Variables Aleatorias. Distribuciones de Probabilidad

Variables Aleatorias. Distribuciones de Probabilidad

Departamento Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Curso 2015-2016

Introducción

Dado un experimento aleatorio, al conjunto de sucesos elementales le hemos llamado espacio muestral (E). Supongamos que es discreto.
A cada suceso elemental podemos asociarle un número real de muchas formas diferentes. Cada una será una variable aleatoria.

Por ejemplo, al lanzar una moneda 4 veces, el espacio muestral es: $E = \{CCCC, CCCF, CCFC, CCFF, CFCC, CFCF, CFFC, CFFF, FCCC, FCCF, FCFC, FCFF, FFCC, FFCF, FFFC, FFFF\}$ donde $C =$'Cara' y $F =$'Cruz.

- 'Número de caras obtenidas'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 y a $FCFC$ un 2.
- 'Número de caras antes de la primera aparición de cruz'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 y a $FCFC$ un 0.
- 'Cada cara se valora multiplicada por el lugar de aparición'. Al suceso $CFFF$ le corresponde un 1 (1+0+0+0) y a $FCFC$ un 6 (0+2+0+4).

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico, es decir un espacio muestral E, una álgebra o σ-álgebra $\mathcal{A}$ y una probabilidad P.

Definición

Decimos que X es una **variable aleatoria** *sobre E, a una aplicación de $E \to \mathbb{R}$ que verifique la propiedad:*

$$\textit{Para todo } x \in \mathbb{R}, \ \textit{el conjunto } \{w \in E / X(w) \leq x\} \in \mathcal{A}$$

Definición

Llamamos **soporte** *de la variable aleatoria X (S_X), al conjunto de valores reales que puede tomar.*

Ejemplo

Ejemplo

Dado el experimento aleatorio consistente en lanzar un dado y una moneda y la variable aleatoria ξ: 'valor obtenido en el dado, que se duplica si resulta cara al lanzar la moneda'.

- *Determinar su espacio muestral.*
- *Hallar el aplicado de cada uno de los elementos de E.*
- *Determinar el soporte de X.*

a) E={'1C', '2C', '3C', '4C', '5C', '6C', '1F', '2F', '3F', '4F', '5F', '6F'}

b) X('1C')=2, X('2C')=4, X('3C')=6, X('4C')=8, X('5C')=10, X('6C')=12, X('1F')=1, X('2F')=2, X('3F')=3, X('4F')=4, X('5F')=5, X('6F')=6.

c) El soporte $S_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12\}$

Ejemplo

Ejemplo

Determinar el soporte para:

- *La variable aleatoria 'Número de llamadas recibidas'.*
- *Obtener un número aleatorio x en [0,1). (x=rand(1,1))*
- *Multiplicar 6 por x y sumarle 1. (y=6*x+1)*
- *Quedarte con la parte entera de y. (z=floor(y))*

Ejemplo

Un componente es sustituido cuando se avería o al cabo de 10 años.

- *Determinar el soporte de la v.a. 'Duración del componente'.*
- *Si disponemos de 5 componentes iguales y cada uno sustituye al anterior. Lo mismo para la v.a. 'Duración de los 5 componentes'.*
- *Repetir los anteriores apartados si solo se sustituye por avería.*

Función de distribución

Definición

Dado un espacio probabilístico $(E,\mathcal{A},P)$ *y una variable aleatoria* X*. Definimos la* **función de distribución de la variable aleatoria X** *como una función que verifica:*

1. $\mathbf{F} : \mathbb{R} \to [\mathbf{0},\mathbf{1}]$
2. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\omega \in \mathcal{A}/\mathbf{X}(\omega) \leq \mathbf{x})$

Propiedad

La función de distribución asociada a una variable aleatoria es única y caracteriza a la misma.

Esto es, si conocemos la función de distribución podemos calcular la probabilidad de que la variable aleatoria tome un valor.

Propiedades de la función de distribución

1. $\mathbf{P(X \leq x) = F(x)}$
2. $\mathbf{P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)}$
3. $\mathbf{P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)}$
4. $\mathbf{P(X = a) = F(a) - \lim_{h \to 0^+} F(a - h)}$
5. $\mathbf{0 \leq F(x) \leq 1}$
6. $\mathbf{F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0}$
7. $\mathbf{F(\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1}$
8. **$\mathbf{F(x)}$ es monótona no decreciente**, es decir: $a < b \Rightarrow F(a) \leq F(b)$
9. **$\mathbf{F(x)}$ es continua por la derecha**, es decir, $\lim_{h \to 0^+} F(x+h) = F(x)$

Ejemplo

Ejemplo

La función de distribución $F(x)$ de una v.a. discreta ξ viene dada por:

x	$(-\infty,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$	$[5,6)$	$[6,8)$	$[8,10)$	$[10,12)$	$[12,\infty)$
$F(x)$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{9}{12}$	$\frac{10}{12}$	$\frac{11}{12}$	1

Hallar:
1) $P(\xi \leq 3.5)$, 2) $P(\xi \leq 7)$, 3) $P(\xi > 2)$, 4) $P(\xi \geq 2)$, 5) $P(3 < \xi \leq 8)$.

1) $P(\xi \leq 3.5)$=F(3.5)=$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.
2) P($\xi \leq 7$)=F(7)=$\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.
3) P($\xi > 2$)=1-F(2)=$\frac{3}{4}$.
4) P($\xi \geq 2$) $= P(\xi = 2) + P(\xi > 2) = (F(2) - \lim_{h\to 0} F(2-h)) + \frac{3}{4} =$
$= (\frac{3}{12} - \frac{1}{12}) + \frac{3}{4} = \frac{11}{12}$
5) P($3 < \xi \leq 8$)=F(8)-F(3)=$\frac{10}{12} - \frac{4}{12}$=0.5.
NOTA: La variable ξ es la de un ejemplo anterior con lanzamiento de moneda y dado.

Tipos de variables aleatorias

Dependiendo de como sea el conjunto soporte podemos distinguir varios tipos de variables aleatorias.

$$\text{Tipos de variables aleatorias.} \left\{ \begin{array}{l} \textit{Discretas} \left\{ \begin{array}{l} \text{Soporte finito} \\ \text{Soporte numerable} \end{array} \right. \\ \textit{Continuas} \\ \textit{Mixtas} \end{array} \right.$$

Finita: Lanzamiento de un dado. Puntos obtenidos por un equipo de fútbol en una jornada ($S_P = \{0, 1, 3\}$).
Numerable: Días transcurridos hasta realizar un cambio de tarifa de móvil. Número de averías recibidas por un servicio técnico.
Continua: Alcance de una antena. Distancia recorrida por un vehículo en 1 hora. Consumo en litros de combustible en 100Km.
Mixta: a) Distancia alcanzada por un lanzador, si no lo realiza se codifica como -1.

b) Premio obtenido. Se realiza un sorteo entre 10 concursantes, si es seleccionado puede obtener un premio entre 5 y 20.

Variable aleatoria discreta

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio probabilístico asociado a un experimento aleatorio y sea X una variable aleatoria. Diremos que se trata de una **variable aleatoria discreta** *si su soporte es es un conjunto discreto. Es decir, la variable X toma solo un conjunto finito o infinito numerable de valores en $\mathbb{R}$.*

Para este tipo de variable, la forma más simple de definirlas es dar la probabilidad p_i de que tome cada uno de los posible valores x_i de su soporte.

Definición

Definimos la **función de probabilidad** *de una variable aleatoria discreta, mediante:*

$$p(x_i) = P(\omega \in \mathcal{A} / X(\omega) = x_i) = P(X = x_i)$$

Ejemplos

Ejemplo

La función de probabilidad de la variable aleatoria: 'Suma de los valores obtenidos al lanzar 2 dados' es:

x_i	$p(x_i)$		x_i	$p(x_i)$
2	$\frac{1}{36}$		8	$\frac{5}{36}$
3	$\frac{2}{36}$		9	$\frac{4}{36}$
4	$\frac{3}{36}$		10	$\frac{3}{36}$
5	$\frac{4}{36}$		11	$\frac{2}{36}$
6	$\frac{5}{36}$		12	$\frac{1}{36}$
7	$\frac{6}{36}$			

Ejemplo

La función de probabilidad de 'Número de caras' al lanzar 3 monedas es: P(0)=1/8, P(1)=3/8, P(2)=3/8, P(3)=1/8.

Ejemplo para v.a. numerable

Ejemplo

Sea la variable aleatoria 'Lanzar un dado hasta la primera aparición de un 5'. Hallar la función de probabilidad.

P(X=1)=P(sacar 5 a la 1ª)=1/6.
P(X=2)=P(fallar la primera y sacar 5 a la 2ª)=(5/6)(1/6).
P(X=3)=P(fallar 2 veces y sacar 5 a la 3ª)=(5/6)(5/6)(1/6)=
$=(5/6)^2(1/6)$,
...
$\mathbf{P(X=k)=(5/6)^{k-1}(1/6)}$, para $\mathbf{k=1,2,\ldots}$
que es la función de probabilidad.

Propiedades

- **La función de probabilidad caracteriza a la variable aleatoria discreta.**
- Si P es una función de $\mathbb{R}$ en $[0,1]$ que verifica: $\sum_i P(X=x_i)=1$, entonces existe una v.a. que la tiene como función de probabilidad.

Ejemplo

¿Determina la función: $P(X=k)=(2/3)^k(1/3)$ *con* $k=0,1,2,\ldots$, *una función de probabilidad?*

Para todo k, $0 \leq P(X=k) \leq 1$. Veamos si $\sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)=1$.
$\sum_k P(X=k) = P(X=0)+P(X=1)+\ldots = (2/3)^0(1/3)+(2/3)^1(1/3)+$
$+(2/3)^2(1/3)+(2/3)^3(1/3)+\ldots = 1/3+(2/3)(1/3)+(2/3)^2(1/3)+\ldots=$
$= \frac{1/3}{1-2/3} = 1$ luego define una función de probabilidad.

Representación gráfica. Ejemplo.

Tanto la función de probabilidad, como la de distribución de una variable aleatoria pueden ser representadas gráficamente.

Ejemplo

Sea ξ la variable aleatoria 'Número de caras' al lanzar 4 monedas. Hallar:

- *Función de probabilidad.*
- *Función de distribución.*
- *Representar ambas gráficamente.*

$\mathbf{P(0)} = P('FFFF') = \mathbf{1/16}$, $\mathbf{P(1)} = P('CFFF' \cup' FCFF' \cup' FFCF' \cup' FFFC') = \mathbf{4/16}$,
$\mathbf{P(2)} = P('CCFF' \cup' CFCF' \cup' CFFC' \cup' FCCF' \cup' FCFC' \cup' FFCC') = \mathbf{6/16}$,
$\ldots \mathbf{P(3)} = \mathbf{4/16}$, $\mathbf{P(4)} = \mathbf{1/16}$.

Ejemplo-cont

La función de probabilidad expresada como tabla y la La función de distribución $F(x) = P(\xi \leq x)$ quedan:

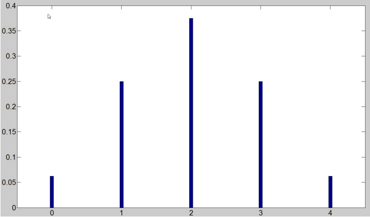
x_i	p_i
0	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$
2	$\frac{6}{16}$
3	$\frac{4}{16}$
4	$\frac{1}{16}$

$$P(X) = \begin{cases} 0 & \frac{1}{16} \\ 1 & \frac{4}{16} \\ 2 & \frac{6}{16} \\ 3 & \frac{4}{16} \\ 4 & \frac{1}{16} \\ \text{Otro} & 0 \end{cases}$$

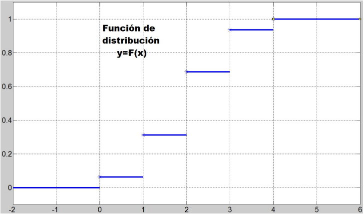
x	$F(x)$
$(-\infty, 0)$	0
$[0, 1)$	$\frac{1}{16}$
$[1, 2)$	$\frac{5}{16}$
$[2, 3)$	$\frac{11}{16}$
$[3, 4)$	$\frac{15}{16}$
$[4, \infty)$	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{16} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{5}{16} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{11}{16} & 2 \leq x < 3 \\ \frac{15}{16} & 3 \leq x < 4 \\ 1 & x \geq 4 \end{cases}$$

Función de probabilidad



Función de distribución



UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Esperanza matemática. Caso discreto

Definición

Se llama **esperanza matemática** *de la variable aleatoria discreta X a:*

$$\mathbf{E(X) = \sum_{x_i \in S_X} x_i P(X = x_i)}$$

En el caso de que el soporte S_X sea un conjunto infinito numerable, será necesario que la serie sea absolutamente convergente, esto es $\sum_{x_i \in S_X} |x_i| P(X = x_i) < \infty$

Ejemplo

Hallar la esperanza matemática del 'Número de caras' al lanzar 4 monedas.

$$E(X) = 0P(0) + 1P(1) + 2P(2) + 3P(3) + 4P(4) = 0\frac{1}{16} + 1\frac{4}{16} + 2\frac{6}{16} + 3\frac{4}{16} + 4\frac{1}{16} = 2$$

Generalización del concepto

Definición

Sea g una función real y X una variable aleatoria llamamos **esperanza de g(x)** *a:*

$$\mathbf{E(g(X)) = \sum_{x_i \in S_X} g(x_i) P(X = x_i)}$$

con la condición de que la serie sea absolutamente convergente: $\sum_{x_i \in S_X} |g(x_i)| P(X = x_i)$

Ejemplo

Si X es la v.a. 'Número de caras' al lanzar 4 monedas. Hallar las esperanzas de: 1) X^2*, 2)* X^3*, 3)* $\operatorname{sen}(\frac{\pi X}{2})$*:*

1) $E(X^2) = 0^2 P(0) + 1^2 P(1) + 2^2 P(2) + 3^2 P(3) + 4^2 P(4) = \frac{1 \cdot 4}{16} + \frac{4 \cdot 6}{16} + \frac{9 \cdot 4}{16} + \frac{16 \cdot 1}{16} = 5$

Ejemplo-cont

2) $E(X^3) = 0^3P(0) + 1^3P(1) + 2^3P(2) + 3^3P(3) + 4^3P(4) =$
$= \frac{1\cdot 4}{16} + \frac{8\cdot 6}{16} + \frac{27\cdot 4}{16} + \frac{64\cdot 1}{16} = 14$

3) $E(\text{sen}\left(\frac{\pi X}{2}\right)) = \text{sen}(0)P(0) + \text{sen}(\frac{\pi}{2})P(1) + \text{sen}(\pi)P(2) +$
$+ \text{sen}(\frac{3\pi}{2})P(3) + \text{sen}(2\pi)P(4) = \frac{4}{16} - \frac{4}{16} = 0$

Ejemplo

Sea ξ la variable aleatoria 'Número de lanzamientos' de un dado hasta la primera aparición de la cara '5'. Hallar $E(\xi)$.

Conocemos que $\mathbf{P(k) = (5/6)^{k-1}(1/6)}$ para k=1,2,..., luego:
$E(X) = 1(1/6) + 2(5/6)(1/6) + 3(5/6)^2(1/6) + 4(5/6)^3(1/6) + \ldots =$
$= \frac{1}{6}[1 + 2(5/6) + 3(5/6)^2 + 4(5/6)^3 + \ldots] = \frac{S}{6}$

$$\begin{array}{lcccl} S & = & 1 & +2(5/6) & +3(5/6)^2 + 4(5/6)^3 + \ldots \\ \frac{5}{6}S & = & & +1(5/6) & +2(5/6)^2 + 3(5/6)^3 + \ldots \\ \hline S - \frac{5}{6}S & = & 1 & +\ (5/6) & +\ (5/6)^2 + \ (5/6)^3 + \ldots \Rightarrow \end{array}$$

$$\frac{S}{6} = \frac{1}{1-5/6} = 6 \Rightarrow S = 36 \Rightarrow \mathbf{E(X) = 6}$$

Variable aleatoria continua

Definición

Se dice que una **variable aleatoria** *es* **continua** *si su soporte es un intervalo real (finito o infinito) o unión de ellos.*

Son variables aleatorias continuas: Temperatura, peso, duración de un componente, ...

Definimos la probabilidad de un intervalo:

$$P(a < \xi \leq b) = P(\xi^{-1}(a, b]) = P(\omega \in \mathcal{A}/a < \xi(\omega) \leq b)$$

En las variables aleatorias continuas (v.a.c.) se da la circunstancia de que **la probabilidad de un punto es cero**, aunque pueda ocurrir. Por ello:

1) $\mathbf{P}(\xi < \mathbf{b}) = \mathbf{P}(\xi \leq \mathbf{b}) = \mathbf{F}(\mathbf{b})$,

2) $\mathbf{P}(\xi > \mathbf{a}) = \mathbf{P}(\xi \geq \mathbf{a}) = \mathbf{1} - \mathbf{F}(\mathbf{a})$

3) $\mathbf{P}(\mathbf{a} < \xi < \mathbf{b}) = \mathbf{P}(\mathbf{a} < \xi \leq \mathbf{b}) = \mathbf{P}(\mathbf{a} \leq \xi < \mathbf{b}) = \mathbf{P}(\mathbf{a} \leq \xi \leq \mathbf{b}) = \mathbf{F}(\mathbf{b}) - \mathbf{F}(\mathbf{a})$

Función de densidad

Definición

Dada una variable aleatoria continua ξ*, decimos que la función* $y = f(t)$ *real y no negativa es una* **función de densidad** *asociada a* ξ*, si verifica:* $\mathbf{F(x)} = \int_{-\infty}^{\mathbf{x}} \mathbf{f(t)dt}, \ \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}$

Propiedades:

- $\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{1}$ (Consecuencia de $F(+\infty) = 1$)
- $\mathbf{P(a} < \xi < \mathbf{b)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \mathbf{f(t)dt}$ (Consecuencia de que $P(a < \xi < b) = F(b) - F(a)$
- **La función de densidad es la derivada de la función de distribución:** $\mathbf{f(x)} = \frac{\mathbf{dF(x)}}{\mathbf{dx}}$
- $\mathbf{P(}\xi = \mathbf{a)} = \int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{a}} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{0}$ (La probabilidad de un punto es 0)
- $\mathbf{P(}\xi > \mathbf{b)} = \int_{\mathbf{b}}^{\infty} \mathbf{f(t)dt} = \mathbf{1} - \mathbf{F(b)}$

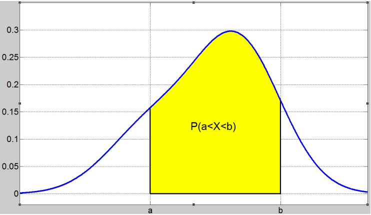
UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

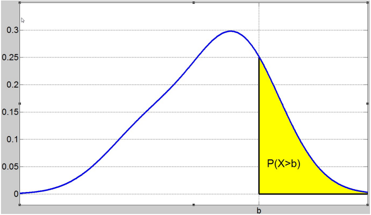
Interpretación de la función de densidad

La función de densidad además de caracterizar a la variable aleatoria sirve para calcular probabilidades. Así, las probabilidades:

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$
$$P(X > b) = \int_b^{\infty} f(t)dt = 1 - F(b)$$
$$P(X < a) = \int_{-\infty}^{a} f(t)dt$$

pueden ser interpretadas como áreas bajo la función de densidad.





UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Ejemplo

Ejemplo

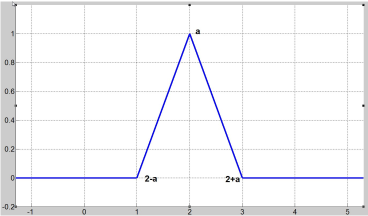
Sea ξ la v.a.c. determinada por la función de densidad:
$f(x) = \max\{0, a - |2-x|\}$.

- *Determinar el valor de a para que $f(t)$ sea una función de densidad.*
- *Hallar la función de distribución.*
- *Hallar las probabilidades de los sucesos a)$P(\xi \leq 1.5)$, b)$P(\xi > 2.3)$, c) $P(1.1 \leq \xi \leq 1.7)$ d) $P(1.5 \leq \xi \leq 2.5)$*

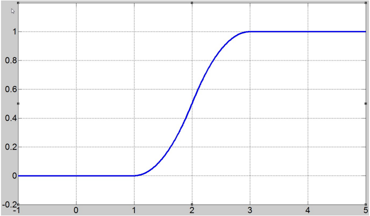
a) La forma de la función $y = f(x)$ es triangular con máximo en x=2 y altura a, y base $(2-a, 2+a)$. Para que el área valga 1:
$S = Bh/2 = (2a)a/2 = a^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{1}$ y resulta la figura.

b) $f(x) = \max\{0, 1 - |2-x|\} = \begin{cases} x-1 & x \in (1,2] \\ 3-x & x \in (2,3) \\ 0 & x \notin (1,3) \end{cases}$

Ejemplo-cont



Función de densidad de ξ



Función de distribución de ξ

Integramos para hallar la función de distribución: (la constante de integración se ajusta para que sea continua, así F(1)=0, F(2)=0.5, F(3)=1).

$$\mathbf{F(x)} = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} & 1 < x \leq 2 \\ 3x - \frac{x^2}{2} - 3.5 & 2 < x < 3 \\ 1 & x \leq 3 \end{cases}$$

Ejemplo-cont2

- a)$P(\xi \leq 1.5) = \int_{-\infty}^{1.5} f(t)dt = \int_{1}^{1.5}(t-1)dt = \{\text{Más fácil}\} =$
$= F(1.5) = 0.125$
- b)$P(\xi > 2.3) = \int_{2.3}^{\infty} f(t)dt = \int_{2.3}^{\infty}(3-t)dt = \{\text{Más fácil}\} =$
$= 1 - F(2.3) = 1 - \left[3(2.3) - \frac{2.3^2}{2} - 3.5\right] = 0.245$
- c) $P(1.1 \leq \xi \leq 1.7) = \int_{1.1}^{1.7} f(t)dt = \int_{1.1}^{1.7} t - 1dt =$
$\{\text{Más fácil}\} = F(1.7) - F(1.1) = 0.245 - 0.005 = 0.24$
- d) $P(1.5 \leq \xi \leq 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(t)dt = \int_{1.5}^{2}(t-1)dt +$
$+ \int_{2}^{2.5}(3-t)dt = \{\text{Más fácil}\} = F(2.5) - F(1.5) =$
$= 0.875 - 0.125 = 0.75$

Esperanza matemática. Caso Continuo

Definición

Se llama **esperanza matemática** *de la v.a.c. X a:*

$$\mathbf{E(X)} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{xf(x)dx}$$

Solo quedará definida cuando la integral sea absolutamente convergente, es decir: $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$

Ejemplo

Hallar la esperanza matemática de la función de la variable aleatoria ξ del ejemplo anterior.

La función de densidad era: $f(x) = \begin{cases} x-1 & x \in (1,2] \\ 3-x & x \in (2,3) \\ 0 & x \notin (1,3) \end{cases}$, entonces:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_1^2 x(x-1)dx + \int_2^3 x(3-x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \left[3\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_2^3 = 2$$

Generalización del concepto

Definición

Sea g una función real y X una variable aleatoria continua llamamos **esperanza de g(x)** *a:*

$$\mathbf{E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx}$$

con la condición de que la integral sea absolutamente convergente: $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|f(x)dx$

Ejemplo

Hallar E(sen(ξ))

$$E[sen(\xi)] = \int_{-\infty}^{\infty} sen(x)f(x)dx = \int_{1}^{2} sen(x)(x-1)dx + \int_{2}^{3} sen(x)(3-x)dx \approx 0.836$$

Propiedades de la esperanza matemática

Las siguientes propiedades son válidas para cualquier variable aleatoria:

- Es la media de la variable aleatoria: $\bar{\mathbf{X}} = \mathbf{E}(\mathbf{X})$.
- **E(k)=k.** (La esperanza matemática de una constante k es k.)
- **E(aX+b)=aE(X)+b** (Transformación afín)
- $\mathbf{E}(\mathbf{aX} + \mathbf{bY}) = \mathbf{aE}(\mathbf{X}) + \mathbf{bE}(\mathbf{Y})$ (Linealidad)
- Si son independientes se verifica: $\mathbf{E}(\mathbf{XY}) = \mathbf{E}(\mathbf{X})\mathbf{E}(\mathbf{Y})$

Ejemplo

Sea X la v.a. 'Número de caras' al lanzar 4 monedas e Y 'Puntos obtenidos' al lanzar un dado. Hallar E(Y), E(X+Y) y E(3Y-2X+7).

$$E(Y) = 1\frac{1}{6} + 2\frac{1}{6} + \ldots + 6\frac{1}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$$
$$E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 + 3.5 = 5.5,$$
$$E(3Y - 2X + 7) = 3E(Y) - 2E(X) + 7 = 3(3.5) - 2(2) + 7 = 13.5$$

Ejemplo

Ejemplo

Sea ξ la variable aleatoria continua dada por la función de distribución: $F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^4 & 0 < x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$.

Hallar: a) E(ξ), b) E($3\xi - 2$), c) E(sen(ξ))

a) Lo primero será hallar la función de densidad, $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 4x^3$ para $x \in [0,1]$. Luego: $E(\xi) = \int_0^1 x(4x^3)dx = \left[4\frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{4}{5} = 0.8$

$E(3\xi - 2) = 3E(\xi) - 2 = 3(0.8) - 2 = 0.4$

$E(\text{sen}(\xi)) = \int_0^1 \text{sen}(x)(4x^3)dx = 0.7084.$

Cálculo realizado con la instrucción Matlab:
>> **h=inline('sin(x).*4.*x.^3'),quad(h,0,1)**
aunque podría haberse calculado mediante integración por partes.

Momentos

Definición

Llamamos **momento de orden r respecto al punto 'a'** *de la variable aleatoria X, a*

$$\mathbf{M_r(a) = E((X - a)^r)}$$

Cuando a=0 se denominan momentos ordinarios de orden r:

$$\mathbf{m_r = E(X^r)}.$$

Cuando $a = \bar{X} = E(X)$ *se denominan momentos centrales de orden r:* $\mu_\mathbf{r} = \mathbf{E((X - E(X))^r)}$

Definición

Llamamos **Varianza de una variable aleatoria X** *a su momento central de orden 2:*

$$\mu_\mathbf{2} = \mathbf{E((X - E(X))^2) = E(X^2) - [E(X)]^2 = m_2 - \bar{X}^2}$$

Relaciones entre momentos

Definición

A la raíz cuadrada de la varianza la llamamos **desviación típica** *de la variable aleatoria:* $\sigma_{\mathbf{x}} = +\sqrt{\mathbf{V(X)}}$

Propiedades de los momentos:

- $m_0 = 1,\ m_1 = E(X) = \bar{X}$
- $m_2 = V(x) + \bar{X}^2.$
- $\mu_0 = 1,\ \mu_1 = 0,$
- $\mu_2 = V(x) = m_2 - \bar{X}^2$
- $\mu_3 = m_3 - 3m_2\bar{X} + 2\bar{X}^3$
- $\mu_4 = m_4 - 4m_3\bar{X} + 6m_2\bar{X}^2 - 3\bar{X}^4$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Parámetros

Parámetros de tendencia central: Son la media, moda y mediana.

- **Media:** Es la esperanza de X.
- **Moda:** Valor máximo de la función de probabilidad (discretas) o de la de densidad (continuas).
- **Mediana:** Valor x tal que $F(x) = 0.5$

Al igual que en descriptiva podemos hablar de cuantiles, cuartiles, ... El cuantil $c \in (0, 1)$ es el valor x tal que $F(x) = c$.

Medidas de dispersión: Podemos hablar de rango, desviación típica, varianza.

Coeficiente de variación: CV $= \frac{\sigma_x}{|\bar{X}|}$

Medidas de forma: (Coeficientes de Fisher)

Sesgo: $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$

Curtosis: $\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

Variable aleatoria bidimensional

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y sean* X *e* Y *dos variables aleatorias definidas sobre ese espacio. Una* **variable aleatoria bidimensional** *será una aplicación* $(X, Y) \to \mathbb{R}^2$ *que verifica:*

$$\forall(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}}, \textbf{el conjunto } \{\omega \in \mathcal{A} / \mathbf{X}(\omega) \leq \mathbf{x}, \mathbf{Y}(\omega) \leq \mathbf{y}\} \in \mathcal{A}$$

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea (X,Y) un a variable aleatoria bidimensional. Llamaremos* **función de distribución conjunta** *de la variable aleatoria (X,Y) a la función* $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$*, definida por:* $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}, \mathbf{Y} \leq \mathbf{y})$

Tipos de variables aleatorias bidimensionales

Cada una de las variables X e Y que forman la variable bidimensional podrá ser: discreta, continua o mixta. Sin embargo vamos a estudiar solamente:

- **Variables aleatorias bidimensionales discretas:** Cuando ambas son discretas (soporte finito o infinito numerable).
- **Variables aleatorias bidimensionales continuas:** Si ambas son continuas.

Variables aleatorias bidimensionales discretas

Definición

Podemos caracterizar la variable aleatoria bidimensional mediante la **Función de probabilidad conjunta**, *donde*

$$\mathbf{P(X = x_i, Y = y_j) = p_{i,j}}$$

La función de probabilidad viene usualmente expresada en forma tabular.

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_j	$\cdots$	y_L
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	p_{1L}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2j}	$\cdots$	p_{2L}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	p_{iL}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_k	p_{k1}	n_{p2}	$\cdots$	p_{kj}	$\cdots$	p_{kL}

Variables discretas - cont.

Podremos definir todo lo que se ha indicado para tablas de frecuencias bidimensionales:

- Variables aleatorias marginales: $(X \text{ e } Y)$
- Variables aleatorias condicionadas: $(X/Y = y_j)$ e $(Y/X = x_i)$
- Conceptos de dependencia, independencia y dependencia funcional.
- Momentos bidimensionales respecto a (a,b):

$$M_{rs}(a,b) = E[(X-a)^r(Y-b)^s] = \sum_i \sum_j (x_i - a)^r (y_j - b)^s p_{ij}$$

  Si (a,b)=(0,0) se llaman momentos ordinarios:

$$m_{rs} = E(X^r Y^s)$$

  Si $(a,b) = (\bar{X}, \bar{Y})$ se llaman momentos centrales:

$$\mu_{rs} = E[(X-\bar{X})^r(Y-\bar{Y})^s]$$

- Conceptos de media, varianza, covarianza, ...

Ejemplo bidimensional discreta

Ejemplo

Sea la variable aleatoria bidimensional (X, Y) *consistente en lanzar 4 monedas:* $X = \{\textit{Número de caras en los dos primeros lanzamientos}\}$ *e* $Y = \{\textit{Número total de caras}\}$*. Hallar:*

1. *La función de probabilidad conjunta.*
2. *¿Son independientes?*
3. *La función de distribución.*
4. *Medias de X e Y, varianzas de X e Y, covarianza.*
5. $P(X^2 + Y \leq 3)$, $P(2X + Y > 5)$
6. *Rectas de regresión de Y/X y X/Y.*
7. *Coeficiente de correlación lineal.*

Ejemplo bidimensional discreta

1) Veamos como se calcula alguno de los términos de la tabla, por ejemplo para X=1, Y=2: Los casos que lo producen deben tener 1 cara en las dos primeros lanzamientos y otra cara en los dos últimos. Así, $\{X = 1, Y = 2\} = \{CFCF, CFFC, FCCF, FCFC\}$ y su probabilidad será $4/16$.

$X \backslash Y$	0	1	2	3	4	
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{4}{16}$
1	0	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	0	$\frac{8}{16}$
2	0	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{6}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

2) Tendría que verificarse que p_{ij} fuese el producto de las marginales para todo i,j, y falla el primero: $P(X = 0, Y = 0) \neq P(X = 0)P(Y = 0)$, luego **no son independientes** existiendo dependencia estadística.

Ejemplo bidimensional discreta-2

3) La función de distribución expresada como tabla resulta:

$X\backslash Y$	$(-\infty,0)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,\infty)$
$(-\infty,0)$	0	0	0	0	0	0
$[0,1)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{4}{16}$
$[1,2)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{10}{16}$	$\frac{12}{16}$	$\frac{12}{16}$
$[2,\infty)$	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{11}{16}$	$\frac{15}{16}$	1

Para calcular el valor de una casilla, por ejemplo $x\in[1,2)$, $y\in[2,3)$ miramos en la tabla de la función de probabilidad y sumamos todas las probabilidades de las casillas con $X\leq 1$ e $Y\leq 2$, es decir:
P(0,0)+P(0,1)+P(0,2)+P(1,1)+P(1,2)=10/16.

Ejemplo bidimensional discreta-2

4) Para las medias y varianzas podemos usar las marginales (función de probabilidad)

Media de X: $E(X) = 0\frac{4}{16} + 1\frac{8}{16} + 2\frac{4}{16} = 1$

Media de Y: $E(Y) = 0\frac{1}{16} + 1\frac{4}{16} + 2\frac{6}{16} + 3\frac{4}{16} + 4\frac{1}{16} = 2$

Varianza de X: $m_{2,0} = E(X^2) = 0^2\frac{4}{16} + 1^2\frac{8}{16} + 2^2\frac{4}{16} = \frac{24}{16} \Rightarrow$
$V(X) = \frac{24}{16} - 1^2 = 0.5$

Varianza de Y:

$m_{0,2} = E(Y^2) = 0^2\frac{1}{16} + 1^2\frac{4}{16} + 2^2\frac{6}{16} + 3^2\frac{4}{16} + 4^2\frac{1}{16} = \frac{80}{16} \Rightarrow$
$V(X) = \frac{80}{16} - 2^2 = 1$

Covarianza:

$m_{1,1} = E(XY) = 0\cdot 0\cdot \frac{1}{16} + 0\cdot 1\cdot \frac{2}{16} + 0\cdot 2\cdot \frac{1}{16} + 1\cdot 1\cdot \frac{2}{16} + 1\cdot 2\cdot \frac{4}{16} + 1\cdot 3\cdot \frac{2}{16} +$
$+2\cdot 2\cdot \frac{1}{16} + 2\cdot 3\cdot \frac{2}{16} + 2\cdot 4\cdot \frac{1}{16} = \frac{40}{16} \Rightarrow \mathbf{Cov(X,Y) = \frac{40}{16} - 1\cdot 2 = 0.5}$

Ejemplo bidimensional discreta-3

5) $\mathbf{P(X^2 + Y \leq 3)}$: Las casillas de la tabla de la función de probabilidad que verifican la condición, (con $p_{ij} > 0$), son: (0,0),(0,1),(0,2), (1,1) y (1,2). $P(\{(0,0) \cup (0,1) \cup (0,2) \cup (1,1) \cup (1,2)\}) = \frac{10}{16}$

$\mathbf{P(2X + Y > 5)}$: Las casillas de la tabla de la función de probabilidad que verifican la condición, (con $p_{ij} > 0$), son: (2,2),(2,3) y (2,4). $P(\{(2,2) \cup (2,3) \cup (2,4)\}) = \frac{4}{16} = 0.25$

6) Podemos usar la fórmula: $Y - \bar{Y} = b(X - \bar{X})$, donde sabemos que: $\bar{X} = 1$, $\bar{Y} = 2$. $b = \frac{Cov}{V(x)} = \frac{0.5}{0.5} = 1 \Rightarrow m_{Y/X} = 1$ $b' = \frac{Cov}{V(y)} = \frac{0.5}{1} = 0.5$ $\Rightarrow m_{X/Y} = 2$ y las rectas son:

$$Y/X : \qquad Y - 2 = 1(X - 1) \Rightarrow Y = X + 1$$

$$X/Y : \qquad Y - 2 = 2(X - 1) \Rightarrow X = 0.5Y$$

7) $\rho = \sqrt{bb'} = \sqrt{1 \cdot 0.5} \approx 0.7071$

Variables bidimensionales continuas

Definición

Llamamos **función de densidad bidimensional** *de la variable aleatoria* (X, Y) *a una función* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *tal que sea:*

- *Integrable y no negativa.*
- $$F(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f(x, y) dy dx$$
- $\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$ *en todos los puntos en donde esté definida esa derivada segunda.*

Dada la función de densidad de la variable aleatoria, la probabilidad de $(a \leq X \leq b) \cap (c \leq Y \leq d)$ queda definida por:

$$P(\{(a \leq X \leq b) \cap (c \leq Y \leq d)\}) = \int_{c}^{d} \int_{a}^{b} f(x, y) dx dy$$

Variables continuas-cont

- **Variables aleatorias marginales: (X e Y)**

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dydx, \qquad F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{y} f(x,y)dxdy$$

- **Variables aleatorias condicionadas: $(X/Y \leq b)$ e $(Y/X \leq a)$**

$$F_{X/Y\leq b}(x) = \frac{P(X\leq x, Y\leq b)}{P(Y\leq b)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)dydx}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{b} f(x,y)dydx} = \frac{F(x,b)}{F(\infty,b)} = \frac{F(x,b)}{F_2(b)}$$

$$F_{Y/X\leq a}(y) = \frac{P(X\leq a, Y\leq y)}{P(X\leq a)} = \frac{\int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy} = \frac{F(a,y)}{F(a,\infty)} = \frac{F(a,y)}{F_1(a)}$$

- **Variables aleatorias condicionadas: $(X/Y = b)$ e $(Y/X = a)$**
  Ahora los sucesos $Y = b$ y $X = a$ tienen probabilidad 0 (no está definida la condicionada). Tomamos un intervalo de amplitud ϵ y límites cuando $\epsilon \to 0$:

$$F_{X/Y=b}(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{P(X\leq x, b\leq Y\leq b+\epsilon)}{P(b\leq Y\leq b+\epsilon)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{x} \int_{b}^{b+\epsilon} f(x,y)dydx}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{b}^{b+\epsilon} f(x,y)dydx} =$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{x} f(x,b)dx}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,b)dx}$$

$$F_{Y/X\leq a}(y) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{P(a\leq X\leq a+\epsilon, Y\leq y)}{P(a\leq X\leq a+\epsilon)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{\int_{-\infty}^{y} \int_{a}^{a+\epsilon} f(x,y)dxdy}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{a}^{a+\epsilon} f(x,y)dxdy} =$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{y} f(a,y)dy}{\int_{-\infty}^{\infty} f(a,y)dxdy}$$

Variables continuas-cont2

- **Conceptos de dependencia, independencia y dependencia funcional.**
- **Momentos bidimensionales respecto a (a,b):**

$$M_{rs}(a,b) = E[(X-a)^r(Y-b)^s] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^r(y-b)^s f(x,y)\,dxdy$$

Si (a,b)=(0,0) se llaman momentos ordinarios:

$$m_{rs} = E(X^r Y^s)$$

Si $(a,b) = (\bar{X}, \bar{Y})$ se llaman momentos centrales:

$$\mu_{rs} = E[(X-\bar{X})^r(Y-\bar{Y})^s]$$

- **Conceptos de media, varianza, covarianza, . . .**

Ejemplo variable bidimensional continua

Ejemplo

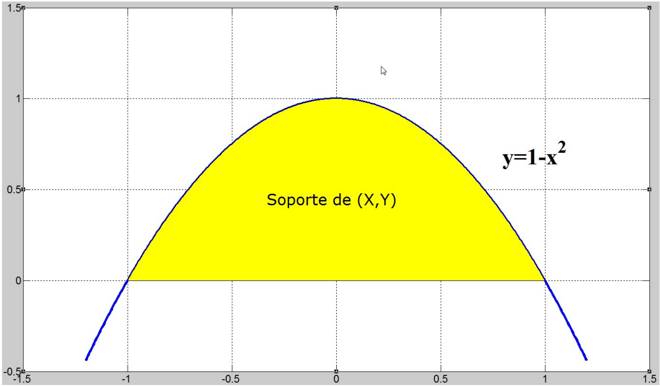
Sea la variable aleatoria (X,Y) con función de densidad:

$$f(x,y) = \begin{cases} c(x^2+y) & 0 \leq y \leq 1-x^2 \\ 0 & \textit{en el resto} \end{cases}$$

1. *Dibuje la región de $\mathbb{R}^2$ que representa el soporte de la variable aleatoria.*
2. *Determine el valor de c.*
3. *Hallar $P(X \geq 0)$.*
4. *Hallar la probabilidad de que la variable aleatoria tome valor en el cuadrado de lado 1 y centro el origen de coordenadas.*
5. *Determinar la distribución marginal de X.*
6. *¿Son X e Y variables independientes?*
7. *Calcular la recta de regresión de Y/X y determinar la bondad del ajuste.*

Ejemplo bidimensional continua

1) El soporte será la región donde $f(x, y) > 0$ y está representado en la figura:



Ejemplo bidimensional continua-2

2) Las funciones de densidad deben verificar:
$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$ que aquí queda:
$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} c(x^2+y)dydx = 1$

$$\int_{-1}^{1} c\left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx = \int_{-1}^{1} c\left[x^2(1-x^2)+\frac{(1-x^2)^2}{2}\right] dx =$$

$$= \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} 1-x^4dx = \frac{c}{2}\left[x-\frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} = \frac{4c}{5} = 1 \Rightarrow c = 1.25$$

3) $\mathbf{P(X \geq 0)} = 1.25\int_0^1\int_0^{1-x^2}(x^2+y)dydx =$

$$= 1.25\int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx = \frac{1.25}{2}\int_0^1 1-x^4dx = \frac{1}{2}$$

Ejemplo bidimensional continua-3

4) Será el cuadrado C de extremos (-0.5,-0.5), (0.5,-0.5), (0.5,0.5) y (-0.5,0.5). Su intersección con el soporte es el rectángulo con $y > 0$, es decir: (-0.5,0), (0.5,-0), (0.5,0.5) y (-0.5,0.5).

$$P(C) = 1.25 \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \left[x^2 + y\right] dydx = 1.25 \int_{-0.5}^{0.5} \int_{0}^{0.5} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_0^{0.5} dx =$$

$$= \frac{1.25}{2} \int_{-0.5}^{0.5} (x^2 + 0.25) dx = \frac{1.25}{2} \left[\frac{x^3}{3} + 0.25x\right]_{-0.5}^{0.5} \approx 0.2083$$

5) Marginal de X: Para $-1 \leq x \leq 1$ se obtiene:

$$F_1(x) = 1.25 \int_{-1}^{x} \int_{0}^{1-x^2} (x^2 + y) dydx = 1.25 \int_{-1}^{x} \left[x^2 y + \frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{1.25}{2} \int_{-1}^{x} (1 - x^4) dx = \frac{1.25}{2} \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{x} = \frac{1}{8}(5x - x^5 + 4)$$

Si $x \leq -1$, $F_1(x) = 0$, y si $x \geq 1$, $F_1(x) = 1$

Ejemplo bidimensional continua-4

6) Existen varias formas de verlo, por ejemplo, calculando la marginal de y viendo que la función de densidad conjunta es el producto de las marginales. Pero es evidente que no son independientes, pues viendo la forma del soporte las condicionadas de $Y/X = 0.99$ e $Y/X = 0$ son diferentes. En la primera $f(0.99, 0.5) = 0$ y en la segunda $F(0.99, 0.5) > 0$.
7) Sin embargo vamos a comprobar que verifica $E(XY) = E(X)E(Y)$ y por tanto son incorreladas (Cov=0).

$$E(X) = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} x(x^2+y)dydx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\left[x(x^2y+\frac{y^2}{2})\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{5}{8}\int_{-1}^{1}(-x^5+x)dx = \frac{5}{8}\left[-\frac{x^6}{6}+\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = 0$$

Ejemplo bidimensional continua-5

$$E(Y) = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} y(x^2+y)dydx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\left[(x^2\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3})\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{5}{24}\int_{-1}^{1}(x^6-3x^2+2)dx = \frac{10}{21}$$

$$E(XY) = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2} xy(x^2+y)dydx = \frac{5}{4}\int_{-1}^{1}\left[(x^3\frac{y^2}{2}+x\frac{y^3}{3})\right]_0^{1-x^2} dx =$$

$$= \frac{5}{24}\int_{-1}^{1}(x^7-3x^3+2x)dx = 0$$

Cov=E(XY)-E(X)E(Y)=0 $\Rightarrow r = 0, b = 0, m_{Y/X} = 0$ y la recta de regresión de Y/X queda: $Y - \frac{10}{21} = 0(X-0)$ y es la recta $\mathbf{Y} = \mathbf{\frac{10}{21}}$ paralela al eje OX.
La recta X/Y será la recta vertical $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ pues $m_{Y/X} = \frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}$ con $r = 0$.

Ejemplo bidimensional continua-6

La recta X/Y será la recta vertical $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ pues $m_{X/Y} = \frac{1}{r}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \infty$ con $r = 0$.

$$Y - \frac{10}{21} = \infty(X - 0) \Rightarrow \mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Es la recta de pendiente ∞ que pasa por $(0, \frac{10}{21})$.
Bondad del ajuste: El ajuste es muy malo pues $r = 0$ (incorreladas), esto quiere decir que mediante la regresión lineal, el conocer una variable no aporta conocimiento sobre la otra. $V_r = (1 - r^2)V(y) = V(y)$