UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. I. Informática – 01/02/2013

Cálculo para la Computación

Primera Convocatoria Ordinaria - Curso 2012/2013

Apellidos y Nombre:...

DNI:......................... **Titulación:**... **Grupo:**..........

Normas para la realización del examen:

- **Se deben justificar adecuadamente las respuestas e indicar los resultados más importantes que se aplican en cada momento.**
- **Se debe escribir con bolígrafo azul o negro (no usar lápiz).**
- **No se puede usar calculadora.**

---

1. (1p) Calcule el siguiente límite: $\lim \dfrac{1}{n^4}\sum_{k=1}^{2n} k^3$

2. (1.5p) Estudie el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n}{3^n}$ y, si es posible, calcule la suma.

3. (1.5p) ¿Cuantos sumandos son necesarios para aproximar $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n4^n}$ con un error menor que 10^{-3}?

4. (1p) Consideremos la curva paramétrica $\gamma(t) = (2t^3 - 3t^2 + t, t^2 - t)$ con $t \in [0,1]$
   a) Dibuje la curva. ¿Es una curva cerrada?
   b) ¿Es γ regular en el punto $(0,0)$? Si la respuesta es afirmativa, halle la recta tangente en ese punto.

5. (1.5p) Consideramos la siguiente superficie: $x\,\mathrm{e}^{x+y} + y\,\mathrm{e}^{A(y+z)} + z\,\mathrm{e}^{B(z-x)} = 1$
   Determine los valores de A y B para que el plano tangente a la superficie en el punto $(1,-1,1)$ sea paralelo al plano $-2x+2y+z=3$ y proporcione dicho plano tangente.

6. (1.5p) Consideremos el polinomio $p(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 12x - 2$
   a) Centre el polinomio en el punto $x_0 = 2$
   b) Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{p(x)}{(x-2)^3}\,dx$

7. (2p) Utilice el cambio de variables $\begin{cases} u = \dfrac{y}{x} \\ v = xy \end{cases}$ para calcular la integral $\displaystyle\iint_R \frac{y^3}{x}\log\frac{y}{x}\,dx\,dy$ con R comprendida entre las curvas $xy=2$ y $xy=18$ y las rectas $x=2y$ e $y=8x$ para $y>0$.

FORMULARIO - Tema 2 - Cálculo para la Computación

Grados Ing. Informática, Sotware y Computadores

E. T. S. I. Informática - Curso 2012/2013

Criterios de convergencia de sucesiones:

- Stöltz: $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \lim \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$
- Raíz-Cociente: $\lim \sqrt[n]{x_n} = \lim \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$
- Infinitos/infinitésimos equivalentes:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{sen} x & \sim & x \\ \operatorname{tg} x & \sim & x \\ 1-\cos x & \sim & x^2/2 \\ \operatorname{arc\,sen} x & \sim & x \\ \operatorname{arc\,tg} x & \sim & x \\ e^x - 1 & \sim & x \\ \log(1+x) & \sim & x \\ 1+1/2+\cdots+1/n & \sim & \log n \\ n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n} & \sim & n! \end{array}$$

Métodos numéricos:

- Bisecciones: $f(a)f(b) < 0$

$$\left.\begin{array}{l} r_0 = a \\ r_1 = b \end{array}\right\} \quad r_{n+1} = \frac{r_n + r_m}{2}$$

$$m = \max\{k < n \mid f(r_n)\cdot f(r_k) < 0\}$$

$$\varepsilon_n = |r_n - \alpha| \le \frac{b-a}{2^{n-1}}$$

- Newton: $f(a)f(b) < 0$, $f'(x) \ne 0 \ne f''(x)$

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & \begin{cases} a & \text{si} \quad f(a)f''(a) > 0 \\ b & \text{si} \quad f(a)f''(a) < 0 \end{cases} \\ a_{n+1} & = & a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)} \end{array}$$

$$\varepsilon_n = |a_n - \alpha| < \left|\frac{f(a_n)}{m}\right|$$

$$m \le \min\{|f'(a)|, |f'(b)|\}$$

- Punto medio: $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$

$$t_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{x_{k-1}+x_k}{2}\right)$$

$$\left|t_n - \int_a^b f(x)\,dx\right| \le \frac{M(b-a)^3}{24n^2}$$

$$M = \max\{|f''(x)| : a \le x \le b\}$$

Criterio de convergencia de series:

- Condensación: $\sum a_n \sim \sum 2^k a_{2^k}$
- Comparación: $\sum a_n \sim \sum b_n$ si $\lim \dfrac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$
- Raíz/Cociente: $\ell = \lim \sqrt[n]{a_n}$ ó $\ell = \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$
  - Si $\ell < 1$ la serie $\sum a_n$ converge
  - Si $\ell > 1$ la serie $\sum a_n$ diverge
- Acotación del error para el criterio del cociente:

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} \le r < 1 \text{ para todo } n \ge N$$

$$S - S_N \le \frac{a_{N+1}}{1-r}$$

$$\begin{array}{rcl} r & = & \lim \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \text{ si } r_n \text{ creciente} \\ r & = & r_N < 1 \text{ si } r_n \text{ decreciente} \end{array}$$

- Raabe: $\ell = \lim n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$
  - Si $\ell > 1$ la serie $\sum a_n$ converge
  - Si $\ell < 1$ la serie $\sum a_n$ diverge
- Leibniz: $\sum (-1)^n a_n$ converge si $a_n \downarrow 0$

$$|S - S_N| \le a_{N+1}$$

Series de Potencias-Taylor

- Teorema de Lagrange: Existe c entre x y x_0 y tal que:

$$E_n = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\log x = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n \quad , \quad x \in (0,2]$
- $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$
- $(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \begin{cases} x \in [-1,1] & \alpha > 0 \\ x \in (-1,1] & -1 < \alpha < 0 \\ x \in (-1,1) & \alpha \le -1 \end{cases}$
- $\operatorname{arc\,tg} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad , \quad |x| \le 1$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

FORMULARIO - Temas 3 y 4 - Cálculo para la Computación

Grados Ing. Informática, Sotware y Computadores

E. T. S. I. Informática - Curso 2012/2013

Cónicas: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

- Parábola ($b^2 = 4ac$):

$$(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}y + A)^2 + B(\frac{b}{2\sqrt{a}}x - \sqrt{a}y + C) = 0$$

- Elipse/Hipérbola ($b^2 \neq 4ac$):

$$A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E = 0$$

$$\begin{aligned}(CM^2 + A)x^2 + 2M(A - C)xy + (AM^2 + C)y^2 +\\ +(2CDM + 2AB)x + (2ABM - 2CD)y +\\ +(E + CD^2 + AB^2) = 0\end{aligned}$$

Sustituciones para integración:

- Funciones trigonométricas:

$$\begin{aligned}&R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x) \rightarrow \operatorname{sen} x = t\\ &R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x) \rightarrow \cos x = t\\ &R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x) \rightarrow \operatorname{tg} x = t\end{aligned}$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}\ ,\ \operatorname{sen}^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\ ,\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$$

En otro caso $\rightarrow \operatorname{tg}(x/2) = t$

$$dx = \frac{2}{1+t^2}dt\ ,\ \operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

- Funciones irracionales:

$$\begin{aligned}&R(x, \sqrt{1-x^2}) \longrightarrow x = \operatorname{sen} t\\ &R(x, \sqrt{x^2-1}) \longrightarrow x = 1/\operatorname{sen} t\\ &R(x, \sqrt{x^2+1}) \longrightarrow x = \operatorname{tg} t\end{aligned}$$

Cambios de variable en ecuaciones diferenciales:

- Homogénea: $P + Qy' = 0 \rightarrow y = xz$

  $P(tx, ty) = t^n P(x, y), Q(tx, ty) = t^n Q(x, y)$

- $y' = f(ax + by + c) \rightarrow z = ax + by + c$

- $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$

  $c_1 = c_2 = 0 \rightarrow$ homogénea

  $a_1b_2 = b_1a_2 \rightarrow z = a_1x + b_1y$

  $a_1b_2 \neq b_1a_2 \rightarrow t = x - \alpha, z = y - \beta$

- Bernouilli: $y' + yp(x) = y^n q(x) \rightarrow z = y^{1-n}$

- Riccati:

$$y' + p(x)y^2 + q(x)y = r(x) \rightarrow z = y - \varphi(x)$$

Cambio de variables en integrales múltiples:

$$\iint_{T(D)} F = \iint_D (F \circ T)|\det(JT)|$$

Aplicaciones geométricas de la integral:

- Volumen por secciones:

$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

- Volumen de revolución por discos:

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2\,dx$$

- Volumen de revolución por capas:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

- Longitud de una curva parametrizada:

$$\ell = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

- Integral de un campo escalar sobre una línea:

$$\int_C f = \int_a^b f(\gamma(t))d\ell =$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

- Área de una superficie de revolución:

$$A = \int_C 2\pi f = \int_a^b 2\pi f(t)d\ell =$$

$$= \int_a^b 2\pi f(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

- Área de grafos:

$$\iint_D \sqrt{1 + (D_1f(x,y))^2 + (D_2f(x,y))^2}\,dx\,dy$$

- Teorema de Green:

$$\int_C F = \iint_D (D_1F_2 - D_2F_1)$$

- Área de curva cerrada paramétrica:

$$A = \left|\frac{1}{2}\int_C xdy - ydx\right|$$