UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática – 19/11/2012

Segundo examen parcial - Curso 2012/2013

Cálculo para la Computación

Grados Ing. Informática, Sotware y Computadores

Apellidos y Nombre:. . . . .

DNI:. . . . . **Titulación:**. . . . . **Grupo:** . . . .

Normas para la realización del examen:

- **Se deben justificar adecuadamente las respuestas e indicar los resultados más importantes que se aplican en cada momento.**
- **Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).**
- **No se puede utilizar la calculadora.**

---

1. (Hasta $\mathbf{1}$ punto) Determine si las siguientes funciones son, o no son, infinitésimos equivalentes en 0.

$$f(x) = x\mathrm{e}^{x} - \operatorname{sen} x \qquad \text{y} \qquad g(x) = x^2$$

2. (Hasta $\mathbf{2}$ puntos) Consideremos la ecuación

$$x^3 + x^2 = 1$$

   a) Utilice el método de Newton para definir una sucesión convergente a una solución de la ecuación.

   b) Para la sucesión anterior, proporcione una acotación del error al tomar cada término de la sucesión como solución de la ecuación.

3. (Hasta $\mathbf{2{,}5}$ puntos) Determine el campo de convergencia de la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!}(x-5)^n$$

4. (Hasta $\mathbf{2}$ puntos) Sume la serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}x^n$$

5. (Hasta $\mathbf{2{,}5}$ puntos) Considere la función $f(x) = x\cos(x^2)$. Utilice las series de Taylor para aproximar $f\left(\frac{1}{2}\right)$ con tres cifras decimales exactas.

ES OBLIGATORIO ENTREGAR ESTA HOJA DEBIDAMENTE CUMPLIMENTADA

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

FORMULARIO - Tema 2 - Cálculo para la Computación

Grados Ing. Informática, Sotware y Computadores

E. T. S. I. Informática - Curso 2012/2013

Criterios de convergencia de sucesiones:

- Stöltz: $\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$
- Raíz-Cociente: $\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \frac{x_{n+1}}{x_n}$
- Infinitos/infinitésimos equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} x & \sim & x \\ \operatorname{tg} x & \sim & x \\ 1-\cos x & \sim & x^2/2 \\ \operatorname{arc\,sen} x & \sim & x \\ \operatorname{arc\,tg} x & \sim & x \\ e^x - 1 & \sim & x \\ \log(1+x) & \sim & x \\ 1 + 1/2 + \cdots + 1/n & \sim & \log n \\ n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} & \sim & n! \end{array}$$

Métodos numéricos:

- Bisecciones: $f(a)f(b) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} r_0 = a \\ r_1 = b \end{array}\right\} \quad r_{n+1} = \frac{r_n + r_m}{2}$$

$$m = \max\{k < n \mid f(r_n)\cdot f(r_k) < 0\}$$

$$\varepsilon_n = |r_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

- Newton: $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \ne 0 \ne f''(x)$

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & \left\{\begin{array}{lll} a & \text{si} & f(a)f''(a) > 0 \\ b & \text{si} & f(a)f''(a) < 0 \end{array}\right. \\ a_{n+1} & = & a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)} \end{array}$$

$$\varepsilon_n = |a_n - \alpha| < \left|\frac{f(a_n)}{m}\right|$$

$$m \le \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

- Punto medio: $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$

$$t_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

$$\left|t_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

$$M = \max\{|f''(x)| : a \le x \le b\}$$

Criterio de convergencia de series:

- Condensación: $\sum a_n \sim \sum 2^k a_{2^k}$
- Comparación: $\sum a_n \sim \sum b_n$ si $\lim \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$
- Raíz/Cociente: $\ell = \lim \sqrt[n]{a_n}$ ó $\ell = \lim \frac{a_{n+1}}{a_n}$
  - Si $\ell < 1$ la serie $\sum a_n$ converge
  - Si $\ell > 1$ la serie $\sum a_n$ diverge
- Acotación del error para el criterio del cociente:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1 \text{ para todo } n \ge N$$

$$S - S_N \le \frac{a_{N+1}}{1-r}$$

$$\begin{array}{rcl} r & = & \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \text{ si } r_n \text{ creciente} \\ r & = & r_N < 1 \text{ si } r_n \text{ decreciente} \end{array}$$

- Raabe: $\ell = \lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$
  - Si $\ell > 1$ la serie $\sum a_n$ converge
  - Si $\ell < 1$ la serie $\sum a_n$ diverge
- Leibniz: $\sum(-1)^n a_n$ converge si $a_n \downarrow 0$

$$|S - S_N| \le a_{N+1}$$

Series de Potencias-Taylor

- Teorema de Lagrange: Existe c entre x y x_0 y tal que:

$$E_n = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\log x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad , \quad x \in (0,2]$
- $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \begin{cases} x \in [-1,1] & \alpha > 0 \\ x \in (-1,1] & -1 < \alpha < 0 \\ x \in (-1,1) & \alpha \le -1 \end{cases}$
- $\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| \le 1$