1. Sabiendo que todas las raíces reales de $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ son enteras

   a) obtener su factorización en $\mathbb{R}$

   b) ¿Es posible descomponer $\dfrac{5x^3 + 9x^2 + 10x + 1}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ en fracciones simples? En caso negativo, justificar la respuesta y, en caso afirmativo, determinar la descomposición correspondiente.

2. Sabiendo que $sen\, 2x = 2\, sen\, x\, cos\, x$, obtener una fórmula para la derivada n-ésima de la función $f(x) = sen^2 x$. ¿Cuál es el polinomio de Taylor de $sen^2 x$ centrado en 0 y de orden 9?

Solución

1. *a*) Puesto que todas las raíces de $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ son enteras, podemos obtener su factorización utilizando el método de Ruffini, probando con los divisores del término independiente. Así, teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 1 & 2 & 5 & 8 & 4 \\
-1 & & -1 & -1 & -4 & -4 \\
\hline
 & 1 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 0 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 0 & 4 & \boxed{0} &
\end{array}$$

   y puesto que $x^2 + 4$ es irreducible en $\mathbb{R}$, podemos afirmar que $x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4$ lo podemos factorizar como $(x + 1)^2\,(x^2 + 4)$

   b) Puesto que la función racional $\dfrac{5x^3 + 9x^2 + 10x + 1}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$ es propia, la podemos descomponer en fracciones simples. Para ello, y teniendo en cuenta la factorización obtenida anteriormente, tenemos que determinar cuatro constantes reales A, B, C y D tales que

$$\frac{5x^3 + 9x^2 + 10x + 1}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 4}$$

   Puesto que el término de la derecha lo podemos reescribir como

$$\frac{A(x+1)(x^2+4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+4)} =$$

$$= \frac{A(x^3 + x^2 + 4x + 4) + B(x^2+4) + (Cx+D)(x^2+2x+1)}{(x^2+2x+1)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (A+B+2C+D)x^2 + (4A+C+2D)x + (4A+4B+D)}{x^4 + 2x^3 + 5x^2 + 8x + 4}$$

   identificando los coeficientes de los polinomios del numerador (ya que los denominadores son iguales), para determinar dichas constantes, tenemos que resolver el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas

$$\left.\begin{array}{lrcl}
(e_1^{[1]}) & A + C & = & 5 \\
(e_2^{[1]}) & A + B + 2C + D & = & 9 \\
(e_3^{[1]}) & 4A + C + 2D & = & 10 \\
(e_4^{[1]}) & 4A + 4B + D & = & 1
\end{array}\right\}$$

que, despejando C en la ecuación $e_1^{[1]}$ y sustituyéndolo en las ecuaciones $e_2^{[1]}$ y $e_3^{[1]}$, es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lccl} (e_1^{[2]}) & C & = & 5-A \\ (e_2^{[2]}) & -A+B+D & = & -1 \\ (e_3^{[2]}) & 3A+2D & = & 5 \\ (e_4^{[2]}) & 4A+4B+D & = & 1 \end{array}\right\}$$

Si ahora despejamos B en la ecuación $e_2^{[2]}$ y lo sustituimos en $e_4^{[2]}$, podemos afirmar que nuestro sistema también es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lccl} (e_1^{[3]}) & C & = & 5-A \\ (e_2^{[3]}) & B & = & A-D-1 \\ (e_3^{[3]}) & 3A+2D & = & 5 \\ (e_4^{[3]}) & 8A-3D & = & 5 \end{array}\right\}$$

Sumando $3\,e_3^{[3]}$ con $2\,e_4^{[3]}$, podemos afirmar que A tiene que cumplir que $25\,A = 25$, con lo que $A = 1$ y, por tanto, $D = 1$, $B = -1$ y $C = 4$, con lo que la descomposición pedida es

$$\frac{5x^3+9x^2+10x+1}{x^4+2x^3+5x^2+8x+4} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{4x+1}{x^2+4}$$

2. Teniendo en cuenta la igualdad $sen\,2x = 2\,sen\,x\,cos\,x$, se tiene que

$$\begin{array}{c|c} f(x) = sen^2 x \Rightarrow f(0) = 0 & f^{(5}(x) = 16\,sen\,2x \Rightarrow f^{(5}(0) = 0 \\ f'(x) = 2\,sen\,x\,cos\,x = sen\,2x \Rightarrow f'(0) = 0 & f^{(6}(x) = 32\,cos\,2x \Rightarrow f^{(6}(0) = 32 \\ f''(x) = 2\,cos\,2x \Rightarrow f''(0) = 2 & f^{(7}(x) = -64\,sen\,2x \Rightarrow f^{(7}(0) = 0 \\ f'''(x) = -4\,sen\,2x \Rightarrow f'''(0) = 0 & f^{(8}(x) = -128\,cos\,2x \Rightarrow f^{(8}(0) = -128 \\ f^{(4}(x) = -8\,cos\,2x \Rightarrow f^{(4}(0) = -8 & f^{(9}(x) = 256\,sen\,2x \Rightarrow f^{(4}(0) = 0 \end{array}$$

Así, el polinomio de Taylor pedido es

$$P_{9,\,sen^2x,0}(0) = 0 + 0(x-0) + \frac{2}{2!}(x-0)^2 + \frac{0}{3!}(x-0)^3 + \frac{-8}{4!}(x-0)^4 + \frac{0}{5!}(x-0)^5 +$$

$$+\frac{32}{6!}(x-0)^6 + \frac{0}{7!}(x-0)^7 + \frac{-128}{8!}(x-0)^8 + \frac{0}{9!}(x-0)^9 =$$

$$= x^2 - \frac{\cancel{8}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}\cdot x^4 + \frac{\cancel{4}\cdot 2\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}}{3\cdot \cancel{2}\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}\cdot x^6 - \frac{\cancel{8}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{2}}{\cancel{8}\cdot 7\cdot 3\cdot \cancel{2}\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot 3\cdot \cancel{2}}\cdot x^8 =$$

$$= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2\,x^6}{45} - \frac{x^8}{315}$$

y, para todo natural n con $n \geq 1$, la derivada $n-$ésima de $f(x) = sen^2 x$ es

$$f^{(n}(x) = \begin{cases} \Big(-1\Big)^{\frac{n-1}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot sen\,2x & \text{si } n \text{ es impar} \\ \Big(-1\Big)^{\frac{n-2}{2}} \cdot 2^{n-1} \cdot cos\,2x & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

1. Sabiendo que todas las raíces reales de $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ son enteras

   a) obtener su factorización en $\mathbb{R}$

   b) ¿Es posible descomponer $\dfrac{3x^3 - 11x^2 + 5x}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$ en fracciones simples? En caso negativo, justificar la respuesta y, en caso afirmativo, determinar la descomposición correspondiente.

2. Sabiendo que $sen\, 2x = 2\, sen\, x\, cos\, x$, obtener una fórmula para la derivada n-ésima de la función $f(x) = cos^2 x$. ¿Cuál es el polinomio de Taylor de $cos^2 x$ centrado en 0 y de orden 9?

Solución

1. *a*) Puesto que todas las raíces de $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ son enteras, podemos obtener su factorización utilizando el método de Ruffini, probando con los divisores del término independiente. Así, teniendo en cuenta que

$$\begin{array}{c|rrrr|r} & 1 & -4 & 5 & -4 & 4 \\ 2 & & 2 & -4 & 2 & -4 \\ \hline & 1 & -2 & 1 & -2 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 0 & 2 & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & \boxed{0} & \end{array}$$

y puesto que $x^2 + 1$ es irreducible en $\mathbb{R}$, podemos afirmar que $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4$ lo podemos factorizar como $(x-2)^2\,(x^2+1)$

   b) Puesto que la función racional $\dfrac{3x^3 - 11x^2 + 5x}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$ es propia, la podemos descomponer en fracciones simples. Para ello, y teniendo en cuenta la factorización obtenida en el apartado anterior, tenemos que determinar cuatro constantes reales A, B, C y D tales que

$$\frac{3x^3 - 11x^2 + 5x}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Puesto que el término de la derecha lo podemos reescribir como

$$\frac{A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2+1)} =$$

$$= \frac{A(x^3 - 2x^2 + x - 2) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x^2 - 4x + 4)}{(x^2 - 4x + 4)(x^2+1)} =$$

$$= \frac{(A+C)x^3 + (-2A + B - 4C + D)x^2 + (A + 4C - 4D)x + (-2A + B + 4D)}{x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 4}$$

identificando los coeficientes de los polinomios del numerador (ya que los denominadores son iguales), para determinar dichas constantes, tenemos que resolver el siguiente sistema de cuatro ecuaciones lineales con cuatro incógnitas

$$\left.\begin{array}{lccc} (e_1^{[1]}) & A + C & = & 3 \\ (e_2^{[1]}) & -2A + B - 4C + D & = & -11 \\ (e_3^{[1]}) & A + 4C - 4D & = & 5 \\ (e_4^{[1]}) & -2A + B + 4D & = & 0 \end{array}\right\}$$

que, despejando C en la ecuación $e_1^{[1]}$ y sustituyéndolo en las ecuaciones $e_2^{[1]}$ y $e_3^{[1]}$, es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lccl} (e_1^{[2]}) & C & = & 3-A \\ (e_2^{[2]}) & 2A+B+D & = & 1 \\ (e_3^{[2]}) & -3A-4D & = & -7 \\ (e_4^{[2]}) & -2A+B+4D & = & 0 \end{array}\right\}$$

Si ahora despejamos B en la ecuación $e_4^{[2]}$ y lo sustituimos en $e_2^{[2]}$, podemos afirmar que nuestro sistema también es equivalente a

$$\left.\begin{array}{lccl} (e_1^{[3]}) & C & = & 3-A \\ (e_2^{[3]}) & 4A-3D & = & 1 \\ (e_3^{[3]}) & -3A-4D & = & -7 \\ (e_4^{[3]}) & B & = & 2A-4D \end{array}\right\}$$

Sumando $3\,e_2^{[3]}$ con $4\,e_3^{[3]}$, podemos afirmar que D tiene que cumplir que $-25\,D=-25$, con lo que $D=1$ y, por tanto, $A=1$, $B=-2$ y $C=2$, con lo que la descomposición pedida es

$$\frac{3x^3-11x^2+5x}{x^4-4x^3+5x^2-4x+4}=\frac{1}{x-2}-\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{2x+1}{x^2+1}$$

2. Teniendo en cuenta la igualdad $sen\,2x=2\,sen\,x\,cos\,x$, se tiene que

$$\begin{array}{c|c} f(x)=cos^2x\Rightarrow f(0)=1 & f^{(5}(x)=-16\,sen\,2x\Rightarrow f^{(5}(0)=0 \\ f'(x)=-2\,sen\,x\,cos\,x=-sen\,2x\Rightarrow f'(0)=0 & f^{(6}(x)=-32\,cos\,2x\Rightarrow f^{(6}(0)=-32 \\ f''(x)=-2\,cos\,2x\Rightarrow f''(0)=-2 & f^{(7}(x)=64\,sen\,2x\Rightarrow f^{(7}(0)=0 \\ f'''(x)=4\,sen\,2x\Rightarrow f'''(0)=0 & f^{(8}(x)=128\,cos\,2x\Rightarrow f^{(8}(0)=128 \\ f^{(4}(x)=8\,cos\,2x\Rightarrow f^{(4}(0)=8 & f^{(9}(x)=-256\,sen\,2x\Rightarrow f^{(4}(0)=0 \end{array}$$

Así, el polinomio de Taylor pedido es

$$P_{9,\,sen^2x,0}(0)=1+0(x-0)+\frac{-2}{2!}(x-0)^2+\frac{0}{3!}(x-0)^3+\frac{8}{4!}(x-0)^4+\frac{0}{5!}(x-0)^5+$$

$$+\frac{-32}{6!}(x-0)^6+\frac{0}{7!}(x-0)^7+\frac{128}{8!}(x-0)^8+\frac{0}{9!}(x-0)^9=$$

$$=1-x^2+\frac{\cancel{8}}{\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}\cdot x^4-\frac{\cancel{4}\cdot 2\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{3\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}\cdot x^6+\frac{\cancel{8}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}}{\cancel{8}\cdot 7\cdot 3\cdot\cancel{2}\cdot 5\cdot\cancel{4}\cdot 3\cdot\cancel{2}}\cdot x^8=$$

$$=1-x^2+\frac{x^4}{3}-\frac{2\,x^6}{45}+\frac{x^8}{315}$$

y, para todo natural n con $n\geq 1$, la derivada $n-$ésima de $f(x)=cos^2x$ es

$$f^{(n}(x)=\begin{cases}\Big(-1\Big)^{\frac{n+1}{2}}\cdot 2^{n-1}\cdot sen\,2x & \text{si } n \text{ es impar}\\[2ex] \Big(-1\Big)^{\frac{n}{2}}\cdot 2^{n-1}\cdot cos\,2x & \text{si } n \text{ es par}\end{cases}$$