E. T. S. I. Informática – 26/01/2013

Tercer examen parcial - Curso 2012/2013

Cálculo para la Computación

Grados Ing. Informática, Sotware y Computadores

---

1. Consideremos la elipse que tiene las siguientes características:

   - El centro de la elipse es el punto $(0, -1)$.
   - Uno de los ejes de la elipse está en la dirección del vector $(1, 2)$.
   - Los puntos $(-2, 0)$ y $(2, 3)$ pertenecen a la elipse.

   Se pide:

   a) Determine una ecuación cartesiana de la elipse.

   b) Proporcione una parametrización de la elipse.

   Solución:

   a) La ecuación cartesiana de la elipse tiene la forma:

   $$A(x + My + B)^2 + C(Mx - y + D)^2 + E = 0,$$

   en donde $x + My + B = 0$ y $Mx - y + D = 0$ son las ecuaciones de sus ejes. Dado que uno de los ejes está en la dirección del vector $(1, 2)$, el otro es normal a este vector y dado ambos pasan por el punto $(0, -1)$, las ecuaciones de los ejes son:

   $$\begin{aligned} (x-0) + 2(y+1) = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad x + 2y + 2 = 0 \\ 2(x-0) - (y+1) = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad 2x - y - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Por lo tanto, la ecuación de la elipse queda:

   $$A(x + 2y + 2)^2 + C(2x - y - 1)^2 + E = 0,$$

   Para hallar los parámetros restantes, utilizamos los puntos de la elipse que nos indica el enunciado; es decir, la ecuación anterior se debe verificar para esos puntos, lo que nos permite obtener el siguiente sistema:

   $$\begin{aligned} (x, y) = (-2, 0) \qquad &\Longrightarrow \qquad 0 = A(-2+2)^2 + C(-4-1)^2 + E = 25C + E \\ (x, y) = (2, 3) \qquad &\Longrightarrow \qquad 0 = A(2 + 2\cdot 3 + 2)^2 + C(2\cdot 2 - 3 - 1)^2 + E = 100A + E \end{aligned}$$

   Por lo tanto, $C = \dfrac{-E}{25}$ y $A = \dfrac{-E}{100}$. Si tomamos $E = -100$, obtenemos $C = 4$ y $A = 1$, por lo que una ecuación cartesiana de la elipse es:

   $$\begin{aligned} (x+2y+2)^2 + 4(2x-y-1)^2 - 100 = 0 \qquad &\Longrightarrow \qquad (x+2y+2)^2 + (2(2x-y-1))^2 = 100 \\ &\Longrightarrow \qquad (x+2y+2)^2 + (4x-2y-2)^2 = 100 \end{aligned}$$

b) A partir de la forma cartesiana obtenida en el apartado anterior

$$(x+2y+2)^2+(4x-2y-2)^2=100$$

obtenemos una parametrización a partir de la siguientes igualdades

$$\begin{aligned} x+2y+2&=10\cos(t)\\ 4x-2y-2&=10\operatorname{sen}(t) \end{aligned}$$

Ahora, basta "despejar" x e y en función del seno y el coseno de t para obtener las ecuaciones paramétricas. Si sumamos las dos ecuaciones, obtenemos $5x=10\cos(t)+10\operatorname{sen}(t)$, de donde:

$$x(t)=2\cos(t)+2\operatorname{sen}(t)$$

Si multiplicamos la primera ecuación por -4 obtenemos $-4x-8y-8=-40\cos(t)$; y si sumamos esta ecuación a la segunda del sistema original, simplificamos la variable x para obtener $-10y-10=-40\cos(t)+10\operatorname{sen}(t)$, de donde:

$$y(t)=4\cos(t)-\operatorname{sen}(t)-1$$

---

2. Consideremos la función $f(x,y)=-3xy^2+4y^2-10xy+12y+4x^2-15x+14$.

   a) Compruebe que $(1,-1)$ es un punto crítico de $f(x,y)$ sujeto a la condición $x-2y-3\mathrm{e}^{x+y}=0$.

   b) Clasifique el punto crítico del apartado anterior.

Solución:

a) Calculemos en primer lugar el gradiente de f:

$$\begin{aligned} D_1f(x,y)&=-3y^2-10y+8x-15\\ D_2f(x,y)&=-6xy+8y-10x+12 \end{aligned}$$

Una simple comprobación, muestra que $(1,-1)$ es punto crítico de f y que verifica la restricción propuesta en el enunciado, $g(x,y)=x-2y-3\mathrm{e}^{x+y}=0$:

$$\begin{aligned} -3\cdot 1-10\cdot(-1)+8\cdot 1-15&=-3+10+8-15=0\\ -6\cdot 1\cdot(-1)+8\cdot(-1)-10\cdot 1+12&=6-8-10+12=0\\ 1-2\cdot(-1)-3\mathrm{e}^{1-1}&=1+2-3=0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(1,-1)$ es punto crítico de f sujeto a la restricción $g(x,y)=0$, y el multiplicador de Lagrange asociado es $\lambda=0$:

$$\begin{aligned} D_1f(1,-1)&=0=0\cdot D_1g(1,-1)\\ D_2f(1,-1)&=0=0\cdot D_2g(1,-1) \end{aligned}$$

b) En este caso, $F(x,y) = f(x,y) - 0 \cdot g(x,y) = f(x,y)$ es la función que usamos para clasificar el punto crítico. Para hacer esto, debemos evaluar la diferencial segunda de F en la dirección tangente a la restricción en el punto $(1,-1)$, que determinamos con el vector gradiente de g:

$$\begin{aligned} D_1g(x,y) &= 1 - 3\mathrm{e}^{x+y} &&\Longrightarrow D_1g(1,-1) = 1 - 3 = -2 \\ D_2g(x,y) &= -2 - 3\mathrm{e}^{x+y} &&\Longrightarrow D_2g(1,-1) = -2 - 3 = -5 \end{aligned}$$

Por lo tanto, un vector tangente a $g(x,y) = 0$ en el punto $(1,-1)$ es $v = (5,-2)$. Calculamos ahora la matriz hessiana de F en $(1,-1)$:

$$\nabla^2 F(x,y) = \begin{pmatrix} 8 & -6y-10 \\ -6y-10 & -6x+8 \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \nabla^2 F(1,-1) = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad d^2F_{(1,-1)}(5,-2) = (5 \ \ -2) \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} = (5 \ \ -2) \begin{pmatrix} 48 \\ -24 \end{pmatrix} = 288 > 0$$

Por lo tanto, el punto $(1,-1)$ es un mínimo local de f sobre la restricción $g(x,y) = 0$.

---

3. Consideramos la ecuación diferencial $y' - 2y = y^2 \cos x$.

   a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

   b) Determine la solución particular $y = f(x)$ que verifica la condición $f(0) = 1$.

Solución:

a) La ecuación propuesta responde al patrón de las ecuaciones de Bernouilli:

$$y' - 2y = y^2 \cos x \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y'}{y^2} - \frac{2}{y} = \cos x$$

Utilizamos el cambio de variable $z = \dfrac{1}{y}$, $z' = \dfrac{-y'}{y^2}$ y obtenemos una ecuación lineal en z

$$-z' - 2z = \cos x$$

Para resolver esta ecuación, resolvemos en primer lugar la ecuación homogénea asociada $-z' - 2z = 0$:

$$-z' - 2z = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{z'}{z} = -2 \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{z} = \int -2dx \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad \log|z| = -2x + C_1 \quad \Longrightarrow \quad z = \mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-2x} = C\mathrm{e}^{-2x}$$

Por lo tanto, según la conjetura de Lagrange, la solución de la ecuación no homogénea tiene la forma

$$z = c(x)\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad z' = c'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2c(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

Determinamos la función $c(x)$ sustituyendo en la ecuación

$$-\left(c'(x)\mathrm{e}^{-2x} - 2c(x)\mathrm{e}^{-2x}\right) - 2c(x)\mathrm{e}^{-2x} = \cos(x) \quad \Longrightarrow \quad -c'(x)\mathrm{e}^{-2x} = \cos(x) \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad c'(x) = -\mathrm{e}^{2x}\cos(x) \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \int -\mathrm{e}^{2x}\cos(x)dx$$

Calculamos esta primitiva usando integración por partes dos veces

$$
\begin{aligned}
c(x) = & \int -\mathrm{e}^{2x}\cos(x)dx \\
& \left[\begin{array}{l} u = -\cos(x) \to du = \operatorname{sen}(x)dx \\ dv = \mathrm{e}^{2x} \to v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right. \\
& = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \frac{1}{2}\int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x)dx \\
& \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(x) \to du = \cos(x)dx \\ dv = \mathrm{e}^{2x} \to v = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} \end{array}\right. \\
& = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) + \frac{1}{4}\int \mathrm{e}^{2x}\cos(x)dx \\
& = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) - \frac{1}{4}c(x)
\end{aligned}
$$

De donde podemos "despejar" $c(x)$ y obtenemos $c(x) = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) + C$.
Otra forma alternativa de calcular esta primitiva es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
c(x) = & \int -\mathrm{e}^{2x}\cos(x)dx \\
& \left[\begin{array}{l} u = \mathrm{e}^{2x} \to du = 2\mathrm{e}^{2x}dx \\ dv = -\cos(x) \to v = -\operatorname{sen}(x) \end{array}\right. \\
& = -\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) + 2\int \mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x)dx \\
& \left[\begin{array}{l} u = \mathrm{e}^{2x} \to du = 2\mathrm{e}^{2x}dx \\ dv = \operatorname{sen}(x) \to v = -\cos(x) \end{array}\right. \\
& = -\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) - 2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) + 4\int \mathrm{e}^{2x}\cos(x)dx \\
& = -\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) - 2\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - 4c(x)
\end{aligned}
$$

De donde podemos "despejar" $c(x)$ y obtenemos la misma expresión que antes:

$$c(x) = -\frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) + C.$$

La solución general queda:

$$
\begin{aligned}
z &= (-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{2x}\cos(x) - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{2x}\operatorname{sen}(x) + C)\mathrm{e}^{-2x} = -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(x) + C\mathrm{e}^{-2x} \\
y &= \frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(x) + C\mathrm{e}^{-2x}} = \frac{5}{-2\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + 5C\mathrm{e}^{-2x}}
\end{aligned}
$$

b) Para determinar la solución particular tal que $f(0) = 1$, sustituimos en la ecuación general para determinar el valor particular de C:

$$1 = \frac{5}{-2\cos 0 - \operatorname{sen} 0 + 5C\mathrm{e}^{-2\cdot 0}} = \frac{5}{-2 + 5C} \quad \Longrightarrow \quad 5 = -2 + 5C \quad \Longrightarrow \quad C = \frac{7}{5}$$

Y la solución buscada es:

$$f(x) = \frac{5}{-2\cos(x) - \operatorname{sen}(x) + 7\mathrm{e}^{-2x}}$$
