МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина:
Основы методов конечных элементов

Отчет по выполнению лабораторной работы №8

Группа: ФН11-72Б
Вариант 6

Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель:Захарова Ю.В.

Москва, 2022

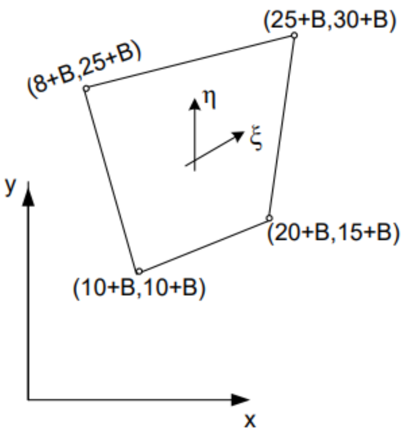
Четырехугольные конечные элементы

Контрольные вопросы

1. Какие конечные элементы можно отнести к семейству серендиповых?
2. Какие еще виды четырехугольных элементов вы знаете?
3. Примеры базисных функции серендиповых элементов.
4. Функции формы для линейного и квадратичного четырехугольного элемента.
5. Естественная система координат для четырехугольного элемента.

Задание.

Построить функции формы и вычислить их производные для квадратичного и кубичного четырехугольного элемента со следующими узловыми координатами:



B – номер варианта по списку.

Контрольные вопросы:

1. Серендиповы конечные элементы -семейство КЭ высших порядков без внутренних узлов.

2. Лагранжевы, Эрмитовы

Лагранжевы четырехугольные КЭ- КЭ, которые могут содержать внутренние узлы и безисные функции которых вычисляются при помощи полиномов Лагранжа.

Базисные функции для ***эрмитовых элементов*** могут быть получены аналогичным образом как для лагранжевых элементов, но с использованием полиномов Эрмита вместо полиномов Лагранжа

3-4. Функции формы и базисные функции для квадратичного и кубического элемента

$$N_\beta = \left[\prod_{j=1}^{4} F_j\right](a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2), \qquad (*)$$

где

$$F_k = \begin{cases} f_k, \text{если узел } \beta \text{ не принадлежит стороне } k \\ 1, \text{если узел } \beta \text{ принадлежит стороне } k \end{cases}$$

f_k – базисные функции

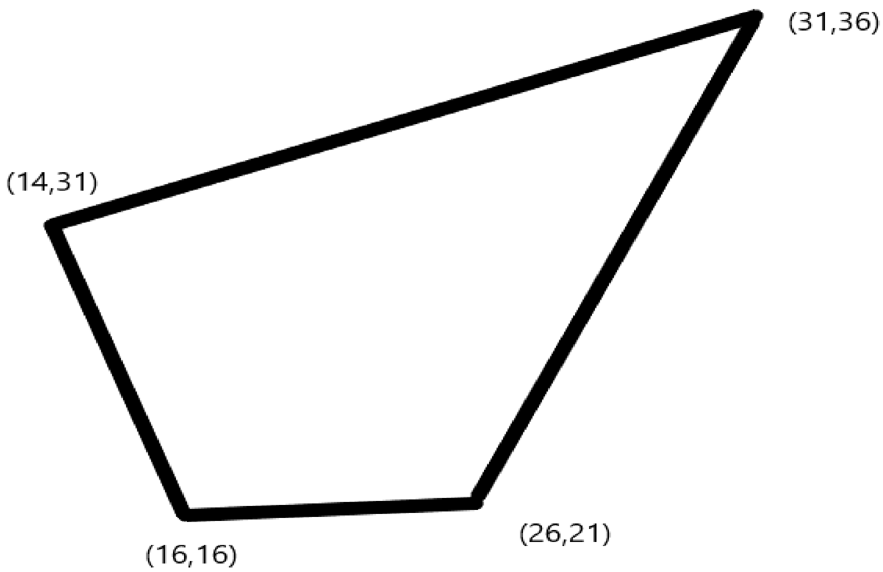
$$f_1 = (1+\eta),\ f_2 = (1-\xi),\ f_3 = (1-\eta),\ f_4 = (1+\xi).$$

5.Для естественной системы координат ξ, η, начало координат берется как пересечение линий, соединяющих середины противоположных сторон, а стороны определяются ξ, η = ± 1.Естественные и декартовы координаты связаны следующим уравнением:

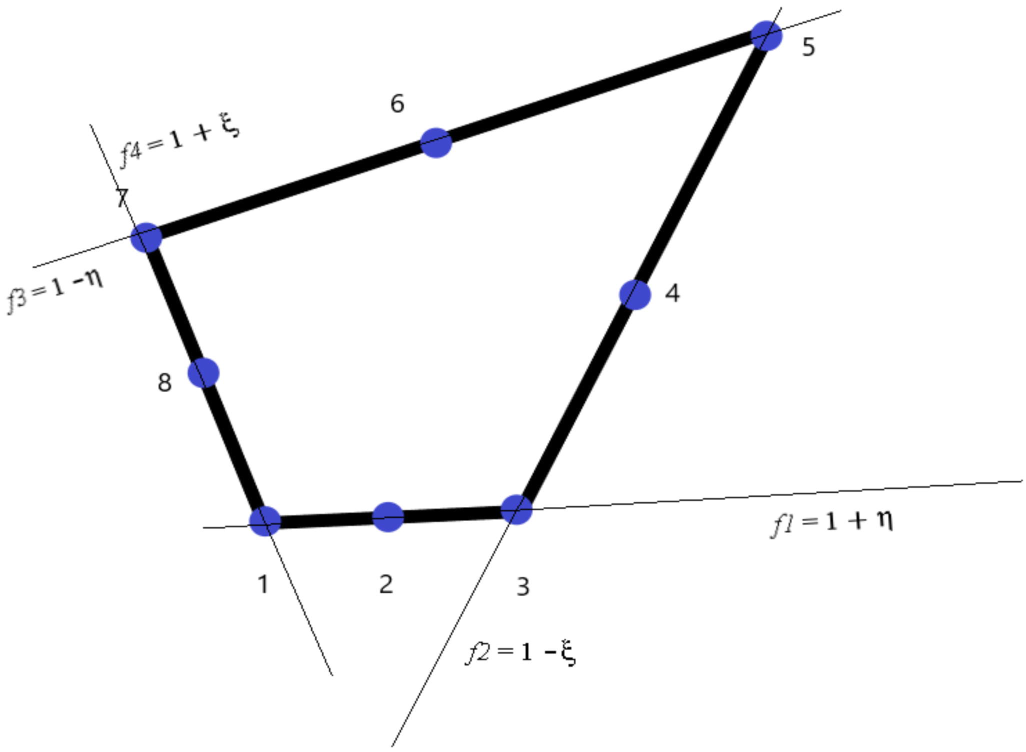
$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{Bmatrix}$$

Решение

Подставим координаты:



Для квадратичной аппроксимации:



Определим функции формы N_β, $\beta = \overline{1,8}$ по формуле:

$$N_\beta = \left[\prod_{j=1}^{4} F_j\right](a_1 + a_2\xi + a_3\eta + a_4\xi^2 + a_5\eta^2), \qquad (*)$$

где

$$F_k = \begin{cases} f_k, \text{если узел } \beta \text{ не принадлежит стороне } k \\ 1, \text{если узел } \beta \text{ принадлежит стороне } k \end{cases}$$

f_k – базисные функции

$f_1 = (1+\eta)$, $f_2 = (1-\xi)$, $f_3 = (1-\eta)$, $f_4 = (1+\xi)$.

Для квадратичного элемента коэффициенты a_4, a_5 равны 0.

Таким образом функции N приобретают вид:

$$N1 := (1-\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(a_{11} + a_{21}\cdot\xi + a_{31}\cdot\eta) :$$
$$N2 := (1+\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(a_{12} + a_{22}\cdot\xi + a_{32}\cdot\eta) :$$
$$N3 := (1+\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(a_{13} + a_{23}\cdot\xi + a_{33}\cdot\eta) :$$
$$N4 := (1+\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(a_{14} + a_{24}\cdot\xi + a_{34}\cdot\eta) :$$
$$N5 := (1+\xi)\cdot(1+\eta)\cdot(a_{15} + a_{25}\cdot\xi + a_{35}\cdot\eta) :$$
$$N6 := (1+\xi)\cdot(1+\eta)\cdot(a_{16} + a_{26}\cdot\xi + a_{36}\cdot\eta) :$$
$$N7 := (1-\xi)\cdot(1+\eta)\cdot(a_{17} + a_{27}\cdot\xi + a_{37}\cdot\eta) :$$
$$N8 := (1-\xi)\cdot(1-\eta)\cdot(a_{18} + a_{28}\cdot\xi + a_{38}\cdot\eta) :$$

для нахождения коэффициентов a_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{1,8}$ подставляем граничные условия функции форм N_β:

Для узла β $N_\beta = 1$, для узлов на сторонах, проходящих через узел β, но не равных β , $N_\beta = 0$

Например, для первого узла(β=1) $N_1^{(1)} = 1,\ N_1^{(2)} = 0,\ N_1^{(8)} = 0$

После нахождения коэффициентов функции формы приобретают вид:

$$N_1 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+1), \qquad N_2 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta),$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1), \qquad N_4 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1+\xi),$$

$$N_5 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1), \qquad N_6 = \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta),$$

$$N_7 = -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1), \qquad N_8 = \frac{1}{2}(1-\eta^2)(1-\xi).$$

Запишем координаты узлов:

$$X := [16, 26, 31, 14]$$

$$Y := [16, 21, 36, 31]$$

Представим функции $x,\ y$ в виде линейной комбинации:

$$x := R1 \cdot X[1] + R2 \cdot X[2] + R3 \cdot X[3] + R4 \cdot X[4]$$

$$y := R1 \cdot Y[1] + R2 \cdot Y[2] + R3 \cdot Y[3] + R4 \cdot \mathrm{Y}[4]$$,

где $R_j -$ линейные функции формы, найденные ранее :

$$R_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \quad R_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta),$$

$$R_3 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \quad R_4 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta).$$

Таким образом можно выразить x, y в виде функций $x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)$

Полученных выражения:

$$x = 4\,(1-\xi)\,(1-\eta) + \frac{13}{2}\,(1+\xi)\,(1-\eta) + \frac{31}{4}\,(1+\xi)\,(1+\eta) + \frac{7}{2}\,(1-\xi)\,(1+\eta)$$

$$y = 4\,(1-\xi)\,(1-\eta) + \frac{21}{4}\,(1+\xi)\,(1-\eta) + 9\,(1+\xi)\,(1+\eta) + \frac{31}{4}\,(1-\xi)\,(1+\eta)$$

Матрица Якоби и ее обратная матрица:

$$J := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} x & \frac{\partial}{\partial \xi} y \\ \frac{\partial}{\partial \eta} x & \frac{\partial}{\partial \eta} y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{27}{4} + \frac{7}{4}\eta & \frac{5}{2} \\ \frac{3}{4} + \frac{7}{4}\xi & \frac{15}{2} \end{bmatrix}$$

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{78 + 21\eta - 7\xi} & -\frac{4}{78 + 21\eta - 7\xi} \\ -\frac{2}{5}\frac{3 + 7\xi}{78 + 21\eta - 7\xi} & \frac{2}{5}\frac{27 + 7\eta}{78 + 21\eta - 7\xi} \end{bmatrix}$$

Матричная запись преобразования координат:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N_\beta \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N_\beta \end{bmatrix} = J \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_\beta \\ \frac{\partial}{\partial y} N_\beta \end{bmatrix}$$

Откуда

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N_\beta \\ \frac{\partial}{\partial y} N_\beta \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N_\beta \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N_\beta \end{bmatrix}$$

Координаты узлов в системе ξη:

$1(-1;-1)$
$2(0;\ -1)$
$3(1;-1)$
$4(1;\ 0)$
$5(1;\ 1)$
$6(0;\ 1)$
$7(-1;\ 1)$
$8(-1;\ 0)$

Для каждого узла $\beta = \overline{0, 8}$ считаем производные по x и y:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N1} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N1} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -1, \eta = -1, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N1} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \\ -\frac{9}{40} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N2} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N2} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = 0, \eta = -1, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N2} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N2} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{2}{57} \\ -\frac{4}{57} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N3} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N3} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = 1, \eta = -1, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N3} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N3} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{12}{25} \\ -\frac{9}{25} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N4} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N4} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = 1, \eta = 0, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N4} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N4} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{6}{71} \\ -\frac{2}{71} \end{bmatrix} :$$

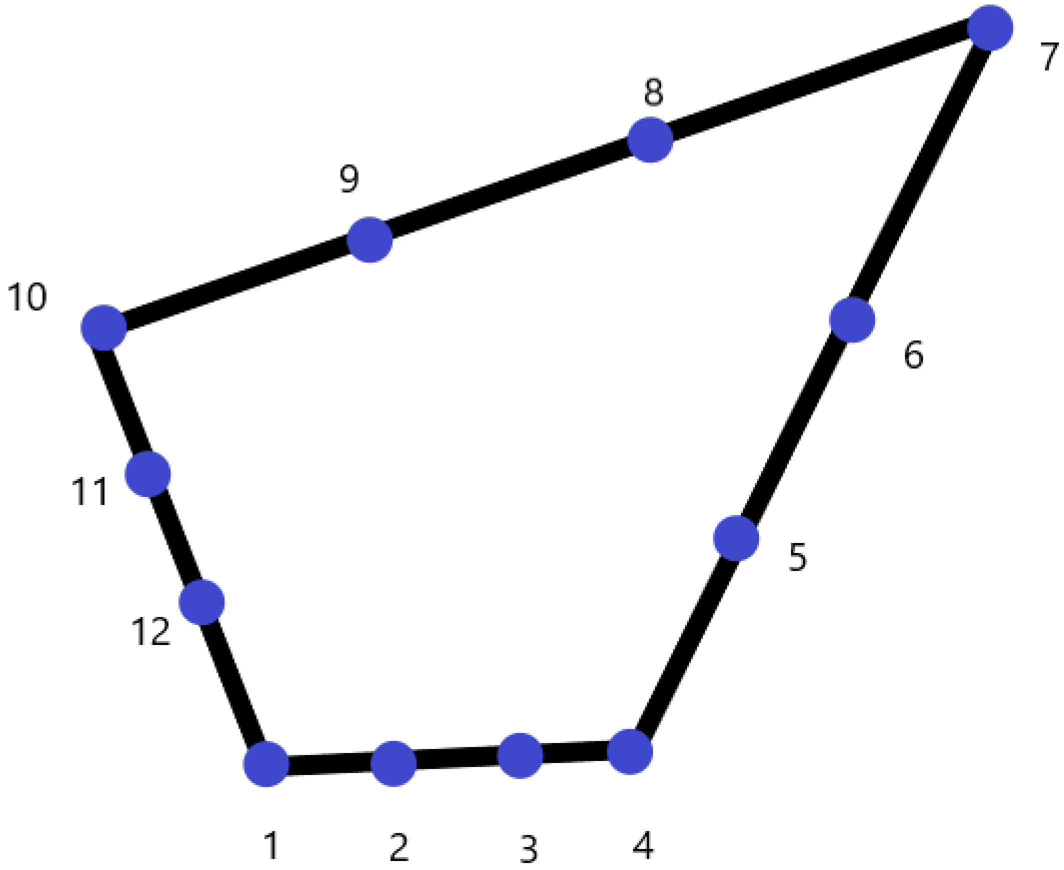
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N5} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N5} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = 1, \eta = 1, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N5} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N5} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{3}{23} \\ \frac{18}{115} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N6} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N6} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = 0, \eta = 1, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N6} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N6} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{2}{99} \\ \frac{34}{495} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N7} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N7} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -1, \eta = 1, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N7} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N7} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{12}{53} \\ \frac{9}{53} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \mathrm{N8} \\ \frac{\partial}{\partial y} \mathrm{N8} \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -1, \eta = 0, \ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \mathrm{N8} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \mathrm{N8} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{85} \\ -\frac{4}{425} \end{bmatrix} :$$

Для кубического элемента:



По аналогии с квадратичной аппроксимацией, находим функции формы из общего вида и условий для значений в узлах:

$$N_1 = \frac{1}{32}(1-\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)], \qquad N_2 = \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi),$$

$$N_3 = \frac{9}{32}(1-\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi), \qquad N_4 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)],$$

$$N_5 = \frac{9}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta), \qquad N_6 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta),$$

$$N_7 = \frac{1}{32}(1+\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)], \qquad N_8 = \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1+3\xi),$$

$$N_9 = \frac{9}{32}(1+\eta)(1-\xi^2)(1-3\xi), \qquad N_{10} = \frac{1}{32}(1-\xi)(1+\eta)[-10+9(\xi^2+\eta^2)],$$

$$N_{11} = \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+3\eta), \qquad N_{12} = \frac{9}{32}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-3\eta).$$

Линейные функции R остаются теми же, а, следовательно x,y имеют представление как и для квадратичного элемента:

$$x = 4\,(1-\xi)\,(1-\eta) + \frac{13}{2}\,(1+\xi)\,(1-\eta) + \frac{31}{4}\,(1+\xi)\,(1+\eta) + \frac{7}{2}\,(1-\xi)\,(1+\eta)$$

$$y=4\,(1-\xi)\,(1-\eta)+\frac{21}{4}\,(1+\xi)\,(1-\eta)+9\,(1+\xi)\,(1+\eta)+\frac{31}{4}\,(1-\xi)\,(1+\eta)$$

Координаты узлов в естественных координатах:

$$1(-1,-1)\qquad 5\left(1,-\frac{1}{3}\right)\qquad 9\left(-\frac{1}{3},1\right)$$

$$2\left(-\frac{1}{3},-1\right)\qquad 6\left(1,\frac{1}{3}\right)\qquad 10(-1,1)$$

$$3\left(\frac{1}{3},-1\right)\qquad 7(1,1)\qquad 11\left(-1,\frac{1}{3}\right)$$

$$4(1,-1)\qquad 8\left(\frac{1}{3},1\right)\qquad 12\left(-1,-\frac{1}{3}\right)$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N1}\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{N1}\end{bmatrix}=subs\left(\xi=-1,\eta=-1,\ inverse(J)\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{N1}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mathrm{N1}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{11}{32}\\ -\frac{33}{80}\end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N2}\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{N2}\end{bmatrix}=subs\left(\xi=-\frac{1}{3},\eta=-1,\ inverse(J)\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{N2}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mathrm{N2}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}-\frac{21}{178}\\ -\frac{57}{890}\end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N3}\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{N3}\end{bmatrix}=subs\left(\xi=\frac{1}{3},\eta=-1,\ inverse(J)\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{N3}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mathrm{N3}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{33}{164}\\ -\frac{21}{205}\end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N4}\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{N4}\end{bmatrix}=subs\left(\xi=1,\eta=-1,\ inverse(J)\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{N4}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mathrm{N4}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{22}{25}\\ -\frac{33}{50}\end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N5}\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{N5}\end{bmatrix}=subs\left(\xi=1,\eta=-\frac{1}{3},\ inverse(J)\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{N5}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mathrm{N5}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{9}{64}\\ -\frac{47}{320}\end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{N6}\\ \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{N6}\end{bmatrix}=subs\left(\xi=1,\eta=\frac{1}{3},\ inverse(J)\cdot\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial \xi}\mathrm{N6}\\ \frac{\partial}{\partial \eta}\mathrm{N6}\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}\frac{1}{234}\\ \frac{17}{1755}\end{bmatrix}:$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N7 \\ \frac{\partial}{\partial y} N7 \end{bmatrix} = subs\left(\xi = 1, \eta = 1,\ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N7 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N7 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{11}{46} \\ \frac{33}{115} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N8 \\ \frac{\partial}{\partial y} N8 \end{bmatrix} = subs\left(\xi = \frac{1}{3}, \eta = 1,\ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N8 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \frac{21}{290} \\ \frac{39}{725} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N9 \\ \frac{\partial}{\partial y} N9 \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -\frac{1}{3}, \eta = 1,\ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N9 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N9 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{33}{304} \\ \frac{21}{304} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N10 \\ \frac{\partial}{\partial y} N10 \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -1, \eta = 1,\ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N10 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N10 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{22}{53} \\ \frac{33}{106} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N11 \\ \frac{\partial}{\partial y} N11 \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -1, \eta = \frac{1}{3},\ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N11 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N11 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{92} \\ \frac{2}{23} \end{bmatrix} :$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N12 \\ \frac{\partial}{\partial y} N12 \end{bmatrix} = subs\left(\xi = -1, \eta = -\frac{1}{3},\ inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} N12 \\ \frac{\partial}{\partial \eta} N12 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{26} \\ -\frac{41}{390} \end{bmatrix} :$$