Apuntes de

ESTADÍSTICA

Probabilidad

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Sixto Sánchez Merino

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Matemática Aplicada

Mi agradecimiento a los profesores Carlos Cerezo Casermeiro y Carlos Guerrero García, por sus correcciones y sugerencias en la elaboración de estos apuntes.

Capítulo 4

Probabilidad

Un *experimento científico* es una acción que da lugar a resultados identificables. Este experimento puede ser *determinista* o *aleatorio* y será en este último tipo donde centraremos nuestro estudio.

Las características de un experimento aleatorio son: (1) Los posibles resultados son conocidos previamente, (2) el resultado no es predecible y (3) repeticiones en situaciones análogas puede dar resultados diferentes.

Espacio muestral y suceso aleatorio

El *espacio muestral* de un experimento aleatorio es el conjunto formado por todos los posibles resultados del experimento. El cardinal de este conjunto puede ser finito (número obtenido al lanzar un dado) o infinito (tiempo que tarda una bombilla en fundirse).

Un *suceso aleatorio* es un subconjunto de elementos del espacio muestral. Para un experimento aleatorio, un suceso queda definido si una vez realizado el experimento, queda siempre determinado si sucedió o no.

Se llama *espacio de sucesos* al conjunto formado por todos los subconjuntos del espacio muestral, es decir, si E es el espacio muestral, entonces, $\mathcal{P}(E)$ (conjunto de las partes de E) es el espacio de sucesos. Por ejemplo, si jugamos a "cara o cruz" ("Head and Tail" en inglés) y lanzamos una moneda, el espacio muestral $E = \{H, T\}$ está formado por los sucesos H="salir cara" (Head, en inglés) y T="salir cruz" (Tail, en inglés); y el espacio de sucesos es el conjunto $\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{H\}, \{T\}, \{H, T\}\}$.

Suceso elemental, seguro e imposible

Un suceso se dice *elemental* si corresponde a un único resultado simple del experimento, por ejemplo, A="salir 5 al lanzar un dado"$=\{5\}$. Un suceso *compuesto* es la unión de varios sucesos elementales, es decir, un conjunto formado por varios resultados posibles del experimento, por ejemplo, B="salir número impar al lanzar un dado"$=\{1, 3, 5\}$.

Llamamos *suceso seguro* al suceso que sabemos que ocurrirá siempre al realizar el experimento y que se corresponde con el espacio muestral, por ejemplo, en el experimento del lanzamiento de un dado, el suceso seguro es $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. El *suceso imposible* es aquel que no puede suceder nunca y se representa por $\varnothing$, por ejemplo, "salir un número mayor que 7" en el experimento de lanzar un dado.

Decimos que dos sucesos A y B de un espacio muestral son *incompatibles* si $A \cap B = \varnothing$. Por ejemplo, al lanzar un dado, los sucesos A="salir par" y B="salir impar" son incompatibles, pues $A = \{2, 4, 6\}$ y $B = \{1, 3, 5\}$ con lo cual $A \cap B = \varnothing$.

Si A es un suceso del espacio muestral E, llamamos *suceso contrario* o *complementario* del suceso A, y lo denotamos por $\bar{A}$ ó bien A^c al suceso que ocurre cuando no se da el suceso A, es decir, $\bar{A} = E - A$. Por ejemplo, en el experimento de lanzar un dado, el complementario del suceso A="salir par" es el suceso $\bar{A}$="salir impar", pues $A = \{2, 4, 6\}$ y $\bar{A} = E - A = \{1, 3, 5\}$.

Ejemplo 4.1 *Consideramos el experimento de lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior. Sean A="salir un número par", B="salir impar" y C="salir primo" tres sucesos. Describir el espacio muestral E y los sucesos $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cap B$, $B \cap \bar{C}$, determinando su tipo.*

$$\begin{array}{l} A = \{2, 4, 6\} \\ B = \{1, 3, 5\} \\ C = \{2, 3, 5\} \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{l} A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ , suceso seguro} \\ B \cup C = \{1, 2, 3, 5\} \text{ , suceso compuesto} \\ A \cap B = \varnothing \text{ , suceso imposible} \\ B \cap \bar{C} = \{1\} \text{ , suceso elemental} \end{array}$$

□

Como podemos observar en las definiciones anteriores y en el ejemplo, existe una gran analogía entre los sucesos y la teoría de conjuntos que permite determinar la estructura del espacio de sucesos.

4.1. Álgebra de Boole de sucesos

Como aplicación directa de la teoría de conjuntos, el espacio de sucesos $\mathcal{P}(E)$, con las operaciones unión, intersección y complementario, tiene la estructura de álgebra de Boole. Pero veamos que también podemos obtener esta misma estructura en subconjuntos del espacio de sucesos.

Se llama *álgebra de sucesos* sobre el espacio muestral E a toda familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ que verifica los siguientes condiciones:

Ax.1) $E \in \mathcal{A}$

Ax.2) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$

Ax.3) Si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cup B \in \mathcal{A}$

De la condición (Ax.3) sobre la pertenencia al álgebra de la unión de dos sucesos se deduce por inducción la pertenencia al álgebra de cualquier unión finita de sucesos. Imponer que se cumpla esta condición para la unión numerable de sucesos da lugar a la definición de σ-álgebra.

Se llama *σ-álgebra de sucesos* sobre el espacio muestral E a toda familia $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ que verifica los siguientes condiciones:

Ax.1) $E \in \mathcal{A}$

Ax.2) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\bar{A} \in \mathcal{A}$

Ax.3) Si $A_i \in \mathcal{A}$ para todo $i \in I$ entonces $\cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ (con I finito o infinito numerable).

Si un conjunto de sucesos $\mathcal{A}$ es un álgebra o un σ-álgebra de sucesos sobre un espacio muestral E, diremos que $(E, \mathcal{A})$ es un *espacio probabilizable*. Normalmente, en el caso finito, tomaremos como álgebra el conjunto $\mathcal{P}(E)$.

Ejemplo 4.2 *Consideramos el experimento de lanzar un dado y observar el número que aparece en la cara superior cuyo espacio muestral es* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. *El conjunto de sucesos* $\mathcal{A} = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, E\}$ *no es un álgebra de sucesos pues no verifica el axioma (Ax.2). Sin embargo, el conjunto de sucesos* $\mathcal{B} = \{\varnothing, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, E\}$ *sí es un álgebra de sucesos pues verifica los tres axiomas.*

Hay muchas propiedades que se deducen de la definición axiómatica de álgebra de sucesos. Por ejemplo, $\varnothing \in \mathcal{A}$ sabiendo que $\varnothing = \bar{E}$ y aplicando las condiciones (Ax.1) y (Ax.2). Igual ocurre con la intersección de sucesos: si $A, B \in \mathcal{A}$ entonces $A \cap B \in \mathcal{A}$ como consecuencia de escribir $A \cap B = \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$ y aplicar sucesivamente las condiciones (Ax.2) y (Ax.3). En una σ-álgebra, si $A_i \in \mathcal{A}$, entonces $\bigcap_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$ como consecuencia de escribir $\bigcap_{i\in I} A_i = \overline{\bigcup_{i\in I} \overline{A_i}}$ y aplicar sucesivamente las condiciones (Ax.2) y (Ax.3).

Ejemplo 4.3 *Si* $\mathcal{A}$ *es un álgebra de sucesos sobre el espacio muestral* E*, demostrar la siguiente propiedad:*

$$\textit{Si} \quad A, B \in \mathcal{A} \quad \textit{entonces} \quad A - B \in \mathcal{A}$$

Sabemos que $A - B = A \cap \bar{B}$. Como $A \in \mathcal{A}$ por hipótesis y $\bar{B} \in \mathcal{A}$ por el axioma (Ax.2), aplicamos que la intersección de dos sucesos del álgebra pertenece al álgebra y deducimos que $A - B \in \mathcal{A}$. □

4.2. Probabilidad

En primer lugar, veamos la definición axiomática de probabilidad. Después veremos su definición clásica o frecuentista que relaciona los conceptos de probabilidad y frecuencia relativa.

4.2.1. Definición axiomática de probabilidad

Sea $(E, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable, se llama *función de probabilidad*, o simplemente *probabilidad* a toda función $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ que verifique las siguientes condiciones:

Ax.1) Para todo $A \in \mathcal{A}$, se verifica que $P(A) \geq 0$

Ax.2) $P(E) = 1$

Ax.3) Para todo $\{A_i : A_i \in \mathcal{A}\}_{i\in I}$, se verifica que $P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i)$ si $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, con $i, j \in I$.

Si P es una función de probabilidad sobre el espacio probabilizable $(E, \mathcal{A})$, se llama *espacio de probabilidad* a la terna $(E, \mathcal{A}, P)$.

Una función de probabilidad queda determinada conociendo el valor de la función para los sucesos elementales, pues la probabilidad de cualquier otro suceso se calcula aplicando el axioma (Ax.3).

Ejemplo 4.4 *Consideramos el experimento que consiste en lanzar un dado. Calcule la probabilidad de que salga un número par.*

Los sucesos elementales del experimento son $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y si el dado no está trucado, los sucesos son equiprobables y la probabilidad de cada uno de ellos es $1/6$. El suceso que nos piden corresponde con el subconjunto $\{2, 4, 6\}$ cuya probabilidad es la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales que lo componen, es decir, $1/2$. $\square$

Ejemplo 4.5 *Sea $E = \{a_1, a_2, a_3\}$ el espacio muestral de un cierto experimento aleatorio. Determine si la función P definida por $P(a_1) = \frac{1}{4}$, $P(a_2) = \frac{1}{2}$ y $P(a_3) = \frac{1}{8}$ es una probabilidad.*

La unión disjunta de los sucesos elementales corresponde con el espacio muestral cuya probabilidad ha de ser 1 en virtud del axioma (Ax.2). Por lo tanto, por el axioma (Ax.3), la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales ha de ser 1. Pero en este caso, P no es una probabilidad pues $P(E) = P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) = 7/8 \neq 1$, en contra de los axiomas (Ax.2) y (Ax.3). $\square$

En cualquier espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ se verifican las siguientes propiedades:

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(\varnothing) = 0$
3. Si $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
4. $0 \leq P(A) \leq 1$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
6. $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$
7. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

Además, cada una de las propiedades anteriores se demuestra a partir de la definición axiomática de probabilidad y de las propiedades que se hayan demostrado previamente, utilizando la estructura de álgebra de Boole del álgebra $\mathcal{A}$.

Ejemplo 4.6 *Demuestre la propiedad de la probabilidad $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ y utilícela para demostrar la propiedad $P(\varnothing) = 0$.*

Por ser $\mathcal{A}$ un álgebra de Boole, sabemos que para cualquier suceso A se verifica que $E = A \cup \bar{A}$. Como esta unión es disjunta, aplicando el axioma (Ax.3), tenemos que $P(E) = P(A) + P(\bar{A})$. Finalmente, aplicamos el axioma (Ax.2), sustituyendo $P(E)$ por 1, y despejamos para obtener la propiedad $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
Para demostrar la segunda propiedad usamos la propiedad que hemos demostrado pero considerando el caso particular $A = E$. De esta manera tenemos que $P(\bar{E}) = 1 - P(E)$, es decir, $P(\varnothing) = 1 - 1 = 0$. □

Resulta muy práctico utilizar los diagramas de Venn para interpretar el significado de las propiedades de la probabilidad. Para ello, identificamos la probabilidad de los sucesos con su área y asignamos 1 a la probabilidad del universo donde se representan los sucesos.

Ejemplo 4.7 *Interpretar la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos, a partir de un diagrama de Venn*

Si representamos la unión de los sucesos A y B en un diagrama de Venn como el de la figura 4.1

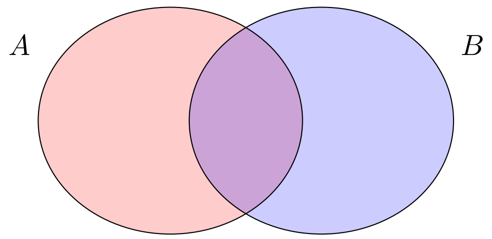


Figura 4.1: Diagrama de Venn de la unión de sucesos

observamos que al sumar las áreas de A y B, hay una región $(A \cap B)$ que hemos sumado dos veces y que debemos restar para calcular la probabilidad de la unión: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. □

4.2.2. Relación entre frecuencias y probabilidad

Los fenómenos aleatorios son totalmente imprevisibles de manera aislada, pero presentan regularidades cuando se repiten un número elevado de veces. *Un experimento aleatorio se caracteriza porque repetido muchas veces y en idénticas condiciones el cociente entre el número de veces que aparece un resultado y el número total de veces que se realiza el experimento tiende a un número fijo.* Esta propiedad es conocida como ley de los grandes números, establecida por Jakob Bernouilli (1654-1705).

Consideremos un suceso A del espacio muestral E de un experimento aleatorio. Si se realiza N veces dicho experimento y el suceso A aparece n_A veces, se dice que la frecuencia relativa f_A del suceso A es n_A/N. La probabilidad del suceso A puede considerarse como el límite de la frecuencia relativa del suceso A, cuando el número de experiencias (N) tiende a infinito:

$$P(A) = \lim_{N\to\infty} f_A = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}$$

Ejemplo 4.8 *Si consideramos el experimento de lanzar una moneda, la probabilidad de salir cara es* $1/2$. *¿Qué significado tiene este número?*

Está claro que cuando lanzamos la moneda una única vez, no podemos predecir el resultado (experimento aleatorio). Sin embargo, si lanzamos la moneda muchas veces, esperamos que aproximadamente la mitad de ellas (1/2) sean caras. La probabilidad es, por tanto, una estimación del comportamiento de un experimento cuando se realiza muchas veces. □

Hay fenómenos aleatorios, como el lanzamiento de dados, de monedas, etc., en que, por razones de simetría y regularidad, se puede suponer que todos los sucesos elementales son equiprobables, es decir, que tienen igual probabilidad de presentarse. En estos casos es útil la definición de probabilidad de Pierre-Simon Laplace (1749-1827): *La probabilidad de un suceso A es igual al cociente entre el número de casos favorables a que ocurra el suceso y el número de casos posibles, en el supuesto de que todos sean igualmente probables*

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso } A}{\text{número de casos posibles}}$$

Ejemplo 4.9 *Si extraemos simultáneamente dos bolas de una urna que contiene 5 bolas blancas y 7 bolas rojas ¿cuál es la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean del mismo color?*

Como

$$P(BB) = \frac{C_{5,2}}{C_{12,2}} = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{10}{66} = \frac{5}{33} \qquad \text{y} \qquad P(RR) = \frac{C_{7,2}}{C_{12,2}} = \frac{\binom{7}{2}}{\binom{12}{2}} = \frac{21}{66} = \frac{7}{22}$$

se tiene

$$P(BB \cup RR) = P(BB) + P(RR) = \frac{5}{33} + \frac{7}{22} = \frac{31}{66}$$

□

4.3. Probabilidad condicionada. Sucesos independientes

Consideremos un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ y sea $A \in \mathcal{A}$ un suceso con $P(A) > 0$. Para cualquier suceso $B \in \mathcal{A}$ definimos la *probabilidad del suceso B condicionada al suceso A*, de la siguiente manera:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Fijado un suceso $A \in \mathcal{A}$, la función $P_A : \mathcal{A} \to [0,1]$ es una probabilidad pues cumple la definición axiomática:

Ax.1: $P_A(B) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} \geq 0$ por ser cociente de números no negativos.

Ax.2: $P_A(E) = \dfrac{P(E \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P(A)}{P(A)} = 1$

Ax.3: Si $B \cap C = \varnothing \Rightarrow P_A(B \cup C) = \dfrac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \dfrac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} =$

$$= \{(B \cap A) \cap (C \cap A) = \varnothing\} = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = P_A(B) + P_A(C)$$

Esta probabilidad se suele denotar por $P(B \,|\, A)$ y su definición recoge la idea de actualización del valor de la probabilidad en función de la información que se tenga en cada momento. El valor de la probabilidad de B cambia cuando conocemos la ocurrencia de un suceso A.

Ejemplo 4.10 *En el ejemplo del lanzamiento de un dado, calcular la probabilidad de obtener un cinco si sabemos que saldrá un número impar.*

Consideremos el espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ correspondiente al experimento aleatorio de lanzar un dado y sea I="número impar" un suceso del espacio de sucesos. Al principio, los sucesos elementales son equiprobables y podemos calcular $P(5) = 1/6$ y $P(I) = 1/2$. Aplicando la definición de probabilidad condicionada tenemos

$$P(5 \,|\, I) = \frac{P(5 \cap I)}{P(I)} = \frac{P(5)}{P(I)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

Obsérvese como la probabilidad original asociada al suceso elemental 5 a pasado de ser $1/6$ a ser $1/3$ cuando hemos conocido la información de que el número era impar. □

Sucesos independientes

Sean A y B dos sucesos de un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$. Decimos que el suceso A es *independiente* del B si y sólo si $P(A \,|\, B) = P(A)$. Esta relación de independencia es simétrica, es decir, si el suceso A es independiente del B entonces el suceso B es independiente del A y se expresa así:

$$A \text{ y } B \text{ son independientes } \Longleftrightarrow P(A \,|\, B) = P(A) \text{ ó bien } P(B \,|\, A) = P(B)$$

Aplicando la definición de probabilidad condicionada podemos afirmar que si dos sucesos son independientes entonces se cumple:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Ejemplo 4.11 *Consideremos una urna compuesta de 3 bolas blancas y 5 bolas negras. Se extrae una bola y después otra. ¿Qué probabilidad hay de que las dos bolas sean blancas?*

El enunciado no dice nada y, sin embargo, el experimento es completamente distinto si devolvemos la primera bola a la urna antes de extraer la segunda (extracciones con reemplazamiento) o no la devolvemos (extracciones sin reemplazamiento). Veamos qué ocurre en ambos casos: Sean B_i los sucesos "extraer bola blanca en la i-ésima extracción", con $i = 1, 2$. La probabilidad que nos piden es:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \,|\, B_1)$$

- Extracciones con reemplazamiento. Si devolvemos la bola a la urna, el resultado de la segunda extracción no depende, en absoluto, del resultado de la primera y, por lo tanto, los sucesos son independientes

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \,|\, B_1) = P(B_1) \cdot P(B_2) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} = 0'140625$$

- Extracciones sin reemplazamiento. Sin embargo, si no devolvemos la bola a la urna, la composición de la urna (número de bolas de cada color) será distinta a la original y las probabilidades (casos favorables entre casos posibles) de los sucesos serán distintas:

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 \,|\, B_1) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28} = 0,10714$$

Obsérvese que la probabilidad condicionada $P(B_2 \,|\, B_1)$ se ha calculado como casos favorables entre posibles, en función de la nueva composición de la urna después de la primera extracción. $\square$

4.4. Teorema de la probabilidad total. Teorema de Bayes

Consideremos un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ un conjunto de sucesos. Decimos que $\mathcal{C}$ es un *sistema completo de sucesos* de E si se verifican las siguientes condiciones:

1) Las intersecciones son vacías, es decir, $C_i \cap C_j = \varnothing$ para todo $i, j \in I$ tal que $i \neq j$

2) La unión es el total, es decir, $\bigcup_{i \in I} C_i = E$

El conjunto $\mathcal{C}$ también se denomina partición del espacio muestral E.

Ejemplo 4.12 *El conjunto $\mathcal{C} = \{A, B, C\}$, con $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 5, 6\}$ y $C = \{4\}$, constituye una partición del espacio muestral $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ del experimento consistente en lanzar un dado.*

4.4.1. Teorema de la probabilidad total

Consideremos un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ un sistema completo de sucesos, tal que para todo $i \in I$, $P(C_i) > 0$. Si $B \in \mathcal{A}$ es un suceso cualquiera, entonces:

$$P(B) = \sum_{i \in I} P(B \,|\, C_i) \cdot P(C_i)$$

Ejemplo 4.13 *Tres máquinas A, B y C producen respectivamente el 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son 3 %, 5 % y 10 %. Si se seleccionan al azar un lote de productos, halle la proporción de artículos defectuosos.*

De los datos del problema deducimos que las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral $E = \{A, B, C\}$ son $P(A) = 0'5$, $P(B) = 0'3$, $P(C) = 0'2$. Además, si consideramos el suceso D=“artículo defectuoso”, sabemos que $P(D \,|\, A) = 0'03$, $P(D \,|\, B) = 0'05$, $P(D \,|\, C) = 0'10$. Como A, B y C constituyen una partición de E, podemos calcular la probabilidad que nos piden aplicando el teorema de la probabilidad total:

$$\begin{aligned} P(D) &= P(D \,|\, A) \cdot P(A) + P(D \,|\, B) \cdot P(B) + P(D \,|\, C) \cdot P(C) \\ &= 0'03 \cdot 0'5 + 0'05 \cdot 0'3 + 0'10 \cdot 0'2 = 0'05 \longrightarrow 5\,\% \end{aligned}$$

$\square$

4.4.2. Teorema de Bayes

El teorema de Bayes es una consecuencia directa del teorema de la probabilidad total y de la definición de probabilidad condicionada cuando tenemos un sistema completo de sucesos.

Consideremos un espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in I}$ un sistema completo de sucesos, tal que para todo $i \in I$, $P(C_i) > 0$. Si $B \in \mathcal{A}$ es un suceso cualquiera, entonces:

$$P(C_j \,|\, B) = \frac{P(B \,|\, C_j) \cdot P(C_j)}{\displaystyle\sum_{i \in I} P(B \,|\, C_i) \cdot P(C_i)}$$

Este teorema recoge la idea de actualización del valor de la probabilidad en función de la información que se tenga en cada momento. Al principio tenemos $P(C_j)$ que es la *probabilidad "a priori"* y representa la "opinión inicial" sobre un asunto. Después ocurre un suceso B que representa la nueva información recibida y que determina las probabilidades $P(B \,|\, C_i)$ para todos los C_i que se denominan *verosimilitudes*. Al final, aplicando el teorema de Bayes se obtiene $P(C_j \,|\, B)$ que se denomina *probabilidad "a posteriori"* y que representa la "nueva opinión" sobre el asunto.

Ejemplo 4.14 *Tres máquinas A, B y C producen respectivamente el 50 %, 30 % y 20 % del número total de artículos de una fábrica. Los porcentajes de desperfectos de producción de estas máquinas son 3 %, 5 % y 10 %. Supóngase que se selecciona al azar un artículo y resulta ser defectuoso. Calcule la probabilidad de que el artículo haya sido producido por la máquina A.*

De los datos del problema deducimos que las probabilidades de cada uno de los sucesos elementales del espacio muestral $E = \{A, B, C\}$ son $P(A) = 0'5$, $P(B) = 0'3$ y $P(C) = 0'2$. Además, si consideramos el suceso D="artículo defectuoso", sabemos que $P(D \,|\, A) = 0'03$, $P(D \,|\, B) = 0'05$ y $P(D \,|\, C) = 0'10$. Con todos estos datos podemos calcular la probabilidad que nos piden:

$$\begin{aligned} P(A \,|\, D) &= \frac{P(D \,|\, A) \cdot P(A)}{P(D \,|\, A) \cdot P(A) + P(D \,|\, B) \cdot P(B) + P(D \,|\, C) \cdot P(C)} \\ &= \frac{0'03 \cdot 0'5}{0'03 \cdot 0'5 + 0'05 \cdot 0'3 + 0'10 \cdot 0'2} = \frac{0'015}{0'05} = 0'3 \end{aligned}$$

Obsérvese que "a priori" la probabilidad del suceso A era $0'5$ y que una vez ocurrido el suceso D se obtiene una nueva probabilidad " a posteriori" para el suceso A que es $0'3$. □

4.5. ANEXO: Combinatoria

Para determinar la probabilidad de algunos sucesos, especialmente aquellos que se obtienen aplicando la regla de Laplace, resulta muy útil conocer la combinatoria. En las siguientes definiciones consideramos que Ω es un conjunto de n elementos.

Llamaremos **variaciones de n elementos tomados de k en k** al número de ordenaciones distintas de k elementos de Ω. En el primer lugar de una posible lista ordenada podemos colocar cualquier elemento de entre los n posibles. En segundo lugar, podemos colocar cualquiera de entre los $n-1$ restantes. En tercer lugar, cualquiera de entre los $n-2$ restantes. Así, hasta llegar al lugar k-ésimo en donde podemos colocar cualquier elemento de entre los $n-k+1$ restantes. Por tanto:

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Llamaremos **permutaciones de n elementos** al número de ordenaciones posibles de todos los elementos de Ω. Por un razonamiento similar al anterior podemos llegar a que:

$$P_n = V_n^n = n!$$

Llamaremos **combinaciones de n elementos tomados de k en k** al número de subconjuntos distintos formados por k elementos de Ω. Aquí, $\{a,b,c\} = \{b,a,c\} = \{c,b,a\} = \ldots$ que, como variaciones, no son la misma. Es decir, de entre todas las variaciones de n elementos tomados de k en k, ahora consideraremos como iguales aquellas en las cuales sus elementos están ordenados de formas distintas. Así:

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Llamaremos **variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k** al número de ordenaciones distintas de elementos de Ω, pudiendo elegirse un elemento, a lo sumo, k veces. Así, en el primer lugar de una posible lista ordenada podemos colocar cualquiera de los n elementos. En el segundo lugar podemos colocar cualquiera de los n elementos, ya que cualquier elemento lo podemos escoger, a lo sumo, k veces. Así, hasta llegar al k-ésimo lugar, en el cual podemos colocar cualquiera de los n elementos.

$$VR_n^k = n^k$$

Llamaremos **permutaciones con repetición** al número de ordenaciones posibles de todos los elementos de cuando éstos se encuentran agrupados en clases, siendo indistinguibles los elementos de cada clase. Es decir, de entre todas las permutaciones posibles de los n elementos de Ω, cualquier permutación entre sí de los elementos de una misma clase da lugar a la misma permutación con repetición. Así:

$$PR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_r} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_r!} \text{ siendo } n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$$

Llamaremos **combinaciones con repetición de n elementos tomados de k en k** al número de conjuntos distintos que podemos formar con k elementos de Ω, pudiendo elegirse cualquier elemento, a lo sumo, k veces. Así, una forma de determinar el conjunto es indicando el número de veces que seleccionamos cada elemento. Para ello, tomemos k bolas en fila encerradas entre dos barras y tomemos además $n-1$ barras más.

- Diremos que el primer elemento de Ω lo hemos tomado tantas veces como bolas haya entre las barras 1^a y 2^a
- Diremos que el segundo elemento de Ω lo hemos tomado tantas veces como bolas haya entre las barras 2^a y 3^a
- ...

De esta forma se trata de colocar todas las barras y las bolas, es decir, se trata de colocar $n+k-1$ elementos (k bolas y $n-1$ barras) siendo las barras indistiguibles y también las bolas. Así:

$$CR_n^k = PR_{n+k-1}^{k,n-1} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{n+k-1}^k = C_{n+k-1}^{n-1}$$

4.5.1. Identificación del problema

Para determinar si nuestro problema corresponde con variaciones, permutaciones o combinaciones puede resultar útil tener una respuesta a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos elementos tengo? Esta pregunta hace referencia al total de elementos de que dispongo en el conjunto Ω antes de plantearme las agrupaciones. La respuesta será el valor de n.
2. ¿Cuántos elementos tienen las agrupaciones? La respuesta corresponde al valor de k.
3. ¿Son distinguibles los elementos de Ω? Si la respuesta es no, entonces tenemos permutaciones con repetición. Si la respuesta es afirmativa, entonces nos seguimos preguntando.
4. ¿Importa el orden? Es decir, si cambiamos el orden de los elementos de una misma agrupación, ¿estamos considerando el mismo caso? Si la respuesta es afirmativa, entonces nos referimos a variaciones. Si la respuesta es negativa, entonces nos referimos a combinaciones. Finalmente nos preguntamos.
5. ¿Se pueden repetir los elementos en las agrupaciones? En cada uno de los casos anteriores, si la respuesta es negativa nos referimos a variaciones o combinaciones simples, y si la respuesta es afirmativa, entonces nos referimos a variaciones o combinaciones con repetición.

Con estas preguntas sólo nos queda identificar a las permutaciones simples que corresponden con las variaciones simples cuando $n = k$.

En la figura 4.2 se representa, a modo de algoritmo, el método que hemos descrito para identificar los tipos de problemas de combinatoria.

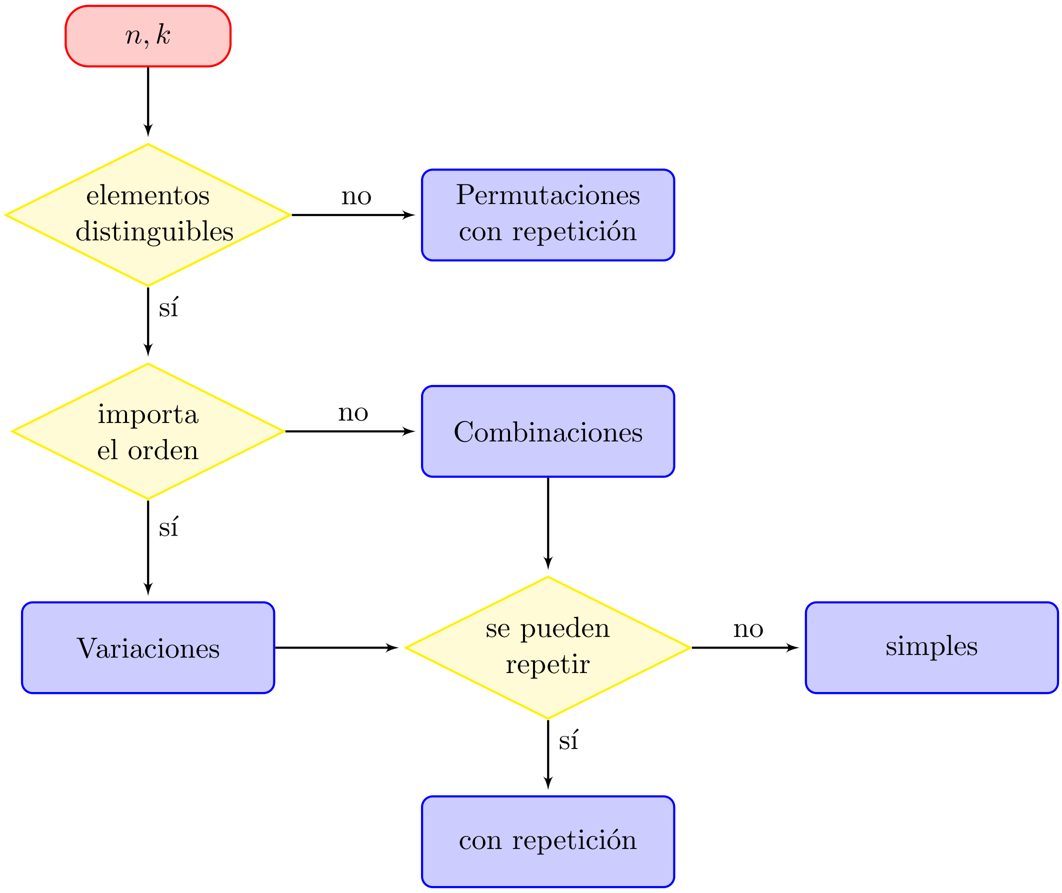


Figura 4.2: Esquema de combinatoria

Ejemplo 4.15 *¿Cuántos grupos distintos de trabajo formados por 5 alumnos, se pueden formar con los alumnos de una clase de 25 alumnos?*

Partimos de un conjunto de $n = 25$ elementos distinguibles (alumnos de la clase) y queremos hacer agrupaciones de $k = 5$ elementos (grupos de trabajo). Ahora bien:
- No importa el orden de los elementos en cada agrupación, y
- No es posible que haya elementos repetidos en una misma agrupación.
Por lo tanto, siguiendo el algoritmo, llegamos a que el número de posibles grupos de trabajo es

$$C_{25}^{5} = \binom{25}{5} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 53\,130$$

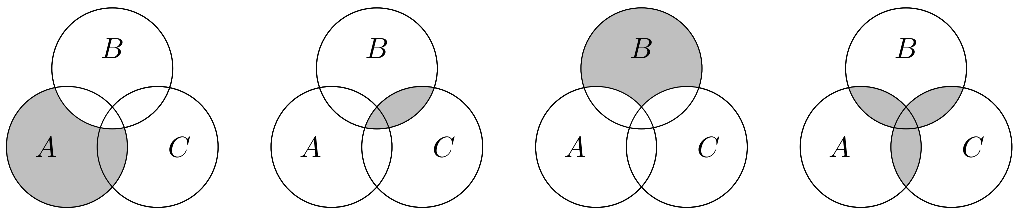
□

4.6. Relación de problemas

1. Sean $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{3,4,5\}$, $C = \{6,7,8,9\}$ y $D = \{4,5,6,7\}$, cuatro sucesos del espacio muestral $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Calcule $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{U}$, $\bar{A}\cap B$, $\bar{A}\cup B$, $A\cap\bar{B}$, $A\cup\bar{B}$, $C\cup\bar{D}$, $C\cap\bar{D}$, $\bar{C}\cap D$, $\bar{B}\cup\bar{D}$, $\bar{B}\cap\bar{D}$, $\overline{\bar{B}\cap\bar{D}}$, $\overline{\bar{B}\cup\bar{D}}$, $A-B$, $B-A$, $B-C$, $C-B$, $B-D$, $D-B$, $A-D$, $D-A$ y $D-C$.

2. Sean A, B y C, tres sucesos cualesquiera de un espacio muestral U. Represente mediante un diagrama de Venn los conjuntos $(A\cup B)-(B\cap C)$ y $(B-A)\cap(B-C)$.

3. Determine el conjunto que representan cada uno de los siguientes diagramas de Venn



4. Si en una clase de 100 alumnos, 54 han aprobado el examen de Matemáticas, 75 el de física y 40 han aprobado los dos exámenes, ¿cuántos alumnos no han aprobado ninguna de las dos asignaturas?

5. En una clase C de 30 alumnos, 18 estudian Matemáticas ($M\subset C$), 13 Filosofía ($F\subset C$) y 5 Historia ($H\subset C$). Sabiendo que sólo hay 3 alumnos que estudian simultáneamente Matemáticas y Filosofía, se pide:

   a) Determine cuantos alumnos estudian Matemáticas o Filosofía.

   b) ¿Cuántos elementos tiene el conjunto $C-(M\cup F)$?

   c) ¿Puede saberse cuantos alumnos sólo estudian Historia?

6. Se sometió un grupo de personas a un cuestionario formado por tres preguntas. Sabemos que el 8 % contestaron bien las tres preguntas, el 9 % contestaron bien sólo a la 1ª y 2ª, el 11 % contestaron bien sólo la 1ª y 3ª, el 16 % contestaron bien la 2ª y 3ª, el 45 % contestaron bien a la 1ª, el 32 % a la 2ª y el 39 % a la 3ª. ¿Qué porcentaje de personas no contestaron bien a ninguna pregunta?

7. Definir tres espacios de probabilidad distintos sobre el espacio muestral $E = \{0,1,2\}$.

8. Consideremos el espacio muestral de 4 elementos $E = \{a,b,c,d\}$. Justifique si alguno de los siguientes casos define una probabilidad:

   a) $P(a)=\frac{1}{2}$ $P(b)=\frac{1}{3}$ $P(c)=\frac{1}{4}$ $P(d)=\frac{1}{5}$

   b) $P(a)=\frac{1}{2}$ $P(b)=\frac{1}{4}$ $P(c)=-\frac{1}{4}$ $P(d)=\frac{1}{2}$

   c) $P(a)=\frac{1}{2}$ $P(b)=\frac{1}{4}$ $P(c)=\frac{1}{8}$ $P(d)=\frac{1}{8}$

   d) $P(a)=\frac{1}{2}$ $P(b)=\frac{1}{4}$ $P(c)=\frac{1}{4}$ $P(d)=0$

9. Consideremos el espacio muestral de 4 elementos $E = \{a,b,c,d\}$. Calcule las probabilidades que se piden

a) Hallar $P(a)$ si $P(b) = \frac{1}{3}, P(c) = \frac{1}{6}$ y $P(d) = \frac{1}{9}$
b) Hallar $P(a)$ y $P(b)$ si $P(c) = P(d) = \frac{1}{4}$ y $P(a) = 2P(b)$
c) Hallar $P(b, c, d)$ si $P(b, c) = \frac{1}{3}, P(b, d) = \frac{1}{4}$ y $P(b) = \frac{1}{5}$
d) Hallar $P(a)$ si $P(c, d) = \frac{2}{3}, P(b, d) = \frac{1}{2}$ y $P(b) = \frac{1}{3}$

10. Consideremos el espacio de sucesos $\mathcal{A} = \{A, B, C, D\}$. Determine si la siguiente función:

$$P(A) = 3/7; P(B) = 0; P(C) = 2/7; P(D) = 2/7$$

define una probabilidad sobre ese espacio.

11. Demostrar que si P es una probabilidad sobre E, entonces $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ para cualquiera dos sucesos A y B de E.

12. Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0'8$, $P(A \cap B) = 0'3$ y $P(B - A) = 0'2$.

a) Represente mediante un diagrama de Venn la situación planteada.
b) Calcule la probabilidad de los sucesos A y B.
c) Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos: $A - B$, $B - \bar{A}$, $B \cap \bar{A}$ y $\bar{B} \cap \bar{A}$.

13. Halla la probabilidad de un suceso sabiendo que la suma de su cuadrado y del cuadrado de la probabilidad del suceso contrario es $1/2$.

14. Un programa informático combina al azar los colores rojo, azul, verde, amarillo y negro, para obtener una bandera de tres franjas horizontales de colores (no necesariamente distintos). ¿Qué probabilidad hay de que la bandera obtenida coincida con la alemana? ¿Qué probabilidad hay de que la bandera obtenida coincida con la española?

15. Cinco amigos que van de viaje, llegan a un hotel donde sólo quedan libres dos habitaciones, una doble y una triple. Si en la recepción del hotel asignan las habitaciones al azar, se pide:

a) ¿Qué probabilidad hay de que Juan duerma en la misma habitación que Marta?
b) ¿Cómo cambiaría esa probabilidad si el hotel dispusiera de tres habitaciones, una individual y dos dobles?

16. En una pandilla de cinco amigos, ¿qué probabilidad hay de que haya, al menos, dos amigos que cumplan años el mismo día? ¿Cuantos amigos tendría que tener la pandilla para que esa probabilidad fuese $1/2$?

17. Si elegimos al azar un punto en el cuadrado de vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(2, 2)$, $(0, 2)$, ¿qué probabilidad hay de que pertenezca al círculo de centro $(1, 1)$ y radio 1 inscrito en el cuadrado. Generalizar este resultado a un círculo de radio r inscrito en un cuadrado de lado $2r$.

18. Un ejercicio de oposición consiste en responder adecuadamente a las preguntas relativas a dos temas. Para cada opositor, se realiza un sorteo entre los 100 temas que componen el temario y se extraen, al azar, tres temas, de los cuales, el opositor elige los dos temas del ejercicio de oposición. Se pide:

a) Si un opositor se ha estudiado 65 temas, ¿qué probabilidad tiene de realizar satisfactoriamente el ejercicio, es decir, de que coincidan, al menos, dos de los tres temas obtenidos al azar, con los que ha estudiado?

b) Determine una fórmula general que permita calcular la probabilidad de realizar satisfactoriamente el ejercicio de oposición en función del número (x) de temas estudiados por el opositor.

c) ¿Cuántos temas (x) debe estudiar un opositor si desea tener una probabilidad de aprobar, superior al 90 %?

d) Determine una fórmula que permita conocer el número de temas, que debe estudiar un opositor, en función de la probabilidad de conocer, al menos, dos de los tres temas obtenidos al azar.

e) Fórmula general: Determine la fórmula general que relaciona el número de temas estudiados (x) con la probabilidad de éxito (p), en función del número total de temas del temario (N), de los temas extraídos al azar (T) y del número de ellos (t) que debe conocer para aprobar.

19. Otro examen de oposición tiene un temario de 50 temas clasificados en dos bloques de 30 y 20 respectivamente. Para aprobar el examen hay que responder acertadamente a las preguntas de 3 temas elegidos al azar en un sorteo; 2 del primer bloque y 1 del segundo.

    a) Si un opositor ha estudiado 15 temas del primer bloque y 10 del segundo, ¿qué probabilidad tiene de conocer los tres temas de la oposición?

    b) Determinar la fórmula general que permita calcular la probabilidad de aprobar en función del número total de temas del temario (N), clasificados en dos bloques (de N_1 y N_2 temas respectivamente, con $N = N_1 + N_2$), del número de temas estudiados del primer bloque (x_1, con $0 \leq x_1 \leq N_1$) y del número de temas estudiados del segundo bloque (x_2, con $0 \leq x_2 \leq N_1$).

20. Distribución Hipergeométrica: En un pueblo de 100 vecinos, 60 de ellos son mujeres y 40 son hombres. Si el a ayuntamiento sortea cuatro entradas gratuitas para el concierto de la feria del pueblo, qué probabilidad hay de que haya el mismo número de hombres que de mujeres agraciadas. Generalización: Supongamos que en el pueblo viven N_1 hombres y N_2 mujeres que hacen un total de N habitantes. Si el ayuntamiento sortea n entradas, qué probabilidad hay de que sean agraciados n_1 hombres y n_2 mujeres, con $n = n_1 + n_2$.

21. En todas las monedas españolas de 2 euros figura, en el reverso, la inscripción "2 EUROS", pero en el anverso puede aparecer una imagen de S.M. el Rey Juan Carlos I de Borbón, de don Quijote de la Mancha o, recientemente, de la Mezquita Catedral de Córdoba. Determine el espacio muestral y la función de probabilidad del experimento consistente en lanzar

    a) dos monedas de 2 euros con la imagen de S.M. el Rey Juan Carlos I de Borbón.

    b) ¿dos monedas de 2 euros, pero una de ellas con la imagen de don Quijote de la Mancha y la otra con la imagen de la Mezquita Catedral de Córdoba.

    c) una misma moneda de 2 euros, dos veces.

    d) Repetir todo el ejercicio utilizando tres monedas de 2 euros.

22. Consideramos el experimento aleatorio consistente en lanzar dos dados iguales:

    a) Determinar el espacio muestral.

b) Determinar los sucesos: A=“Las caras son iguales”, B=“La suma de las caras es mayor que 8”, C=“La suma de las caras es igual a 5” y D=“La suma de las caras es par”.

c) Calcular la probabilidad de los sucesos del apartado anterior.

d) Determinar los sucesos: $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \cup C$, $A \cap C$ y $A - D$.

e) Calcular la probabilidad de los sucesos del apartado anterior haciendo uso de las propiedades de la función de probabilidad.

f) Analizar las diferencias de este experimento respecto a otro que utilizase dos dados distintos (diferente color por ejemplo).

23. Consideremos el experimento de lanzar simultáneamente una dado y una moneda.

    a) Determine el espacio muestral y la función de probabilidad.

    b) Si me dan un euro por cada punto obtenido en el dado y un euro más si sale cara o dos euros más si sale cruz, determine el nuevo espacio muestral de las ganancias que esperamos obtener y la probabilidad del suceso “ganar 6 euros o más”.

24. Un dado se lanza dos veces. Halla la probabilidad de obtener 4, 5 ó 6 en el primer lanzamiento y 1, 2 ó 3 en el segundo.

25. Dos amigos salen de caza. El primero acierta un promedio de 2 piezas cada 5 disparos y el segundo una pieza cada dos disparos. Si los dos disparan al mismo tiempo a una misma pieza. ¿Cuál es la probabilidad de que la pieza haya sido alcanzada?

26. En una tienda de electrodomésticos nos informan de que, la probabilidad de que se averíe una lavadora durante su periodo de garantía es $1/4$ y la de que se averíe un frigorífico, durante el periodo de garantía, es $1/3$. Supongamos que adquirimos ambos electrodomésticos. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

    a) Durante el período de garantía se averían los dos electrodomésticos.

    b) Algún electrodoméstico se avería durante su periodo de garantía.

    c) Durante el período de garantía sólo se avería la lavadora.

    d) Durante el período de garantía sólo se avería el frigorífico.

27. ¿Cuál es la probabilidad de hundir un barco, sabiendo que sólo pueden lanzarse 3 torpedos, y que la probabilidad de hundir un barco con cada torpedo es $0'2$?

    ¿Cuántos torpedos habría que lanzar para que la probabilidad de hundir un barco fuera, al menos, del 90 %?

28. Un aparato consta de dos partes A y B, que se fabrican de manera independiente. Se sabe que en el proceso de fabricación la probabilidad de que la parte A salga defectuosa es $0'1$ y la probabilidad de un defecto en B es de 0’03. ¿Cuál es la probabilidad de que el aparato sea defectuoso?

29. Sean A y B dos sucesos independientes tales que la probabilidad de que ocurran los dos sucesos es $1/3$ y de que no ocurra ninguno de los dos es $1/6$. Calcule el valor de $P(A)$ y de $P(B)$.

30. Un sistema electrónico de dos componentes se conecta en paralelo de modo que falle sólo si sus dos componentes fallan. La probabilidad de que el primer componente falle es $0'10$ y de que falle el segundo es $0'05$. Suponiendo que ambos componentes funcionan independientemente, se pide:

    a) ¿Qué probabilidad hay de que el sistema funcione?

    b) Si el sistema dispone los componentes en serie, ¿cómo varía esa probabilidad?

    c) Recalcular esta probabilidad si al sistema original (en paralelo) le añadimos un nuevo componente en serie que tiene una probabilidad de fallar de $0'2$.

31. Una resistencia R se quema una de cada 100 veces que se enciende un aparato durante más de 12 horas. Recientemente han salido al mercado unas nuevas resistencias R+ que se queman una de cada 300 veces que el aparato está encendido durante más de 12 horas. Las resistencias R vienen en un blíster de 3 unidades y su precio es de 5 euros. Las resistencias R+ se venden sueltas a 5 euros cada una. Con 5 euros, ¿qué es más eficiente: un sistema con las 3 resistencias R en paralelo (de manera que el sistema no funciona si no funciona ninguna de las tres) o con una única resistencia R+? ¿Y si hubiera una oferta de lanzamiento de R+ de 2x1?

32. Distribución Binomial: Si lanzamos al aire 4 veces una moneda perfecta, ¿qué probabilidad hay de salgan dos caras y dos cruces? Generalización: ¿qué probabilidad hay de que salgan n_1 caras y n_2 cruces, si lanzamos al aire n veces ($n = n_1 + n_2$) una moneda trucada con probabilidad p de salir cara?

33. Distribución Geométrica: Se lanza una moneda al aire tantas veces como sea necesario hasta obtener una cara. ¿Qué probabilidad hay de tener que lanzar cinco veces la moneda? Generalización: ¿Qué probabilidad hay de tener que lanzar x veces una moneda trucada con probabilidad p de salir cara?

34. Distribución Binomial negativa: Se lanza una moneda al aire tantas veces como sea necesario hasta obtener cara tres veces cara. ¿Qué probabilidad hay de tener que lanzar diez veces la moneda? Generalización: ¿Qué probabilidad hay de tener que lanzar x veces una moneda trucada con probabilidad p de salir cara para obtener n caras?

35. Un tirador dispara sobre una diana y sabe que la probabilidad de que acierte es 1/3. Se pide:

    a) Calcular la probabilidad de que acierte al menos una vez si dispara 8 veces.

    b) Calcular la probabilidad de no acertar en 8 disparos consecutivos.

36. Si dos dados se lanzan 20 veces, hallar:

    a) La probabilidad de obtener alguna vez "doble 6".

    b) No haya sumado nunca 8 puntos.

    c) Alguna vez sume 8 puntos.

37. En un taller trabajan 10 obreros y la probabilidad de que uno cualquiera de ellos esté de baja es $0'1$. Determine la probabilidad de que un día

    a) vengan todos los obreros a trabajar.

   b) falte al trabajo al menos un obrero.

38. 5 profesores imparten todos los días una hora de clase a un grupo de 20 alumnos. La probabilidad de que falte un día a clase un profesor es $0'01$ y la de que falte un alumno es $1/20$. Calcule la probabilidad de los siguientes sucesos:

    a) No venga a clase ningún profesor.

    b) Falte a clase algún profesor.

    c) Falte algún alumno a clase.

    d) Vengan a clase todos los alumnos y todos los profesores.

    e) Generalizar los resultados anteriores cuando la clase tiene n alumnos y la probabilidad de que falte uno de ellos es $1/n$.

39. Una moneda está trucada y la probabilidad de salir cara es tres veces mayor que la probabilidad de salir cruz. Consideremos el experimento de lanzar tres veces esta moneda y anotar el número de caras obtenido en los tres lanzamientos.

    a) Determine el espacio muestral y la función de probabilidad.

    b) ¿Qué resultado es más probable, que salga alguna cruz en los tres lanzamientos o que el resultado de los tres lanzamientos sea el mismo?

    c) Si repetimos dos veces el experimento, ¿qué probabilidad hay de que, en alguna de las dos veces, hayan salido tres cruces?

40. Si $P(A) = 1/3$, $P(B) = 1/4$ y $P(A \cap B) = 1/5$.

    a) Halle las probabilidades de los sucesos: $A \mid B$, $B \mid A$, $\bar{A} \mid B$, $\bar{B} \mid \bar{A}$, $A \cup B$ y $\bar{B} \mid A$.

    b) ¿Son A y B incompatibles? ¿Son A y B independientes?

41. Si $P(A \cup B) = 0'8$, $P(A \cap B) = 0'3$ y $P(B - A) = 0'2$.

    a) Halle las probabilidades de los sucesos: $A \mid B$, $A \mid \bar{B}$, $(B - A) \mid (A \cup B)$.

    b) ¿Son A y B incompatibles? ¿Son A y B independientes?

42. Sean A y B dos sucesos que verifican lo siguiente:

    - La probabilidad de no ocurran simultáneamente los dos sucesos es $0'5$,
    - la probabilidad de que no ocurra el suceso B es $0'9$ y
    - la probabilidad de que ocurra el suceso B, sabiendo que ha ocurrido el suceso A es $1/3$.

    Determine la probabilidad de que ocurra el suceso A y responda a las siguientes preguntas:

    a) ¿Son A y B sucesos equiprobables? Justifique la respuesta.

    b) ¿Son A y B sucesos independientes? Justifique la respuesta.

    c) ¿Son A y B sucesos incompatibles? Justifique la respuesta.

43. En el experimento de lanzar un dado se consideran los siguientes sucesos: $A =$ "Obtener un número mayor que 4" y $B =$ "Obtener un múltiplo de 3". Se pide:

   a) Utilice la definición frecuentista de probabilidad para calcular $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$, $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$.
   b) Probar que el resultado obtenido en el apartado anterior es el mismo si aplicamos la definición de probabilidad condicionada para calcular $P(A \mid B)$ y $P(B \mid A)$.

44. Se lanzan dos dados. Si la suma de los puntos de las caras superiores es 5, hallar la probabilidad de que en alguno de los dados salga 2. Realice este ejercicio de dos maneras distintas (utilizando o no la probabilidad condicionada).

45. Se lanzan dos dados al aire y se anota la suma de los puntos obtenidos. Se pide:
   a) Determinar el espacio muestral.
   b) Calcular la probabilidad de anotar un 7.
   c) ¿Son equiprobables todos los sucesos elementales?
   d) Calcular la probabilidad de que el número obtenido sea par.
   e) Calcular la probabilidad de que el número obtenido sea impar.
   f) Si sabemos que uno de los dados salió 4, ¿cómo cambia esta información, el valor de la probabilidad de obtener 6 puntos?

46. La probabilidad de fallo en tres máquinas A, B y C son: $0'1$, $0'05$ y $0'01$. Determine el espacio muestral y la función de probabilidad y calcule las siguientes probabilidades:
   a) Probabilidad de que funcione alguna.
   b) Probabilidad de que fallen 2 máquinas a la vez.
   c) Probabilidad de que funcionen las 3.
   d) Probabilidad de que si existe un único fallo, éste se deba a la máquina A.
   e) Probabilidad de que si existen dos fallos, alguno se haya producido en la máquina A.
   f) Probabilidad de que si existe fallo (uno o varios), esté averiada la máquina A.

47. Una urna contiene tres bolas rojas y siete negras. Se extraen dos bolas al azar. Describir el espacio muestral E y la función de probabilidad P cuando:
   a) Se extraen con reemplazamiento.
   b) Se extraen sin reemplazamiento.

48. Una caja contiene cuatro bolas blancas y dos negras. Se saca una bola y a continuación (sin devolver la primera a la caja) se extrae otra. Consideramos los sucesos: $A =$"la primera bola extraída es blanca" y $B =$"la segunda bola extraída es blanca". Se pide:
   a) Hallar $P(A)$ y $P(B \mid A)$.
   b) ¿Son A y B dos sucesos independientes?
   c) ¿Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean blancas?
   d) ¿Cual es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean negras?

49. Se sacan dos bolas de una urna que se compone de una bola blanca, otra roja, otra verde y otra negra. Describa el espacio muestral E y la función de probabilidad P cuando:
   a) La primera bola se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

b) La primera bola no se devuelve a la urna antes de sacar la segunda.

c) Se extraen simultáneamente de la urna las dos bolas.

50. Una caja contiene 12 objetos de los cuales 5 son defectuosos. Si se van tomando hasta encontrar uno defectuoso. Encontrar:

    a) Espacio muestral.

    b) Probabilidad de que se obtenga en la sexta extracción.

51. Una caja contiene dos bolas blancas y dos bolas negras y, sin mirar, se van sacando bolas de la caja, consecutivamente y sin reemplazamiento, hasta que aparezcan las dos bolas negras. Determine el espacio muestral del experimento y calcule la probabilidad de los sucesos elementales, justificando matemáticamente los cálculos realizados.

52. Lanzamos una moneda perfecta tantas veces como sea necesario hasta que salga cara, y anotamos el número total de lanzamientos que han sido necesarios. Determine el espacio muestral y la función de probabilidad, y compruebe que la suma de las probabilidades de todos los sucesos elementales es 1.

53. Demostrar que si A y B son dos sucesos independientes entonces $\bar{A}$ es también independiente de B. Indicación: Probar que $P(B \mid \bar{A}) = P(B)$ aplicando que $B \cap \bar{A} = B - (A \cap B)$.

54. La probabilidad de que un hombre viva más de 75 años es 1/4 y la de que su mujer viva más de 75 años es 1/3. Se pide:

    a) Calcular la probabilidad de que ambos vivan más de 75 años.

    b) Calcular la probabilidad de que el hombre viva más de 75 años y la mujer no.

    c) Calcular la probabilidad de que ambos mueran antes de los 75 años.

55. Una urna A contiene 4 bolas blancas y 6 rojas y otra B contiene 7 bolas blancas y 5 rojas. Si se extrae una bola de la urna B

    a) ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola roja?

    b) ¿Cómo cambia el valor de esta probabilidad si sabemos que antes de la extracción se saca una bola de la urna A y se pasa a la urna B?

56. Se tiene una urna vacía y se lanza una moneda al aire. Si sale cara se introduce en la urna una bola blanca y si sale cruz se introduce una bola negra. El experimento se repite tres veces y a continuación se introduce la mano en la urna y se saca una bola. ¿Cuál es la probabilidad de que en la urna quede un bola de cada color?

57. En la estantería de libros de Matemáticas de una biblioteca hay un libro de álgebra, siete copias del mismo libro de cálculo y cuatro copias del mismo libro de estadística. El libro de álgebra tiene 300 páginas y 24 capítulos; el de cálculo tiene 350 páginas y 20 capítulos; y el de estadística tiene 400 páginas y 22 capítulos.

    a) Determine la probabilidad de que, elegido un libro al azar, al abrirlo obtengamos una página que encabeza un capítulo.

    b) Sabiendo que, al abrir al azar un libro elegido también al azar, hemos obtenido una página que encabeza un capítulo, ¿de qué rama de la Matemática es más probable que sea?

c) Sabiendo que, al abrir al azar un libro elegido también al azar, no hemos obtenido una página que encabeza un capítulo, ¿de qué rama de la Matemática es más probable que sea?

58. El 20 % de los productos fabricados por la empresa A y el 5 % de los fabricados por la empresa B tienen algún defecto.

    a) Si mis únicos suministradores son estas dos empresas, ¿qué porcentaje de productos debo adquirir en cada una si estoy dispuesto a admitir entre mis productos un total del 10 % de defectuosos.

    b) Utilizando el porcentaje anterior, ¿qué probabilidad hay de que haya sido fabricado por la empresa A un producto que elegido al azar resultó ser defectuoso?

59. El 2 % de una población padece una enfermedad E, existiendo un síntoma S, tal que el 27 % de los enfermos presentan el síntoma, mientras que un 5 % de los individuos no enfermos presentan el síntoma. Calcular los porcentajes de individuos con el síntoma y de individuos enfermos que presentan el síntoma.

60. En una operación de fabricación se utilizan dos líneas de producción para ensamblar fusibles electrónicos. Ambas líneas producen fusibles con la misma velocidad y generalmente $2'5$ % de los fusibles que producen están defectuosos. Sin embargo, la línea 1 de producción experimentó recientemente problemas mecánicos y produjo 6 % de fusibles defectuosos durante un periodo de 3 semanas. Esta situación no se conoció antes de que varios lotes de fusibles electrónicos producidos en este periodo se enviaran a los clientes. Si uno de los dos fusibles probados por un cliente resultó tener defectos, ¿qué probabilidad hay de que el lote del que provino se haya producido en la línea que tuvo problemas? (Suponga que todos los fusibles del lote se produjeron en la misma línea).

61. En una planta de electrónica, se sabe por experiencia que la probabilidad de que un obrero de nuevo ingreso que haya asistido al programa de capacitación de la compañía cumpla la cuota de producción es de $0'86$ y que la probabilidad correspondiente de un obrero de nuevo ingreso que no ha asistido a dicho curso de capacitación es de $0'35$. Si el 80 % de la totalidad de los obreros de nuevo ingreso asisten al curso de capacitación, se pide:

    a) ¿Qué probabilidad existe de que un trabajador de nuevo ingreso cumpla la cuota de producción?

    b) ¿Qué probabilidad hay de que un obrero de nuevo ingreso que satisface la cuota de producción haya asistido al curso de capacitación de la compañía?

62. *Errores de diagnóstico.* Una cierta enfermedad la padece el p % de la población. Se sabe que la probabilidad de detectar la enfermedad, mediante un análisis no del todo fiable, en una persona enferma es la misma que la de no detectarla en una persona sana, siendo estas probabilidades la proporción de personas que no padecen la enfermedad en dicha población.

    a) Se le aplica el análisis a una persona y resulta negativo. Calcular la probabilidad de que haya habido un error en el diagnóstico.

    b) Se le aplica el análisis a una persona y resulta positivo. Calcular la probabilidad de que haya habido un error en el diagnóstico.

63. *Secuencialidad del Teorema de Bayes.* Un prisionero político en Rusia será exiliado a Siberia o a los Urales, y él no sabe a cual de los dos será enviado, pero sabe que la probabilidad de ser exiliado a Siberia es $0'8$. También sabe que si un residente en Siberia es seleccionado aleatoriamente, la probabilidad de que lleve un abrigo de pieles es $0'5$, mientras que en los Urales, ésta es de $0'7$. Al llegar a su lugar de exilio, la primera persona que ve no lleva abrigo de pieles. Se pide:

    a) ¿Cuál es la probabilidad de que esté en Siberia?

    b) Teniendo en cuenta la información anterior, la siguiente persona que ve tampoco lleva abrigo de pieles. ¿Cuál es ahora la probabilidad de que esté en Siberia?

    c) ¿Y si hubiese visto juntas a las dos personas en el primer momento?

64. Supóngase que una caja contiene 5 monedas, y que la probabilidad de obtener cara en un lanzamiento es distinta para cada moneda. Sea p_i la probabilidad de obtener cara al lanzar la i-ésima moneda (i=1,2,3,4,5) y supóngase que $p_i = (i-1)/4$.

    a) Supóngase que se selecciona una moneda de la caja al azar, y que al lanzarla una vez se obtiene cara, ¿cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la i-ésima moneda?

    b) Si la misma moneda es lanzada otra vez, ¿cuál será la probabilidad de obtener otra cara?

    c) Si se ha obtenido una cruz en el primer lanzamiento de la moneda seleccionada y se lanza otra vez la misma moneda, ¿cuál es la probabilidad de obtener una cara en el segundo lanzamiento?

    d) Supongamos que, con la misma caja realizamos el siguiente experimento: seleccionamos aleatoriamente una moneda de la caja y la lanzamos repetidamente hasta que obtenemos una cara. Si se obtiene la primera cara en el cuarto lanzamiento, ¿cuál es la probabilidad de que se haya seleccionado la i-ésima moneda?

    e) Si se continúa lanzando la misma moneda hasta que aparece otra cara, ¿cuál es la probabilidad de que se necesiten exactamente tres lanzamientos?

65. En una ciudad existen dos fábricas de pelotas de tenis. En la fábrica F_1 el porcentaje de ellas que se fabrican de calidad A es del 80 %, de calidad B es del 5 % y de calidad C del 15 %. En la fábrica F_2 los porcentajes son a, b y c respectivamente.

    a) Dar una expresión general, lo más simplificada posible, de la proporción de pelotas de calidad A para toda la ciudad.

    b) Sabiendo que a=92 % y que el porcentaje de pelotas de calidad A en toda la ciudad es del 89 %, ¿cuál de las dos fábricas produce más pelotas de tenis?

    c) Si el porcentaje de pelotas de calidad B en toda la ciudad es del 5 %, ¿qué valores toman b y c? y entonces ¿cuál es la proporción de pelotas fabricadas por F_2 entre las de calidad C?

66. *En contra de la intuición.* Proponemos cuatro ejemplos de la vida cotidiana donde nuestra intuición no coincide con la realidad, poniendo de manifiesto que saber un poco de matemáticas puede ayudarnos a no dejarnos engañar por las falsas apariencias.

a) Coincidencia de cumpleaños. En ocasiones nos sorprendemos por “coincidencias” que no son extraordinarias. Por ejemplo. En una comida con 25 personas, dos cumplen años el mismo día. La probabilidad de que eso suceda puede parecernos bastante baja, ya que hay 366 fechas posibles. Pero no lo es. A partir de 23 personas ya hay un 50 % de probabilidades de que dos compartan día de nacimiento. Con 30 personas supera el 70 %. Y en una reunión de 70 pueden apostar lo que quieran con garantías de ganar: supera el 99 %.

b) Saber y ganar. El concursante de un programa de televisión se enfrenta a la prueba final, en la que hay tres puertas. Detrás de una de ellas hay un coche, y tras las otras dos, nada. Elige una y el presentador ordena abrir alguna de las otras dos, siempre una sin premio. Entonces, tienta al concursante: “¿Desea cambiar de puerta?”. La intuición nos dice que da igual, que tendremos un 50 % de probabilidades de acertar. Pero no es así. Si nos quedamos en la misma solo tendremos una probabilidad de 1/3 (33 %) de conseguir el premio, igual que al principio. Pero si cambiamos, la probabilidad de obtener el coche será de 2/3: seremos ganadores siempre que nuestra primera opción no fuera la correcta. Y partíamos con un 66 % de probabilidades de equivocarnos.

c) Diagnóstico terrible. Nos hacen una prueba para averiguar si padecemos una grave enfermedad que afecta a una de cada 200 personas. El análisis tiene el 98 % de fiabilidad, esto es, falla el 2 % de las veces. Damos positivo. ¿Debemos asustarnos? Sí, pero no en exceso. La probabilidad de que padezcamos el mal es del 20 %. De cada 10.000 personas, unas 50 tendrán la enfermedad. De ellas, 49 obtendrán un resultado positivo en la prueba y una dará negativo (por el margen de error). En cuanto a la población sana (9.950 personas), 9.751 darán negativo y 199 positivo. Luego la mayoría de las personas diagnosticadas del mal en ese análisis (199 de 248) serán en realidad falsos positivos (80 %).

d) ¿Es tan improbable? 30 personas van a una fiesta y dejan su sombrero en un perchero. A la salida, cada una toma uno sin fijarse bien si es el suyo. ¿Qué probabilidad hay de que ninguna acierte? La intuición nos señala que es muy difícil que suceda, pero no lo es tanto. La probabilidad de que ninguno de los asistentes se lleve su sombrero es de alrededor del 37 %. Aproximadamente la misma, por cierto, que la de que acierte solo uno.

Utilice los conocimientos adquiridos en este tema de probabilidad para justificar los razonamientos y comprobar los cálculos que se proporcionan en los cuatro ejemplos anteriores.