Apuntes de

ESTADÍSTICA

Series estadísticas

Sixto Sánchez Merino

Dpto. de Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Mi agradecimiento al profesor Carlos Cerezo Casermeiro, por sus correcciones y sugerencias en la elaboración de estos apuntes.

Apuntes de Estadística

Capítulo 3

Series estadísticas

En un estudio estadístico, los datos de una muestra proceden de las observaciones de una variable estadística. Si estas observaciones están ordenadas y estamos interesados en estudiar su evolución entonces la muestra constituye una *serie estadística* de datos.

En este capítulo estudiaremos dos tipos de series de datos: los números índice y las series temporales. Para cada una de ellas, veremos sus características y determinaremos algunos métodos que permitan extraer la información que proporcionan las series estadísticas.

3.1. Números índice

Normalmente, cuando se quiere estudiar la evolución de determinados fenómenos complejos donde intervienen varias variables, uno de los mayores problemas es la forma de medir algunos agregados (sumas) que son heterogéneas (no se parecen). Dichos problemas se presentan sobre todo en el análisis de variables económicas como listas de precios, cantidades, etc. El problema de dicha medición consiste, en obtener un único número que sea descriptivo del volumen total del agregado que se quiera estudiar, o en obtener un único número que nos posibilite estudiar la evolución en el tiempo de dicho agregado. La solución a este problema se tiene mediante el uso de una técnica estadística llamada *número índice.*

Llamamos *número índice* o simplemente *índice* a una medida estadística diseñada para poner de relieve cambios en una variable o en un grupo de variables relacionadas con respecto al tiempo, situación geográfica o cualquier otra característica. Una colección de números índice para diferentes años, lugares, etc., recibe el nombre de *serie de índices*

En el caso más sencillo, los números índice sirven para conocer la variación porcentual de una determinada magnitud en el tiempo o en el espacio. En este caso, los números índice no son otra cosa que el porcentaje de variación de cada valor de la variable con respecto a un valor de referencia llamado *periodo base* o *periodo de referencia.*

Por ejemplo, sean x_a y x_b dos valores de una variable X en dos instantes de tiempo a y b. Entonces, el cociente entre x_b y x_a

$$x_{b/a} = \frac{x_b}{x_a}$$

determina un número índice, que denotaremos por $x_{b/a}$, y que representa la relación entre los valores de la variable en esos dos instantes. Este número se suele multiplicar por 100 para expresarlo en tantos por ciento. Además, el instante a, que determina el denominador del cociente, se denomina *periodo base* o *de referencia.*

Ejemplo 3.1 *Calcular e interpretar el número índice que determina la relación entre el precio del gasóleo A en febrero de 2011, que era de 1'23 euros, respecto al precio en marzo del 2009, que era de 84 céntimos de euro.*

El número índice (p) que determina la relación entre los precios del gasóleo A en esos dos instantes de tiempo es

$$p_{2011/2009} = \frac{123}{84} \approx 1'464(146'4\,\%)$$

Lo que significa que el precio del gasóleo A se incrementó más de un 46 % en esos dos años. □

Con los números índice podemos comparar los costes de alimentación o de otros servicios en una ciudad durante un año con los del año anterior, o la producción de acero en un año en una zona del país con la de otra zona. Aunque se usan principalmente en economía e industria, los números índice son aplicables en muchos otros campos. En educación, por ejemplo, se pueden usar los números índices para comparar la inteligencia relativa de estudiantes en sitios diferentes o en años diferentes.

3.1.1. Clasificación de números índice

En función del número de variables que queramos relacionar, podemos hablar de dos tipos de números índices: números índices simples y números índices complejos. Los índices simples se refieren a una sola variable mientras que los índices complejos hacen intervenir a más de una variable.

$$\text{Índices} \begin{cases} \text{Simples} \begin{cases} \text{Elementales} \\ \text{En cadena} \end{cases} \\ \text{Complejos} \begin{cases} \text{Sin ponderar} \\ \text{Ponderados} \end{cases} \end{cases}$$

Atendiendo al periodo base considerado, los índices simples pueden ser elementales o en cadena. Los índices simples elementales están referidos a un mismo periodo base, mientras que los índices simples en cadena están referidos al periodo inmediatamente anterior en la serie y, por tanto, no es fijo. En cuanto a los índices complejos podemos establecer otra clasificación atendiendo a la ponderación o no de las variables que intervienen.

3.1.2. Propiedades de los números índice

A continuación vamos a relacionar las propiedades más importantes que deseamos que cumpla un número índice. Para todas ellas, consideramos los índices $x_a, x_b, x_c \ldots$ expresados en tantos por 1 y correspondientes a los periodos de tiempo $a, b, c, \ldots$ respectivamente de la variable X.

1. Propiedad identidad: El índice de un periodo respecto al mismo periodo es 1, es decir, $x_{a/a} = 1$.

2. Propiedad de inversión temporal: Establece una relación entre los índices correspondientes a dos periodos de tiempo.

$$x_{a/b} \cdot x_{b/a} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x_{a/b} = \frac{1}{x_{b/a}}$$

3. Propiedad cíclica o circular: Establece una relación entre los índices de varios periodos de tiempo encadenados.

$$x_{a/b} \cdot x_{b/c} \cdot x_{c/a} = 1 \quad , \quad x_{a/b} \cdot x_{b/c} \cdot x_{c/d} \cdot x_{d/a} = 1 \quad , \quad \ldots$$

4. Propiedad cíclica o circular modificada: Establece otra relación entre los índices de varios periodos de tiempo encadenados.

$$x_{a/b} \cdot x_{b/c} = x_{a/c} \quad , \quad x_{a/b} \cdot x_{b/c} \cdot x_{c/d} = x_{a/d} \quad , \quad \ldots$$

Desde un punto de vista teórico, sería deseable que los números índice verificasen estas propiedades. Si bien, los índices simples que vamos a definir cumplen todas ellas, no se conoce ningún índice complejo que verifique todas las propiedades.

3.2. Índices simples

Llamamos *índices simples* a los que hacen referencia a una variable concreta, es decir, a los que dan a conocer la evolución de una única variable comparándola con ella misma al tomar un periodo de tiempo como referencia o base.

Los números índices simples se calculan dividiendo el valor actual de la variable entre el valor de la variable en el tiempo utilizado como base. En función de que el tiempo considerado como base sea fijo para todos los valores o vaya cambiando, se distinguen dos tipos de números índice: *elementales* o *en cadena*. Ambos tipos verifican todas las propiedades definidas anteriormente.

En esta sección vamos a definir, calcular e interpretar estos dos tipos de índices y veremos tres ejemplos de índices elementales: las relaciones de precios, de cantidad y de valor.

3.2.1. Índices simples elementales (ISE)

Los índices elementales son un tipo de índices simples que responderían estrictamente a la definición como cociente de valores de la variable. En este caso se toma un único valor como periodo base o periodo de referencia y es fijo para todos los valores de la variable.

Consideramos una serie de valores $x_0, x_1, \ldots, x_k$ observados de la variable X en los instantes o periodos de tiempo $t = 0, 1, \ldots, k$. Los números índice simples elementales se obtienen dividiendo cada uno de los valores de la variable X por el valor fijo de la variable que corresponde con el momento que se toma como base. El índice obtenido con ese cociente se multiplica por 100 para expresar el resultado en tantos por cien.

En la siguiente tabla se calculan estos índices para los distintos valores de la variable X en los periodos de tiempo (t) correspondientes y tomando como base el instante $t = 0$.

tiempo t	0	1	2	...	k
variable X	x_0	x_1	x_2	...	x_k
ISE	1	$\frac{x_1}{x_0}$	$\frac{x_2}{x_0}$	...	$\frac{x_k}{x_0}$
ISE en %	100	$\frac{x_1}{x_0} \cdot 100$	$\frac{x_2}{x_0} \cdot 100$	...	$\frac{x_k}{x_0} \cdot 100$

El índice elemental para un periodo dado con respecto al mismo periodo es siempre 100. En particular, el número índice correspondiente al periodo base es siempre 100. Esto da cuenta de la notación (frecuente en la literatura estadística) de escribir, por ejemplo, “1969=100”, para indicar que se ha tomado 1969 como periodo base.

Si en un periodo, el número índice es mayor de 100, significa que existe un incremento del valor de la variable en ese periodo con respecto al valor de dicha variable en el periodo tomado como base. Por ejemplo, un índice de 134 %, significa que existe un incremento del 34 % respecto del periodo base. Si el número índice es menor de 100, significa que existe una disminución del valor de la variable en ese periodo con respecto al valor de dicha variable en el periodo base. Así, si este índice es 98 %, significa que existe una disminución del 2 %, siempre con respecto al periodo base.

Ejemplo 3.2 *La siguiente tabla contiene las cifras de ventas (en miles de millones) de una empresa durante los últimos cinco años de existencia de la peseta como moneda de curso legal.*

Año	1997	1998	1999	2000	2001
ventas	$1'5$	$2'4$	$2'4$	$1'8$	$2'7$

Calcular la serie de números índice simples elementales tomando como referencia el año 1997 e interpretar los resultados.

Para calcular los índices simples elementales, dividimos las cifras de ventas de cada año entre las ventas registradas durante el año 1997 y multiplicamos por 100.

Año	1997	1998	1999	2000	2001
ISE	100	160	160	120	180

Por ejemplo, el número índice 180 correspondiente al año 2001 se ha calculado dividiendo la cifra de ventas de este año entre las ventas registradas durante el año 1997. Esto significa que en el año 2001 las ventas se han visto incrementadas en un 80 % respecto al año base 1997. Además, podemos observar que el índice para el año 1997 es 100 por ser el periodo tomado como base.

Estos índices elementales permiten conocer fácilmente que durante el lustro se ha vendido por encima de los registros obtenidos en el año 1997. Para ello, sólo necesitamos comprobar que todos los índices elementales obtenidos son mayores que 100. □

3.2.2. Índices simples en cadena (ISC)

Los índices en cadena son un tipo de índices simples donde el periodo base va a ir cambiando de un valor de la variable a otro. Para calcular el índice de un periodo tomaremos como base el valor de la variable en el periodo inmediatamente anterior.

Consideramos una series de valores $x_0, x_1, \ldots, x_k$ observados de la variable X en los instantes o periodos de tiempo $t = 0, 1, \ldots, k$. Para cada periodo t, el índice simple en cadena se obtiene dividiendo el valor de la variable en ese periodo (x_t) por el valor de la variable en el periodo anterior (x_{t-1}). El índice obtenido con ese cociente se multiplica por 100 para expresar el resultado en tantos por cien.

En la siguiente tabla se calculan estos índices para los distintos valores de la variable X en los periodos de tiempo (t) correspondientes.

tiempo t	0	1	2	...	k
variable X	x_0	x_1	x_2	...	x_k
ISC	–	$\frac{x_1}{x_0}$	$\frac{x_2}{x_1}$	...	$\frac{x_k}{x_{k-1}}$
ISC en %	–	$\frac{x_1}{x_0} \cdot 100$	$\frac{x_2}{x_1} \cdot 100$	...	$\frac{x_k}{x_{k-1}} \cdot 100$

Obsérvese que la definición no tiene sentido para el primer valor de la serie. Además, si en un periodo, el número índice es mayor de 100, significa que existe un incremento del valor de la variable en ese periodo con respecto al valor de dicha variable en el periodo anterior. Por ejemplo, un índice de 134 %, significa que existe un incremento del 34 % respecto del periodo anterior. Si el número índice es menor de 100, significa que existe una disminución del valor de la variable en ese periodo con respecto al valor de dicha variable en el periodo anterior. Así, si este índice es 98 %, significa que existe una disminución del 2 %, siempre con respecto al periodo anterior.

Ejemplo 3.3 *Calcular los índices simples en cadena para la serie de datos de ventas del ejemplo 3.2 de la página 106, e interpretar los resultados.*

Para calcular los índices simples en cadena, dividimos las cifras de ventas de cada año entre las ventas registradas durante el año anterior y multiplicamos por 100 %.

Año	1997	1998	1999	2000	2001
ventas	$1'5$	$2'4$	$2'4$	$1'8$	$2'7$
ISC	–	160	100	75	150

Por ejemplo, el número índice 150 correspondiente al año 2001 se ha calculado dividiendo la cifra de ventas de este año entre las ventas registradas durante el año 2000. Esto significa que en el año 2001 las ventas se han visto incrementadas en un 50 % respecto al año anterior. Sin embargo, el número 75 del año 2000 significa que en este año se redujeron las ventas en un 25 % respecto al año anterior. Por otro lado, el número 100 del año 1999 indica que las cifras de ventas de este año coinciden con las ventas registradas el año anterior.

Estos índices en cadena permiten estudiar la evolución de las ventas año a año. En nuestro ejemplo, resulta fácil determinar el año donde no se ha producido una evolución favorable (incremento) de las ventas que corresponde al año 2000 cuyo índice es inferior a 100. □

Ejemplo 3.4 *La siguiente tabla contiene el consumo de petróleo en España durante la década de los 90, medido en miles de toneladas.*

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Consumo	$47'741$	$49'367$	$50'464$	$49'709$	$51'894$	$54'610$	$55'433$	$57'396$	$61'670$	$63'04$

Calcular los índices simples elementales y en cadena tomando como referencia el año 1990 e interpretar los resultados.

Para calcular los índices simples elementales, dividimos el consumo de cada año entre el consumo del año 1990 y multiplicamos por 100 %. En la casilla correspondiente al año base colocamos 100 %.

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ISE	$100'00$	$103'41$	$105'70$	$104'12$	$108'70$	$114'39$	$116'11$	$120'22$	$129'18$	$132'05$

El número 120’22 del año 1997 significa que en este año se produjo un incremento del 20’22 % del consumo respecto al año 1990.

Para calcular los índices simples en cadena, dividimos el consumo de cada año entre el consumo del año anterior y multiplicamos por 100 %.

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
ISC	–	$103'41$	$102'22$	$98'50$	$104'40$	$105'23$	$101'51$	$103'54$	$107'45$	$102'22$

El número 107’45 del año 1998 significa que en este año se produjo un incremento del 7’45 % del consumo respecto al año anterior. El número 98’50 del año 1993 significa que en este año se produjo un descenso del consumo de energía equivalente al 1’50 % del consumo respecto al año anterior.

Podemos observar que los índices elementales son todos mayores que 100 lo que indica que el consumo durante toda la década fue superior al consumo producido en el año 1990. Con este tipo de índice es más difícil apreciar si durante todos los años se ha producido este incremento. Sin embargo, al observar los índices en cadena se aprecia más fácilmente este fenómeno. Los años con índice inferior o superior a 100 indican una disminución o aumento respectivamente del consumo de este combustible. □

3.2.3. Relación de precios, cantidades y valores

Uno de los ejemplos más usuales de índice simple es lo que se conoce como *relación de precios*, que no es más que el cociente entre el precio de un artículo en un periodo dado y su precio en otro periodo (base). Además, por sencillez se supone que los precios en cada periodo son constantes, ya que en caso de no ser así, podemos tomar un promedio adecuado para el periodo de modo que la suposición sea válida.

Si p_a y p_b son los precios de un artículo durante los periodos a y b respectivamente, entonces la *relación de precios en el periodo b con respecto al periodo a* se denota por $p_{b/a}$ y viene definida por la fórmula

$$p_{b/a} = \frac{p_b}{p_a}$$

En vez de comparar los precios de un artículo, podemos estar interesados en comparar las cantidades (o volúmenes) de producción, consumo, exportación, etc. En este caso, el número índice simple se conoce como *relación de cantidad* o *relación de volumen.*

Si q_a y q_b representan las cantidades durante los periodos a y b respectivamente, entonces la *relación de cantidad en el periodo b con respecto al periodo a* se denota por $q_{b/a}$ y se calcula de manera análoga a los precios

$$q_{b/a} = \frac{q_b}{q_a}$$

Si p es el precio de un artículo durante un periodo y q es la cantidad (o volumen) producida, vendida, etc., durante ese mismo periodo, entonces el producto $p \cdot q$ recibe el nombre de *valor total.* Por ejemplo, si 10 artículos se venden a 2'15 euros, el valor total es $p \cdot q = 2'15 \cdot 10 = 21'5$ euros.

La *relación de valor* es un índice simple que permite comparar el valor total en dos periodos de tiempo. Sean p_a y q_a el precio y la cantidad de artículos registrados durante el perido a, y p_b y q_b durante el periodo b. Ahora los valores totales durante estos periodos vienen dados por $v_a = p_a \cdot q_a$ y $v_b = p_b \cdot q_b$. Definimos la *relación de valor del periodo b respecto del periodo a* como el cociente entre los valores totales en esos periodos

$$v_{b/a} = \frac{v_b}{v_a} = \frac{p_b \cdot q_b}{p_a \cdot q_a} = \left(\frac{p_b}{p_a}\right) \cdot \left(\frac{q_b}{q_a}\right) = p_{b/a} \cdot q_{b/a}$$

donde $p_{b/a}$ y $q_{b/a}$ son los índices de precios y cantidades expresados en tantos por 1. Es decir, la relación de valor es el producto de la relación de precios por la relación de cantidad.

Ejemplo 3.5 *La siguiente tabla contiene los precios en euros y las cantidades (en miles) producidas, de un mismo artículo, por una factoría durante la década de los 90.*

Año	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
Precio	$1'0$	$1'2$	$1'5$	$1'8$	$2'1$	$2'8$	$3'2$	$2'4$	$2'7$	$3'0$
Cantidad	12	14	18	18	20	15	12	16	20	24

Calcular la relación de precios, de cantidad y de valor tomando como referencia el año 1990 e interpretar los resultados.

Primero calculamos las relaciones de precios (p_t) y de cantidad (q_t) como índices elementales.

t	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
p_t	100	120	150	180	210	280	320	240	270	300
q_t	100	$116'67$	150	150	$166'67$	125	100	$133'33$	$166'67$	200

Ahora, para calcular la relación de valor (v_t), necesitamos primero obtener las cifras del valor multiplicando el precio y la cantidad en cada periodo. Después, calculamos el índice elemental de la serie de datos obtenida y obtenemos el resultado.

t	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999
valor	12	16′8	27	32,4	42	42	38′4	38′4	54	72
$v_{t/0}$	100	140	225	270	350	350	320	320	450	600

El número 270 del año 1993 significa que en este año se produjo un incremento del 170 % del valor de la producción respecto al año 1990. Obsérvese que durante los años 1994 y 1995 la relación de valor fue la misma y se debió a que una disminución de la producción se compensó con un incremento de los precios. Igual ocurrió durante los años 1996 y 1997. Por último, el número 600 del año 1999 indica que el valor de la producción se ha visto multiplicado por 6 durante la década de los noventa condicionado por un incremento tanto de las cantidades como de los precios. □

3.3. Índices complejos

Llamamos índices complejos a los que hacen referencia a dos o más variables, es decir, a los que dan a conocer la evolución de varias variables a lo largo del tiempo comparándolas con respecto a ellas mismas, tomando un periodo de tiempo como referencia o base. Además, las variables tienen que estar relacionadas entre sí de alguna forma, ya que no podemos mezclar variables diferentes.

Existen dos tipos de índices complejos:

- **Índice complejo sin ponderar:** Se trata de construir un índice complejo a partir de índices simples, dándole a todos la misma importancia.
- **Índice complejo ponderado:** Se trata de construir un índice complejo a partir de índices simples, dándole distinta importancia o peso a cada uno de ellos.

En lo que sigue se considerarán n variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ que toman valores en k instantes o periodos de tiempo t como se recoge en la siguiente tabla

t	X_1	X_2	$\ldots$	X_n
0	x_{10}	x_{20}	$\ldots$	x_{n0}
1	x_{11}	x_{21}	$\ldots$	x_{n1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k	x_{1k}	x_{2k}	$\ldots$	x_{nk}

donde $x_{i,t}$ representa el valor de la variable X_i en el tiempo t.

Como hemos de llegar a un solo número índice resumiendo una gran cantidad de información, es fácil comprender que los promedios (media aritmética, media geométrica, mediana, etc.) juegan un papel importante en el cálculo de números índices. Así como existen muchos métodos para calcular promedios, también hay muchos para calcular los números índices, cada uno con sus ventajas y desventajas propias.

3.3.1. Índices complejos sin ponderar

Veamos dos métodos para calcular índices complejos sin ponderar.

Método de agregación simple

En este método de calcular un índice, expresamos el valor total de la variable en el tiempo dado como porcentaje del valor total de las variables en el tiempo base. Es decir, para cada tiempo t definimos el índice:

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{it}}{\sum_{i=1}^{n} x_{i0}} \cdot 100 \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, k$$

que recibe el nombre de *índice de Bradstrest y Dutot*

Aunque este método es fácil de aplicar, tiene dos grandes desventajas que lo convierten en insatisfactorio. Por un lado, no tiene en cuenta la importancia relativa de las distintas variables (no es ponderado). Así pues, por ejemplo asignaría igual peso a la leche que a la crema de afeitar a la hora de calcular el IPC. Por otro lado, las unidades escogidas al anotar los valores de la variable afectan al índice.

Método del promedio simple

El índice producido por este método depende del procedimiento utilizado para promediar las relaciones de precios; los procedimientos incluyen la media aritmética, la geométrica, la armónica y la mediana. Por ejemplo, si consideramos la media aritmética, el índice correspondiente al tiempo t respecto al base $t = 0$ es:

$$I_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{it}}{x_{i0}}}{n} \cdot 100 \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, k$$

y recibe el nombre de *índice de Sanerbeck.*

Si bien este método no se ve afectado por la unidad de medida elegida, conserva aún la desventaja citada de dar la misma importancia a todas las variables.

Ejemplo 3.6 *La siguiente tabla recoge los valores de las variables $X_1, X_2, \ldots, X_6$ en 5 instantes de tiempo (t).*

t	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
0	2	22	7	8	7	8
1	3	25	9	13	8	9
2	3	27	10	15	9	9
3	4	28	11	18	11	10
4	4	30	11	22	12	11

Calcular los índices complejos sin ponderar por el método de agregación simple y por el método del promedio simple.

Para aplicar el método de agregación simple, calculamos la suma o agregado para cada periodo de tiempo y, a partir de ella, calculamos los números índice tomando como base el periodo 0.

t	Agregado	Índice
0	54	100
1	67	$124'1$
2	73	$135'2$
3	82	$151'9$
4	90	$166'7$

Para aplicar el método del promedio simple utilizando la media aritmética, calculamos las series de índices para cada variable.

t	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	Índice
0	100	100	100	100	100	100	100
1	150	$113'6$	$128'6$	$162'5$	$114'3$	$112'5$	$130'2$
2	150	$122'7$	$142'9$	$187'5$	$128'6$	$112'5$	$140'7$
3	200	$127'3$	$157'1$	225	$157'1$	125	$165'2$
4	200	$136'4$	$157'1$	275	$171'4$	$137'5$	$179'6$

La última columna contiene, para cada periodo de tiempo, la media aritmética de los índices correspondientes de las variables. □

3.3.2. Índices complejos ponderados

Con el fin de evitar las desventajas del método de agregación simple, asignamos un peso w_i a cada variable X_i. Tales pesos indican la importancia de la variable en cuestión.

Método de agregación ponderada

Este método generaliza al método de agregación simple y se utiliza si las variables son homogéneas. Para cada tiempo t definimos el índice así:

$$I_t = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{it} w_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i0} w_i} \cdot 100 \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, k$$

Método del promedio ponderado

Este método generaliza al método del promedio simple utilizado en los índices complejos sin ponderar y se utiliza si las variables no son homogéneas. El promedio ponderado más utilizado es la media aritmética ponderada, aunque también se utilizan otros, como la media geométrica ponderada. Para cada tiempo t definimos el índice así:

$$I_t = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_{it}}{x_{i0}} \cdot w_i}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} w_i} \cdot 100 \qquad t = 0, 1, 2, \ldots, k$$

Ejemplo 3.7 *La siguiente tabla recoge los valores de X_1, X_2 y X_3 en 5 instantes de tiempo (t):*

t	X_1	X_2	X_3
0	8	7	8
1	13	8	9
2	15	9	9
3	18	11	10
4	22	12	11

Calcule los índices complejos por el método de agregación ponderada y por el método del promedio ponderado, sabiendo que a la variable X_1 le asignamos el doble de importancia que al resto de variables.

La ponderación asignada es de 2, 1 y 1 respectivamente para las variables X_1, X_2 y X_3.

Para aplicar el método de agregación ponderada, calculamos la suma o agregado ponderado para cada periodo de tiempo y, a partir de ella, calculamos los números índice tomando como base el periodo 0. Por ejemplo, para el periodo 2, el agregado $48 = 2 \cdot 15 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 9$ y el índice $154'8 = (48/31) \cdot 100$.

Para aplicar el método del promedio ponderado utilizando la media aritmética ponderada, calculamos las series de índices para cada variable. La última columna contiene, para cada periodo de tiempo, la media aritmética ponderada de los índices correspondientes de las variables. Por ejemplo, para el periodo 2, el índice $154 = (2 \cdot 187'5 + 1 \cdot 128'6 + 1 \cdot 112'5)/4$.

Agregación ponderado		
t	Agregado	Índice
0	31	100
1	43	138’7
2	48	154’8
3	57	183’9
4	67	216’1

Promedio ponderado				
t	I_1	I_2	I_3	Índice
0	100	100	100	100
1	162’5	114’3	112’5	138
2	187’5	128’6	112’5	154
3	225	157’1	125	183
4	275	171’4	137’5	214’7

□

3.3.3. Índices de precios

Los índices de precios son los tipos de índices complejos ponderados más empleados en las actividades económicas e industriales. Consideran que las variables X_i, con $i = 1, \ldots, n$ son los precios de los artículos cuyos valores en el periodo t se denotan por p_{it}. A cada relación de precios asignamos un peso dado por el valor total del artículo en términos de alguna unidad monetaria. Como el valor de un artículo se obtiene multiplicando su precio p por la cantidad q, los pesos vienen dados por $w = p \cdot q$.

En las fórmulas que aparecen a continuación, las sumas se extienden a los valores de todas las variables para un tiempo t, es decir, la expresión $\sum$ equivale a $\sum_{i=1}^{n}$.

Según el valor del artículo considerado se distinguen tres índices:

- El índice de Laspeyres (método del año base) es un índice complejo ponderado que utiliza como ponderación, el valor, a precios del periodo base, de la cantidad en dicho periodo, es decir, $w_i = p_{i0} \cdot q_{i0}$
$$L_t = \frac{\sum \frac{p_{it}}{p_{i0}} \cdot p_{i0} q_{i0}}{\sum p_{i0} q_{i0}} = \frac{\sum p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum p_{i0} \cdot q_{i0}}$$

- El índice de Paasche (método del año dado) es un índice complejo ponderado que utiliza como ponderación, el valor, a precios del periodo base, de la cantidad del periodo actual, es decir, $w_i = p_{i0} \cdot q_{it}$
$$P_t = \frac{\sum \frac{p_{it}}{p_{i0}} p_{i0} q_{it}}{\sum p_{i0} q_{it}} = \frac{\sum p_{it} \cdot q_{it}}{\sum p_{i0} \cdot q_{it}}$$

- El índice de Marshall-Edgeworth es un índice complejo ponderado que, a diferencia de los anteriores, utiliza como ponderación la media aritmética de las cantidades del año base y del año dado, es decir, $w_i = p_{i0} \cdot (q_{i0} + q_{it})/2$
$$M_t = \frac{\sum p_{it} \cdot (q_{i0} + q_{it})}{\sum p_{i0} \cdot (q_{i0} + q_{it})}$$

Si utilizamos los índices de Laspeyres y de Paasche dados anteriormente obtenemos que

- El índice ideal de Fisher es la media geométrica de los índices de Laspeyres y de Paasche
$$F_t = \sqrt{L_t \cdot P_t} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum p_{i0} \cdot q_{i0}}\right) \cdot \left(\frac{\sum p_{it} \cdot q_{it}}{\sum p_{i0} \cdot q_{it}}\right)}$$

El índice ideal de Fisher, que en particular verifica el criterio de inversión temporal y el de inversión de factores, es mejor que cualquier otro número índice útil en cuanto a satisfacer las propiedades consideradas importantes (de ahí el apelativo de "ideal"). No obstante, desde una perspectiva práctica, también sirven y se utilizan con mucha frecuencia los otros índices que hemos definido.

Ejemplo 3.8 *Calcule los índices de precios correspondientes a los datos que aparecen en la siguientes tabla, tomando 2000 como año base:*

	A		B		C	
t	*Precios*	*Cantidades*	*Precios*	*Cantidades*	*Precios*	*Cantidades*
2000	*2*	*8*	*3*	*5*	*1*	*3*
2001	*3*	*7*	*4*	*6*	*2*	*3*
2002	*3*	*10*	*5*	*6*	*2*	*5*
2003	*3*	*12*	*7*	*7*	*4*	*8*
2004	*4*	*11*	*8*	*8*	*5*	*10*

Aplicamos las fórmulas como se indica en las siguientes tablas:

Índice de Laspeyres: $L_t = \dfrac{\sum p_{it} \cdot q_{i0}}{\sum p_{i0} \cdot q_{i0}}$

t	cálculos		L_t
2000	$\frac{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3}{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	100
2001	$\frac{3\cdot8+4\cdot5+2\cdot3}{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	$147'1$
2002	$\frac{3\cdot8+5\cdot5+2\cdot3}{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	$161'8$
2003	$\frac{3\cdot8+7\cdot5+4\cdot3}{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	$208'8$
2004	$\frac{4\cdot8+8\cdot5+5\cdot3}{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	$255'9$

Índice de Paasche: $P_t = \dfrac{\sum p_{it} \cdot q_{it}}{\sum p_{i0} \cdot q_{it}}$

t	cálculos		P_t
2000	$\frac{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3}{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	100
2001	$\frac{3\cdot7+4\cdot6+2\cdot3}{2\cdot7+3\cdot6+1\cdot3} \cdot 100$	$=$	$145'7$
2002	$\frac{3\cdot10+5\cdot6+2\cdot5}{2\cdot10+3\cdot6+1\cdot5} \cdot 100$	$=$	$162'8$
2003	$\frac{3\cdot12+7\cdot7+4\cdot8}{2\cdot12+3\cdot7+1\cdot8} \cdot 100$	$=$	$220'8$
2004	$\frac{4\cdot11+8\cdot8+5\cdot10}{2\cdot11+3\cdot8+1\cdot10} \cdot 100$	$=$	$282'1$

I. de Marshall-Edgeworth: $M_t = \dfrac{\sum p_{it} \cdot (q_{i0} + q_{it})}{\sum p_{i0} \cdot (q_{i0} + q_{it})}$

t	cálculos		M_t
2000	$\frac{2\cdot(8+8)+3\cdot(5+5)+1\cdot(3+3)}{2\cdot(8+8)+3\cdot(5+5)+1\cdot(3+3)} \cdot 100$	$=$	100
2001	$\frac{3\cdot(8+7)+4\cdot(5+6)+2\cdot(3+3)}{2\cdot(8+7)+3\cdot(5+6)+1\cdot(3+3)} \cdot 100$	$=$	$146'4$
2002	$\frac{3\cdot(8+10)+5\cdot(5+6)+2\cdot(3+5)}{2\cdot(8+10)+3\cdot(5+6)+1\cdot(3+5)} \cdot 100$	$=$	$162'3$
2003	$\frac{3\cdot(8+12)+7\cdot(5+7)+4\cdot(3+8)}{2\cdot(8+12)+3\cdot(5+7)+1\cdot(3+8)} \cdot 100$	$=$	$216'1$
2004	$\frac{4\cdot(8+11)+8\cdot(5+8)+5\cdot(3+10)}{2\cdot(8+11)+3\cdot(5+8)+1\cdot(3+10)} \cdot 100$	$=$	$272'2$

Índice de Fisher:

$$F_t = \sqrt{L_t \cdot P_t}$$

t	cálculos		F_t
2000	$\sqrt{100 \cdot 100}$	$=$	100
2001	$\sqrt{147'1 \cdot 145'7}$	$=$	$146'4$
2002	$\sqrt{161'8 \cdot 162'8}$	$=$	$162'3$
2003	$\sqrt{208'8 \cdot 220'8}$	$=$	$214'7$
2004	$\sqrt{255'9 \cdot 282'1}$	$=$	$268'7$

$\square$

Por último, queremos hacer notar que todos los índices de precios de esta sección se pueden definir análogamente para cantidades y obtener los índices de cantidades de Laspeyres, Paasche, Marshall-Edgeworth o Fisher. Las fórmulas que hemos mostrado para calcular los índices de precios son válidas para obtener estos índices de cantidades sin más que cambiar los valores de los precios por los de las cantidades y viceversa.

Índice de precios al consumo

Uno de los índices de Laspeyres más conocidos es el llamado *índice del coste de la vida* o *índice de precios al consumo*, más conocido como IPC. En este índice que elabora el Instituto Nacional de Estadística (INE), los precios están ponderados por las cantidades, y la ponderación son las cantidades consumidas por la población.

La importancia de este índice está en su significado y sus implicaciones sociales. Pensemos que, por ejemplo, en muchos contratos aparecen ciertas cláusulas de revisión salarial que producen aumentos anuales automáticos en correspondencia con los aumentos del índice de precios al consumo.

Con este índice, estamos interesados en comparar precios, cantidades o valores de grandes grupos de artículos. Por ejemplo, al calcular un índice de precios al consumo no sólo queremos comparar los precios de la leche en dos periodos, sino también los precios de los huevos, de la carne, del calzado, de la vivienda, etc., de modo que se consiga una visión general de la evolución de los precios. Naturalmente, podríamos simplemente hacer una lista con todos estos precios, pero eso no sería muy satisfactorio. Lo deseable es disponer de un solo número índice que compare los precios en ambos periodos en promedio.

No es difícil ver que los cálculos de números índice que afecten a un grupo de artículos conllevan muchos problemas que hay que solventar. Por ejemplo, debemos decidir qué artículos o servicios deben incluirse, así como su peso de importancia relativa; hemos de recolectar datos referentes a precios y cantidades de tales artículos; hemos de decidir que hacer con las distintas calidades dentro de un mismo artículo, o con ciertos artículos o servicios que están disponibles en un año pero no en el año base; por fin, hemos de decidir cómo reunir toda esa información y sacar un sólo número índice del coste de la vida que tenga significado práctico.

3.4. Series de números índice

Como vimos en la primera sección, la colección de números índice correspondientes a los valores de una variable constituyen una serie de números índice. Una utilización directa de las series de índices consiste en analizar las variaciones o fluctuaciones de una variable o de un conjunto de variables en un periodo de tiempo.

Las principales características de estas series son las variables que intervienen, sus ponderaciones y el periodo considerado como base. En esta sección vamos a estudiar cómo se obtienen nuevas series de índices cuando modificamos alguna de sus características y como se relacionan entre sí.

Además, veremos una aplicación de las series de índices para eliminar la influencia de unas variables sobre otras en un proceso que se denomina *deflación*.

3.4.1. Cambio de periodo base

Una serie de números índice se calcula a partir de los valores observados temporalmente en una variable, tomando uno de ellos como periodo base. En la práctica es deseable que el período base elegido para la comparación sea un periodo de estabilidad no muy alejado en el pasado. Por tanto, de cuando en cuando puede ser necesario cambiar el periodo base.

Una posibilidad es recalcular todos los números índice en términos del nuevo periodo base aunque para ello es necesario disponer de los valores de la variable. Un método aproximado más simple consiste en dividir todos los números índice para los diversos años correspondientes al periodo base antiguo por el número índice correspondiente al nuevo periodo base, expresando los resultados como porcentajes. Estos resultados representan los nuevos números índices, siendo el número índice para el nuevo periodo base 100.

Sea $I_{t/0}$ el número índice correspondiente al periodo t tomando como base el periodo 0. Si queremos cambiar de base considerando un nuevo periodo a, aplicamos la fórmula:

$$I_{t/a} = \frac{I_{t/0}}{I_{a/0}}$$

para calcular el nuevo índice correspondiente al periodo t. Matemáticamente hablando, este método es estrictamente aplicable sólo si los números índice satisfacen el criterio circular. Sin embargo, para muchos tipos de índices, el método afortunadamente da resultados que en la práctica son suficientemente próximos a los que se obtendrían teóricamente.

Ejemplo 3.9 *Consideremos los datos del ejemplo 3.8 de la página 114. Recalcular el índice de Paasche tomando 2002 como año base utilizando los dos procedimientos.*

El primer procedimiento (I_{2002}) consiste en volver a calcular todos los índices de Paasche igual que se hizo en el ejemplo 3.8 pero tomando como base el año 2002. Para ello, será necesario disponer de los datos originales. El segundo procedimiento (última columna de la tabla) es más sencillo y se calcula aplicando una simple regla de tres a los índices I_{2000} ya conocidos.

t	I_{2000}	I_{2002}	$I_{t/2002}$
2000	100	$\frac{2\cdot8+3\cdot5+1\cdot3}{3\cdot8+5\cdot5+2\cdot3}\cdot 100 = 61'8$	$\frac{100}{162'8}\cdot 100 = 61'4$
2001	$145'7$	$\frac{3\cdot7+4\cdot6+2\cdot3}{3\cdot7+5\cdot6+2\cdot3}\cdot 100 = 89'5$	$\frac{145'7}{162'8}\cdot 100 = 89'5$
2002	$162'8$	$\frac{3\cdot10+5\cdot6+2\cdot5}{3\cdot10+5\cdot6+2\cdot5}\cdot 100 = 100$	$\frac{162'8}{162'8}\cdot 100 = 100$
2003	$220'7$	$\frac{3\cdot12+7\cdot7+4\cdot8}{3\cdot12+5\cdot7+2\cdot8}\cdot 100 = 134'5$	$\frac{220'7}{162'8}\cdot 100 = 135'6$
2004	$282'1$	$\frac{4\cdot11+8\cdot8+5\cdot10}{3\cdot11+5\cdot8+2\cdot10}\cdot 100 = 169'9$	$\frac{282'1}{162'8}\cdot 100 = 173'3$

□

3.4.2. Renovación y empalme

Las principales características de los índices complejos ponderados son el periodo base y los pesos asignados a cada variable. Con el fin de que estos indicadores sean lo más representativos posible de la realidad, conviene de vez en cuando, revisar las variables que intervienen y los pesos asignados a las mismas. A partir de ese momento, vamos a calcular una nueva serie con parámetros distintos y a relacionarla con la anterior.

El proceso de *renovación* consiste en obtener esta nueva serie de números índices, a partir de los mismos valores de la variable pero cambiando los pesos asignados a las variables. Para ello, volvemos a aplicar las mismas fórmulas utilizando las nuevas características de la serie.

El proceso de *empalme* consiste en relacionar ambas series truncadas en el periodo de renovación. Para ello, aplicamos un cambio de base a la serie antigua, tomando como periodo base el periodo de renovación.

Ejemplo 3.10 *Utilizando los datos del ejemplo 3.8 de la página 114, renovar el índice de Paasche tomando como nuevo año base el 2002 y efectuar el empalme correspondiente.*

Primero se calculan los índices de Paasche tomando 2002 como nuevo año base. Para ello será necesario disponer de la tabla de datos del ejemplo 3.8. Después se calculan los índices de empalme aplicando una simple regla de tres a partir del índice antiguo y el nuevo para el año 2002. Por último se toman los índices de empalme para los años anteriores a 2002 y los nuevos índices de Paasche para los años posteriores a 2002.

t	I_{2000}	Renovación	Empalme	I_{2002}
2000	100	$---$	$\frac{100}{162'8}100 = 61'4$	$61'4$
2001	$145'7$	$---$	$\frac{100}{162'8}145'7 = 89'5$	$89'5$
2002	$162'8$	$\frac{3\cdot10+5\cdot6+2\cdot5}{3\cdot10+5\cdot6+2\cdot5}\cdot 100 = 100$	$\frac{100}{162'8}162'8 = 100$	100
2003	$---$	$\frac{3\cdot12+7\cdot7+4\cdot8}{3\cdot12+5\cdot7+2\cdot8}\cdot 100 = 134'5$	$---$	$134'5$
2004	$---$	$\frac{4\cdot11+8\cdot8+5\cdot10}{3\cdot11+5\cdot8+2\cdot10}\cdot 100 = 169'9$	$---$	$169'9$

□

3.4.3. Deflación de series estadísticas

Como vimos, el producto del precio de un artículo por su cantidad da lugar a una cifra que tiene carácter de valor. Por lo tanto, el valor v_t de un conjunto de n artículos distintos en un periodo t viene determinado

$$v_t = \sum_{i=1}^{n} p_{it}\cdot q_{it}$$

siendo p_{it} y q_{it} el precio y la cantidad del artículo i en el periodo t.

Los índices simples elementales para los valores v_t se denominan *números índice de valor* y determinan una serie de índices conocida como serie de valor. Podemos comprobar que el índice de precios de Laspeyres (L^P) por el índice de cantidades de Paasche (P^Q) da lugar al índice de valor

$$L_t^P \cdot P_t^Q = \frac{\sum p_{it}q_{i0}}{\sum p_{i0}q_{i0}}\cdot\frac{\sum q_{it}p_{it}}{\sum q_{i0}p_{it}} = \frac{\sum p_{it}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{i0}} = \frac{v_t}{v_0} = v_{t/0}$$

y, de la misma manera, también se puede calcular este índice de valor como el producto del índice de precios de Paasche (P^P) por el índice de cantidades de Laspeyres (L^Q)

$$P_t^P \cdot L_t^Q = \frac{\sum p_{it}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{it}}\cdot\frac{\sum q_{it}p_{i0}}{\sum q_{i0}p_{i0}} = \frac{\sum p_{it}q_{it}}{\sum p_{i0}q_{i0}} = \frac{v_t}{v_0} = v_{t/0}$$

Estas series cronológicas de valor se refieren a las variaciones en el tiempo de cifras monetarias que están sujetas a las fluctuaciones del poder adquisitivo de la moneda. Por ejemplo, aunque los ingresos de una familia pueden estar creciendo teóricamente durante un cierto número de años, sus ingresos reales pueden en verdad estar disminuyendo debido al aumento del coste de la vida, en tanto en cuanto este aumento del coste de la vida hace que disminuya su poder adquisitivo.

Denominaremos *valor nominal, aparente o corriente* a las cifras monetarias observadas y *valor real o constante* a las cifras corregidas convenientemente para eliminar la influencia de la depreciación monetaria. La operación de convertir valores nominales en valores reales recibe el nombre de *deflación.* En otras palabras, la deflación consiste en eliminar el efecto de la inflación.

Para deflactar hay que tener en cuenta que lo que se persigue es obtener valoraciones en términos reales, es decir, la valoración a lo largo del tiempo en euros del periodo tomado como base, porque cuando analizamos una serie estadística en términos de valores nominales podemos estar sobrevalorando o infravalorando las fluctuaciones que tiene la variable o conjunto de variables, puesto que en términos aparentes se está recogiendo la influencia de la inflación.

Por tanto, nuestra intención es pasar de una serie de valores nominales a la serie de valores reales, es decir, con precios constantes e iguales a los correspondientes al año que se toma como base:

$$\begin{array}{c} \text{Valores nominales} \\ \hline \sum p_{i0}q_{i0} \\ \sum p_{i1}q_{i1} \\ \sum p_{i2}q_{i2} \\ \vdots \\ \sum p_{ik}q_{ik} \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{array}{c} \text{Valores reales} \\ \hline \sum p_{i0}q_{i0} \\ \sum p_{i0}q_{i1} \\ \sum p_{i0}q_{i2} \\ \vdots \\ \sum p_{i0}q_{ik} \end{array}$$

Para obtener los valores reales a partir de los valores nominales, basta dividir éstos por el índice de precios de Paasche. Sin embargo, es más común utilizar el *índice del coste de la vida* o *índice de precios al consumo* (IPC), que prepara el Instituto Nacional de Estadística.

Por tanto, el IPC se utiliza para eliminar la influencia de los precios en una serie que esté valorada en términos monetarios. Lo que hacemos es calcular el valor real, dividiendo el valor nominal de cada año por el número índice del coste de la vida, IPC, usando un periodo base adecuado, es decir:

$$\text{valor real} = \frac{\text{valor nominal}}{\text{IPC}} \cdot 100$$

tomando el IPC en tanto por ciento. Con esta fórmula se obtiene el valor real de una cantidad en unidades monetarias del año base considerado en el IPC. Por ejemplo, si el IPC corresponde al instante t respecto del instante a tomado como base ($I_{t/a}$), entonces el valor real representará al valor nominal en el instante t en unidades monetarias del instante a.

Ejemplo 3.11 *Si el sueldo de un obrero ha crecido un 50 % en 10 años (1970-1980) y en ese mismo periodo el IPC se ha doblado, ¿cuánto ha crecido realmente el sueldo del obrero?*

Si el sueldo de un individuo en 1980 es el 150 % de su sueldo en 1970 (o sea, han crecido un 50 %), y el coste de la vida se ha doblado en ese mismo periodo de tiempo ($\text{IPC}_{1980/1970}$=200), entonces su sueldo real en 1980 en pesetas de 1970 se calcula así:

$$\text{Valor real}_{\ 1970} = \frac{\text{Valor nominal}_{1980}}{\text{IPC}_{1980/1970}} \cdot 100 = \frac{150}{200} \cdot 100 = 75\,\%$$

Por lo tanto, aunque aparentemente cobra un 50 % más de sueldo, realmente cobra un 25 % menos y, es decir, cobra más pero ha perdido poder adquisitivo. □

En el ejemplo anterior hemos utilizado el IPC para calcular una cantidad (sueldo) correspondiente a un año (1980) en términos de unidades monetarias de un año anterior (1970). Veamos otro ejemplo donde realizamos esta comparación, pero respecto a un año posterior.

Ejemplo 3.12 *Un SEAT 600 en el año 1960 costaba unas* 65.000 *ptas. (390'66 €). Se disponen de los siguientes datos del IPC:*

$$I_{60/92} = 4'956\,\% \qquad I_{01/92} = 136'584\,\% \qquad I_{06/01} = 118'337\,\%$$

Calcule el precio real que hubiese costado comprar el coche en el año 2006.

En este ejemplo queremos calcular el precio en pesetas del año 2006 de un artículo que fue comprado en 1960. Para ello, primero calculamos el IPC correspondiente al periodo 2006-1960 a partir de los índices disponibles:

$$I_{60/06} = I_{60/92} \cdot I_{92/01} \cdot I_{01/06} = \frac{I_{60/92}}{I_{01/92} \cdot I_{01/06}} = \frac{0'04956}{1'365844 \cdot 1'18337} = 0'03066 (3'066\,\%)$$

Ahora, para calcular el precio real del coche en el año 2006, dividimos su valor nominal entre el IPC del periodo que hemos calculado:

$$\text{Precio real (2006)} = \frac{\text{Precio nominal (1960)}}{I_{60/06}} = \frac{65.000}{3'066} \cdot 100 = 2.120.026 \text{ ptas.}$$

Y por lo tanto, un SEAT 600 que costase 65.000 ptas. en el año 1960 hubiese costado en 2006 más de dos millones de pesetas, exactamente 2.120.026 ptas. (12.741'61€). □

Por último, utilizaremos el IPC para deflactar una serie cronológica y poder comparar cantidades.

Ejemplo 3.13 *Deflactar la serie cronológica de las indemnizaciones totales (miles de pesetas), abonadas en España por las compañías de seguros, durante el periodo 1956-1960, tomando como deflacionador el índice del coste de la vida. Utilice los resultados para comparar las cantidades.*

Año	*Indemnizaciones*	*$IPC_{1936=100}$*
1956	*318.511*	*643'1*
1957	*523.926*	*712'4*
1958	*670.718*	*807'7*
1959	*905.661*	*866'7*
1960	*1.036.129*	*876'9*

En primer lugar cambiamos de base la serie de índices tomando 1956 como año base y después usamos el nuevo IPC para calcular las cantidades pagadas por las compañías en pesetas de 1956 lo que nos permitirá comparar unos años con otros.

Año	$\text{IPC}_{1956=100}$	Siniestros deflaccionados
1956	100	$\frac{318.511}{100} \cdot 100 = 318.511$
1957	$\frac{712'4}{643'1} \cdot 100 = 110'8$	$\frac{523.926}{110'8} \cdot 100 = 472.857$
1958	$\frac{807'7}{643'1} \cdot 100 = 125'6$	$\frac{670.718}{125'6} \cdot 100 = 534.011$
1959	$\frac{866'7}{643'1} \cdot 100 = 134'8$	$\frac{905.661}{134'8} \cdot 100 = 671.855$
1960	$\frac{876'9}{643'1} \cdot 100 = 136'4$	$\frac{1.036.129}{136'4} \cdot 100 = 759.625$

Observemos cómo podemos utilizar estos resultados para comparar cantidades. Tomando los datos de la primera tabla, observamos que las cantidades pagadas por siniestros en 1956 se ven duplicadas en 1958 y triplicadas al año siguiente, en 1959. Sin embargo, una vez deflaccionada la serie, observamos que la cantidad correspondiente al año 1956 no se duplica hasta 1959 y no se llega a triplicar en todo el periodo. □

3.5. Series Temporales o Cronológicas

Una serie temporal es un conjunto de observaciones tomadas en instantes específicos, generalmente a intervalos iguales. Es decir, es una variable estadística bidimensional donde una variable es el tiempo (variable independiente) y la otra corresponde al fenómeno cuantitativo que se quiere estudiar (variable dependiente). Por ejemplo, la cotización diaria al cierre de la sesión bursátil de ciertas acciones, producción de leche en unos años o las temperaturas cada hora por el Instituto Metereológico de una ciudad.

3.5.1. Representación gráfica

La representación gráfica de una serie temporal se realiza mediante un diagrama de dispersión, donde el tiempo se representa en el eje X y la variable, objeto de estudio, se representa en el eje Y.

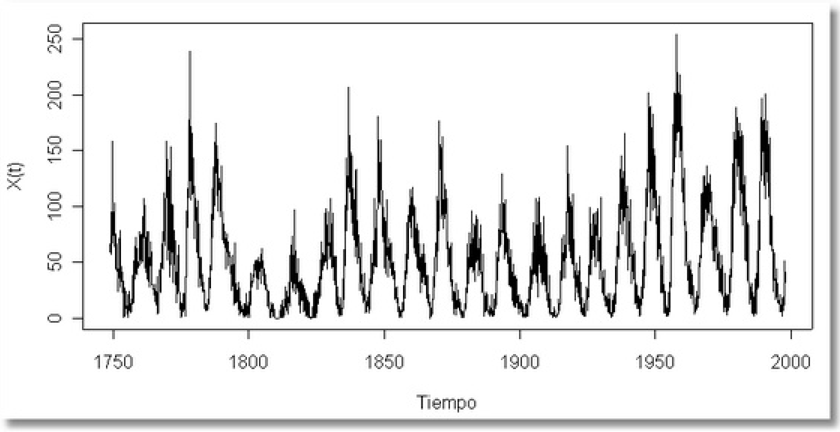

Figura 3.1: Serie Temporal

En la gráfica[1] de la figura 3.1 se representa una serie temporal ($x(t)$) mediante un diagrama de dispersión que permite observar el comportamiento de dicha serie a lo largo del tiempo (años). El objetivo será poder predecir el comportamiento de esta serie temporal en un futuro no muy lejano.

3.5.2. Promedios o Medias Móviles

Dado un conjunto de números $y_1, y_2, \ldots, y_N$, llamamos *promedio o media móvil de orden k*, a la siguiente sucesión de medias aritméticas:

$$\frac{y_1 + ... + y_k}{k}, \quad \frac{y_2 + ... + y_{k+1}}{k} \quad \cdots \quad \frac{y_{N-k+1} + ... + y_N}{k}$$

Si los datos se dan anual o mensualmente, se llama media móvil de k años o de k meses.

[1]Fuente: http://www.seh-lelha.org/tseries.htm

Las medias móviles tienen la propiedad de que tienden a reducir la variación presente en un conjunto de datos, es decir, originan la suavización de series en el tiempo. Si el periodo de la media móvil se hace coincidir exactamente con el periodo de cierta fluctuación sistemática, esta fluctuación queda eliminada en la serie resultante al aplicar la media móvil.

Ejemplo 3.14 *Calcular la media móvil de orden 3 ($\hat{Y}_3$) para los valores 2, 6, 1, 5, 3, 7 y 2 de la variable Y.*

$$\begin{array}{c} \dfrac{2+6+1}{3}=3 \\ \dfrac{6+1+5}{3}=4 \\ \dfrac{1+5+3}{3}=3 \\ \dfrac{5+3+7}{3}=5 \\ \dfrac{3+7+2}{3}=4 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{c|c} Y & \hat{Y}_3 \\ \hline 2 & \\ 6 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 5 \\ 7 & 4 \\ 2 & \end{array}$$

Como se aprecia en el ejemplo, cada media se van calculando a partir del conjunto de datos que se obtiene del anterior, eliminando el primero y añadiendo el siguiente. De ahí que reciba el nombre de media móvil.

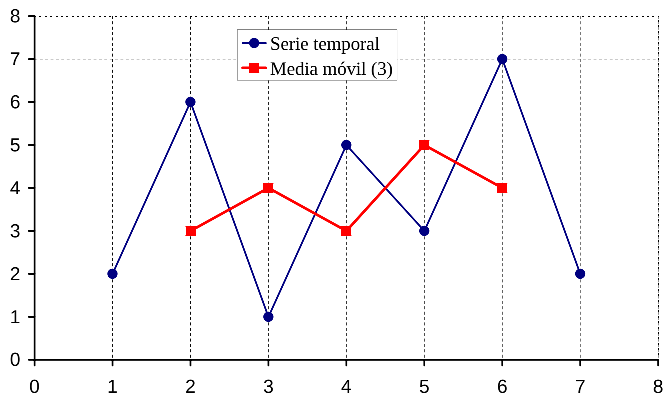

Figura 3.2: Media móvil de orden 3

Como se observa en la figura 3.2, la representación de la media móvil da lugar a una serie temporal más suave que la original. Es decir, si buscamos rectas paralelas que acoten las series, entonces, las correspondientes rectas que acotasen a las medias móviles distarían menos, entre sí, que las que acotasen a los valores originales. □

Si el orden es impar, la media móvil queda centrada pues su valor se asigna al dato que ocupa la posición central. Sin embargo, si el orden es par, la media móvil queda descentrada pues no hay ningún valor del conjunto que ocupe la posición central. En tal caso, se procede a centrar o corregir la media móvil, volviendo a calcular la media entre 2 consecutivos.

Ejemplo 3.15 *Calcular una media móvil de orden 4 con los datos del ejemplo 3.14.*

$$\frac{2+6+1+5}{4} = 3'5$$

$$\frac{6+1+5+3}{4} = 3'75$$

$$\frac{1+5+3+7}{4} = 4$$

$$\frac{5+3+7+2}{4} = 4'25$$

$$\Longrightarrow$$

Y	$\hat{Y}_4$	$\hat{\hat{Y}}_4$
2		–
6		–
	$3'5$	
1		$3'625$
	$3,75$	
5		$3'875$
	4	
3		$4'125$
	$4'25$	
7		–
2		–

□

3.6. Análisis de las series temporales

Existen una gran cantidad de componentes que conforman una serie temporal, aunque estas pueden dividirse en cuatro grandes grupos:

1. Tendencia secular (T).
2. Variaciones estacionales o periódicas (E ó S).
3. Variaciones cíclicas (C).
4. Variaciones aleatorias, irregulares o accidentales (A ó I).

La primera y la tercera son observables a largo plazo mientras que la segunda y la última se estudian en cortos periodos de tiempo. El objetivo es saber cómo se relacionan e interactúan estas componentes. Desgraciadamente esto es bastante difícil, por lo que se presentan, básicamente, dos alternativas:

1. Hipótesis Aditiva:
$$Y = T + E + C + A$$
donde Y es la conjunción de los 4 factores mediante acumulación o suma.
2. Hipótesis Multiplicativa:
$$Y = T \cdot E \cdot C \cdot A$$
donde Y es la conjunción de los 4 factores mediante el producto.

La elección de cuál de estas hipótesis es la mejor depende del grado de acierto a que conduce la aplicación de cada una. Nosotros consideraremos, principalmente, la segunda, aunque aplicar la primera se realizaría de forma análoga.

En la gráfica[2] de la figura 3.3 se muestra una serie temporal (arriba), junto a tres de sus componentes (T, E y A) representadas aisladamente.

[2] Fuente: http://www.seh-lelha.org/tseries.htm

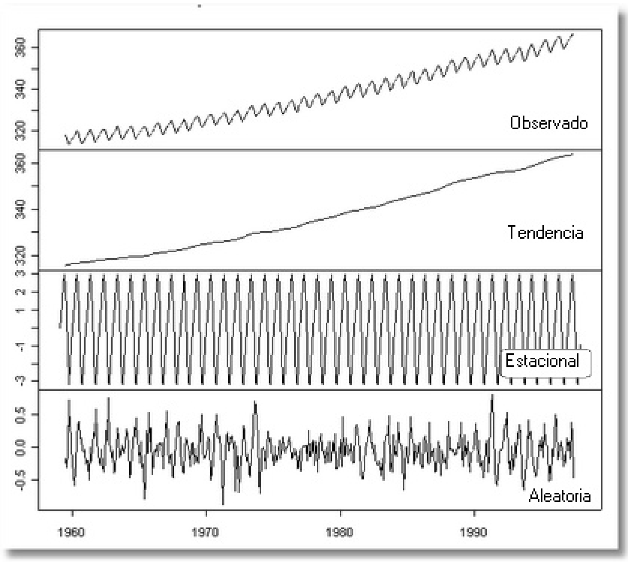

Figura 3.3: Descomposición de una serie temporal en tres componentes

3.6.1. Tendencia secular

La tendencia secular se refiere a la dirección general predominante de la serie observada en un espacio de tiempo suficientemente amplio. Se puede representar por una curva de tendencia (generalmente recta de tendencia).

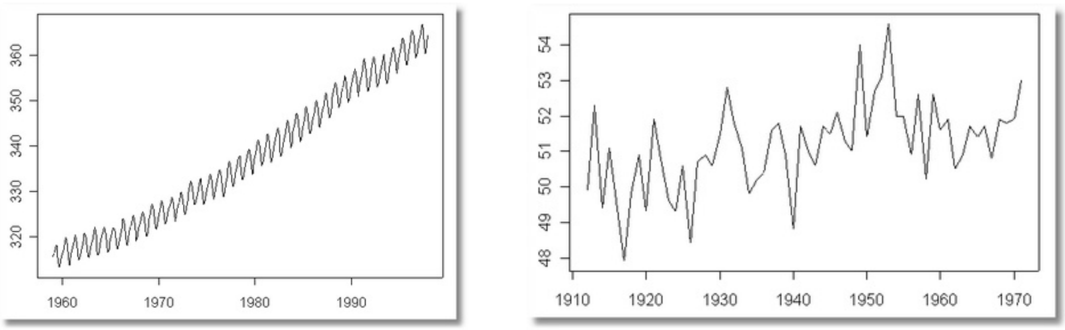

Figura 3.4: Series temporales con tendencia más (izquierda) o menos (derecha) pronunciada

En la gráfica[3] de la figura 3.4 se muestran dos series temporales. La tendencia es la recta imaginaria que se aproxima a la serie de datos. Y, como se observa, la serie que se representa a la izquierda, tiene una marcada tendencia creciente, mientras que la representada a la derecha, también tiene una tendencia creciente, pero es más suave.

[3]Fuente: http://www.seh-lelha.org/tseries.htm

3.6.2. Variaciones estacionales o periódicas

Las variaciones estacionales o periódicas son las variaciones ocurridas por los meses del año o las estaciones, y que se repiten de forma cíclica todos los años (dentro de un periodo anual). Por ejemplo, la subida de precios en Navidad, la producción de productos agrícolas, las ventas de bañadores o el número de viajeros en un autobús en las horas puntas.

Su representación gráfica viene determinada por una curva cíclica de periodo corto.

3.6.3. Variaciones cíclicas

Las variaciones cíclicas son aquellas variaciones que se observan a lo largo del tiempo, y que se "repiten cíclicamente". Su representación gráfica se caracteriza por una curva de periodo largo. Por ejemplo, la recesión económica o el índice de paro.

Generalmente estas variaciones cíclicas son propias de las variables económicas y para observarse mejor es necesario que el periodo que abarca la serie temporal sea suficientemente amplio.

3.6.4. Variaciones aleatorias, irregulares o accidentales

Las variaciones accidentales son los movimientos esporádicos (irregulares o aleatorios) que se producen en una serie y que rompen su "tendencia". Por ejemplo, la subida de petróleo en la guerra del Golfo, una inundación o una helada en el campo.

Además, se suele suponer que tales sucesos producen variaciones que pierden influencia tras poco tiempo.

3.7. Estimación de la tendencia

De entre los muchos métodos que existen para calcular la tendencia secular de una serie temporal, resaltamos los 4 siguientes:

3.7.1. Método gráfico

El método gráfico consiste en determinar dos curvas (poligonales), una superior y otra inferior, que acoten a nuestra serie temporal. Después, los puntos medios, localizados entre las dos curvas determinan otra curva mucho más amortiguada, que nos indica gráficamente la tendencia o dirección predominante de la serie.

Para ello, representamos gráficamente la serie temporal y procedemos de la siguiente manera:

1. Se unen, mediante segmentos, los puntos máximos de la serie, obteniéndose una línea quebrada que se denomina poligonal de cimas.

2. De la misma forma, se unen los puntos mínimos de la serie, obteniéndose la poligonal de fondos.

3. Se trazan perpendiculares al eje de abscisas que pasen por los vértices de las poligonales de cimas y fondos.

4. Se calculan los puntos medios de los segmentos determinados por los cortes de cada perpendicular con las poligonales de cimas y fondos.

5. Finalmente, la tendencia viene determinada por la curva poligonal que une los puntos medios de los segmentos.

En la gráfica de la figura 3.5 se representan los elementos necesarios para aplicar el método gráfico de estimación de la tendencia. Se ha utilizado el color azul para la serie temporal y el rojo para la tendencia. Las poligonales de cimas y fondos se representan con trazos continuos negros y las perpendiculares con trazos discontinuos.

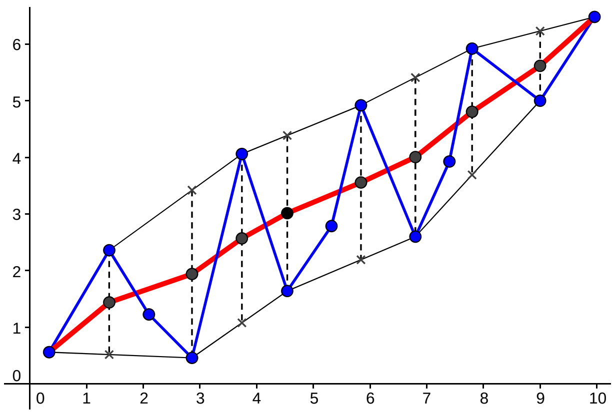

Figura 3.5: Aplicación del método gráfico para la estimación de la tendencia

3.7.2. Método de las medias móviles

Usando medias móviles de órdenes adecuados, podemos eliminar las variaciones estacionales, cíclicas y aleatorias, obteniendo por tanto la tendencia secular.

Las desventajas del método son la pérdida de los datos iniciales y finales de la serie y el hecho de que cuanto mayor es el orden de las medias, mayor información se pierde, por lo que habrá que mantener un cierto equilibrio.

Ejemplo 3.16 *En la siguiente tabla se muestra el cálculo de la tendencia secular utilizando medias móviles de orden 3* ($\hat{Y}_3$) *y 4* ($\hat{Y}_4$) *respectivamente:*

t	Y	$\hat{Y}_3 = T$	$\hat{Y}_4$	$\hat{\hat{Y}}_4 = T$
1952	$2'4$	–		–
1953	$3'4$	$3'17$	$3'40$	–
1954	$3'7$	$3'73$	$4'10$	$3'75$
1955	$4'1$	$4'33$	$4'57$	$4'33$
1956	$5'2$	$4'87$	$5'05$	$4'81$
1957	$5'3$	$5'37$	$5'52$	$5'28$
1958	$5'6$	$5'63$	$5'77$	$5'64$
1959	6	$5'93$	$5'72$	$5'74$
1960	$6'2$	$5'77$	$5'55$	$5'63$
1961	$5'1$	$5'40$	$5'35$	$5'45$
1962	$4'9$	$5'07$	$5'25$	$5'30$
1963	$5'2$	$5'30$	$5'72$	$5'48$
1964	$5'8$	6		–
1965	7	–		–

□

3.7.3. Método de mínimos cuadrados

Este método se basa en el ya conocido método de los mínimos cuadrados, pues una serie temporal no es más que un caso de variable bidimensional.

Si los valores de las variables son muy grandes entonces los coeficientes con los que trabajamos son elevados. Cuando la variable tiempo, t, toma valores consecutivos formando una serie de salto constante e igual a la unidad, (lo que ocurre en la mayoría de las ocasiones), puede sustituirse por otra, t', que se obtenga de ella mediante un sencillo cambio de origen. La técnica de simplificación a seguir es análoga en los dos casos posibles:

1. Si el número de valores de t es *impar* entonces el cambio es $t' = t - \bar{t}$.

2. Si el número de valores de t es *par* entonces el cambio es $t' = 2(t - \bar{t})$.

En cualquiera de los dos casos anteriores se verifica que:

$$\sum_{i=1}^{N} t'_i = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{N} {t'_i}^3 = 0$$

con lo que el sistema de ec. normales para obtener los parámetros a y b de una recta $y = a + bx$ de tendencia estaría formado por dos ecuaciones con una incógnita cada una:

$$\sum_{i=1}^{N} t'_i y_i = b \sum_{i=1}^{N} {t'_i}^2 \qquad \text{y} \qquad \sum_{i=1}^{N} y_i = aN$$

Además, se puede calcular el coeficiente de determinación, para saber si el ajuste de tendencia es representativo o no.

Ejemplo 3.17 *Consideremos la serie temporal constituida por los valores 3, 5, 8, 9, 13 y 12 de la variable Y para los años 1960 a 1965 respectivamente. Calcular los valores de tendencia por el método de los mínimos cuadrados y comprobar si son representativos.*

t_i	y_i	t'_i	$t'_i y_i$	t'^2_i	y_i^2	$y_i^* = T$	e_i
1960	3	-5	-15	25	9	$3'3$	$-0'3$
1961	5	-3	-15	9	25	$5'3$	$-0'3$
1962	8	-1	-8	1	64	$7'3$	$0'7$
1963	9	1	9	1	81	$9'3$	$-0'3$
1964	13	3	39	9	169	$11'3$	$1'7$
1965	12	5	60	25	144	$13'3$	$-1'3$
	50	0	70	70	492	$49'8$	

$$\Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} 70 & = & 70b \\ 50 & = & 6a \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & 1 \\ a & = & 8'3 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad y^* = t' + 8'3$$

Como $\sigma_e^2 = 1'16$ y $\sigma_y^2 = 12'61$ entonces $R^2 = 1 - \dfrac{1'16}{12'61} = 0'908$ (próximo a 1), lo que permite afirmar que los valores de tendencia calculados son representativos. □

Este tercer método permite realizar "predicciones" en el futuro, siempre que la línea de ajuste sea representativa ($R^2 \approx 1$) y se limite a un futuro próximo.

Ejemplo 3.18 *Utilizando los datos del ejemplo 3.17, predecir el valor de Y para el año 1968:*

$$t' = 2(1968 - 1962'5) = 11 \qquad \Longrightarrow \qquad y^* = 11 + 8'3 = 19'3$$

□

3.7.4. Método de semipromedios

Consiste en separar los datos en 2 partes (iguales preferiblemente) y promediar los datos en cada uno de los 2 grupos, obteniendo así dos puntos (t_1, y_1) y (t_2, y_2). La linea de tendencia se halla entonces haciendo pasar una recta por los 2 puntos calculados:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1} \cdot (t - t_1)$$

Ejemplo 3.19 *Utilizar el método de los semipromedios para calcular los valores de tendencia de la serie temporal del ejemplo 3.17.*

Grupo	t_i	y_i	$\bar{y}$	Punto	$y_i^* = T$
	1960	3			$3'3$
1	1961	5	$5'3$	$(1961, 5'3)$	$5'3$
	1962	8			$7'3$
	1963	9			$9'3$
2	1964	13	$11'3$	$(1964, 11'3)$	$11'3$
	1965	12			$13'3$

siendo $y^* = 5'3 + 2(t - 1961)$ la línea de tendencia obtenida a partir de los puntos (1961,5'3) y (1964,11'3). □

3.8. Estimación de la variación estacional

Existen muchos métodos para calcular la variación estacional de una serie temporal, sin embargo, la mayoría se basan en el mismo principio: aislar la variación estacional mediante la eliminación previa de las otras componentes.

Vamos a presenta dos métodos para la hipótesis multiplicativa $Y = T \cdot E \cdot C \cdot A$ donde la eliminación de las componentes pasa por ir dividiendo la expresión anterior por las componentes aisladas. Además, presentaremos un método para la hipótesis aditiva $Y = T + E + C + A$, análogo a los anteriores, pero restando componentes.

En los tres casos, determinaremos unas medidas de la variación estacional *los índices de variación estacional* (I_E) y las *diferencias de variación estacional* (D_E), asociadas a cada estación o momento de repetición anual. Estas medidas se utilizan para desestacionalizar la serie, eliminando esta componente.

3.8.1. Método de la media móvil en porcentajes

El método de la media móvil en porcentajes nos permite identificar la variación estacional de una serie temporal, procediendo de la siguiente manera:

1. Dada la serie cronológica (por meses, estaciones, trimestres, etc.) en varios años, se calcula la tendencia mediante el método de medias móviles cuyo orden coincida con el número de estaciones o periodos (orden 12 para meses, orden 4 para estaciones o trimestres, etc.). Si el orden de la media móvil es un número par, entonces la centramos.

2. El promedio móvil calculado sirve para eliminar las variaciones estacionales y las accidentales. Por lo tanto, dividiendo los datos originales ($Y = T \cdot E \cdot C \cdot A$) entre los calculados en el primer paso ($T \cdot C$), obtenemos conjuntamente las variaciones estacional y accidental ($E \cdot A$).
$$\frac{Y}{T \cdot C} = \frac{T \cdot E \cdot C \cdot A}{T \cdot C} = E \cdot A$$

3. Por ultimo, y para eliminar la componente accidental, basta con calcular las medias aritméticas de los valores obtenidos en el paso anterior, referidas a cada estación o periodo.

Los valores obtenidos representan la variación estacional y su media debe ser uno. Cuando no lo sea, se recomienda normalizarlos, de manera que la nueva media sea exactamente uno. Estos últimos valores obtenidos, expresados en tantos por cien, se denominan índices de variación estacional (I_E) y representan el porcentajes sobre la media de los valores estacionales. Es decir, si I_E es mayor del 100 % entonces, en esa estación, el valor es superior a la tendencia y, en caso contrario, es inferior.

Ejemplo 3.20 *Calcular los índices de variación estacional de la serie de datos relativos a ventas, obtenida en un estudio realizado durante 5 años, y que se recoge en la siguiente tabla:*

	Año 1	*Año 2*	*Año 3*	*Año 4*	*Año 5*
Primavera	2	$2'2$	$2'2$	$2'4$	$2'5$
Verano	$3'1$	3	$3'5$	$3'6$	$3'6$
Otoño	$2'6$	$2'8$	$4'3$	$4'5$	$4'9$
Invierno	$1'8$	2	$2'1$	$2'2$	$2'3$

Para calcular los índices de variación estacional, seguimos los pasos del método de la media móvil en porcentajes:

1. Calculamos $T \cdot C$ (eliminamos $E \cdot A$) utilizando medias móviles de orden 4 que al centrarlas se obtiene:

$T \cdot C$	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	–	$2'43$	$2'81$	$3'13$	$3'25$
Verano	–	$2'48$	$3'01$	$3'16$	$3'31$
Otoño	$2'40$	$2'50$	$3'05$	$3'19$	–
Invierno	$2'41$	$2'56$	$3'09$	$3'20$	–

2. Dividimos los datos de la tabla original por los de la que hemos obtenido en el paso anterior para obtener $E \cdot A$.

$E \cdot A$	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	–	$0'91$	$0'78$	$0'77$	$0'77$
Verano	–	$1'21$	$1'16$	$1'14$	$1'09$
Otoño	$1'08$	$1'12$	$1'41$	$1'41$	–
Invierno	$0'75$	$0'78$	$0'68$	$0'69$	–

3. Haciendo media aritméticas por filas eliminamos A obteniendo la variación estacional (sin normalizar). Por último, calculamos los índices de variación estacional como simples proporciones.

	E	I_E
Primavera	$0'81$	$\frac{100}{3'94/4} \cdot 0'81 = 81'97\,\%$
Verano	$1'15$	$\frac{100}{3'94/4} \cdot 1'15 = 116'84\,\%$
Otoño	$1'26$	$\frac{100}{3'94/4} \cdot 1'26 = 127'66\,\%$
Invierno	$0'72$	$\frac{100}{3'94/4} \cdot 0'72 = 73'53\,\%$
	3,94	

El valor obtenido para estos índices mide la influencia de la variación estacional sobre un nivel medio de ventas, es decir, que en primavera descienden las ventas un 18 % aproximadamente, se eleva casi un 17 % y un 28 % respectivamente en verano y en otoño, y vuelven a descender más de un 26 % en invierno. □

3.8.2. Método del porcentaje medio

El método del porcentaje medio nos permite calcular los índices de variación estacional de una serie temporal con el objetivo de poder desestacionalizar la serie. Para ello, procederemos de la siguiente manera:

1. Expresamos cada dato de cada periodo (mes, estación, trimestre, etc.) como porcentajes del promedio anual.

2. Se calcula la media aritmética de los porcentajes obtenidos para un mismo periodo en el paso anterior. De esta forma se obtienen los índices de variación estacional.

3. Si la media de los índices obtenidos en el paso anterior no es 100, entonces debemos ajustarlos (normalización) dividiendo cada uno de ellos, por la media. Por ejemplo habría que ajustarlos si la suma de los índices, obtenidos en el paso anterior, no corresponde al total teórico, es decir, 1200 para meses, 400 para estaciones o trimestres, etc.

Ejemplo 3.21 *Calcular los índices de variación estacional de la serie temporal del ejemplo 3.20 de la página 130 utilizando el método del porcentaje medio.*

Para ello, seguimos los siguientes pasos:

1. Calculamos las medias anuales:

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Media	$2'375$	$2'5$	$3'025$	$3'175$	$3'325$

2. Calculamos los porcentajes y la media de los mismos o índice de variación estacional

	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	I_E
Primavera	$84'21\,\%$	$88'00\,\%$	$72'73\,\%$	$75'59\,\%$	$75'19\,\%$	$79'144\,\%$
Verano	$130'53\,\%$	$120\,\%$	$115'70\,\%$	$113'39\,\%$	$108'27\,\%$	$117'578\,\%$
Otoño	$109'47\,\%$	$112\,\%$	$142'15\,\%$	$141'73\,\%$	$143'37\,\%$	$130'544\,\%$
Invierno	$75'79\,\%$	$80\,\%$	$69'42\,\%$	$69'29\,\%$	$69'17\,\%$	$72'734\,\%$
						400

En este caso no es necesario ajustar los índices puesto que su suma (400) corresponde al total teórico. □

Ejemplo 3.22 *Calcular los índices de variación estacional para los dos años observados por periodos mensuales.*

La siguiente tabla recoge los resultados obtenidos al aplicar los distintos pasos del método:

	Año 1	Año 2	Año 1	Año 2	Media			I_E
Enero	1	3	50 %	100 %	75 %	$75 \cdot (1200/1196)$	=	$75'25\,\%$
Febrero	3	4	150 %	133 %	141 %	$141 \cdot (1200/1196)$	=	$141'47\,\%$
Marzo	0	2	0 %	66 %	33 %	$33 \cdot (1200/1196)$	=	$33'11\,\%$
Abril	2	4	100 %	133 %	116 %	$116 \cdot (1200/1196)$	=	$116'39\,\%$
Mayo	1	3	50 %	100 %	75 %	$75 \cdot (1200/1196)$	=	$75'25\,\%$
Junio	4	6	200 %	200 %	200 %	$200 \cdot (1200/1196)$	=	$200'67\,\%$
Julio	1	1	50 %	33 %	41 %	$41 \cdot (1200/1196)$	=	$41'14\,\%$
Agosto	3	2	150 %	66 %	108 %	$108 \cdot (1200/1196)$	=	$108,36\,\%$
Septiembre	0	1	0 %	33 %	16 %	$16 \cdot (1200/1196)$	=	$16,05\,\%$
Octubre	2	3	100 %	100 %	100 %	$100 \cdot (1200/1196)$	=	$100'34\,\%$
Noviembre	1	2	50 %	66 %	58 %	$58 \cdot (1200/1196)$	=	$58,19\,\%$
Diciembre	6	5	300 %	166 %	233 %	$233 \cdot (1200/1196)$	=	$233'78\,\%$
Media	2	3						
Suma			1200 %	1200 %	1192 %			1200 %

Obsérvese que, en este ejemplo, para obtener los índices de variación estacional, ha sido necesario ajustar las medias de los porcentajes, puesto que no sumaban 1200 (total teórico). □

3.8.3. Estimación de la variación estacional para el modelo aditivo

Los índices de variación estacional, necesarios para la desestacionalización de una serie temporal, no son aplicables cuando consideramos la hipótesis aditiva ($Y = T+E+C+A$). En estos casos, definimos una medida equivalente que denominamos *diferencias de variación estacional*, y que denotamos por D_E. Para ello, aplicaremos el *método de la diferencia a la tendencia*, de la siguiente manera:

1. Calculamos la tendencia (T) por cualquiera de los métodos ya estudiados.
2. A cada dato de la serie le restamos su correspondiente valor de la tendencia:
$$Y - T = E + C + A$$
3. Para eliminar el resto de componentes ($C + A$), se promedian los valores correspondientes a los mismos periodos.
4. Los valores obtenidos deben sumar 0, y si no es así, entonces hay que ajustarlos. Para ello, se calcula la media y se le resta a cada uno de los valores, obteniendo la diferencia de variación estacional (D_E).

En este caso, la interpretación es similar a los índices de variación estacional, pero tomando el cero como centro. Por ejemplo, si D_E es positivo entonces, en ese punto, el valor de la serie es superior a la tendencia. Por el contrario, si D_E se negativo indica que el correspondiente valor de la serie es inferior a la tendencia.

Ejemplo 3.23 *Calcular las diferencias de variación estacional de la serie temporal del ejemplo 3.20 de la página 130.*

En primer lugar, estimamos la tendencia de la serie de ventas (V) utilizando, por ejemplo, el método de los mínimos cuadrados. Para ello, será necesario asignar un número a cada periodo de tiempo (t). Comenzaremos asignado un 1 a la primavera (P) del año 1, y consecutivamente al resto de periodos de tiempo, hasta asignar un 20 al invierno (I) del año 5.

	Año 1				Año 2				...	Año 5			
	P	V	O	I	P	V	O	I	...	P	V	O	I
t	1	2	3	4	5	6	7	8	...	17	18	19	20
V	2’0	3’1	2’6	1’8	2’2	3’0	2’8	2’0	...	2’5	3’6	4’9	2’3

La recta de regresión que se ajusta a los datos de la tabla anterior es

$$V = 0,0617 \cdot t + 2,2326$$

y determina la tendencia (T) que mostramos en la siguiente tabla:

T	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	$2'29$	$2'54$	$2'79$	$3'03$	$3'28$
Verano	$2'36$	$2'60$	$2'85$	$3'10$	$3'34$
Otoño	$2'42$	$2'66$	$2'91$	$3'16$	$3'40$
Invierno	$2'48$	$2'73$	$2'97$	$3'22$	$3'47$

En segundo lugar, a cada dato de la la serie le restamos su correspondiente valor de tendencia y obtenemos los siguientes valores:

$E+C+A$	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	$-0'29$	$-0{,}34$	$-0'59$	$-0'63$	$-0'78$
Verano	$0'74$	$0'40$	$0'65$	$0'50$	$0'26$
Otoño	$0'18$	$0'14$	$1'39$	$1'34$	$1'50$
Invierno	$-0'68$	$-0'73$	$-0'87$	$-1'02$	$-1'17$

Para eliminar el resto de componentes, se promedian los valores correspondientes a los mismos periodos.

	D_E
Primavera	$-0,53$
Verano	$0,51$
Otoño	$0,91$
Invierno	$-0,89$

Los valores obtenidos suman 0, de manera que no será necesario normalizarlos y, por lo tanto, corresponden a las diferencias de variación estacional. Los valores negativos obtenidos para la primavera y el invierno, indican que, en estas estaciones, el valor de la serie es inferior a la tendencia. Por el contrario, los valores positivos obtenidos para el verano y el otoño indican que los valores de la serie están por encima de la tendencia. □

3.8.4. Desestacionalización de una serie temporal

La componente estacional tiene interés, por sí misma, pues nos permite conocer la evolución a corto plazo de la serie temporal. Pero, además, es interesante llegar al conocimiento de la serie temporal una vez eliminadas las variaciones estacionales, y este proceso se denomina *desestacionalización*.

Una de las aplicaciones de la desestacionalización es el cálculo de la tendencia real. La eliminación de la componente estacional se utiliza para recalcular la tendencia y obtener una mejor aproximación de la trayectoria real de la serie.

Para desestacionalizar una serie temporal, y dependiendo de la hipótesis elegida (aditiva o multiplicativa), se procede de la siguiente manera:

1. Hipótesis multiplicativa: Se divide cada dato de la serie por el índice de variación estacional:

$$T \cdot C \cdot A = \frac{Y}{I_E}$$

2. Hipótesis aditiva: A cada dato de la serie se le resta la diferencia de variación estacional:

$$T + C + A = Y - D_E$$

Ejemplo 3.24 *Desestacionalizar la serie temporal del ejemplo 3.20 de la página 130 para recalcular su tendencia, suponiendo la hipótesis multiplicativa.*

En el ejemplo 3.20 se determina la estacionalidad (E) que figura en la siguiente tabla:

E	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	$0'820$	$0'820$	$0'820$	$0'820$	$0'820$
Verano	$1'168$	$1'168$	$1'168$	$1'168$	$1'168$
Otoño	$1'277$	$1'277$	$1'277$	$1'277$	$1'277$
Invierno	$0'735$	$0'735$	$0'735$	$0'735$	$0'735$

Para desestacionalizar la serie, dividimos los datos de la tabla original por los valores anteriores:

$T \cdot C \cdot A$	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	$2'44$	$2'68$	$2'68$	$2'93$	$3'05$
Verano	$2'65$	$2'57$	$3'00$	$3'08$	$3'08$
Otoño	$2'04$	$2'19$	$3'37$	$3'53$	$3'84$
Invierno	$2'45$	$2'72$	$2'86$	$2'99$	$3'13$

Esta última tabla corresponde a las cifras de ventas obtenidas por la empresa, prescindiendo de las variaciones estacionales.

Ahora, para calcular la tendencia real, recalculamos la tendencia a los datos desestacionalizados de la tabla anterior, aplicando cualquier método, por ejemplo el de mínimos cuadrados. Para ello, será necesario asignar un número a cada periodo de tiempo (t). Comenzaremos asignado un 1 a la primavera (P) del año 1, hasta asignar un 20 al invierno (I) del año 5.

	Año 1				Año 2				...	Año 5			
	P	V	O	I	P	V	O	I	...	P	V	O	I
t	1	2	3	4	5	6	7	8	...	17	18	19	20
V	2'44	2'65	2'04	2'45	2'68	2'57	2'19	2'72	...	3'05	3'08	3'84	3'13

La recta de regresión que se ajusta a los datos de la tabla anterior es

$$V = 0,0578 \cdot t + 2,2567$$

y determina la tendencia (T) que mostramos en la siguiente tabla:

T	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	$2'31$	$2'55$	$2'78$	$3'01$	$3'24$
Verano	$2'37$	$2'60$	$2'83$	$3'07$	$3'30$
Otoño	$2'43$	$2'66$	$2'89$	$3'12$	$3'35$
Invierno	$2'49$	$2'72$	$2'95$	$3'18$	$3'41$

Obsérvese que estos valores de la tendencia real difieren de los valores de tendencia obtenidos en el ejemplo anterior, ya que en este caso no están afectados por la componente estacional. □

3.9. Estimación de las variaciones cíclicas

Una vez calculadas las variaciones Estacionales y la Tendencia, restando o dividiendo los datos originales, por estos, obtenemos:

Hipótesis multiplicativa: $$\frac{Y}{T \cdot E} = \frac{T \cdot E \cdot C \cdot A}{T \cdot E} = C \cdot A$$

Hipótesis aditiva: $$Y - (T + E) = (T + E + C + A) - (T + E) = C + A$$

Para aislar la componente cíclica, basta calcular un promedio móvil apropiado de unos pocos meses de duración (digamos 3, 5 ó 7 meses, de manera que no sea necesario el centrado). De esta forma se suavizan las variaciones accidentales para dejar sólo las variaciones cíclicas.

Si ocurre una periodicidad de ciclos, se puede construir *índices cíclicos* de manera parecida a como se han hecho los índices estacionales.

3.10. Estimación de las variaciones aleatorias

Para aislar las variaciones aleatorias basta con restar o dividir por el resto de las componentes ya calculadas T, E y C según consideremos la hipótesis aditiva o multiplicativa.

Hipótesis multiplicativa: $$\frac{Y}{T \cdot E \cdot C} = \frac{T \cdot E \cdot C \cdot A}{T \cdot E \cdot C} = A$$

Hipótesis aditiva: $$Y - (T + E + C) = (T + E + C + A) - (T + E + C) = A$$

En la práctica se observa que las variaciones aleatorias tienden a tener pequeña magnitud y a seguir el esquema de una distribución normal; es decir, las pequeñas desviaciones ocurren con gran frecuencia, mientras que grandes desviaciones ocurren con pequeña frecuencia.

Ejemplo 3.25 *Descomponer la serie temporal del ejemplo 3.20 de la página 130 en sus cuatro componentes, suponiendo la hipótesis multiplicativa.*

En el ejemplo 3.24 de la página 135 se calculan tanto la tendencia como las variaciones estacionales. Si tomamos los datos desestacionalizados ($T \times C \times A$) que proporcionaba este ejemplo y los dividimos entre los datos de tendencia corregida, obtenemos una nueva tabla con las componentes C y A:

$C \cdot A$	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	$1'05$	$1'05$	$0'97$	$0'97$	$0'94$
Verano	$1'12$	$0'99$	$1'06$	$1'00$	$0'93$
Otoño	$0'84$	$0'82$	$1'16$	$1'13$	$1'14$
Invierno	$0'98$	$1'00$	$0'97$	$0'94$	$0'92$

Si utilizamos medias móviles, por ejemplo, de orden 3, obtenemos la componente cíclica:

C	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	–	$1'01$	$1'01$	$0'98$	$0'94$
Verano	$1'00$	$0'95$	$1'06$	$1'04$	$1'01$
Otoño	$0'98$	$0'94$	$1'06$	$1'02$	$1'00$
Invierno	$0'96$	$0'93$	$1'04$	$1'00$	–

Y, finalmente, para aislar la componente aleatoria (A) basta dividir, en cada periodo de tiempo, los valores originales de la serie entre el producto de los valores calculados de las componentes ($T \cdot E \cdot C$), o de manera más sencilla, dividir, simplemente, los valores de la primera tabla de este ejemplo $(C \cdot A)$, por los correspondientes valores de la segunda (C).

A	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5
Primavera	–	$1'05$	$0'96$	$0'99$	$1'00$
Verano	$1'11$	$1'03$	$0'99$	$0'97$	$0'93$
Otoño	$0'86$	$0'88$	$1'10$	$1'10$	$1'15$
Invierno	$1'03$	$1'08$	$0'94$	$0'94$	–

Obsérvese que los valores de las componentes C y A son próximos a 1, lo que indica que tienen muy poco efecto en esta serie temporal, estudiada bajo la hipótesis multiplicativa. Análogamente, cuando consideremos la hipótesis aditiva, valores de las componentes próximos a cero indicarán la poca influencia de esa componente en la serie temporal.

□

3.11. Relación de problemas

1. Consideramos la variable X que toma los valores 22, 28, 34, 25 y 41 en cinco periodos de tiempo consecutivos. Se pide:

    a) Calcular la serie de índices simples elementales con base el periodo de menor valor.

    b) Calcular la serie de índices simples en cadena.

    c) Calcular la serie de índices simples elementales tomando como base un periodo ficticio cuyo valor sea la media de los valores de la variable en esos 5 años.

2. El porcentaje de la población mayor de 65 años sobre el total de la población en siete de los distritos de la ciudad de Málaga es: 8 , 11'3 , 9'63 , 6'78 , 7'32 , 8'96 y 6'8. Determinar el índice simple más adecuado a este caso y calcular la serie de índices correspondiente.

3. Comprobar que son correctos los índices simples calculados para comparar la evolución del número de franceses y noruegos residentes en la ciudad de Málaga entre los años 1956 y 1958, e interpretar el resultado.

Año	Franceses	Noruegos	I_F	I_N
1956	1035	44	100	100
1957	1230	56	$118'84$	$127'27$
1958	1351	65	$130'53$	$147'72$

4. Consideramos los valores 1, 2, 5, 8, 10, 15, 18, 20, 21, 24, 25, 28, 30, 32, 36, 45, 89, 99, 100 y 273 de una variable en 20 instantes de tiempo. Sin usar calculadora, obtener los índices simples elementales con base el instante 8 cuyo valor correspondiente es 20.

5. Consideramos los valores 1, 1'2, 1'8, 2'4, 4'8, 2'4, 1'2, 0'3, 0'1, 10, 8, 8, 10, 125, 1250 de una variable en 15 instantes de tiempo consecutivos. Sin usar calculadora, obtener los índices simples en cadena.

6. Sin utilizar calculadora, determinar los errores cometidos en la elaboración de esta serie de índices simples y justificar la respuesta.

variable	5	6	6	12	0	10	16	8	4	10
ISE	100	120	100	240	0	0	320	160	120	200
ISC	100	160	100	240	0	0	160	150	50	250

7. Consideramos la siguiente serie de números índices simples correspondientes a los valores de una variable X en diez periodos de tiempo (t).

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
IS	75	90	100	105	120	125	112	134	180	240

Obtener los valores de la variable X en cada uno de los siguientes casos:

a) Los índices son elementales y el valor de la variable en el periodo $t = 3$ es 1350.

b) Los índices son elementales y el valor de la variable en el periodo $t = 6$ es 28'1.

   c) Los índices son en cadena y el valor de la variable en el periodo $t = 3$ es 1350.

8. Los índices simples elementales y en cadena están íntimamente relacionados. De hecho, existe una fórmula para calcular unos en función de los otros. Se pide:

   a) Determinar una fórmula que permita calcular los índices elementales en función de los índices en cadena.

   b) Consideremos que los datos del ejercicio 7 corresponden a una serie de índices simples en cadena. A partir de ella, calcular la serie de índices elementales utilizando la fórmula obtenida en el apartado anterior.

   c) Determinar una fórmula que permita calcular los índices en cadena en función de los índices elementales.

   d) Consideremos que los datos del ejercicio 7 corresponden a una serie de índices simples elementales. A partir de ella, calcular la serie de índices en cadena utilizando la fórmula obtenida en el apartado anterior.

9. El precio de un kilo de azúcar entre los años 1975 y 1982 viene dado en la siguiente tabla:

Año	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
Precio	25	29	34	38	42	45	70	77

   Se pide:

   a) Calcular la relación de precios tomando 1975 como año base, explicando los resultados.

   b) Calcular la relación de precios tomando 1978 como año base y 1982 como año dado.

   c) Calcular la relación de precios tomando como base en cada periodo de tiempo el valor que toma la variable en el periodo inmediatamente anterior (número índice simple en cadena).

10. Consideremos cuatro productos de una industria, cuyos precios de venta y producción son los siguientes:

	1979		1988	
Producto	Precio	Cantidad	Precio	Cantidad
A	225	200	314	320
B	75	15	82	21
C	68	10	75	14
D	109	34	120	50

   Se pide:

   a) Para cada uno de los productos, determine el índice de valor para 1988 con base en 1979.

   b) Determine el índice de valor, de todos los productos, para 1988 con base en 1979.

   c) Determine los índices de precios de Laspeyres, de Paasche, de Marshall-Edgeworth y de Fisher para 1988 tomando como base el año 1979.

11. Índices complejos sin ponderar. La siguiente tabla muestra los precios y las cantidades de tres artículos para los años 1980 a 1984

	A		B		C	
t	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades
1980	2	10	5	12	10	3
1981	2	12	6	10	11	2
1982	3	15	6	5	12	3
1983	4	20	7	6	12	1
1984	4	18	8	5	13	2

Se pide:

a) Calcular los índices de precios, por agregación simple, de estos productos, tomando como base el año 1980.

b) Calcular los índices de cantidad, por agregación simple, de estos productos, tomando como base el año 1980.

c) Calcular los índices de precios, por la media aritmética simple, de estos productos, tomando como base el año 1980.

d) Calcular los índices de cantidad, por la media aritmética simple, de estos productos, tomando como base el año 1980.

12. Índices complejos ponderados. Con los datos de la tabla del ejemplo 11 de la página 141, calcular:

a) Los índices de precios, con base 1980, por el método de agregación ponderada, y tomando como pesos las cantidades para 1980.

b) Los índices de precios, con base 1982, por el método de promedio ponderado, y tomando como pesos las cantidades para 1982.

13. Índices de precios. Con los datos de la tabla del ejemplo 11 de la página 141, calcular:

a) El número índice de precios de Laspeyres para 1984 tomando como base el año 1980.

b) El número índice de precios de Paasche para 1984 tomando como base el año 1980.

c) El número índice ideal de Fisher para 1984 tomando como base el año 1980.

d) El número índice de precios de Marshall-Edgeworth para 1984 tomando como base el año 1980.

14. Cambio de periodo base. La siguiente tabla muestra los precios y las cantidades de tres artículos para los años 1990 a 1994

	A		B		C	
t	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades
1990	2	10	5	12	3	10
1991	2	12	6	10	2	11
1992	3	20	7	5	3	12
1993	5	15	7	6	1	13
1994	4	18	8	4	2	14

Se pide:

a) Calcular los índices de Laspeyres, con base 1990.

b) Calcular los índices de Laspeyres, con base 1992, a partir de los datos obtenidos en el apartado anterior.

c) Recalcular los índices de Laspeyres, con base 1992, a partir de los datos originales y compararlos con los que se han obtenido en el apartado anterior.

d) Repetir el proceso con los índices de Paasche, Marshall-Edgeworth y Fisher.

15. Renovación y empalme. La siguiente tabla muestra los precios y las cantidades de tres artículos para los años 1990 a 1992

	A		B		C	
t	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades
1990	2	10	5	12	3	10
1991	2	12	6	10	2	11
1992	3	20	7	5	3	12

Se pide:

a) Calcular los índices de Paasche, con base 1990.

b) Se consideran los siguientes nuevos datos para los años 1993 al 1995:

	A		B		C	
t	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades	Precios	Cantidades
1993	4	25	8	6	4	13
1994	6	20	8	7	2	14
1995	5	22	9	5	3	15

Se pide:

1) Renovar el índice de Paasche tomando 1993 como nuevo año base.

2) Empalmar las dos series de índices

16. Consideremos que el salario medio por hora en unidades monetarias de los trabajadores de un determinado sector productivo y los índices de precios de consumo a lo largo de seis años fueron los siguientes:

Años	Salarios/hora	Índice de precios
1979	52	140
1980	58	162
1981	60	175
1982	63	190
1983	64	200
1984	84	205

Se pide:

a) Estudie la evolución de los salarios/hora en términos reales.

b) Cuantificar la variación en ese periodo del salario/hora en unidades monetarias corrientes y en términos reales.

17. Hallar los deflactores implícitos para el producto interior bruto a precios de mercado conociendo los datos de la siguiente tabla:

	Producto interior bruto	
Años	A precios corrientes	A precios constantes de 1980
1980	15209	15209
1981	16980	15171
1982	19567	15356
1983	22235	15633
1984	25121	15925
1985	27930	16282

18. Sabiendo que el IPC del año 1998 respecto del año 1990 es de 135 %, se pide:

    a) Calcule el valor real en 1990 de un producto que costase 1000 pesetas del año 1998.

    b) Calcule el valor real en el año 1998 de un producto que en el año 1990 costaba 1000 pesetas.

19. En el año 2006 compré un coche por valor de 24.000 euros. Suponiendo verdaderos los siguientes datos del IPC:

$$I_{90/69} = 1000\,\% \qquad I_{90/06} = 75\,\%$$

    ¿Qué le hubiese costado a mi padre (valor real) comprarlo en 1969?

20. La siguiente tabla muestra la población agricultora (en millones) en EE.UU. durante los años 1973-1983.

Año	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
Población	9'47	9'26	8'86	8'25	7'81	8'01	7'55	7'24	7'01	6'88	7'03

    Se pide:

    a) Obtener la media móvil de orden 4 y de orden 5 y representar en una gráfica los promedios conjuntamente con los datos originales.

    b) Calcular la tendencia por el método de los mínimos cuadrados, ajustando una recta y representar gráficamente el resultado junto a los valores originales.

    c) Calcular la tendencia por el método de semipromedios y representar gráficamente el resultado junto a los valores originales. Hacer el ejercicio tomando primero como promedio la media aritmética y repetirlo utilizando la mediana. Sugerencia: Omitir el dato central correspondiente al año 1978 para poder dividir los datos en dos conjuntos con igual número de elementos.

    d) Presentar en una tabla los valores de la tendencia obtenidos en los métodos anteriores y comparar los distintos resultados.

21. La siguiente tabla muestra la producción de energía eléctrica mensual de consumo no industrial, en miles de millones de kilovatios-hora (Kwh), en EE.UU. durante los años 1976-1981.

	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
1976	178'2	156'7	164'2	153'2	157'5	172'6	185'9	185'8	165'0	163'6	169'0	183'1
1977	196'3	162'8	168'6	156'9	168'2	180'2	197'9	195'9	176'0	166'4	166'3	183'9
1978	197'3	173'7	173'2	159'7	175'2	187'4	202'6	205'6	185'6	175'6	176'3	191'7
1979	209'5	186'3	183'0	169'5	178'2	186'7	202'4	204'9	180'6	179'8	177'4	188'9
1980	200'0	188'7	187'5	168'6	175'7	189'4	216'1	215'4	191'5	178'5	178'6	195'6
1981	205'2	179'6	185'4	172'4	177'7	202'7	220'2	210'2	186'9	181'4	175'6	195'6

Se pide:

a) Calcular los índices de variación estacional por el método de media móvil en porcentajes.

b) Calcular los índices de variación estacional por el método de porcentaje medio.

c) Construir una tabla de comparación para los índices estacionales hallados en los apartados anteriores.

d) Desestacionalizar los datos haciendo uso de los índices de variación estacional obtenidos por el método de la media móvil en porcentajes.

e) Representar en un mismo gráfico los datos originales y los desestacionalizados para poder comparar.

f) Calcular la tendencia por el método de los mínimos cuadrados.

g) Calcular las variaciones cíclica y accidental.

22. Las siguientes cifras corresponden a los matrimonios celebrados en España durante el periodo 1959-1962.

		1959	1960	1961	1962
1^{er}.	cuatrimestre	66	62	63	61
2^{o}.	cuatrimestre	77	77	78	78
3^{er}.	cuatrimestre	100	97	96	97

Se pide:

a) Calcular las componentes de la serie temporal considerando la hipótesis multiplicativa.

b) Calcular las componentes de la serie temporal considerando la hipótesis aditiva.