TEMA 1: Introducción

1.1.– Inferencia estadística

1.2.– Muestra aleatoria simple

1.3.– Estadísticos muestrales. Estimador. Propiedades

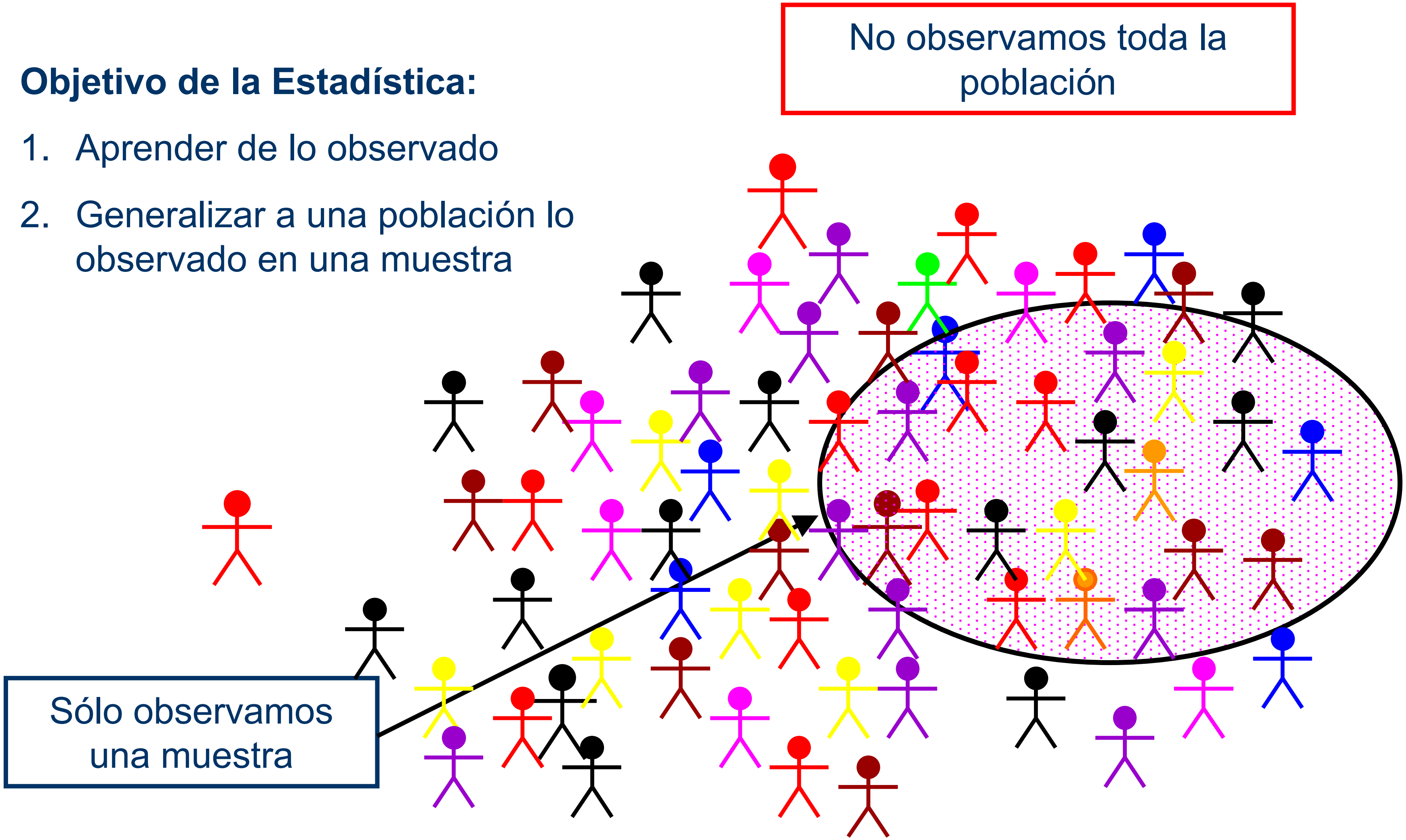
1.4.– Intervalos de confianza

1.5.– Contrastes de hipótesis

Inferencia Estadística

Objetivo de la Estadística:

1. Aprender de lo observado
2. Generalizar a una población lo observado en una muestra



1. 1. INFERENCIA ESTADÍSTICA

La INFERENCIA ESTADÍSTICA es el conjunto de métodos estadísticos que sirven para extraer de los datos de una muestra toda la información posible sobre la variable aleatoria de la que procede y de su ley de probabilidad.

- **Inferencia paramétrica: la distribución de probabilidad de la población es conocida salvo los valores que toman ciertos parámetros.**

  En este caso, la información muestral se utilizará para extraer conclusiones sobre uno o varios de esos parámetros.

- **Inferencia no paramétrica: la distribución de probabilidad poblacional es totalmente desconocida y sobre ella se realizan suposiciones generales (es una distribución continua, tiene una única moda...)**

  En este caso, la información muestral se utilizará para extraer conclusiones sobre alguna propiedad de la distribución de X, o para decidir si una distribución dada es compatible con las observaciones.

1. 2. MUESTRA ALEATORIA SIMPLE

¿Cómo hacemos esto?

1. 2. MUESTRA ALEATORIA SIMPLE

Una muestra aleatoria simple de tamaño n de una variable aleatoria X, (M. A. S.), es un conjunto ordenado de n variables aleatorias independientes, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, cuyas leyes de probabilidad son iguales a la que sigue X.

Este concepto representa el conjunto de los datos que podrán observarse en los individuos de una muestra particular de la población, antes de tomarla.

Se llama observación de una M. A. S. , $X_1, X_2, \ldots, X_n$, al conjunto ordenado $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de los valores observados en los n individuos de una muestra particular.

1. 3. ESTADÍSTICOS MUESTRALES

Se llama estadístico a cualquier operación o conjunto de operaciones $T(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ (suma, multiplicación, ordenación, etc) que se define sobre las variables que componen una muestra aleatoria simple.

Por ejemplo:

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$$

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

$$T(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$

Los estadísticos muestrales son variables aleatorias y por lo tanto tienen distribuciones de probabilidad asociadas.

1. 3. ESTADÍSTICOS MUESTRALES. ESTIMADOR

Un estimador de un parámetro es un estadístico cuyo conjunto de valores coincide con el conjunto de posibles valores del parámetro considerado.

Ejemplo: Supongamos que se quiere estimar el valor del parámetro p de una v.a. $X \sim Ber(p)$. Consideramos una M.A.S. $X_1, \ldots X_n$ todas con distribución $Ber(p)$, con $p \in (0, 1)$

El estadístico $\sum_{i=1}^{n} X_i$ no es un estimador de p, porque toma valores entre 0 y n.

El estadístico $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$ es un estimador de p, porque toma valores entre 0 y 1.

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$ **Estimador insesgado para la media de una población**

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2}{n-1}$$ **Estimador insesgado para la varianza de una población**

PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

• **ESTIMADOR INSESGADO:** La esperanza del estimador coincida con el parámetro que se va a estimar

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

Se llama **sesgo** de un estimador a

$$\text{Sesgo}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta$$

• **ESTIMADOR EFICIENTE:** Un estimador $\hat{\theta}_1$ es más eficiente que el estimador $\hat{\theta}_2$, si

$$V(\hat{\theta}_1) < V(\hat{\theta}_2)$$

Un estimador se dice de **MÍNIMA VARIANZA** cuando su varianza es la menor posible dentro de la clase de estimadores que se esté considerando

PROPIEDADES DE LOS ESTIMADORES

• **ESTIMADOR CONSISTENTE:** Si no es posible emplear estimadores de mínima varianza, el requisito mínimo deseable para un estimador es que a medida que el tamaño de la muestra crece, el valor del estimador tienda a ser el valor del parámetro, propiedad que se denomina consistencia. Existen diversas definiciones de consistencia, más o menos restrictivas, pero la más utilizada es la denominada consistencia en media cuadrática que exige que:

$$\lim_{n \to \infty} ECM(\hat{\boldsymbol{\theta}}_n) = 0$$

• **ERROR CUADRÁTICO MEDIO DE UN ESTIMADOR:** Se define como

$$ECM(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = E\left(\left(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}\right)^2\right) = \left(\textbf{Sesgo}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\right)^2 + Var(\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

1. 3. ESTADÍSTICOS MUESTRALES. ESTIMADOR

Estimación de un parámetro

Estimación puntual

proporcionan un solo número como valor del parámetro

Hay tantas estimaciones como muestras se puedan elegir

Estimación por intervalos

proporcionan dos valores que intentan acotar la región donde se encuentra el parámetro con una probabilidad fijada, antes de elegir la muestra

Nivel de confianza de un intervalo es el porcentaje 100(1-α) de las muestras en cuyos intervalos estará contenido el valor del parámetro.

Una vez construido un intervalo con una muestra dada, sólo queda la confianza de que ese intervalo sea uno de los que contienen el valor del parámetro

EJEMPLOS DE ESTIMADORES PUNTUALES

Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una variable X que tiene de media μ y de varianza σ^2:

(1) El estimador puntual de la media poblacional μ es la media muestral:

$$\boxed{\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i}$$

(2) El estimador puntual de la varianza poblacional σ^2 es la cuasivarianza muestral

$$\boxed{S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$

Fórmula simplificada de la cuasivarianza muestral:

$$\boxed{S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}}$$

PROPIEDADES DE LA MEDIA MUESTRAL

• Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ entonces

$$\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

• Si $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una variable X que tiene de media μ y de varianza σ^2 y con distribución no necesariamente Normal, siempre que el tamaño muestral n sea suficientemente grande (usualmente $n > 30$), se tiene

$$\boxed{\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)}$$

En Resumen: la media muestral $\bar{X}$ de una muestra aleatoria de tamaño n de una variable X tiene una ley de probabilidad con la misma media que X y con una varianza que es n veces menor que la varianza de X.

La utilidad práctica de esta propiedad es que las medias muestrales son estimaciones centradas de la verdadera media de la población, con tanta mayor precisión cuanto mayor sea el tamaño muestral.

1. 3. ESTADÍSTICOS MUESTRALES

• **Puede ocurrir que $X_1, \ldots, X_n$ sea una muestra aleatoria de una variable $X \sim N(\mu, \sigma)$ con σ desconocida. En este caso es necesario estimar σ^2 mediante la cuasivarianza S^2 y se tiene que**

$$\boxed{\frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{(n-1)}}$$

1.4. INTERVALOS DE CONFIANZA

Calcular sólo la estimación puntual de un parámetro no proporciona suficiente información para conocer con precisión el valor de dicho parámetro.

Ejemplo: Se quiere estimar la longitud media de todos los artículos producido por una máquina.

Se toman dos muestras

Muestra A:	**Muestra B**
n_A = 10 **artículos**	n_B = 100 **artículos**
$\bar{x}_A = 51$	$\bar{x}_B = 51$

¿Son los dos resultados igualmente fiables? **Obviamente no.**

Lo que interesa es conocer la longitud media de todos los artículos μ, por tanto la estimación puntual debe de ir acompañada de un indicador de las posibles diferencias entre el valor estimado y el valor del parámetro.

Este indicador es el error de muestreo, error típico o error estandar de estimación de la media, que depende del tamaño de la muestra. A menor tamaño mayor error de muestreo y viceversa.

Por tanto :

Siempre que se haga una estimación puntual,
ésta debe ir acompañada de su correspondiente error de muestreo

1. 4. INTERVALOS DE CONFIANZA

Siempre que se haga una estimación puntual, ésta debe ir acompañada de su correspondiente error de muestreo para indicar las posibles discrepancias entre el valor estimado y el valor real.

Para ello se construye un intervalo alrededor del valor estimado que se llama

INTERVALO DE CONFIANZA

Los estimadores por intervalo proporcionan uno o dos valores que definen un intervalo donde se espera encontrar el valor del parámetro con una probabilidad fijada, $(1-\alpha)$, antes de observar una muestra; es decir, un rango de valores creibles para un determinado parámetro.

Esta credibilidad se mide en términos probabilísticos.

Se llama coeficiente o nivel de confianza de un intervalo al porcentaje $100(1-\alpha)$ de las muestras en cuyos intervalos estará contenido el valor del parámetro.

¿CÓMO SE INTERPRETA EL INTERVALO DE CONFIANZA?

Para una muestra concreta, un intervalo de confianza es uno fijo de entre todos los posibles intervalos que se pueden construir centrados en las medias muestrales.

Una vez construido un intervalo con una muestra dada, el intervalo contendrá al parámetro o no lo contendrá, a nosotros sólo nos queda la confianza de que ese intervalo sea uno de los que contienen el valor del parámetro.

INTERVALO DE CONFIANZA DE NIVEL $100(1-\alpha)\%$ DE LA MEDIA μ EN UNA LEY NORMAL

Sea $X_1, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria de una variable $X \sim N(¿?, \sigma)$

Si se conoce la varianza, σ^2, con una muestra de tamaño n, el intervalo de confianza,

a un nivel del $100(1-\alpha)\%$ es: $$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el valor de la $N(0,1)$ que deja a su izquierda una probabilidad igual a $1-\frac{\alpha}{2}$, es decir, $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil de orden $100(1-\frac{\alpha}{2})\%$

Casos particulares:

Para $\alpha = 0.1$ **se tiene que** $z_{0.95} = 1.65$

Para $\alpha = 0.05$ **se tiene que** $z_{0.975} = 1.96$

Para $\alpha = 0.01$ **se tiene que** $z_{0.995} = 2.58$

1. 4. INTERVALOS DE CONFIANZA

- **En la mayoría de los estudios se desconoce el valor de la varianza poblacional, σ^2, por lo que debe estimarse mediante s^2 y en este caso, el error de muestreo asociado a la media muestral es:** $\boxed{e = \frac{s}{\sqrt{n}}}$

El valor de σ^2 es fijo, no así el valor de s^2 que es variable porque depende de la muestra elegida.

Para paliar la inexactitud que se ha introducido en el cálculo de la amplitud del intervalo, se sustituye el valor de $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ por un valor ligeramente superior, $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$, que es el valor de la ley t de Student, con $n-1$ grados de libertad, que deja a su izquierda una probabilidad igual a $1-\frac{\alpha}{2}$.

Por tanto : Si no se conoce la varianza poblacional, se estima mediante, S^2 con una muestra de tamaño n. El intervalo de confianza , a un nivel de confianza del $100(1-\alpha)\%$ es

$$\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

Nota 1: Si $n > 30$ el valor de $t_{n-1,\alpha/2}$ puede ser sustituido por el de $z_{1-\alpha/2}$

RESUMEN : Intervalos de confianza de nivel $100(1-\alpha)\%$ de μ en una ley normal

$a)$ **Si se conoce la varianza, σ^2 , el intervalo es:**

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$b)$ **Si no se conoce la varianza, y el tamaño muestral es $n < 30$, se halla la cuasivarianza, s^2, y se construye el intervalo**

$$\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

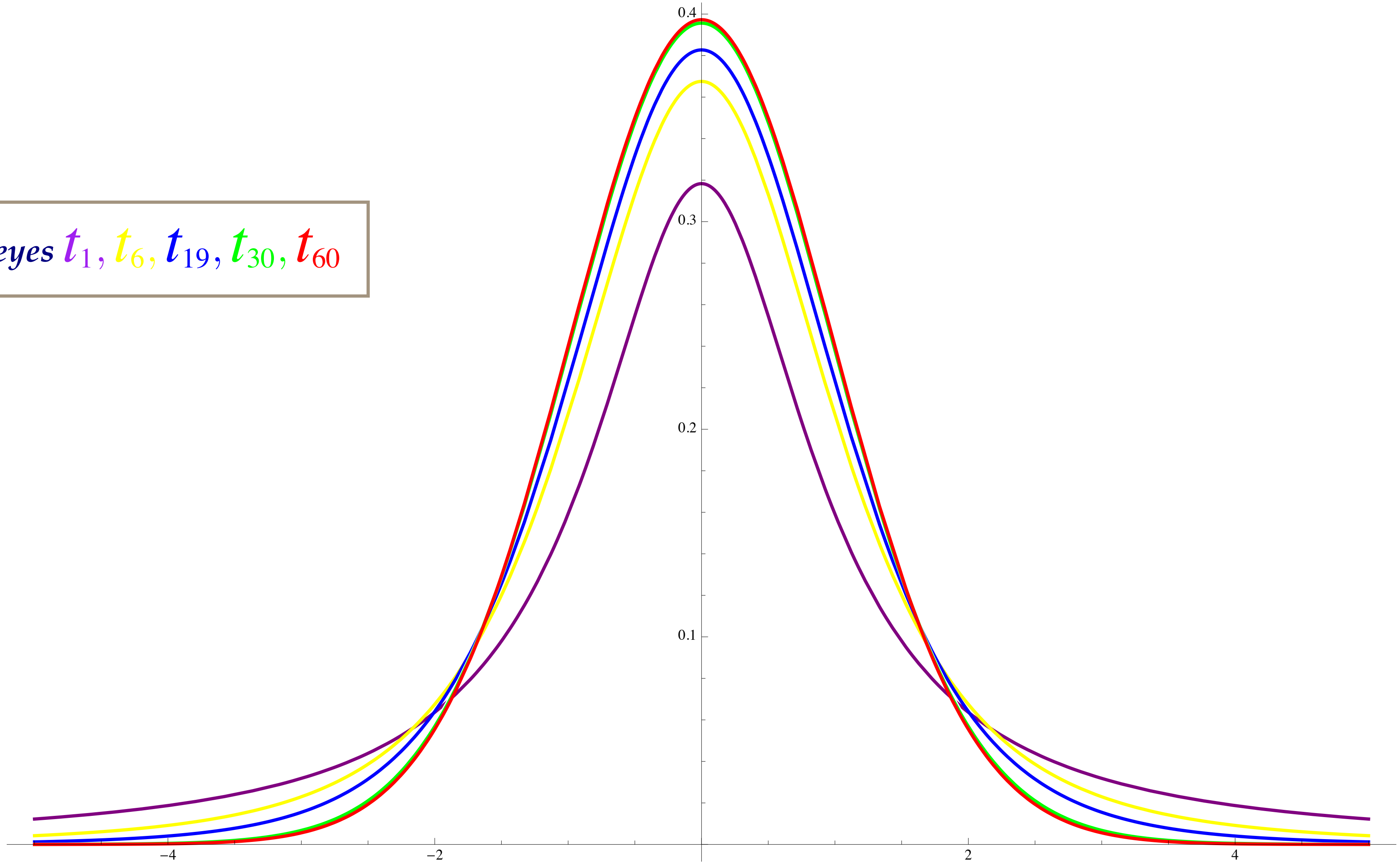
$c)$ **Si no se conoce la varianza, y el tamaño muestral es $n \geq 30$, se halla la cuasivarianza, s^2, y se construye el intervalo**

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \ , \ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

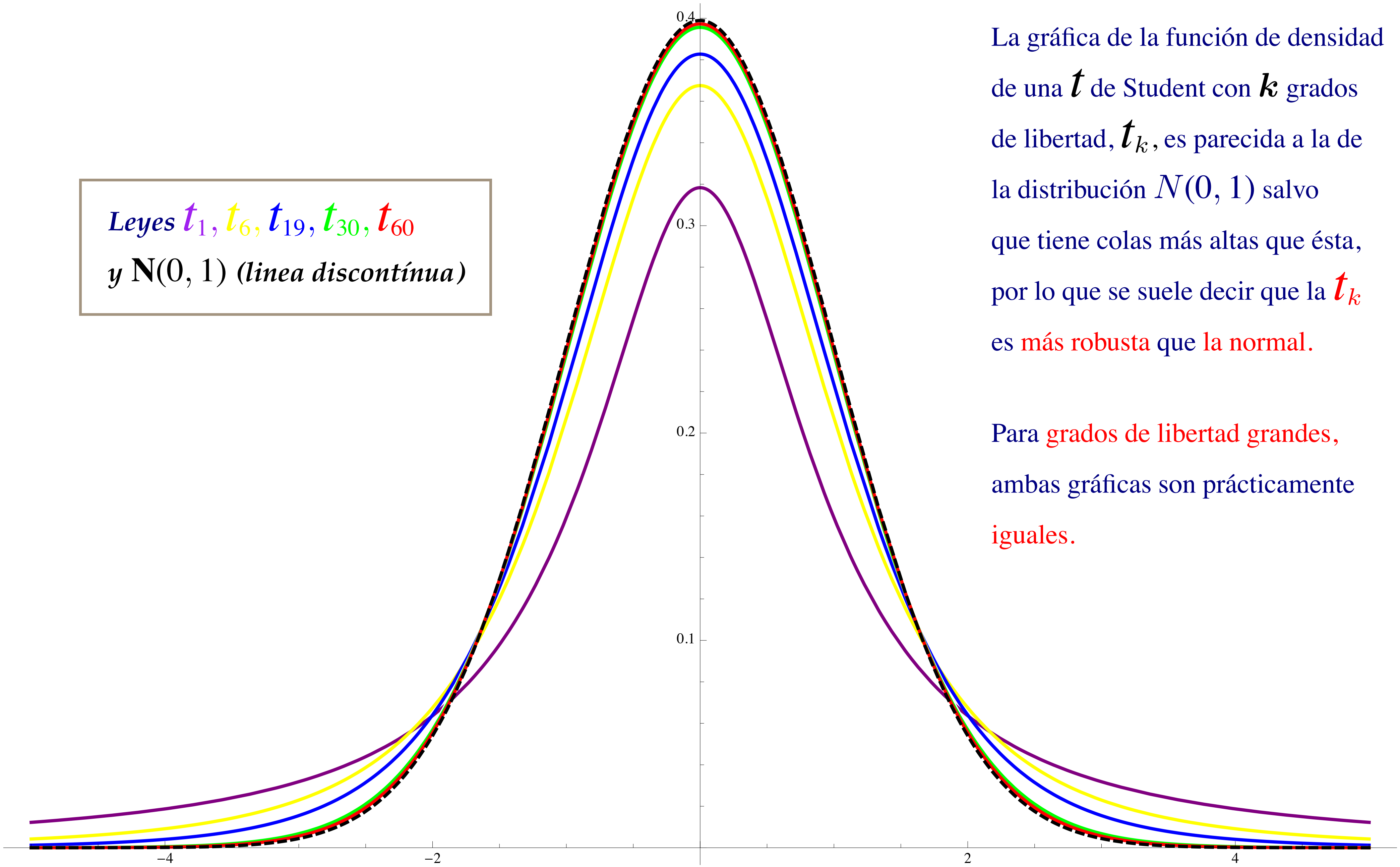
Representación gráfica de las leyes t_k de Student.

La función de densidad de una t de Student con k grados de libertad, t_k, es positiva para todos los números reales y simétrica respecto de $x = 0$; el eje OX es una asíntota horizontal.

Leyes $t_1, t_6, t_{19}, t_{30}, t_{60}$



Comparación de algunas leyes t_k de Student y ley normal(0,1)



La gráfica de la función de densidad de una t de Student con k grados de libertad, t_k, es parecida a la de la distribución $N(0, 1)$ salvo que tiene colas más altas que ésta, por lo que se suele decir que la t_k es más robusta que la normal.

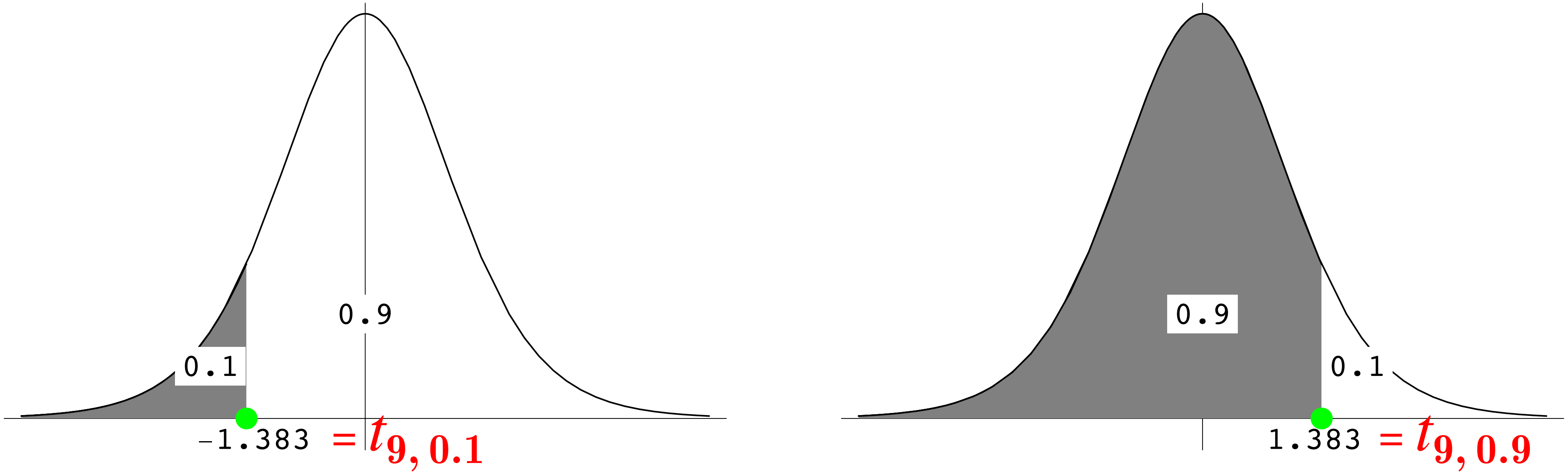
Para grados de libertad grandes, ambas gráficas son prácticamente iguales.

Por $t_{k,\alpha}$ y $t_{k,1-\alpha}$ notaremos los percentiles de orden $100\alpha\%$ y $100(1-\alpha)\%$, es decir, los valores que dejan a su izquierda una probabilidad igual a α y $1-\alpha$ respectivamente, en una distribución t de Student con k grados de libertad.

Por la simetría de la t_k respecto de $x = 0$, estos percentiles cumplen la igualdad

$$\boxed{t_{k,1-\alpha} = -t_{k,\alpha}}$$

Ejemplo: Las siguientes gráficas muestran $t_{9,0.1}$ y $t_{9,0.9}$ donde $t_{9,0.1} = -t_{9,0.9}$



Ejemplo: **Supongamos que queremos estimar la longitud media de una determinada clase de artículos producido por una máquina.**

Por experiencia, sabemos que es razonable modelizar la distribución de los valores de la longitud de los artículos producidos por una ley normal con media, μ, desconocida y desviación típica igual a 0.05.

Para estimar μ extraemos una muestra de 5 artículos , cuyas longitudes (en cm) son:

20.1, 20.05, 20.01, 19.95, 19.99

Construir un intervalo de confianza al 90% para μ.

Como $100 \cdot (1-\alpha) = 90 \Rightarrow 1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.95$.

De las tablas de la normal estándar deducimos que $z_{0.95} = 1.64$.

El intervalo de confianza obtenido a partir de estos datos es

$$\left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \,,\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(20.02 - z_{0.95}\frac{0.05}{\sqrt{5}}, 20.02 + z_{0.95}\frac{0.05}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= (20.02 - 0.04, 20.02 + 0.04) = (19.98, 20.06)$$

El error de muestreo es $\varepsilon = \dfrac{0.05}{\sqrt{5}} = 0.022$

El margen de error, con una confianza del 90%, es $z_{0.95} \cdot \varepsilon = 0.04$

La hipótesis de que σ es conocida es poco realista, ¿cuál es el intervalo de confianza al 90% para el mismo problema es el caso de que σ sea desconocida?

El intervalo de confianza es entonces

$$\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad , \quad \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right)$$

De las tablas de la t de Student, deducimos que $t_{4,0.95} = 2.132$

$$\left(20.02 - t_{4,0.95}\sqrt{\frac{0.0033}{5}},\ 20.02 + t_{4,0.95}\sqrt{\frac{0.0033}{5}}\right) = (19.9652, 20.0748)$$

El error de muestreo es $e = \sqrt{\frac{0.0033}{5}} = 0.0257$

El margen de error, con una confianza del 90%, es $t_{4,0.95} \cdot e = 0.0548$

Nota: Se puede observar que tanto la amplitud de este intervalo como el error de muestreo es mayor que el obtenido para el caso de la varianza conocida.

¿DE QUÉ DEPENDE EL INTERVALO DE CONFIANZA?

Del valor puntual estimado a partir de la muestra

Al intervalo de confianza pertenecen valores inferiores y superiores a la estimación puntual obtenida a partir de la muestra.

Del tamaño muestral

Cuanto mayor sea el tamaño muestral menor será el error de muestreo.

Del nivel de confianza elegido

Los niveles de confianza usuales son del 95% y del 99%.

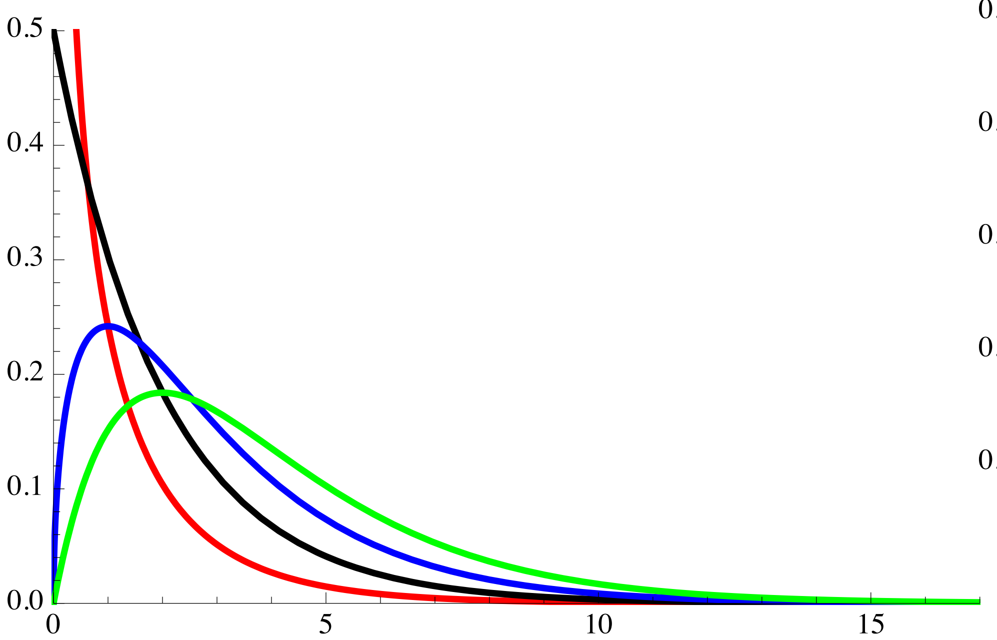
Para un nivel de confianza del 100% el intervalo sería tan grande que no sería de provecho.

INFERENCIAS SOBRE LA VARIANZA DE UNA LEY NORMAL

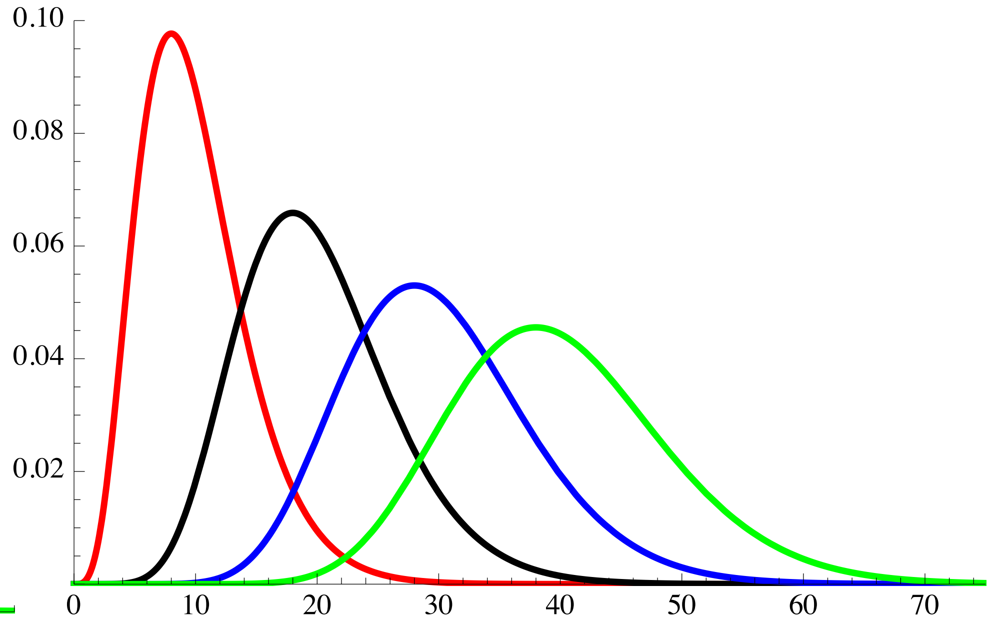
Para poder hacer inferencias sobre la varianza de una ley normal necesitamos conocer la familia de las leyes χ^2 de Pearson.

La ley χ^2 depende de un parámetro que está relacionado con el tamaño de la muestra que se elige, se denota χ^2_k (y se lee "ji cuadrado con k grados de libertad"). En muchos textos aparece con en nombre de "chi cuadrado con k grados de libertad".

La función de densidad de una ley χ^2_k sólo es positiva para los números reales positivos y es nula para los negativos. El eje OX es siempre una asíntota horizontal.



Densidades χ^2 *para* **1**, **2**, **3** *y* **4** *grados de libertad*



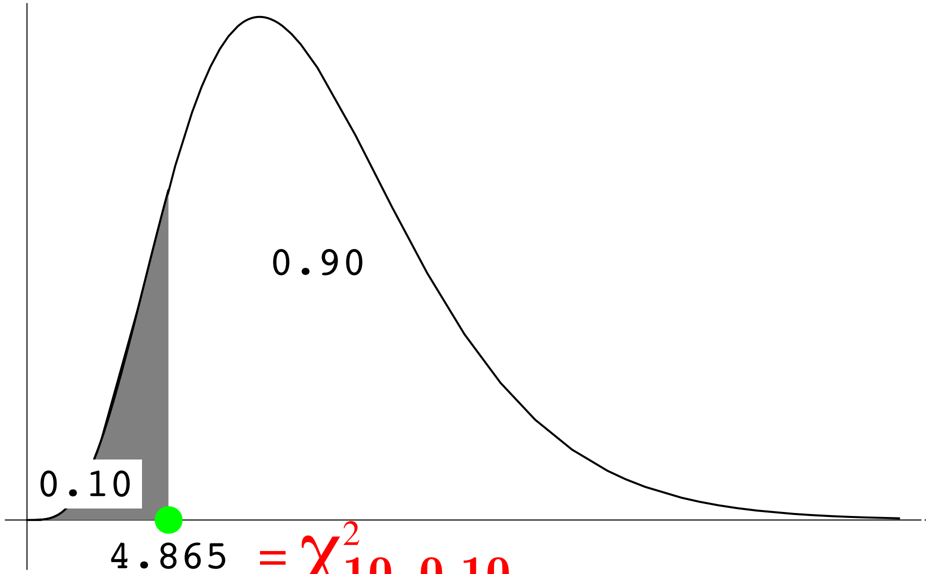
Densidades χ^2 *para* **10**, **20**, **30** *y* **40** *grados de libertad.*

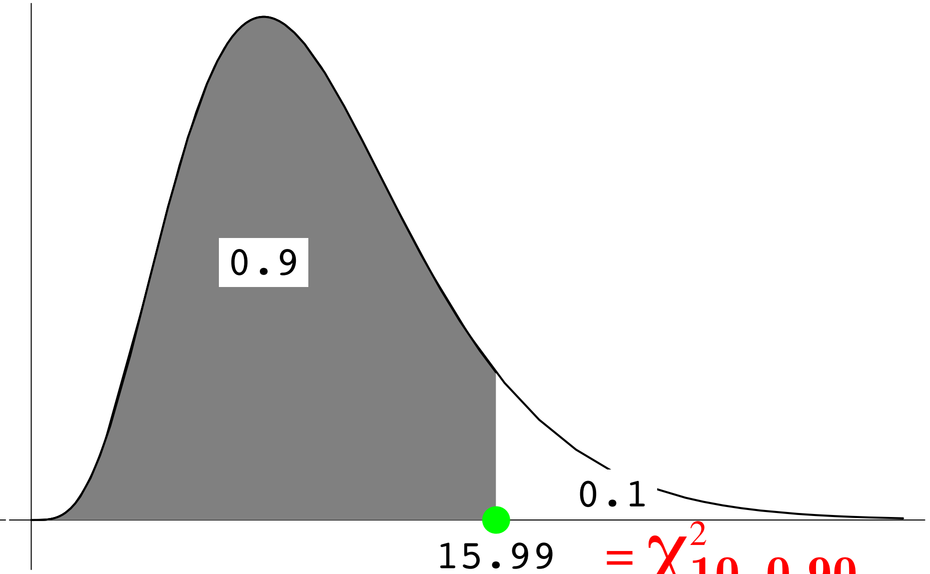
1. 4. INTERVALOS DE CONFIANZA

Por $\chi^2_{k,\alpha}$ y $\chi^2_{k,1-\alpha}$ notaremos los percentiles de orden $100\alpha\%$ y $100(1-\alpha)\%$, es decir, los valores que dejan a su izquierda una probabilidad igual a α y $1-\alpha$ respectivamente, de una distribución ji-cuadrado con k grados de libertad, χ^2_k

Entre estos valores no existe ninguna relación numérica.

Ejemplo: Las siguientes gráficas muestran $\chi^2_{10,0.1}$ y $\chi^2_{10,0.9}$ de una distribución χ^2_{10} de Pearson.





1. 4. INTERVALOS DE CONFIANZA

INTERVALOS DE CONFIANZA DE NIVEL $100(1-\alpha)\%$ DE σ^2 EN UNA LEY NORMAL

Si no se conoce la media, con una muestra de tamaño n, el intervalo es

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-(\alpha/2)}} \quad , \quad \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}} \right)$$

INTERVALOS DE CONFIANZA DE NIVEL $100(1-\alpha)\%$ DE σ EN UNA LEY NORMAL

Para hallar un intervalo de confianza de nivel $100(1-\alpha)\%$ para la desviación típica, σ, debe calcularse el correspondiente intervalo para la varianza.

Los límites del intervalo de confianza de nivel $100(1-\alpha)\%$ para la desviación típica σ, son las raíces cuadradas positivas de los límites del intervalo para la varianza.

Ejemplo: Supongamos que queremos estimar la longitud media de una determinada clase de artículos producido por una máquina.

Por experiencia, sabemos que es razonable modelizar la distribución de los valores de la longitud de los artículos producidos por una ley normal con media y desviación típica desconocida.

Para estimar σ extraemos una muestra de 5 artículos , cuyas longitudes (en cm) son: 20.1, 20.05, 20.01, 19.95, 19.99.

Construir un intervalo de confianza al 90% para σ^2.

Como $100 \cdot (1-\alpha) = 90 \Rightarrow 1-\alpha = 0.9 \Rightarrow \alpha = 0.1 \Rightarrow \alpha/2 = 0.05 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.95$.

De las tablas de la χ_4^2 grados de libertad deducimos que $\chi_{4,0.05}^2 = 0.7107$ y $\chi_{4,0.95}^2 = 9.4877$

El intervalo de confianza al 90% de σ^2 obtenido a partir de los datos es

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ 1-(\alpha/2)}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\ \alpha/2}}\right) = \left(\frac{4 \cdot 0.0033}{9.4877}, \frac{4 \cdot 0.0033}{0.7107}\right) = (0.00139, 0.01857)$$

El intervalo de confianza al 90% de σ obtenido a partir de los datos es

$$(\sqrt{0.00139}, \quad \sqrt{0.01857}) = (0.0373, 0.1363)$$

1. 5. CONTRASTES DE HIPÓTESIS

UN CONTRASTE DE HIPÓTESIS es un método estadístico que permite comprobar los resultados conseguidos empíricamente mediante una recogida de datos concuerda o no con una hipótesis estadística formulada sobre el modelo de probabilidad en estudio, y tomar una decisión sobre esta hipótesis.

Se llama **hipótesis nula** (H_0) a la que defiende un modelo establecido. Es la hipótesis que contrastamos.

Los datos pueden refutarla, pero no debería ser rechazada sin una buena razón porque las consecuencias pueden ser graves.

Se llama **hipótesis alternativa** (H_1) a la que discute la validez del modelo, es decir, niega a H_0.

Los datos pueden mostrar evidencia a su favor, pero no debe ser aceptada sin una gran evidencia a su favor.

Las hipótesis deben plantearse antes de recoger los datos.

1. 5. CONTRASTES DE HIPÓTESIS

Cuando se toma la decisión que resulta de un contraste, se pueden cometer dos tipos de error:

- **El error de tipo I,**
  que consiste en rechazar H_0 cuando en realidad es cierta.
- **El error de tipo II,**
  que consiste en aceptar H_0 cuando en realidad es falsa.

	Realidad	
Decisión	**H_0 cierta**	**H_0 falsa**
Aceptación H_0	**Acierto**	**Error de Tipo II**
Rechazo H_0	**Error de Tipo I**	**Acierto**

Siempre existe un riesgo de cometer uno de estos errores y es imposible disminuir el riesgo de caer en uno de ellos sin aumentar el riesgo de caer en el otro. Para disminuir a la vez las dos probabilidades de error, tiene que aumentarse el tamaño de la muestra.

El nivel de significación de un contraste es un número, $\alpha < 0.5$, que indica el límite superior de la probabilidad de cometer un error de tipo I.

Se elige a voluntad y sirve para limitar el riesgo de cometer un error de tipo I.

Los niveles de significación más comunes son 0.1, 0.05, 0.01, 0.005, y 0.001.

A la probabilidad de cometer un error de tipo II se le suele denotar con la letra griega β.

$$\beta = \mathrm{P}\left[\text{Aceptar } \mathrm{H}_0 \;\middle|\; H_0 \text{ es falsa} \right]$$

1. 5. CONTRASTES DE HIPÓTESIS

ELEMENTOS DE UN CONTRASTE

Se llama **estadístico de contraste** a una función $T(X_1, \dots, X_n)$ que resume la información muestral más adecuada para discernir entre las dos hipótesis. La distribución del estadístico de contraste cuando H_0 es cierta debe ser conocida.

Se llama **valor observado o experimental del estadístico de contraste** al número $t_0 = T(x_1, \dots, x_n)$ que se obtendrá al aplicar el estadístico a los datos muestrales $x_1, \dots, x_n$ observados; también suele notarse t_{exp}.

Se llama T_n al conjunto de valores que puede tomar el estadístico de contraste para todas las posibles muestras de un tamaño dado.

El conjunto T_n se divide en dos regiones complementarias, llamadas **región crítica o de rechazo** (C) y **región de aceptación** (A).

La región crítica del contraste es el conjunto de valores del estadístico de contraste para los que se rechazará la hipótesis nula.

Esta región queda determinada por el nivel de significación, el tipo de contraste y el tamaño de la muestra. Está limitada por uno o dos valores críticos.

Un contraste de hipótesis es unilateral si sólo existe un valor crítico.

Un contraste de hipótesis es bilateral si existen dos valores críticos.

1. 5. CONTRASTES DE HIPÓTESIS

RESULTADO DE UN CONTRASTE

Una vez tomada la muestra, se deducirá de ella un valor del estadístico de contraste y se comprobará si está o no en la región crítica correspondiente al nivel de significación α fijado.

Si el valor del estadístico de contraste está en la región crítica, se rechaza H_0 y se dice que el contraste ha sido significativo al nivel α.

Si el valor del estadístico de contraste no está en la región crítica, no se rechaza H_0 y se dice que el contraste no ha sido significativo al nivel α.

COMENTARIOS

- **Que el contraste sea significativo indica que es improbable obtener un resultado como el observado si la hipótesis nula es cierta.**
- **Un resultado significativo solo indica que el resultado no es compatible con la hipótesis nula.**
- **Decir que un contraste es "estadísticamente no significativo" no significa que la hipótesis nula sea cierta.**
- **No significativo indica que los datos no consiguen aportar suficientes pruebas para dudar de la credibilidad de la hipótesis nula.**
- **Los contrastes de hipótesis sólo indican si hay o no hay diferencia estadísticamente significativa entre el valor de la hipótesis nula y el valor obtenido a partir de los datos muestrales.**

Hipótesis nulas: $H_0 : \mu = \mu_0$, $H_0 : \mu \leq \mu_0$ o $H_0 : \mu \geq \mu_0$

Hipótesis alternativas: $H_1 : \mu \neq \mu_0$, $H_1 : \mu > \mu_0$ o $H_1 : \mu < \mu_0$

- **Si se conoce la varianza, σ^2:**

  el estadístico de contraste es

$$\boxed{Z = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{\sigma^2/n}}, \text{ que sigue la ley } N(0,1) \text{ si } H_0 \text{ es cierta}}$$

- **Si no se conoce la varianza, se calcula la cuasivarianza muestral s^2,**

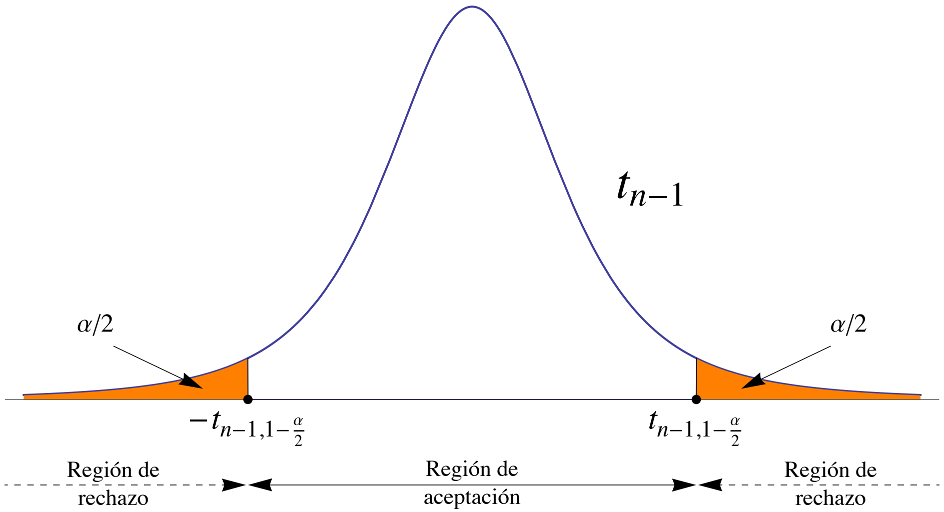
  el estadístico de contraste es

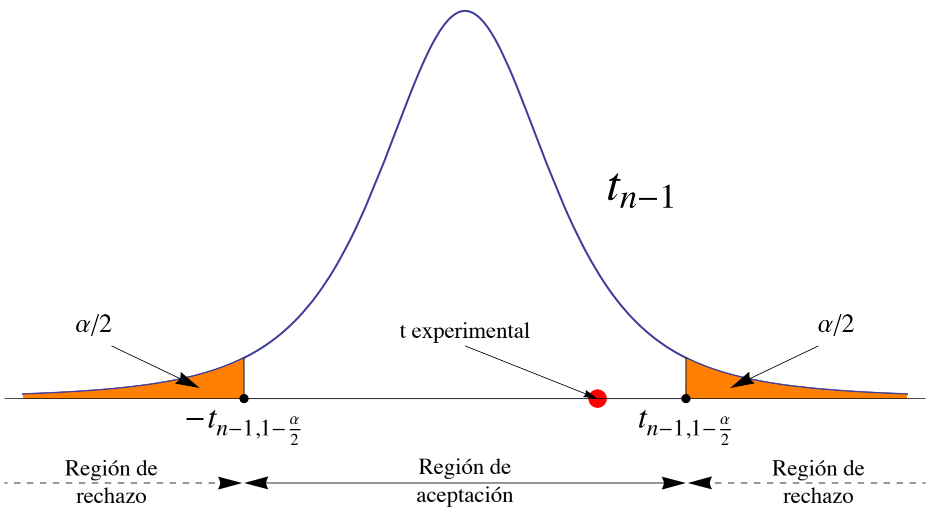
$$\boxed{T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}, \text{ que sigue la ley } t_{n-1} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}}$$

Nota 1: Si $n > 30$ puede considerarse que $T \sim N(0,1)$ si H_0 es cierta

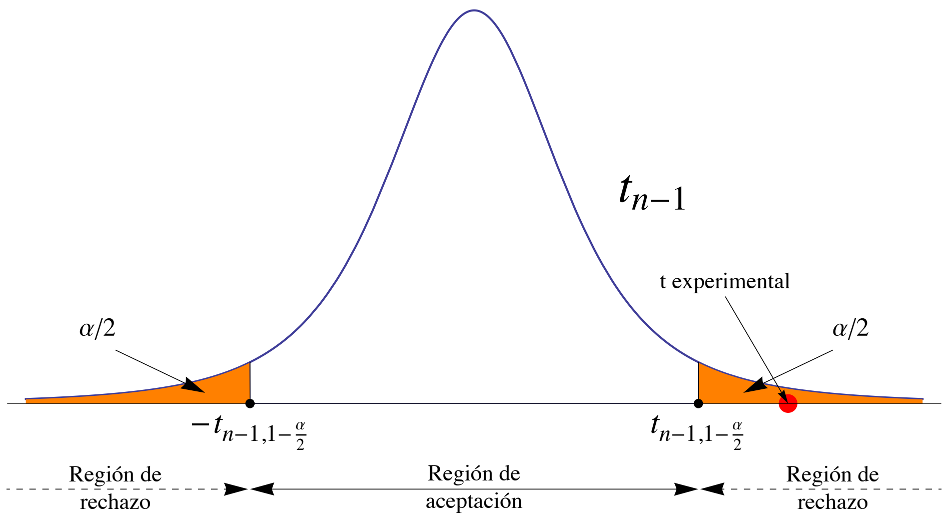
1. 5. CONTRASTES DE HIPÓTESIS

Contraste bilateral: $H_0 : \mu = \mu_0; \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$



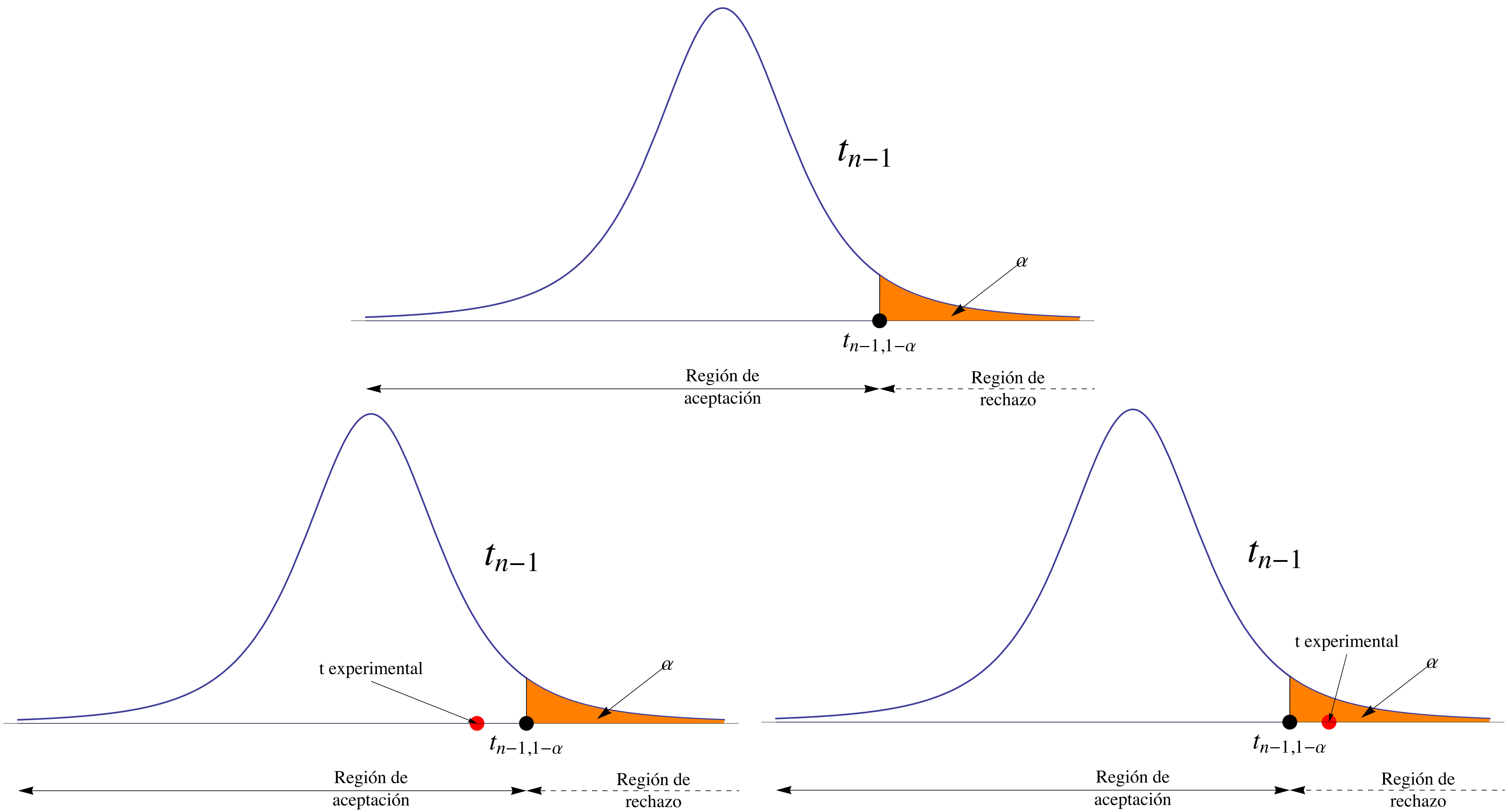


No rechazo H_0



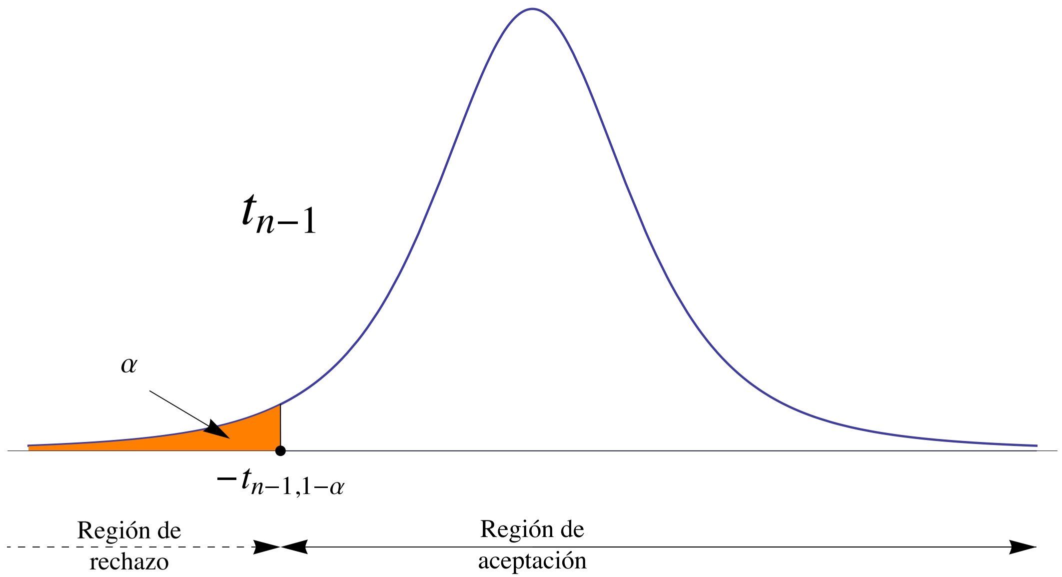
Rechazo H_0

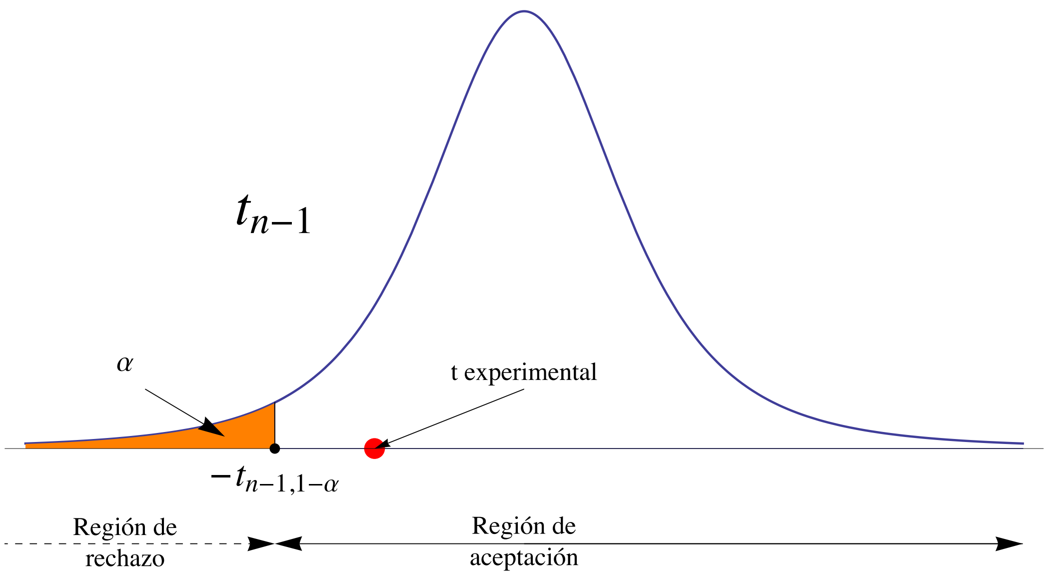
Contraste unilateral a la derecha: $H_0 : \mu \leq \mu_0; \qquad H_1 : \mu > \mu_0$



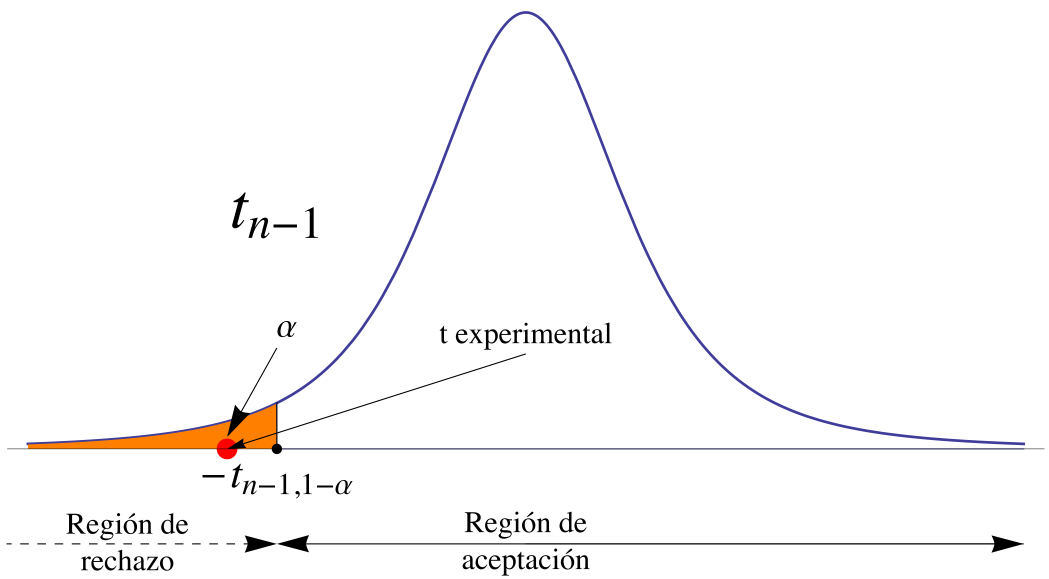
No rechazo H_0 **Rechazo H_0**

Contraste unilateral a la izquierda: $H_0 : \mu \geq \mu_0; \qquad H_1 : \mu < \mu_0$





No rechazo H_0



Rechazo H_0

PASOS PARA REALIZAR UN CONTRASTE

(1) **Plantear las hipótesis.**

(2) **Dibujar la gráfica de la función de densidad del estadístico de contraste.**

(3) **A partir de la hipótesis alternativa y del nivel de significación α indicar en la gráfica la región de rechazo.**

(4) **Calcular a partir de las tablas de la distribución del estadístico de contraste el valor o valores críticos que indican la frontera entre la región de aceptación y la región de rechazo.**

(4.1) **Si el contraste es bilateral, la región de rechazo está formada por los valores menores que $-z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ó $-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$ y mayores que $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ ó $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}}$**

(4.2) **Si el contraste es unilateral a la derecha, la región de rechazo está formada por los valores mayores que $z_{1-\alpha}$ ó $t_{n-1,1-\alpha}$**

(4.3) **Si el contraste es unilateral a la izquierda, la región de rechazo está formada por los valores menores que $-z_{1-\alpha}$ ó $-t_{n-1,1-\alpha}$**

(5) **Sustituir los estimadores muestrales en el estadístico de contraste y situar el valor obtenido en la gráfica.**

(6) **Rechazar H_0 si el valor se sitúa en la región de rechazo.**

En caso contrario no rechazarla.

Ejemplo: En un proceso de producción, la longitud de los artículos producidos se modeliza según una ley normal de media μ y varianza σ^2 desconocidas.

En condiciones de funcionamiento correcto, se espera que la longitud media de los artículos sea de 50mm.

Para comprobar la calidad, se decide tomar una muestra de 10 artículos que resultan tener una longitud media de 51mm y varianza muestral de 1.

Basándonos en esta muestra y a un nivel de significación $\alpha = 0.05$, ¿qué podemos decir acerca del funcionamiento del proceso?

Planteamos el siguiente contraste de hipótesis:

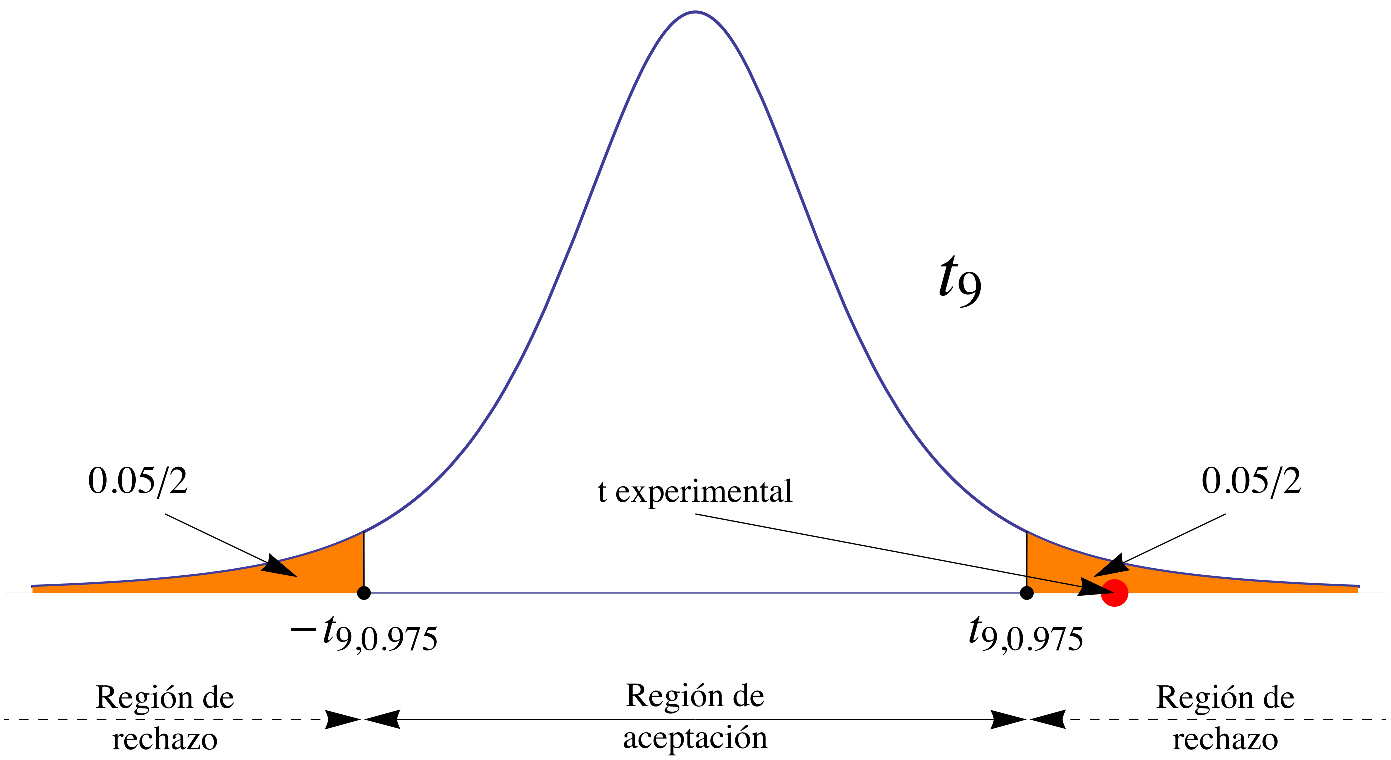
$$H_0 : \mu = 50$$
$$H_1 : \mu \neq 50$$

El estadístico de contraste es $Z = \dfrac{\bar{X} - \mu_0}{\sqrt{s^2/n}}$ que sigue una t_{n-1} si H_0 es cierta.

La región de rechazo está formada por los valores menores que $-t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = -t_{9,0.975} = -2.262$ **y mayores que** $t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} = t_{9,0.975} = 2.262$.

Basándonos en la muestra, el valor de $t_{exp} = \dfrac{51 - 50}{\sqrt{1/10}} = 3.162$

Puesto que t_{exp} **pertenece a la región de rechazo, rechazamos** H_0**.**



Obsérvese que si calculamos el intervalo de confianza 95% para la media

$$\left(\bar{x} - t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \;,\; \bar{x} + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right) = \left(51 - t_{9,0.975} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} \;,\; 51 + t_{n-1,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= (51 - 0.7153 \;,\; 51 + 0.7153) = (50.2847, 51.7153)$$

el valor 50 de la hipótesis nula no pertenece al intervalo de confianza.

Si en un contraste bilateral y a un nivel de significación α, se rechaza la hipótesis nula, entonces el valor de la hipótesis nula no pertenece al intervalo de confianza de nivel $100(1-\alpha)\%$

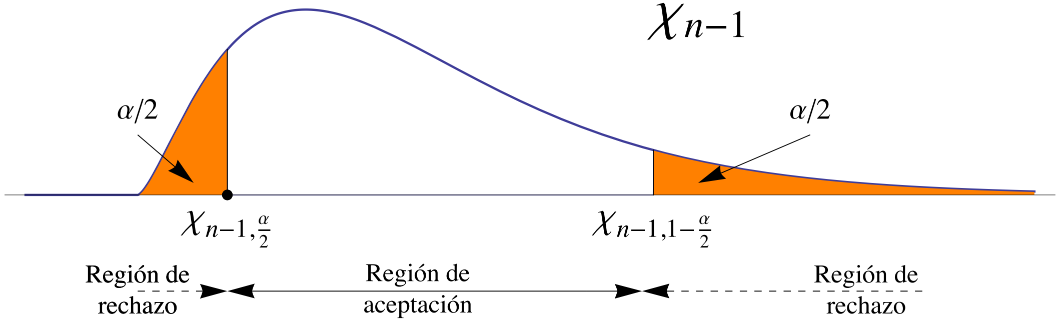
1.5. CONTRASTES DE HIPÓTESIS. Contrastes sobre la varianza de una ley Normal

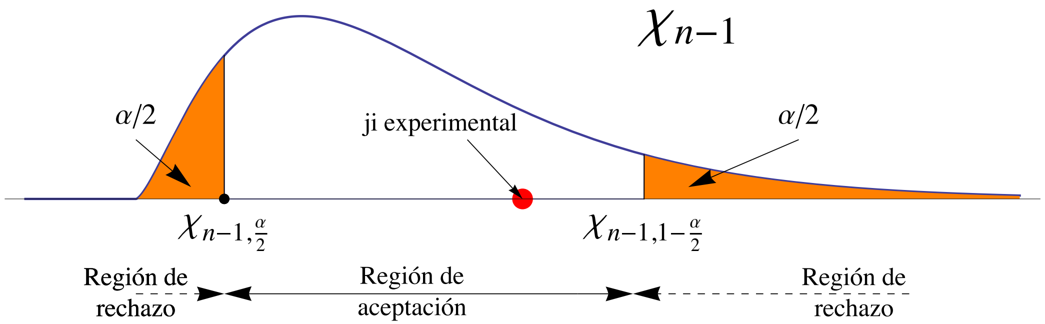
Hipótesis nulas: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$, $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$ **ó** $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$.

- **Si no se conoce la media (μ), el estadístico de contraste es**

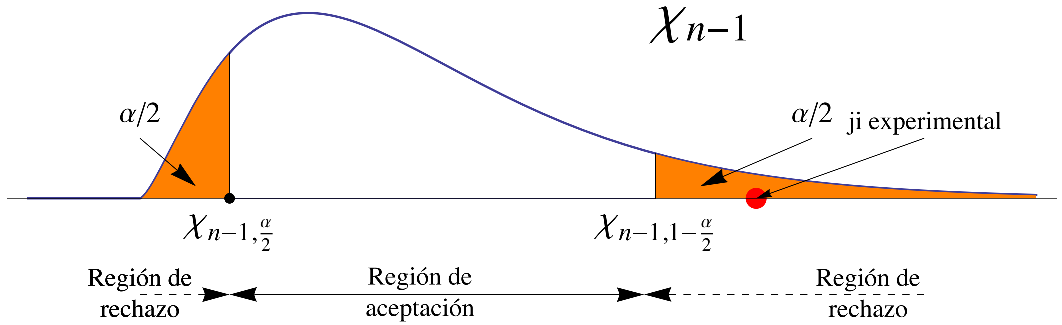
$$\boxed{V = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}, \text{ que sigue la ley } \chi^2_{n-1} \text{ si } H_0 \text{ es cierta}}$$

Contraste bilateral: $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2, ;$ $\quad H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2,$



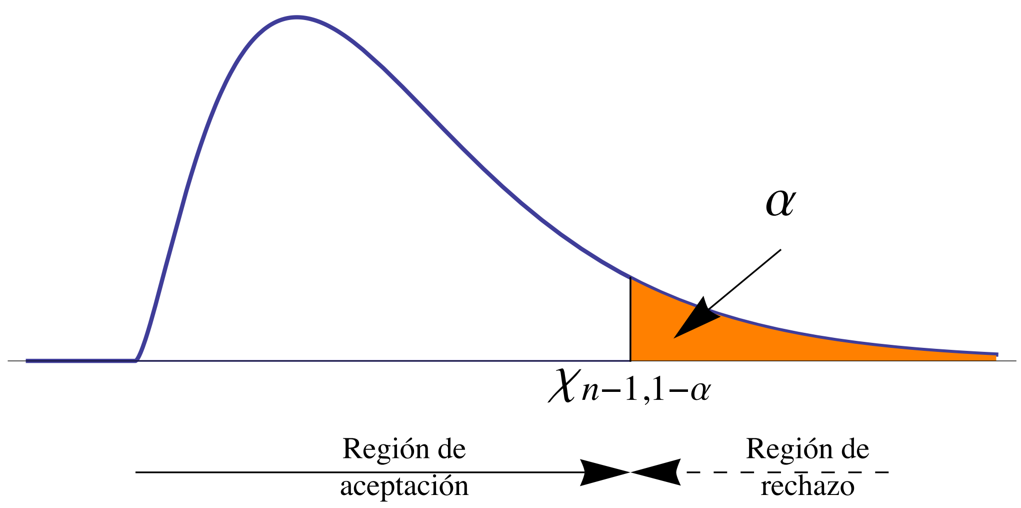


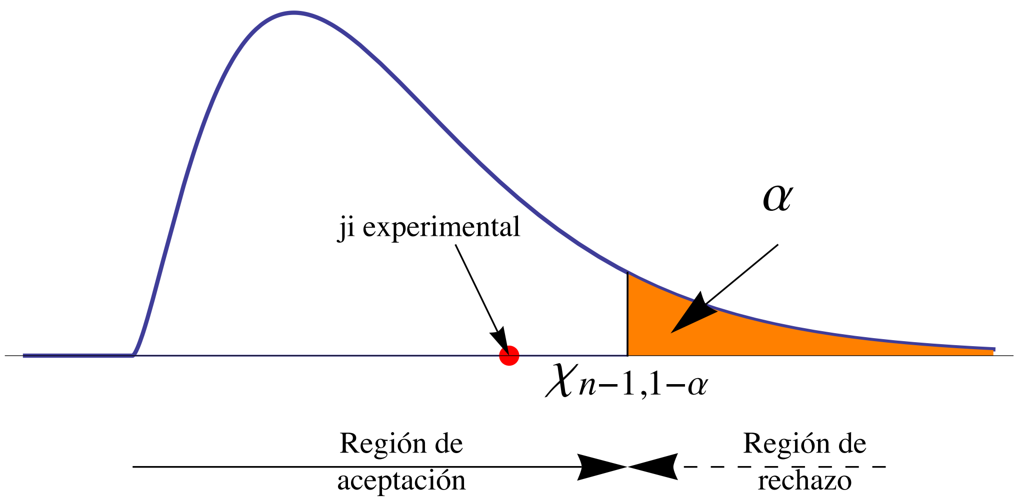
No rechazo H_0

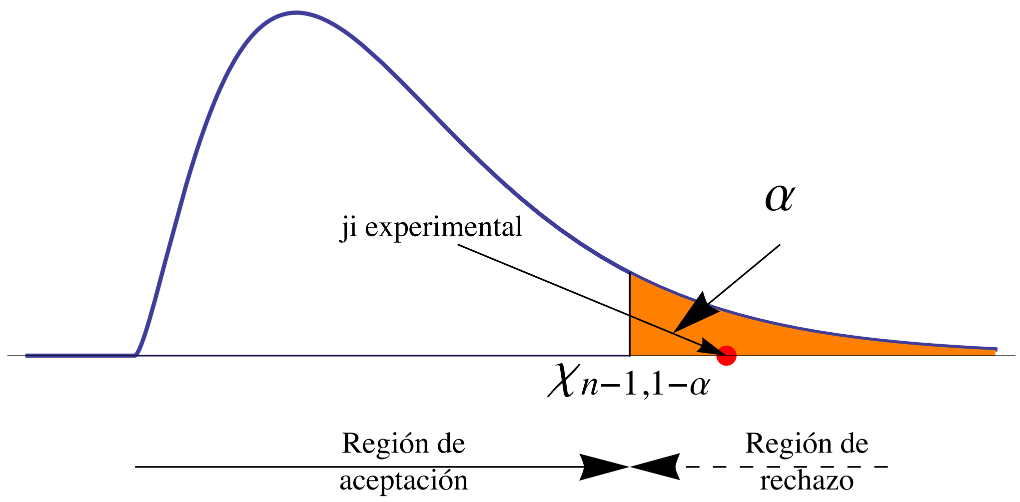


Rechazo H_0

Contraste unilateral a la derecha: $H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2,$



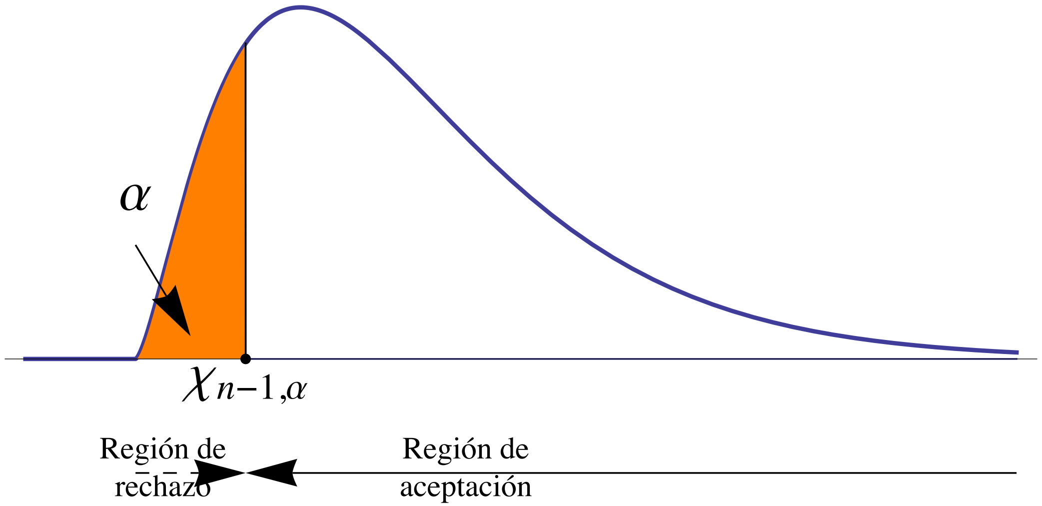


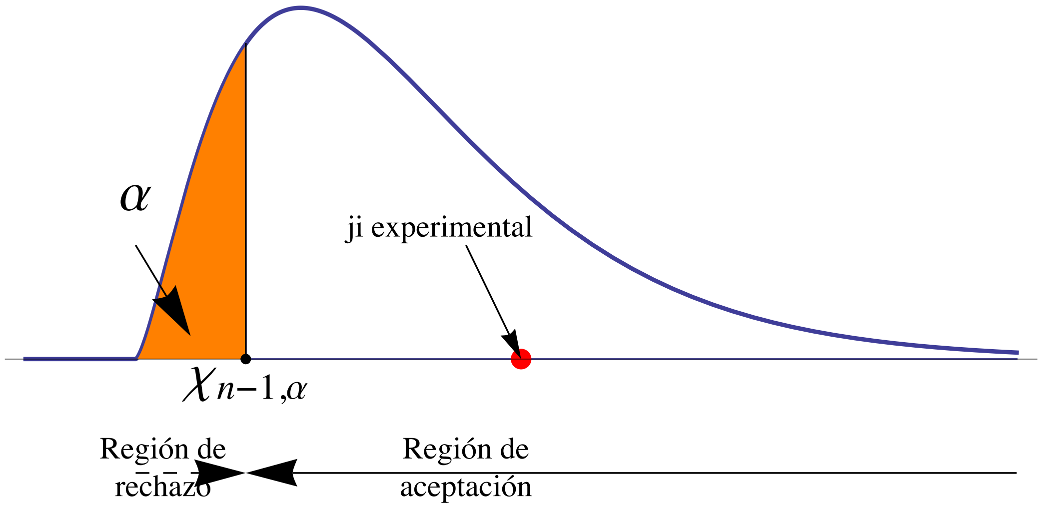


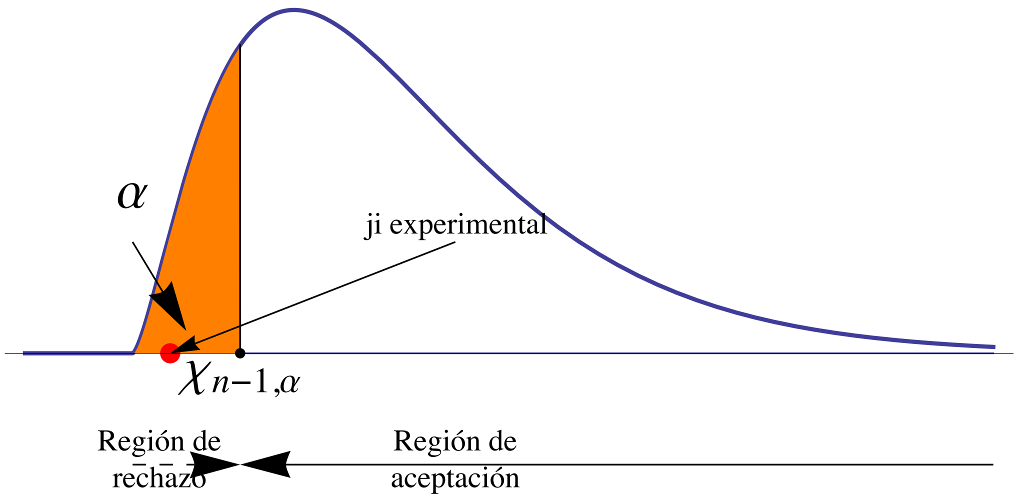
No rechazo H_0

Rechazo H_0

Contraste unilateral a la izquierda: $H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2, \qquad H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2,$







No rechazo H_0 **Rechazo H_0**

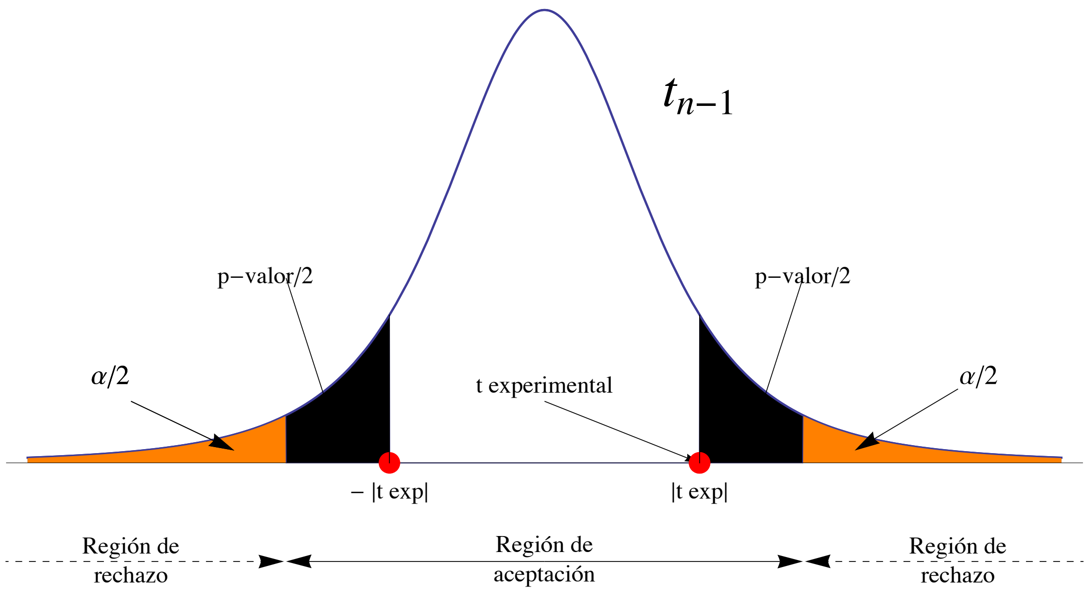
¿Cómo hacen los programas de ordenador los contrastes de hipótesis?

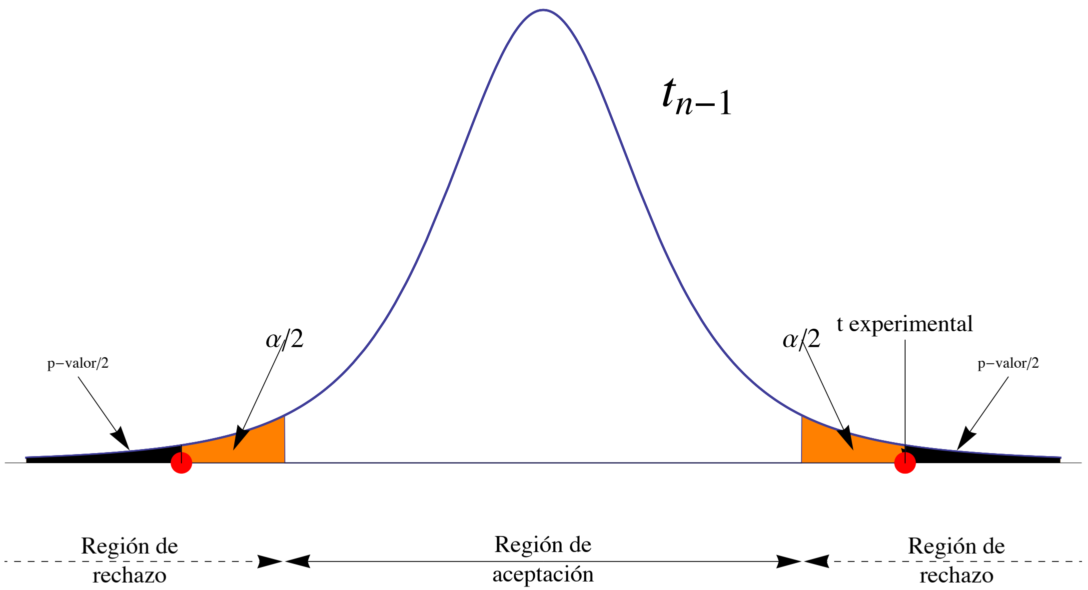
Los programas informáticos rechazan o no la hipótesis nula calculando un valor, que llaman P-valor, y lo comparan con el valor α.

Intuitivamente el P-valor es la probabilidad asociada al valor experimental en el mismo sentido que la hipótesis nula.

El p-valor de un contraste, P, es la probabilidad de que se hubiese obtenido un valor experimental del estadístico de contraste T menos compatible con H_0 que el valor t_0 observado en el experimento, en el supuesto de que H_0 fuese cierta.

Contraste bilateral: $H_0 : \mu = \mu_0; \qquad H_1 : \mu \neq \mu_0$

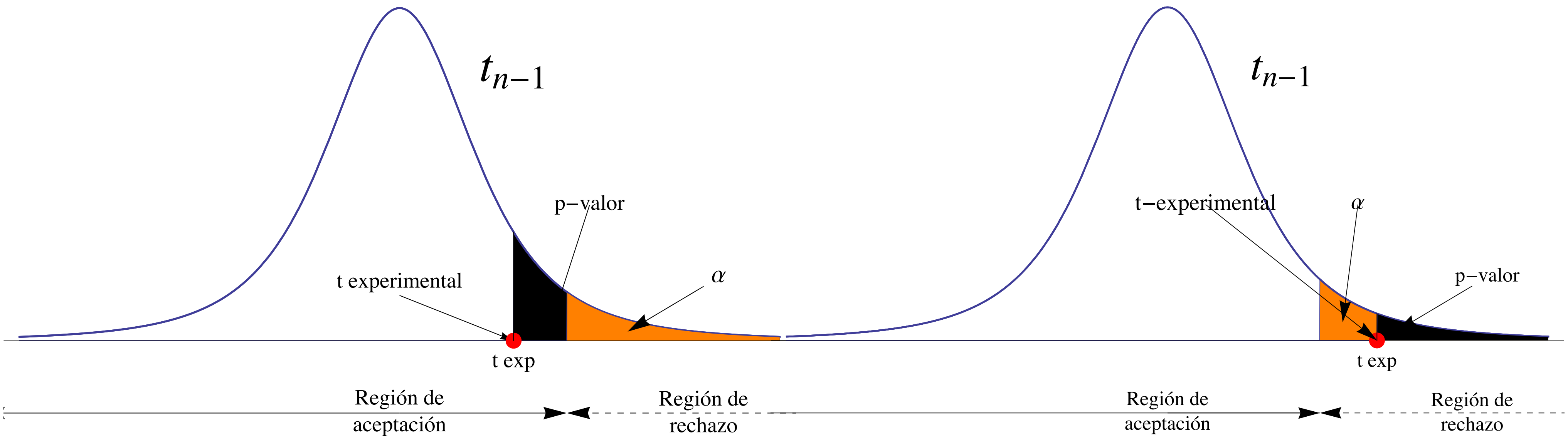




Si $P > \alpha$ No rechazo H_0
Contraste no significativo

Si $P \leq \alpha$ rechazo H_0
Contraste significativo

Contraste unilateral a la derecha: $H_0 : \mu \leq \mu_0; \qquad H_1 : \mu > \mu_0$



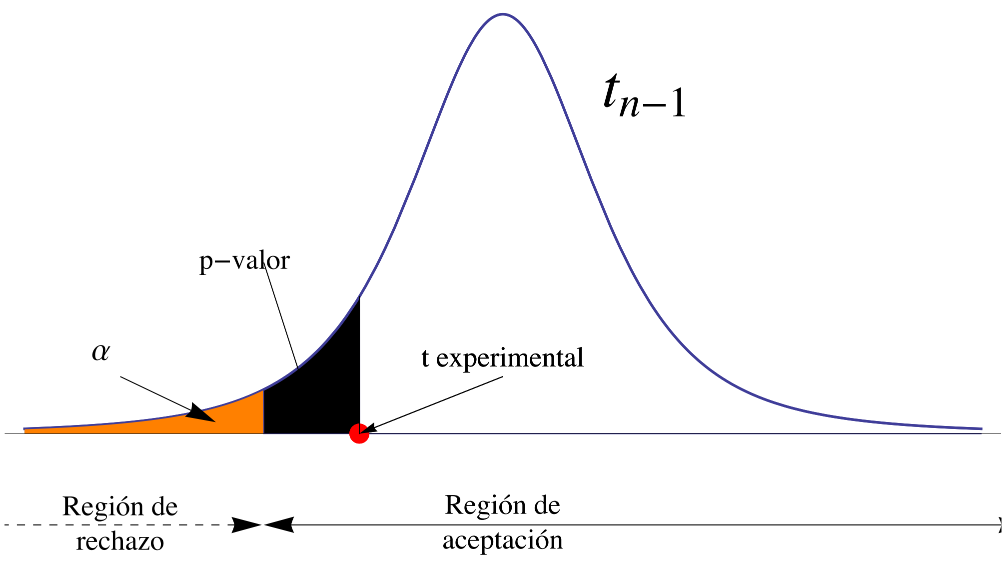
Si $P > \alpha$ **No rechazo** H_0

Contraste no significativo

Si $P \leq \alpha$ **rechazo** H_0

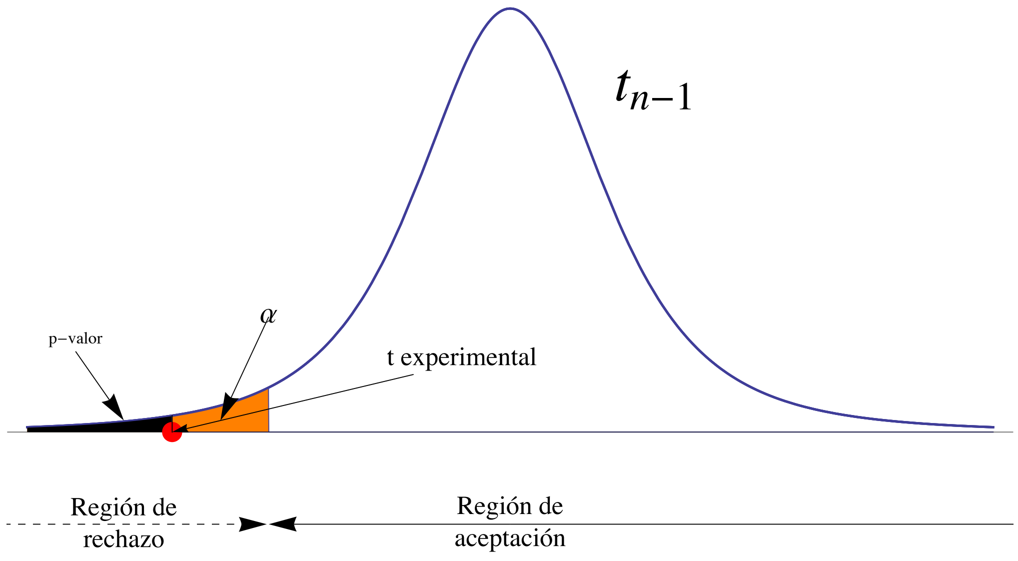
Contraste significativo

Contraste unilateral a la izquierda: $H_0 : \mu \geq \mu_0; \qquad H_1 : \mu < \mu_0$



Si $P > \alpha$ **No rechazo** H_0

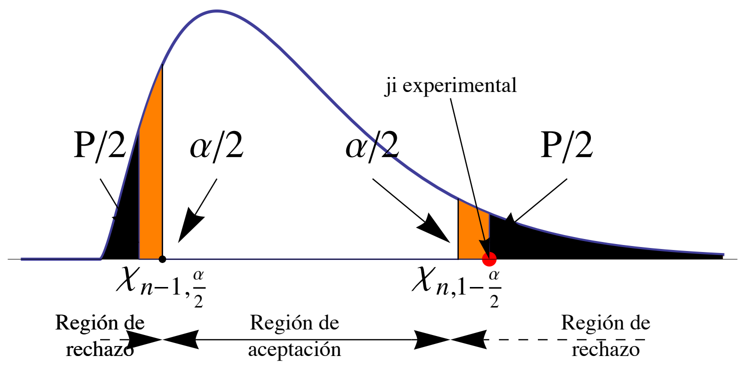
Contraste no significativo

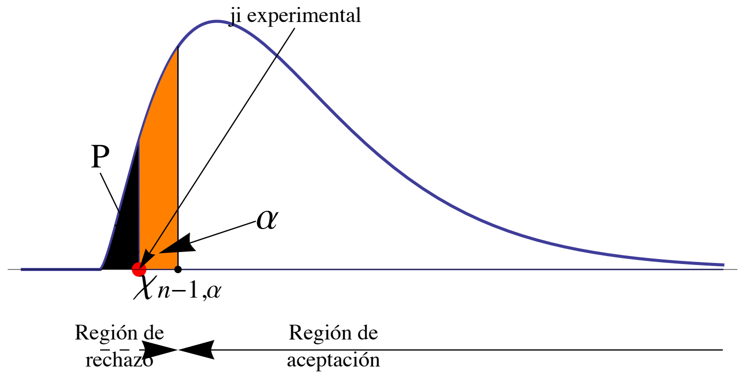


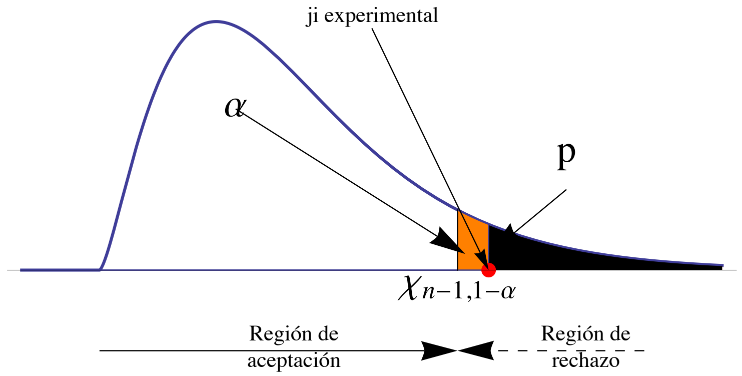
Si $P \leq \alpha$ **rechazo** H_0

Contraste significativo

Los programas de ordenador rechazan la hipótesis nula comparando el P-valor con el nivel de significación α







Si $P \leq \alpha$ rechazo H_0
Contraste significativo

Si $P > \alpha$ no rechazo H_0
Contraste no significativo

NOTA: la zona negra corresponde al P-valor y la naranja al nivel de significación α

¿A partir de qué valor se considera que las diferencias son significativas?

Se fija el nivel de significación α, (generalmente suele ser $\alpha = 0.05$)

- **Si el P-valor, P, de un contraste es menor o igual que el nivel de significación, α, debe rechazarse la hipótesis nula:**

$$\boxed{\begin{array}{l} P \le \alpha \Leftrightarrow \textbf{Se rechaza } H_0 \quad \textbf{El contraste es significativo} \\ \textbf{o bien, hay diferencias estadísticamente significativas} \end{array}}$$

- **Si el P-valor , P, de un contraste es mayor que el nivel de significación, α, no puede rechazarse la hipótesis nula:**

$$\boxed{\begin{array}{l} P > \alpha \Leftrightarrow \textbf{No se rechaza } H_0 \quad \textbf{El contraste no es significativo} \\ \textbf{o bien, no hay diferencias estadísticamente significativas} \end{array}}$$

La ausencia de discrepancias significativas conlleva al no rechazo provisional de la hipótesis nula mientras no aparezcan evidencias empíricas en contra de ella.