Considera la función $f(x) = -3x^4 - 4x^3 + 16$.

1. (0.25) $f(x)$ tiene una única raíz positiva. Determinar un intervalo I de longitud 1 tal que dicha raíz esté en I.

2. (1) ¿Cuántas iteraciones del método de bipartición harían falta para aproximar esa raíz con un error menor que $\frac{1}{2}\, 10^{-3}$?

3. (1) Si tomáramos el extremo izquierdo de I como punto inicial, ¿cuál sería el siguiente punto que obtendríamos si utilizáramos el método de Newton para aproximar esa raíz? ¿Y si tomáramos el extremo derecho?

4. (4) Representar $f(x)$ determinando sus extremos locales y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y de concavidad y de convexidad.

5. (3.75) Sabiendo que $17 \cdot 25 = 425$ y teniendo en cuenta los datos de la tabla siguiente, determinar el menor número de subintervalos iguales en los que habría que dividir el intervalo $[-1, 0]$ para que, eligiendo el punto medio de cada uno de esos subintervalos, la correspondiente suma de Riemann, te permita aproximar $\int_{-1}^{0} \left(-\frac{x^6}{10} - \frac{x^5}{5} + 8x^2 + 2x + 3 \right) dx$ con un error menor que $\frac{1}{2}\, 10^{-3}$. Además, a través de un sumatorio, indica cómo se obtendría dicha aproximación.

n	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n^2	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

Solución

Puesto que f es una función continua tal que $f(0) = 16$, $f(1) = 9$ y $f(2) = -64$, el teorema de Bolzano nos permite afirmar que existe $x^* \in (1, 2)$ tal que $f(x^*) = 0$. Así, podemos tomar $I = (1, 2)$ como intervalo inicial (intervalo que tiene longitud 1) para aproximar x^* a través del método de bipartición, construyendo una sucesión $\{x_n\}$ que converga a x^* tal que $x_1 = \frac{3}{2}$. Para que x_k se aproxime a x^* con un error menor que $\frac{1}{2}\, 10^{-3}$, tendría que cumplirse que $\frac{2-1}{2^k} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2000}$, con lo que bastaría que k fuera 11

Si tomáramos el extremo izquierdo de I como punto inicial para aproximar x^* a través del método de Newton (es decir, $x_0 = 1$) y teniendo en cuenta que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

y que la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -12x^3 - 12x^2$, el siguiente punto sería $x_1 = 1 - \frac{9}{-24} = 1 + \frac{3}{8} = \frac{11}{8}$. Si, por el contrario, tomáramos como punto inicial del método de Newton, el extremo derecho de I (es decir, $x_0 = 2$), el siguiente punto sería $x_1 = 2 - \frac{-64}{-144} = 2 - \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$

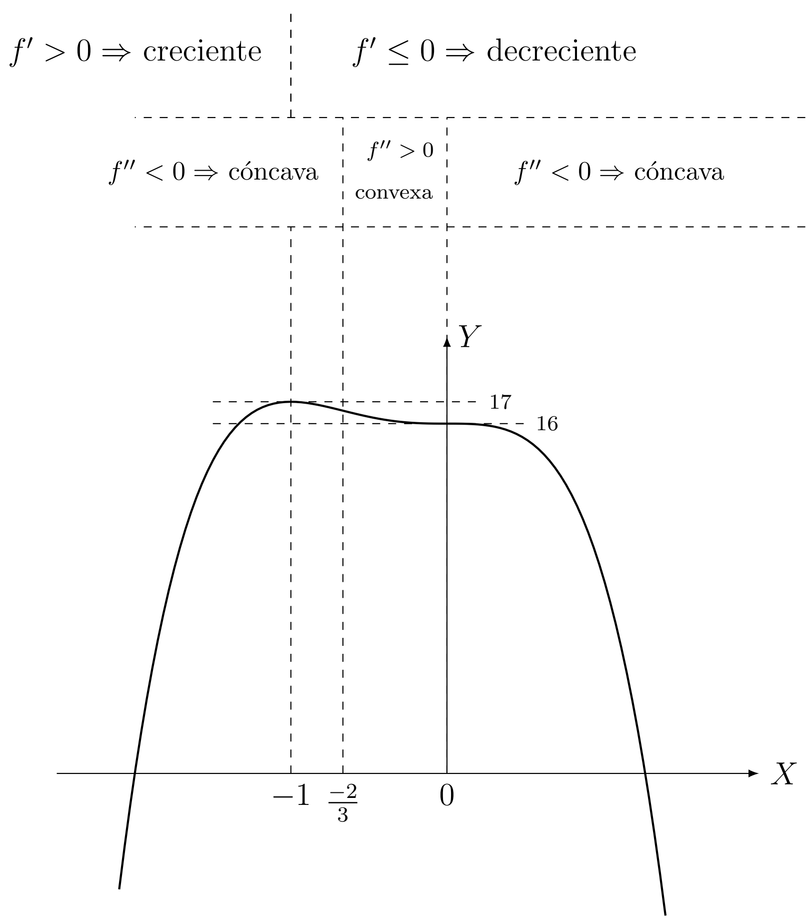
Puesto que f es derivable, los extremos locales de f, si existen, estarán entre los puntos críticos de f y, ya que la derivada de f la podemos escribir como $f'(x) = -12x^2(x+1)$, podemos afirmar que los únicos puntos críticos de f son $x = 0$ y $x = -1$. Teniendo en cuenta que la derivada segunda de $f(x)$ es $f''(x) = -36x^2 - 24x = -12x(3x+2)$ y que $f''(-1) < 0$ podemos afirmar que $x = -1$ es máximo local de f.

Para poder clasificar $x = 0$ no nos basta con la derivada segunda puesto que $f''(0) = 0$. Sin embargo, puesto que la primera derivada que no se anula en el punto $x = 0$ es de orden impar (ya que $f'''(x) = -72x - 24$ y por tanto $f'''(0) = -24 \neq 0$), podemos afirmar que $x = 0$ es un punto de silla.

Además, a la vista de la igualdad $f'(x) = -12x^2(x+1)$, podemos concluir que $f'(x) \geq 0$ si y sólo si $x+1 \leq 0$ (es decir, si $x \leq -1$). Así, podemos afirmar que f es creciente en $(-\infty, -1)$ y decreciente en $(-1, +\infty)$

Puesto que f también es dos veces derivable, podemos determinar los intervalos de concavidad y convexidad sin más que observar el signo de la derivada segunda $f''(x) = -12x(3x+2)$. Puesto que $f''(x)$ es una parábola hacia abajo, que corta al eje X en $x = 0$ y en $x = \dfrac{-2}{3}$ podemos afirmar que $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x \in \left(\dfrac{-2}{3}, 0\right)$; es decir, f es convexa en $\left(\dfrac{-2}{3}, 0\right)$ y cóncava en el resto.

Con toda esta información y teniendo en cuenta que $f(-1) = 17$ y que -2 es raíz de f (es decir, $f(-2) = 0$), podemos construir la siguiente representación



Por otro lado, considerando la función $g(x) = -\dfrac{x^6}{10} - \dfrac{x^5}{5} + 8x^2 + 2x + 3$ y una partición uniforme del intervalo $[-1, 0]$ en n subintervalos iguales cada uno de ellos de amplitud $\dfrac{0-(-1)}{n} = \dfrac{1}{n}$, el punto medio de cada uno de tales subintervalos es

$$\frac{\left(-1 + \dfrac{k-1}{n}\right) + \left(-1 + \dfrac{k}{n}\right)}{2} = -1 + \frac{2k-1}{2n} \text{ con } k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n$$

Así, si aproximamos $\displaystyle\int_{-1}^{0} \left(-\frac{x^6}{10} - \frac{x^5}{5} + 8x^2 + 2x + 3\right) dx$ a través de $\dfrac{0-(-1)}{n} \cdot \displaystyle\sum_{k=1}^{n} g\left(-1 + \frac{2k-1}{2n}\right)$ el error que cometemos es menor o igual que $\dfrac{M \cdot (0-(-1))}{24 \cdot n^2}$ siendo $M = \displaystyle\max_{x\in[-1,0]} |g''(x)|$

Teniendo en cuenta que $g'(x) = \dfrac{-3}{5}x^5 - x^4 + 16x$ y, por tanto, $g''(x) = -3x^4 - 4x^3 + 16 = f(x)$ y, a la vista de lo realizado anteriormente, podemos afirmar que $M = f(-1) = 17$, con lo que, para que el error fuera menor que $\dfrac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ bastaría con que n cumpliera que $\dfrac{17}{24 \cdot n^2} < \dfrac{1}{2000} = \dfrac{1}{25 \cdot 8 \cdot 10}$; es decir que $\dfrac{17}{\cancel{8} \cdot 3 \cdot n^2} < \dfrac{1}{25 \cdot \cancel{8} \cdot 10}$ o equivalentemente (y teniendo en cuenta que $17 \cdot 25 = 425$) que $n^2 > \dfrac{4250}{3} = 1416'666\ldots$ Por tanto, viendo los valores de la tabla, bastaría que n fuera 38 y así, la correspondiente aproximación es

$$\frac{1}{38} \cdot \sum_{k=1}^{38} g\left(-1 + \frac{2k-1}{76}\right) = \frac{1}{38} \cdot \sum_{k=1}^{38} g\left(\frac{2k-77}{76}\right) = \frac{1}{38}\left[g\left(\frac{-75}{76}\right) + g\left(\frac{-73}{76}\right) + \ldots + g\left(\frac{-1}{76}\right)\right]$$

Considera la función $f(x) = -3x^4 + 4x^3 + 16$.

1. (0.25) $f(x)$ tiene una única raíz negativa. Determinar un intervalo I de longitud 1 tal que dicha raíz esté en I.

2. (1) ¿Cuántas iteraciones del método de bipartición harían falta para aproximar esa raíz con un error menor que $\frac{1}{2}\,10^{-3}$?

3. (1) Si tomáramos el extremo izquierdo de I como punto inicial, ¿cuál sería el siguiente punto que obtendríamos si utilizáramos el método de Newton para aproximar esa raíz? ¿Y si tomáramos el extremo derecho?

4. (4) Representar $f(x)$ determinando sus extremos locales y sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento y de concavidad y de convexidad.

5. (3.75) Sabiendo que $17{\cdot}25 = 425$ y teniendo en cuenta los datos de la tabla siguiente, determinar el menor número de subintervalos iguales en los que habría que dividir el intervalo $[0,1]$ para que, eligiendo el punto medio de cada uno de esos subintervalos, la correspondiente suma de Riemann, te permita aproximar $\int_0^1 \left(-\frac{x^6}{10} + \frac{x^5}{5} + 8x^2 - 2x + 3\right) dx$ con un error menor que $\frac{1}{2}\,10^{-3}$. Además, a través de un sumatorio, indica cómo se obtendría dicha aproximación.

n	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
n^2	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

Solución

Puesto que f es una función continua tal que $f(0) = 16$, $f(-1) = 9$ y $f(-2) = -64$, el teorema de Bolzano nos permite afirmar que existe $x^* \in (1,2)$ tal que $f(x^*) = 0$. Así, podemos tomar $I = (-2,-1)$ como intervalo inicial (intervalo que tiene longitud 1) para aproximar x^* a través del método de bipartición, construyendo una sucesión $\{x_n\}$ que converga a x^* tal que $x_1 = \frac{-3}{2}$. Para que x_k se aproxime a x^* con un error menor que $\frac{1}{2}\,10^{-3}$, tendría que cumplirse que $\frac{-1-(-2)}{2^k} = \frac{1}{2^k} < \frac{1}{2000}$, con lo que bastaría que k fuera 11

Si tomáramos el extremo izquierdo de I como punto inicial para aproximar x^* a través del método de Newton (es decir, $x_0 = -2$) y teniendo en cuenta que

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

y que la derivada de $f(x)$ es $f'(x) = -12x^3+12x^2$, el siguiente punto sería $x_1 = -2-\frac{-64}{144} = -2+\frac{4}{9} = \frac{-14}{9}$. Si, por el contrario, tomáramos como punto inicial del método de Newton, el extremo derecho de I (es decir, $x_0 = -1$), el siguiente punto sería $x_1 = -1 - \frac{9}{24} = -1 - \frac{3}{8} = \frac{-11}{8}$

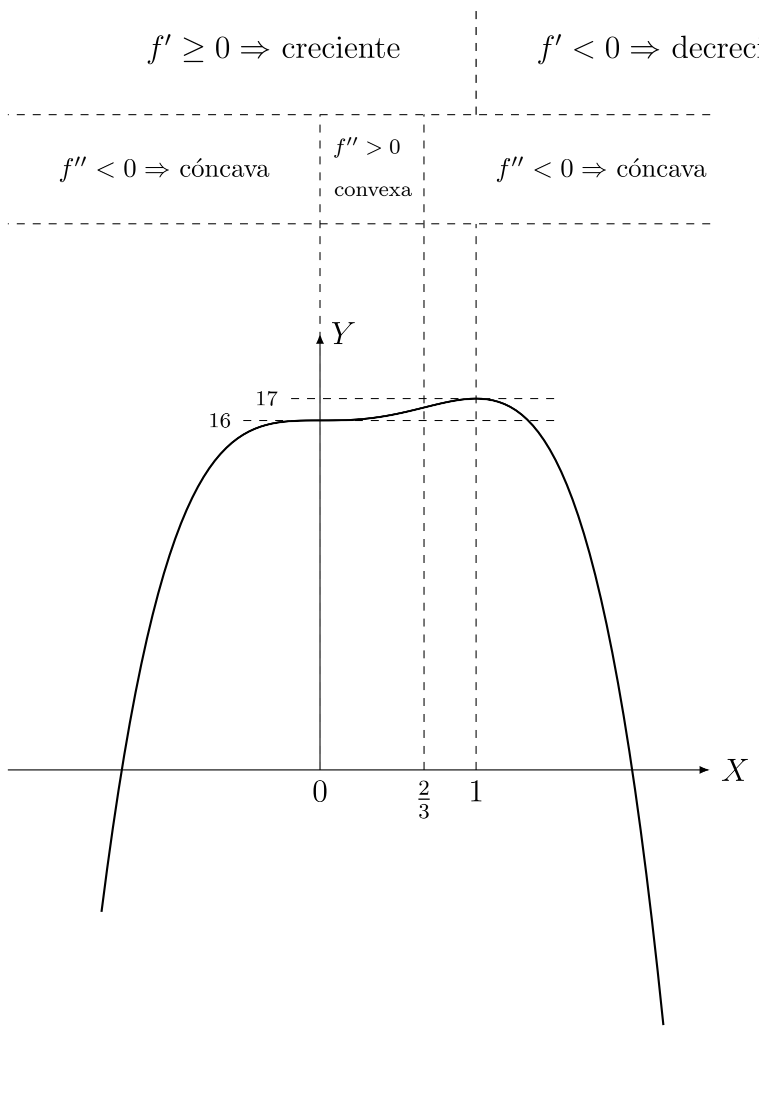
Puesto que f es derivable, los extremos locales de f, si existen, estarán entre los puntos críticos de f y, ya que la derivada de f la podemos escribir como $f'(x) = 12x^2(1-x)$, podemos afirmar que los únicos puntos críticos de f son $x = 0$ y $x = 1$. Teniendo en cuenta que la derivada segunda de $f(x)$ es $f''(x) = -36x^2+24x = 12x(2-3x)$ y que $f''(1) < 0$ podemos afirmar que $x = 1$ es máximo local de f.

Para poder clasificar $x = 0$ no nos basta con la derivada segunda puesto que $f''(0) = 0$. Sin embargo, puesto que la primera derivada que no se anula en el punto $x = 0$ es de orden impar (ya que $f'''(x) = 24 - 72x$ y por tanto $f'''(0) = 24 \neq 0$), podemos afirmar que $x = 0$ es un punto de silla.

Además, a la vista de la igualdad $f'(x) = 12x^2(1-x)$, podemos concluir que $f'(x) \geq 0$ si y sólo si $1 - x \geq 0$ (es decir, si $x \leq 1$). Así, podemos afirmar que f es creciente en $(-\infty, 1)$ y decreciente en $(1, +\infty)$

Puesto que f también es dos veces derivable, podemos determinar los intervalos de concavidad y convexidad sin más que observar el signo de la derivada segunda $f''(x) = 12x(2-3x)$. Puesto que $f''(x)$ es una parábola hacia abajo, que corta al eje X en $x = 0$ y en $x = \dfrac{2}{3}$ podemos afirmar que $f''(x) > 0$ si, y sólo si, $x \in \left(0, \dfrac{2}{3}\right)$; es decir, f es convexa en $\left(0, \dfrac{2}{3}\right)$ y cóncava en el resto.

Con toda esta información y teniendo en cuenta que $f(1) = 17$ y que 2 es raíz de f (es decir, $f(2) = 0$), podemos construir la la siguiente representación



Por otro lado, considerando la función $g(x) = -\dfrac{x^6}{10} + \dfrac{x^5}{5} + 8x^2 - 2x + 3$ y una partición uniforme del intervalo $[0, 1]$ en n subintervalos iguales cada uno de ellos de amplitud $\dfrac{1-0}{n} = \dfrac{1}{n}$, el punto medio de cada uno de tales subintervalos es

$$\frac{\dfrac{k-1}{n} + \dfrac{k}{n}}{2} = \frac{2k-1}{2n} \text{ con } k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$$

Así, si aproximamos $\displaystyle\int_0^1 \left(-\frac{x^6}{10} + \frac{x^5}{5} + 8x^2 - 2x + 3\right) dx$ a través de $\displaystyle\frac{1-0)}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{2k-1}{2n}\right)$ el error que cometemos es menor o igual que $\dfrac{M \cdot (1-0)}{24 \cdot n^2}$ siendo $M = \displaystyle\max_{x \in [0,1]} |g''(x)|$

Teniendo en cuenta que $g'(x) = \dfrac{-3}{5}x^5 + x^4 + 16x$ y, por tanto, $g''(x) = -3x^4 + 4x^3 + 16 = f(x)$ y, a la vista de lo realizado anteriormente, podemos afirmar que $M = f(1) = 17$, con lo que, para que el error fuera menor que $\dfrac{1}{2} \cdot 10^{-3}$ bastaría con que n cumpliera que $\dfrac{17}{24 \cdot n^2} < \dfrac{1}{2000} = \dfrac{1}{25 \cdot 8 \cdot 10}$; es decir que $\dfrac{17}{\cancel{8} \cdot 3 \cdot n^2} < \dfrac{1}{25 \cdot \cancel{8} \cdot 10}$ o equivalentemente (y teniendo en cuenta que $17 \cdot 25 = 425$) que $n^2 > \dfrac{4250}{3} = 1416'666\ldots$ Por tanto, viendo los valores de la tabla, bastaría que n fuera 38 y así, la correspondiente aproximación es

$$\frac{1}{38} \cdot \sum_{k=1}^{38} g\left(\frac{2k-1}{76}\right) = \frac{1}{38}\left[g\left(\frac{1}{76}\right) + g\left(\frac{3}{76}\right) + \ldots + g\left(\frac{75}{76}\right)\right]$$