

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина:
Основы методов конечных элементов

Отчет по выполнению лабораторной работы №6

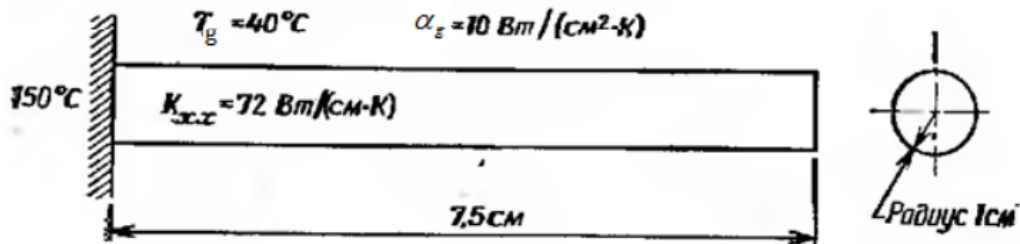
Группа: ФН11-72Б

Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель: Захарова Ю.В.

Москва, 2022

Задача

Определить распределение температуры в стержне кругового сечения с граничными условиями 1 рода на левой границе стержня и граничными условиями 3 рода на правой границе стержня и на боковой поверхности с использованием квадратичного и кубического одномерного конечного элемента. Сравнить с аналитическим решением.



Контрольные вопросы

1. Какие элементы называются комплекс-элементами?
2. Как вычисляются функции формы для квадратичного и кубического одномерного конечного элемента?
3. Как вычисляются матрица жесткости и вектор правых частей для одномерной задачи теплопроводности с использованием квадратичного и кубического одномерного конечного элемента?

Формулы вычисления матриц жесткости и потока :

$$k^{(e)}\Phi = f^{(e)},$$

$$\text{где } [k^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B^{(e)}]^T [D^{(e)}] [B^{(e)}] dV + \int_{S_2^{(e)}} \alpha_g [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dS,$$

$$f^{(e)} = \int_{S_1^{(e)}} q [N^{(e)}]^T dS + \int_{S_2^{(e)}} \alpha_g T_g [N^{(e)}]^T dS,$$

$$dV = A dx, \quad dS = P dx, \quad [D^{(e)}] = [K_{xx}],$$

$$[B^{(e)}] = \left[\frac{\partial [N^{(e)}]}{\partial x} \right].$$

Введем параметры:

$$L := 7.5 : R := 1 :$$

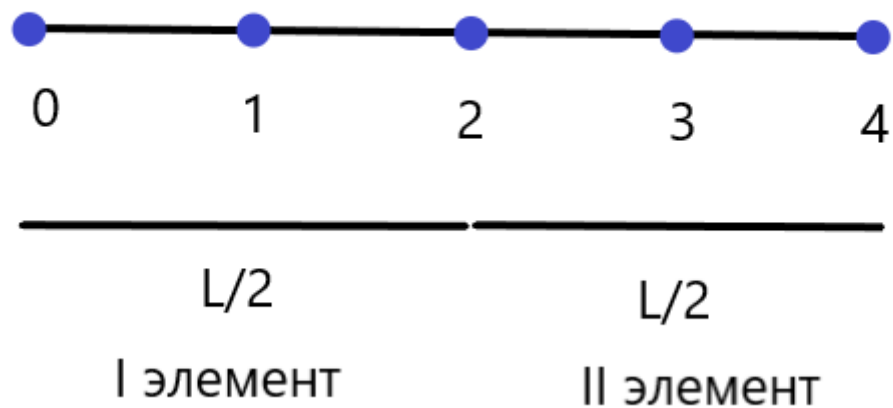
$$k_{xx} := 72 :$$

$$\alpha := 10 : Tg := 40 :$$

$$S := 3.14 \cdot R^2 :$$

$$P := 2 \cdot 3.14 \cdot R :$$

1. Для квадратичного элемента имеем:



Для элемента для длины L формулы формы:

$$N^{(e)}_1(x) = \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{-\frac{L}{2}} \cdot \frac{x - x_e - L}{-L};$$

$$N^{(e)}_2(x) = \frac{x - x_e}{\frac{L}{2}} \cdot \frac{x - x_e - L}{-\frac{L}{2}};$$

$$N^{(e)}_3(x) = \frac{x - x_e}{L} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{\frac{L}{2}}.$$

Соответственно для элемента длины $L/2$:

$$N^{(e)}_1(x) = \frac{x - x_e - \frac{L}{4}}{-\frac{L}{4}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{-\frac{L}{2}};$$

$$N^{(e)}_2(x) = \frac{x - x_e}{\frac{L}{4}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{-\frac{L}{4}};$$

$$N^{(e)}_3(x) = \frac{x - x_e}{\frac{L}{2}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{4}}{\frac{L}{4}}.$$

где x_e - координата первого узла элемента (в нашем случае 0 для первого элемента и $L/2$ для второго элемента)

В упрощенном виде компоненты вектора-строки $N(x)$:

$$N1(x) := 8 \cdot \left(-\frac{L}{2} + x - x_e \right) \cdot \left(-\frac{L}{4} + x - x_e \right) / (L^2)$$

$$N2(x) := -16 \cdot (x - x_e) \cdot \left(-\frac{L}{2} + x - x_e \right) / (L^2)$$

$$N3(x) := 8 \cdot (x - x_e) \cdot \left(-\frac{L}{4} + x - x_e \right) / (L^2)$$

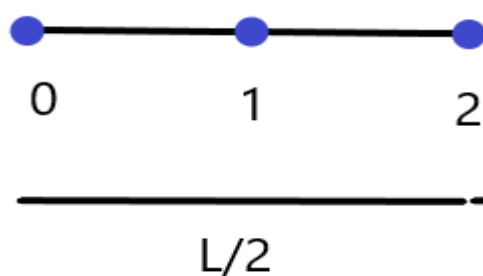
Компоненты вектора-строки B

$$B1(x) := \text{diff}(N1(x), x)$$

$$B2(x) := \text{diff}(N2(x), x)$$

$$B3(x) := \text{diff}(N3(x), x)$$

2. Рассмотрим первый элемент:



$x_e=0$

функции $N(x)=[N_1(x), N_2(x), N_3(x)]|_{x_e=0}$:

$$N := \begin{bmatrix} 0.018 (-30.0 + 8x) (-1.875 + x) & -0.284x (-3.75 + x) & 0.142x (-1.875 + x) \end{bmatrix} :$$

$$N^T := \begin{bmatrix} 0.018 (-30.0 + 8x) (-1.875 + x) \\ -0.284x (-3.75 + x) \\ 0.142x (-1.875 + x) \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -0.8 + 0.284 \cdot x & 1.067 - 0.569 \cdot x & -0.267 + 0.284 \cdot x \end{bmatrix}$$

$$B^T := \begin{bmatrix} -0.8 + 0.284 \cdot x \\ 1.067 - 0.569 \cdot x \\ -0.267 + 0.284 \cdot x \end{bmatrix}$$

Матрица D представляет собой единичную матрицу (3*3), умноженную на коэффициент жесткости k_{xx}

$$K1 := k_{xx} \cdot S \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} B^T \cdot B \, dx + P \cdot \alpha \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} N^T \cdot N \, dx$$

где S-площадь сечения, P- длина окружности

$$K1 := k_{xx} \cdot S \cdot \begin{bmatrix} 0.623 & -0.71 & 0.088 \\ -0.71 & 1.423 & -0.71 \\ 0.088 & -0.71 & 0.619 \end{bmatrix} + P \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0.513 & 0.253 & -0.126 \\ 0.253 & 1.994 & 0.249 \\ -0.126 & 0.249 & 0.498 \end{bmatrix}$$

матрица K1:

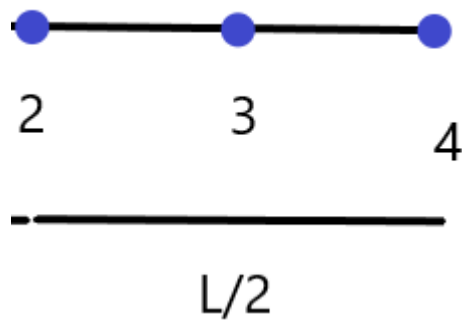
$$\begin{bmatrix} 173.0642400000000012 & -144.6284000000000000 & 11.9822400000000010 \\ -144.6284000000000000 & 446.9350400000000072 & -144.8795999999999982 \\ 11.9822400000000010 & -144.8795999999999982 & 171.2179199999999992 \end{bmatrix}$$

Вектор правой части:

$$f_l := P \cdot T_g \cdot \alpha \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} N^T dx$$

$$f_l := \begin{bmatrix} 1589.625 \\ 6270.1875 \\ 1567.546875 \end{bmatrix} :$$

3. Рассмотрим второй элемент:



$$x_e := \frac{L}{2} :$$

функции $N(x) = [N_1(x), N_2(x), N_3(x)]|_{x_e=L/2}$:

$$N := \begin{bmatrix} 0.018 (-60.0 + 8x) (-5.625 + x) & -0.018 (16x - 60) (-7.5 + x) & 0.018 (8x - 30) (-5.625 + x) \end{bmatrix} :$$

$$NT := \begin{bmatrix} 0.018 (-60.0 + 8x) (-5.625 + x) \\ -0.018 (16x - 60) (-7.5 + x) \\ 0.018 (8x - 30) (-5.625 + x) \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -1.867 + 0.284x & 3.2 - 0.569x & -1.333 + 0.284x \end{bmatrix}$$

$$BT := \begin{bmatrix} -1.867 + 0.284 \cdot x \\ 3.2 - 0.569 \cdot x \\ -1.333 + 0.284 \cdot x \end{bmatrix}$$

Матрица D представляет собой единичную матрицу (3*3), умноженную на коэффициент жесткости kxx

$$K2 := k_{xx} \cdot S \cdot \int_{\frac{L}{2}}^L B^T \cdot B \, dx + P \cdot \alpha \cdot \int_{\frac{L}{2}}^L N^T \cdot N \, dx$$

где S-площадь сечения, P- длина окружности

$$K2 := k_{xx} \cdot S \cdot \begin{bmatrix} 0.627 & -0.71 & 0.087 \\ -0.71 & 1.423 & -0.71 \\ 0.088 & -0.71 & 0.617 \end{bmatrix} + P \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0.512 & 0.256 & -0.128 \\ 0.256 & 2.0503 & 0.256 \\ -0.128 & 0.256 & 0.512 \end{bmatrix}$$

матрица K2:

$$\begin{bmatrix} 173.905759999999987 & -144.439999999999998 & 11.630559999999992 \\ -144.439999999999998 & 450.470680000000016 & -144.439999999999998 \\ 11.85664000000000024 & -144.439999999999998 & 171.6449600000000026 \end{bmatrix}$$

Вектор правой части:

$$f2 := P \cdot Tg \cdot \alpha \cdot \int_{\frac{L}{2}}^L N^T dx$$

$$f2 := \begin{bmatrix} 1589.625 \\ 6358.5 \\ 1589.625 \end{bmatrix} :$$

Глобальный вектор правой части с учетом первого граничного условия в 0-ом узле:

$$f := \begin{bmatrix} 150 \\ 6270.1875 \\ 1589.625 \cdot 2 \\ 6358.5 \\ 1589.625 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 6270.1875 \\ 3179.250 \\ 6358.5 \\ 1589.625 \end{bmatrix}$$

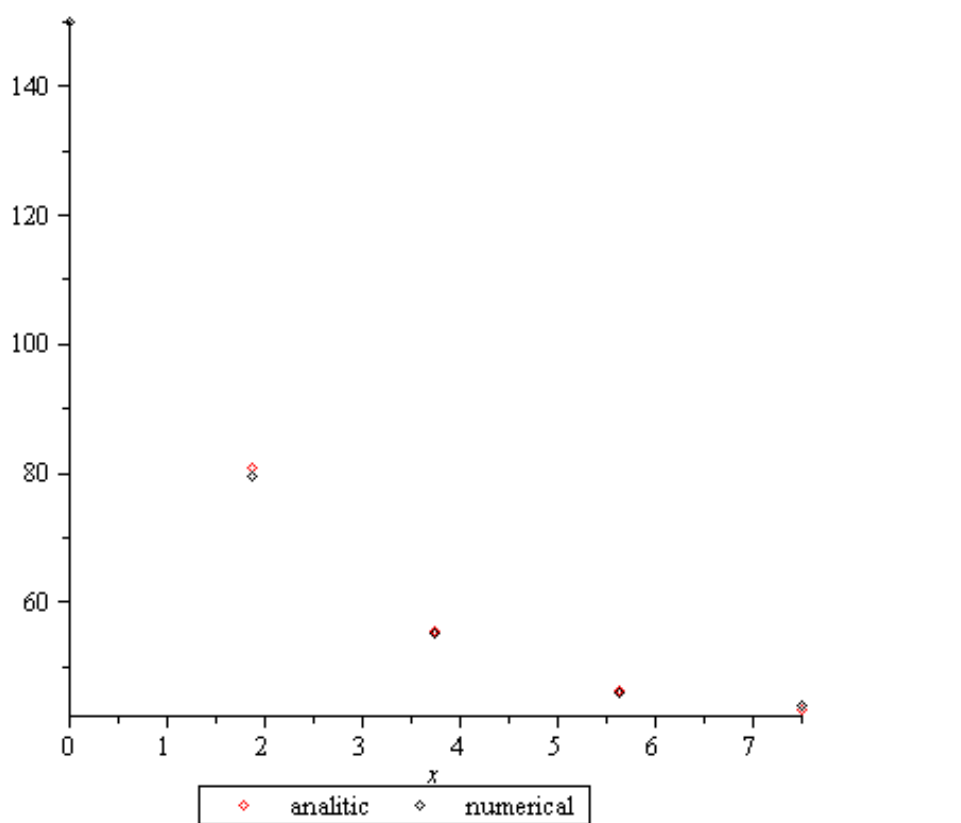
Глобальная матрица жесткости K:

$$K := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -144.63 & 446.935 & -144.88 & 0 & 0 \\ 11.982 & -144.87 & 171.218 + 173.906 & -144.44 & 11.63 \\ 0 & 0 & -144.44 & 450.47 & -144.44 \\ 0 & 0 & 11.63 & -144.44 & 171.645 \end{bmatrix}$$

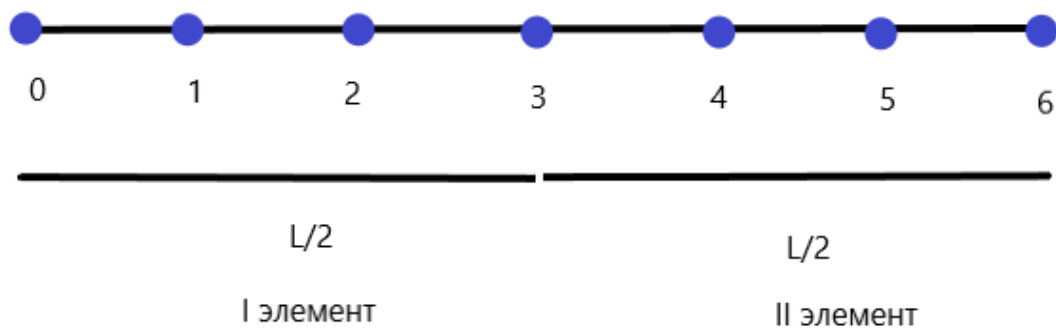
$$\Phi = K^{-1} \cdot f = \text{inverse}(K) \cdot f$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} 150.000000000000084 \\ 79.6705015720700658 \\ 55.0608096149233148 \\ 45.9065704050739286 \\ 44.0881704041124039 \end{bmatrix}$$

График аналитического и численного решений:



3. Рассмотрим кубическую аппроксимацию:



$$N^{(e)}_1(x) = \frac{x - x_e - \frac{L}{6}}{-\frac{L}{6}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{3}}{-\frac{L}{3}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{-\frac{L}{2}};$$

$$N^{(e)}_2(x) = \frac{x - x_e}{\frac{L}{6}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{6}}{-\frac{L}{6}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{-\frac{L}{6}};$$

$$N^{(e)}_3(x) = \frac{x - x_e}{\frac{L}{3}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{6}}{\frac{L}{6}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{2}}{-\frac{L}{6}};$$

$$N^{(e)}_4(x) = \frac{x - x_e}{\frac{L}{2}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{6}}{\frac{L}{3}} \cdot \frac{x - x_e - \frac{L}{3}}{\frac{L}{6}};$$

4. Рассмотрим первый элемент

$x_e=0$

$N := \left[-0.085(x - 1.25)(x - 2.5)(x - 3.75) \quad 0.256x(x - 2.5)(x - 3.75) \quad -0.256x(x - 1.25)(x - 3.75) \quad 0.085x(x - 1.25)(x - 2.5) \right]$

$$NT := \begin{bmatrix} -0.085(x - 1.25)(x - 2.5)(x - 3.75) \\ 0.256x(x - 2.5)(x - 3.75) \\ -0.256x(x - 1.25)(x - 3.75) \\ 0.085x(x - 1.25)(x - 2.5) \end{bmatrix}$$

Компоненты вектора-строки B:

$B1 := \text{diff}(N1(x), x) :$

$B2 := \text{diff}(N2(x), x) :$

$B3 := \text{diff}(N3(x), x) :$

$B4 := \text{diff}(N4(x), x) :$

Вектор B^T :

$$B^T := \begin{bmatrix} -0.085 \cdot (x - 2.5) \cdot (x - 3.75) - 0.085 \cdot (x - 1.25) \cdot (x - 3.75) - 0.085 \cdot (x - 1.25) \cdot (x - 2.5) \\ 0.256 \cdot (x - 2.5) \cdot (x - 3.75) + 0.256 \cdot x \cdot (x - 3.75) + 0.256 \cdot x \cdot (x - 2.5) \\ -0.256 \cdot (x - 1.25) \cdot (x - 3.75) - 0.256 \cdot x \cdot (x - 3.75) - 0.256 \cdot x \cdot (x - 1.25) \\ 0.085 \cdot (x - 1.25) \cdot (x - 2.5) + 0.085 \cdot x \cdot (x - 2.5) + 0.085 \cdot x \cdot (x - 1.25) \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости

$$Kl := k_{xx} \cdot S \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} B^T \cdot B \, dx + P \cdot \alpha \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} N^T \cdot N \, dx$$

$$Kl := k_{xx} \cdot S \cdot \begin{bmatrix} 0.979 & -1.255 & 0.359 & 0.359 \\ -1.255 & 2.88 & -1.98 & 0.359 \\ 0.359 & -1.98 & 0 & -1.255 \\ 0.359 & 0.359 & -1.255 & 0.996 \end{bmatrix} + P \cdot \alpha \cdot \begin{bmatrix} 0.283 & 0.22 & -0.08 & 0.042 \\ 0.22 & 1.446 & -0.181 & -0.08 \\ -0.08 & -0.181 & 1.446 & 0.22 \\ 0.042 & -0.08 & 0.22 & 0.283 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 239.104720000000014 & -269.914400000000000 & 76.1387200000000064 & -16.939 \\ -269.914400000000000 & 741.919200000000046 & -459.005200000000058 & 76.1387200000000064 \\ 76.1387200000000064 & -459.005200000000058 & 741.919 & -269.914400000000000 \\ -16.939 & 76.1387200000000064 & -269.914400000000000 & 242.948080000000004 \end{bmatrix}$$

Вектор правой части:

$$f_l := P \cdot T_g \cdot \alpha \cdot \int_0^{\frac{L}{2}} N^T \cdot N \, dx$$

$$f_l := \begin{bmatrix} 1172.900391 \\ 3532.500000 \\ 3532.500000 \\ 1172.900391 \end{bmatrix} :$$

5. Рассмотрим второй элемент :

$$x_e := \frac{L}{2} :$$

Вектор $NT = [N_1(x), N_2(x), N_3(x)]^T|_{x_e=L/2}$

$$NT := \begin{bmatrix} -0.085 \cdot (x - 5) (x - 6.25) (x - 7.5) \\ 0.256 \cdot (x - 3.75) (x - 6.25) (x - 7.5) \\ -0.256 (x - 3.75) (x - 5) (x - 7.5) \\ 0.085 \cdot (x - 3.75) (x - 5) (x - 6.25) \end{bmatrix} :$$

Вектор $BT = B^T$

$$BT := \begin{bmatrix} -0.085 \cdot (x - 6.25) (x - 7.5) - 0.085 \cdot (x - 5) (x - 7.5) - 0.0853 \cdot (x - 5) (x - 6.25) \\ 0.256 \cdot (x - 6.25) (x - 7.5) + 0.256 \cdot (x - 3.75) (x - 7.5) + 0.256 \cdot (x - 3.75) \cdot (x - 6.25) \\ -0.256 \cdot (x - 5) (x - 7.5) - 0.256 (x - 3.75) (x - 7.5) - 0.256 \cdot (x - 3.75) (x - 5) \\ 0.085 \cdot (x - 5) (x - 6.25) + 0.085 \cdot (x - 3.75) (x - 6.25) + 0.085 \cdot (x - 3.75) (x - 5) \end{bmatrix}$$

Матрица жесткости:

$$K2 := k_{xx} \cdot S \cdot \int_{\frac{L}{2}}^L BT \cdot B \, dx + P \cdot \alpha \cdot \int_{\frac{L}{2}}^L NT \cdot N \, dx$$

$$\begin{bmatrix} 239.104720000000014 & -269.914400000000000 & 76.1387200000000064 & -16.939 \\ -269.914400000000000 & 741.919200000000046 & -459.005200000000058 & 76.1387200000000064 \\ 76.1387200000000064 & -459.005200000000058 & 741.919 & -269.914400000000000 \\ -16.939 & 76.1387200000000064 & -269.914400000000000 & 242.948080000000004 \end{bmatrix}$$

Вектор правой части:

$$f2 := P \cdot Tg \cdot \alpha \cdot \int_{\frac{L}{2}}^L NT \cdot N \, dx$$

$$f2 := \begin{bmatrix} 1172.900391 \\ 3532.500000 \\ 3532.500000 \\ 1172.900391 \end{bmatrix} :$$

Глобальный вектор потока с учетом граничного условия первого рода на левом конце:

$$f := \begin{bmatrix} 150 \\ 3532.5 \\ 3532.5 \\ 2 \cdot 1172.900391 \\ 3532.5 \\ 3532.5 \\ 1172.900391 \end{bmatrix} :$$

Глобальная матрица K:

$$K := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -269.914 & 741.919 & -459.005 & 76.139 & 0 & 0 & 0 \\ 76.139 & -459.005 & 741.919 & -269.914 & 0 & 0 & 0 \\ -16.939 & 76.139 & -269.914 & 242.948 + 239.105 & -269.914 & 76.139 & -16.939 \\ 0 & 0 & 0 & -269.914 & 741.919 & -459.005 & 76.139 \\ 0 & 0 & 0 & 76.139 & -459.005 & 741.919 & -269.914 \\ 0 & 0 & 0 & -16.939 & 76.139 & -269.914 & 242.948 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = K^{-1} \cdot f = \text{inverse}(K) \cdot f$$

$$\Phi := \begin{bmatrix} 150.000000000000170 \\ 96.3005066748967096 \\ 68.8126147137696762 \\ 54.6074758097093138 \\ 47.5372156371577432 \\ 44.1224265613780418 \\ 42.7569727121173244 \end{bmatrix}$$

Графики численного и аналитического решений:

