

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина: Основы методов конечных элементов

Отчет по выполнению лабораторной работы №1

Группа: ФН11-72Б
Вариант 6

Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель: Захарова Ю.В.

Москва, 2022

Лабораторная работа 1. Дискретные одномерные элементы

Дана исследуемая область (см. вариант по списку в журнале) с граничными условиями ($T_{\text{среды}}$ или $T_{\text{ср}}$ равносильно теплообмену со средой). Геометрические параметры области A, B, L, a, b [см] задаются самостоятельно. Воздействие теплового потока принять равным $q = 150 \left[\text{Вт}/\text{см}^2 \right]$, коэффициент теплоотдачи от стенки к среде $\alpha_g = 10 \left[\text{Вт}/(\text{см}^2) \cdot ^\circ\text{C} \right]$; T – заданная температура стенки, $150 \left[^\circ\text{C} \right]$; $T_{\text{среды}} = 25 \left[^\circ\text{C} \right]$ – температура окружающей среды, $\lambda = 75 \left[\text{Вт}/(\text{см}) \cdot ^\circ\text{C} \right]$ – коэффициент теплопроводности материала.

Требуется:

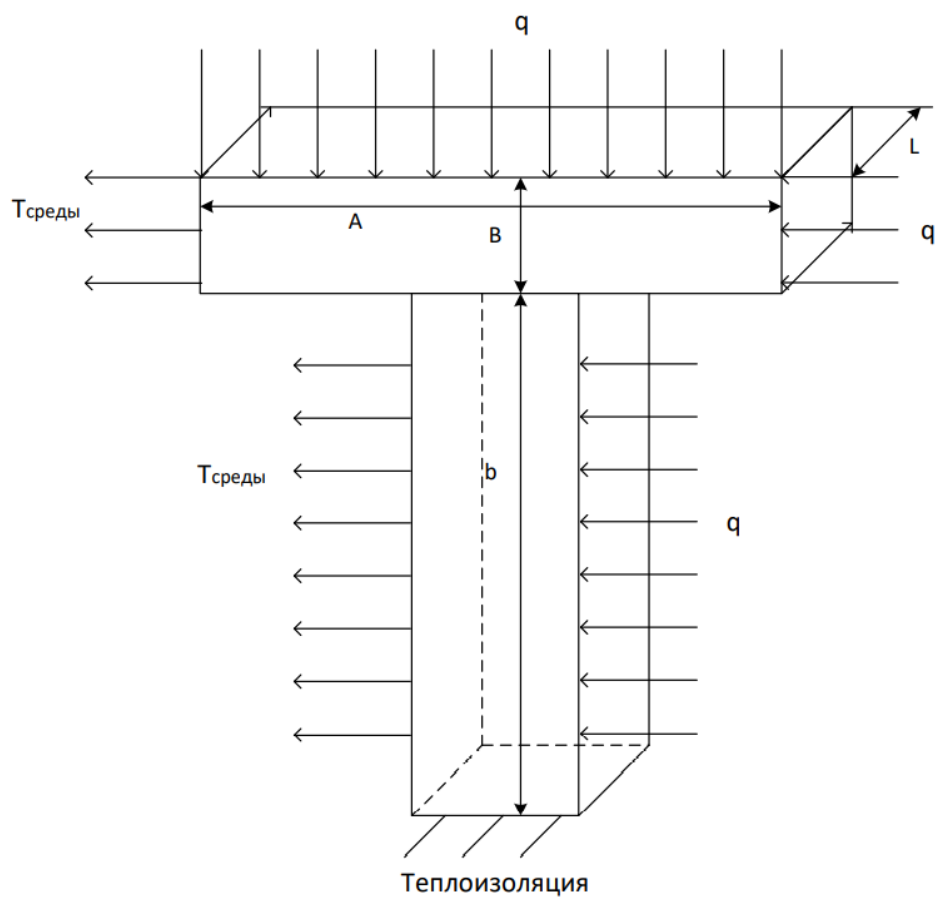
1. Провести дискретизацию области дискретными одномерными элементами.
2. Выписать уравнения равновесия для нескольких элементов.
3. Записать несколько локальных матриц: для внутренних элементов, граничных элементов и локальных векторов правых частей.
4. Описать процедуру формирования глобальной матрицы теплопроводности и правых частей.
5. Получить СЛАУ для решения методом Гаусса и Холецкого.
6. Найти распределение температуры в исследуемой области, решив полученное СЛАУ.

Зададим параметры

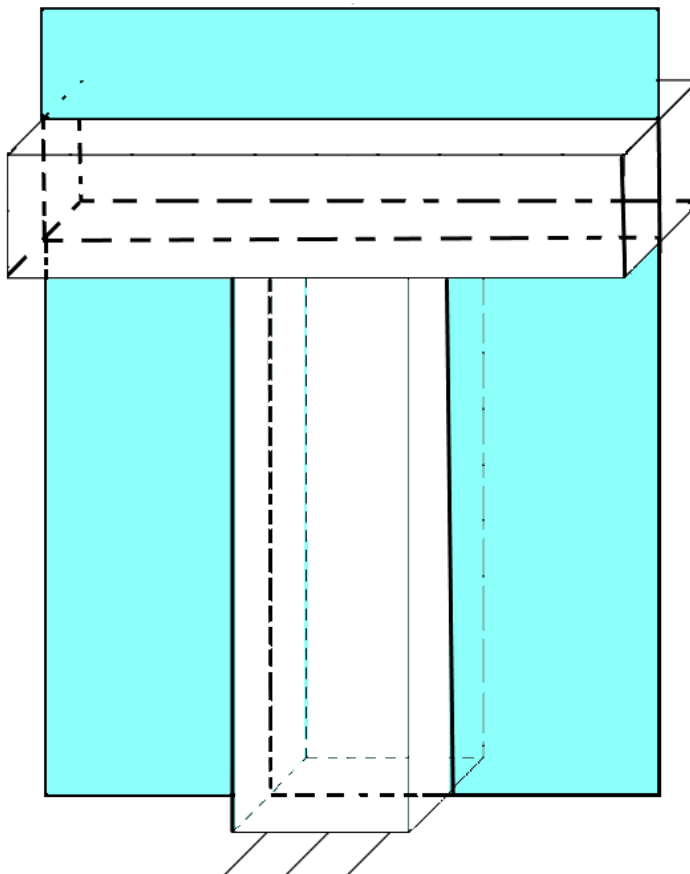
```
alpha=10
q=150
l=75
T_g=25
B=2
b=4
A=6
```

Исследуемая область:

6.

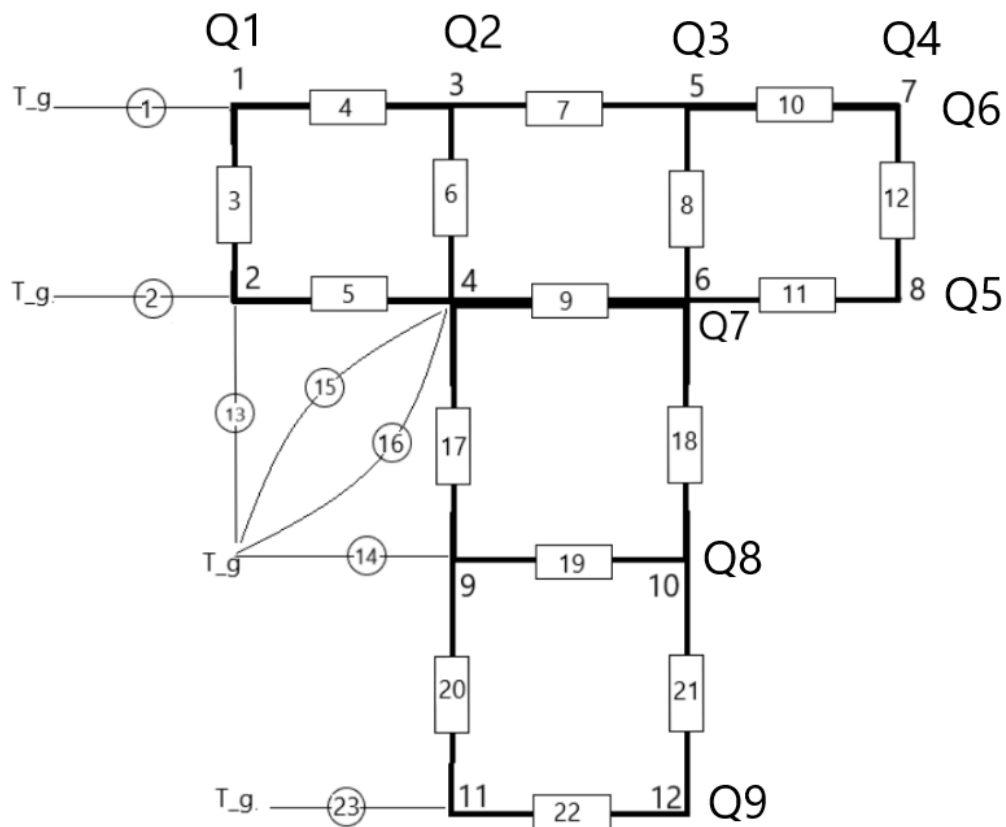


Разделим тело в силу симметрии на 2 половины секущей плоскостью.



И рассмотрим половину, считая ее толщину единичной(по заданному размеру L)

Рассмотрим



Номер элемента	начальный узел	конечный узел	Жесткость
1	T_g	T1	$h1 = \frac{\alpha B}{2}$
2	T_g	T2	$h2=h1 = \frac{\alpha B}{2}$
3	T1	T2	$k1 = \frac{\lambda A}{6B}$
4	T1	T3	$k2 = \frac{3\lambda B}{2A}$
5	T2	T4	$k3=k2 = \frac{3\lambda B}{2A}$
6	T3	T4	$k4=k1 = \frac{\lambda A}{6B}$
7	T3	T5	$k5=k2 = \frac{3\lambda B}{2A}$
8	T5	T6	$k6=k1 = \frac{\lambda A}{6B}$

9	T4	T6	$k7=k2= \frac{3\lambda B}{2A}$
10	T5	T7	$k8=k2= \frac{3\lambda B}{2A}$
11	T6	T8	$k9=k2= \frac{3\lambda B}{2A}$
12	T7	T8	$k10=k1= \frac{\lambda A}{6B}$
13	T_g	T2	$h3= \frac{\alpha A}{6}$
14	T_g	T9	$h6= \frac{\alpha b}{2}$
15	T_g	T4	$h4= \frac{\alpha A}{6}$
16	T_g	T4	$h5= \frac{\alpha b}{4}$
17	T4	T9	$k11= \frac{4\lambda A}{6b}$
18	T6	T10	$k12=k11= \frac{4\lambda A}{6b}$
19	T9	T10	$k13= \frac{6\lambda b}{4A}$
20	T9	T11	$k14= k11 = \frac{4\lambda A}{6b}$
21	T10	T12	$k15= k11 = \frac{4\lambda A}{6b}$
22	T11	T12	$k16= k13 = \frac{6\lambda b}{4A}$
23	T_g	T11	$h7= \frac{\alpha b}{4}$

Запишем матрицу жесткости K:

h1+k1+k2	-k1	-k2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-k1	h2+k1+k5+h3	0	-k5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-k2	0	k2+k8+k3	-k8	-k3	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-k5	-k8	k5+k6+k8+k11+h4+h5	0	-k6	0	0	-k11	0	0	0	0
0	0	-k3	0	k3+k4+k9	-k9	-k4	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-k6	-k9	k6+k9+k7+k13	0	-k7	0	-k13	0	0	0
0	0	0	0	-k4	0	k4+k10	-k10	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-k7	-k10	k7+k10	0	0	0	0	0
0	0	0	-k11	0	0	0	0	h6+k11+k12+k15	-k15	-k12	0	0
0	0	0	0	0	-k13	0	0	-k15	k13+k14+k15	0	-k14	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-k12	0	k16+h7+k12	-k16	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-k14	-k16	k14+k16	0

Посчитаем коэффициенты k и h :

```

h1=float(alpha*B)/2
h2=float(alpha*B)/2
h3=float(alpha*A)/6
h4=float(alpha*A)/6
h5=float(alpha*b)/4
h6=float(alpha*b)/2
h7=float(alpha*b)/4

k1=float(1*A)/(6*B)
k2=float(1*B*3)/(2*A)
k3=k2
k4=k2
k5=k2
k6=k2
k7=k2
k8=k1
k9=k1
k10=k1
k11=float(1*A*4)/(6*b)
k12=k11
k13=float(1*b*6)/(4*A)
k14=k11
k15=k3
k16=k13

```

Полученная матрица:

85.0	-37.5	-37.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-37.5	95.0	0	-37.5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-37.5	0	112.5	-37.5	-37.5	0	0	0	0	0	0	0	0
0	-37.5	-37.5	170.0	0	-37.5	0	0	-37.5	0	0	0	0
0	0	-37.5	0	112.5	-37.5	-37.5	0	0	0	0	0	0
0	0	0	-37.5	-37.5	150.0	0	-37.5	0	-37.5	0	0	0
0	0	0	0	-37.5	0	75.0	-37.5	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	-37.5	-37.5	75.0	0	0	0	0	0
0	0	0	-37.5	0	0	0	0	132.5	-37.5	-37.5	0	0
0	0	0	0	0	-37.5	0	0	-37.5	112.5	0	-37.5	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-37.5	0	122.5	-75.0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	-37.5	-75.0	112.5	0

Выпишем Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6,Q7,Q8,Q9:

```
Q1=q*float(A)/6
Q2=q*float(A)/3
Q3=q*float(A)/3
Q4=q*float(A)/3
Q5=q*float(B)/2
Q6=q*float(B)/2
Q7=q*float(b)/4
Q8=q*float(b)/2
Q9=q*float(b)/4
```

И выпишем вектор Q- правую часть матричного уравнения :

```
Q[0]=Q1+h1*T_g
Q[1]=h3*T_g+h2*T_g
Q[2]=Q2
Q[3]=h4*T_g+h5*T_g
Q[4]=Q3
Q[5]=Q7
Q[6]=Q4+Q6
Q[7]=Q5
Q[8]=h6*T_g
Q[9]=Q8
Q[10]=h7*T_g
Q[11]=Q9
print(Q)
```


Полученный вектор Q:

```
[400.0, 500.0, 300.0, 500.0, 300.0, 150.0, 450.0, 150.0, 500.0, 300.0, 250.0, 150.0]
```

Метод Гаусса:

```
import sys

n = 12

a = np.zeros((n,n+1))

x = np.zeros(n)

print('Enter Augmented Matrix Coefficients:')
for i in range(n):
    for j in range(n):
        a[i][j] = K[i][j]
    a[i][12]=Q[i]

for i in range(n):
    if a[i][i] == 0.0:
        sys.exit('Divide by zero detected!')

    for j in range(i+1, n):
        ratio = a[j][i]/a[i][i]

        for k in range(n+1):
            a[j][k] = a[j][k] - ratio * a[i][k]

# Back Substitution
x[n-1] = a[n-1][n]/a[n-1][n-1]

for i in range(n-2,-1,-1):
    x[i] = a[i][n]

    for j in range(i+1,n):
        x[i] = x[i] - a[i][j]*x[j]

    x[i] = x[i]/a[i][i]

# Displaying solution
print('\nRequired solution is: ')
for i in range(n):
    print('%d = %.2f' %(i,x[i]), end = '\t')
```

Required solution is:

T1 = 51.01
T2 = 45.45
T3 = 59.51
T4 = 50.79
T5 = 68.73
T6 = 62.65
T7 = 76.04
T8 = 71.34
T9 = 50.05
T10 = 59.19
T11 = 51.41
T12 = 56.30

Проверка методом обратной матрицы:

Запишем СЛАУ и найдем вектор T:

$$K \cdot T = Q$$

$$T = K^{-1} \cdot Q$$

```
K_inv=np.linalg.inv(K)
T=np.dot(K_inv,Q)
print(T)
```

```
[51.0118636  45.44824845  59.5119757  50.79036581  68.7336977  62.64998919
 76.0391282  71.3445587  50.04823874  59.19066188  51.41443041  56.30254615]
```

Полученный вектор температур T:

	1
1	51.01...
2	45.44...
3	59.51...
4	50.79...
5	68.73...
6	62.64...
7	76.03...
8	71.34...
9	50.04...
10	59.19...
11	51.41...
12	56.30...