1. (4) Las soluciones de la ecuación diferencial

$$(x-y+3)+(-x+y+1)\cdot y'=0$$

son cónicas. Determina, clasifica y parametriza la que pasa por $(1,2)$. Comprueba que si $\Big(x(t),y(t)\Big)$ es su parametrización, para todo $t\in\mathbb{R}$ tal que $x'(t)\neq 0$ se cumple que

$$\Big(x(t)-y(t)+3\Big)+\Big(-x(t)+y(t)+1\Big)\cdot\frac{y'(t)}{x'(t)}=0$$

2. (4) Siendo $f(x,y)=x^2-5xy+y^2+2x+49y$, y siendo $g(x,y)=x^3+xy^2+y^3+12y+27$, ¿el punto $(1,-2)$ es punto crítico de $f(x,y)$ sujeto a $g(x,y)=0$? En caso afirmativo, clasifícalo. ¿Y el punto $(-3,0)$? En caso afirmativo, clasifícalo.

3. *a*) (1) Determina una primitiva de $arcsenh\, x$
   b) (1) Determina una primitiva de $\sqrt{1+x^2}$

Solución

1. Puesto que podemos identificar la ecuación diferencial $(x-y+3)+(-x+y+1)\cdot y'=0$ con el modelo $M(x,y)+N(x,y)\cdot y'=0$ tomando como $M(x,y)=x-y+3$ y como $N(x,y)=-x+y+1$, y se cumple que $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y)=-1=\dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$, podemos asegurar que la ecuación diferencial planteada es exacta, por lo que existe un campo escalar $U(x,y)$ tal que la familia de soluciones de la ecuación diferencial la podemos describir como $U(x,y)=k$, siendo k una constante.

   Para determinar dicha función $U(x,y)$ sólo tenemos que imponer que

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial U}{\partial x}(x,y)=M(x,y)=x-y+3\\[2ex] \dfrac{\partial U}{\partial y}(x,y)=N(x,y)=-x+y+1\end{array}\right\}$$

   Integrando respecto a x en la primera igualdad, obtenemos que

$$U(x,y)=\frac{x^2}{2}-xy+3x+\varphi(y)$$

   y derivando esta nueva igualdad respecto a y obtenemos que

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y)=-x+\varphi'(y)=-x+y+1$$

   con lo que $\varphi(y)=\dfrac{y^2}{2}+y+c$. Por tanto, la familia de soluciones de nuestra ecuación diferencial la podemos describir como los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que

$$\frac{x^2}{2}-xy+3x+\frac{y^2}{2}+y+c=k$$

   o bien, multiplicando toda la igualdad por 2, tales que

$$x^2-2xy+y^2+6x+2y+f=0$$

Puesto que esta ecuación es de la forma $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$, con $a=1$, $b=-2$, $c=1$, $d=6$ y $e=2$, cumpliéndose que $b^2-4ac=0$, podemos afirmar que las soluciones de la ecuaciones de la ecuación diferencial son parábolas. Para determinar la curva de esa familia que pasa por $(1,2)$ tenemos que determinar el valor de la constante f que cumpla que $1^2-2\cdot 1\cdot 2+2^2+6\cdot 1+2\cdot 2+f=11+f=0$, con lo que $f=-11$. Así, la curva que tenemos que parametrizar es la determinada por los puntos $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tales que

$$x^2-2xy+y^2+6x+2y-11=0$$

Puesto que es una parábola con $a=1$, $b=-2$ y $c=1$, sabemos que existen constantes A, B y C tales que $x^2-2xy+y^2+6x+2y-11=(x-y+A)^2+B(x+y+C)$. Desarrollando el segundo miembro de esta igualdad, obtenemos que

$$(x-y+A)^2+B(x+y+C)=x^2-2xy+y^2+(2A+B)x+(-2A+B)y+A^2+BC$$

e igualando coeficientes podemos afirmar que las constantes A, B y C son las soluciones del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} 2A+B &=& 6 \\ -2A+B &=& 2 \\ A^2+BC &=& -11 \end{array}\right\}$$

de donde, sin más que sumar las dos primeras ecuaciones, obtenemos que $B=4$ y, sin más que restar las mismas dos primeras ecuaciones, que $A=1$. Llevando estos valores a la tercera ecuación, la constante C tiene que cumplir que $1+4C=-11$, con lo que $C=-3$. Por tanto, la forma normalizada de nuestra parábola es

$$(x-y+1)^2+4(x+y-3)=0$$

con lo que podemos parametrizarla despejando $x(t)$ e $y(t)$ del sistema

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t)-y(t)+1 &=& t \\ x(t)+y(t)-3 &=& \dfrac{-t^2}{4} \end{array}\right\}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos que $2x(t)-2=\dfrac{-t^2}{4}+t$ de donde, despejando convenientemente, obtenemos que $x(t)=\dfrac{-t^2}{8}+\dfrac{t}{2}+1$. Si en vez de sumar las ecuaciones, las restamos, obtenemos que $2y(t)-4=\dfrac{-t^2}{4}-t$, de donde, $y(t)=\dfrac{-t^2}{8}-\dfrac{t}{2}+2$. Por tanto, la curva que pasa por $(1,2)$ y es solución de nuestra ecuación diferencial, la podemos parametrizar como

$$\left.\begin{array}{rcl} x(t) &=& \dfrac{-t^2}{8}+\dfrac{t}{2}+1 \\[2ex] y(t) &=& \dfrac{-t^2}{8}-\dfrac{t}{2}+2 \end{array}\right\}$$

Así, $x'(t)=\dfrac{-t}{4}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{2-t}{4}$, $y'(t)=\dfrac{-t}{4}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2-t}{4}$, y para todo $t\neq 2$ se cumple que

$$\Big(x(t)-y(t)+3\Big)+\Big(-x(t)+y(t)+1\Big)\cdot\frac{y'(t)}{x'(t)}=$$

$$=\Big(\frac{-t^2}{8}+\frac{t}{2}+1-\Big(\frac{-t^2}{8}-\frac{t}{2}+2\Big)+3\Big)+\Big(-\Big(\frac{-t^2}{8}+\frac{t}{2}+1\Big)+\frac{-t^2}{8}-\frac{t}{2}+2+1\Big)\cdot\frac{-2-t}{2-t}=$$

$$=(t+2)+(-t+2)\cdot\frac{-2-t}{2-t}=(t+2)+(-2-t)=0$$

2. La función lagrangiana para el problema de optimizar $f(x,y) = x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 49y$ sujeto a $g(x,y) = x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27 = 0$ es

$$L(x,y,\lambda) = x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 49y - \lambda \cdot (x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27)$$

cuyas parciales son

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 2x - 5y + 2 - \lambda \cdot (3x^2 + y^2) \\
\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= -5x + 2y + 49 - \lambda \cdot (2xy + 3y^2 + 12) \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= -(x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27)
\end{aligned}$$

a) El punto $(1,-2)$ es punto crítico de $f(x,y)$ sujeto a $g(x,y) = 0$ si, y sólo si, existe una constante λ_a tal que, las parciales de $L(x,y,\lambda)$, particularizadas para $(1,-2,\lambda_a)$, se anulan simultáneamente; es decir, se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl}
2 \cdot 1 - 5 \cdot (-2) + 2 - \lambda_a \cdot (3 \cdot 1^2 + (-2)^2) & = & 14 - 7\lambda_a & = & 0 \\
-5 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 49 - \lambda_a \cdot (2 \cdot 1 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2)^2 + 12) & = & 40 - 20\lambda_a & = & 0 \\
-(1^3 + 1 \cdot (-2)^2 + (-2)^3 + 12 \cdot (-2) + 27) & = & 0 & &
\end{array}$$

Puesto que $\lambda_a = 2$ es la solución de este sistema, podemos afirmar que el punto $(1,-2)$ es punto crítico de $f(x,y)$ sujeto a $g(x,y) = 0$. Como sólo tenemos una restricción, para determinar si $(1,-2)$ es máximo local, mínimo local, o simplemente, no es extremo local, lo único que tenemos que hacer es estudiar los coeficientes del polinomio

$$p(u) = \begin{vmatrix}
0 & \frac{\partial g}{\partial x}(1,-2) & \frac{\partial g}{\partial y}(1,-2) \\
\frac{\partial g}{\partial x}(1,-2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1,-2) - u & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(1,-2) \\
\frac{\partial g}{\partial y}(1,-2) & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1,-2) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1,-2) - u
\end{vmatrix}$$

siendo $F(x,y) = L(x,y,2) = x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 49y - 2 \cdot (x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27) =$

$$= -2x^3 - 2xy^2 - 2y^3 + x^2 - 5xy + y^2 + 2x + 25y - 54$$

Puesto que las parciales de F son

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -6x^2 - 2y^2 + 2x - 5y + 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = -4xy - 6y^2 - 5x + 2y + 25$$

la matriz hessiana de F es

$$HF(x,y) = \begin{pmatrix}
\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(x,y) \\
\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x,y)
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
-12x + 2 & -4y - 5 \\
-4y - 5 & -4x - 12y + 2
\end{pmatrix}$$

que, particularizada para $(x, y) = (1, -2)$ se transforma en

$$HF(1, -2) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}(1, -2) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}(1, -2) \\ \\ \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(1, -2) & \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}(1, -2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ \\ 3 & 22 \end{pmatrix}$$

Por otra parte, puesto que las parciales de $g(x, y) = x^3 + xy^2 + y^3 + 12y + 27$ son

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 3x^2 + y^2, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2xy + 3y^2 + 12$$

particularizadas en el punto $(1, -2)$ se transforman en $\dfrac{\partial g}{\partial x}(1, -2) = 7$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}(1, -2) = 20$, con lo que el polinomio a estudiar es

$$p(u) = \begin{vmatrix} 0 & 7 & 20 \\ 7 & -10 - u & 3 \\ 20 & 3 & 22 - u \end{vmatrix} = 21 \cdot 40 + 400(10 + u) + 49(u - 22) =$$

$$= 840 + 4000 + 400u + 49u - 22 \cdot 49 = 449u + 4840 - 1078 = 449u + 3762$$

Puesto que $p(u)$ es de grado 2, todos sus coeficientes son no nulos y tienen todos el mismo signo, podemos afirmar que el punto $(1, -2)$ es máximo local de $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0$.

b) El punto $(-3, 0)$ es punto crítico de $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0$ si, y sólo si, existe una constante λ_b tal que, las parciales de $L(x, y, \lambda)$, particularizadas para $(-3, 0, \lambda_b)$, se anulan simultáneamente; es decir, se verifica el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcl} 2 \cdot (-3) - 5 \cdot (0) + 2 - \lambda_b \cdot (3 \cdot (-3)^2 + (0)^2) & = & -4 - 27\lambda_b & = & 0 \\ \\ -5 \cdot (-3) + 2 \cdot (0) + 49 - \lambda_b \cdot (2 \cdot (-3) \cdot 0 + 3 \cdot (0)^2 + 12) & = & 64 - 12\lambda_b & = & 0 \\ \\ -((-3)^3 + (-3) \cdot 0^2 + 0^3 + 12 \cdot 0 + 27) & = & 0 & & \end{array}$$

Aunque se verifica la última ecuación de este sistema, ningún valor λ_b hace que se verifiquen simultáneamente las dos primeras, con lo que podemos afirmar que el punto $(-3, 0)$ no es punto crítico de $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = 0$

3. *a*) Para buscar una primitiva de $arcsenh\, x$, podemos utilizar el método de integración por partes que afirma que

$$\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$$

Así, tomando como $f(x) = arcsenh\, x$ y como $g'(x) = 1$ se tiene que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$ y que $g(x) = x$, con lo que podemos afirmar que

$$\int arcsenh\, x \cdot 1\, dx = x \cdot arcsenh\, x - \int \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}\, dx = x \cdot arcsenh\, x - \sqrt{1 + x^2}$$

b) Para buscar una primitiva de $\sqrt{1 + x^2}$ podemos hacer el cambio de variable $x = senh\, z$, con lo que $dx = cosh\, z\, dz$. Así, teniendo en cuenta que la igualdad fundamental de las funciones hiperbólicas afirma que $cosh^2 z - senh^2 z = 1$ (y por tanto, $cosh\, z = \sqrt{1 + senh^2 z}$), podemos afirmar que

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int \sqrt{1 + senh^2 z} \cdot cosh\, z\, dz = \int cosh^2 z\, dz \tag{1}$$

con lo que, de esta forma, nuestro objetivo pasa por determinar una primitiva de $cosh^2 z$. Para ello, utilizando de nuevo el método de integración por partes, tomando en esta ocasión como $f(x) = g'(x) = cosh\, z$, se tiene que $f'(x) = g(x) = senh\, z$, con lo que

$$\int cosh^2 z\, dz = \int cosh\, z \cdot cosh\, z\, dz = senh\, z \cdot cosh\, z - \int senh^2 z\, dz$$

de donde podemos deducir que

$$\int cosh^2 z\, dz + \int senh^2 z\, dz = senh\, z \cdot cosh\, z \tag{2}$$

Por otra parte, integrando respecto a z la igualdad $cosh^2 z - senh^2 z = 1$, obtenemos

$$\int cosh^2 z\, dz - \int senh^2 z\, dz = z \tag{3}$$

Sumando las ecuaciones (2) y (3), obtenemos que $2 \cdot \int cosh\, z\, dz = z + senh\, z \cdot cosh\, z$, de donde podemos afirmar que $\int cosh^2 z\, dz = \dfrac{z + senh\, z \cdot cosh\, z}{2}$. Llevando esta igualdad a la ecuación (1) y deshaciendo el cambio $x = senh\, z$, obtenemos que

$$\int \sqrt{1+x^2}\, dx = \int cosh^2 z\, dz = \frac{z + senh\, z \cdot cosh\, z}{2} = \frac{arcsenh\, x + x \cdot \sqrt{1+x^2}}{2}$$