Apuntes de

ESTADÍSTICA

Distribuciones de probabilidad

UNIVERSIDAD
DE MÁLAGA

Sixto Sánchez Merino

Dpto. de Matemática Aplicada
Universidad de Málaga

Matemática Aplicada

Mi agradecimiento a los profesores Carlos Cerezo Casermeiro y Carlos Guerrero García, por sus correcciones y sugerencias en la elaboración de estos apuntes.

Apuntes de Estadística

🄯2011, Sixto Sánchez Merino.

Este trabajo está editado con licencia “Creative Commons” del tipo:

Reconocimiento-No comercial-Compartir bajo la misma licencia 3.0 España.

Usted es libre de:

copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

hacer obras derivadas.

Bajo las condiciones siguientes:

Reconocimiento. Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).

No comercial. No puede utilizar esta obra para fines comerciales.

Compartir bajo la misma licencia. Si altera o transforma esta obra, o genera una obra derivada, sólo puede distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.
- Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.

Capítulo 6

Distribuciones de probabilidad

En el capítulo anterior hemos visto el concepto de variable aleatoria distinguiendo los tipos discreto y continuo, en variables unidimensionales y bidimensionales. En este capítulo vamos a presentar las distribuciones de probabilidad de algunas variables aleatorias particulares que son de especial importancia por representar los modelos teóricos de muchos fenómenos aleatorios.

6.1. Distribuciones uniformes

Las distribuciones uniformes se caracterizan por repartir la probabilidad, de manera uniforme, en todo el soporte. Por lo tanto sus distribuciones de probabilidad se representan mediante funciones constantes. Es decir, si la variable es discreta, la distribución uniforme asigna la misma probabilidad a todos los puntos del soporte; y si la variable es continua, la función de densidad es constante.

6.1.1. Distribución uniforme discreta

Una variable aleatoria discreta X que toma los valores $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ con probabilidades

$$P\left[X = x_k\right] = \frac{1}{n} \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

recibe el nombre de *variable uniforme discreta*, su distribución de probabilidad *distribución uniforme discreta* y se denota por $X \rightsquigarrow U(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Por ejemplo, los resultados que se obtienen al lanzar un dado o elegir al azar entre varias posibilidades, se modelizan con una distribución uniforme. En ellos, se trata de representar el caso en el que no tenemos información sobre la importancia de un resultado u otro, de ahí que se les asigne la misma probabilidad a todos los valores de la variable.

En el caso particular de que la variable tome como valores los primeros números naturales:

$$P\left[X = k\right] = \frac{1}{n} \quad \text{con} \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

entonces su media, varianza y desviación típica son:

$$\mu_x = \frac{n+1}{2} \quad , \quad \sigma_x^2 = \frac{n^2-1}{12} \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$$

Un caso muy particular de distribución uniforme lo constituye la distribución de probabilidad degenerada que sólo toma un único valor con probabilidad 1. En este caso, la media es el propio valor, y la varianza y la desviación típica son 0.

6.1.2. Distribución uniforme continua

Se dice que la variable aleatoria cantinua X sigue una *distribución uniforme* en el intervalo $[a,b]$ y se denota por $X \rightsquigarrow U[a,b]$ cuando su función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases}$$

y su media, varianza y desviación típica son

$$\mu_x = \frac{a+b}{2} \quad ; \quad \sigma_x^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \quad ; \quad \sigma_x = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

Uno de los ejemplos más comunes de esta distribución es la elección de un número al azar entre 0 y 1 que constituye una variable con distribución $U[0,1]$. En muchos lenguajes de programación y programas de cálculo matemático se implementan funciones que permiten generar números aleatorios.

6.1.3. Distribución uniforme bidimensional

Las distribuciones uniformes bidimensionales puede ser también discreta o continua y su definición es análoga a la distribución unidimensional correspondiente.

Distribución uniforme discreta bidimensional

Una variable aleatoria discreta (X,Y) con soporte $S_{xy} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \times \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$ se distribuye de manera uniforme si su distribución de probabilidad es

$$p(x_i, y_j) = P\left[X = x_i, Y = y_j\right] = \frac{1}{k \cdot p} \quad \text{para todo} \quad (x_i, y_j) \in S_{xy}$$

Distribución uniforme continua bidimensional

Una variable aleatoria continua (X,Y) con función de densidad

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)(d-c)} & \text{si} \quad x \in [a,b] \times [c,d] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a,b] \times [c,d] \end{cases}$$

se dice que se distribuye uniformemente en su soporte $s_{xy} = [a,b] \times [c,d]$ y se puede comprobar que las distribuciones marginales son también uniformes, y que las variables X e Y son independientes, es decir, que $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$, siendo

$$f_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a,b] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a,b] \end{cases} \qquad \text{y} \qquad f_2(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{d-c} & \text{si} \quad x \in [c,d] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [c,d] \end{cases}$$

6.2. Distribución Binomial

Muchos experimentos están asociados a fenómenos aleatorios con sólo dos posibles resultados. En esta sección veremos que la distribución de Bernouilli modeliza estos experimentos, mientras que repetición de cualquiera de ellos se modeliza con la distribución binomial. Por ejemplo, lanzar una moneda al aire es un experimento aleatorio que sólo tiene dos posibles resultados y utilizaremos la distribución de Bernouilli para modelizarlo. Sin embargo, si lanzamos al aire una moneda 10 veces, entonces la distribución binomial modeliza el número de veces que sale cara o cruz.

Además, también veremos tres distribuciones más que están relacionadas con la distribución binomial: la distribución multinomial que la generaliza y las distribuciones Hipergeométrica y binomial negativa.

6.2.1. Distribución de Bernouilli

Un experimento que sólo admite 2 resultados posibles excluyentes:

- Suceso E (representa el éxito) con probabilidad $P(E) = p$.
- Suceso F (representa el fracaso) con probabilidad $P(F) = 1 - p = q$.

recibe el nombre de *prueba de Bernouilli.*

Consideremos la variable aleatoria discreta X asociada al experimento que asocia el valor 1 al suceso E con probabilidad p y el valor 0 al suceso F con probabilidad q. Esta variable recibe el nombre de *variable de Bernouilli* y se denota por $X \rightsquigarrow Ber(p)$.

La distribución de probabilidad es:

$$p(1) = P(X=1) = p \quad \text{y} \quad p(0) = P(X=0) = 1-p = q \qquad \text{con} \quad p+q=1$$

y su media, varianza y desviación típica son:

$$\mu_x = p \quad , \quad \sigma_x^2 = p \cdot q \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{p \cdot q}$$

Por ejemplo, estudiar los resultados de lanzar una moneda perfecta o trucada, el sexo de un colectivo, la validez de una pieza fabricada, etc., son experimentos que se modelizan con la distribución de Bernouilli. En todos ellos, sólo hay dos resultados posibles e incompatibles, y no necesariamente de igual probabilidad.

6.2.2. Distribución Binomial

Supongamos que se realizan n pruebas de Bernouilli sucesivas e independientes. Entonces, la variable aleatoria discreta

$$X = \text{“número de veces que ocurre el suceso } E \text{ (éxito) en las } n \text{ pruebas”}$$

se denomina *variable binomial* de parámetros n y p y se denota por $X \rightsquigarrow B(n, p)$ donde p es la probabilidad de éxito en cada prueba de Bernouilli. La variable binomial X se puede considerar como la suma de n variables independientes de Bernouilli, es decir

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n \quad \text{con} \quad X_i \rightsquigarrow Ber(p) \quad \text{para todo } i = 1, 2, ..., n$$

La variable aleatoria definida toma los valores $\{0, 1, 2, ..., n\}$ con probabilidad

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} \quad \text{con} \quad \begin{cases} n = 1, 2, 3, ... \\ k = 0, 1, 2, ..., n \\ 0 < p < 1 \\ q = 1 - p \end{cases}$$

y su media, varianza y desviación típica son:

$$\mu_x = n \cdot p \quad , \quad \sigma_x^2 = n \cdot p \cdot q \quad , \quad \sigma_x = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

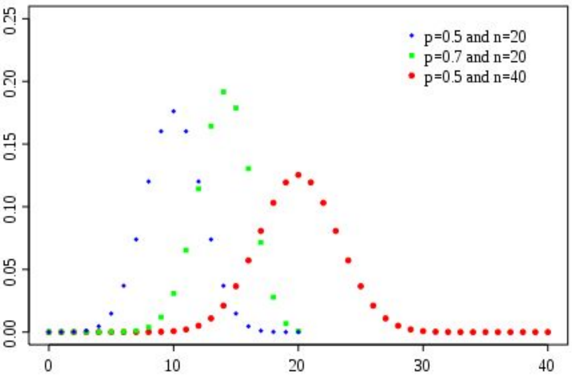

Figura 6.1: Distribuciones binomiales

Ejemplo 6.1 *De una caja de 25 fósforos de los cuales 5 tienen la cabeza blanca, se eligen 4 fósforos al azar con reposición. ¿Qué probabilidad hay de que, exactamente, uno de ellos tenga la cabeza blanca?*

El número de fósforos con la cabeza blanca, entre los cuatro elegidos, sigue una distribución binomial de parámetros $n = 4$ y $p = 5/25$. Por lo tanto, la probabilidad de que, exactamente, uno de ellos tenga la cabeza blanca es:

$$P(X = 1) = \binom{4}{1} \left(\frac{5}{25}\right)^1 \left(\frac{20}{25}\right)^3 = 0,4096$$

□

Observaciones:

- Si $n = 1$ entonces $B(1, p) \equiv Ber(p)$
- La distribución de probabilidad es simétrica si $p = q$. Si $p < q$ presenta asimetría a la derecha; si $p > q$, asimetría a la izquierda (ver figura 6.1).
- Aproximaciones: Si n es "grande" ($n > 30$) la distribución binomial se aproxima por una distribución de Poisson (si p ó q son "pequeños") o por una distribución normal (en otro caso) con los siguientes parámetros:

  a) Si $n > 30$ y $np < 5$ entonces $B(n, p) \approx P(np)$
  b) Si $n > 30$ y $nq < 5$ entonces $B(n, q) \approx P(nq)$
  c) Si $n > 30$, $np \geq 5$ y $nq \geq 5$ entonces $B(n, p) \approx N\left(np, \sqrt{npq}\right)$

  En las secciones 6.3.1 y 6.4.1 referidas a la distribución de Poisson y a la distribución Normal respectivamente, se detallan estas aproximaciones. Además, veremos que en el último caso, cuando utilicemos la distribución normal para aproximar a la binomial, será necesario hacer una corrección de continuidad.
- Valores tabulados: Los valores de $P(X = k)$ se encuentran tabulados para algunos valores de p entre 0 y 0,5. Para buscarlos se considera:

  $$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = b(n, k, p)$$

  Si el valor de p es mayor que 0,5 entonces hay que tener en cuenta la siguiente propiedad

  $$b(n, k, p) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k} = \binom{n}{n-k} \cdot q^{n-k} \cdot p^k = b(n, n-k, q)$$

  es decir, para encontrar en la tabla $P(X = k)$ con $p > 0,5$ se busca en la tabla correspondiente a $q = 1 - p$ la probabilidad $P(X = n - k)$.

  Interpolación: Si el valor de p es menor que 0,5 pero no está tabulado se interpola entre los valores inferior y superior más próximos a p.

6.2.3. Distribución Multinomial

La distribución Multinomial o Polinomial es una generalización de la distribución binomial cuando en cada prueba se consideran k sucesos excluyentes $A_1, A_2, ..., A_k$ con probabilidades $p_1, p_2, ..., p_k$ respectivamente, siendo $p_1 + p_2 + ... + p_k = 1$.

Supongamos que se realizan sucesivamente n pruebas independientes de este tipo y consideramos las siguientes variables aleatorias discretas:

$X_i =$ "número de veces que ocurre el suceso A_i en las n pruebas" con $i = 1, 2, ..., k$.

A la variable k-dimensional $X = (X_1, X_2, ..., X_k)$ se le denomina *variable polinomial o multinomial*. Su función de probabilidad es:

$$P\left[X_1 = n_1; X_2 = n_2; ...; X_k = n_k\right] = \frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} ... p_k^{n_k} \qquad \text{con} \qquad \sum_{i=1}^{k} n_i = n$$

Ejemplo 6.2 *Una agencia de publicidad ha determinado que, en una encuesta televisada, la probabilidad de que una persona vote por tres candidatos A, B y C es, respectivamente, 0'1, 0'4 y 0'5. Suponiendo que se realiza la encuesta a diez personas, se pide: (1) Probabilidad de que el candidato B no obtenga ningún voto, y el A y el C el mismo número de votos, (2) Probabilidad de que el A obtenga los diez votos, (3) Probabilidad de que A obtenga al menos 5 votos, y (4) Probabilidad de que B obtenga más votos que C.*

Solución: ... □

6.2.4. Distribución Hipergeométrica

Consideremos una población con N elementos de dos clases distintas de los cuales D elementos son de la clase E y $N-D$ elementos son de la clase complementaria F.

Al tomar un elemento de esta población, la probabilidad de que proceda de una u otra clase es

$$\begin{array}{rclclcrcl} P(E) & = & \dfrac{D}{N} & = & p & \Rightarrow & D & = & p\cdot N \\ P(F) & = & \dfrac{N-D}{N} & = & q=1-p & \Rightarrow & N-D & = & q\cdot N \end{array}$$

Consideremos el experimento consistente en tomar, sin reemplazamiento, n elementos consecutivamente de esta población. A la variable

$$X = \text{“número de elementos de la clase } E \text{ en una muestra de tamaño } n\text{”}$$

se la denomina *variable hipergeométrica*. Esta variable toma los valores $0, 1, 2, ..., n$ con probabilidad

$$P\left[X=k\right] = \frac{\binom{D}{k}\cdot\binom{N-D}{n-k}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{p\cdot N}{k}\cdot\binom{q\cdot N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} N=1,2,3,... \\ n=1,2,...,N \\ k=0,1,2,...,n \end{array}\right.$$

Esta distribución de probabilidad se denomina *distribución hipergeométrica* de parámetros N, D y n y se denota con la expresión $X \rightsquigarrow HGeo(N, D, n)$. Su media, varianza y desviación típica son

$$\mu_x = n\cdot p \quad ; \quad \sigma_x^2 = n\cdot p\cdot q\cdot\frac{N-n}{N-1} \quad ; \quad \sigma_x = \sqrt{n\cdot p\cdot q\cdot\frac{N-n}{N-1}}$$

Ejemplo 6.3 *Considérese un fabricante de automóviles que compra los motores a una compañía donde se fabrican bajo estrictas condiciones. El fabricante recibe un lote de 40 motores. Su plan para aceptar el lote consiste en seleccionar ocho, de manera aleatoria, y someterlos a prueba. Si encuentra que ninguno de los motores presenta serios defectos, el fabricante acepta el lote; de otra forma lo rechaza. Si el lote contiene dos motores con serios defectos, ¿cuál es la probabilidad de que sea aceptado?*

La distribución del número de motores sin defectos serios en el lote de 8 de los 40 motores es hipergeométrica de parámetros $N = 40$, $D = 2$ y $n = 8$. Por lo tanto, la probabilidad de que no encuentre ningún motor con defectos ($k = 0$) es $P(0) = P(X = 0) = 0'6359$. □

La diferencia entre las distribuciones hipergeométrica y binomial es que, en la distribución binomial, las probabilidades permanecen constantes a lo largo de todas las pruebas (extracciones con reemplazamiento), mientras que en la distribución hipergeométrica, las probabilidades varían de una a otra prueba (extracciones sin reemplazamiento). Sin embargo, si N es "grande" respecto a n, las probabilidades varían muy poco de una prueba a la siguiente, por lo que en estos casos ($n/N < 0'1$) se puede decir que la variable hipergeométrica sigue aproximadamente una distribución binomial

$$P[X=k] = \frac{\binom{p\cdot N}{k}\cdot\binom{q\cdot N}{n-k}}{\binom{N}{n}} \stackrel{N\to\infty}{\longrightarrow} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ejemplo 6.4 *Un fabricante asegura que sólo el 1 % de su producción total se encuentra defectuosa. Supónganse que se ordenan 1000 artículos y se seleccionan 25 al azar para inspeccionarlos. Si el fabricante se encuentra en lo correcto, ¿cuál es la probabilidad de observar dos o más artículos defectuosos en la muestra?*

El experimento del ejemplo se modeliza con una distribución hipergeométrica de parámetros $N = 1000$, $D = p\cdot N = 10$ y $n = 25$ que se aproxima por una distribución binomial de parámetros $n = 25$ y $p = 0'01$. Por lo tanto, la probabilidad de observar dos o más artículos defectuosos es $0'0258$. □

6.2.5. Distribución Binomial negativa

Consideremos un experimento que consiste en realizar sucesivas pruebas de Bernouilli. La variable

$$X = \text{"número de fracasos antes de obtener el n-ésimo éxito"}$$

se denomina *binomial negativa*. La distribución de probabilidad asociada es

$$P[X=k] = \binom{n+k-1}{k}\cdot p^n\cdot q^k \quad \text{con} \quad \begin{cases} k = 0,1,2,3,... \\ n = 1,2,... \\ 0 < p < 1 \end{cases}$$

y se denomina *distribución binomial negativa* de parámetro n y p, se denota por $X \rightsquigarrow Bn(n,p)$, su media, varianza y desviación típica son

$$\mu_x = \frac{n\cdot q}{p} \quad ; \quad \sigma_x^2 = \frac{n\cdot q}{p^2} \quad ; \quad \sigma_x = \frac{\sqrt{n\cdot q}}{p}$$

y sus funciones generatrices de probabilidad y de momentos son

$$G(s) = \left(\frac{p}{1-sq}\right)^n \quad \text{y} \quad M(t) = \left(\frac{p}{1-q\mathrm{e}^t}\right)^n$$

Ejemplo 6.5 *Para obtener el permiso de conducir se realiza un test con veinte preguntas. Se sabe que una determinada persona tiene una probabilidad de 0,8 de contestar bien a cada pregunta. Para aprobar el test es necesario contestar bien a diez preguntas. ¿Cuál es la probabilidad de que apruebe al contestar la décimo segunda pregunta?*

El experimento del ejemplo se modeliza con una distribución binomial negativa de parámetros $n = 20$ y $p = 0'8$, y la probabilidad que nos piden es $0'24$. □

La distribución binomial negativa se relaciona con la distribución binomial de la siguiente manera:

$$\text{Si } X \rightsquigarrow Bn(n,p) \text{ entonces } \left\{ \begin{array}{l} P(X \leq k) = P(Y \geq n) \\ P(X = k) = P(Y = n-1) \cdot p \end{array} \right\} \text{ siendo } Y \rightsquigarrow B(n+k-1,p)$$

que permite calcular las probabilidades de la distribución binomial negativa a partir de las probabilidades de la distribución binomial.

Ejemplo 6.6 *Calcular la probabilidad de obtener cinco cruces antes de la tercera cara.*

Si la variable X representa el número de cruces antes de la tercer cara, entonces

$$X \rightsquigarrow Bn(3, 1/2) \qquad \text{y} \qquad P(X=5) = \binom{7}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5 \approx 0'082$$

Pero si queremos utilizar la distribución binomial, entonces

$$P(X=5) = P(Y=2)\cdot\frac{1}{2} = \binom{7}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^5\frac{1}{2} \approx 0'082$$

sabiendo que $Y \rightsquigarrow B(7, 1/2)$. □

Por último, debemos indicar que para poder utilizar la distribución binomial negativa en aquellos ejemplos de extracciones de una urna, estas extracciones han de ser con reemplazamiento.

6.3. Distribuciones asociadas a fenómenos aleatorios de espera

Cuando la demanda de un servicio excede la capacidad del servidor de atender a las demandas, se produce una cola. Pensemos, por ejemplo en la cola de clientes que se forma en las cajas de un supermercado. A continuación presentamos tres distribuciones que está íntimamente relacionadas con los fenómenos de espera que se estudian en la teoría de colas: la distribución de Poisson, la exponencial y la geométrica.

La distribución de Poisson surge cuando estudiamos el número de demandas (clientes) que acceden a un sistema de colas por unidad de tiempo y la distribución exponencial representa el tiempo que transcurre entre la llegada de dos demandas consecutivas. Ambas distribuciones están asociadas a sistemas de colas en tiempo continuo. Sin embargo, la distribución geométrica está asociada a sistemas de colas en tiempo discreto donde los eventos sólo pueden ocurrir en los extremos de intervalos de longitud fija.

6.3.1. Distribución de Poisson

Una variable aleatoria discreta X se dice que sigue una *distribución de probabilidad de Poisson* de parámetro λ si toma todos los valores enteros $0, 1, 2, \ldots$ con probabilidades

$$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}\cdot e^{-\lambda} \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{l} k = 0, 1, 2, \ldots \\ \lambda > 0 \end{array} \right.$$

y se denota por $X \rightsquigarrow P(\lambda)$. Su media, varianza y desviación típica son:

$$\mu_x = \lambda \qquad , \qquad \sigma_x^2 = \lambda \qquad , \qquad \sigma_x = \sqrt{\lambda}$$

y sus funciones generatrices de probabilidad y de momentos son

$$G(s) = \mathrm{e}^{\lambda(s-1)} \qquad \text{y} \qquad M(t) = \mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^t - 1)}$$

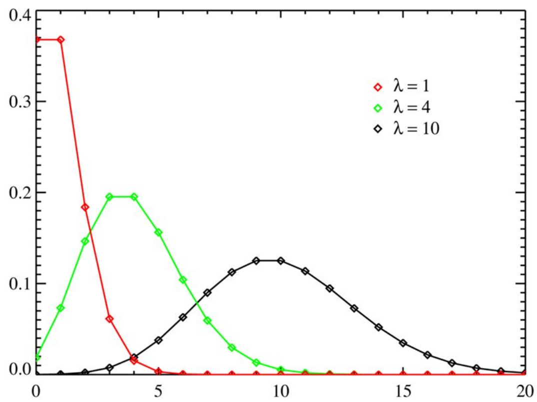

Figura 6.2: Distribuciones de Poisson

La distribución de Poisson representa el "número de ocurrencias de un fenómeno aleatorio durante un periodo de tiempo fijo", cuando se verifican estas tres propiedades: (1) el número de ocurrencias sólo depende de la amplitud del intervalo de tiempo y no del instante desde donde se mide (proceso estacionario), (2) el número de ocurrencias en un intervalo es independiente del número de ocurrencias en cualquier otro intervalo de tiempo anterior o posterior (propiedad markoviana), y (3) podemos dividir el intervalo de tiempo en subintervalos donde la probabilidad de una ocurrencia en cada uno de ellos es proporcional (con constante λ) a su longitud.

En este caso, cuando se verifican las tres condiciones, el parámetro λ de la distribución de Poisson es el número esperado de ocurrencias por unidades tiempo, y el número medio de ocurrencias en un intervalo de amplitud Δt es $t\Delta t$.

Muchos de los ejemplos que modeliza esta distribución están asociados a fenómenos de espera (teoría de colas) como, por ejemplo, el número de llamadas telefónicas a la hora que recibe una central telefónica, el número de piezas defectuosas en una gran muestra tomada de un lote en el que la proporción de piezas defectuosas es pequeña, el número de clientes que llegan a una ventanilla de pagos de un banco por periodos de diez minutos, el número de emisiones de partículas radioactivas durante un periodo dado, el número de accidentes durante un periodo de tiempo, etc.

La distribución de Poisson se presenta en casos de probabilidad pequeña. Si un suceso E tiene una probabilidad p (pequeña) de ocurrir al realizar una prueba elemental, la variable

$$X = \text{“número de veces que ocurre el suceso } E \text{ durante un gran número de pruebas”}$$

sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = n \cdot p$. Por ello, esta distribución se utiliza como aproximación de la distribución binomial cuando n es grande y p o q son pequeños. En general, cuando $n > 30$ y $np < 5$ la distribución binomial de parámetros n y p se aproxima por una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = np$, o bien, si $n > 30$ y $nq < 5$ la distribución binomial de parámetros n y q se aproxima por una distribución de Poisson de parámetro $\lambda = nq$.

Ejemplo 6.7 *Aproximación de una distribución binomial por una distribución de Poisson.*

Solución: ... □

6.3.2. Distribución Geométrica o de Pascal

Consideremos un experimento que consiste en realizar sucesivas pruebas de Bernouilli, todas ellas independientes y con probabilidad p de éxito. En este caso, la variable

$$X = \text{“número de pruebas necesaria para obtener el primer éxito”}$$

se denomina *variable geométrica.* La distribución de probabilidad asociada es

$$P[X = k] = p \cdot q^{k-1} \quad \text{con} \quad \begin{cases} k = 1, 2, 3, ... \\ 0 < p < 1 \quad ; \quad q = 1 - p \end{cases}$$

y se denomina *distribución geométrica o de Pascal* de parámetro p y se denota por $X \rightsquigarrow Geo(p)$. Su media, varianza y desviación típica son

$$\mu_x = \frac{1}{p} \quad ; \quad \sigma_x^2 = \frac{q}{p^2} \quad ; \quad \sigma_x = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

y sus funciones generatrices de probabilidad y de momentos son

$$G(s) = \frac{ps}{1 - sq} \quad \text{si} \quad s < \frac{1}{q} \qquad \text{y} \qquad M(t) = \frac{pe^t}{1 - qe^t} \quad \text{si} \quad e^t < \frac{1}{q}$$

El número de lanzamientos de una moneda, que son necesarios para obtener la primera cara, o el número de extracciones (con reemplazamiento) de una urna, que son necesarias para encontrar la bola blanca entre varias bolas negras, son ejemplos que se modelizan con la distribución geométrica.

Ejemplo 6.8 *Para obtener el permiso de conducir se realiza un test con veinte preguntas. Se sabe que una determinada persona tiene una probabilidad de $0'8$ de contestar bien a cada pregunta. Calcule la probabilidad de que la primera pregunta que contesta bien sea la tercera que hace.*

El experimento del ejemplo de modeliza con una distribución geométrica de parámetro $p = 0'8$ y la probabilidad que nos piden es $0'032$. □

También se denomina geométrica a la variable

$$X = \text{“número de fracasos antes de obtener el primer éxito”}$$

y, en este caso, su distribución de probabilidad asociada es

$$P\left[X=k\right]=p\cdot q^{k} \quad \text{con} \quad \left\{\begin{array}{l} k=0,1,2,3,... \\ 0<p<1 \quad ; \quad q=1-p \end{array}\right.$$

su media, varianza y desviación típica son

$$\mu_x=\frac{q}{p} \quad ; \quad \sigma_x^2=\frac{q}{p^2} \quad ; \quad \sigma_x=\frac{\sqrt{q}}{p}$$

y sus funciones generatrices de probabilidad y de momentos son

$$G(s)=\frac{p}{1-sq} \quad \text{si} \quad s<\frac{1}{q} \qquad \text{y} \qquad M(t)=\frac{p}{1-q\mathrm{e}^t} \quad \text{si} \quad \mathrm{e}^t<\frac{1}{q}$$

6.3.3. Distribución Exponencial

Se dice que la variable aleatoria continua X sigue una *distribución exponencial* de parámetro $\lambda>0$ y se denota por $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$ si su función de densidad es de la forma:

$$X \rightsquigarrow Exp(\lambda) \quad \text{si} \quad f(x)=\left\{\begin{array}{ll} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{en el resto} \end{array}\right.$$

y su media, varianza, desviación típica y función generatriz de momentos son

$$\mu_x=\frac{1}{\lambda} \quad ; \quad \sigma_x^2=\frac{1}{\lambda^2} \quad ; \quad \sigma_x=\frac{1}{\lambda} \quad ; \quad M(t)=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}$$

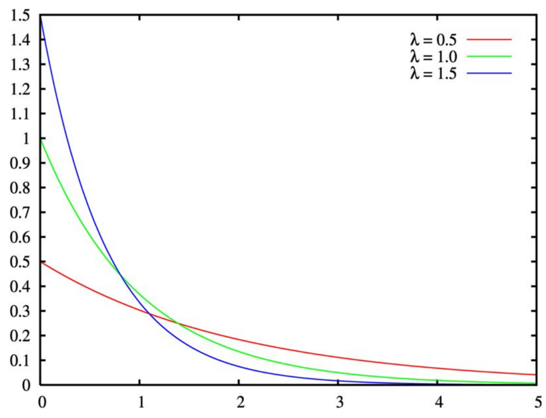

Figura 6.3: Distribuciones exponenciales

La variable aleatoria exponencial representa el tiempo de espera entre dos sucesos, cuando el momento en que ocurre el primero no influye en la distribución de tiempos de espera; es decir,

Si $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$ entonces $P(X>a+x \,|\, X\geq a)=P(X>x)$ para todo $a>0$ y $x>0$.

Esta propiedad se denomina *falta o pérdida de memoria* pues la probabilidad del tiempo de espera no depende del momento en el que empiece a considerarse.

Existe una relación entre las variables Geométrica y Poisson con la distribución Exponencial relacionada con los fenómenos de espera (teoría de colas). Por un lado, si la variable $X \rightsquigarrow P(\lambda)$ representa el número de ocurrencias por unidad de tiempo, entonces $Y \rightsquigarrow Exp(\lambda)$ representa el tiempo transcurrido entre ocurrencias consecutivas. Por otro lado, la distribución geométrica se puede asociar a fenómenos aleatorios de espera en los que el tiempo sólo puede darse en intervalos de longitud fija pues si $X \rightsquigarrow Exp(\lambda)$ entonces la distribución que asocia a cada $n \in \mathbb{N}$ la probabilidad $P(X \in (n, n+1])$ es un geométrica de parámetro $p = 1 - e^{-\lambda}$

6.4. Distribuciones normales

En esta sección vamos a presentar la distribución de probabilidad más importante: La distribución normal. Hay dos razones fundamentales que acreditan la importancia de esta distribución:

1. Por un lado, modeliza la distribución de probabilidad de muchas variables aleatorias que se presentan en los estudios científicos (ingeniería, medicina, economía, ...).
2. Por otro lado, aproxima a la distribución de la media de muestras aleatorias de una misma distribución (teorema central del límite) que es un resultado básico para la inferencia estadística.

En esta sección vamos a presentar las distribuciones normales, unidimensional y bidimensional, y el teorema central del límite.

6.4.1. Distribución Normal o de Laplace-Gauss

Se dice que la variable aleatoria continua X sigue una *distribución normal* de media μ y desviación típica σ y se denota por $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ cuando su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{con} \qquad \left\{ \begin{array}{c} -\infty < \mu < \infty \\ \sigma > 0 \end{array} \right.$$

y su media, varianza y desviación típica son

$$\mu_x = \mu \qquad ; \qquad \sigma_x^2 = \sigma^2 \qquad ; \qquad \sigma_x = \sigma$$

Características de la distribución:

- Representación gráfica: La función de densidad $f(x)$ presenta un máximo en $x = \mu$, dos puntos de inflexión en $x = \mu - \sigma$ y $x = \mu + \sigma$ y tiene al eje OX como asíntota. Además, es simétrica respecto de la recta $x = \mu$ y por tanto, la media, la mediana y la moda coinciden en este punto (ver figura 6.4).
- Aditividad: La suma de dos variables aleatorias normales independientes es otra variable aleatoria normal, es decir

$$\text{Si } X_1 \rightsquigarrow N(\mu_1, \sigma_1) \text{ y } X_2 \rightsquigarrow N(\mu_2, \sigma_2) \text{ entonces } X_1 \pm X_2 \rightsquigarrow N\left(\mu_1 \pm \mu_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}\right)$$

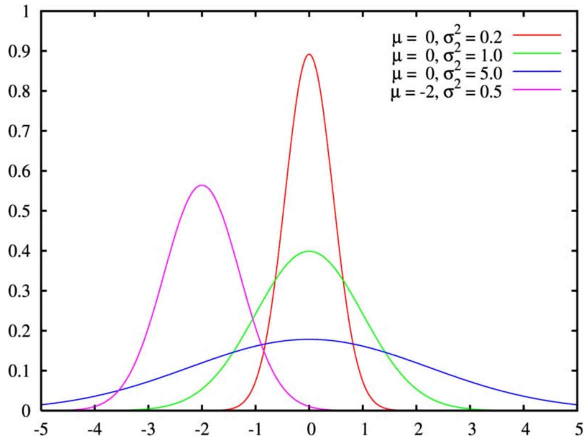

Figura 6.4: Distribuciones normales

Más general, si tomamos muestras de tamaño n de una población $N(\mu, \sigma)$ entonces $\bar{x} \rightsquigarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$

Variable normal tipificada

Si la variable X es $N(\mu, \sigma)$ entonces la nueva variable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

sigue también una distribución normal de media $\mu_z = 0$ y desviación típica $\sigma_z = 1$, es decir, $Z \rightsquigarrow N(0, 1)$. Esta variable Z se denomina *variable normal tipificada* y su función de densidad es

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad \text{con} \qquad -\infty < z < \infty$$

La distribución de la variable Z se encuentra tabulada aunque sólo aparecen valores de Z no negativos, o áreas $\alpha = P(Z \geq z_\alpha) \leq 0,5$. En otro caso se utiliza la simetría

$$Z_\alpha = -Z_{1-\alpha} \qquad \text{y por tanto} \qquad \begin{cases} P(Z \geq -Z_\alpha) = P(Z \geq Z_{1-\alpha}) = 1 - \alpha \\ P(Z \leq Z_\alpha) = 1 - P(Z \geq Z_\alpha) = 1 - \alpha \end{cases}$$

La gran utilidad de la variable normal tipificada Z es que nos permite calcular áreas (probabilidades) de cualquier variable con distribución normal, es decir, si $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$ entonces

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right)$$

Aproximación

La distribución normal de media np y desviación típica $\sqrt{npq}$ se utiliza como aproximación de la distribución binomial de parámetros n y p cuando n es grande y $np \geq 5$ y $nq \geq 5$.

Para utilizar correctamente la aproximación de una variable aleatoria discreta X con distribución binomial por una variable aleatoria continua Y con distribución normal es necesario hacer una corrección de continuidad de tal manera que:

$$\begin{array}{lcl} P(X=a) & = & P(a-0'5 \leq Y \leq a+0'5) \\ P(a<X<b) & = & P(a+0'5 \leq Y \leq b-0'5) \\ P(a \leq X \leq b) & = & P(a-0'5 \leq Y \leq b+0'5) \\ P(a<X \leq b) & = & P(a+0'5 \leq Y \leq b+0'5) \\ P(a \leq X<b) & = & P(a-0'5 \leq Y \leq b-0'5) \end{array}$$

6.4.2. Distribución normal bidimensional

Se dice que la variable aleatoria (X,Y) sigue una *distribución normal bidimensional* de medias μ_x y μ_y, desviaciones típicas σ_x y σ_y, y covarianza $\rho\sigma_x\sigma_y$ (correlación ρ), si su función de densidad es

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)\left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right) + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2\right]}$$

con $-\infty<\mu_x<\infty$, $-\infty<\mu_y<\infty$, $\sigma_x>0$, $\sigma_x>0$ y $-1<\rho<1$.

Las distribuciones marginales de las variables X e Y son distribuciones normales de media μ_x y μ_y, y de desviación σ_x y σ_y, respectivamente.

Si X e Y no están correlacionadas ($\rho=0$) entonces la distribución conjunta se puede factorizar como producto de las distribuciones marginales y, por lo tanto, las variables son independientes. Y viceversa, es decir, si las variables aleatorias X e Y son independientes y sus distribuciones son normales, entonces la distribución conjunta es una distribución normal bidimensional. Esta relación entre la independencia y la correlación, que se verifica para las distribuciones normales, no es cierta en general, es decir, que dos variables aleatorias cualesquiera pueden estar no correlacionadas ($\rho=0$) sin que sean independientes.

Por último, y como consecuencia de los resultados anteriores, podemos deducir que si Z_1 y Z_2 son variables aleatorias independientes con distribución normal tipificada, entonces la función de densidad conjunta es

$$f(z_1,z_2) = \frac{1}{2\pi}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(z_1^2+z_2^2)}$$

que corresponde a una distribución normal bidimensional.

6.4.3. Teorema central del límite

El teorema central del límite no es un resultado concreto. Es el nombre genérico por el que se conocen una serie de resultados que establecen la convergencia de la distribución de probabilidad de una suma creciente de variables aleatorias hacia la distribución normal. Existen diferentes versiones del teorema, en función de las condiciones utilizadas para asegurar la convergencia. Una de las más simples establece que es suficiente que las variables que se suman sean independientes, idénticamente distribuidas, con valor esperado y varianza finitas.

Sea $\{X_n\}$ una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, todas ellas con media μ y desviación típica σ, ambas finitas. Sea $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la sucesión de sumas parciales (con media $n\mu$ y varianza $n\sigma^2$). Entonces la distribución de probabilidad de su variable tipificada converge a la distribución normal de media 0 y desviación 1, es decir

$$Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \quad \longrightarrow \quad N(0,1)$$

También podemos expresar este resultado en términos de la media aritmética de las variables, de la siguiente manera. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ un conjunto de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, todas ellas con media μ y desviación típica σ. Si n es suficientemente grande ($n > 30$), entonces la distribución de probabilidad de la media aritmética de las variables ($\bar{X}$) es aproximadamente una distribución normal de media $\mu_{\bar{x}} = \mu$ y desviación típica $\sigma_{\bar{x}}^2 = \sigma/\sqrt{n}$, es decir,

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \quad \longrightarrow \quad N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Obsérvese que $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ puede representar una muestra aleatoria de la distribución de probabilidad de una determinada variable de una población y el resultado nos garantiza que la media muestral se distribuye según una distribución normal con la misma media que la variable poblacional estudiada. Y este resultado es independiente de la distribución poblacional de partida. Además, la desviación de la media muestral, que se conoce como error típico o estándar, disminuye conforme aumenta el tamaño de la muestra.

6.5. Distribuciones derivadas de la normal

En esta sección vamos a presentar tres distribuciones de probabilidad de tipo continuo que serán esenciales en el desarrollo de la inferencia estadística: la distribución χ^2 de Pearson, la distribución t de Student y la distribución F de Fisher-Snedecor. Como veremos, estas tres distribuciones surgen a partir de la distribución normal.

6.5.1. Distribución χ^2 de Pearson

Si $X_1, X_2, ..., X_n$ son n variables aleatorias $N(0,1)$ independientes entre sí, entonces la variable positiva

$$\chi^2 = X_1^2 + X_2^2 + ... + X_n^2$$

recibe el nombre de χ^2 *de Pearson* con n grados de libertad, se denota por χ_n^2 y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma(n/2)} e^{-x/2} x^{(n/2)-1} \qquad \text{con} \qquad x > 0$$

siendo Γ la función gamma definida así: $\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1}\, dt$ para todo $x > 0$. Se puede comprobar que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ y que para todo $k > 0$ se verifica que $\Gamma(k+1) = k \cdot \Gamma(k)$.

La media, la varianza y la desviación típica de la distribución χ_n^2 es

$$\mu_x = n \qquad ; \qquad \sigma_x^2 = 2n \qquad ; \qquad \sigma_x = \sqrt{2n}$$

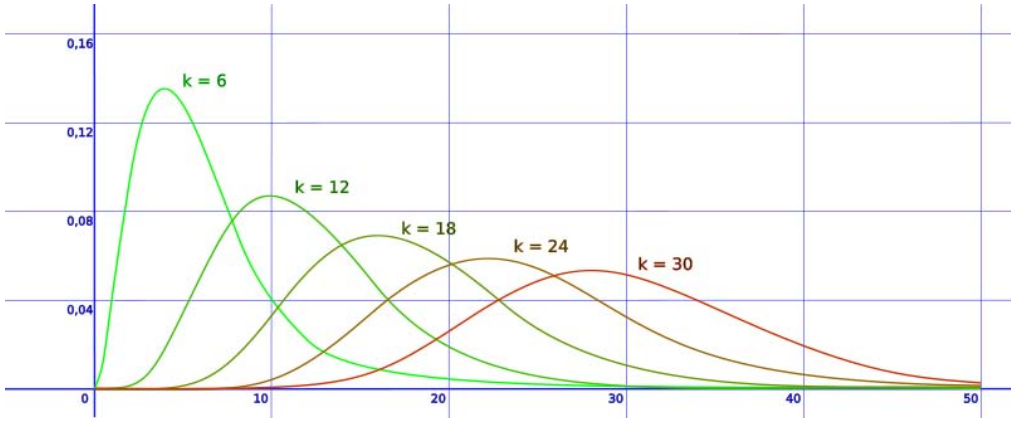

Figura 6.5: Distribuciones χ^2_k

Características de la distribución:

- La variable sólo toma valores positivos por tratarse de la suma de los cuadrados de n variables (ver figura 6.5).

- Aditividad: La suma de dos variables aleatorias independientes χ^2 con n_1 y n_2 grados de libertad respectivamente es una nueva variable aleatoria χ^2 con n_1+n_2 grados de libertad, es decir,
$$\chi^2_{n_1} + \chi^2_{n_2} = \chi^2_{n_1+n_2}$$

- Aproximación: Las distribuciones χ^2 de Pearson son asimétricas a la derecha y se aproximan asintóticamente a la distribución normal (ver figura 6.5). Para $n > 30$ la variable
$$\sqrt{2 \cdot \chi^2_n} \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad N(\sqrt{2n-1}, 1)$$

- Si tomamos muestras de tamaño n con media $\bar{x}$ y cuasivarianza s^2 de una población $N(\mu, \sigma)$, la variable
$$\chi^2_{n-1} = (n-1) \cdot \frac{s^2}{\sigma^2}$$
es una χ^2 con $n-1$ grados de libertad.

- Valores tabulados: Para el uso de las tablas consideramos un punto $\chi^2_{\alpha;n}$ (punto crítico) que representa el valor de la abscisa que tiene a la derecha una área igual a α (nivel de significación) en una χ^2 de Pearson con n grados de libertad. Es decir,
$$P(\chi^2_n \geq \chi^2_{\alpha;n}) = \alpha$$
Para áreas a la izquierda se tiene:
$$P(\chi^2_n \leq \chi^2_{\alpha;n}) = 1 - P(\chi^2_n \geq \chi^2_{\alpha;n}) = 1 - \alpha$$

6.5.2. Distribución t de Student

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ y X son $n+1$ variables que se distribuyen según una $N(0,\sigma)$ entonces la variable

$$t_n = \frac{X}{\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{Z}{\sqrt{\chi_n^2/n}}$$

se denomina t *de Student* con n grados de libertad, y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{n}\cdot\beta\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-\dfrac{n+1}{2}} \qquad \text{con} \qquad \begin{cases} n = 1, 2, \ldots \\ -\infty < x < \infty \end{cases}$$

siendo β la función beta que se define a partir de la función gamma de la siguiente manera: $\beta(x,y) = \Gamma(x)\cdot\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$.

La media de la distribución t de Student es 0 si $n > 1$ y su varianza es $\dfrac{n}{n-2}$ si $n > 2$.

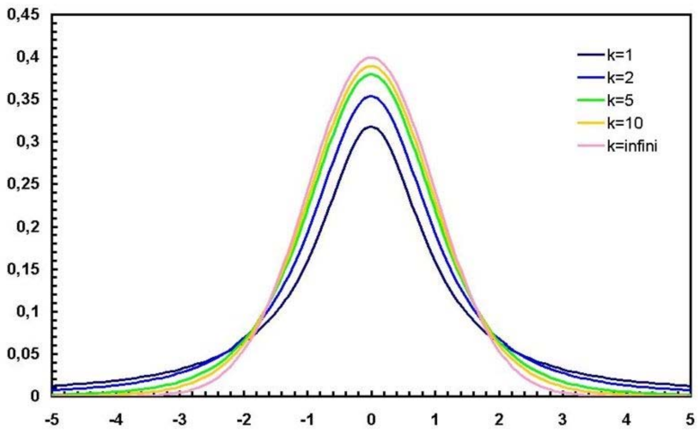

Figura 6.6: Distribuciones t_k de Student

Características de la distribución:

- La variable toma todos los valores de la recta real y es simétrica respecto al eje OY (ver figura 6.6).

- La distribución t de Student se aproxima asintóticamente ($n \to \infty$) a la distribución normal tipificada (ver figura 6.6).

- Si tomamos muestras de tamaño n con media $\bar{x}$ y cuasivarianza s^2 de una población $N(\mu,\sigma)$, la variable

  $$t_{n-1} = \frac{\bar{x}-\mu}{s}\cdot\sqrt{n}$$

  es una t de Student con $n-1$ grados de libertad.

- Valores tabulados: Para el uso de las tablas consideramos un punto $t_{\alpha;n}$ (punto crítico) que representa el valor de la abscisa que tiene a la derecha una área igual a α (nivel de significación) en una t de Student con n grados de libertad. Es decir,

$$P(t_n \geq t_{\alpha;n}) = \alpha$$

En la tabla sólo se encuentran valores $t \geq 0$ (o áreas $\alpha \leq 0,5$) por lo que es necesario utilizar las relaciones:

$$t_{\alpha;n} = -t_{1-\alpha;n} \qquad \text{y} \qquad P(t_n \leq t_{\alpha;n}) = 1-\alpha$$

6.5.3. Distribución F de Fisher-Snedecor

Sean X_1 y X_2 dos variables χ^2 de Pearson con n_1 y n_2 grados de libertad respectivamente, independientes entre sí. Entonces a la variable

$$F_{n_1,n_2} = \frac{X_1/n_1}{X_2/n_2} = \frac{\chi^2_{n_1}/n_1}{\chi^2_{n_2}/n_2}$$

se le denomina F *de Fisher-Snedecor* con n_1 y n_2 grados de libertad, y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{\Gamma((n_1+n_2)/2)}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} n_1^{n_1/2} n_2^{n_2/2} \frac{x^{(n_1/2)-1}}{(n_1x+n_2)^{(n_1+n_2)/2}} \qquad \text{con} \qquad x>0$$

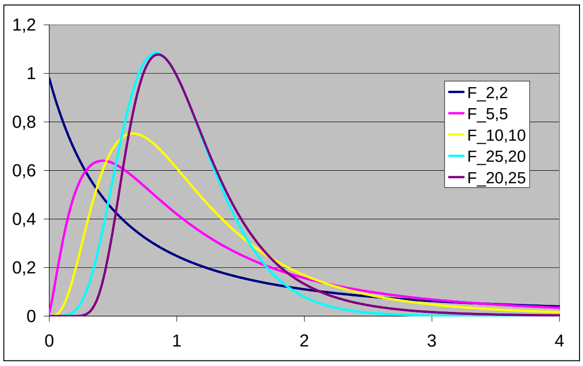

Figura 6.7: Distribuciones F_{n_1,n_2} de Snedecor

Características de la distribución:

- La variable sólo toma valores positivos y su distribución es asimétrica a la derecha (ver figura 6.7).

- Valores tabulados: Para el uso de las tablas consideramos un punto $F_{\alpha;n_1;n_2}$ (punto crítico) que representa el valor de la abscisa que tiene a la derecha una área igual a α (nivel de significación) en una F de Fisher-Snedecor con n_1 y n_2 grados de libertad. Es decir,

$$P(F_{n_1;n_2} \geq F_{\alpha;n_1;n_2}) = \alpha$$

Sólo disponemos de tablas para los siguientes valores de α: $0'1$, $0'05$, $0'025$, $0'01$ y $0'005$. Para otros valores de α entre $0'005$ y $0'1$ será necesario interpolar. Sin embargo, cuando necesitemos valores de α próximos a uno, utilizaremos la relación:

$$F_{\alpha;n_1;n_2} = \frac{1}{F_{1-\alpha;n_2;n_1}}$$

6.6. Simulación y Método de Montecarlo

En esta sección presentamos el *Método de Montecarlo* que agrupa una serie de procedimientos basados en la simulación de distribuciones de probabilidad. Este método se aplica a una gran variedad de problemas tanto aleatorios como deterministas, que resultan complicados de abordar de manera analítica o donde la experimentación directa con la realidad puede presentar inconvenientes (coste elevado, tiempo, pruebas destructivas o imposibles, etc.). En estos casos, se realizan experimentos en un ordenador, utilizando muestras aleatorias, para modelizar el problema y obtener soluciones aproximadas.

El nombre de Método de Montecarlo hace referencia al casino que se ubica en el principado de Mónaco, al tomar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. Aunque su origen es anterior, su desarrollo se produce a mediados del siglo XX coincidiendo con el desarrollo de los ordenadores. Una de las primera aplicaciones fue la resolución de integrales que no se pueden resolver por métodos analíticos, usando números aleatorios. Posteriormente se utilizó para cualquier esquema que emplease números aleatorios, usando variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas.

Veamos un sencillo ejemplo que pone de manifiesto el método y sus posibles aplicaciones.

Ejemplo 6.9 *Consideremos el círculo centrado en el origen y de radio unidad. Sea S el sector circular correspondiente al área del círculo dibujada en el primer cuadrante. Determine un valor aproximado del área del sector circular.*

En primer lugar, consideramos el cuadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ y $(0,1)$ donde se inscribe el sector circular S. Ahora vamos a simular una distribución uniforme sobre el cuadrado. Para ellos generamos dos números aleatorios en el intervalo [0,1] que nos determinan un punto del cuadrado. Este punto podrá pertenecer o no al sector circular. Repetimos el experimento N veces, generando N puntos en el cuadrado, y resulta que n de ellos ($n < N$) también pertenecían al sector circular. Si aplicamos la regla de Laplace podemos determinar que la relación entre el área del sector circular y el área del cuadrado es, aproximadamente, n/N. Como el área del cuadrado es 1, entonces n/N es una aproximación del área del sector circular y, por lo tanto, $4n/N$ aproxima a π. □

Obsérvese que el procedimiento empleado en el ejemplo es fácilmente generalizable para el cálculo aproximado de la integral definida de cualquier función acotada.

Los resultados obtenidos con este procedimiento son aproximados, sin embargo el error absoluto de la estimación decrece en la relación $1/\sqrt{N}$, siendo N el tamaño de la muestra simulada, en virtud del teorema central del límite.

El Método de Montecarlo se basa en la simulación de distribuciones. En el ejemplo, hemos simulado una distribución uniforme bidimensional generando números aleatorios en su soporte

$[0,1]\times[0,1]$ y, para ello, generábamos pares de números aleatorios en el intervalo $[0,1]$ (el producto de las distribuciones uniformes de dos variables aleatorias independientes es una distribución uniforme bidimensional cuyo soporte es el producto cartesiano de los soportes de las variables independientes).

En la mayoría de los lenguajes de programación y de los programas específicos de calculo matemático, están implementadas funciones (rand, random, aleat, ...) para la generación de números aleatorios en determinados intervalos. Existen multitud de algoritmos generadores de estos números aleatorios, y de métodos generales y específicos para la simulación de cualquier distribución de probabilidad.

A modo de ejemplo, presentamos un sencillo procedimiento, conocido como *método de inversión*, para la simulación de algunas distribuciones, en concreto, aquellas para cuya función de distribución, sea sencillo calcular la inversa. Sea X una variable aleatoria continua con función de distribución F_x estrictamente creciente, y sea U una variable aleatoria con distribución uniforme en el intervalo (0,1). Entonces, la variable aleatoria $F_x^{-1}(U)$ tiene a F_x como función de distribución.

Ejemplo 6.10 *Utilice el método de inversión para determinar un procedimiento que permita generar muestras aleatorias de tamaño n de una distribución exponencial de parámetro 2.*

Si $X \rightsquigarrow Exp(2)$ entonces $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$ con $x > 0$. Si igualamos la expresión de la función a la variable U (uniforme) y despejamos la variable x obtenemos la expresión de la inversa de la función F:

$$F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-2x} = u \quad \longrightarrow \quad x = F^{-1}(u) = -\frac{1}{2}\log(1-u)$$

Por lo tanto, el procedimiento consiste en generar n números aleatorios $u_i \in (0,1)$ con $i = 1,\dots,n$ (valores de n variables aleatorias independientes con distribución $U[0,1]$), de manera que los valores $x_i = -\log(1-u_i)/2$ constituyen la muestra aleatoria buscada. $\square$

6.7. Relación de problemas

1. Distribución uniforme discreta. Consideramos la variable $X \rightsquigarrow U(1, 2, ..., n)$, se pide:

   a) Probar que es una distribución de probabilidad (la suma de probabilidades es 1) y representarla.
   b) Calcular y representar la función de distribución.
   c) Deducir la esperanza, varianza y desviación típica.
   d) Calcular la mediana y la moda.

2. Distribución de Bernouilli. Se pide:

   a) Probar que es una distribución de probabilidad (la suma de probabilidades es 1) y representarla.
   b) Calcular y representar la función de distribución.
   c) Deducir la esperanza, varianza y desviación típica.
   d) Calcular la mediana y la moda.

3. El 20 % de los hogares de una ciudad están asegurados contra incendios. Una compañía de seguros está realizando una campaña de publicidad informando a los hogares de sus ofertas. Si cada tarde contacta al azar con 5 hogares, se pide:

   a) ¿Que distribución de probabilidad modeliza el número de hogares, de esos 5, que aún no están asegurados?
   b) Determinar el número de hogares que se espera que no estén asegurados.
   c) Probabilidad de que sólo estén asegurados dos hogares.
   d) Probabilidad de que estén asegurados al menos tres hogares.
   e) Probabilidad de que ninguno esté asegurado.
   f) Probabilidad de que alguno esté asegurado.

4. La probabilidad de ganar a un determinado juego es $0'1$. Si jugamos diez partidas

   a) ¿Qué distribución de probabilidad representa el número de partidas ganadas?
   b) ¿Cuantas partidas esperamos ganar?
   c) ¿Qué probabilidad hay de perder todas las partidas?
   d) ¿Qué probabilidad hay de ganar (exactamente) una partida?
   e) ¿Qué probabilidad hay de ganar alguna una partida?
   f) ¿Qué probabilidad hay de ganar (exactamente) dos partidas?
   g) ¿Qué probabilidad hay de ganar, al menos, dos partidas?
   h) ¿Qué probabilidad hay de ganar más de la mitad de las partidas?

5. Buscar en las tablas las siguientes probabilidades correspondientes a variables aleatorias discretas que siguen distribuciones de Poisson con distintos parámetros.

   a) Si $X \rightsquigarrow P(2'6)$ calcular $P(X = 4)$ b) Si $X \rightsquigarrow P(1'1)$ calcular $P(X = 13)$
   c) Si $X \rightsquigarrow P(9)$ calcular $P(X = 16)$ d) Si $X \rightsquigarrow P(2'3)$ calcular $P(X = 5)$
   e) Si $X \rightsquigarrow P(2'6)$ calcular $P(X \leq 2)$ f) Si $X \rightsquigarrow P(1'1)$ calcular $P(X \geq 13)$
   g) Si $X \rightsquigarrow P(7)$ calcular $P(X > 16)$ h) Si $X \rightsquigarrow P(1'5)$ calcular $P(X < 12)$

6. En una gasolinera la llegada de vehículos sigue una distribución de Poisson de parámetro $1'6$. Calcule las probabilidades de los siguientes sucesos:

   a) Que lleguen dos vehículos.

   b) Que llegue algún vehículo.

   c) Que lleguen más de tres vehículos.

   d) Que el número de vehículos que lleguen esté comprendido entre 2 y 5 (ambos inclusive).

7. La probabilidad de ganar a un determinado juego es $0'1$. Si jugamos 40 veces

   a) ¿Cuantas partidas esperamos ganar?

   b) ¿Qué probabilidad hay de ganar exactamente 16 partidas?

   c) ¿Qué probabilidad hay de ganar, al menos, 16 partidas?

   d) ¿Qué probabilidad hay de perder todas las partidas?

   e) ¿Qué probabilidad hay de ganar alguna partida?

   Compare los resultados de este ejercicio con los obtenidos en el ejercicio 4 y extraiga conclusiones.

8. Si $X \rightsquigarrow B(150; 0'02)$, calcule las siguientes probabilidades

   a) $P(X = 2)$ b) $P(X < 3)$

   c) $P(X \geq 4)$ d) $P(X \geq 3 \,|\, X \leq 4)$

9. Distribución uniforme continua. Supongamos que $X \rightsquigarrow U[a, b]$.

   a) Represente la función

   $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si} \quad x \in [a, b] \\ 0 & \text{si} \quad x \notin [a, b] \end{cases}$$

   y pruebe que es una función de densidad.

   b) Calcule y represente la función de distribución.

   c) Deduzca las fórmulas de la esperanza, la varianza y la desviación típica.

   d) Calcule la mediana y la moda.

   e) Aplique los resultados obtenidos a la variable $A \rightsquigarrow U[0, 1]$, que representa la elección al azar de un número aleatorio entre 0 y 1.

10. Un profesor propone un cuestionario de cien preguntas tipo test a un curso con 200 alumnos. Suponiendo que las puntuaciones X obtenidas por los alumnos siguen una distribución normal de media 60 puntos y varianza 100. Calcule las siguientes probabilidades:

    a) $P(X \geq 70)$ b) $P(X \leq 80)$ c) $P(X \leq 30)$

    d) $P(X \geq 46)$ e) $P(39 \leq X \leq 80)$ f) $P(80 \leq X \leq 82'5)$

    g) $P(30 \leq X \leq 40)$ h) $P(|X - 60| \leq 20)$ i) $P(|X - 60| \geq 20)$

11. Consideremos el mismo enunciado del ejercicio anterior. Se pide:

a) Número de alumnos que obtuvieron 70 o más puntos.

b) Hallar el rango intercuartílico, interdecílico e intercentílico. Interpretar resultados.

c) Nota mínima correspondiente al $30'5\,\%$ de los alumnos con mejor nota.

d) Nota mínima correspondiente al $83'65\,\%$ de los alumnos con mejor nota.

e) Nota máxima correspondiente al $2'17\,\%$ de los alumnos con peor nota.

f) Si eliminamos al $25\,\%$ de los alumnos con peores notas y al $10\,\%$ de los alumnos con mejores notas, ¿entre qué notas están el resto de los alumnos?

12. Si $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$, pruebe e interprete las siguientes igualdades:

a) $P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = 0'6826$

b) $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0'9544$

c) $P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0'9973$

13. Si $X \rightsquigarrow N(\mu, \sigma)$, calcule α para que la probabilidad $P(\mu - \alpha\sigma \leq X \leq \mu + \alpha\sigma)$ sea igual a $0'9$, $0'95$ ó $0'99$.

14. Una marca de automóviles decide otorgar un premio a los distribuidores que vendan más de 250 automóviles en un año. El número de automóviles vendidos al año por los distribuidores A y B está normalmente distribuido de la forma siguiente:

Distribuidor	Media	Desviación
A	190	28
B	165	45

Se pide:

a) A priori, sin hacer cálculos, ¿qué distribuidor parece tener más posibilidad de obtener un premio?

b) Determine a qué distribuidor beneficia más la decisión de la empresa, calculando el porcentaje de años que obtendrá premio cada uno de los dos distribuidores.

c) ¿Qué cantidad mínima de automóviles debería determinar la marca, si quiere que ambos distribuidores tengan la misma probabilidad de llevarse el premio?

d) Si se asocian los dos distribuidores A y B, ¿qué porcentaje de los años obtendrán premio por vender más de 500 automóviles?

15. Si $X \rightsquigarrow B(1500; 0'02)$, calcule las siguientes probabilidades

a) $P(X = 20)$ b) $P(X < 30)$

c) $P(X \geq 40)$ d) $P(X \geq 30 \,|\, X \leq 40)$

Compare los resultados de este ejercicio con los obtenidos en el ejercicio 8 y extraiga conclusiones.

16. Variable aleatoria con distribución χ^2 de Pearson.

a) Calcule los puntos críticos:

$$\chi^2_{0'90;5} \quad , \quad \chi^2_{0'01;26} \quad , \quad \chi^2_{0'025;8} \quad , \quad \chi^2_{0'08;10} \quad , \quad \chi^2_{0'015;41}$$

b) Calcule las probabilidades:

$$P(\chi^2_8 \geq 3'49) \quad , \quad P(\chi^2_8 \leq 15'507) \quad , \quad P(\chi^2_{10} \geq 4)$$
$$P(\chi^2_{20} \leq 29) \quad , \quad P(7'255 \leq \chi^2_{17} \leq 30'191) \quad , \quad P(\chi^2_{61} \leq 50)$$

17. Variable aleatoria con distribución t de Student.

a) Calcule los puntos críticos:

$$t_{0'20;20} \quad , \quad t_{0'99;10} \quad , \quad t_{0'25;10} \quad , \quad t_{0'05;90} \quad , \quad t_{0'15;35}$$

b) Calcule las probabilidades:

$$P(t_{10} \geq 1'372) \quad , \quad P(t_8 \leq 2'896) \quad , \quad P(t_{20} \geq -1'325)$$
$$P(t_8 \leq 1'2) \quad , \quad P(-0'5 \leq t_6 \leq 0'6) \quad , \quad P(|t_{24}| \geq 2)$$

18. Variable aleatoria con distribución F de Fisher-Snedecor.

a) Calcule los puntos críticos:

$$F_{0'10;10;12} \quad , \quad F_{0'05;5;24} \quad , \quad F_{0'01;50;30} \quad , \quad F_{0'90;28;30} \quad , \quad F_{0'02;7;20} \quad , \quad F_{0'92;24;20}$$

b) Calcule las probabilidades:

$$P(F_{6;12} \geq 2'331) \quad , \quad P(F_{2;8} \leq 4'459) \quad , \quad P(F_{25;50} \geq -1'2)$$
$$P(F_{10;20} \geq 3) \quad , \quad P(F_{5;4} \leq 5) \quad , \quad P(2 \leq F_{10;20} \leq 2'25)$$

19. Calcule los cuartiles de las siguientes distribuciones:

a) $B(10, 1/2)$ b) $B(40, 1/10)$ c) $B(40, 1/20)$ d) $B(100, 0'85)$

e) $P(1)$ f) $P(2'5)$ g) $N(0, 1)$ h) $N(1'25, 0'05)$

20. Calcule el rango interdecílico de las siguientes distribuciones:

a) χ^2_7 b) χ^2_{85} c) t_{10} d) $F_{30,6}$

6.8. Relación de problemas II – Temas 4, 5 y 6

1. El juego A se gana si al lanzar 100 veces dos dados se obtiene al menos tres veces un "doble seis". Otro juego B se gana si al lanzar 100 veces un dado se obtiene al menos 15 veces el "seis".

   a) Determine qué juego es más favorable.

   b) Si el 40 % de los jugadores optan por el juego A, mientras que el resto juegan al B, ¿cuál es el porcentaje de ganadores?

   c) En las mismas condiciones del apartado anterior, ¿en qué proporción se encuentran los que han jugado al juego A, entre los ganadores?

2. La distribución de las puntuaciones de los 200 candidatos a una sección de aprendizaje en un test es una normal de media $32'3$ y desviación $8'5$. Se decide que el 15 % de los candidatos serán orientados a otra sección por tener un nivel demasiado alto y el 25 % a otra por tener el nivel demasiado bajo.

   a) ¿Entre qué límites habrá que tener la nota para ser admitido en esta sección?

   b) De los candidatos admitidos a esta sección, ¿cuántos superan la puntuación 35?

3. En el control de calidad de una fábrica, se ha determinado que el porcentaje de cigarrillos defectuosos es del 1 %. Si una máquina los envasa en paquetes de 20 unidades, se pide:

   a) Calcular la probabilidad de que un paquete tenga a lo sumo 1 cigarrillo defectuoso.

   b) Si los paquetes se envasan en cartones de 10 paquetes, calcular la probabilidad de que existan al menos 2 paquetes con más de un cigarrillo defectuoso.

   c) Si los cartones se envasan en cajas de 100 cartones, calcular la probabilidad de que exista alguna caja con al menos 2 paquetes con más de un cigarrillo defectuoso.

4. Al analizar el efecto de un repelente para insectos, se encontró que los frutos no tratados, eran atacados en un 10 %, mientras que solo lo eran en un 1 % si habían recibido el tratamiento. Los frutos se envasan en cajas de 200 unidades.

   a) Encuentre la probabilidad de que en una caja que contiene frutos tratados, se encuentren más de 20 atacados.

   b) Halle la probabilidad de que en una caja cuyos frutos no fueron tratados, se encuentren más de 20 atacados.

   c) A un almacén llega un 30 % de cajas con frutos tratados. ¿Cuál es la probabilidad de que una caja con 22 frutos atacados, no haya sido tratada?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que una caja con más de 20 frutos atacados, haya recibido el tratamiento?

   e) Halle la probabilidad de que de 5 frutos extraídos al azar de una caja, encontremos exactamente 2 atacados.

   f) Encuentre la probabilidad de obtener 2 atacados al extraer 5 frutos de una caja con exactamente 22 atacados.

5. Una variable aleatoria X, se distribuye según una normal de media 5 y varianza 4. Halle las probabilidades de los siguientes sucesos:

   a) $P(X < 1)$ b) $P(2 < X < 7)$ c) $P(X > 5'6)$

   y determine el valor de a para que se verifique $P(X > a) = 0'05$

6. ¿Cuál es la probabilidad de que de 18 000 lanzamientos de un dado, el número de ases esté comprendido entre 2 900 y 3 100? Comparar los resultados entendiendo si el número de ases está comprendido entre 2900 y 3100 estrictamente o no estrictamente.

7. La probabilidad de que una máquina falle determinado día, es de $0'0375$ si se trata de un día soleado y de $0'05$ si es lluvioso. El servicio técnico debe atender las averías de las 150 máquinas instaladas. Si el 20 % de los días resultan ser lluviosos, determine las siguientes probabilidades:

   a) Probabilidad de que una máquina concreta se averíe en un día.
   b) Probabilidad de recibir un día más de 7 avisos.
   c) Probabilidad de no recibir ninguna llamada de avería.

8. Una fábrica produce un 5 % de piezas defectuosas. Un control de calidad previo al envasado, es capaz de detectar el 80 % de las piezas defectuosas, que son retiradas, pero también retira equivocadamente el 1 % de las piezas correctas.

   a) Calcular la proporción de piezas defectuosas envasadas.
   b) Si se colocan en paquetes de 40 piezas. ¿Qué probabilidad existe de obtener 2 o más piezas defectuosas por paquete?

9. La proporción de tabletas de aspirinas que resultan defectuosas (están partidas, tienen diferente peso, ...) es del 3 %.

   a) Si las aspirinas se envasan en tubos de 10 tabletas. ¿Cuál es la probabilidad de que un tubo contenga a lo sumo una tableta defectuosa?
   b) Si los tubos se colocan en cajas de 300 unidades (tubos). ¿Cuál es la probabilidad de que una caja contenga exactamente 45 tubos con más de una tableta defectuosa?
   c) Calcule la probabilidad del apartado anterior si los tubos contienen 50 tabletas.

10. Una central telefónica distingue entre dos tipos de usuarios (particulares y empresas). La probabilidad de que la línea esté ocupada entre la 9 y las 14 horas para particulares es del 2 % mientras que para las empresas este porcentaje de ocupación es del 15 %

    a) Se desea contactar con 150 particulares, hallar la probabilidad de que 10 o más tengan la línea ocupada.
    b) Se desea contactar con 150 empresas, hallar la probabilidad de que 15 o más tengan la línea ocupada.
    c) Si las empresas constituyen el 25 % de los usuarios. ¿Cuál será la probabilidad de encontrar ocupada la línea si marcamos un número al azar?
    d) Si llamamos al azar a un teléfono y resulta ocupado, ¿Cuál será la probabilidad de que pertenezca a una empresa? ¿y a un particular? Observa como ha cambiado esta información las probabilidades asignadas a priori tanto a los particulares como a las empresas.

11. El tiempo que tarda una máquina en perforar un material de tipo 1 se distribuye según una normal de media 2 y desviación $0'5$, un material de tipo 2 según una normal de media 3 y desviación $0'1$ y un material de tipo 3 según una normal de media 4 y desviación 2. Una empresa recibe una partida de placas de los tres tipos de material donde el 20 % de las placas son de tipo 1 y el 70 % del resto son de tipo 2.

    a) Calcular la probabilidad de que la máquina tarde más de tres segundos en perforar una placa elegida al azar.

    b) Si se ha tardado más de 3 segundos en perforar una placa elegida al azar, ¿con qué material es más probable que esté fabricada?

    c) En el control de calidad se rechaza una placa si se ha tardado más de 3 segundos en perforarla. Definimos la variable aleatoria X que cuenta el número de placas rechazadas. Si analizamos un lote de 100, calcular la probabilidad de rechazar más de 40 sabiendo que el número de placas rechazadas es mayor de 20 y menor o igual que 60, es decir, calcular $P[X > 40 \,|\, 20 < X \leq 60]$

12. Una fábrica produce listones de madera para cerillas, para lo que se necesita que se corten a 3 cm. La cortadora (cortadora/envasadora) que tienen desde hace 5 años, proporciona listones cuya longitud se distribuye de forma normal de media 3 y varianza $0'25$.

    La dirección adquirió hace un mes un nuevo modelo de cortadora que proporciona listones cuya longitud se distribuye de forma normal de media 3 y varianza $0'23$.

    Un listón es considerado defectuoso si su longitud es menor que $2'365$ cm. y tendremos que revisar toda la producción diaria si al examinar una caja de cerillas de 100 unidades (todas procedentes de la misma cortadora) encontramos al menos 13 defectuosas.

    Si la nueva cortadora produce un 20 % más de listones que la antigua:

    a) Por término medio, ¿cuántos días al año habrá que revisar la producción diaria?

    b) Si la producción de ayer tuvo que ser revisada, ¿cuánto vale la probabilidad de que la caja analizada contenga cerillas de la cortadora antigua? y ¿de qué máquina es más probable que provenga la caja analizada?

13. Se pretenden estudiar las especificaciones de fábrica de un sistema automático de vigilancia para exteriores que aseguran que es capaz de detectar al 90 % de los intrusos que se acerquen en días soleados, pero el aparato resulta muy sensible a la humedad y sólo es capaz de detectar al 50 % de los intrusos si el día es lluvioso. Se pretenden verificar las especificaciones de fábrica del sistema.

    a) Si acercamos 36 individuos al local en un día soleado, ¿qué probabilidad hay de que el sistema no detecte a 10 o más individuos?

    b) Calcular la misma probabilidad si el día fuese lluvioso.

    Instalamos el sistema en un local situado en la Costa del Sol donde la proporción de días soleados es 9 veces mayor que la de días lluviosos.

    c) Calcular la probabilidad de que el sistema no sea capaz de detectar a 10 o más intrusos en un día cualquiera.

    d) Si el sistema no ha detectado a 10 o más intrusos, ¿es más probable que el día haya sido soleado o lluvioso?

14. El tiempo t (en minutos) que se retrasa un avión de Iberia que cubre la línea Málaga-Madrid es una variable aleatoria continua con densidad de probabilidad

$$f(t) = \begin{cases} k \cdot (25 - t^2) & \text{si} \quad -5 < t < 5 \\ 0 & \text{en cualquier otro instante.} \end{cases}$$

[Nota: Un valor negativo de t significa que el avión adelantó su llegada.]

a) Calcular el valor de k.

b) ¿Qué retraso se espera que tenga el avión?

c) ¿Qué probabilidad hay de que llegue con más de tres minutos de retraso?

d) Si en la ventanilla de información nos confirman que el avión trae retraso, ¿qué probabilidad hay de que llegue más de 3 minutos tarde?

e) Si en los dos apartados anteriores se pregunta lo mismo, ¿por qué se obtienen resultados distintos?

Supongamos que la compañía Aviaco también realiza vuelos en la misma línea Málaga-Madrid pero transporta la mitad de viajeros que Iberia (consideraremos que no hay más compañías que cubran esa línea) y su tiempo de retraso sigue una distribución t de Student con 3 grados de libertad.

d) Sin saber a qué compañía (Iberia o Aviaco) pertenece el próximo avión que llega a Málaga procedente de Madrid, ¿qué probabilidad hay de que llegue con más de 3 minutos de adelanto sobre el horario previsto?

e) Si el avión llegó con más de tres minutos de adelanto, ¿a qué compañía es más probable que perteneciera?

15. El tiempo t (en segundos) que tarda una máquina en perforar un material de tipo I es una variable aleatoria continua que se distribuye según la siguiente función de densidad:

$$f(t) = \begin{cases} k \cdot (t^2 - 4t) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq 4 \\ 0 & \text{en cualquier otro instante.} \end{cases}$$

Se pide:

a) Calcular el valor de k.

b) ¿Qué probabilidad hay de que tarde menos de 3 segundos en perforar una placa de material tipo I?

c) ¿Cómo varía la misma probabilidad del apartado anterior, si sabemos de antemano que tardará más de un segundo?

d) Calcular el tiempo medio que tarda en perforar placas de tipo I.

Supongamos que el tiempo que tarda esta misma máquina en perforar un material de tipo II es una variable aleatoria con distribución normal de media 2 y desviación $0'5$. Además, de todas las placas que perfora la máquina en un mismo día, el 20 % son de material tipo I y el 80 % son de material tipo II.

e) Elegimos al azar una placa. Calcular la probabilidad de que la máquina tarde más de tres segundos en perforarla.

f) Si la máquina tardó más de tres segundos en perforar esta placa, ¿qué probabilidad hay de ser una material tipo I?

6.9. Anexo I: Justificación de algunos resultados

En esta sección vamos a presentar la justificación de algunos de los resultados que hemos visto en este tema. Incluiremos aquellas demostraciones que utilizan resultados básicos de matemáticas o aquellas que se apoyan en los conocimientos aprendidos en otras asignaturas de matemáticas de la titulación.

6.9.1. Distribución Binomal

La suma de las probabilidades es 1 ...... (por el binomio de Newton)

6.9.2. Propiedades de la función Gamma

La función gamma Euler se define de la siguiente manera:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

Esta función es continua, está definida (integral convergente) para todo $x > 0$ y, entre sus propiedades, destacan las siguientes:

1. $\Gamma(1) = 1$
2. $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$
3. $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$

Además, a partir de las dos primeras propiedades se puede deducir que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\Gamma(n+1) = n!$ por lo que, de alguna manera, esta función generaliza a la función factorial.

Veamos la demostración de estas tres propiedades. En primer lugar vamos a demostrar que $\Gamma(1) = 1$ de la siguiente manera:

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \Big[- e^{-t} \Big]_0^{\infty} = 0 - (-1) = 1$$

Para demostrar la segunda propiedad $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$ utilizamos el método de integración por partes tomando $u = t^x$ y $dv = e^{-t}\, dt$, y por lo tanto $du = x\, t^{x-1}$ y $v = -e^{-t}$), obteniedo

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{\infty} t^x\, e^{-t}\, dt = \Big[- t^x\, e^{-t} \Big]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} x\, t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = 0 + x \int_0^{\infty} t^{x-1}\, e^{-t}\, dt = x\, \Gamma(x)$$

Y para demostrar la tercera propiedad $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ será necesario demostrar el siguiente resultado previo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}$$