МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина:
Основы методов конечных элементов

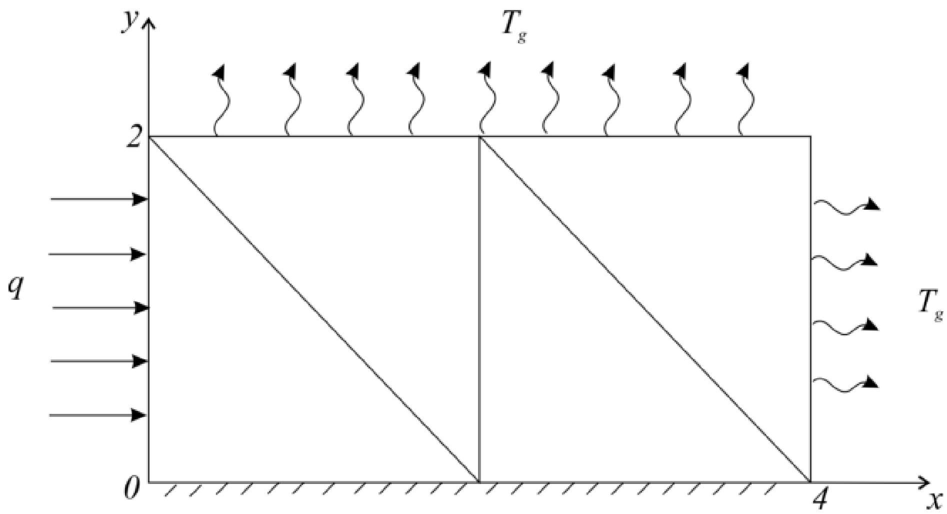
Отчет по выполнению лабораторной работы №4

Группа: <u>ФН11-72Б</u>

Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель:Захарова Ю.В.

Москва, 2022

Задача. Дано тело слева к нему подводится тепловой поток интенсивности q. Справа и сверху происходит конвективный теплообмен тепла. Коэффициент теплообмена α_g, температура окружающей среды T_g. Снизу тело теплоизолировано. Толщина тела t считается постоянной и равна 1 см. Тело разбито на 4 треугольных элемента. Составить локальные матрицы жесткости и правых частей. Произвести сборку в глобальную матрицу и глобальный вектор. Решить СЛАУ.



$\lambda = 75\left[Bm/(см)\cdot{}^\circ C\right]$ - коэффициент теплопроводности материала, $q = 150\ \left[Bm/см^2\right]$, $\alpha_g = 10\ \left[Bm/\left(см^2\right)\cdot{}^\circ C\right]$, T_g=40$^\circ C$.

Введем параметры системы:

```
lambd=75
q=150
alpha_g=10
T_g=40
```

$$k^{(e)}\Phi = f^{(e)}$$

где $$\left[k^{(e)}\right] = \int\limits_{V^{(e)}} \left[B^{(e)}\right]^T \left[D^{(e)}\right]\left[B^{(e)}\right] dV + \int\limits_{S_2^{(e)}} \alpha_g \left[N^{(e)}\right]^T \left[N^{(e)}\right] dS$$

$$f^{(e)} = \int\limits_{V^{(e)}} f\left[N^{(e)}\right]^T dV + \int\limits_{S_1^{(e)}} q\left[N^{(e)}\right]^T dS + \int\limits_{S_2^{(e)}} \alpha_g T_g \left[N^{(e)}\right]^T dS$$

$$\left[B^{(e)}\right] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial[N]}{\partial x} \\ \dfrac{\partial[N]}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2S^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}.$$

Функции вычисления определителя (он кстати говоря равен двум площадям одного треугольника,т.е 4) , коэффицинтов a,b,c:

```
def det(x,y):
  delta=(x[1]*y[2]-y[1]*x[2])+(x[2]*y[0]-x[0]*y[2])+(x[0]*y[1]-x[1]*y[0])
  return delta
```

```
def a(x,y):
  A=[]
  A.append(x[1]*y[2]-x[2]*y[1])
  A.append(x[2]*y[0]-x[0]*y[2])
  A.append(x[0]*y[1]-x[1]*y[0])
  return A
```

```
def b(x,y):
  B=[]
  B.append(y[1]-y[2])
  B.append(y[2]-y[0])
  B.append(y[0]-y[1])
  return B
```

```
def c(x,y):
  C=[]
  C.append(x[2]-x[1])
  C.append(x[0]-x[2])
  C.append(x[1]-x[0])
  return C
```

Функция вычисления матрицы B[i][j] i=$\overline{1,2}$, j=$\overline{1,3}$

```
def B(b,c, delta):
  B=[[0 for i in range(3)]for j in range(2)]
  B[0][0]=float(1)/delta*b[0]
  B[0][1]=float(1)/delta*b[1]
  B[0][2]=float(1)/delta*b[2]

  B[1][0]=float(1)/delta*c[0]
  B[1][1]=float(1)/delta*c[1]
  B[1][2]=float(1)/delta*c[2]

  return B
```

Матрица жесткости D:

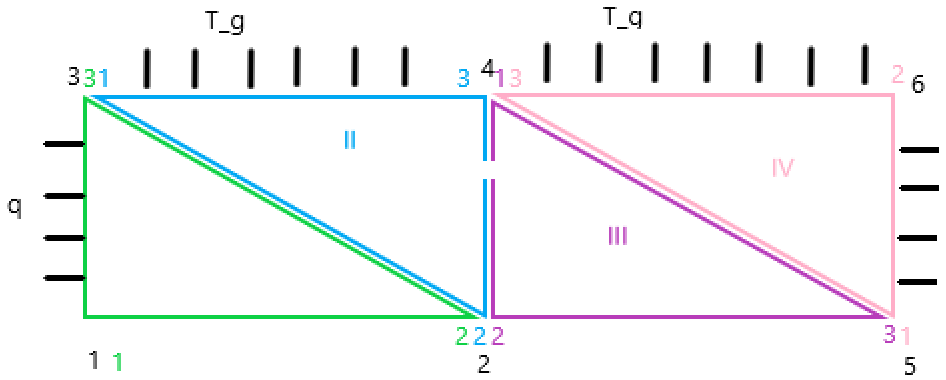
$$D = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 75 & 0 \\ 0 & 75 \end{bmatrix}$$

Вектора правой части и матрица жесткости для одного элемента:

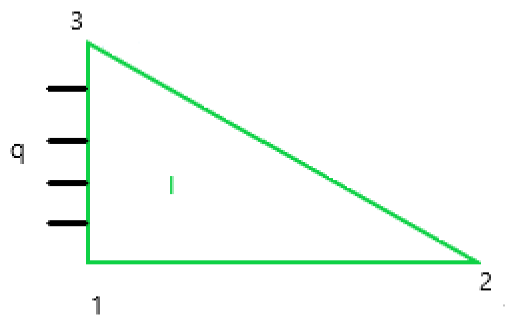
$$F^{(e)} = \int_\Gamma q \cdot N^T \, d\Gamma + \int_\Gamma \alpha_g \cdot T_g \cdot N^T \, d\Gamma$$

$$K = \int\int_S B^T \cdot D \cdot B \, dS + \int_\Gamma \alpha_g \cdot N^T \cdot N \, d\Gamma$$

Разобьем тело на 4 элемента:



1) Рассмотрим первое тело




```
x=[0,2,0]
y=[0,0,2]
```

```
det= 4
a= [4, 0, 0]
b= [-2, 2, 0]
c= [-2, 0, 2]
```

$$N := \begin{bmatrix} 1 - 0.5 \cdot x - 0.5 \cdot y \\ 0.5 \cdot x \\ -0.5 \cdot y \end{bmatrix} :$$

Матрица B и матрица B^T:

```
 Matrix B:

-0.5 0.5 0.0

-0.5 0.0 0.5


 Matrix B_T:

-0.5 -0.5

0.5 0.0

0.0 0.5
```

Матрица жесткости для I-го тела имеет вид:

$$K = \int\int_{S_I} B^T \cdot \mathbf{D} \cdot B \, \mathrm{d}S_I$$

, т.к не имеет теплообмена на своих ребрах. В силу того что матрицы B и D не зависят от x, y , то площадь постоянна и равна 2 (как и для других треугольников соответственно)

$$K_I = 2 \cdot B^T \cdot \mathbf{D} \cdot B$$

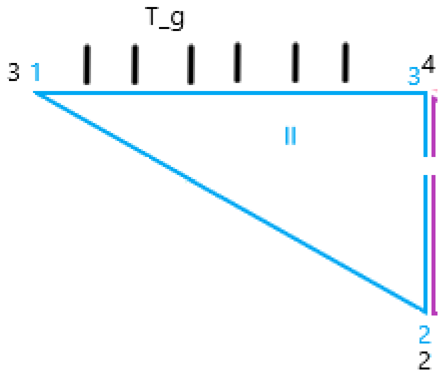
Вектор потока F на границе Γ_{13} равен

$$F_I = q \cdot \int_0^2 subs\left(x = 0, N^T\right) \mathrm{d}y$$

Полученная матрица жесткости и вектор потока:

```
K Matrix:

75.0 -37.5 -37.5

-37.5 37.5 0.0

-37.5 0.0 37.5

F= [150, 0, 150]
```

Рассмотрим второе тело II:




```
x=[0,2,2]
y=[2,0,2]
```

со стороны локальных узлов 1, 3 (соотв. глобальных - 3, 4) действует теплообмен, поэтому по сравнению с матрицей жесткости для первого тела добавится еще одно слагаемое, а вектор потока будет считаться с учетом теплообмена и с учетом отсутствия подачи тепла.

K2=K20+K21

$b := Vector([-2, 0, 2]):$
$c := Vector([0, -2, 2]):$

$$B := \begin{bmatrix} \frac{b[1]}{4} & \frac{b[2]}{4} & \frac{b[3]}{4} \\ \frac{c[1]}{4} & \frac{c[2]}{4} & \frac{c[3]}{4} \end{bmatrix}$$

$$B := \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$K20 := 2 \cdot transpose(B) \cdot d \cdot B$

$$K20 := \begin{bmatrix} \frac{75}{2} & 0 & -\frac{75}{2} \\ 0 & \frac{75}{2} & -\frac{75}{2} \\ -\frac{75}{2} & -\frac{75}{2} & 75 \end{bmatrix}$$

$$NT := \begin{bmatrix} 1-0.5 \cdot x \\ 1-0.5 \cdot y \\ -1+0.5 \cdot x+0.5 \cdot y \end{bmatrix}:$$

на границе y=2:

$$NT := \begin{bmatrix} 1 - 0.5\,x \\ 0. \\ 0.5\,x \end{bmatrix}; N := transpose(NT)$$

$$K21 = \alpha \cdot \int_0^2 subs(y = 2, NT \cdot N)\,dx$$

$$K21 := \begin{bmatrix} 6.667 & 0 & 3.333 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3.333 & 0 & 6.667 \end{bmatrix}:$$

Откуда K2:

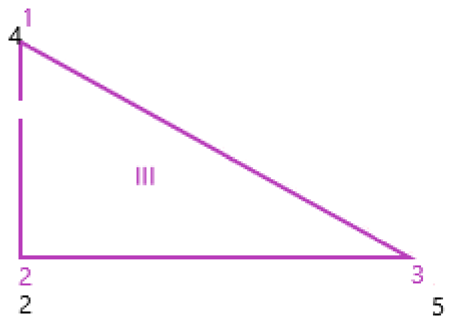
$$K2 := \begin{bmatrix} 44.167 & 0. & -34.167 \\ 0. & 37.5 & -37.5 \\ -34.167 & -37.5 & 81.667 \end{bmatrix}$$

Вектор потока на локальной границе Г13:

$$F2 := \alpha \cdot Tg \cdot \int_0^2 subs(y = 2, NT)\,dx$$

$$F2 := \begin{bmatrix} 400 \\ 0 \\ 400 \end{bmatrix}:$$

3) Рассмотрим третье тело



```
x=[2,2,4]
y=[2,0,0]
```

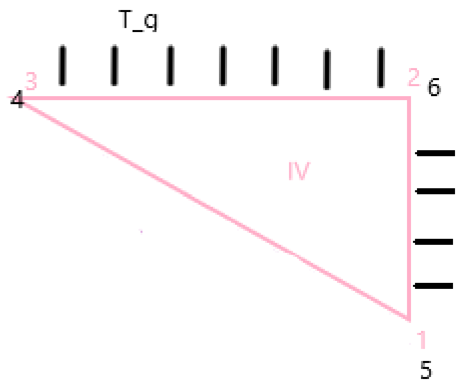
На него не действует ни тепло, ни теплообмен, поэтому вектор правой части равен 0:

$$F3 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}:$$

Матрица жесткости по аналогии с первым телом равна

$$K3 := \begin{bmatrix} 37.5 & -37.5 & 0. \\ -37.5 & 75.0 & -37.5 \\ 0. & -37.5 & 37.5 \end{bmatrix}$$

4) Рассмотрим четвертое тело



матрица жесткости будет складываться из 3-х слагаемых (слагаемое формы, и 2 границы теплообмена). Вектор правой части будет равен сумме потоков на границах телообмена(Г32, Г21)

K4=K40+K41+K42
F4=F40+F41

```
x=[4,4,2]
y=[0,2,2]
```

Матрица жесткости через форму B по аналогии с предыдущими элементами:

$$K40 := \begin{bmatrix} 37.5 & -37.5 & 0. \\ -37.5 & 75.0 & -37.5 \\ 0. & -37.5 & 37.5 \end{bmatrix}$$

форма N^T:

$$NT := \begin{bmatrix} 1 - 0.5 \cdot y \\ -2 + 0.5 \cdot x + 0.5 \cdot y \\ 2 - 0.5 \cdot x \end{bmatrix}:$$

Граница Г12:

$$K41 := \alpha \cdot \int_0^2 subs(x = 4, NT \cdot N)\, dy$$

$$K41 := \begin{bmatrix} 6.667 & 3.333 & 0 \\ 3.333 & 6.667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}:$$

Граница Г32:

$$K42 := \alpha \cdot \int_2^4 subs(y = 2, NT \cdot N)\, dx$$

$$K42 := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6.667 & 3.333 \\ 0 & 3.333 & 6.667 \end{bmatrix}:$$

Откуда

$$K4 := \begin{bmatrix} 44.167 & -34.167 & 0. \\ -34.167 & 88.334 & -34.167 \\ 0. & -34.167 & 44.167 \end{bmatrix}$$

Вектора потока:

$$F40 := \alpha \cdot Tg \cdot \int_0^2 subs(x = 4, NT)\, dy$$

$$F41 := \alpha \cdot Tg \cdot \int_2^4 subs(y = 2, NT)\, dx$$

$$F40 := \begin{bmatrix} 0 \\ 400 \\ 400 \end{bmatrix} : \quad F41 := \begin{bmatrix} 400 \\ 400 \\ 0 \end{bmatrix} :$$

$$F4 := \begin{bmatrix} 400 \\ 800 \\ 400 \end{bmatrix}$$

5) просуммируем компоненты четырех матриц жесткости для каждого из глобалных узлов(1-6) , также просуммируем компоненты векторов правой части

глобальная матрица жесткости и вектор правой части:

$$K := \begin{bmatrix} 75 & -37.5 & -37.5 & 0 & 0 & 0 \\ -37.5 & 150 & 0 & -75 & -37.5 & 0 \\ -37.5 & 0 & 81.67 & -34.17 & 0 & 0 \\ 0 & -75 & -34.17 & 163.33 & 0 & -34.17 \\ 0 & -37.5 & 0 & 0 & 81.67 & -34.17 \\ 0 & 0 & 0 & -34.17 & -34.17 & 87.33 \end{bmatrix} \quad F := \begin{bmatrix} 150 \\ 0 \\ 550 \\ 800 \\ 400 \\ 800 \end{bmatrix} :$$

Решаем матричное уравнение $K \cdot T = F$ методом обратной матрицы

Обратная матрица K^{-1}

$Kinv := inverse(K)$

$$Kinv := \begin{bmatrix} 0.03633569447 & 0.02186597256 & 0.02413874970 & 0.01781747573 & 0.01549324432 & 0.01303363454 \\ 0.02186597256 & 0.02590520488 & 0.01782674025 & 0.01861094249 & 0.01786629532 & 0.01427261211 \\ 0.02413874970 & 0.01782674025 & 0.03045075916 & 0.01702400898 & 0.01312019331 & 0.01179465696 \\ 0.01781747573 & 0.01861094249 & 0.01702400898 & 0.02113536651 & 0.01435556119 & 0.01388669414 \\ 0.01549324432 & 0.01786629532 & 0.01312019331 & 0.01435556119 & 0.02726081460 & 0.01628342563 \\ 0.01303363454 & 0.01427261211 & 0.01179465696 & 0.01388669414 & 0.01628342563 & 0.02325561654 \end{bmatrix}$$

$$T := Kinv \cdot F$$

Искомый вектор температур:

$$T := \begin{bmatrix} 49.6048524495000010 \\ 46.5379648294999982 \\ 48.6717400690000020 \\ 45.7956992944999968 \\ 44.9556082645000004 \\ 44.6693253050000010 \end{bmatrix}$$

нанесем температуры: