2. 3 OTROS MODELOS DE DISEÑO DE EXPERIMENTOS

DISEÑO DE EXPERIMENTOS CON DOS FACTORES

Este diseño sirve para analizar de forma simultánea los efectos que pueden producir los diferentes niveles de dos factores sobre una magnitud que se estudia en los individuos de una población y las interacciones que pueden darse entre los niveles de esos dos factores.

Variable de respuesta: Representa el conjunto de valores que puede tomar una magnitud en los individuos de una población.

Factor: Es cualquier condición o situación que pueda influir sobre la variable de respuesta.

Nivel de un factor: Es cada una de las distintas facetas, formas, grados o valores que puede presentar ese factor en el diseño. Cada nivel puede producir un efecto distinto sobre la variable de respuesta.

Tratamiento: Es cada una de las combinaciones entre un nivel de un factor y un nivel del otro que se analizan en el diseño.

En el diseño de experimentos se toma una muestra de n individuos de la población, se divide al azar en tantos grupos como tratamientos se hayan formado, y cada grupo se somete a un tratamiento distinto.

Unidad muestral: Es cada individuo sobre el que se realiza el experimento.

Réplicas de un tratamiento: son las unidades muestrales que reciben ese tratamiento.

Ejemplo

Una empresa dedicada a la fabricación de baterías está interesada en diseñar una batería que sea relativamente insensible a la temperatura ambiente. Para ello decide probar con tres materiales distintos: M1, M2, y M3. Para estudiar el efecto del material y la temperatura se diseña el siguiente experimento: comprobar la duración de las baterías en horas, fabricando baterías con los tres materiales y trabajando las baterías a tres niveles de temperatura: Baja, Media y Alta. El experimento se replicaba cuatro veces y los resultados obtenidos son los de la tabla adjunta. Se desea analizar estos datos y estudiar la influencia de los factores material y temperatura en el rendimiento de la batería

	TEMPERATURAS											
MATERIAL	BAJA				MEDIA				ALTA			
M1	130	155	74	180	34	40	80	75	20	70	82	58
M2	150	188	159	126	136	122	106	115	25	70	58	45
M3	138	110	168	160	174	120	150	139	96	104	82	60

Variable de respuesta: rendimiento de la batería, medida en horas de duración

Factores:

- **Material:** con tres niveles (M1, M2 y M3)
- **Temperatura:** con tres niveles (Baja, Media y Alta)

Tratamientos: son las 9 combinaciones formadas por un tipo de material y una temperatura

Unidades muestrales: son las distintas baterías que se han medido= 3 x 3 x 4=36 unidades

Cada tratamiento tiene 4 réplicas

DISEÑO CRUZADO DE DOS FACTORES CON GRUPOS DE K RÉPLICAS

Este diseño consiste en formar todas las combinaciones posibles de los niveles de los dos factores, de tal modo que cada nivel de un factor se combina con todos los niveles del otro factor.

El diseño cruzado se utiliza para analizar los efectos de los niveles de cada uno de los factores sobre una magnitud de los individuos de una población, y los efectos, en esa misma magnitud, de las interacciones que se pueden dar entre los pares de niveles que forman los tratamientos.

* Los factores de un diseño cruzado se designan como **factor fila, A** , y **factor columna, B**, según se sitúan sus niveles en la tabla de los datos del diseño.
* Notaremos I al número de niveles del factor fila y J al número de niveles del factor columna. Los niveles del factor A se notarán $A_1, A_2, \cdots, A_I$ (el subíndice i varía de 1 a I). Los niveles del factor B se notarán $B_1, B_2, \cdots, B_J$ (el subíndice j varía de 1 a J)
* Cada tratamiento se representa por los índices i y j que corresponden al nivel (i) del primer factor y al nivel (j) del segundo factor que forman ese tratamiento.
* Notaremos K al número de réplicas de cada uno de los grupos que se forman en el diseño.
* Cada unidad muestral se identifica con los índices i, j de su grupo y el índice k de su orden en el grupo.
* En el ejemplo anterior, el **material** es el factor fila, con 3 niveles, ($I = 3$) y la **temperatura** es el factor columna, con 4 niveles ($J = 4$). En el diseño se tomaron 36 baterías ($n = 36$) y se repartieron en 9 grupos (3 x 3 = 9 tratamientos) con 4 réplicas en cada uno ($K = 4$).

De acuerdo con estas notaciones, el diseño cruzado con K réplicas consiste en elegir I niveles del factor A y J niveles del factor B y combinar cada uno de los I niveles, A_i del factor A con todos los J niveles B_j del factor B, para formar $I \times J$ "tratamientos"$A_i \times B_j$.

Una vez formados los tratamientos, se toman n unidades muestrales, se reparten al azar en $I \times J$ grupos con K réplicas en cada uno, y se asigna a cada grupo un "tratamiento"diferente. En este diseño, el número total de unidades muestrales debe ser $n = I \times J \times K$.

PLANTEAMIENTO MATEMÁTICO DEL ADEVA DOBLE CON INTERACCIÓN

A las K unidades del grupo (i, j), que reciben el tratamiento (A_i, B_j), se les asignan las variables aleatorias $X_{ij1}, X_{ij2}, \cdots, X_{ijK}$, que representan los datos que pueden darse en esas K unidades. La variabilidad X_{ijk} de la $k-$ésima unidad experimental asignada al tratamiento (A_i, B_j), se debe a la suma de cinco efectos:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \epsilon_{ijk}$$

* μ es la media general de la población, un parámetro desconocido que representa el efecto común a todas las unidades
* ϵ_{ijk} es la variable aleatoria que representa la variabilidad intrínseca de la unidad muestral ijk y sigue una ley Normal $N(0, \sigma_e^2)$, cuya varianza se llama "varianza del error"o "residual". Todas estas variables aleatorias son independientes entre sí.
* α_i es el efecto producido por el nivel A_i que recibe la unidad
* β_j es el efecto producido por el nivel B_j que recibe la unidad
* $(\alpha\beta)_{ij}$ es el efecto adicional de la interacción entre los niveles por el nivel A_i y B_j

Los efectos α_i, β_j, $(\alpha\beta)_{ij}$ de los factores tienen significados distintos, según que los dos factores sean de efectos fijos, o de efectos aleatorios, o un factor de cada clase

ANOVA DEL DISEÑO CRUZADO CON DOS FACTORES Y K RÉPLICAS
o ANOVA DE DOS CRITERIOS CON INTERACCIONES

El objetivo de este ANOVA es utilizar los datos de un diseño cruzado para contrastar, a la vez, tres hipótesis nulas sobre los niveles de los dos factores:

(a) La ausencia de efectos de los niveles del primer factor.

(b) La ausencia de efectos de los niveles del segundo factor.

(c) La ausencia de interacciones de niveles del primer factor con niveles del segundo

En este diseño, las variables aleatorias que representan la variabilidad propia de las unidades muestrales se designan con la notación ϵ_{ijk}

SUPUESTOS DE VALIDEZ DEL ANOVA DE DOS CRITERIOS

1.– INDEPENDENCIA: Las variables aleatorias ϵ_{ijk} son independientes entre sí.

2.– NORMALIDAD: Todas estas variables aleatorias siguen leyes Normales $N(0, \sigma_e^2)$

3.– HOMOGENEIDAD DE LAS VARIANZAS: Todas estas leyes normales tienen la misma varianza, σ_e^2, que se llama **varianza de los errores** o **varianza residual**

MODELO I o DE EFECTOS FIJOS

En este modelo los niveles de cada factor se eligen a voluntad

* Los efectos α_i son parámetros desconocidos, que verifican $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$
Para cada índice i, el parámetro $\mu_{i\cdot} = \mu + \alpha_i$ se llama media del nivel A_i

* Los efectos β_j son parámetros desconocidos, que verifican $\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 0$
Para cada índice j, el parámetro $\mu_{\cdot j} = \mu + \beta_j$ se llama media del nivel B_j

* Los efectos $(\alpha\beta)_{ij}$ son parámetros desconocidos, que verifican $\sum_{i=1}^{I}(\alpha\beta)_{ij} = 0$ y $\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij} = 0$
Para cada grupo (i, j), el parámetro $\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij}$ se llama media del tratamiento A_iB_j

Objetivos del ADEVA en un Modelo de Efectos Fijos

Decidir si existen interacciones entre los niveles de ambos factores

Decidir si las medias de los diferentes niveles de cada factor son distintas

Estimar los parámetros $\mu_{i\cdot}$ y α_i; $\mu_{\cdot j}$ y β_j; y μ_{ij} y $(\alpha\beta)_{ij}$

Hipótesis que se contrastan

PARA EL FACTOR A

H_0: Las medias de los niveles A_i son iguales

$$\mu_{i\cdot} = \mu \quad \forall i$$

H_1: Existe alguna media $\mu_{i\cdot}$ distinta a la media de la población

$$\exists \quad \mu_{i\cdot} \neq \mu$$

PARA EL FACTOR B

$H_0^{'}$: Las medias de los niveles B_j son iguales

$$\mu_{\cdot j} = \mu, \quad \forall j$$

$H_1^{'}$: Existe alguna media $\mu_{\cdot j}$ distinta a la media de la población

$$\exists \quad \mu_{\cdot j} \neq \mu$$

PARA LA INTERACCIÓN

$H_0^{''}$: No hay interacciones entre los niveles de A y los niveles de B

$$(\alpha\beta)_{ij} = 0, \quad \forall i \forall j$$

$H_1^{''}$: Sí hay interacciones entre los niveles de A y los niveles de B

$$\exists \quad (\alpha\beta)_{ij} \neq 0$$

MODELO II o DE EFECTOS ALEATORIOS

En este modelo los niveles de cada factor se eligen aL azar entre un amplio conjunto de posibles niveles.

* Los efectos α_i son variables aleatorias independientes que siguen una misma ley normal, $N(0, \sigma_A^2)$, donde σ_A^2 es la varianza de los efectos del factor A

* Los efectos β_j son variables aleatorias independientes que siguen una misma ley normal, $N(0, \sigma_B^2)$, donde σ_B^2 es la varianza de los efectos del factor B

* Los efectos $(\alpha\beta)_{ij}$ son variables aleatorias independientes que siguen una misma ley normal $N(0, \sigma_I^2)$ donde σ_I^2 es la varianza de las interacciones entre todos los pares (A_i, B_j)

Se llama VARIANZA TOTAL al parámetro $\sigma_T^2 = \sigma_A^2 + \sigma_B^2 + \sigma_I^2 + \sigma_e^2$, que indica la variabilidad total de la población.

Las varianzas $\sigma_A^2, \sigma_B^2, \sigma_I^2, \sigma_e^2$ se llaman componentes de la varianza total, porque indican la influencia relativa de cada factor, de las interacciones entre ellos y del azar en la variabilidad total de la población.

Objetivos del ADEVA en un Modelo de Efectos Aleatorios

Contrastar si existe variabilidad e interacción entre los niveles

Estimar los parámetros que componen la varianza total

Hipótesis que se contrastan

PARA EL FACTOR A

H_0: Los niveles del factor A no producen variabilidad

$$\sigma_A^2 = 0$$

H_1: Los niveles del factor A sí producen variabilidad

$$\sigma_A^2 > 0$$

PARA EL FACTOR B

$H_0^{'}$: Los niveles del factor B no producen variabilidad

$$\sigma_B^2 = 0$$

$H_1^{'}$: Los niveles del factor B sí producen variabilidad

$$\sigma_B^2 > 0$$

PARA LA INTERACCIÓN

$H_0^{''}$: No existen interacciones entre los niveles de A y los niveles de B

$$\sigma_I^2 = 0$$

$H_1^{''}$: Sí existen interacciones entre los niveles de A y los niveles de B

$$\sigma_I^2 > 0$$

MODELO III o DE EFECTOS MIXTOS

En este modelo los niveles de uno de los factores se elige a voluntad (vamos a suponer que son los correspondientes al factor A) y los del otro factor se eligen al azar (vamos a suponer que son los niveles del factor B).

* Los efectos α_i son parámetros desconocidos, que verifican $\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$
Para cada índice i, el parámetro $\mu_{i\cdot} = \mu + \alpha_i$ se llama media del nivel A_i

* Los efectos β_j son variables aleatorias independientes que siguen una misma ley normal, $N(0, \sigma_B^2)$, donde σ_B^2 es la varianza de los efectos del factor B

* Los efectos $(\alpha\beta)_{ij}$ son variables aleatorias independientes entre sí, de las β_j y de los errores, que siguen una misma ley normal $N(0, \sigma_I^2)$ donde σ_I^2 es la varianza de las interacciones entre todos los pares (A_i, B_j)

Se llama VARIANZA TOTAL al parámetro $\sigma_T^2 = \sigma_B^2 + \sigma_I^2 + \sigma_e^2$, que indica la variabilidad total de la población.
En el modelo mixto, cada variable X_{ijk} sigue una ley Normal $(N(\mu_{i\cdot}, \sigma_T^2)$

Objetivos del ADEVA en un Modelo Mixto

Decidir si existen interacciones entre los niveles de ambos factores

Decidir si las medias de los diferentes niveles del factor A son distintas

Contrastar si existe variabilidad entre los niveles del factor B

Hipótesis que se contrastan

PARA EL FACTOR A

H_0: Las medias de los niveles A_i son iguales

$$\mu_{i\cdot} = \mu \quad \forall i$$

H_1: Existe alguna media $\mu_{i\cdot}$ distinta a la media de la población

$$\exists \quad \mu_{i\cdot} \neq \mu$$

PARA EL FACTOR B

$H_0^{'}$: Los niveles del factor B no producen variabilidad

$$\sigma_B^2 = 0$$

$H_1^{'}$: Los niveles del factor B sí producen variabilidad

$$\sigma_B^2 > 0$$

PARA LA INTERACCIÓN

$H_0^{''}$: No existen interacciones entre los niveles de A y los niveles de B

$$\sigma_I^2 = 0$$

$H_1^{''}$: Sí existen interacciones entre los niveles de A y los niveles de B

$$\sigma_I^2 > 0$$

Planteamiento matemático del ADEVA doble interacción

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

MODELOS DE DISEÑO	μ	α_i	β_j	$(\alpha\beta)_{ij}$	ε_{ijk}
EFECTOS FIJOS	parámetro	parámetro $\sum_{i=1}^{I}\alpha_i = 0$	parámetro $\sum_{j=1}^{J}\beta_j = 0$	parámetro $\sum_{i=1}^{I}(\alpha\beta)_{ij} = 0$ $\sum_{j=1}^{J}(\alpha\beta)_{ij} = 0$	variable aleatoria $N(0,\ \sigma_e^2)$
EFECTOS ALEATORIOS	parámetro	variable aleatoria $N(0,\sigma_A^2)$	variable aleatoria $N(0,\sigma_B^2)$	variable aleatoria $N(0,\sigma_I^2)$	variable aleatoria $N(0,\ \sigma_e^2)$
EFECTO MIXTO Con A fijo	parámetro	parámetro $\sum_{i=1}^{I}\alpha_i = 0$	variable aleatoria $N(0,\sigma_B^2)$	variable aleatoria $N(0,\sigma_I^2)$	variable aleatoria $N(0,\ \sigma_e^2)$
EFECTO MIXTO Con A aleatorio	parámetro	variable aleatoria $N(0,\sigma_A^2)$	parámetro $\sum_{j=1}^{J}\beta_j = 0$	variable aleatoria $N(0,\sigma_I^2)$	variable aleatoria $N(0,\ \sigma_e^2)$

DESCRIPCIÓN DEL CONTRASTE DEL ANOVA DE DOS CRITERIOS

Para realizar los contrastes propuestos, se calculan cinco sumas de cuadrados:

SCT SUMA DE CUADRADOS TOTAL: mide la variabilidad total de los datos

SCD SUMA DE CUADRADOS DENTRO DE GRUPOS: mide la variabilidad que se debe **sólo** al comportamiento aleatorio de las unidades muestrales

SCA SUMA DE CUADRADOS DEL FACTOR A: mide la variabilidad entre los niveles del primer factor (A)

SCB SUMA DE CUADRADOS DEL FACTOR B: mide la variabilidad entre los niveles del segundo factor (B)

SCI SUMA DE CUADRADOS DE LA INTERACCIÓN A-B: mide la variabilidad producida por las interacciones entre niveles de ambos factores

La suma de cuadrados total es el resultado de la suma de las otras sumas de cuadrados, ya que estos cuatro sumandos indican la aprte de la variabilidad total que se debe a cada una de las posibles causa de variabilidad

$$SCT = SCD + SCA + SCB + SCI$$

SCT tiene $fcK - 1$ grados de libertad

SCD tiene $fc(K - 1)$ grados de libertad

SCA tiene $f - 1$ grados de libertad

SCB tiene $c - 1$ grados de libertad

ESTADÍSTICOS DE CONTRASTE DEL ANOVA DE DOS CRITERIOS

Estos estadísticos se obtienen hallando las estimaciones de la varianza común que se deducen de cada una de estas variabilidades, y comparándolas entre sí. Para hallar estas estimaciones de la varianza común se divide cada suma de cuadrados entre sus grados de libertad, dando lugar a las llamadas MEDIAS DE CUADRADOS

Las estimaciones de la varianza común son las siguientes:

MCD: media de cuadrados intra grupos. Siempre es centrado. $$MCD = \frac{SCD}{fC(K-1)}$$

MCA: media de cuadrados del factor A $$MCA = \frac{SCA}{f-1}$$

MCB: media de cuadrados del factor B $$MCB = \frac{SCB}{C-1}$$

MCI: media de cuadrados de la interacción $$MCI = \frac{SCI}{(f-1)(C-1)}$$

La media de cuadrados dentro de grupos, MCD, es un estimador centrado de la varianza común, tanto si las hipótesis nulas son ciertas como si son falsas. Las otras tres medias de cuadrados también son estimadores de la varianza común, pero sólo son centrados cuando se cumple la hipótesis nula a que se refieren. Son sesgados (más grandes) si la hipótesis nula a que se refieren es falsa.

Tabla del ANOVA y estadísticos de contraste

Fuente de Variabilidad	SC	G.L.	MC	Modelo I	Modelo II	Modelo III
Factor A	**SCA**	***f - 1***	$MCA = \frac{SCA}{f-1}$	$F_A = \frac{MCA}{MCD}$ $F_{f-1, fC(K-1)}$	$F_A = \frac{MCA}{MCI}$ $F_{f-1, (f-1)(C-1)}$	$F_A = \frac{MCA}{MCI}$ $F_{f-1,(f-1)(C-1)}$
Factor B	**SCB**	***C - 1***	$MCB = \frac{SCB}{C-1}$	$F_B = \frac{MCB}{MCD}$ $F_{C-1, fC(K-1)}$	$F_B = \frac{MCB}{MCI}$ $F_{C-1,(f-1)(C-1)}$	$F_B = \frac{MCB}{MCD}$ $F_{C-1, fC(K-1)}$
Interacción	**SCI**	***(f -1)(C-1)***	$MCI = \frac{SCI}{(f-1)(C-1)}$	$F_{AB} = \frac{MCI}{MCD}$ $F_{(f-1)(C-1), fC(K-1)}$	$F_{AB} = \frac{MCI}{MCD}$ $F_{(f-1)(C-1), fC(K-1)}$	$F_{AB} = \frac{MCI}{MCD}$ $F_{(f-1)(C-1), fC(K-1)}$
Error	**SCD**	***fC(K - 1)***	$MCD = \frac{SCD}{fC(K-1)}$			
Total	**SCT**	***fCK - 1***				

Interpretación del contraste para el modelo I de efectos fijos

a) Si en el ADEVA no se rechaza ninguna hipótesis nula, entonces sólo deben estimarse la varianza de los errores σ_e^2, y la media general μ

b) Si se rechaza la hipótesis de falta de interacción, se admite que existen interacciones entre sus distinos niveles, lo que indica una dependencia entre los factores, por lo que no tiene sentido estudiar por separado los efectos de cada factor.

En este caso deben estimarse:

* La varianza de los errores σ_e^2
* Las medias de los tratamientos μ_{ij}
* Los efectos de las interacciones, $(\alpha\beta)_{ij}$

c) Si se acepta la hipótesis de falta de interacción, se acepta la independencia entre los dos factores, por lo que deben estimarse las medias y los efectos de los niveles de cada factor cuya hipótesis nula se haya rechazado.

* Si se rechaza H_0, deben estimarse las medias del factor A y compararlas mediante pruebas a posteriori para decidir entre cuáles existen diferencias significativas.
* Si se rechaza $H_0^{'}$, deben estimarse las medias de los niveles del factor B y compararlas mediante pruebas a posteriori para decidir entre cuáles existen diferencias significativas.

Las prueba a posteriori que se utilizan para estos contrastes son análogas a las que se utilizan en el ADEVA doble

Interpretación del contraste para el modelo II de efectos aleatorios y el modelo III mixto

Si el ADEVA de un modelo de efectos aleatorios es significativo (se rechaza), sólo deben estimarse las varianzas de los efectos cuya hipótesis nula se haya rechazado.

Los estimadores de las varianzas no nula son:

$$\hat{\sigma}_A^2 = \frac{MCA - MCI}{JK}; \quad \hat{\sigma}_B^2 = \frac{MCB - MCI}{IK}; \quad \hat{\sigma}_I^2 = \frac{MCI - MCD}{K}$$

Si el ADEVA de un modelo mixto, con factor de efectos fijos A, es significativo (se rechaza), deben estimarse las medias de los niveles A_i, si se rechaza la hipótesis nula de igualdad y las varianzas de los efectos de los niveles B_j o de las interacciones, si se rechaza la hipótesis nula respectiva

Sus estimadores son:

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{MCB - MCD}{IK}; \quad \hat{\sigma}_I^2 = \frac{MCI - MCD}{K}$$

En ambos modelos deben estimarse la varianza de los errores y la varianza total de la población, que es la suma de todas las varianzas que sean positivas porque se ha rechazado su hipótesis nula correspondiente.

En el modelo II: $\hat{\sigma}_T^2 = \hat{\sigma}_A^2 + \hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_I^2 + \hat{\sigma}_e^2$

En el modelo III: $\hat{\sigma}_T^2 = \hat{\sigma}_B^2 + \hat{\sigma}_I^2 + \hat{\sigma}_e^2$

Deben calcularse los porcentajes con los que cda varianza contribuye al total