

Por lo tanto, $(1/2, 1/2)$ es máximo absoluto y $(1, 1)$ es mínimo absoluto. \square

2.3.4. Cálculo de distancias

Una aplicación de los métodos de optimización es el cálculo de distancias entre lugares geométricos. Si A y B son dos subconjuntos de \mathbb{R}^2 , la distancia entre A y B es la menor de las distancias entre puntos de A y puntos de B . Por esta razón, el cálculo de estas distancias suponen la resolución de un problema de optimización en donde la función a optimizar es la distancia entre dos puntos.

Recordemos que la distancia ente dos puntos (a, b) y (c, d) es

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} \quad (2.12)$$

por lo que esta será la expresión que tendremos que optimizar en los problemas sobre distancias. Sin embargo, teniendo en cuenta que la función raíz cuadrada es creciente, la expresión 2.12 será máxima (respectivamente, mínima) si y solo la siguiente expresión lo es:

$$(a - c)^2 + (b - d)^2$$

También podemos usar otras fórmulas ya conocidas para abordar problemas particulares. Por ejemplo, si uno de los conjuntos es una recta, podemos usar la siguiente fórmula que determina la distancia entre un punto (a, b) y una recta $Ax + By + C = 0$:

$$\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

También podemos simplificar esta expresión si la usamos en problemas de optimización: para optimizar la distancia de una recta $Ax + By + C = 0$, a un lugar geométrico D , consideramos la función

$$f(x, y) = (Ax + By + C)^2, \quad (x, y) \in D$$

Relación de ejercicios 2.1

1. Represente gráficamente las funciones:

$$a) f(x) = x^3 + 2x^2 \quad b) g(x) = \frac{3x^2}{1+x^3} \quad c) h(x) = \frac{x^3}{(2x-1)(2x+1)}$$

2. Consideramos los puntos $P = (-2, -1)$ y $Q = (3, 0)$:

- Defina una parametrización del segmento que va de P a Q usando el intervalo $[0, 1]$ como recorrido del parámetro.
- Defina una parametrización del segmento que va de P a Q usando el intervalo $[-1, 1]$ como recorrido del parámetro.
- Defina una parametrización del segmento que va de Q a P .

3. Consideramos la curva C definida por la siguiente parametrización:

$$x(t) = t^2 - t \quad y(t) = t^3 - 3t \quad t \in \mathbb{R}.$$

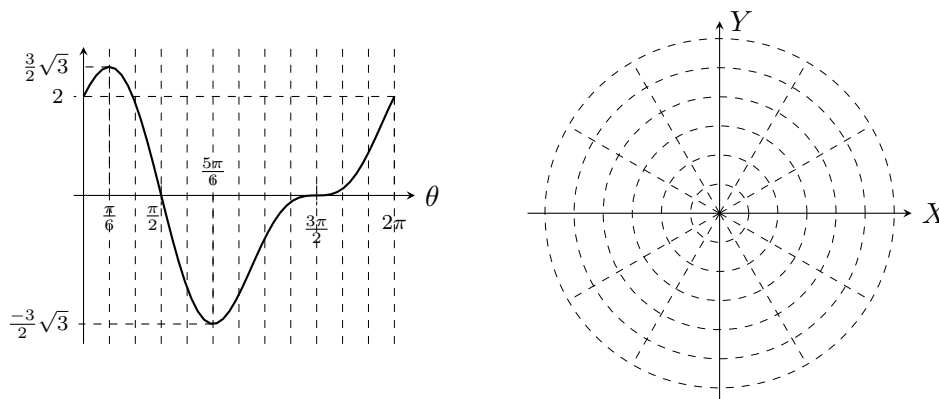
- Dibuje la curva C .
- Determine las rectas tangente y normal a C en el punto $(2, 2)$, describiéndolas con sus ecuaciones paramétricas y cartesianas.
- Determine todos los puntos de tangencia horizontal y vertical de C .

4. Dibuje la curva

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \quad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

Determine los puntos de tangencia horizontal y vertical y compruebe que $y = -x - 1$ es una asíntota de la curva.

5. La gráfica de la función $f(\theta) = 2 \cos \theta + \sin 2\theta$ es la que se muestra abajo. A partir de esa gráfica, dibuje la curva polar $r = f(\theta)$.



- Dibuje la curva polar $r = 2 + \sin(4\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Halle la ecuación de la recta tangente a esta curva para $\theta = \frac{\pi}{2}$.
- Dibuje la curva polar $r = 2 - \sec \theta$, $\theta \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ y compruebe que $x = -1$ es una asíntota de la curva.

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

Relación de ejercicios 2.2

1. Identifique los siguientes lugares geométricos:

$$a) \ x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \qquad b) \ x^2 + y^2 - 6x + 10 = 0$$

$$c) \ x^2 + y^2 - 6x + 9 = 0 \qquad d) \ x^2 - 4x - 4y^2 = 0$$

$$e) \ x^2 + 2x + 4y^2 - 3 = 0 \qquad f) \ y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$$

2. Las funciones *seno hiperbólico* $\sinh(x)$, y *coseno hiperbólico* $\cosh(x)$, se definen como:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

- a) Demuestre que $\frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$, y $\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x)$
b) Demuestre la igualdad: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
c) Represente gráficamente las funciones $\sinh(x)$ y $\cosh(x)$.

3. Determine los elementos destacados de la cónica

$$13x^2 + 18xy + 37y^2 - 8x + 56y + 28 = 0$$

que permitan identificarla, dibujarla y parametrizarla.

4. Determine una parametrización de la elipse con centro en el punto $(1, 0)$, ejes paralelos a los ejes de coordenadas y semiejes $\sqrt{2}$ y 1.
5. Obtenga la ecuación de la parábola con vértice en el punto $(1, 1)$, eje en la dirección $(1, 2)$ y que pasa por el punto $(0, 2)$.
6. Determine los elementos destacados de la cónica

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 10x - 6y + 3 = 0$$

que permitan identificarla y dibujarla.

7. Determine los elementos destacados de la cónica

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 10x - 6y + 2 = 0$$

que permitan identificarla, dibujarla y parametrizarla.

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

Relación de ejercicios 2.3

1. Determine y represente el dominio de los siguientes campos:

$$a) f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad b) g(x, y) = \log \frac{y}{x^2 + y^2 - 1}.$$

2. Determine las curvas de nivel de los siguientes campos escalares, representándolas para algunos valores.

$$a) f(x, y) = y + \cos 2x, \quad b) g(x, y) = e^{y-x^2}, \quad c) h(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{x - 2y}.$$

3. Halle el vector gradiente de los siguientes campos.

$$a) f(x, y) = \log(\sin xy) \quad b) g(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$$

4. Calcule la derivada direccional del campo $f(x, y) = x^3 + 3xy$ en el punto $(1, 1)$ a lo largo de la recta $y = x$ y en la dirección de decrecimiento de x .

5. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y de la recta normal al grafo del campo $f(x, y) = \frac{x^2}{x + y}$ en el punto $(2, 2, 1)$.

6. Encuentre las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a la superficie $x \sin y + x^2 e^z = 4$ en el punto $(2, \pi, 0)$.

7. Pruebe que las superficies

$$x^2 - 2y^2 + z^2 = 0, \quad xyz = 1,$$

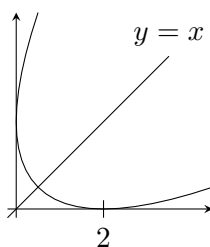
son ortogonales en todos los puntos de intersección. Es decir, las rectas normales a las superficies en estos puntos son ortogonales.

8. Consideramos la curva

$$9x^2 + 4xy + 6y^2 - 14x + 8y + 10 = 0$$

Halla la recta tangente a la curva en el punto $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ (sin parametrizarla).
Halla los puntos de la curva cuya tangente es horizontal.

9. Determine una parametrización de la parábola de la figura: la recta $y = x$ es el eje y los ejes de coordenadas son tangentes a la parábola en los puntos $(2, 0)$ y $(0, 2)$.



(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

Relación de ejercicios 2.4

1. Identifique y clasifique (si existen) los puntos críticos de los siguientes campos:

$$a) \quad z = x^3 + y^3 - 3xy \qquad b) \quad z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$$

2. Calcule la distancia entre las parábolas $4x^2 = 8y + 7$, $y^2 = 4x - 8$. Indicación: es mejor reducir variables en lugar de usar multiplicadores de Lagrange.

3. Clasifique el punto crítico (x_0, y_0, z_0) del campo escalar $f(x, y, z)$ sabiendo que

$$\nabla^2 f(x_0, y_0, z_0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$$

4. Consideramos el campo $f(x, y) = 3x^2 + y^3$:

a) Determine, sin clasificar, todos los puntos críticos del campo f sobre la curva $x^2 + y^2 = 9$

b) Uno de los puntos obtenidos en el apartado anterior debe ser $(\sqrt{5}, 2)$: clasifique este punto.

5. Consideremos la función $f(x, y) = -3xy^2 + 4y^2 - 10xy + 12y + 4x^2 - 15x + 14$.

a) Compruebe que $(1, -1)$ es un punto crítico de $f(x, y)$ sujeto a la condición $x - 2y - 3e^{x+y} = 0$.

b) Clasifique el punto crítico del apartado anterior.

6. Determine y clasifique los puntos críticos de $f(x, y) = x^3 + y^3$ sobre la restricción $x^2 + y^2 = 1$.

7. Sabemos que $(2, 1)$ es un punto crítico de un campo $f(x, y)$ sujeto a la restricción $x^3 + y^2 - 4xy - y = 0$, siendo $\alpha = \frac{1}{2}$ el multiplicador de Lagrange y

$$\nabla^2 f(2, 1) = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Determine si el punto crítico es máximo o mínimo.}$$

8. Aplique el método de los multiplicadores de Lagrange para hallar las distancias máximas y mínimas de un punto de la elipse $x^2 + 4y^2 = 5$ a la recta $x + y = 4$.

9. Halle los valores máximo y mínimo del campo escalar $f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la región triangular cerrada del primer cuadrante acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.

10. Halle los valores máximo y mínimo del campo escalar $f(x, y) = \exp\left(\frac{-xy}{4}\right)$ en la región $x^2 + y^2 \leq 1$.

(Esta página se ha dejado intencionalmente en blanco)

Relación de ejercicios 2.5

1. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $x = 2 \cot g(t)$, $y = 2 \operatorname{sen}^2(t)$, en $t_0 = \frac{\pi}{4}$.
2. Consideramos la curva: $\alpha(t) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t^3}{1+t^2} \right)$, $t \in \mathbb{R}$.
 - a) Halle: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$ y $\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha'(t)$.
 - b) Dibuje la curva.
3. Halle los puntos de la curva $x = 2(t + t \operatorname{sen} t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ en los que la tangente sea horizontal.
4. Halle los puntos de la curva $x = \cos t + t \operatorname{sen} t$, $y = \operatorname{sen} t - t \cos t$ en los que la tangente sea vertical.
5. Demuestre que las ecuaciones:

$$\begin{cases} x(t) = \frac{a(1-t^2)}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{2bt}{1+t^2} \end{cases}$$

son una parametrización de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ¿Cómo se desplaza un punto por la curva cuando crece el parámetro t ?

6. Localice los puntos de tangencia horizontal y vertical, si los hay, de las curvas polares siguientes
 - a) $r = 1 + \operatorname{sen} \theta$,
 - b) $r = a \operatorname{sen} \theta \cos^2 \theta$
7. Dibuje las siguientes curvas dadas en coordenadas polares.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } r = 2 + \frac{1}{\theta} & \text{b) } r = 1 + \frac{1}{2} \cos \theta \text{ (Caracol de Pascal)} \\ \text{c) } r = \sqrt{\cos 2\theta} & \text{d) } r = 4 \cos \theta \text{ (Circunferencia)} \\ \text{e) } r = \frac{16}{5 - 3 \cos \theta} \text{ (Elipse)} & \text{f) } r = \frac{2}{1 - \cos \theta} \text{ (Parábola)} \end{array}$$

8. Determine la ecuación de las asíntotas de la curva $r = 2 \cos 2\theta \sec \theta$
9. Halle la ecuación de la recta tangente a la curva $r = \frac{6}{2 \operatorname{sen} \theta - 3 \cos \theta}$ en $\theta = \pi$

10. Encuentre la ecuación de las circunferencias descritas a continuación:

- a) Centro $(3, -4)$, radio $\sqrt{30}$
- b) Con centro en el segundo cuadrante, tangente a los ejes de coordenadas y radio 4.
- c) Con centro en $(2, -3)$ y pasando por el punto $(5, 4)$.
- d) Que tiene el segmento que une $(-1, 2)$ y $(5, -6)$ como diámetro.
- e) Que pasa por los puntos $(1, 0)$, $(3, 4)$ y $(5, 0)$.

11. Halle el centro y radio de las siguientes circunferencias.

- a) $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 36$
- b) $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$
- c) $x^2 + y^2 + 8x = 9$

12. Dibuje las parábolas $y = x^2 - 4x - 5$ e $y^2 - 3x + 1 = 0$, determinando sus focos, sus vértices y directrices.

13. Dibuje las elipses $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ y $16x^2 + 25y^2 - 32x + 50y + 31 = 0$ y determine sus focos.

14. Dibuje las hipérbolas $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{6} = 1$ y $16y^2 - x^2 + 2x + 64y + 63 = 0$ y determine su focos, vértices y asíntotas.

15. Demuestre que si

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0, \quad (2.13)$$

es no degenerada, entonces:

- Si $b^2 - 4ac = 0$, entonces (2.13) es una parábola.
- Si $b^2 - 4ac > 0$, entonces (2.13) es una hipérbola.
- Si $b^2 - 4ac < 0$, entonces (2.13) es una elipse.

16. Determine los elementos destacados de las siguientes cónicas para identificarlas, dibujarlas y parametrizarlas, en su caso.

- a) $5x^2 - 30xy + 45y^2 + 4x - 12y + 2 = 0$
- b) $5x^2 - 30xy + 45y^2 + 4x - 12y - 1 = 0$
- c) $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 10x + 30y + 3 = 0$
- d) $3x^2 - 18xy + 27y^2 - 10x + 30y + 5 = 0$
- e) $16x^2 - 8xy + y^2 + 16x - 4y + 5 = 0$
- f) $4x^2 + 4xy = y - y^2$
- g) $y = \frac{x + 9}{x + 5}$

17. Consideremos la elipse que tiene las siguientes características: el centro de la elipse es el punto $(0, -1)$; uno de los ejes de la elipse está en la dirección del vector $(1, 2)$; los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 3)$ pertenecen a la elipse. Determine una ecuación cartesiana de la elipse y una parametrización.

18. Determine el dominio de los siguientes campos:

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2 & b) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x - y} \\ c) f(x, y) = \log(1 - xy) & d) f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \\ e) f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & f) f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \end{array}$$

19. Describa las curvas de nivel de los siguientes campos y dibuje algunas. Esboce sus gráficas:

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = 2x + y & b) f(x, y) = \cos(2x + y) \\ c) f(x, y) = y^2 - x & d) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \end{array}$$

20. Halle el vector gradiente de los siguientes campos:

$$a) f(x, y) = e^x \cos y, \quad b) f(x, y) = \operatorname{tg}(x^2 + y^2)$$

21. Calcule la derivada direccional del campo $f(x, y) = x^2 + y \operatorname{senh}(xy)$ en el punto $(2, 0)$, a lo largo de la recta tangente a la curva $y = \sqrt{x + 7} - 3$ en la dirección de decrecimiento de x .

22. Encuentre la ecuación del plano o recta tangente a la superficie o curva en el punto indicado, así como la de la recta normal:

$$\begin{array}{ll} a) x \operatorname{sen} y + x^2 e^z = 4 \text{ en } (2, \pi, 0), & b) x^3 y - \frac{x^2}{y} = 4 \text{ en } (2, 1) \\ c) xz^2 + \frac{(2x - z)^2}{y^3} = 19 \text{ en } (2, 1, 3), & d) 3xe^y + xy^3 = 2 + x \text{ en } (1, 0) \\ e) z = \operatorname{sen} xy \text{ en } (1, \pi/2, 1), & f) z = \frac{x^2}{x + y} \text{ en } (2, 2, 1) \\ g) z = \log(x^2 + y) \text{ en } (1, 0, 0), & h) z = x^2 e^{xy} \text{ en } (3, 0, 9) \end{array}$$

23. Encuentre el punto de la superficie $z = xy$ en donde la recta normal es paralela a la recta $x = 3 - 2t$, $y = 4 + 5t$, $z = 3 + 3t$.

24. Encuentre el punto de la superficie $z = x^2 + y^2$ en donde el plano tangente es paralelo al plano $6x - 4y + 2z = 5$.

25. Encuentre todos los puntos de la superficie $z = x^2 y$ en donde el plano tangente es ortogonal a la recta $x = 2 - 6t$, $y = 3 - 12t$, $z = 2 + 3t$.

26. Pruebe que las siguientes superficies son ortogonales en todos los puntos de intersección:

$$x + y^2 + 2z^3 = 4, \quad 12x - (3 \log y) + \frac{1}{z} = 13$$

27. Consideramos la siguiente superficie: $x e^{x+y} + y e^{A(y+z)} + z e^{B(z-x)} = 1$

Determine los valores de A y B para que el plano tangente a la superficie en el punto $(1, -1, 1)$ sea paralelo al plano $-2x + 2y + z = 3$ y proporcione dicho plano tangente.

28. Identifique y clasifique los puntos críticos de las siguientes funciones:

a) $z = x^2 + (y - 1)^2$	b) $z = x^2 - (y - 1)^2$
c) $z = 1 + x^2 - y^2$	d) $z = x^3 - 3xy^2 + y^2$
e) $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$	f) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$
g) $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$	h) $f(x, y) = x e^x - (1 + e^x) \cos y$
i) $f(x, y) = y x^2 e^{xy}$	

29. Encuentre el máximo y el mínimo absoluto del campo

$$f(x, y) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

en el conjunto de puntos tales que $(x - 5)^2 + y^2 \leq 1$.

30. Determine y clasifique los puntos críticos del campo escalar

$$f(x, y) = 4y - 2x - x^2y$$

sujeto a la condición $xy = -1$.

31. En los siguientes apartados, halle los máximos y mínimos absolutos de las funciones en los dominios dados:

a) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 5, -3 \leq y \leq 3$.
 b) $g(x, y) = 48xy - 32x^3 - 24y^2$ en la placa rectangular $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

32. Halle los valores máximo y mínimo del campo $f(x, y) = x^2y(4 - x - y)$ en el triángulo limitado por las rectas $x = 0, y = 0, x + y = 6$.

33. Consideremos el campo escalar:

$$f(x, y) = -xy^2 + 11y^2 + 4xy + 10y + x^2 + x + 5$$

- a) Comprueba que $(2, -1)$ es un punto crítico de f .
 b) Halla $\nabla^2 f(2, -1)$ y $d^2 f_{(2, -1)}(u, v)$.
 c) Clasifica el punto crítico $(2, -1)$.

34. Consideremos la función $f(x, y) = 3x^2 + 3y^2 - 10xy + 4x + 4y$. Demuestre que $(-1, -1)$ es un punto crítico de f sobre la restricción $x^2 + y^2 = 2$ y clasifíquelo.