Tema 4: Cálculo de Probabilidades

Sucesos aleatorios. Probabilidad

Departamento Matemática Aplicada

Universidad de Málaga

Curso 2015-2016

Experimento aleatorio

Un experimento científico siempre debe dar un resultado que puede ser:

- **Determinista:** Si se repite en las mismas circunstancias, siempre da el mismo resultado.
- **Aleatorio:** Si se repite en las mismas circunstancias puede dar resultados diferentes. El conjunto de resultados posibles se encuentra predeterminado.

Definición

Llamamos **espacio muestral (E)** *de un experimento aleatorio al conjunto de los resultados posibles.*
Llamamos **suceso aleatorio** *a un subconjunto A del espacio muestral.* $(A \subset E)$ $(A \in \mathcal{P}(E) = \{\text{Espacio de sucesos}\})$

Ejemplos de espacio muestral

Una vez realizado el experimento debemos poder conocer si el suceso ha ocurrido o no.

- Extraer una carta al azar de una baraja española (40 cartas). Será un espacio muestral finito con 40 elementos.
$$\begin{aligned} E_1 = \{&(1,O),(2,O),(3,O),(4,O),(5,O),(6,O),(7,O),(S,O),(C,O),(R,O),\\ &(1,C),(2,C),(3,C),(4,C),(5,C),(6,C),(7,C),(S,C),(C,C),(R,C),\\ &(1,E),(2,E),(3,E),(4,E),(5,E),(6,E),(7,E),(S,E),(C,E),(R,E),\\ &(1,B),(2,B),(3,B),(4,B),(5,B),(6,B),(7,B),(S,B),(C,B),(R,C)\} \end{aligned}$$
- Lanzar una moneda hasta la primera aparición de 'cara'. El espacio muestral será tamaño infinito numerable $E_2 = \{C, FC, FFC, FFFC, \ldots\}$, donde F='cruz' y C='cara'.
- Tiempo transcurrido hasta la llegada de una llamada de teléfono. El espacio muestral será infinito no numerable: $E_3 = [0, \infty)$

Ejemplos de sucesos

Para el primer experimento serán sucesos:
'Sacar menos de 3'={(1,O),(2,O),(1,C),(2,C),(1,E),(2,E),(1,B),(2,B)}
B='sacar oros', C='sacar un 7'={(7,O), (7,C), (7,E), (7,B)}

Para el segundo experimento:
A='Lanzar 5 veces'={FFFFC}, B='Lanzar más de 5 veces', C='Haber obtenido al menos 3 cruces'={FFFC, FFFFC,...,}.

Para el tercer experimento:
'Recibir la llamada antes de 3 min.', 'Tardar más de 5 horas', 'Tardar entre 1 y 5 min.'

Tipos de sucesos

Llamamos **suceso elemental** si corresponde a un resultado simple del experimento, no pudiendo dividirse en otros. P.:, 'Sacar el as de oros' en una extracción de la baraja.

Llamamos **suceso compuesto** cuando está formado por varios simples. P. ej.: 'Sacar as' pues se compone de 'as de oros', 'as de copas', 'as de espadas' y 'as de bastos'.

Llamamos **suceso seguro (E)** al suceso que sabemos que ocurrirá siempre al realizar el experimento. P. ej.: 'Salir menos de 7' al lanzar un dado. $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Llamamos **suceso imposible ($\emptyset$)** al suceso que sabemos que nunca ocurrirá al realizar el experimento. P.ej.: 'Salir par e impar' al lanzar un dado.

Operaciones con sucesos

Definición

Llamamos **unión de los sucesos A y B ($\mathbf{A \cup B}$)** *al suceso que sucede cuando ocurre A, o cuando lo hace B (alguno de los dos).*
Llamamos **intersección de los sucesos A y B ($\mathbf{A \cap B}$)** *al suceso que se produce cuando ocurre A, y conjuntamente sucede B (ambos).*
Llamamos **suceso contrario ($\bar{\mathbf{A}}$)** *(o complementario) del suceso A, al suceso que ocurre cuando no sucede A.*

P. ej.: Dados los sucesos A={Par}={2,4,6} y B={Menos de 3}={1,2}, entonces: $A \cup B$={1,2,4,6}. $A \cap B$={2}, $\bar{A}$={Impar}={1,3,5} y $\bar{B}$={Mayor o igual a 3}={3,4,5,6}.

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Álgebra de Boole de sucesos

El espacio de sucesos E con las operaciones unión, intersección y complementario es un álgebra de Boole. Pero existen subconjuntos $\mathcal{A}$ de E que también lo son.

Definición

Decimos que una familia de sucesos $\mathcal{A} = \{A_i\}$, *es un* **álgebra de Boole** *si y solo si verifica:*

1. $E \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A, B \in \mathcal{A}$ *entonces* $A \cup B \in \mathcal{A}$

σ-álgebra de Boole de sucesos

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra de Boole, el axioma 3 indica que la unión finita de sucesos del álgebra es un suceso del álgebra, pero no podemos pasar al caso infinito numerable. Cuando sí se puede, tenemos el concepto de σ-álgebra de Boole.

Definición

*Decimos que una familia de sucesos $\mathcal{A} = \{A_i\}$, es un σ-**álgebra de Boole** si y solo si verifica:*

1. $E \in \mathcal{A}$
2. *Si* $A \in \mathcal{A}$ *entonces* $\bar{A} \in \mathcal{A}$
3. *Si* $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathcal{I})$, *entonces* $\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i \in \mathcal{A}$. *Siendo* $\mathcal{I}$ *un conjunto finito o infinito numerable.*

Ejemplo

Ejemplo

Si sacamos un número aleatorio en [0,1], podemos considerar la familia $\mathcal{A}$ de sucesos formada por el suceso imposible $\emptyset$ y los sucesos "obtener un valor en el conjunto A_i donde A_i es unión finita de intervalos con extremos racionales e incluidos en [0,1]. ¿Son un σ-álgebra de Boole? ¿Son un álgebra?.

Ax. 1: Es evidente que $E = [0,1] \in \mathcal{A}$.
Ax. 2: El complemento de una unión finita de intervalos, también lo es y sus extremos son racionales.
Ej. $A = [0.1, 0.2) \cup (0.3, 0.5)$ tiene por complemento
$\bar{A} = [0, 0.1) \cup [0.2, 0.3] \cup [0.5, 1]$
Ax.3: La unión de 2 elementos de la familia es unión de intervalos.
Ej. $B = [0, 0.2) \cup [0.35, 0.7]$ y $A \cup B = [0, 0.2) \cup (0.3, 0.7]$ que es unión de intervalos de extremos racionales.
Por tanto **es un álgebra de Boole**.

Ejemplo-cont.

Pero si considero $C_i = \left[\frac{1}{c_i}, 1\right]$ donde c_i es la representación, con $i \in \mathbb{N}$ decimales, de $\sqrt{2}$, tenemos:

Los $C_i \in \mathcal{A}$. Están formados por un intervalo de extremos racionales e incluido en [0,1].

Sin embargo $\bigcup_i C_i = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right] \notin \mathcal{A}$ (tiene extremo no racional).

No es un σ-álgebra.

Si $\mathcal{A}$ es un álgebra o un σ-álgebra de sucesos diremos que se trata de un **espacio probabilizable** y tiene las propiedades:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$. El suceso imposible pertenece al álgebra.
- $\mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \overline{\bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}}}$. Podemos definir la intersección de sucesos.
- **Asociativas:** $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cup \mathbf{C}$

  $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cap \mathbf{C}$
- **Commutativas:** $\mathbf{A} \cup \mathbf{B} = \mathbf{B} \cup \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = \mathbf{B} \cap \mathbf{A}$
- **Idempotentes:** $\mathbf{A} \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- **Simplificativas:** $(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap \mathbf{A} = \mathbf{A}, \quad (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup \mathbf{A} = \mathbf{A}$
- **Existencia de infimo:** $\exists \emptyset, \forall A : \mathbf{A} \cup \emptyset = \mathbf{A}, \quad \mathbf{A} \cap \emptyset = \emptyset$
- **Existencia de supremo:** $\exists E, \forall A : \mathbf{A} \cup \mathbf{E} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A} \cap \mathbf{E} = \mathbf{A}$
- **Existencia de complementario:** $\forall A, \exists \bar{A} : \mathbf{A} \cup \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{E}, \quad \mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{A}} = \emptyset$
- **Distributivas:** $\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) \cap (\mathbf{A} \cup \mathbf{C})$

  $\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \mathbf{C})$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Propiedades-2

- **Leyes de Morgan:** $\overline{\mathbf{A} \cup \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cap \bar{\mathbf{B}}$
  $\overline{\mathbf{A} \cap \mathbf{B}} = \bar{\mathbf{A}} \cup \bar{\mathbf{B}}$
- **Doble complementario:** $\bar{\bar{\mathbf{A}}} = \mathbf{A}$
- **Definición de diferencia:** $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{B}}$
- **Diferencia simétrica:** $\mathbf{A} \Delta \mathbf{B} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cup (\mathbf{B} - \mathbf{A})$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Definición axiomática de Probabilidad

Sea E un espacio muestral y $\mathcal{A}$ un álgebra o σ-álgebra de sucesos, diremos que $(E, \mathcal{A})$ es un espacio probabilizable.

Definición

Sea $(E, \mathcal{A})$ un espacio probabilizable, diremos que una función $P : \mathcal{A} \to [0, 1]$ es una **función de probabilidad** *si y solo si verifica:*

- $\mathbf{P(E) = 1}$
- *Para todo conjunto $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ verificando $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$, se verifica:* $\mathbf{P}(\bigcup_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}} \mathbf{A_i}) = \sum_{\mathbf{i}\in\mathcal{I}} \mathbf{P}(\mathbf{A_i})$

A la terna $(E, \mathcal{A}, P)$ se le denomina **espacio de probabilidad**.

Consecuencias

Observación

Como consecuencia si E es un conjunto finito (o infinito numerable) y conocemos la probabilidad para cada suceso elemental, conocemos la de cualquier suceso.

Propiedades

- $\mathbf{P}(\bar{\mathbf{A}}) = \mathbf{1} - \mathbf{P}(\mathbf{A})$
- $\mathbf{P}(\emptyset) = \mathbf{0}$
- $\mathbf{Si\ A} \subset \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B})$
- $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$
- $\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B} \cup \mathbf{C}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) + \mathbf{P}(\mathbf{C}) -$
  $- \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{C}) - \mathbf{P}(\mathbf{B} \cap \mathbf{C}) + \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C})$
- $\mathbf{P}(\mathbf{A} - \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$

Ejemplo

Ejemplo: Podemos asignar diferentes funciones de probabilidad a un mismo espacio muestral.

Consideremos como resultados simples $E = \{1, X, 2\}$.

- $P(\{1\}) = P(\{X\}) = P(\{2\}) = \frac{1}{3}$
- $P(\{1\}) = 0.5, \quad P(\{X\}) = P(\{2\}) = 0.25$
- $P(\{1\}) = 0.5, \quad P(\{X\}) = 0.3, \quad P(\{2\}) = 0.2$

La probabilidad del suceso $A = \{1, X\}$ queda determinada $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(A) = 0.75$ y $P(A) = 0.8$, en cada caso.

No cualquier función de $\mathcal{P}(\mathbf{E})$ en $[\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ es una probabilidad.

Si $A = \{1, X\}$ y $B\{X, 2\}$, una función tal que $P(A) = 0.4$ y $P(B) = 0.5$ no puede ser una probabilidad, ya que: $P(\bar{A}) = P(\{2\}) = 0.6$ y $P(B) = P(\{X\}) + P(\{2\}) = 0.5$ resultaría $P(\{X\}) = -0.1$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Definición clásica de probabilidad

Definición

Dado un suceso A del espacio muestral E de un experimento aleatorio. Si realizamos N veces el experimento y contabilizamos el número de veces que ha ocurrido A (que denotamos como n_A), la frecuencia relativa de A será: $f_A = \frac{n_A}{N}$.
Llamamos **probabilidad del suceso A** *al límite de la frecuencia relativa de A cuando N tiende a infinito:*

$$\mathbf{P(A) = \lim_{N\to\infty} f_A = \lim_{N\to\infty} \frac{n_A}{N}}$$

Propiedad

Si tenemos un álgebra con **sucesos elementales equiprobables**, *podremos obtener la probabilidad de un suceso A como:*

$$\mathbf{P(A)} = \frac{\textit{Número sucesos favorables}}{\textit{Número sucesos posibles}}$$

Ejemplo: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una carta y sea inferior a 4? Hay 12 cartas de las 40 con numeración inferior a 4: P(A)=12/40=0.3

Probabilidad condicionada

Definición

Sea espacio de probabilidad $(E, \mathcal{A}, P)$ *y se* A *un suceso cualquiera, tal que* $P(A) \neq 0$*. Para cualquier suceso* $B \in \mathcal{A}$ *definimos la* **probabilidad de B condicionada a A** *como:*

$$\mathbf{P(B/A) = P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Se trata de una probabilidad pues:

1: A cada suceso B le asigna un valor en [0,1].

Es cociente números no negativos y $(A \cap B) \subset A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$.

2: $\mathbf{P(E/A)} = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \mathbf{1}$, ya que $A \cap E = A$.

3: Si $B \cap C = \emptyset, \Rightarrow \mathbf{P(B \cup C/A)} = \frac{P((B \cup C) \cap A)}{P(A)} = \frac{P((B \cap A) \cup (C \cap A))}{P(A)} =$

$$= \frac{P(B \cap A)}{P(A)} + \frac{P(C \cap A)}{P(A)} = \mathbf{P(B/A) + P(C/A)}$$

Independencia de sucesos

Definición

Decimos que un suceso **B es independiente de otro A** *si y solo si:* $\mathbf{P(B/A) = P(B)}$

Propiedades

- *Si B es independiente de A, entonces A es independiente de B. Decimos que A y B son* **sucesos independientes**.
  $P(B) = P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow \mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \Rightarrow P(A/B) = P(A)$
- *Siempre se verifica:* $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B/A)}$
- *Si A y B son independientes:* $\mathbf{P(A \cap B) = P(A)P(B)}$

Ejemplos:

Ejemplo

Hallar la probabilidad de sacar 3 cartas sin reemplazamiento y obtener:

1. As, Rey y Caballo en este orden.
2. Un as, un rey y un caballo.
3. Obtener 3 ases.
4. Obtener 2 oros y 1 copa.

1: $P(\{ARC\}) = P(A) * P(R/A) * P(C/AR) = \frac{4}{40}\frac{4}{39}\frac{4}{38}$
2: $P(\{ARC \cup ACR \cup RAC \cup RCA \cup CAR \cup CRA\}) = 6\frac{4}{40}\frac{4}{39}\frac{4}{38}$
3: $P(\{AAA\}) = \frac{4}{40}\frac{3}{39}\frac{2}{38}$
4: $P(\{OOC \cup OCO \cup COO\}) = 3\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{10}{38}$

Teorema de la probabilidad total

Definición

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un conjunto de sucesos. Decimos que $\mathcal{C}$ es un **conjunto completo de sucesos** *si y solo si se verifican:*

1. **Son disjuntos:** *Para todo $i \neq j$, se verifica $C_i \cap C_j = \emptyset$*
2. **Cubren E:** $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} C_i = E$

Teorema

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ un espacio de probabilidad y sea $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ un sistema completo de sucesos, tal que para todo $i \in \mathcal{I}, P(C_i) > 0$. Si $B \in \mathcal{A}$ entonces:

$$\mathbf{P(B) = \sum_{i \in \mathcal{I}} P(C_i) P(B/C_i)}$$

Ejemplos

Ejemplo

Tres máquinas A, B y C producen condensadores. La máquina A produce el 30 %, la B el 50 % y la C el 20 % restante. Se estima que la A produce un 0.003 % de defectuosos, la B el 0.002 % y la C el 0.006 %. Hallar la probabilidad de:

1. *Producir un condensador defectuoso.*
2. *Los condensadores son empaquetados en lotes de 4, todos ellos producidos por la misma máquina. Hallar la probabilidad de que de un lote al azar obtengamos alguno defectuoso.*

1. $\mathbf{P(D)} = P(A)P(D/A) + P(B)P(D/B) + P(C)P(D/C) = (0.3)3(10)^{-5} + (0.5)2(10)^{-5} + (0.2)6(10)^{-5} = \mathbf{0.000031}$
2. $P(0/A) = 0.99997^4$, $P(0/B) = 0.99998^4$, $P(0/C) = 0.99994^4$, $\Rightarrow \mathbf{P(0)} = P(A)P(0/A) + P(B)P(0/B) + P(B)P(0/B) = 0.3(0.99997)^4 + 0.5(0.99998)^4 + 0.2(0.99994)^4 = \mathbf{0.999876} \Rightarrow \mathbf{P(algunoDef.)} = \mathbf{1} - \mathbf{P(0)} = \mathbf{0.000124}$

UNIVERSIDAD DE MÁLAGA

Teorema de Bayes

Teorema

Sea $(E, \mathcal{A}, P)$ *un espacio de probabilidad y sea* $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ *un sistema completo de sucesos, tal que para todo* $i \in \mathcal{I}, P(C_i) > 0$. *Si* $B \in \mathcal{A}$ *entonces:*

$$\mathbf{P(C_j/B) = \frac{P(C_j)P(B/C_j)}{\sum_{i \in \mathcal{I}} P(C_i)P(B/C_i)}}$$

La idea tras este teorema es que la probabilidad 'a priori' de un suceso C_j, resulta modificada si tenemos una información adicional B. Esta nueva probabilidad 'a posteriori' es $P(C_j/B)$.

Ejemplos del teorema de Bayes

Ejemplo

Si en el problema anterior sabemos que no hay ningún condensador defectuoso en el lote

1. *¿Cuál es la probabilidad de que el lote sea de B?*
2. *¿Cuál si todos son defectuosos?*

$$\mathbf{1:\ P(B/\bar{D})} = \frac{P(B)P(\bar{D}/B)}{P(A)P(\bar{D}/A)+P(B)P(\bar{D}/B)+P(C)P(\bar{D}/C)} =$$

$$= \frac{0.5(0.99998)^4}{0.3(0.99997)^4+0.5(0.99998)^4+0.2(0.99994)^4} = \mathbf{0.500022}$$

$$\mathbf{2:\ P(B/4D)} = \frac{P(B)P(4D/B)}{P(A)P(4D/A)+P(B)P(4D/B)+P(C)P(4D/C)} =$$

$$= \frac{0.5(0.00002)^4}{0.3(0.00003)^4+0.5(0.00002)^4+0.2(0.00006)^4} = \mathbf{0.027444}$$