Cálculo para la computación

24–10–2011 – Primera prueba parcial

---

1. (Hasta 2 puntos) Exprese $\operatorname{sen}^5\theta$ en términos de senos de múltiplos de θ.

   Solución:

$$\operatorname{sen}^5\theta = \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^5 = \frac{1}{32i}\Big(e^{5i\theta}-5e^{4i\theta}e^{-i\theta}+10e^{3i\theta}e^{-2i\theta}-10e^{2i\theta}e^{-3i\theta}+5e^{i\theta}e^{-4i\theta}-e^{-5i\theta}\Big) =$$
$$= \frac{1}{32i}\Big(e^{5i\theta}-5e^{3i\theta}+10e^{i\theta}-10e^{-i\theta}+5e^{-3i\theta}-e^{-5i\theta}\Big) =$$
$$= \frac{1}{32i}\Big(\big(e^{5i\theta}-e^{-5i\theta}\big)-5\big(e^{3i\theta}-e^{-3i\theta}\big)+10\big(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{32i}\big(2i\operatorname{sen}5\theta-10i\operatorname{sen}3\theta+20i\operatorname{sen}\theta\big) = \frac{1}{16}\operatorname{sen}5\theta-\frac{5}{16}\operatorname{sen}3\theta+\frac{5}{8}\operatorname{sen}\theta$$

---

2. (Hasta 2 puntos) Consideremos el número complejo $z = \frac{-1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$.

   a) Exprese z en forma exponencial.

   b) Calcule las raíces cuartas de z y exprese el resultado en forma binómica.

   c) Represente gráficamente el número complejo z y sus raíces cuartas.

   Solución:

   a) Calculamos el módulo y el argumento: $|z| = \sqrt{\dfrac{1}{32^2}+\dfrac{3}{32^2}} = \sqrt{\dfrac{4}{32^2}} = \dfrac{2}{32} = \dfrac{1}{16}$;
   si $\theta = \operatorname{Arg}(z)$, entonces $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$ y, dado que z está en el tercer cuadrante, $\theta = \frac{4\pi}{3}$.
   Por lo tanto: $z = \dfrac{1}{16}\exp\left(\dfrac{4\pi}{3}i\right)$.

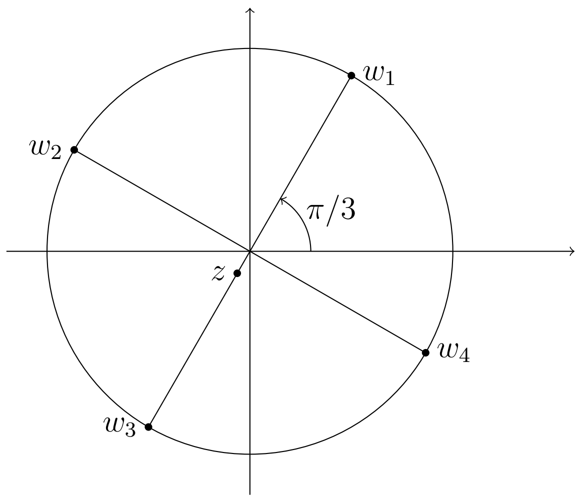
   b) Teniendo en cuenta que

$$z = \frac{1}{16}\exp\left(\frac{4\pi}{3}i\right) = \frac{1}{16}\exp\left(\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)i\right) = \frac{1}{16}\exp\left(\left(\frac{4\pi}{3}+4\pi\right)i\right) = \frac{1}{16}\exp\left(\left(\frac{4\pi}{3}+6\pi\right)i\right),$$

   deducimos que las cuatro raíces cuartas son:

$$w_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}}\exp\left(\frac{1}{4}\frac{4\pi}{3}i\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{\pi}{3}i\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}.$$
$$w_1 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}}\exp\left(\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3}+2\pi\right)i\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right)i\right) = \frac{-\sqrt{3}}{4}+i\frac{1}{4}.$$
$$w_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}}\exp\left(\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3}+4\pi\right)i\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\left(\frac{\pi}{3}+\pi\right)i\right) = \frac{-1}{4}+i\frac{-\sqrt{3}}{4}.$$
$$w_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{16}}\exp\left(\frac{1}{4}\left(\frac{4\pi}{3}+6\pi\right)i\right) = \frac{1}{2}\exp\left(\left(\frac{\pi}{3}+\frac{3\pi}{2}\right)i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}-i\frac{1}{4}.$$

c) La representación gráfica de los 5 puntos es:



---

3. (Hasta 3 puntos)

   a) Determine el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $f(x) = \log(1+x)$ en el punto 0.

   b) Utilice el método de Horner para evaluar el polinomio obtenido en el apartado anterior en $x = -2/3$ y determinar así un valor aproximado de $\log 3$.

   c) Determine el polinomio de Taylor de orden 4 de la función $g(x) = \log(1-x^2)$ en el punto 0.

Solución:

a) Determinamos en primer lugar las cuatro primeras derivadas de f:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}; \qquad f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \qquad f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}; \qquad f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}$$

Y las evaluamos en 0:

$$f'(0) = 1; \qquad f''(0) = -1; \qquad f'''(0) = 2; \qquad f^{(4)}(0) = -6$$

Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \log(1+x)$ en el punto 0 es

$$T_{f,4}(x) = 0 + 1 \cdot x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 - \frac{6}{4!}x^4 = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$$

b)

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -1/4 & 1/3 & -1/2 & 1 & 0 \\ -2/3 & & 1/6 & -1/3 & 5/9 & -28/27 \\ \hline & -1/4 & 1/2 & -5/6 & 14/9 & \boxed{-28/27} \end{array}$$

$T_{f,4}(-2/3) = -28/27$ es una aproximación de $\log(1 - \frac{2}{3}) = \log(\frac{1}{3}) = -\log 3$ y en consecuencia $28/27$ es una aproximación de $\log 3$.

c) La función $g(x) = \log(1 - x^2)$ es la composición de la función $f(x) = \log(1+x)$ con la función $h(x) = -x^2$. Por lo tanto, el polinomio de Taylor de orden 4 de $g = f \circ h$ en el punto $f(h(0)) = f(0) = 0$ es la composición del polinomio $T_{f,4}$ con $-x^2$, despreciando los términos de grado mayor que 4:

$$T_{g,4}(x) = (-x^2) - \frac{(-x^2)^2}{2} + \cancel{\frac{(-x^2)^3}{3}} - \cancel{\frac{(-x^2)^4}{4}} = -x^2 - \frac{x^4}{2}$$

---

4. (Hasta 3 puntos) Si es posible, factorice en $\mathbb{R}$ el polinomio $P(x) = x^4 - 3x^2 + 18x - 20$

   Solución: Lo primero que podríamos intentar es encontrar alguna raíz del polinomio entre los divisores de 20, aunque en este caso llegamos a la conclusión de que no tiene ninguna raíz entera. Dado que el polinomio tiene grado 4, siempre podremos factorizarlo como producto de dos polinomios de grado 2 en $\mathbb{R}$:

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = (x^2 + Ax + B)(x^2 + Cx + D)$$

   Expandiendo el producto de la derecha obtenemos la igualdad:

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = x^4 + (C + A)x^3 + (B + D + AC)x^2 + (AD + BC)x + BD$$

   Identificando coeficientes, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones que debemos resolver en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} C + A &= 0 \\ B + D + AC &= -3 \\ AD + BC &= 18 \\ BD &= -20 \end{aligned}$$

   Siguiendo el procedimiento descrito en la guía docente, utilizamos la primera ecuación para reducir la incógnita, $C = -A$, en las ecuaciones segunda y tercera, para llegar a un sistema en B y D que resolvemos en función de A:

$$\begin{aligned} B + D &= A^2 - 3 \\ B - D &= \frac{-18}{A} \end{aligned} \tag{1}$$

   (Obsérvese que podemos dividir por A, ya que no puede ser 0, según la tercera ecuación del sistema inicial).
   Sumando las ecuaciones (1) obtenemos $B = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3 - \frac{18}{A}\right)$.
   Restando las ecuaciones (1) obtenemos $D = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3 + \frac{18}{A}\right)$.
   Finalmente utilizamos la cuarta ecuación del sistema original, $BD = -20$, en donde sustituimos los valores de B y D obtenidos anteriormente en función de A para obtener una ecuación en A, que se simplifica hasta convertirla en polinómica:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left(A^2 - 3 + \frac{18}{A}\right)\frac{1}{2}\left(A^2 - 3 - \frac{18}{A}\right) &= -20 \\ \left(A^2 - 3 + \frac{18}{A}\right)\left(A^2 - 3 - \frac{18}{A}\right) &= -80 \\ (A^2 - 3)^2 - \frac{18^2}{A^2} &= -80 \\ A^2(A^2 - 3)^2 - 324 &= -80A^2 \\ A^2(A^4 - 6A^2 + 9) - 324 &= -80A^2 \\ A^6 - 6A^4 + 89A^2 - 18^2 &= 0 \end{aligned}$$

Para resolver más fácilmente esta ecuación, efectuamos el cambio de variable $A^2 = z$,

$$z^3 - 6z^2 + 89z - 324 = 0$$

y buscamos las soluciones entre los divisores de 324. Comprobamos que $z = 4$ es una solución:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 1 & -6 & 89 & -324 \\ 4 & & 4 & -8 & 324 \\ \hline & 1 & -2 & 81 & \boxed{0} \end{array}$$

Por lo tanto, podemos considerar $A = 2$ (sabemos que la otra posibilidad nos llevará a la misma factorización y no es necesario analizarla) y terminamos de calcular el resto de coeficientes:

$$A = 2, \qquad B = \frac{1}{2}\left(2^2 - 3 - \frac{18}{2}\right) = -4, \qquad C = -2, \qquad D = \frac{1}{2}\left(2^2 - 3 + \frac{18}{2}\right) = 5$$

En consecuencia:

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = (x^2 + 2x - 4)(x^2 - 2x + 5)$$

Comprobamos finalmente si alguno de los dos polinomios de grado 2 obtenidos tiene raíces reales y deducimos que el primero sí tiene, pero el segundo no:

$$\frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}; \qquad \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2\mathrm{i} \notin \mathbb{R}$$

Concluímos así que la factorización en $\mathbb{R}$ del polinomio propuesto es

$$x^4 - 3x^2 + 18x - 20 = (x + 1 + \sqrt{5})(x + 1 - \sqrt{5})(x^2 - 2x + 5)$$