UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Departamento de Matemática Aplicada

E. T. S. de Ingeniería Informática

Cálculo para la computación

11–2–2011, Primera convocatoria ordinaria

Apellidos y Nombre: ....

DNI: **Especialidad/Grupo:**

Normas para la realización del examen:

- Se deben **justificar** adecuadamente las respuestas.
- No se puede usar lápiz.
- No se puede usar calculadora.
- Es obligatorio entregar esta hoja debidamente cumplimentada.

---

1. (Hasta 3,5 puntos) Consideremos los campos escalares

$$f(x,y) = \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 6x^2 + 8x - \frac{1}{2}xy^2 + y^2$$
$$g(x,y) = 5x^2 - 8xy - y^2 + 36x + 16y - 76$$

   a) Utiliza la factorización en $\mathbb{R}$ para demostrar que la ecuación $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 = 0$ no tiene soluciones reales.

   b) Determina y clasifica los puntos críticos de $f(x,y)$.

   c) Demuestra que $(2,4)$ y $(2,-4)$ son puntos críticos de $f(x,y)$ sujetos a la condición $g(x,y) = 0$. Clasifícalos.

2. (Hasta 2,5 puntos) Consideramos la función $f(x) = -3 + 8\operatorname{sen}^4 x$.

   a) Demuestra que $f(x) = \cos(4x) - 4\cos(2x)$.

   b) Demuestra que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} f\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ es convergente y súmala.

3. (Hasta 1,5 puntos) Determina el valor de la constante k para que la siguiente ecuación sea exacta:

$$(ky^3 - y\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}^k x) + (12xy^2 - x\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}^k y)y' = 0$$

   Para ese valor de k, calcula la solución de la ecuación tal que $y(8\pi) = 0$.

4. (Hasta 2,5 puntos) Calcule la integral

$$\iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy,$$

   siendo R la región encerrada por la curva polar $r = \operatorname{sen} 4\theta$ en $\theta \in [0, \pi/4]$.

1. Consideremos los campos escalares

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= \frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{10}{3}x^3 - 6x^2 + 8x - \frac{1}{2}xy^2 + y^2 \\
g(x,y) &= 5x^2 - 8xy - y^2 + 36x + 16y - 76
\end{aligned}
$$

a) Utiliza la factorización en $\mathbb{R}$ para demostrar que la ecuación $x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 = 0$ no tiene soluciones reales.

Solución: En primer lugar, vamos a realizar la sustitución $x = t + 1$, es decir $x - 1 = t$, para obtener un polinomio sin término de grado 3. Para hacer esta sustitución más fácilmente, vamos a expresar el polinomio de la ecuación centrándolo en 1; para ello, utilizamos el método de Ruffini:

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -4 & 10 & -12 & 8 \\
1 & & 1 & -3 & 7 & -5 \\
\hline
 & 1 & -3 & 7 & -5 & \boxed{3} \\
1 & & 1 & -2 & 5 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 5 & \boxed{0} & \\
1 & & 1 & -1 & & \\
\hline
 & 1 & -1 & \boxed{4} & & \\
1 & & 1 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}
$$

Por lo tanto:

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 = (x-1)^4 + 4(x-1)^2 + 3 = t^4 + 4t^2 + 3$$

La ecuación $t^4 + 4t^2 + 3 = 0$ es bicuadrada y se resuelve fácilmente:

$$t^2 = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \quad \Rightarrow \quad t^2 = -1, \quad t^2 = -3$$

Ya podemos deducir la factorización del polinomio inicial:

$$
\begin{aligned}
x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 = t^4 + 4t^2 + 3 = (t^2+1)(t^2+3) = \\
= ((x-1)^2 + 1)((x-1)^2 + 3) = (x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 4)
\end{aligned}
$$

A partir de aquí, deducimos que la ecuación no tiene soluciones reales, ya que las ecuaciones

$$x^2 - 2x + 2 = 0, \qquad x^2 - 2x + 4 = 0$$

no tienen soluciones reales.

b) Determina y clasifica los puntos críticos de $f(x,y)$.

Solución:

$$
\begin{aligned}
0 &= D_1 f(x,y) = x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 - \frac{1}{2}y^2 \\
0 &= D_2 f(x,y) = -xy + 2y
\end{aligned}
$$

De la ecuación $0 = -xy + 2y = y(2-x)$, deducimos que o bien $y = 0$ o bien $x = 2$. El caso $y = 0$ nos lleva, por la primera ecuación, a

$$x^4 - 4x^3 + 10x^2 - 12x + 8 = 0,$$

que, según hemos deducido en el primer apartado no tiene soluciones reales. El caso $x = 2$ nos lleva, por la primera ecuación, a

$$0 = 2^4 - 4 \cdot 2^3 + 10 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8 - \frac{1}{2}y^2 = 8 - \frac{1}{2}y^2,$$

de donde deducimos que $y^2 = 16$ e $y = \pm 4$. Por lo tanto, los únicos puntos críticos de f son $(2, 4)$ y $(2, -4)$.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 4x^3 - 12x^2 + 20x - 12 & -y \\ -y & 2 - x \end{pmatrix} \\
\nabla^2 f(2, 4) &= \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \\
d^2 f_{(2,4)}(u_1, u_2) &= 12u_1^2 - 8u_1u_2 = 3(2u_1 - \frac{2}{3}u_2)^2 - \frac{4}{3}u_2^2 \\
p(u) &= \begin{vmatrix} 12 - u & -4 \\ -4 & -u \end{vmatrix} = -u(12 - u) - 8 = u^2 - 12u - 8
\end{aligned}$$

Mirando los coeficientes de la diferencial segunda (son no nulos y tienen signos opuestos) o los coeficientes del polinomio característico (ni tienen el mismo signo, ni alternan) deducimos que $(2, 4)$ es un punto de silla.

$$\begin{aligned}
\nabla^2 f(2, -4) &= \begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \\
d^2 f_{(2,-4)}(u_1, u_2) &= 12u_1^2 + 8u_1u_2 = 3(2u_1 + \frac{2}{3}u_2)^2 - \frac{4}{3}u_2^2 \\
p(u) &= \begin{vmatrix} 12 - u & 4 \\ 4 & -u \end{vmatrix} = -u(12 - u) - 8 = u^2 - 12u - 8
\end{aligned}$$

Mirando los coeficientes de la diferencial segunda (son no nulos y tienen signos opuestos) o los coeficientes del polinomio característico (ni tienen el mismo signo, ni alternan) deducimos que $(2, -4)$ es un punto de silla.

c) Demuestra que $(2, 4)$ y $(2, -4)$ son puntos críticos de $f(x, y)$ sujetos a la condición $g(x, y) = 0$. Clasifícalos.

Solución: Para demostrar que $(2, 4)$ y $(2, -4)$ también son puntos críticos sobre la restricción $g(x, y) = 0$, solo tenemos que demostrar que $g(2, 4) = g(2, -4) = 0$, ya que, según hemos demostrado antes, $\nabla f(2, 4) = \nabla f(2, -4) = (0, 0)$, y por lo tanto, $\lambda = 0$ sería el multiplicador de Lagrange asociado a ambos puntos:

$$\begin{aligned}
g(x, y) &= 5x^2 - 8xy - y^2 + 36x + 16y - 76 \\
g(2, 4) &= 5 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 \cdot 4 - 4^2 + 36 \cdot 2 + 16 \cdot 4 - 76 = 0 \\
g(2, -4) &= 5 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 \cdot 4 - 4^2 + 36 \cdot 2 - 16 \cdot 4 - 76 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, efectivamente los dos puntos son críticos. Dado $F_0(x, y) = f(x, y) - 0 \cdot g(x, y) = f(x, y)$, para clasificar estos puntos utilizamos la diferencial segunda de f sobre la dirección tangente a la curva $g(x, y) = 0$ en los puntos. Estos vectores tangentes los calculamos a partir del vector gradiente:

$$\begin{aligned}
\nabla g(x, y) &= (10x - 8y + 36, -8x - 2y + 16) \\
\nabla g(2, 4) &= (10 \cdot 2 - 8 \cdot 4 + 36, -8 \cdot 2 - 2 \cdot 4 + 16) = (24, -8)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, un vector tangente a $g(x,y)=0$ en $(2,4)$ es $(1,3)$ y, dado que

$$d^2 f_{(2,4)}(1,3) = 12 \cdot 1^2 - 8 \cdot 1 \cdot 3 = -12 < 0,$$

podemos afirmar que $(2,4)$ es máximo de $f(x,y)$ sobre la restricción $g(x,y)=0$. También podemos llegar a esta conclusión usando el polinomio característico asociado a la matriz hessiana extendida, cuyos coeficientes son no nulos y tiene el mismo signo:

$$p(u) = \begin{vmatrix} 0 & 24 & -8 \\ 24 & 12-u & -4 \\ -8 & -4 & -u \end{vmatrix} = 640u + 768$$

Por otra parte,

$$\nabla g(2,-4) = (10 \cdot 2 + 8 \cdot 4 + 36, -8 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 16) = (88, 8),$$

y por lo tanto $(-1,11)$ es un vector tangente a $g(x,y)=0$ en $(2,-4)$; dado que

$$d^2 f_{(2,-4)}(-1,11) = 12 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1) \cdot 11 = -76 < 0,$$

podemos afirmar que $(2,-4)$ es máximo de $f(x,y)$ sobre la restricción $g(x,y)=0$. También podemos llegar a esta conclusión usando el polinomio característico asociado a la matriz hessiana extendida, cuyos coeficientes son no nulos y tienen el mismo signo:

$$p(u) = \begin{vmatrix} 0 & 88 & 8 \\ 88 & 12-u & 4 \\ 8 & 4 & -u \end{vmatrix} = 7808u + 4864$$

2. Consideramos la función $f(x) = -3 + 8\operatorname{sen}^4 x$.

   a) Demuestra que $f(x) = \cos(4x) - 4\cos(2x)$.
   Solución: Podemos probar la igualdad de dos formas:

$$\begin{aligned}
-3 + 8\operatorname{sen}^4 x &= -3 + 8\left(\frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2i}\right)^4 = \\
&= -3 + \frac{1}{2}(e^{4\mathrm{i}x} - 4e^{3\mathrm{i}x}e^{-\mathrm{i}x} + 6e^{2\mathrm{i}x}e^{-2\mathrm{i}x} - 4e^{\mathrm{i}x}e^{-3\mathrm{i}x} + e^{-4\mathrm{i}x}) = \\
&= -3 + \frac{1}{2}(e^{4\mathrm{i}x} + e^{-4\mathrm{i}x} - 4e^{2\mathrm{i}x} - 4e^{-2\mathrm{i}x} + 6) = \\
&= -3 + \frac{1}{2}(e^{4\mathrm{i}x} + e^{-4\mathrm{i}x}) - 4\frac{1}{2}(e^{2\mathrm{i}x} + e^{-2\mathrm{i}x}) + 3 = \cos(4x) - 4\cos(2x)
\end{aligned}$$

   También podemos desarrollar en el otro sentido utilizando las fórmulas del coseno y el seno del ángulo doble:

$$\begin{aligned}
\cos(4x) - 4\cos(2x) &= \cos^2(2x) - \operatorname{sen}^2(2x) - 4\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = \\
&= (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 4\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = \\
&= \cos^4 x - 2\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x - 4\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x - 4\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = \\
&= \cos^4 x - 6\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x + \operatorname{sen}^4 x - 4\cos^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = \\
&= (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 - 6\operatorname{sen}^2 x(1 - \operatorname{sen}^2 x) + \operatorname{sen}^4 x - 4 + 4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = \\
&= 1 - 2\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x - 6\operatorname{sen}^2 x + 6\operatorname{sen}^4 x + \operatorname{sen}^4 x - 4 + 4\operatorname{sen}^2 x + 4\operatorname{sen}^2 x = \\
&= -3 + 8\operatorname{sen}^4 x
\end{aligned}$$

b) Demuestra que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} f\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ es convergente y súmala.

Solución: Para estudiar la convergencia de la serie, empezamos estudiando su convergencia absoluta mediante el criterio de comparación; para ello, observamos en primer lugar que:

$$
\begin{gathered}
0 \leq \operatorname{sen}^4 x \leq 1 \\
0 \leq 8\operatorname{sen}^4 x \leq 8 \\
-3 \leq -3 + 8\operatorname{sen}^4 x \leq 5 \\
|f(x)| = |-3 + 8\operatorname{sen}^4 x| \leq 5
\end{gathered}
$$

A partir de aquí, deducimos la siguiente acotación para la serie del enunciado:

$$\left|\frac{n}{2^n} f\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right| = \frac{n}{2^n}\left|f\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right| \leq \frac{n}{2^n} \cdot 5 = \frac{5n}{2^n}$$

La serie mayorante, $\sum \frac{5n}{2^n}$, es aritmético-geométrica de razón $1/2 < 1$ y, por lo tanto, es convergente. En consecuencia, la serie propuesta es absolutamente convergente. Para sumar la serie, usamos el primer apartado para simplificar la expresión del término general:

$$f\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \cos(n\pi) - 4\cos\frac{n\pi}{2}$$

Por lo tanto:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} f\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}(\cos(n\pi) - 4\cos\frac{n\pi}{2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\cos(n\pi) - 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2}$$

La última igualdad es cierta porque las dos series son convergentes; en particular, son absolutamente convergentes, lo que se deduce utilizando el mismo método que hemos empleado para estudiar la serie propuesta.

Vamos a sumar cada una de ellas. Si tenemos en cuenta que $\cos(n\pi) = (-1)^n$ para todo n, la primera serie la podemos escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^n,$$

es decir, es una serie aritmético-geométrica de razón $-1/2$ que sumamos como sigue:

$$
\begin{array}{rcl}
S_n & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{-1}{2}\right)^k \\
S_n & = & -\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^n n}{2^n} \\
\frac{1}{2}S_n & = & \quad - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{2^n} + \frac{(-1)^n n}{2^{n+1}} \\
\hline
\left(1+\frac{1}{2}\right)S_n = \frac{3}{2}S_n & = & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \frac{(-1)^n n}{2^{n+1}} \\
\frac{1}{2}\frac{3}{2}S_n = \frac{3}{4}S_n & = & \quad - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n n}{2^{n+2}} \\
\hline
\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)S_n = \frac{9}{4}S_n & = & -\frac{1}{2} + \frac{(-1)^n n}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} + \frac{(-1)^n n}{2^{n+2}}
\end{array}
$$

Tomando límites en ambos lados de la igualdad y teniedo en cuenta que $\lim \frac{1}{2^n} = \lim \frac{n}{2^n} = 0$,

$$\frac{9}{4}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^n = -\frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^n = -\frac{4}{9\cdot 2} = -\frac{2}{9}$$

La segunda serie que tenemos que sumar es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2}$. Observamos en primer luga que $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$ si n es impar y que

$$\cos\frac{2k\pi}{2} = \cos(k\pi) = (-1)^k;$$

por lo tanto, la serie la podemos escribir como

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}\cos\frac{n\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{2^{2k}}\cos\frac{2k\pi}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k}{4^k}(-1)^k = 2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{4}\right)^n$$

Sumamos la segunda serie de la misma forma

$$\begin{array}{rcl}
S_n &=& \sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{-1}{4}\right)^k \\
S_n &=& -\frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} - \frac{3}{4^3} + \dots + \frac{(-1)^n n}{4^n} \\
\frac{1}{4}S_n &=& \qquad - \frac{1}{4^2} + \frac{2}{4^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}(n-1)}{4^n} + \frac{(-1)^n n}{4^{n+1}} \\
\hline
\left(1+\frac{1}{4}\right)S_n = \frac{5}{4}S_n &=& -\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{4^n} + \frac{(-1)^n n}{4^{n+1}} \\
\frac{1}{4}\frac{5}{4}S_n = \frac{5}{16}S_n &=& \qquad - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{4^n} + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} + \frac{(-1)^n n}{4^{n+2}} \\
\hline
\left(\frac{5}{4}+\frac{5}{16}\right)S_n = \frac{25}{16}S_n &=& -\frac{1}{4} + \frac{(-1)^n n}{4^{n+1}} + \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} + \frac{(-1)^n n}{4^{n+2}}
\end{array}$$

Tomando límites en ambos lados de la igualdad:

$$\frac{25}{16}\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{4}\right)^n = -\frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{4}\right)^n = -\frac{16}{25\cdot 4} = -\frac{4}{25}$$

Y en consecuencia, la suma de la serie propuesta es:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}f\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{2}\right)^n - 4\cdot 2\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{-1}{4}\right)^n = -\frac{2}{9} - 8\left(-\frac{4}{25}\right) = -\frac{2}{9} + \frac{32}{25} = \frac{238}{225}$$

3. Determina el valor de la constante k para que la siguiente ecuación sea exacta:

$$(ky^3 - y\,\mathrm{sen}(xy) + \mathrm{sen}^k x) + (12xy^2 - x\,\mathrm{sen}(xy) + \mathrm{sen}^k y)y' = 0$$

Para ese valor de k, calcula la solución de la ecuación tal que $y(8\pi) = 0$.

Solución: Sea $P(x,y) = ky^3 - y\,\mathrm{sen}(xy) + \mathrm{sen}^k x$ y $Q(x,y) = 3ky^2 - \mathrm{sen}(xy) - xy\cos(xy)$. Podemos afirmar que la ecuación es exacta si $D_2P(x,y) = D_1Q(x,y)$.

$$D_2P(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(ky^3 - y\,\mathrm{sen}(xy) + \mathrm{sen}^k x) = 3ky^2 - \mathrm{sen}(xy) - xy\cos(xy)$$

$$D_1Q(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(12xy^2 - x\,\mathrm{sen}(xy) + \mathrm{sen}^k y) = 12y^2 - \mathrm{sen}(xy) - xy\cos(xy)$$

Por lo tanto, para que la ecuación sea exacta, debe ocurrir que,

$$\begin{aligned} 3ky^2 - \operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy) &= 12y^2 - \operatorname{sen}(xy) - xy\cos(xy) \\ 3ky^2 &= 12y^2 \\ 3k &= 12 \\ k &= 4 \end{aligned}$$

Para resolver la ecuación, necesitamos calcular una primitiva de $\operatorname{sen}^4 x$ y para ello, utilizamos la igualdad que aparece en el ejercicio 2:

$$\int \operatorname{sen}^4 x\, dx = \frac{1}{8}\int (3 + \cos(4x) - 4\cos(2x))\, dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)$$

Resolvemos entonces la ecuación como sigue:

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \int (4y^3 - y\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}^4 x)\, dx = 4y^3x + \cos(xy) + \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \varphi(y) \\ 12xy^2 - x\operatorname{sen}(xy) + \operatorname{sen}^4 y &= \frac{\partial}{\partial y}U(x,y) = 12y^2x - x\operatorname{sen}(xy) + \varphi'(y) \\ \operatorname{sen}^4 y &= = \varphi'(y) \\ \frac{3}{8}y + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4y) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) &= \varphi(y) \end{aligned}$$

Obsérvese que la última primitiva calculada es exactamente la misma que hemos resuelto más arriba. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es:

$$U(x,y) = 4y^3x + \cos(xy) + \frac{3}{8}x + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4x) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + \frac{3}{8}y + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(4y) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2y) = c$$

Par obtener la solución particular tal que $y(8\pi) = 0$, sustituimos en la igualdad anterior $x = 8\pi$ e $y = 0$ para determinar el valor de c:

$$0 + \cos 0 + 3\pi + \frac{1}{32}\operatorname{sen}(32\pi) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(16\pi) + 0 + \frac{1}{32}\operatorname{sen} 0 - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 0 = c \qquad \Rightarrow \qquad c = 1 + 3\pi$$

4. Calcule la integral

$$\iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy,$$

siendo R la región encerrada por la curva polar $r = \operatorname{sen} 4\theta$ en $\theta \in [0, \pi/4]$.

Solución: Dado que la región está descrita en coordenadas polares, vamos a utilizar el cambio de variable a coordenadas polares para calcular la integral:

$$\iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \iint_{R'} \frac{r\cos\theta + r\operatorname{sen}\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\operatorname{sen}^2\theta} r\,dr\,d\theta =$$
$$= \iint_{R'} \frac{r^2(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\operatorname{sen}^2\theta)}\,dr\,d\theta =$$
$$= \iint_{R'} (\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\operatorname{sen}4\theta} (\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,dr\,d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/4} \Big[r(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\Big]_{r=0}^{r=\operatorname{sen}(4\theta)} d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(4\theta)(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,d\theta =$$

Para obtener una primitiva del integrando, tendremos en cuenta la siguiente igualdad:

$$\operatorname{sen}(4\theta) = \operatorname{Im}(\cos\theta + \mathrm{i}\operatorname{sen}\theta)^4 = \operatorname{Im}(\cos^4\theta + 4\mathrm{i}\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta - 6\cos^\theta\operatorname{sen}^2\theta - 4\mathrm{i}\cos\theta\operatorname{sen}^3 + \operatorname{sen}^4\theta) =$$
$$= 4\cos^3\theta\operatorname{sen}\theta - 4\cos\theta\operatorname{sen}^3\theta$$

Por lo tanto:

$$\iint_R \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}(4\theta)(\cos\theta+\operatorname{sen}\theta)\,d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/4} (4\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta - 4\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta + 4\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta - 4\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta =$$
$$= \int_0^{\pi/4} 4\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta + \int_0^{\pi/4} 4\cos^3\theta\operatorname{sen}^2\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/4} 4\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta =$$
$$= I_1 - I_2 + I_3 - I_4$$

La primera y la cuarta integral son inmediatas:

$$I_1 - I_4 = \int_0^{\pi/4} 4\cos^4\theta\operatorname{sen}\theta\,d\theta - \int_0^{\pi/4} 4\cos\theta\operatorname{sen}^4\theta)\,d\theta =$$
$$= \left[-\frac{4}{5}\cos^5\theta - \frac{4}{5}\operatorname{sen}^5\theta\right]_0^{\pi/4} = -\frac{4}{5}\cos^5\frac{\pi}{4} - \frac{4}{5}\operatorname{sen}^5\frac{\pi}{4} + \frac{4}{5}\cos^5 0 + \frac{4}{5}\operatorname{sen}^5 0 =$$
$$= -\frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 - \frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \frac{4}{5} = -\frac{8}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \frac{4}{5} = -\frac{8}{5}\cdot\frac{4\sqrt{2}}{32} + \frac{4}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{4}{5}$$

En las otras dos, utilizamos los cambios de variables recomendados para funciones racionales en seno y coseno.

Para calcular

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta\operatorname{sen}^3\theta\,d\theta,$$

hacemos $t = \cos\theta$, $dt = -\operatorname{sen}\theta\, d\theta$:

$$I_2 = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta = \int_{\cos 0}^{\cos\pi/4} -4t^2(1-t^2)\, dt =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}/2} (-4t^2 + 4t^4)\, dt = \left[-\frac{4}{3}t^3 + \frac{4}{5}t^5\right]_1^{\sqrt{2}/2} = -\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 + \frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 + \frac{4}{3} - \frac{4}{5} =$$

$$= -\frac{4}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{4}{5}\frac{4\sqrt{2}}{32} + \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = -\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{4}{3} - \frac{4}{5}$$

Para calcular

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} 4\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta,$$

hacemos $t = \operatorname{sen}\theta$, $dt = \cos\theta\, d\theta$:

$$I_3 = \int_0^{\pi/4} 4\cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2\theta \operatorname{sen}^2\theta \cos\theta\, d\theta =$$

$$= \int_{\operatorname{sen} 0}^{\operatorname{sen}\pi/4} 4(1-t^2)t^2\, dt = \int_0^{\sqrt{2}/2} (4t^2 - 4t^4)\, dt = \left[\frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{2}/2} =$$

$$= \frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{4}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 = \frac{4}{3}\frac{2\sqrt{2}}{8} - \frac{4}{5}\frac{4\sqrt{2}}{32} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Por lo tanto:

$$\iint\limits_R \frac{x+y}{x^2+y^2}\, dx\, dy = I_1 - I_4 - I_2 + I_3 =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{5} + \frac{4}{5} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{4}{3} - \frac{4}{5}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{10} =$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}}{5} + \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} + \frac{8}{5} = \frac{4\sqrt{2}}{15} + \frac{4}{15}$$