МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина:
Основы методов конечных элементов

Отчет по выполнению лабораторной работы №7

Группа: ФН11-72Б
Вариант 6

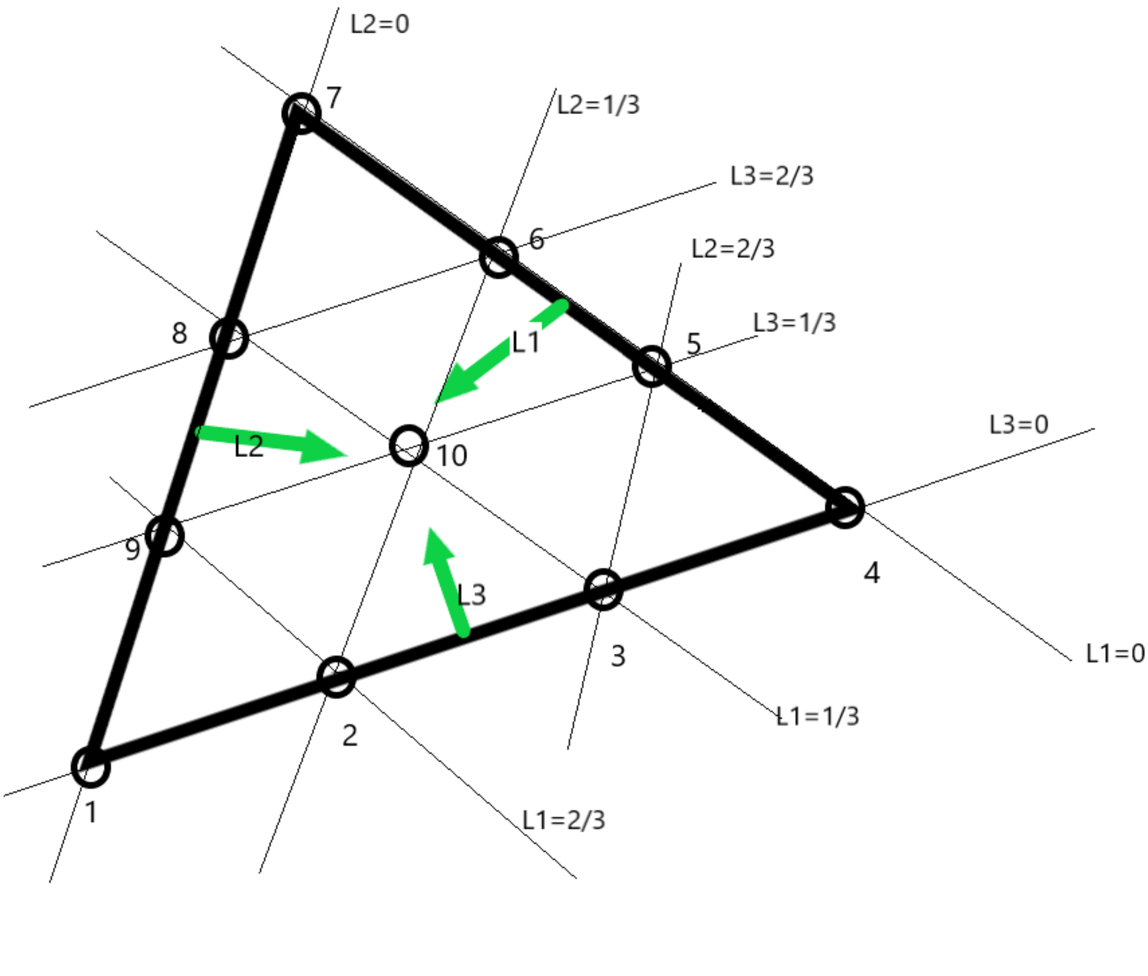
Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель:Захарова Ю.В.

Москва, 2022

Задача.

1) Определить функции формы для треугольного элемента 3 и 4 порядка. Записать общую процедуру вывода и объяснить.
2) Вычислить $\frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y}$ в точке (1,4) для кубического субпараметрического треугольного элемента (см. рисунок), где $i = \overline{1,10}$ – номер варианта по журналу.
3) Вычислить численно интеграл $\iint\limits_S \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dS$ по площади треугольного элемента (см. рисунок). Проверить ответ, применив формулу $\int\limits_{S^{(e)}} L_1^{\alpha} L_2^{\beta} L_3^{\gamma} dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} 2S^{(e)}$

Треугольный элемент 3-го порядка:



L-координаты узлов:

$$1(1, 0, 0) \qquad 6\left(0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$2\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) \qquad 7(0, 0, 1)$$

$$3\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0\right) \qquad 8\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right)$$

$$4(0, 1, 0) \qquad 9\left(\frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$5\left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \qquad 10\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

порядок треугольника равен n=4-1=3

Функции формы имеют вид:

$$N_\beta = \prod_{\delta=1}^{n} \frac{F_\delta}{F_\delta|_{L_1, L_2, L_3}},$$

F_δ определяются из n уравнений линий, проходящих через все узлы, кроме β, а знаменатель считается как уравнения этих линий в узле β, т.е нужно найти 3 такие линии, которые не пройдут через узел β, но пройдут через остальные узлы, и посчитать знаменатель в этом узле.

$$N1 := \frac{(L1-0)\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(L1-\frac{2}{3}\right)}{(L1-0)\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(L1-\frac{2}{3}\right)\Big|_{L1=1}} = \frac{9\cdot L1\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(L1-\frac{2}{3}\right)}{2}:$$

$$N2 := \frac{(L1-0)\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot(L2-0)}{(L1-0)\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot(L2-0)\Big|_{L1=\frac{2}{3},\, L2=\frac{1}{3}}} = \frac{27\, L1\cdot L2\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)}{2}$$

$$N3 := \frac{(L1-0)\cdot(L2-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)}{(L1-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot(L2-0)\Big|_{L1=\frac{1}{3},\, L2=\frac{2}{3}}} = \frac{27\, L1\cdot L2\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)}{2}$$

$$N4 := \frac{(L2-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(L2-\frac{2}{3}\right)}{(L2-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(L2-\frac{2}{3}\right)\Big|_{L2=1}} = \frac{9\cdot(L2)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(L2-\frac{2}{3}\right)}{2}$$

$$N5 := \frac{(L2-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L3}-0)}{(L2-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L3}-0)\Big|_{L2=\frac{2}{3},\, L3=\frac{1}{3}}} = \frac{27\cdot(L2-0)\cdot\left(L2-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L3}-0)}{2}:$$

$$N6 := \frac{(L2-0)\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L3}-0)}{subs\left(L2=\frac{1}{3},\, L3=\frac{2}{3},\, (L2-0)\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L3}-0)\right)} = \frac{27}{2}\, L2\left(L3-\frac{1}{3}\right)L3$$

$$N7 := \frac{(L3-0)\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\mathrm{L3}-\frac{2}{3}\right)}{(L3-0)\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\mathrm{L3}-\frac{2}{3}\right)\Big|_{L3=1}} = \frac{9}{2}\cdot L3\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(\mathrm{L3}-\frac{2}{3}\right)$$

$$N8 := \frac{(L3-0)\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)}{(L3-0)\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)\Big|_{L1=\frac{1}{3},\, L3=\frac{2}{3}}} = \frac{27\cdot L3\cdot L1\cdot\left(L3-\frac{1}{3}\right)}{2}$$

$$N9 := \frac{(L3-0)\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)}{subs\left(L1=\frac{2}{3},\, L3=\frac{1}{3},\, (L3-0)\cdot\left(L1-\frac{1}{3}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)\right)} = \frac{27}{2}\, L3\left(L1-\frac{1}{3}\right)L1$$

$$N10 := \frac{(L3-0)\cdot(\mathrm{L2}-0)\cdot(\mathrm{L1}-0)}{(L3-0)\cdot(\mathrm{L2}-0)\cdot(\mathrm{L1}-0)\Big|_{L1=\frac{1}{3},\, L2=\frac{1}{3},\, L3=\frac{1}{3}}} = 27\cdot L1\cdot L2\cdot L3$$

Запишем координаты x, y:

$$X := [0, 3, 1]:$$

$$Y := [0, 2, 6]:$$

$$x = L1\cdot X[1] + L2\cdot X[2] + L3\cdot X[3] = 3L2 + L3$$

$$y = L1\cdot Y[1] + L2\cdot Y[2] + L3\cdot Y[3] = 2\,L2 + 6\,L3$$

В качестве компонент матрицы Якоби возьмем производные по L2, L3 , иначе матрица Якоби будет вырожденной.

$$J := \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L2}x & \frac{\partial}{\partial L2}y \\ \frac{\partial}{\partial L3}x & \frac{\partial}{\partial L3}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

Обратная матрица Якоби:

$$J^{-1} := \begin{bmatrix} \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{1}{16} & \frac{3}{16} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N6 \\ \frac{\partial}{\partial y} N6 \end{bmatrix} = J^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L2} N6 \\ \frac{\partial}{\partial L3} N6 \end{bmatrix}$$

$$inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L2} N6 \\ \frac{\partial}{\partial L3} N6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{81}{16}\left(L3 - \frac{1}{3}\right) L3 - \frac{27}{16} L2\, L3 - \frac{27}{16} L2 \left(L3 - \frac{1}{3}\right) \\ -\frac{27}{32}\left(L3 - \frac{1}{3}\right) L3 + \frac{81}{32} L2\, L3 + \frac{81}{32} L2 \left(L3 - \frac{1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

координаты точки A(1,4) найдем из уравнений для декартовых координат и условия нормировки:

1=0L1+3L2+L3
4=0L1+2L2+6L3
L1+L2+L3=1

Откуда:

$L1=\frac{1}{4}$, $L2=\frac{1}{8}$, $L3=\frac{5}{8}$

Считаем производные по x, y в точке:

$$subs\left(L1 = \frac{1}{4}, L2 = \frac{1}{8}, L3 = \frac{5}{8}, inverse(J) \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L2} N6 \\ \frac{\partial}{\partial L3} N6 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \frac{747}{1024} \\ \frac{279}{2048} \end{bmatrix}$$

Посчитаем интеграл и сравним ее с факториальной формулой, где $S^{(e)}$=8- площадь элемента:

$$\int_0^1 \int_0^{1 - L2} \frac{\partial}{\partial x} N6 \cdot \frac{\partial}{\partial y} N6 \cdot det(J)\, \mathrm{d}L3\, \mathrm{d}L2$$

$$\int_{S^{(e)}} L_1^{\alpha} L_2^{\beta} L_3^{\gamma} dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} 2S^{(e)}$$

Упростим выражение для $\frac{\partial N_6}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial y}$:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L2} \left(\frac{81}{16}\left(L3 - \frac{1}{3}\right) L3 - \frac{27}{16} L2\, L3 - \frac{27}{16} L2 \left(L3 - \frac{1}{3}\right)\right) \cdot \left(-\frac{27}{32}\left(L3 - \frac{1}{3}\right) L3 + \frac{81}{32} L2\, L3 + \frac{81}{32} L2 \left(L3 - \frac{1}{3}\right)\right) \cdot det(J)\, \mathrm{d}L3\, \mathrm{d}L2$$

$$-\frac{27}{128}$$

$$simplify\left(\left(\frac{81}{16}\left(L3 - \frac{1}{3}\right) L3 - \frac{27}{16} L2\, L3 - \frac{27}{16} L2 \left(L3 - \frac{1}{3}\right)\right) \cdot \left(-\frac{27}{32}\left(L3 - \frac{1}{3}\right) L3 + \frac{81}{32} L2\, L3 + \frac{81}{32} L2 \left(L3 - \frac{1}{3}\right)\right)\right)$$

$$-\frac{81}{512}\left(-9\, L3^2 + 3\, L3 + 6\, L2\, L3 - L2\right)\left(-3\, L3^2 + L3 + 18\, L2\, L3 - 3\, L2\right)$$

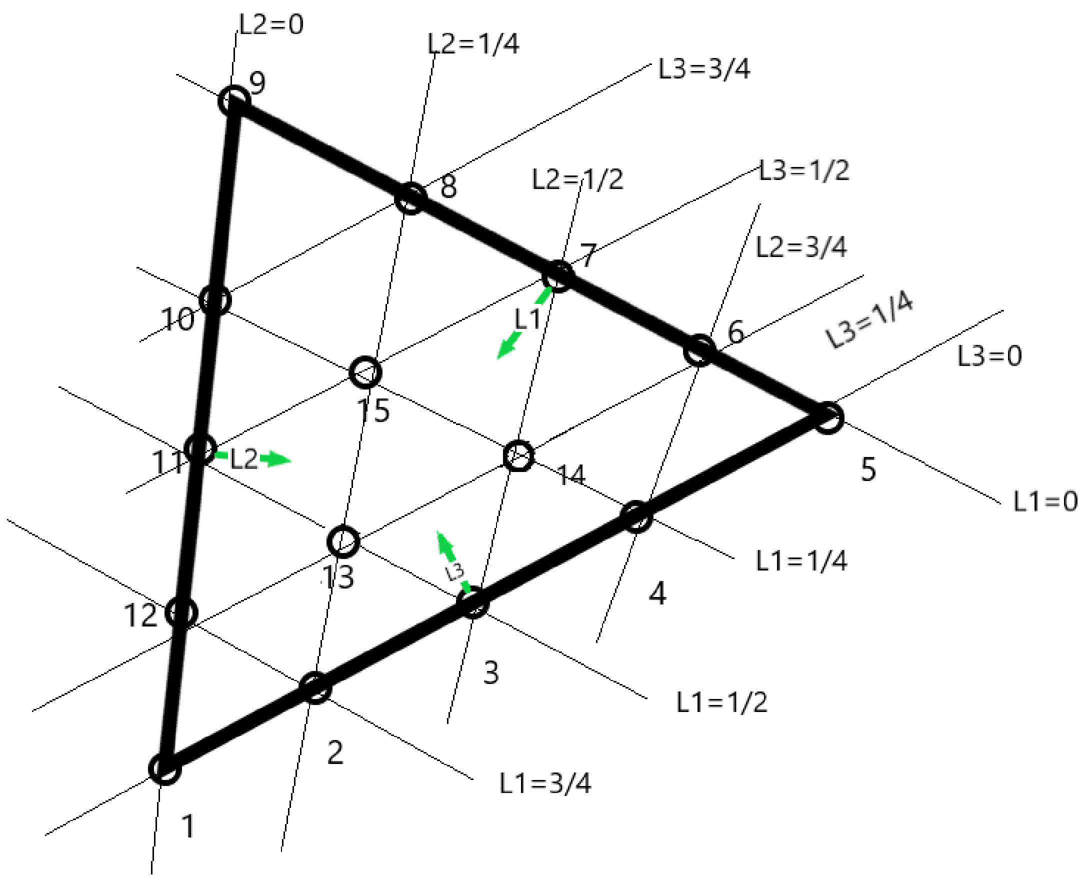
$$simplify\left(27 \cdot L3^4 - 9 \cdot L3^3 - 18 \cdot L2 \cdot L3^3 + 3 \cdot L2 \cdot L3^2 - 9 \cdot L3^3 + 3 \cdot L3^2 + 6 \cdot L2 \cdot L3^2 - L2 \cdot L3 - 9 \cdot 18 \cdot L2 \cdot L3^3 + 54 \cdot L2 \cdot L3^2 + 108 \cdot L2^2 \cdot L3^2 - 18 \cdot L2^2 \cdot L3 + 27 \cdot L2 \cdot L3^2 - 9 \cdot L2 \cdot L3 - 18 \cdot L2^2 \cdot L3 + 3 \cdot L2^2\right)$$

$$27\, L3^4 - 18\, L3^3 - 180\, L2\, L3^3 + 90\, L2\, L3^2 + 3\, L3^2 - 10\, L2\, L3 + 108\, L2^2\, L3^2 - 36\, L2^2\, L3 + 3\, L2^2$$

$$\left(\frac{27 \cdot 4!}{6!} - \frac{18 \cdot 3!}{5!} - \frac{180 \cdot 3!}{6!} + \frac{90 \cdot 2!}{5!} + \frac{3 \cdot 2!}{4!} - \frac{10 \cdot 1}{4!} + \frac{108 \cdot 2! \cdot 2!}{6!} - \frac{36 \cdot 2!}{5!} + \frac{3 \cdot 2!}{4!}\right) \cdot 16 \cdot \left(\frac{-81}{512}\right)$$

$$-\frac{27}{128}$$

Треугольный элемент четвертого порядка n=4



L-координаты узлов :

$1(1, 0, 0)$ $\quad$ $6\left(0, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$ $\quad$ $11\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$

$2\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$ $\quad$ $7\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ $\quad$ $12\left(\frac{3}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$

$3\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$ $\quad$ $8\left(0, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ $\quad$ $13\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$4\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 0\right)$ $\quad$ $9(0, 0, 1)$ $\quad$ $14\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

$5(0, 1, 0)$ $\quad$ $10\left(\frac{1}{4}, 0, \frac{3}{4}\right)$ $\quad$ $15\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$

$$N1 := \frac{L1\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)}{subs\left(L1=1,\ L1\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\right)} = \frac{32}{3}\,L1\left(L1-\frac{1}{4}\right)\left(L1-\frac{1}{2}\right)\left(L1-\frac{3}{4}\right)$$

$$N2 := \frac{L1\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot(L2-0)}{subs\left(L1=\frac{3}{4}, L2=\frac{1}{4}, L1\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot(L2-0)\right)} = \frac{128}{3}\,L1\left(L1-\frac{1}{4}\right)\left(L1-\frac{1}{2}\right)L2$$

$$N3 := \frac{L1\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\cdot(L2-0)}{subs\left(L1=\frac{1}{2}, L2=\frac{1}{2}, L1\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\cdot(L2-0)\right)} = -64\,L1\left(L1-\frac{1}{4}\right)\left(L1-\frac{3}{4}\right)L2$$

$$N4 := \frac{L1\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\cdot(L2-0)}{subs\left(L1=\frac{1}{4}, L2=\frac{3}{4}, L1\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\cdot(L2-0)\right)} = \frac{128}{3}\,L1\left(L1-\frac{1}{2}\right)\left(L1-\frac{3}{4}\right)L2$$

$$N5 := \frac{\left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\cdot(L2-0)}{subs\left(L1=0, L2=1, \left(L1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L1-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L1-\frac{3}{4}\right)\cdot(L2-0)\right)} = -\frac{32}{3}\left(L1-\frac{1}{4}\right)\left(L1-\frac{1}{2}\right)\left(L1-\frac{3}{4}\right)L2$$

$$N6 := \frac{L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L2-\frac{1}{2}\right)}{subs\left(L2=\frac{3}{4}, L3=\frac{1}{4}, L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L2-\frac{1}{2}\right)\right)} = \frac{128}{3}\,L2\,L3\left(L2-\frac{1}{4}\right)\left(L2-\frac{1}{2}\right)$$

$$N7 := \frac{L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(L2-\frac{1}{4}\right)}{subs\left(L2=\frac{1}{2}, L3=\frac{1}{2}, L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(L2-\frac{1}{4}\right)\right)} = -64\,L2\,L3\left(L2-\frac{3}{4}\right)\left(L2-\frac{1}{4}\right)$$

$$N8 := \frac{L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L2-\frac{3}{4}\right)}{subs\left(L2=\frac{1}{4}, L3=\frac{3}{4}, L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L2-\frac{3}{4}\right)\right)} = \frac{128}{3}\,L2\,L3\left(L2-\frac{1}{2}\right)\left(L2-\frac{3}{4}\right)$$

$$N9 := \frac{L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L3-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L3-\frac{3}{4}\right)}{subs\left(L3=1, L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L3-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L3-\frac{3}{4}\right)\right)} = \frac{32}{3}\, L3\left(L3-\frac{1}{4}\right)\left(L3-\frac{1}{2}\right)\left(L3-\frac{3}{4}\right)$$

$$N10 := \frac{L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L3-\frac{1}{2}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)}{subs\left(L1=\frac{1}{4}, L3=\frac{3}{4}, L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L3-\frac{1}{2}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)\right)} = \frac{128}{3}\, L3\left(L3-\frac{1}{4}\right)\left(L3-\frac{1}{2}\right) L1$$

$$N11 := \frac{L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L3-\frac{3}{4}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)}{subs\left(L1=\frac{1}{2}, L3=\frac{1}{2}, L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(L3-\frac{3}{4}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)\right)} = -64\, L3\left(L3-\frac{1}{4}\right)\left(L3-\frac{3}{4}\right) L1$$

$$N12 := \frac{L3\cdot\left(L3-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L3-\frac{3}{4}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)}{subs\left(L1=\frac{3}{4}, L3=\frac{1}{4}, L3\cdot\left(L3-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(L3-\frac{3}{4}\right)\cdot(\mathrm{L1}-0)\right)} = \frac{128}{3}\, L3\left(L3-\frac{1}{2}\right)\left(L3-\frac{3}{4}\right) L1$$

$$N13 := \frac{L1\cdot L2\cdot L3\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)}{subs\left(L1=\frac{1}{2}, L2=\frac{1}{4}, L3=\frac{1}{4}, L1\cdot L2\cdot L3\cdot\left(L1-\frac{1}{4}\right)\right)} = 128\, L1\, L2\, L3\left(L1-\frac{1}{4}\right)$$

$$N14 := \frac{L1\cdot L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{1}{4}\right)}{subs\left(L1=\frac{1}{4}, L2=\frac{1}{2}, L3=\frac{1}{4}, L1\cdot L2\cdot L3\cdot\left(L2-\frac{1}{4}\right)\right)} = 128\, L1\, L2\, L3\left(L2-\frac{1}{4}\right)$$

$$N15 := \frac{L1\cdot L2\cdot L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)}{subs\left(L1=\frac{1}{4}, L2=\frac{1}{4}, L3=\frac{1}{2}, L1\cdot L2\cdot L3\cdot\left(L3-\frac{1}{4}\right)\right)} = 128\, L1\, L2\, L3\left(L3-\frac{1}{4}\right)$$

Запишем производные по аналогии с элементом 3-го порядка, матрица Якоби зависит от вершин треугольника, а, следовательно, осталась неизменной.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N6 \\ \frac{\partial}{\partial y} N6 \end{bmatrix} = inverse(J)\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L2} N6 \\ \frac{\partial}{\partial L3} N6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 16\, L3\left(L2-\frac{1}{4}\right)\left(L2-\frac{1}{2}\right) + 16\, L2\, L3\left(L2-\frac{1}{2}\right) + 16\, L2\, L3\left(L2-\frac{1}{4}\right) - \frac{16}{3} L2\left(L2-\frac{1}{4}\right)\left(L2-\frac{1}{2}\right) \\ -\frac{8}{3} L3\left(L2-\frac{1}{4}\right)\left(L2-\frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} L2\, L3\left(L2-\frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} L2\, L3\left(L2-\frac{1}{4}\right) + 8\, L2\left(L2-\frac{1}{4}\right)\left(L2-\frac{1}{2}\right) \end{bmatrix}$$

Производная в точке A(1,4):

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} N6 \\ \frac{\partial}{\partial y} N6 \end{bmatrix} = subs\left(L1=\frac{1}{4}, L2=\frac{1}{8}, L3=\frac{5}{8}, inverse(J)\cdot\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial L2} N6 \\ \frac{\partial}{\partial L3} N6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{3}{16} \\ \frac{7}{96} \end{bmatrix}$$

Посчитаем интеграл и сравним ее с факториальной формулой, где $S^{(e)}$=8- площадь элемента:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L2} \frac{\partial}{\partial x} N6 \cdot \frac{\partial}{\partial y} N6 \cdot det(J)\, \mathrm{d}L3\, \mathrm{d}L2$$

$$\int_{S^{(e)}} L_1^{\alpha} L_2^{\beta} L_3^{\gamma} dS = \frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!} 2S^{(e)}$$

Упростим выражение для $\frac{\partial N_6}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_6}{\partial y}$:

$$simplify\left(\left(16\, L3 \left(L2 - \frac{1}{4}\right)\left(L2 - \frac{1}{2}\right) + 16\, L2\, L3 \left(L2 - \frac{1}{2}\right) + 16\, L2\, L3 \left(L2 - \frac{1}{4}\right) - \frac{16}{3} L2 \left(L2 - \frac{1}{4}\right)\left(L2 - \frac{1}{2}\right)\right) \cdot \left(-\frac{8}{3} L3 \left(L2 - \frac{1}{4}\right)\left(L2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} L2\, L3 \left(L2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{8}{3} L2\, L3 \left(L2 - \frac{1}{4}\right) + 8\, L2 \left(L2 - \frac{1}{4}\right)\left(L2 - \frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

$$44\, L3\, L2^2 - \frac{214}{9} L2\, L3 + 2\, L3 + \frac{128}{3} L2^5\, L3 - \frac{160}{3} L2^4\, L3 + \frac{208}{9} L2^3\, L3 - \frac{128}{3} L2^6 + 64\, L2^5 - \frac{104}{3} L2^4 + 8\, L2^3 - \frac{2}{3} L2^2 \qquad (1$$

$$\int_0^1 \int_0^{1-L2} \left(44\, L3\, L2^2 - \frac{214}{9} L2\, L3 + 2\, L3 + \frac{128}{3} L2^5\, L3 - \frac{160}{3} L2^4\, L3 + \frac{208}{9} L2^3\, L3 - \frac{128}{3} L2^6 + 64\, L2^5 - \frac{104}{3} L2^4 + 8\, L2^3 - \frac{2}{3} L2^2\right) \cdot det(J)\, \mathrm{d}L3\, \mathrm{d}L2$$

$$\frac{1396}{945}$$

$$16 \cdot \left(\frac{44 \cdot 2!}{5!} - \frac{214}{9} \cdot \frac{1}{4!} + \frac{2}{3!} + \frac{128}{3} \cdot \frac{5!}{8!} - \frac{160}{3} \cdot \frac{4!}{7!} + \frac{208}{9} \cdot \frac{3!}{6!} - \frac{128}{3} \cdot \frac{6!}{8!} + \frac{64 \cdot 5!}{7!} - \frac{104}{3} \cdot \frac{4!}{6!} + \frac{8 \cdot 3!}{5!} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2!}{4!}\right)$$

$$\frac{1396}{945}$$