Tema 5b: Distribuciones de Probabilidad

Departamento Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Curso 2015-2016

Introducción

Una vez conocido el concepto de variable aleatoria, vamos a ver aquellas que mejor sirven para describir fenómenos naturales y modelos teóricos que ayudan a simular y describir a aquellos.

Al igual que las variables aleatorias los separaremos en dos tipos:

- Discretos (Finitos o Numerables)
- Continuos

Distribución uniforme discreta

Definición

Una variable aleatoria ξ que toma valores en x_1, x_2,...,x_n con probabilidades: $\mathbf{P}(\xi = \mathbf{x_k}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$ *con $k = 1$, 2,...,n recibe el nombre de* **variable aleatoria uniforme discreta** *y se denota por:*

$$\xi \rightsquigarrow \mathbf{U}(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n})$$

Si la variable toma valores en los n primeros números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots, n\}$, se denota por $\mathbf{U}(\mathbf{n})$.

Ejemplo

- *Lanzar un dado será una $U(6)$, ya que $P(\xi = k) = \frac{1}{6}$ con $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.*
- *Sacar una carta de una baraja española será una $U(40)$, entendiendo que las cartas numeradas de 1 a 10 son 'oros', del 11 al 20, son 'copas', del 21 al 30 'espadas' y el resto 'bastos. Además si termina en 8 es 'sota', si en 9 es 'caballo' y si en 0 es 'rey'.*

Media y Varianza distribución uniforme discreta $U(n)$

Media: $\mu = \mathbf{E}(\mathbf{X}) = \mathbf{\frac{n+1}{2}}$

$E(X) = \sum_k kp(X=k) = \sum_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1+2+\ldots+n) = \frac{1}{n}\frac{(1+n)n}{2} = \frac{n+1}{2}$

Varianza: $\mathbf{V}(\mathbf{X}) = \mathbf{\frac{n^2-1}{12}}$

Desviación típica: $\sigma(\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbf{\frac{n^2-1}{12}}}$

$m_2 = \sum_k k^2 p(X=k) = \sum_i \frac{1}{n} = \frac{1}{n}(1+4+9+\ldots+n^2) = \frac{1}{n}a_n$ donde:
$a_n = 1+4+9+16+25\ldots+n^2 = \{1,5,14,30,55,91,...\}$. Para hallar el término general, a_n, formamos la tabla de diferencias:

i	a_i	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
1	**1**				
		4			
2	5		**5**		
		9		**2**	
3	14		7		0
		16		2	
4	30		9		0
		25		2	
5	55		11		0
		36		2	
6	91		13		0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\Rightarrow$

$$a_n = a_1 + \frac{\Delta_1}{1!}(n-1) + \frac{\Delta_1^2}{2!}(n-1)(n-2) +$$
$$+\frac{\Delta_1^3}{3!}(n-1)(n-2)(n-3) + \ldots =$$
$$= 1 + 4(n-1) + \frac{5(n-1)(n-2)}{2} + \frac{2(n-1)(n-2)(n-3)}{6}$$
$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{6}(n^3+3n^2+n)$$
$$\Rightarrow \mathbf{m_2 = \frac{1}{6}(n^2+3n+1)} \Rightarrow$$
$$\mathbf{V} = \frac{1}{6}(n^2+3n+1) - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \mathbf{\frac{n^2-1}{12}}$$

Distribución de Bernouilli

Definición

Un experimento solo puede presentar dos resultados: A y $\bar{A}$, con probabilidades $P(A) = p$ y $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Decimos que la variable aleatoria ξ asociada al experimento y toma el valor 1 si ocurre el suceso A y el valor cero cuando ocurre $\bar{A}$ sigue una **distribución de Bernouilli.**

Función de probabilidad: $\mathbf{P(1) = p}$, $\mathbf{P(0) = q}$, con $p + q = 1$.

Media: $\mu = \mathbf{E}(\xi) = \mathbf{p}$

$$E(\xi) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$$

Varianza: $\mathbf{V}(\xi) = \mathbf{pq}$

$$m_2 = 1^2 p + 0^2 q = p \Rightarrow V(\xi) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

Desviación típica: $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{pq}}$

Distribución Binomial

Definición

Supangamos que realizamos n pruebas de Bernouilli de forma sucesiva e independientes. A la variable aleatoria: ξ="Número de veces que ha ocurrido el suceso A" se le denomina **distribución binomial**

Función de probabilidad:

$$\mathbf{P}(\xi = \mathbf{k}) = \binom{n}{k} \mathbf{p^k q^{n-k}} \qquad (n \in \mathbb{N},\ k = 0, 1, \ldots, n,\ 0 \leq p \leq 1)$$

Media: $\mu = \mathbf{E}(\xi) = \mathbf{np}$
Varianza: $\mathbf{V}(\xi) = \mathbf{npq}$
Desviación típica: $\sigma_\xi = \sqrt{\mathbf{npq}}$

Propiedades de la Binomial

- Está caracterizada por los valores de n y p. Se denota por: $B(n, p)$.
- Para valores pequeños de n, la probabilidad $P(\xi = k)$ se encuentra tabulada para $p \leq 0.5$.
- Si $p > 0.5$ se puede considerar que $P(\xi = k) = P(\psi = n - k)$ donde $\psi \rightsquigarrow B(n, q)$.
- La binomial $B(n, p)$ puede considerarse como la suma de n distribuciones de Bernouilli independientes de igual probabilidad p.
- La Bernouilli ($Ber(p)$) puede considerarse como una binomial con $n = 1$. $Ber(p) = B(1, p)$
- MATLAB dispone de varias rutinas relacionadas con la binomial. **binopdf(k,n,p)** proporciona $P(\xi = k)$ en la B(n,p).

Aproximaciones de la binomial

Cuando n es grande la distribución binomial se aproxima a otras distribuciones. En general se acepta que:

- Si $n > 30$ y $np < 5$ entonces $\mathbf{B(n, p) \approx P(np)}$
- Si $n > 30$ y $nq < 5$ entonces $\mathbf{B(n, q) \approx P(nq)}$
- Si $n > 30$, $np \geq 5$ y $nq \geq 5$ entonces $\mathbf{B(n, p) \approx N(np, \sqrt{npq})}$

donde $P(np)$ y $P(nq)$ son la distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$ y $\lambda = nq$ respectivamente, y $N(np, \sqrt{npq})$ es la distribución normal de media $\mu = np$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq}$.

Ejemplo

Ejemplo

La probabilidad de que una máquina fabrique una pieza defectuosa es 0.02. Determinado día ha fabricado 15 piezas. Hallar la probabilidad de:

1. *Exactamente 2 sean defectuosas.*
2. *Al menos 2 sean defectuosas.*
3. *Si las piezas se agrupan en lotes de 4. Probabilidad de que el lote tenga 1 defectuosa.*

1: Si se considera que la fabricación de una pieza no influye en la siguiente (sucesos independientes). ξ='Num. Defect' es típicamente una binomial $\xi \rightsquigarrow B(15, 0.02)$.

$$P(a) = P(\xi = 2) = \binom{15}{2}(0.02)^2(0.98)^{13} = 0.0323 \quad \text{(binopdf(2,15,0.02))}$$

2: Es más fácil calcular la probabilidad del suceso contrario. $P(B) = 1 - P(\bar{B})$, pero el suceso $\bar{B}$ es que todas sean correctas o solo 1 defectuosa, luego: $P(\bar{B}) = P(\{0, 1\}) =$
$= P(\xi = 0) + P(\xi = 1) =$ {(binopdf(0,15,0.02)+binopdf(1,15,0.02))}
$= \binom{15}{0}(0.02)^0(0.98)^{15} + \binom{15}{1}(0.02)^1(0.98)^{14} = 0.9647 \Rightarrow$ P(B)=1-0.9647=0.0353

3: Ahora es una nueva v.a. $\eta \rightsquigarrow B(4, 0.02)$ y se pide $p(\eta = 1) = 4(0.02)(0.98)^3 =$
$= 0.0753$ (binopdf(1,4,0.02))

Distribución Multinomial o Polinomial

Es una generalización de la binomial.

Definición

Ahora en cada prueba se consideran k sucesos excluyentes A_1, $A_2, \ldots, A_k$ *con probabilidades respectivas* p_1, p_2, $\ldots$, p_k *con* $p_1 + p_2 + \ldots + p_k = 1$.
Se realizan n pruebas independientes de este tipo. Podemos definir la variable aleatoria $X_i =$*"Número de veces que ocurre* A_i*". A la variable multidimensional* $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ *se le llama* **variable multinomial o polinomial**.
Su función de probabilidad es:

$$\mathbf{P(X_1 = n_1; X_2 = n_2; \ldots; X_k = n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k}}$$

Se debe verificar $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$

Ejemplo

Se lanzan 24 dados, hallar la probabilidad de los sucesos:

1. *Salgan todos los números un número igual de veces.*
2. *Salgan los pares 8 veces y los impares ninguna.*
3. *Salgan 1 vez el 1, 2 veces el 2, 3 el 3, 4 el 4 y 5 el 5. El 6 el resto de las veces.*

1:
$P(X=(4,4,4,4,4,4)) = \frac{24!}{4!4!\,4!4!4!\,4!} \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^4 = 6.85185(10)^{-4}$
Para su cálculo, MATLAB dispone de las instrucciones **factorial(n)** y **mnpdf(x,p)**.
El valor anterior se corresponde con **mnpdf(4*ones(1,6),ones(1,6)/6)**

2: Será $P(X=(0,8,0,8,0,8)) = \frac{24!}{0!8!\,0!8!0!\,8!} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^8 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{1}{6}\right)^8 =$
$6.85185(10)^{-4}$ $\Leftarrow$ (mnpdf([0,8,0,8,0,8],ones(1,6)/6))

3: Será $P(X=(1,2,3,4,5,9)) = \frac{24!}{1!2!\,3!4!5!\,9!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{1}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)^5 \left(\frac{1}{6}\right)^9 =$
$1.04409(10)^{-5}$ $\Leftarrow$ (mnpdf([1:5 9],ones(1,6)/6))

Distribución Hipergeométrica

Definición

Consideremos ahora una población formada por N elementos de k clases diferentes A_1, A_2,..., A_k, de los que N_1 son de la primera clase, N_2 de la segunda, etc.
Supongamos que se extrae un subconjunto de n elementos (en una extracción, o en sucesivas sin reemplazamiento), la variable aleatoria k-dimensional $X = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$, donde $X_i =$"Numero de elementos de la clase i", se dice que sigue una **distribución hipergeométrica***.*
Su función de probabilidad es:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X_1} = \mathbf{n_1}; \mathbf{X_2} = \mathbf{n_2}; \ldots; \mathbf{X_k} = \mathbf{n_k}) = \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\cdots\binom{N_k}{n_k}}{\binom{N}{n}}$$

Ejemplo

Ejemplo

En una oposición existen temas de 3 materias diferentes: Legislación (30 temas), Economía (20 temas) y Seguridad Laboral (10 temas). Hallar:

1. *Probabilidad de sacar 3 temas y salga uno de cada tipo.*
2. *Probabilidad de sacar 3 temas y salgan los 3 del mismo tipo.*
3. *Probabilidad de sacar 3 temas y salgan dos de Legislación.*
4. *Probabilidad de sacar 3 temas y salga alguno de Legislación.*

1: $P(1,1,1) = \dfrac{\binom{30}{1}\binom{20}{1}\binom{10}{1}}{\binom{60}{3}} \approx 0.1753$ **2:** $P(3,0,0) + P(0,3,0) + P(0,0,3) =$

$$\frac{\binom{30}{3}\binom{20}{0}\binom{10}{0} + \binom{30}{0}\binom{20}{3}\binom{10}{0} + \binom{30}{0}\binom{20}{0}\binom{10}{3}}{\binom{60}{3}} \approx 0.15546$$

Ejemplo-cont

3: Aquí podemos agrupar las 2 últimas clase y hacerla bidimensional:

$$P(X=(2,1)) = \frac{\binom{30}{2}\binom{30}{1}}{\binom{60}{3}} \approx 0.381356$$

donde podemos usar la función MATLAB **hygepdf(2,60,30,3)**.

Podríamos no haber agrupado y entonces sería:

$$P(2,1,0)+P(2,0,1) = \frac{\binom{30}{2}\binom{20}{1}\binom{10}{0}+\binom{30}{2}\binom{20}{0}\binom{10}{1}}{\binom{60}{3}} \approx 0.381356$$

4: Lo hacemos agrupando clases y por el suceso contrario:
P("alguno")=1-P("ninguno") $\Rightarrow$

$$P(1,2)+P(2,1)+P(3,0) = 1-P(0,3) = 1-\frac{\binom{30}{0}\binom{30}{3}}{\binom{60}{3}} \approx 1-0.11864 = 0.88136$$

Podemos calcularlo mediante: 1-hygepdf(0,60,30,3)

Propiedades de la distribución hipergeométrica

Cuando k=2:

- **Media:** μ =E(X)=np
- **Varianza:** V(x)=npq$\frac{N-n}{N-1}$
- **Desviación típica:** $\sigma_X = \sqrt{npq\frac{N-n}{N-1}}$
- **Converge a la binomial:** Si N es grande respecto a n, las extracciones tienden a ser independientes y se aproxima a una binomial. Se considera que puede hacerse la aproximación cuando $\mathbf{n} < \mathbf{0.1N}$, así:

$$\mathbf{P}(\mathbf{X} = \mathbf{k}) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \xrightarrow{\mathbf{N}\to\infty} \binom{n}{k}\mathbf{p}^{\mathbf{k}}\mathbf{q}^{\mathbf{n-k}}$$

Ejemplo

Ejemplo

El servicio técnico tiene dividida la región andaluza en zona oriental y occidental con 5400 y 6300 máquinas instaladas en cada una. Si se reciben 5 avisos de avería. ¿Cuál es la probabilidad de que 4 sean de Andalucía oriental?

En este problema n=5 y N=11700 (se verifica $n < 0.1N$):

$$P(4) = \frac{\binom{5400}{4}\binom{6300}{1}}{\binom{11700}{5}} \approx \binom{5}{4}(5400/11700)^4(6300/11700)^1 \approx 0.122167668121941$$

Mientras que directamente obtenemos: $P(4) = 0.122136331151667$

Distribución Geométrica o de Pascal

Definición

Un experimento aleatorio consiste en la realización sucesiva e independientes de experimentos de Bernouilli. La variable ξ="Lugar de la primera aparición del suceso A" sigue una **distribución de Pascal** *(o geométrica).*

Función de probabilidad: $P(\xi = k) = P(\bar{A} \cap \bar{A} \cap \overbrace{\ldots}^{k-1} \cap \bar{A} \cap A) = q^{k-1}p$
Media: $\mu = E(\xi) = \frac{1}{p}$
Varianza: $V(\xi) = \frac{q}{p^2}$
Desviación típica: $\sigma_\xi = \frac{\sqrt{q}}{p}$

Ejemplo: El 2 % de las piezas fabricadas son defectuosas ¿Cuál es la probabilidad de sacar la primera correcta despues de la 3ª extracción?
$P(4) + P(5) + \ldots = 1 - P(0) - P(1) - P(2) - P(3) =$
$1 - (0.98) - 0.02(0.98) - (0.02)^2 0.98 - (0.02)^3 0.98 = 1.6(10)^{-7}$

Distribución binomial negativa

Definición

Consideremos el experimento aleatorio consistente en la realización independiente y sucesiva de experimentos de Bernouilli. La variable aleatoria $\xi =$*"Numero de veces que aparece* $\bar{A}$ *antes de la n-ésima aparición del suceso A.*

Función de probabilidad: $P(\xi = k) = \binom{n+k-1}{k} p^n q^k$

La podemos deducir considerando:
P(ξ=k)=P('Lanzamiento anterior hayan aparecido n-1 veces A')P(A), donde la primera probabilidad es P(k-1) en una binomial de parámetros n+k-1 y p, luego P(ξ=k)=$\left[\binom{n+k-1}{k} p^{n-1} q^k\right] p$.

Media: $\mu = E(x) = \frac{nq}{p}$

Varianza: $V(\xi) = \frac{nq}{p^2}$ **Desviación típica:** $V(\xi) = \frac{\sqrt{nq}}{p}$

Distribución de Poisson

Definición

Una variable aleatoria ξ sigue una **distribución de Poisson** *de parámetro $\lambda > 0$ si su soporte es el conjunto $S_\xi = \mathbb{N} \cup \{0\}$ y* $\mathbf{P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}}$, *para todo $k \in S_\xi$*

Este es la primera vez que introducimos una variable aleatoria mediante su función de probabilidad. Las condiciones que debe cumplir para que lo sea es que 1) $P(\xi = k) \geq 0$ y que 2) $\sum_{k \in S_\xi} P(\xi = k) = 1$. La primera es evidente.

Desarrollando en serie de Taylor $y = e^x$ en x=0, se obtiene:

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$ luego $e^\lambda = 1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots$ de donde:

$1 = e^\lambda e^{-\lambda} = \left[1 + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right] e^{-\lambda} = \sum_{k \in S_\xi} P(\xi = k)$

Media: $\mu = E(\xi) = \lambda$
Varianza: $V(\xi) = \lambda$
Desviación típica: $\sigma_\xi = \sqrt{\lambda}$

Proceso de Poisson

La distribución de Poisson modeliza la probabilidad de que un suceso ocurra n veces en un intervalo de tiempo $P(n, [T_0, T_0 + \Delta T])$, cuando se verifican estas condiciones:

1. **Proceso estacionario:** La probabilidad de que ocurran k sucesos no depende del punto de inicio del intervalo, solo de Δt. $P(n, [T_0, T_0 + \Delta T]) = P(n, [T_1, T_1 + \Delta T]) = P(n, \Delta T)$
2. La probabilidad de que ocurra un suceso en un intervalo dT es λdT: $P(1, dT) = \lambda dT$
3. La probabilidad de que ocurra más de un suceso en un intervalo dT es de orden superior a dT: $P(k, dT) \rightsquigarrow 0(dT)$, $(k > 1)$
4. **Diferenciabilidad respecto a T:** La probabilidad de que se produzcan n sucesos aumenta o disminuye de forma continua respecto a la amplitud del intervalo.

Cuando se cumplen estas condiciones resulta una distribución de Poisson de parámetro $\lambda \Delta T$ y la media y varianza de ocurrencias en un intervalo de amplitud ΔT es $\mu = E(\xi) = Var(\xi) = \lambda \Delta T$.

Propiedades

- Para indicar que una v.a. es de Poisson, se denota mediante ($\xi \rightsquigarrow P(\lambda)$).
- Depende de un solo parámetro λ (media y varianza).
- Es límite de la binomial: $B(n, p) \rightsquigarrow P(\lambda)$. Se acepta la aproximación cuando $n > 30$ y $np < 5$.
- Se encuentra tabulada para diversos valores de λ.
- MATLAB dispone de la rutina **poisspdf(x,lambda)** que calcula los valores de la función de probabilidad de la $P(lambda)$ en los x.
- **Propiedad markoviana:** La probabilidad de que ocurra un suceso en Δt es independiente de lo ocurrido en cualquier otro intervalo.

La distribución de Poisson modela muchos fenómenos de espera (colas), entre ellas: Llegadas de una llamada telefónica, de un coche a un cruce, de un paquete a un servidor, . . . , y también ocurrencia de una avería, emisión de una partícula radioactiva, etc.
En general, modela el número de ocurrencias de un fenómeno de probabilidad pequeña, que se repite muchas veces.

Ejemplo

Ejercicio

La lotería primitiva consiste en extraer 6 números al azar, a continuación un séptimo (complementario) del conjunto de los 49 primeros números naturales. Una apuesta consiste en señalar 6 números. Hallar:

1. *Probabilidad de ganar un premio de primera categoría (los 6 de la apuesta coinciden exactamente con los extraidos en primer lugar).*
2. *Probabilidad de que si se juegan 8.176.049 apuestas:*
   - *Haya exactamente 3 apuestas ganadoras.*
   - *Haya alguna apuesta ganadora.*
3. *El premio de segunda categoría consiste en acertar 5 de los iniciales y el complementario. ¿Cuál es su probabilidad?*
4. *Responde a las mismas preguntas que en el segundo apartado para la 2ª categoría.*
5. *El premio de tercera categoría consiste en acertar 5 de los iniciales, pero no el complementario. ¿Cúal es su probabilidad?*
6. *Responde a las mismas preguntas que en el segundo apartado para la 3ª categoría.*

Ejemplo

1: Se trata de una hipergeométrica donde los números se dividen en dos clases, los 6 de mi apuesta y los 43 restantes: $P(6) = \dfrac{\binom{6}{6}\binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} \approx 7.15112(10)^{-8}$

2: Ahora la v.a. ξ sigue una binomial de parámetros n=8176049 y $p = 7.15112(10)^{-8}$ y se pide P(3). Como $n > 30$ y $np \approx 0.5847 < 5$ podemos aproximarla por una $P(0.5847)$ luego: $P(3) = e^{-0.5847}\frac{0.5847^3}{3!} \approx 0.0186$
Las instrucciones MATLAB: n=8176049;p= hygepdf(6,49,6,6);p3=poisspdf(3,n*p), producen el valor 0.018564321085491.

2b: Ahora se pide $\sum_{k=1}^{n} P(\xi = k) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} \approx 0.4227$
(palg=1-poisspdf(0,n*p) produce 0.442715495492935)

3: $P(segunda) = P(5)P(compl) = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}\frac{1}{43} \approx 4.2907(10)^{-7}$

(p2=hygepdf(5,49,6,6)/43)

Ejemplo-cont2

4: Ahora la v.a. ξ sigue una binomial de parámetros n=8176049 y $p = 4.2907(10)^{-7}$ y se pide P(3). Como $n > 30$ y $np \approx 3.5081 < 5$ podemos aproximarla por una $P(3.5081)$ luego: $P(3) = e^{-3.5081}\frac{3.5081^3}{3!} \approx 0.2155$
La instrucción MATLAB: p3=poisspdf(3,n*p2), produce el valor 0.215534928621475.

4b: Ahora se pide $\sum_{k=1}^{n} P(\xi = k) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-3.5081}\frac{3.5081^0}{0!} \approx 0.97$
(palg2=1-poisspdf(0,n*p2) produce 0.970045518600385)

5: $P(segunda) = P(5)P(\bar{compl}) = \dfrac{\binom{6}{5}\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}}\frac{42}{43} \approx 1.8021(10)^{-5}$
(p3c=hygepdf(5,49,6,6)*42/43)
6: Ahora la v.a. ξ sigue una binomial de parámetros n=8176049 y $p = 1.8021(10)^{-5}$ y se pide P(3). Como $n > 30$, pero $np \approx 147.33920 > 5$ no podemos aproximarla por una distribución de Poisson (se podrá por una Normal, como se verá después), y vale:
$P(3) = \binom{8176049}{3}\left(1.8021(10)^{-5}\right)^3\left(1 - 1.8021(10)^{-5}\right)^{8176046} =$
$= \{binopdf(3, 8176049, 1.8021(10)^{-5})\} \approx 5.4657(10)^{-59}$.

6b: Ahora se pide $P(\xi > 0) = 1 - P(\xi = 0) =$
$1 - \binom{8176049}{0}\left(1.8021(10)^{-5}\right)^0\left(1 - 1.8021(10)^{-5}\right)^{8176049} =$
$\{1 - binopdf(0, 8176049, 1.8021(10)^{-5})\} \approx 1 - 1.025225(10)^{-64} \approx 1$

Distribución uniforme continua

Definición

Se dice que una variable aleatoria continua ξ sigue una **distribución uniforme** *en el intervalo [a,b] y se denota por $\xi \rightsquigarrow U[a,b]$, cuando su función de densidad es:*

$$\mathbf{f(x)} = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Media: $\mu = E(\xi) = \frac{a+b}{2}$
Varianza: $V(x) = \frac{(b-a)^2}{12}$
Desviación típica: $\sigma_\xi = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$
En casi todos los lenguajes de programación existe una instrucción para generar números aleatorios siguiendo una $U[0,1]$, en MATLAB es **rand(m,n)**.

Distribución uniforme continua bidimensional

Definición

Se dice que una variable aleatoria continua $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ *sigue una* **distribución uniforme bidimensional** *en* $[a, b] \times [c, d]$, *cuando su función de densidad es:*

$$\mathbf{f(x, y)} = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)(d-c)} & (x, y) \in [a, b] \times [c, d] \\ 0 & (x, y) \notin [a, b] \times [c, d] \end{cases}$$

Ejemplo

Hallar la función de distribución de:

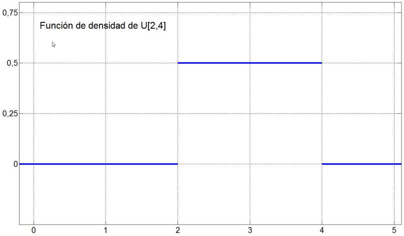
- *La variable uniforme U[2,4].*
- *La variable uniforme bidimensional de soporte* $S_\xi = [2, 5] \times [1, 3]$.

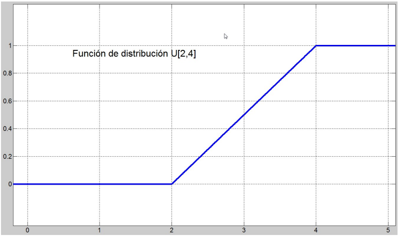
Ejemplo

a) La función de densidad de la $U[2,4]$ es:

$$f(x) = \begin{cases} 0.5 & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & (x < 2) \cup (x > 4) \end{cases}$$ y la de distribución es:

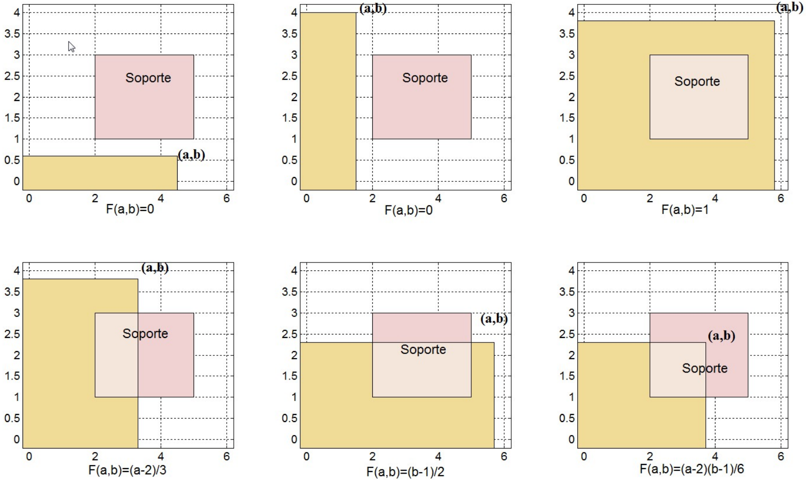
$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 4 \\ 0.5(x-2) & 2 < x < 4 \\ 0 & x \leq 2 \end{cases}$$





Ejemplo-cont.

b) Para hallar la función de distribución bidimensional consideramos 9 regiones según $x \leq 2$, $2 < x < 5$ ó $x \geq 5$. Y para $y \leq 1$, $1 < y < 3$ ó $y \geq 3$.



Ejemplo-cont

Caso 1: (Figuras (1,1) y (1,2)). Si $x \leq 2$ ó $y \leq 1$, para cualquier (a, b) en ellas la región $R = \{(x, y) \backslash x \leq a, y \leq b\}$ no tiene intersección con el soporte y $F(a, b) = 0$.
Caso 2: (Figura (1,3)). Si $a \geq 5$ y $b \geq 3$, la región R cubre todo el soporte y $F(a, b) = 1$.
Caso 3: (Figura (2,1)). Si $b \geq 3$, $2 < a < 5$ la intersección de R con el soporte será el rectángulo (2,1), (a,1), (a,3), (2,3) de área S=2(x-2) y la función de distribución será $F(a, b) = 2(a-2)/6 = \frac{a-2}{3}$.
Caso 4: (Figura (2,2)). Si $a \geq 5$, $1 < b < 3$ la intersección de R con el soporte será el rectángulo (2,1), (5,1), (5,b), (2,b) de área S=3(b-1) y la función de distribución será $F(a, b) = 3(b-1)/6 = \frac{b-1}{2}$.
Caso 5: (Figura (2,3)). Por último para (a, b) verificando $2 < a < 5$ y $1 < b < 3$ la intersección con R será (2,1), (a,1), (a,b), (1,b) de área $S = (a-2)(b-1)$ y $F(a, b) = \frac{(a-2)(b-1)}{6}$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & (x \leq 2) \cup (y \leq 1) \\ \frac{y-1}{2} & (x \geq 5) \cap (1 < y < 3) \\ \frac{x-2}{3} & (2 < x < 5) \cap (y \geq 3) \\ \frac{(x-2)(y-1)}{6} & (2 < x < 5) \cap (1 < y < 3) \\ 1 & (x \geq 5) \cap (y \geq 3) \end{cases}$$

Distribución Normal o de Laplace-Gauss

Definición

Una variable aleatoria continua ξ *sigue una* **distribución normal** *si su función de densidad es:*

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\sigma\sqrt{\mathbf{2}\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^2}{\mathbf{2}\sigma^2}}$$

donde $-\infty < \mu < \infty$ *y* $\sigma > 0$

- Depende de dos parámetros μ (media) y σ (desviación típica). Diremos que ξ sigue una $N(\mu, \sigma)$: $(\xi \rightsquigarrow \mathbf{N}(\mu, \sigma))$.
- Su función de distribución es: $(-\infty < x < \infty)$
$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dx$$

Propiedades

- Presenta un máximo en $x = \mu$ y dos puntos de inflexión en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$.
- Es simétrica respecto a $x = \mu$ y:
  - **Media = Moda = Mediana =**μ
  - **Varianza =** σ^2
- **Aditividad:** Si $\xi_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1)$ y $x_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2)$, entonces:

$$\xi_1 \pm \xi_2 \rightsquigarrow \mathbf{N}\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

- Si $\xi \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ entonces la variable

$$\psi = \mathbf{a} + \mathbf{b}\xi \rightsquigarrow \mathbf{N}(\mathbf{a} + \mathbf{b}\mu, |\mathbf{b}|\sigma)$$

- **Tipificación:** Si $\xi \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$, entonces $z = \frac{\xi - \mu}{\sigma} \rightsquigarrow N(0, 1)$

Propiedades-2

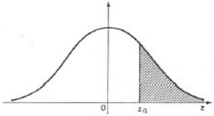
- Para la variable $z \rightsquigarrow N(0,1)$, la función de distribución $F_z(x)$ ó $1 - F_z(x)$ se encuentra tabulada y permite calcular probabilidades de que la variable aleatoria se encuentre en un intervalo.
- Matlab dispone de las instrucciones:
  - **randn(m,n)** que genera una matriz de m filas y n columnas de números aleatorios siguiendo una N(0,1).
    y=a+b*randn(m,n) los genera siguiendo una $N(a,b)$.
  - **normpdf(x,a,b)** es la función de densidad de la N(a,b).
  - **normcdf(x,a,b)** es la función de distribución de la N(a,b).
  - **norminv(p,a,b)** devuelve x, tal que $F_\xi(x) = p$ con $\xi \rightsquigarrow N(a,b)$
- **Límite de la binomial:** La distribución normal es límite de la binomial cuando el número de repeticiones N tiende a ∞. Así:
$$\mathbf{B(n,p) \rightsquigarrow N(np, \sqrt{npq})}$$
En la práctica se exige que $n > 30$, $np > 5$ y $nq > 5$.

Tablas

z_α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,4960	0,4920	0,4880	0,4840	0,4801	0,4761	0,4721	0,4681	0,4641
0,1	0,4602	0,4562	0,4522	0,4483	0,4443	0,4404	0,4364	0,4325	0,4286	0,4247
0,2	0,4207	0,4168	0,4129	0,4090	0,4052	0,4013	0,3974	0,3936	0,3897	0,3859
0,3	0,3821	0,3783	0,3745	0,3707	0,3669	0,3632	0,3594	0,3557	0,3520	0,3483
0,4	0,3446	0,3409	0,3372	0,3336	0,3300	0,3264	0,3228	0,3192	0,3156	0,3121
0,5	0,3085	0,3050	0,3015	0,2981	0,2946	0,2912	0,2877	0,2843	0,2810	0,2776
0,6	0,2743	0,2709	0,2676	0,2643	0,2611	0,2578	0,2546	0,2514	0,2483	0,2451
0,7	0,2420	0,2389	0,2358	0,2327	0,2296	0,2266	0,2236	0,2206	0,2177	0,2148
0,8	0,2119	0,2090	0,2061	0,2033	0,2005	0,1977	0,1949	0,1922	0,1894	0,1867
0,9	0,1841	0,1814	0,1788	0,1762	0,1736	0,1711	0,1685	0,1660	0,1635	0,1611
1,0	0,1587	0,1562	0,1539	0,1515	0,1492	0,1469	0,1446	0,1423	0,1401	0,1379
1,1	0,1357	0,1335	0,1314	0,1292	0,1271	0,1251	0,1230	0,1210	0,1190	0,1170
1,2	0,1151	0,1131	0,1112	0,1093	0,1075	0,1056	0,1038	0,1020	0,1003	0,0985
1,3	0,0968	0,0951	0,0934	0,0918	0,0901	0,0885	0,0869	0,0853	0,0838	0,0823
1,4	0,0808	0,0793	0,0778	0,0764	0,0749	0,0735	0,0721	0,0708	0,0694	0,0681
1,5	0,0668	0,0655	0,0643	0,0630	0,0618	0,0606	0,0594	0,0582	0,0571	0,0559
1,6	0,0548	0,0537	0,0526	0,0516	0,0505	0,0495	0,0485	0,0475	0,0465	0,0455
1,7	0,0446	0,0436	0,0427	0,0418	0,0409	0,0401	0,0392	0,0384	0,0375	0,0367
1,8	0,0359	0,0351	0,0344	0,0336	0,0329	0,0322	0,0314	0,0307	0,0301	0,0294
1,9	0,0287	0,0281	0,0274	0,0268	0,0262	0,0256	0,0250	0,0244	0,0239	0,0233
2,0	0,0228	0,0222	0,0217	0,0212	0,0207	0,0202	0,0197	0,0192	0,0188	0,0183
2,1	0,0179	0,0174	0,0170	0,0166	0,0162	0,0158	0,0154	0,0150	0,0146	0,0143
2,2	0,0139	0,0136	0,0132	0,0129	0,0125	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110
2,3	0,0107	0,0104	0,0102	0,0099	0,0096	0,0094	0,0091	0,0089	0,0087	0,0084
2,4	0,0082	0,0080	0,0078	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0068	0,0066	0,0064
2,5	0,0062	0,0060	0,0059	0,0057	0,0055	0,0054	0,0052	0,0051	0,0049	0,0048
2,6	0,0047	0,0045	0,0044	0,0043	0,0041	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036
2,7	0,0035	0,0034	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026
2,8	0,0026	0,0025	0,0024	0,0023	0,0023	0,0022	0,0021	0,0021	0,0020	0,0019
2,9	0,0019	0,0018	0,0018	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014

	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90
3	1,35E-03	9,68E-04	6,87E-04	4,83E-04	3,37E-04	2,33E-04	1,59E-04	1,08E-04	7,24E-05	4,81E-05
4	3,17E-05	2,07E-05	1,34E-05	8,55E-06	5,42E-06	3,40E-06	2,11E-06	1,30E-06	7,94E-07	4,80E-07
5	2,87E-07	1,70E-07	9,98E-08	5,80E-08	3,34E-08	1,90E-08	1,07E-08	6,01E-09	3,33E-09	1,82E-09
6	9,90E-10	5,32E-10	2,83E-10	1,49E-10	7,80E-11	4,04E-11	2,07E-11	1,05E-11	5,26E-12	2,62E-12

Distribución Normal $N(0,1)$



Directo: Dado x, hallar $\mathbf{P(z \geq x)}$

a: $P(z \geq 1.27) = 0.1020$

b: $P(z \leq 2.12) = F(2.12) =$
$= 1 - 0.0170 = 0.9830$

c: $P(z > 3.1) = 9.68(10)^{-4}$

d: $P(z \leq 4.3) = F(4.3) = 1 - 8.55(10)^{-6}$

Inverso: Dado $\mathbf{p = P(z \geq x)}$, hallar x

a: Hallar x, tal que $P(z \geq x) = 0.025$.
Encontramos que x=1.96

b: Hallar x, tal que $P(z \geq x) = 0.05$.
Encontramos que $P_{z \geq 1.64} = 0.0505$
y $p(z \geq 1.65) = 0.495$.
Interpolando $p(z \geq 1.645) = 0.05$

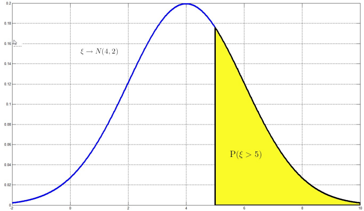
Ejemplo

Ejemplo

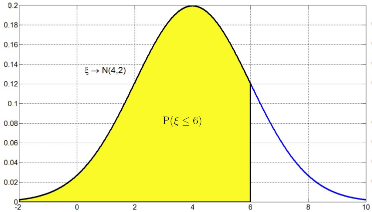
Se sabe que la v.a. $\xi \rightsquigarrow N(4, 2)$*, hallar:*

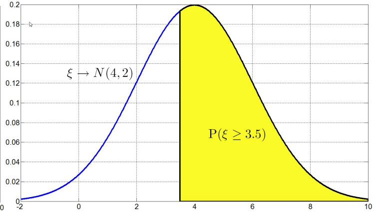
1. *a)* $P(\xi > 5)$, *b)* $P(\xi \leq 6)$, *c)* $P(\xi \geq 3.5)$, *d)* $P(\xi < 2)$
2. *a)* $P(4.5 \leq \xi < 5)$, *b)* $P(1 < \xi \leq 3)$, *c)* $P(0 \leq \xi < 5)$.

1-a) Se puede hacer directamente con MATLAB:
$A = P(\xi > 5) = 1 - P(\xi \leq 5) = 1 - F_\xi(5)$
A=1-normcdf(5,4,2) da el valor A=0.3085.
Mediante tablas: $P(\xi > 5) = P\left(\frac{\xi - 4}{2} > \frac{5-4}{2}\right) = P(z > 0.5) = 0.3085$



ejemplo-cont

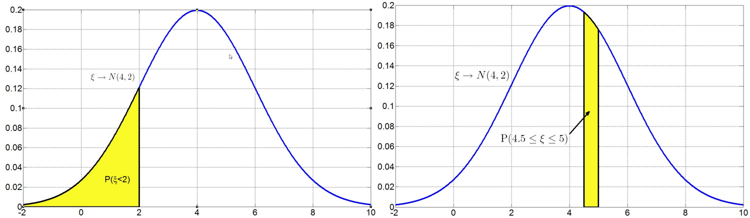




1-b) $P(\xi \leq 6) = F_\xi(6)$, que se calcula directamente con: **B=normcdf(6,4,2)**, que da B=0.8413.
Mediante tablas: $P(\xi \leq 6) = P\left(\frac{\xi-4}{2} \leq \frac{6-4}{2}\right) = P(z \leq 1) = F_z(1) = 1 - 0.1587$

1-c) $P(\xi \geq 3.5) = 1 - P(\xi < 3.5) = 1 - F_\xi(3.5)$, que se calcula con: **C=1-normcdf(3.5,4,2)**, que da C=0.5987.
Mediante tablas: $P(\xi \geq 3.5) = P\left(\frac{\xi-4}{2} \geq \frac{3.5-4}{2}\right) = P(z \geq -0.25) = P(z \leq 0.25) = 1 - P(z > 0.25) = 1 - 0.4013 = 0.5987$

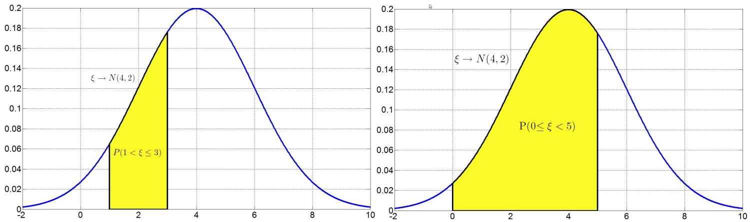
Ejemplo-cont2



1-d) $P(\xi < 2) = F_\xi(2)$, que se calcula directamente con: **D=normcdf(2,4,2)**, que da D=0.1587.
Mediante tablas: $P(\xi < 2) = P\left(\frac{\xi-4}{2} < \frac{2-4}{2}\right) = P(z < -1) = P(z > 1) = 0.1587$

2-a) $P(4.5 \leq \xi \leq 5) = 0.0928$ (**normcdf(5,4,2)-normcdf(4.5,4,2)**)
$P(4.5 \leq \xi \leq 5) = P\left(\frac{4.5-4}{2} \leq \frac{\xi-4}{2} \leq \frac{5-4}{2}\right) = P(0.25 \leq z \leq 0.5) = P(z > 0.25) - P(z > 0.5) = 0.4013 - 0.3085 = 0.0928$

Ejemplo-cont3



2-b) $P(1 < \xi \leq 3) = F_\xi(3) - F_\xi(1)$, que se calcula con: **normcdf(3,4,2)-normcdf(1,4,2)**, y da 0.2417.
Mediante tablas: $P(1 < \xi \leq 3) = P\left(\frac{1-4}{2} < \frac{\xi-4}{2} \leq \frac{3-4}{2}\right) = P(-1.5 < z \leq -0.5) = P(0.5 \leq z < 1.5) = P(z \geq 0.5) - P(z \geq 1.5) \approx 0.3085 - 0.0668 = 0.2417$

2-c) $P(0 \leq \xi < 5) = F_\xi(5) - F_\xi(0) = 0.6687$. (**normcdf(5,4,2)-normcdf(0,4,2)**
$P(0 \leq \xi < 5) = P\left(\frac{0-4}{2} \leq \frac{\xi-4}{2} \leq \frac{5-4}{2}\right) = P(-2 \leq z < 0.5) = 1 - P(z < -2) - P(z \geq 0.5) = 1 - P(z > 2) - P(z \geq 0.5) \approx 1 - 0.0228 - 0.3085 = 0.6687$

Ejemplo 2

Ejemplo

La probabilidad de que una cámara fotográfica altere un píxel es de $2.5(10)^{-6}$*. Una fotografía digital tiene* $6(10)^6$ *píxeles. Hallar:*

1. *Probabilidad de que resulten alterados exactamente 15 píxeles.*
2. *Probabilidad de que resulten alterados más de 10 píxeles.*
3. *hallar x tal que la probabilidad de que resulten alterados, más de x píxeles sea de 0.001.*

Si suponemos que la alteración de dos píxeles son independientes, la v.a. $\xi =$'Número de píxeles alterados' sigue una binomial. $\xi \rightsquigarrow B(6(10)^6, 2.5(10)^{-6})$, que se aproxima por una normal pues $n > 30$, $\mu = np = 15 \geq 5$ y $nq \geq 5$.
Calculamos $\sigma = \sqrt{npq} = 3.873$, luego $\xi \rightsquigarrow B(6(10)^6, 2.5(10)^{-5}) \approx N(15, 3.873)$

1: $P(\xi = 15) = \{\text{Por la corrección de continuidad}\} = P(14.5 < \xi' \leq 15.5) =$
$= P\left(\frac{14.5-15}{3.873} < z \leq \frac{15.5-15}{3.873}\right) = P(-0.1291 < z \leq 0.1291) = 1 - 2P(z \geq 0.1291) =$
0.1027
En MATLAB podemos hacer: **n=6e6, p=2.5e-5, mu=n*p, sig=sqrt(n*p*(1-p)), p1=normcdf(15.5,mu,sig)-normcdf(14.5,mu,sig)**

Ejemplo 2

2: $P(\xi > 10) = \{\text{Por la corrección de continuidad}\} = P(\xi' \geq 10.5) =$
$P\left(z \geq \frac{10.5-15}{3.873}\right) = P(z \geq -1.1619) = P(z < 1.1619) = 1 - P(z \geq 1.1619) = 0.8774$

En MATLAB: **p2=1-normcdf(10.5,mu,sig)**

3: Debemos resolver: $\mathbf{P}(\xi \geq \mathbf{x}) = \mathbf{0.001}$
En MATLAB es directo pues queremos x, tal que $F(x) = 0.999$ lo que se consigue con **x=norminv(0.999,mu,sig)** y nos da x=26.9684.

Mediante tablas: $P(\xi \geq x) = P(z \geq \frac{x-15}{3.873}) = P(z \geq a) = 0.001$, con $a = \frac{x-15}{3.873}$.
Buscando en la tabla encontramos: $P(3) = 1.35E-3 > 0.001$ y
$P(3.1) = 9.68E-4 < 0.001$. Interpolando:
$a = 3 + \frac{0.1}{0.000968-0.00135} * (0.001 - 0.00135) \approx 2.9638 \Rightarrow x = 26.4789$
El cálculo mediante tablas no puede precisar más debido a la poca precisión de las mismas (sólo 3 dígitos).

Teorema Central del Límite

Existen varias versiones del mismo, según sean las hipótesis para la convergencia.

Teorema

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con media μ y desviación típica σ, ambas finitas. Sea $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ la sucesión de sumas parciales. (Sabemos que $E(S_n) = n\mu$ y $V(S_n) = n\sigma^2$). Entonces:

$$\mathbf{Z_n} = \frac{\mathbf{S_n} - \mathbf{n}\mu}{\sigma\sqrt{\mathbf{n}}} \rightsquigarrow \mathbf{N}(\mathbf{0}, \mathbf{1})$$

Consecuencia: La media de las n variables aleatorias $\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ converge también a una normal.

$$\bar{\mathbf{X}} = \frac{\mathbf{X_1} + \mathbf{X_2} + \ldots + \mathbf{X_n}}{\mathbf{n}} \rightsquigarrow \mathbf{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{\mathbf{n}}}\right)$$

Distribución Gamma

Definición

Una variable aleatoria continua sigue una **gamma** *de parámetros* α *y* β, $(\Gamma(\alpha, \beta))$, *si su función de densidad es:*

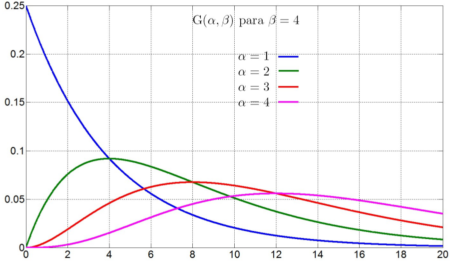
$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{x}^{\alpha-\mathbf{1}}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{\beta}}}{\beta^{\alpha}\boldsymbol{\Gamma}(\alpha)}$$

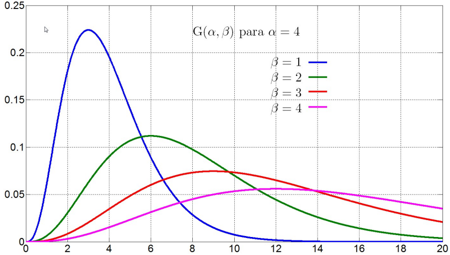
para $0 \leq x < \infty$, $\alpha > 0$ *y* $\beta > 0$.
Y donde $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$

Propiedades

- Depende de dos parámetros α y β.
- **Media:** $\mu = E(x) = \alpha\beta$
- **Varianza:** $V(\xi) = \alpha\beta^2$
- $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$
- Cuando $\alpha \in \mathbb{N}$, se cumple $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$

Forma de la G(α, β)





Distribución χ^2 de Pearson

Definición

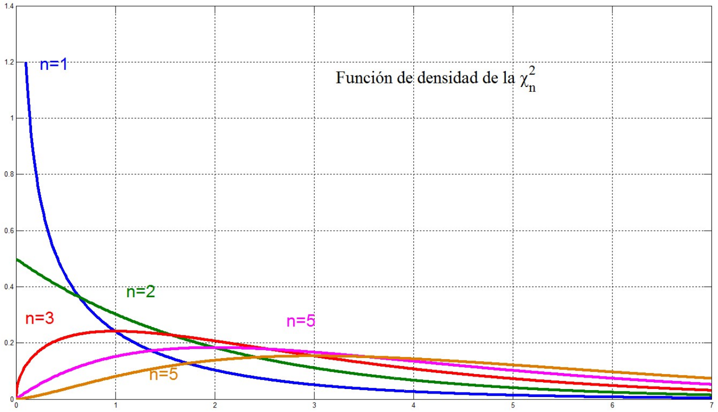
La **distribución** χ^2 *es el caso particular de la Gamma,* $(\Gamma(\alpha, \beta))$ *cuando* $\beta = 2$ *y* $2\alpha \in \mathbb{N}$*. Al valor* $n = 2\alpha$ *se le llama* **grados de libertad** *de la* χ^2*.*
La función de densidad de la χ_n^2 *es:*

$$\mathbf{f}(\chi_{\mathbf{n}}^2) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}^{\frac{\mathbf{n}}{2}}\boldsymbol{\Gamma}\left(\frac{\mathbf{n}}{2}\right)}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{2}}\mathbf{x}^{\frac{\mathbf{n}}{2}-\mathbf{1}}$$

para $0 < x < \infty$*.*

Al ser una Gamma su media es $\mu = \alpha\beta = n$ y su varianza $V(\chi_n^2) = \alpha\beta^2 = 2n$

Forma de la χ^2

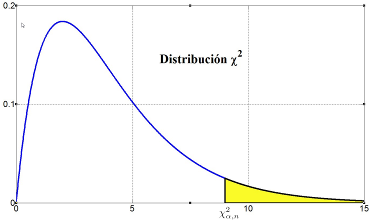


Propiedades

- Si ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n, son n variables aleatorias siguiendo una N(0,1), entonces $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2$ sigue una χ_n^2 (χ^2 con n grados de libertad).
- Si sumamos dos chi cuadrado de n_1 y n_2 g.d.l., resulta una χ^2 con $n_1 + n_2$ g.d.l. ($\chi_{n_1}^2 + \chi_{n_2}^2 = \chi_{n_1+n_2}^2$)
- Si tomamos una muestra de tamaño n de una población $N(\mu, \sigma)$, entonces la variable: $\xi = (n-1)\frac{s^2}{\sigma^2} \rightsquigarrow \chi_{n-1}^2$ (chi cuadrado con n-1 g.d.l.), donde s^2 es la cusivarianza de la muestra.
- Al aumentar el número de grados de libertad, la variable $\sqrt{2\chi_n^2} \rightsquigarrow N(\sqrt{2n-1}, 1)$. En la práctica se usa cuando $n > 30$.
- La variable χ_n^2 se encuentra tabulada para $n \leq 30$. Para determinados valores de α y de n g.d.l. proporciona el valor x tal que: $P(\chi^2 \geq x) = \alpha$

Tablas χ^2

$n \backslash \alpha$	0,995	0,99	0,98	0,975	0,95	0,90	0,10	0,05	0,025	0,02	0,01
1	3,927E-05	1,571E-04	6,285E-04	9,821E-04	0,0039	0,0158	2,706	3,841	5,024	5,412	6,635
2	0,0100	0,0201	0,0404	0,0506	0,103	0,211	4,605	5,991	7,378	7,824	9,210
3	0,072	0,115	0,185	0,216	0,352	0,584	6,251	7,815	9,348	9,837	11,345
4	0,207	0,297	0,429	0,484	0,711	1,064	7,779	9,488	11,143	11,668	13,277
5	0,412	0,554	0,752	0,831	1,145	1,610	9,236	11,070	12,833	13,388	15,086
6	0,676	0,872	1,134	1,237	1,635	2,204	10,645	12,592	14,449	15,033	16,812
7	0,989	1,239	1,564	1,690	2,167	2,833	12,017	14,067	16,013	16,622	18,475
8	1,344	1,646	2,032	2,180	2,733	3,490	13,362	15,507	17,535	18,168	20,090
9	1,735	2,088	2,532	2,700	3,325	4,168	14,684	16,919	19,023	19,679	21,666
10	2,156	2,558	3,059	3,247	3,940	4,865	15,987	18,307	20,483	21,161	23,209
11	2,603	3,053	3,609	3,816	4,575	5,578	17,275	19,675	21,920	22,618	24,725
12	3,074	3,571	4,178	4,404	5,226	6,304	18,549	21,026	23,337	24,054	26,217
13	3,565	4,107	4,765	5,009	5,892	7,042	19,812	22,362	24,736	25,472	27,688
14	4,075	4,660	5,368	5,629	6,571	7,790	21,064	23,685	26,119	26,873	29,141
15	4,601	5,229	5,985	6,262	7,261	8,547	22,307	24,996	27,488	28,259	30,578
16	5,142	5,812	6,614	6,908	7,962	9,312	23,542	26,296	28,845	29,633	32,000
17	5,697	6,408	7,255	7,564	8,672	10,085	24,769	27,587	30,191	30,995	33,409
18	6,265	7,015	7,906	8,231	9,390	10,865	25,989	28,869	31,526	32,346	34,805
19	6,844	7,633	8,567	8,907	10,117	11,651	27,204	30,144	32,852	33,687	36,191
20	7,434	8,260	9,237	9,591	10,851	12,443	28,412	31,410	34,170	35,020	37,566
21	8,034	8,897	9,915	10,283	11,591	13,240	29,615	32,671	35,479	36,343	38,932
22	8,643	9,542	10,600	10,982	12,338	14,041	30,813	33,924	36,781	37,659	40,289
23	9,260	10,196	11,293	11,689	13,091	14,848	32,007	35,172	38,076	38,968	41,638
24	9,886	10,856	11,992	12,401	13,848	15,659	33,196	36,415	39,364	40,270	42,980
25	10,520	11,524	12,697	13,120	14,611	16,473	34,382	37,652	40,646	41,566	44,314
26	11,160	12,198	13,409	13,844	15,379	17,292	35,563	38,885	41,923	42,856	45,642
27	11,808	12,879	14,125	14,573	16,151	18,114	36,741	40,113	43,195	44,140	46,963
28	12,461	13,565	14,847	15,308	16,928	18,939	37,916	41,337	44,461	45,419	48,278
29	13,121	14,256	15,574	16,047	17,708	19,768	39,087	42,557	45,722	46,693	49,588
30	13,787	14,953	16,306	16,791	18,493	20,599	40,256	43,773	46,979	47,962	50,892



Hallar x tal que $P(\chi^2_5 \geq x) = 0.05$
Nos piden $\chi^2_{0.05;5} = 11.070$
En MATLAB: **chi2inv(0.95,5)**

Hallar $\chi^2_{0.025;7}$
Su valor es 16.013
En MATLAB: **chi2inv(0.975,7)**

Distribución exponencial

Definición

Cuando $\alpha = 1$ la distribución gamma se conoce como **distribución exponencial**. *Solo depende de un parámetro $\lambda = \frac{1}{\beta}$ quedando la función de densidad de la $E(\lambda)$ como:*

$$\mathbf{f(x) = \lambda e^{-\lambda x}} \qquad (x > 0)$$

Función de distribución: $\mathbf{F(x) = 1 - e^{-\lambda x}}$
Media: $\mu = \frac{1}{\lambda}$, **Varianza:** $V(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}$

Sirve para modelar el tiempo transcurrido entre 2 sucesos "raros". Así, cuando el número de estos en un intervalo de tiempo sigue una distribución de Poisson $P(a)$, el tiempo transcurrido entre 2 sucesivos sigue una exponencial $E(a)$ (media $\frac{1}{a}$).
Siendo típico el caso de que en una cola (de procesos, llamadas telefónicas, piezas para ser ensambladas, supermercado, . . . , las llegadas sigan una distribución de Poisson y el tiempo de servicio una Exponencial.

Propiedad

Propiedad: (Falta de memoria) Dada una exponencial $\xi \rightsquigarrow E(\lambda)$, se verifica: $P(\xi \in (t_0, t_0 + \Delta t]/\xi > t_0) = P(\xi \leq \Delta t)$. Esto significa que si el suceso "raro" no se ha producido transcurrido un tiempo t_0, la probabilidad de que ocurra en el siguiente Δt, es la misma que para el intervalo inicial Δt.

Ejemplo: Si $\xi \rightsquigarrow E(2)$, hallar $P(\xi \leq 1)$, $P(\xi \geq 2)$ y $P(\xi < 3/\xi \geq 2)$

$P_a = P(\xi \leq 1) = F_\xi(1) = \int_0^1 2e^{-2x}dx = \left[-e^{-2x}\right]_0^1 = -e^{-2} + e^0 = 0.8647$
(En MATLAB: **expcdf(1,1/2)**)

$P_b = P(\xi \geq 2) = 1 - F_\xi(2) = \{$ **1-expcdf(2,1/2)**$\} = 0.0183$

$P_c = P(\xi < 3/\xi \geq 2) = \frac{P(\xi \in [2,3))}{P(\xi \geq 2)} = \frac{0.0158}{0.0183} = 0.8634$
$P(\xi \in [2,3)) = \int_2^3 2e^{-2x}dx = F_\xi(3) - F_\xi(2) =\{$**expcdf(3,0.5)-expcdf(2,0.5)**$\}=0.0158$

Nota: Aunque parecidos los valores obtenidos 0.8647 y 0.8634 no coinciden por errores de cálculo y redondeos a 4 decimales. Si operamos con la precisión de MATLAB: $P_a = P_c = 0.864664716763387$

Distribución T-Student

Definición

Si z y z_i son variables aleatorias independientes que siguen todas una $N(0, \sigma)$, entonces la variable aleatoria:

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{z}}{\sqrt{\frac{\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{z_i^2}}{\mathbf{n}}}}$$

sigue una t de Student con n grados de libertad.

La función de densidad de la t de Student es:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}\beta\ \left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad (-\infty < x < \infty,\ n \in \mathbb{N})$$

donde: $\beta(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$

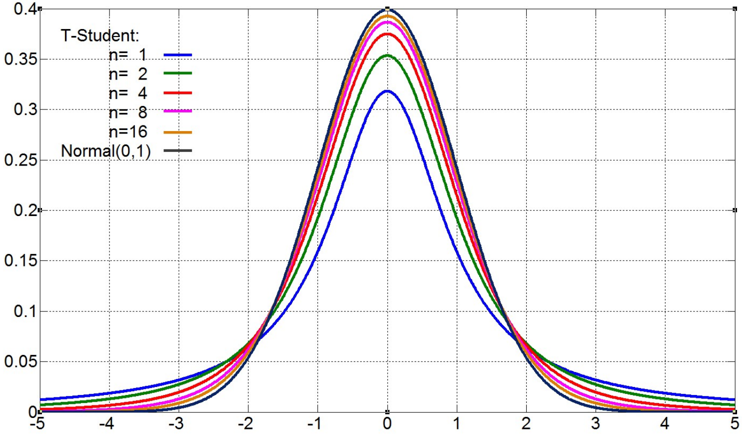
Media$=\mu = 0$ y varianza $V = \frac{n}{n-2}$ para $n \geq 3$.

Propiedades

Propiedades

1. *La variable* $\mathbf{t} = \frac{z}{\sqrt{\frac{\chi^2_n}{n}}}$ *sigue una t de Student con n g.d.l, donde* $z \rightsquigarrow N(0,1)$ *y* χ^2_n *es una* χ^2 *con n g.d.l.*
2. *Depende sólo del parámetro n (grados de libertad).*
3. *Es simétrica con centro 0.*
4. *Se encuentra tabulada para valores de n y* α*, proporcionando el valor* $a = t_{\alpha,n}$ *tal que* $P(t_n \geq a) = \alpha = 1 - F_t(a)$
5. *En MATLAB podemos usar* $\mathbf{a = tinv(1 - \alpha, n)}$
6. *Se aproxima a la N(0,1) cuando n es grande. (Se considera que para* $n > 30$*).*
7. *Si tomamos muestras de tamaño n y cuasivarianza* s^2 *de una población* $N(\mu, \sigma)$ *entonces la v.a.* $\frac{\bar{x}-\mu}{s}\sqrt{n} \rightsquigarrow t_{n-1}$

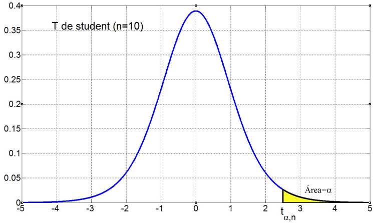
Gráfica T-Student



La gráfica muestra la convergencia de la t de Student hacia la N(0,1) cuando crece n.

Gráfica T-Student 2

\ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21	12,92
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893	6,869
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,785	5,408
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	5,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,610	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,552	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,768
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	3,261	3,496
60	0,254	0,527	0,848	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,526	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,416
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	3,174	3,390
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,340
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,107	3,310
1E+05	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291



Ejemplo: Hallar $t_{0.05,12}$, $t_{0.01,25}$, $t_{0.99,25}$ y $t_{0.05,1000}$.

a: $t_{0.05,12} = 1.782$, (**tinv(0.95,12)**)

b: $t_{0.01,25} = 2.485$ (**tinv(0.99,25)**)

c: $t_{0.99,25} = -t_{0.01,25} = -2.485$ (**tinv(0.01,25)**)

d: $t_{0.05,1000}$ Como $n > 30$ se mira en la N(0,1) y resulta: 1.645. (**tinv(0.95,100)**)

Distribución F de Fisher-Snedecor

Definición

Si tenemos dos variables aleatorias $\chi^2_{n_1}$ *y* $\chi^2_{n_2}$ *independientes entre sí (ambas* χ^2 *y, respectivamente, con* n_1 *y* n_2 *g.d.l.), entonces la variable aleatoria:*

$$\mathbf{F} = \frac{\frac{\chi^2_{\mathbf{n_1}}}{\mathbf{n_1}}}{\frac{\chi^2_{\mathbf{n_2}}}{\mathbf{n_2}}}$$

sigue una **F de Fisher-Snedecor** *con* n_1 *y* n_2 *grados de libertad.*

La función de densidad es:

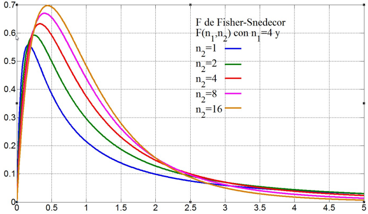
$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} (n_1)^{\frac{n_1}{2}} (n_2)^{\frac{n_2}{2}} \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(n_1 x + n_2)^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \text{ para } x > 0$$

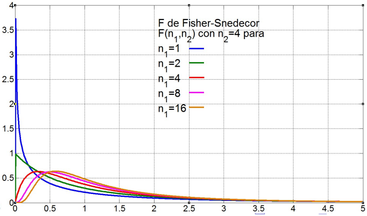
Media=$\mu = \frac{n_2}{n_2-2}$ para $n_2 > 2$.

Varianza: $V = \frac{2n_2^2(n_1+n_2+2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}$ para $n_2 > 4$.

Propiedades

1. Asimétrica a la derecha.
2. Depende de dos parámetros n_1 y n_2 denominándose $F(n_1, n_2)$
3. Se encuentra tabulada para valores de n_1 y n_2, existiendo múltiples tablas, una para cada α. Así, la tabla para $\alpha = 0.25$ proporciona el valor de $a = F_{\alpha,n_1,n_2}$, tal que $P(F(n_1, n_2) \geq a) = \alpha$.
4. Verifica la propiedad: $\mathbf{F}_{\alpha,\mathbf{n_1},\mathbf{n_2}} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{F}_{\mathbf{1}-\alpha,\mathbf{n_2},\mathbf{n_1}}}$
5. En MATLAB, el valor de F_{α,n_1,n_2} puede calcularse mediante **finv(1-alpha,n1,n2)**





Tablas F Fisher-Snedecor

Distribución F de Fisher-Snedecor para $\alpha = 0'025$

$n_2 \backslash n_1$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	24	30	40	60	120	1E+05
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,7	963,3	968,6	976,7	984,9	997,2	1001,4	1005,6	1009,8	1014,0	1018,3
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,50
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,12	14,08	14,04	13,99	13,95	13,90
4	12,22	10,65	9,979	9,605	9,364	9,197	9,074	8,980	8,905	8,844	8,751	8,657	8,511	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
5	10,01	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681	6,619	6,525	6,428	6,278	6,227	6,175	6,123	6,069	6,015
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,695	5,600	5,523	5,461	5,366	5,269	5,117	5,065	5,012	4,959	4,904	4,849
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823	4,761	4,666	4,568	4,415	4,362	4,309	4,254	4,199	4,142
8	7,571	6,059	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357	4,295	4,200	4,101	3,947	3,894	3,840	3,784	3,728	3,670
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026	3,964	3,868	3,769	3,614	3,560	3,505	3,449	3,392	3,333
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779	3,717	3,621	3,522	3,365	3,311	3,255	3,198	3,140	3,080
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588	3,526	3,430	3,330	3,173	3,118	3,061	3,004	2,944	2,883
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436	3,374	3,277	3,177	3,019	2,963	2,906	2,848	2,787	2,725
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312	3,250	3,153	3,053	2,893	2,837	2,780	2,720	2,659	2,596
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209	3,147	3,050	2,949	2,789	2,732	2,674	2,614	2,552	2,487
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123	3,060	2,963	2,862	2,701	2,644	2,585	2,524	2,461	2,395
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049	2,986	2,889	2,788	2,625	2,568	2,509	2,447	2,383	2,316
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985	2,922	2,825	2,723	2,560	2,502	2,442	2,380	2,315	2,248
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929	2,866	2,769	2,667	2,503	2,445	2,384	2,321	2,256	2,187
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880	2,817	2,720	2,617	2,452	2,394	2,333	2,270	2,203	2,133
20	5,871	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837	2,774	2,676	2,573	2,408	2,349	2,287	2,223	2,156	2,085
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798	2,735	2,637	2,534	2,368	2,308	2,246	2,182	2,114	2,042
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763	2,700	2,602	2,498	2,331	2,272	2,210	2,145	2,076	2,003
23	5,750	4,349	3,750	3,408	3,183	3,023	2,902	2,808	2,731	2,668	2,570	2,466	2,299	2,239	2,176	2,111	2,041	1,968
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703	2,640	2,541	2,437	2,269	2,209	2,146	2,080	2,010	1,935
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677	2,613	2,515	2,411	2,242	2,182	2,118	2,052	1,981	1,906
26	5,659	4,265	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653	2,590	2,491	2,387	2,217	2,157	2,093	2,026	1,954	1,878
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631	2,568	2,469	2,364	2,195	2,133	2,069	2,002	1,930	1,853
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611	2,547	2,448	2,344	2,174	2,112	2,048	1,980	1,907	1,829
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592	2,529	2,430	2,325	2,154	2,092	2,028	1,959	1,886	1,807
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,026	2,867	2,746	2,651	2,575	2,511	2,412	2,307	2,136	2,074	2,009	1,940	1,866	1,787
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452	2,388	2,288	2,182	2,007	1,943	1,875	1,803	1,724	1,637
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334	2,270	2,169	2,061	1,882	1,815	1,744	1,667	1,581	1,482
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222	2,157	2,055	1,945	1,760	1,690	1,614	1,530	1,433	1,311
1E+05	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114	2,048	1,945	1,833	1,640	1,566	1,484	1,388	1,269	1,012

Hallar: a) F(0.025,5,7), b) F(0.025,7,5) c) F(0.975,5,7)

a: F(0.025,5,7)=5.285, **b:** F(0.025,7,5)=6.853

c: F(0.975,5,7)$= \frac{1}{F(0.025,7,5)} = \frac{1}{6.853} = 0.146$

Mediante Matlab: a) **finv(0.975,5,7)**, b) **finv(0.975,7,5)** c) **finv(0.025,5,7)**

Distribución Log-normal

Definición

Una variable ξ sigue una **distribución log-normal** *si los logaritmos neperianos de sus valores están normalmente distribuidos. Es decir: $\eta = ln(\xi)$ es una $N(\mu, \sigma)$*

La función de densidad es:

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{x}\sigma\sqrt{\mathbf{2}\pi}}\mathbf{e}^{-\frac{(\log(x)-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad (0 < x < \infty)$$

Depende de los parámetros μ y σ.

Media: $E(\xi) = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

Varianza: $V(\xi) = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$

Distribución Erlang

Definición

Si una variable aleatoria ξ sigue una Gamma(α, β) y $n = \alpha$ es natural, decimos que ξ sigue una **Distribución de Erlang**.

La función de densidad de la Erlang es:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^{\mathbf{n}-\mathbf{1}}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}}{\beta}}}{\beta^{\mathbf{n}}(\mathbf{n}-\mathbf{1})!}$$

para $x > 0$, $n \in \mathbb{N}$ y $\beta > 0$.

Esta distribución juega un papel muy importante en redes de telecomunicación, llegando a medirse el volumen de tráfico en Erlangs.

Propiedad

La distribución de Erlang modela el tiempo transcurrido hasta el n-ésimo suceso de un proceso de Poisson. Cuando n=1 resulta la exponencial.

Ejemplo

Ejemplo

El número de servicios solicitados en una hora sigue una distribución de Poisson de media 3. Hallar:

1. *Probabilidad de que el primero se solicite antes de 15 min.*
2. *Probabilidad de que se soliciten 7 antes de 2 horas.*

1) El tiempo hasta el primer aviso η sigue una exponencial de media $\mu = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda = 3$. $P(\eta < 0.25) = \int_0^{0.25} 3e^{-3x}dx =$
$F_\eta(0.25) = \{expcdf(0.25, 1/3)\} = 0.5276$
2) El tiempo hasta el séptimo aviso θ sigue una Erlang(7,1/3). Así,
$P(\theta < 2) = F_\theta(2) = gamcdf(2, 7, 1/3) = 0.3937$

Distribución Weibull

Definición

Una variable aleatoria ξ *que sigue una* **distribución de Weibull** *con parámetros* k *y* λ*,* $(W(k,\lambda))$*, tiene por función de densidad:*

$$\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{k}}{\lambda}\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)^{\mathbf{k-1}} \mathbf{e}^{-\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)^{\mathbf{k}}} \qquad (x>0, k>0, \lambda>0)$$

El parámetro k se denomina 'parámetro de forma' y el λ 'parámetro de escala'.

Función de distribución: $\mathbf{F}_\xi(\mathbf{x}) = \mathbf{1} - \mathbf{e}^{-\left(\frac{\mathbf{x}}{\lambda}\right)^{\mathbf{k}}}$
Media: $E(\xi) = \mu = \lambda\Gamma\left(\frac{k+1}{k}\right)$
Varianza: $V(\xi) = \lambda^2\left[\Gamma\left(\frac{k+2}{k}\right) - \Gamma^2\left(\frac{k+1}{k}\right)\right]$
La distribución de Weibull modela la distribución de fallos en un sistema cuando la tasa de fallos aumenta o disminuye con el tiempo. Así:

- Si $0<k<1$ la tasa de fallos disminuye con el tiempo.
- Si k=1, la tasa de fallos se mantiene constante. (Exponencial: $E(\lambda)$)
- Si $k>1$, la tasa de fallos crece con el tiempo. (Rayleigh: $W(2,\lambda) = R\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\right)$)

Ejemplo Weibull

Ejemplo

Se sabe que los errores debido a fallo humano se reducen con la experiencia de los operarios y la distribución de este tipo de fallos sigue una distribución de Weibull. Un estudio, en un gran número de empresas del sector, establece que la probabilidad de que un operario medio cometa el primer error (ξ) durante su primer año es del 15 %, y del 25 % durante los dos primeros años.

- *Ajustar un distribución de Weibull.*
- *Hallar la probabilidad de que no cometa ningún error en 40 años.*
- *Probabilidad de cometer un error entre 20 y 21 años de servicio, si no ha cometido ninguno antes.*

1: Nos dan $F(1) = 0.15$ y $F(2) = 0.25$. Como $F_\xi = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}$, tenemos:
$e^{-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^k} = 0.85$ y $e^{-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^k} = 0.75 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^k} = -Ln(0.85) \Rightarrow \lambda^k = 6.1531.$
$\frac{2^k}{\lambda^k} = -Ln(0.75) \Rightarrow 2^k = 1.7701 \Rightarrow k = 0.8237,\ \lambda^{0.8237} = 6.1531 \Rightarrow \lambda = 9.0779$
luego $\xi \rightsquigarrow W(0.8237, 9.0779)$

2: $P(\xi > 40) = 1 - F(\xi \leq 40) = 1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{40}{\lambda}\right)^k}\right) = e^{-\left(\frac{40}{9.0779}\right)^{0.8237}} = 0.0336$

3: Se pide $P(\xi \in [20,21]/\xi \geq 20) = \frac{P(\xi \in [20,21])}{P(\xi \geq 20)} = \frac{F_\xi(21) - F_\xi(20)}{1 - F_\xi(20)} = \{F_\xi(21) = 0.864,$
$F_\xi(20) = 0.8529\} = \frac{0.864 - 0.8529}{1 - 0.8529} \approx 0.0756$

Distribución Rayleigh

Definición

Dada una variable aleatoria continua ξ se dice que sigue una **distribución de Rayleigh** *de parámetro σ ($R(\sigma)$), si su función de densidad es:*

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}\mathbf{e}^{-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^2} \qquad (x > 0)$$

Función de distribución: $F(x) = \mathbf{1} - \mathbf{e}^{\left(-\frac{\mathbf{x}^2}{2\sigma^2}\right)}$
Media: $E(\xi) = \mu = \sigma\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ **Varianza:** $V(\xi) = \frac{4-\pi}{2}\sigma^2$
Moda: Mo$=\sigma$

Propiedades

- *Si X, Y son dos v.a. independientes siguiendo ambas una $N(0,\sigma)$, entonces $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ sigue una $R(\sigma)$.*
- *Si $X \rightsquigarrow E(\lambda)$, entonces $Y = \sqrt{2X\sigma\lambda} \rightsquigarrow R(\sigma)$*

Ejemplo Rayleigh

Ejemplo

Una señal (onda) es reflejada múltiples veces entre el emisor y el receptor, esto produce desfases, atenuaciones, etc. En conjunto, el receptor recibe una suma de variables aleatorias que se puede considerar de forma vectorial $\eta = (\eta_1, \eta_2)$*, donde las* η_i *son* $N(0, \sigma)$*.*

- *Ajustar una distribución de Rayleigh a la amplitud de la señal* ξ*, donde* $\xi = |\eta| = \sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2}$*, si sabemos que la amplitud de la señal recibida* ξ *rebasa el valor 2.146 el 1 % de las veces.*
- *Calcula* $P(\xi > 2)$

1: Nos dicen que: $P(\xi > 2.146) = 0.01 \Rightarrow F_\xi(2.146) = 1 - e^{-\frac{2.146^2}{2\sigma^2}} = 0.99$,
$e^{-\frac{2.30265}{\sigma^2}} = 0.01 \Rightarrow \frac{2.30265}{\sigma^2} = -Ln(0.01) = 4.6052 \Rightarrow \sigma = 0.7071$.
Luego $\xi \rightsquigarrow R(0.7071)$.

2: $P(\xi > 2) = 1 - F_\xi(2) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{2^2}{2\sigma^2}}\right) = e^{-\frac{2}{0.7071^2}} = 0.0183$