МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина:
Основы методов конечных элементов

Отчет по выполнению лабораторной работы №3

Группа: ФН11-72Б

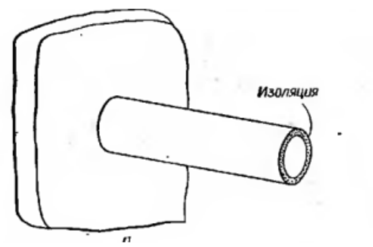
Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель:Захарова Ю.В.

Москва, 2022

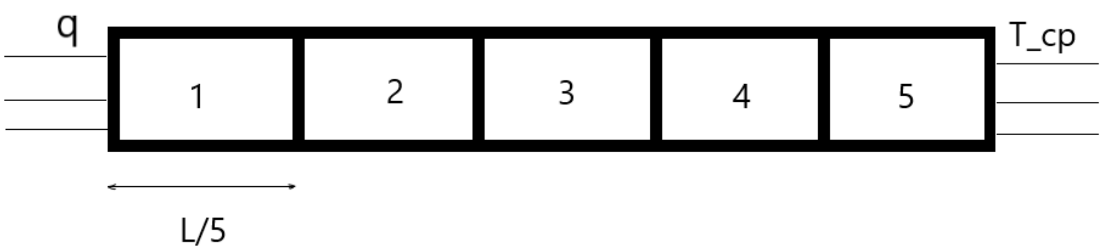
Задача. К закрепленному в стене концу стержня (x=0) подводится тепловой поток интенсивности q. На свободном конце стержня (x=L) происходит конвективный теплообмен тепла. Коэффициент теплообмена h, температура окружающей среды Tcp. Стержень теплоизолирован, так что потерь тепла через боковую поверхность стержня не происходит. Площадь поперечного сечения стержня S считается постоянной. Разбить стержень на 5 конечных элементов и вычислить температуру в узлах.

Решить задачу используя результаты 1 лабораторной

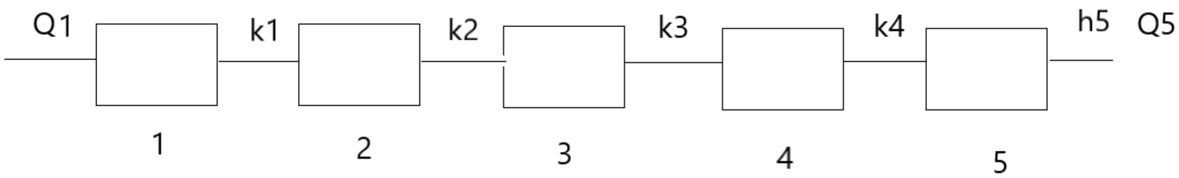
$\lambda = 75\left[Bm/(cм)\cdot {}^{\circ}C\right]$ - коэффициент теплопроводности материала, $q = -150\ \left[Bm/cм^2\right]$ (считается, что положительное направление, когда тепло отводится от тела, так как по задаче тепло подводится к телу, то знак минус), $\alpha_g = 10\ \left[Bm/\left(cм^2\right)\cdot {}^{\circ}C\right]$-коэффициент теплообмена, $S = \pi\ cм^2$, $L = 7.5\ cм$



Разобьем стержень на пять элементов длины L/5:



Обозначим узлы:



Рассмотрим дифференциальное уравнение, описывающее распространение тепла в стержне:

$$-\frac{d}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)=f,$$

где f – погонная интенсивность подачи тепла, если внутри стержня есть источник, в задаче внутренние источники тепла не заданы, следовательно $f=0$.

Граничные условия:

$$k(0)u'(0)=\lambda\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0}=-\sigma_0=-q,$$

$$k(l)u'(l)=\lambda\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L}=a_l\left(U_l-u(l)\right)=\alpha_g\left(T_{cp}-u(l)\right)=-\alpha_g\left(u(l)-T_{cp}\right)$$

(Граничное условие 2-го рода на левом конце с заданным тепловым потоком q и граничное условие 3-го рода с заданным теплообменом)

Вариационная постановка задачи:

$$\int_0^L\frac{d\delta T}{dx}\left(\lambda\frac{dT}{dx}\right)Sdx-F(\nu)=0$$

$$F(v)=F_l+F_0$$

$$v_i=\delta T_i$$

$$F_l=k(l)\cdot T'(l)\cdot v(l)$$

$$F_0=k(0)\cdot T'(0)\cdot v(0)$$

$$k_x=\lambda$$

Подставим в краевые условия:

$$k(0)\cdot T'(0) = -q = \frac{Q1}{S}$$

$$k(l)\cdot T'(l) = -\alpha_g \cdot \left(T_5 - T_{cp}\right) = \frac{Q5}{S}$$

Искомые функции $T^{(i)}$:

$$T^{(i)} := N^{(i)}\cdot q^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \\ \dfrac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^{(i)} \\ T_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

производные по x:

$$\frac{d}{dx} T^{(i)} := B^{(i)}\cdot q^{(i)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x_{i+1} - x_i} \\ \dfrac{1}{x_{i+1} - x_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^{(i)} \\ T_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

Вариации:

$$\delta T^{(i)} := B^{(i)}\cdot \delta q^{(i)} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{x_{i+1} - x_i} \\ \dfrac{1}{x_{i+1} - x_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta T_1^{(i)} \\ \delta T_2^{(i)} \end{bmatrix}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d(\delta T)}{dx} \left(\lambda \frac{dT}{dx}\right)\cdot S\cdot dx - F_0 - F(l) = 0$$

Для 1-го узла:

$$l0 = \frac{L}{5}$$

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d(\delta T)}{d x}\left(\lambda \frac{d T}{d x}\right)\cdot S\cdot dx - F_0 = 0$$

$$\int_0^{l0} \frac{d(\delta T)}{d x}\left(\lambda \frac{d T}{d x}\right)\cdot S\cdot dx + Q_1\cdot \delta T_1 = 0$$

$$\int_0^{l_0} \frac{d\left(B^{(i)}\cdot \delta q^{(i)}\right)}{d x}\left(\lambda\cdot B^{(i)}\cdot q^{(i)}\right)\cdot S\cdot dx - \lambda\cdot B^{(i)}\cdot q^{(i)}\cdot \delta T_1 = 0$$

$$\left(-\delta T_1^{(1)} + \delta T_2^{(1)}\right)\cdot\lambda\cdot S\cdot\left(-\frac{1}{l_0}\cdot T_1^{(1)} + \frac{1}{l_0}\cdot T_2^{(1)}\right) + Q_1\cdot\delta T_1^{(1)} = 0$$

$$\delta T_1^{(1)}\cdot\left(\frac{\lambda\cdot S}{l_0}\cdot\left(T_1^{(1)} - T_2^{(1)}\right) + Q_1\right) + \delta T_2^{(1)}\cdot\frac{\lambda\cdot S}{l_0}\left(T_2^{(1)} - T_1^{(1)}\right) = 0$$

Обнуляем коэффициенты при вариациях:

$$\frac{\lambda\cdot S}{l_0}\cdot\left(T_1^{(1)} - T_2^{(1)}\right) + Q_1 = 0$$

$$\frac{\lambda\cdot S}{l_0}\left(T_2^{(1)} - T_1^{(1)}\right) = 0$$

Матричный вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} \\ \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{\lambda \cdot S}{l_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^{(1)} \\ T_2^{(1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Q_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \frac{\lambda \cdot S}{l_0}, k_2 = \frac{\lambda \cdot S}{l_0}, k_{12} = k_{21} = \frac{-\lambda \cdot S}{l_0}$$

Для L-го узла:

$$\delta T_1^{(L)} \cdot \left(\frac{\lambda \cdot S}{l_0} \cdot \left(T_1^{(L)} - T_2^{(L)} \right) - Q_5 \right) + \delta T_2^{(L)} \cdot \frac{\lambda \cdot S}{l_0} \left(T_2^{(L)} - T_1^{(L)} \right) = 0$$

$$\frac{\lambda \cdot S}{l_0} \cdot \left(T_1^{(5)} - T_2^{(5)} \right) - Q_5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} \\ \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{\lambda \cdot S}{l_0} + h_5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^{(5)} \\ T_2^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -Q_5 \end{bmatrix}$$

$$k_4 = \frac{\lambda \cdot S}{l_0}, k_5 = \left(\frac{\lambda \cdot S}{l_0} \right) + h_5, k_{45} = k_{54} = \frac{-\lambda \cdot S}{l_0}$$

Для j-го узла, $j = \overline{2, 4}$:

$$\delta T_1^{(j)} \frac{\lambda \cdot S}{l_0} \cdot \left(T_1^{(j)} - T_2^{(j)} \right) + \delta T_2^{(j)} \cdot \frac{\lambda \cdot S}{l_0} \left(T_2^{(j)} - T_1^{(j)} \right) = 0$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} \\ \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{\lambda \cdot S}{l_0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T_1^{(j)} \\ T_2^{(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_j = \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{l_0}$$

Матрица жесткости:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{\lambda \cdot S}{l_0} & -\frac{\lambda \cdot S}{l_0} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{l_0} & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{l_0} & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{2 \cdot \lambda \cdot S}{l_0} & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-\lambda \cdot S}{l_0} & \frac{\lambda \cdot S}{l_0} + h_5 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_5 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \end{bmatrix}$$

Матричное уравнение:

$K \cdot T = Q$

$\alpha := 10 :$
$q := 150 :$
$T_c := 50 :$
$L := 7.5 :$
$l0 := \frac{L}{5} :$
$S := \mathrm{pi} :$
$\lambda := 75 :$
$k := \frac{\lambda \cdot S}{l0} = 157$
$h5 := \alpha \cdot S :$

$$Q5 := h5 \cdot T_c = 1570$$

$$Q1 := q \cdot S = 471$$

$$K := \begin{bmatrix} 157 & -157 & 0 & 0 & 0 \\ -157 & 314 & -157 & 0 & 0 \\ 0 & -157 & 314 & -157 & 0 \\ 0 & 0 & -157 & 314 & -157 \\ 0 & 0 & 0 & -157 & 471 \end{bmatrix} :$$

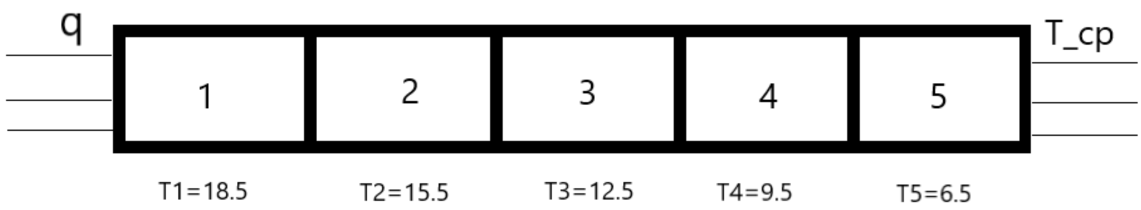
$$\begin{bmatrix} 157 & -157 & 0 & 0 & 0 \\ -157 & 314 & -157 & 0 & 0 \\ 0 & -157 & 314 & -157 & 0 \\ 0 & 0 & -157 & 314 & -157 \\ 0 & 0 & 0 & -157 & 471 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \\ T4 \\ T5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 471 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1570 \end{bmatrix}$$

Найдем вектор температур T:

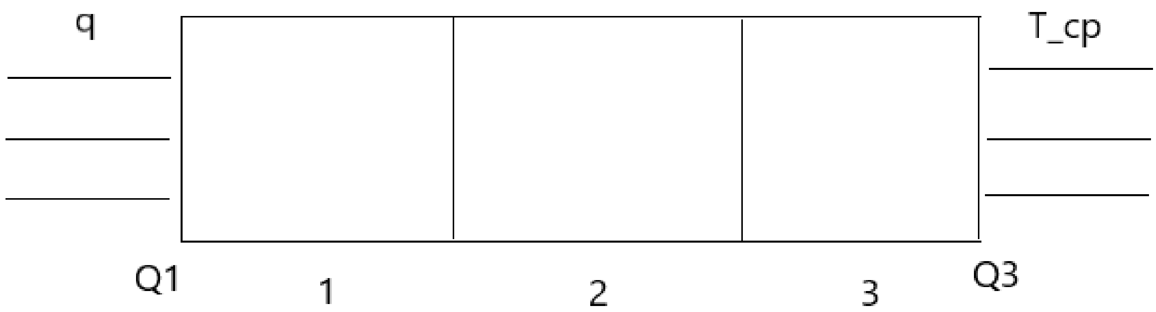
$$K^{-1} := inverse(K)$$

$$T = K^{-1} \cdot Q$$

$$T = K^{-1} \cdot Q = \begin{bmatrix} \frac{37}{2} \\ \frac{31}{2} \\ \frac{25}{2} \\ \frac{19}{2} \\ \frac{13}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18.5 \\ 15.5 \\ 12.5 \\ 9.5 \\ 6.5 \end{bmatrix}$$



Разобьем тело на 3 равные части длины l1=L/3



Матрица жесткости для 3-х узлов:

$$K := \begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2 \cdot k & -k \\ 0 & -k & k + h3 \end{bmatrix}$$

где

$$k := \frac{\lambda \cdot S}{l1}$$

$\alpha := 10 :$

$q := 150 :$

$T_c := 50 :$

$L := 7.5 :$

$l1 := \frac{L}{3} :$

$S := \mathrm{pi} :$

$\lambda := 75 :$

$k := 94.2$

$Q1 := 471$

$Q3 := 1570$

$h3 := 31.4$

$$Q := \begin{bmatrix} Q1 \\ 0 \\ Q3 \end{bmatrix}$$

$$T := \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k & -k & 0 \\ -k & 2\cdot k & -k \\ 0 & -k & k + h3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} T1 \\ T2 \\ T3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q1 \\ 0 \\ Q3 \end{bmatrix}$$

$$T = K^{-1} \cdot Q$$

$$T = \begin{bmatrix} 75. \\ 70. \\ 65. \end{bmatrix}$$