МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина:
Стохастический анализ и стохатические дифференциальные уравнения

Отчет по выполнению домашнего задания №1

Группа: <u>ФН11-72Б</u>
Вариант 6

Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель:Облакова Т.В.

Москва, 2022

Пусть $\{\varepsilon_n\}, n = 0,1, \dots N,$ - последовательность независимых случайных величин с $M\varepsilon_n = 0, D\varepsilon_n = \sigma^2$.

1. Докажите, что последовательность $\{\xi_n\},, n = 0,1, \dots N,$

$$\xi_0 = \varepsilon_0, \xi_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(1 + \alpha\varepsilon_0),$$

$$\xi_{n+1} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1(1 + \alpha\varepsilon_0) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j+1}\left(1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1}\right), n \geq 1,$$

является мартингалом относительно потока $\{\mathcal{F}_n\}, \mathcal{F}_n = \sigma(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Найдите квадратическую характеристику $\langle\xi\rangle_n$.

2. Для заданных N, σ, смоделируйте M нормально распределенных последовательностей $\{\varepsilon_n\}$, вычислите соответствующие последовательности $\{\xi_n\}$, используя заданные α и β. Несколько последовательностей выведите на печать.

3. Изучите на основе смоделированных траекторий закон распределения СВ $\frac{\xi_N}{\sqrt{\langle\xi\rangle_N}}$ (Постройте гистограмму, определите вид распределения, оцените параметры, проверьте по критерию Пирсона) . Экспериментально проверьте, зависит ли этот закон от закона распределения последовательности $\{\varepsilon_n\}$.

1.

$$\xi_0 = \varepsilon_0 :$$

$$\xi_1 = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \left(1 + \alpha\varepsilon_0\right) :$$

$$\xi_{n+1} = \varepsilon_0 + \varepsilon_1 \cdot \left(1 + \alpha\varepsilon_0\right) + \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j+1} \cdot \left(1 + \alpha\varepsilon_j + \beta\varepsilon_{j-1}\right)$$

Последовательность ξ_n будет являться мартингалом относительно потока , тогда и только тогда когда условное математическое ожидание ξ_{n+1} относительно этого потока будет равно ξ_n :

$$M\left(\xi_{n+1}\middle|\mathfrak{F}_n\right)=\xi_n$$

Докажем, что для заданной последовательности это выполнено:

$$M\left(\xi_{n+1}\middle|\mathfrak{F}_n\right)=M\left(\xi_n+\varepsilon_{n+1}\cdot\left(1+\alpha\varepsilon_n+\beta\varepsilon_{n-1}\right)\middle|\mathfrak{F}_n\right)=$$

$$=M\left(\xi_n\middle|\mathfrak{F}_n\right)+M\left(\varepsilon_{n+1}\cdot\left(1+\alpha\varepsilon_n+\beta\varepsilon_{n-1}\right)\middle|\mathfrak{F}_n\right)=\xi_n+M\left(\varepsilon_{n+1}\middle|\mathfrak{F}_n\right)+\alpha\cdot M\left(\varepsilon_{n+1}\cdot\varepsilon_n\middle|\mathfrak{F}_n\right)+\beta M\left(\varepsilon_{n+1}\cdot\varepsilon_{n-1}\middle|\mathfrak{F}_n\right)=$$

$$=\xi_n+0+\alpha\cdot\delta^{n}_{n+1}+\beta\cdot\delta^{n-1}_{n+1}=\xi_n$$

Среднеквадратичная характеристика $<\xi>_n$ рассчитывается по следующей формуле:

$$\langle\xi\rangle_n=\sum_{j=0}^{n-1}M\left[\left(\xi_{j+1}-\xi_j\right)^2\middle|\mathfrak{F}_n\right]$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}M\left[\left(\varepsilon_{n+1}\cdot\left(1+\alpha\varepsilon_n+\beta\varepsilon_{n-1}\right)\right)^2\middle|\mathfrak{F}_n\right]=\sum_{j=0}^{n-1}M\left[\varepsilon^2_{n+1}\cdot\left(1+2\cdot\left(\alpha\varepsilon_n+\beta\varepsilon_{n-1}\right)+\left(\alpha\varepsilon_n+\beta\varepsilon_{n-1}\right)^2\right)\middle|\mathfrak{F}_n\right]=$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}M\left(\varepsilon^2_{n+1}\middle|\mathfrak{F}_n\right)+2\cdot\sum_{j=0}^{n-1}M\left[\varepsilon^2_{n+1}\cdot\left(\alpha\varepsilon_n+\beta\varepsilon_{n-1}\right)\middle|\mathfrak{F}_n\right]+\sum_{j=0}^{n-1}M\left[\varepsilon^2_{n+1}\cdot\left(\alpha^2\varepsilon^2_n+2\cdot\alpha\beta\varepsilon_n\varepsilon_{n-1}+\beta^2\varepsilon^2_{n-1}\right)\middle|\mathfrak{F}_n\right]=$$

$$=n-1+0+(n-1)\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)=(n-1)\cdot\left(1+\alpha^2+\beta^2\right)$$

$$\langle\xi\rangle_n=(n-1)\cdot\left(1+\alpha^2+\beta^2\right)$$

2. Зададим параметры :

```
N=120
M=140
sigma=2
alpha=1
beta=2
```

Смоделируем $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma)$ и выведем на печать первые 4 траекториии, начиная с 0 :

```
for i in range(M):
  epsilon.clear()
  for j in range(N):
    e=np.random.normal(0, sigma, 1)
    epsilon.append(e)
  if i<=3:
    print("e_i", epsilon)
```

Смоделированные ε:

ε_0 =[0.57380779,3.00395174,2.67893311,-1.16471945,0.67643106, 1.20296517,-1.85428115,4.62579969…]

ε_1 =[2.38576946,-1.83279198,-0.16156434,-2.21941727,1.08018922, 1.28134047,-4.58820561,2.1651924…]

ε_2 =[-1.56467925,0.07550432,2.20889693,0.73407889,3.30696062, 2.76574152,-3.24590583,1.52631321…]

ε_3 =[0.57501751,-0.38813813,-1.84663117,0.97281578,-0.14730567, -1.3664481,-0.96954397,-1.62848642,-2.2094409…]

Функция вычисления последовательности ξ_n и $\xi_n/\sqrt{<\xi_n>}$ (при check_char=1)

```
def ksi(n, epsilon, alpha, beta, check_char):

  if n>1:
    ksi_char=(n-1)*(1+alpha**2+beta**2)
  else:
    ksi_char=1

  ksi=epsilon[0]+epsilon[1]*(1+alpha*epsilon[0])
  if n==0:
    if check_char==1:
      ksi=round(float(epsilon[0])/math.sqrt(ksi_char),4)
    else:
      ksi= epsilon[0]
  elif n==1:
    if check_char==1:
      ksi=round(float(epsilon[0]+epsilon[1]*(1+alpha*epsilon[0]))/math.sqrt(ksi_char),4)
    else:
      ksi= epsilon[0]+epsilon[1]*(1+alpha*epsilon[0])
  else:
    for j in range( 1,n):
      ksi+=epsilon[j+1]*(1+alpha*epsilon[j]+beta*epsilon[j-1])
    if check_char==1:
      ksi=round(float(ksi)/math.sqrt(ksi_char),4)
  return ksi
```

Смоделированные массивы Ksi(последовательностьξ_n) и Ksi_ch(последовательность $\xi_n/\sqrt{<\xi_n>}$):

```
Ksi=[[0 for i in range (N)] for j in range (M)]
Ksi_ch=[[0 for i in range (N)] for j in range (M)]
for i in range(M):
  epsilon.clear()
  for j in range(N):
    e=np.random.normal(0, sigma, 1)
    epsilon.append(e)
  if i<=3:
    print("e_i", epsilon)
  for n in range(0,N-1):

    Ksi[i][n]=ksi(n,epsilon, alpha, beta,0 )
    Ksi_ch[i][n]=ksi(n,epsilon, alpha, beta,1 )
```

выведем на печать массив Ksi= $\{\xi_n\}$:

Траектории ξ_n расположены по столбцам, Ksi=[N*M]

```
[0.57380779] [2.38576946] [-1.56467925] [0.57501751] [0.15214953] [-0.21526153] [2.18176798] [3.689194
[5.30145045] [-3.81964164] [-1.60731497] [-0.03630684] [-1.22474736] [-0.36032289] [-1.06614303] [3.53
[19.10215471] [-4.4560027] [-6.14406715] [-3.28988057] [-1.17395445] [-0.43640679] [-9.91760134] [-1.7
[7.81970776] [1.81861904] [-3.67763138] [-4.86867053] [0.61234668] [-0.24168147] [-1.67224871] [-2.037
[11.33251352] [0.15237753] [16.66636959] [-4.615239] [0.61394882] [-4.69050585] [-0.00180456] [-4.5221
[10.54696783] [-2.86985016] [32.63885436] [-8.4390061] [-3.33872899] [-0.22985828] [-13.24052993] [-0.
[3.95346433] [-23.2493698] [-1.05255353] [-7.79807991] [-6.14945352] [-0.13662073] [-16.72065007] [10.
[11.1310827] [-25.46982803] [3.96226636] [-3.39719281] [-6.73763836] [-9.84226056] [-24.78801208] [3.2
[13.29003085] [-33.25580298] [0.24686449] [2.27571099] [-3.15019452] [-10.30248731] [-22.93917822] [-6
[38.39904447] [-30.4756722] [0.17613939] [-13.58501103] [-6.43676155] [2.25676223] [-25.85112031] [-16
[48.73817426] [-35.79224156] [-2.51905142] [-13.45206518] [-6.58469091] [2.73795167] [-24.60505071] [-
[53.33064149] [-36.49809318] [-2.53364176] [-30.93635734] [-9.86860423] [0.15788646] [-28.79528078] [-
[49.60214957] [-38.6404291] [-8.46511408] [-30.22497878] [-8.481593] [1.90199058] [-31.01528972] [-15.
[47.98135578] [-37.25545527] [-5.20106384] [-36.31596131] [4.15643125] [4.39249604] [-33.59265434] [-1
[43.68716158] [-36.52921576] [-33.05632531] [-65.12736719] [15.77608175] [12.43827597] [-35.80610343]
```

Массив последовательностей $\xi_n/\sqrt{<\xi_n>}$ Ksi_ch:

```
0.5738 2.3858 -1.5647 0.575 0.1521 -0.2153 2.1818 3.6892 0.5289 -1.6802 -3.3686 0.5171

5.3015 -3.8196 -1.6073 -0.0363 -1.2247 -0.3603 -1.0661 3.5347 0.4425 -1.9873 -3.2119 -0

7.7984 -1.8192 -2.5083 -1.3431 -0.4793 -0.1782 -4.0488 -0.7191 -0.4149 -1.1866 11.9309

2.2574 0.525 -1.0616 -1.4055 0.1768 -0.0698 -0.4827 -0.5881 -0.241 -0.8814 5.873 -0.466

2.6711 0.0359 3.9283 -1.0878 0.1447 -1.1056 -0.0004 -1.0659 -0.1286 0.4511 2.6277 -0.47

2.1529 -0.5858 6.6624 -1.7226 -0.6815 -0.0469 -2.7027 -0.1206 -1.658 1.1556 1.235 2.513

0.7218 -4.2447 -0.1922 -1.4237 -1.1227 -0.0249 -3.0528 1.869 -1.4995 2.5097 0.8207 1.26

1.8552 -4.245 0.6604 -0.5662 -1.1229 -1.6404 -4.1313 0.5372 -1.324 2.19 0.6451 1.0173 -

2.0507 -5.1315 0.0381 0.3511 -0.4861 -1.5897 -3.5396 -1.0093 -1.3452 0.5031 0.5544 3.03

5.5424 -4.3988 0.0254 -1.9608 -0.9291 0.3257 -3.7313 -2.4237 -1.338 0.915 0.3596 3.2881

6.6324 -4.8707 -0.3428 -1.8306 -0.8961 0.3726 -3.3483 -1.7366 -1.7924 0.8925 0.1076 1.6

6.885 -4.7119 -0.3271 -3.9939 -1.274 0.0204 -3.7175 -2.2944 -1.6139 0.7908 -0.4831 1.86

6.1056 -4.7563 -1.042 -3.7204 -1.044 0.2341 -3.8177 -1.9392 -0.2731 1.2944 -0.5082 5.57
```

Запоминаем сечения T0,T1,T2,T3. Для этого выбираем строки в массиве Ksi_ch[j][0], Ksi_ch[j][1],Ksi_ch[j][2],Ksi_ch[j][3], j=$\overline{0, M}$:

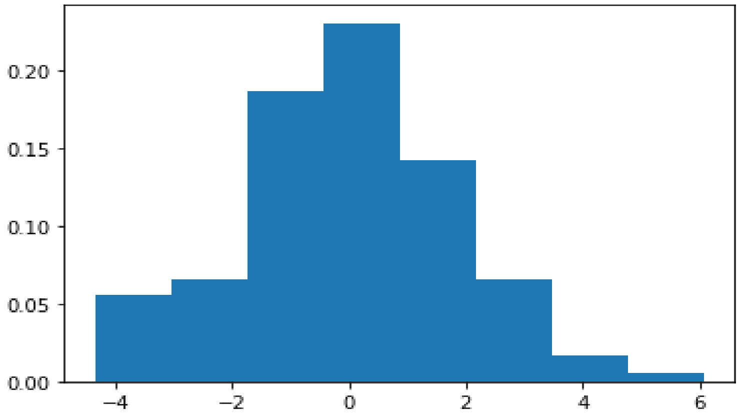
```
for j in range(M):
  T0.append(Ksi_ch[j][0])
  T1.append(Ksi_ch[j][1])
  T2.append(Ksi_ch[j][2])
  T3.append(Ksi_ch[j][3])
```

Сечение T0=`[0.5738, 2.3858, -1.5647, 0.575, 0.1521, -0.2153, 2.1818, 3.6892, 0.5289, -1.6802…]`

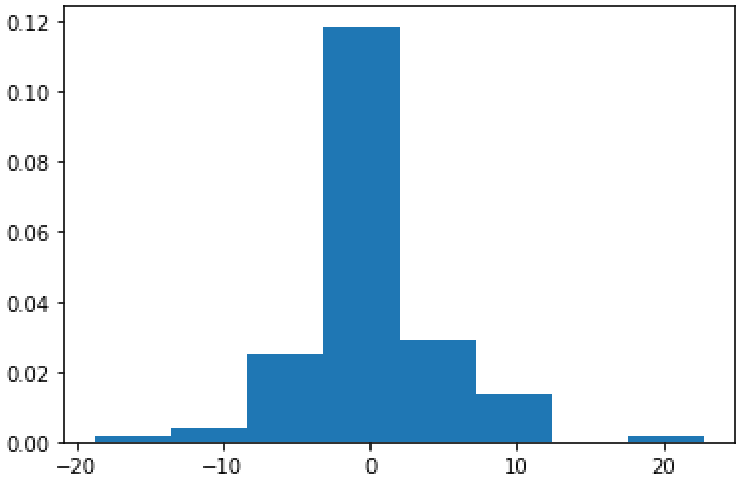
Сечение T1=`[5.3015, -3.8196, -1.6073, -0.0363, -1.2247, -0.3603, -1.0661, 3.5347, 0.4425…]`
Сечение T2=`[7.7984, -1.8192, -2.5083, -1.3431, -0.4793, -0.1782, -4.0488, -0.7191, -0.4149…]`
Сечение T3=`[2.2574, 0.525, -1.0616, -1.4055, 0.1768, -0.0698, -0.4827, -0.5881, -0.241, -0.8814…]`

Строим гистограммы сечений, используя правило Стерджесса:

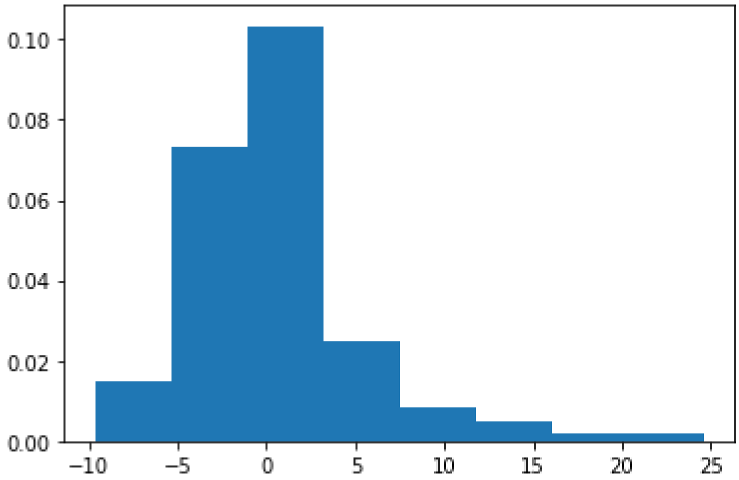
```
l_T=round(1+3.322*math.log10(M))
plt.hist(T0,bins=l_T, density=True )
plt.show()

plt.hist(T1,bins=l_T, density=True )
plt.show()
plt.hist(T2,bins=l_T, density=True )
plt.show()
plt.hist(T3,bins=l_T, density=True )
plt.show()
```



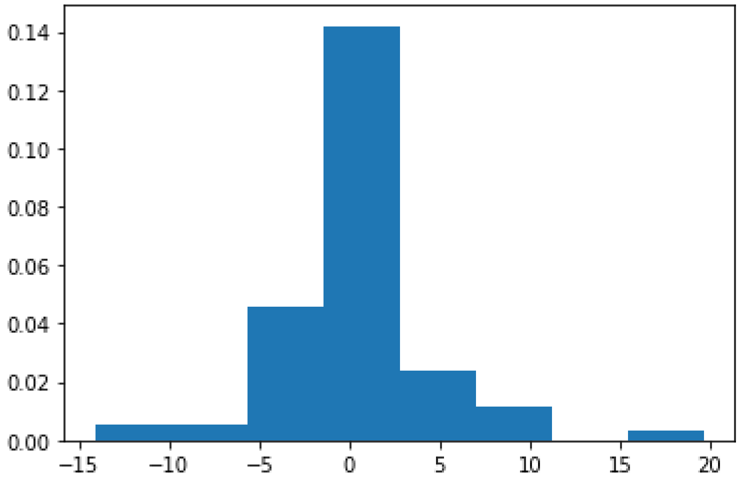
гистограмма распределения для T0



гистограмма распределения для T1



гистограмма распределения для T2



гистограмма распределения для T3

По виду гистограмм, выдвигаем гипотезу о нормальном распределении:
Оцениваем параметры a и σ по методу моментов:

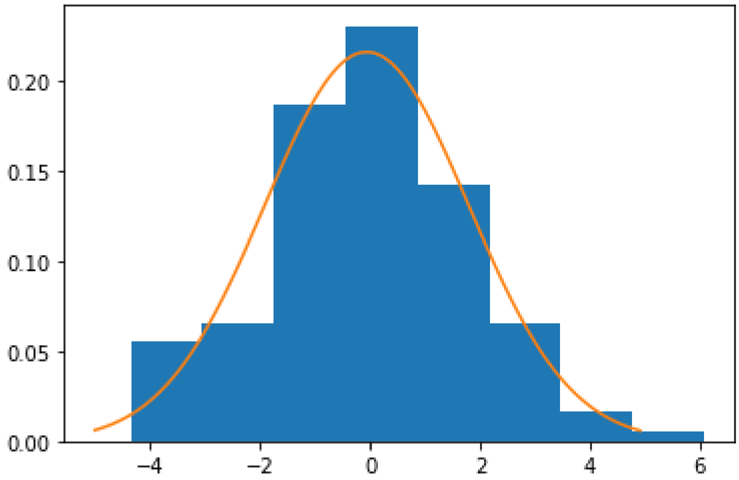
```
T0_avg=np.mean(T0)
T1_avg=np.mean(T1)
T2_avg=np.mean(T2)
T3_avg=np.mean(T3)


S0=0
S1=0
S2=0
S3=0

for i in range(M):
  S0+=(T0[i]-T0_avg)**2
  S1+=(T1[i]-T1_avg)**2
  S2+=(T2[i]-T2_avg)**2
  S3+=(T3[i]-T3_avg)**2
S0=float(1)/(M-1)*S0
S1=float(1)/(M-1)*S1
S2=float(1)/(M-1)*S2
S3=float(1)/(M-1)*S3
```

```
print("ksi0 ~N(",round(T0_avg, 4), round(S0,4),")")
print("ksi1 ~N(",round(T1_avg, 4), round(S1,4),")")
print("ksi2 ~N(",round(T2_avg, 4), round(S2,4),")")
print("ksi3 ~N(",round(T3_avg, 4), round(S3,4),")")
```

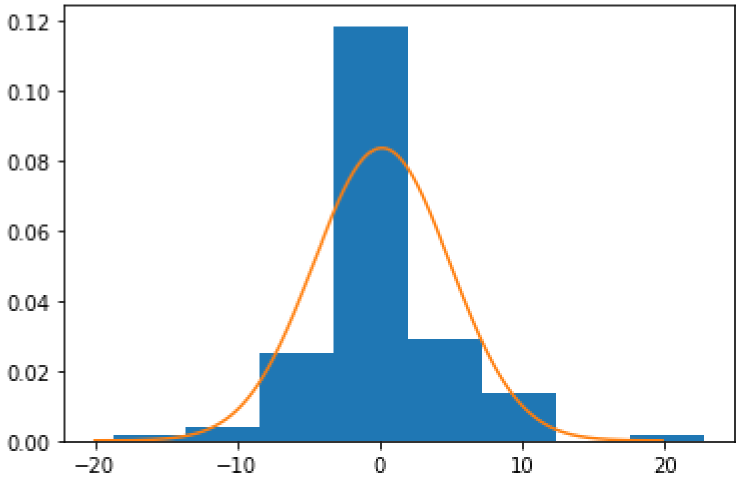
где T_i_avg,=$\overline{T}_i$, т.е $\widehat{a}_i = T_i$_avg, $\widehat{\sigma}_i = S_i$

```
ksi0 ~N( -0.0564 3.4207 )
ksi1 ~N( 0.1454 22.8491 )
ksi2 ~N( 0.1879 22.9275 )
ksi3 ~N( 0.2859 18.2733 )
```

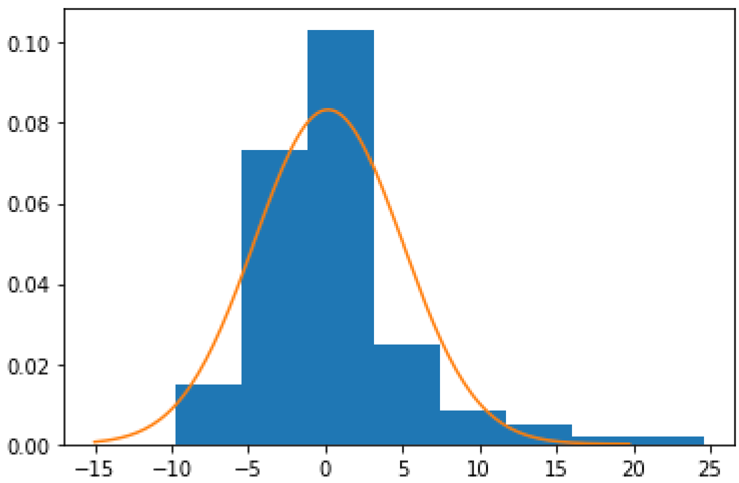
Строим гистограммы с теоретическим графиком распределения:



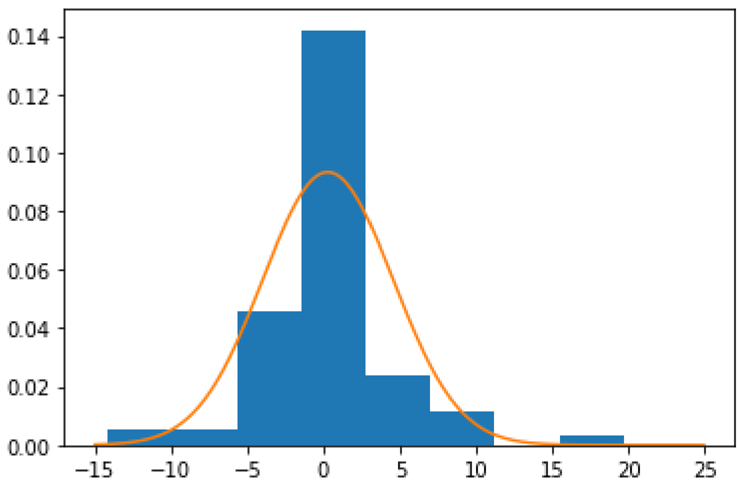
гистограмма распределения для T0



гистограмма распределения для T1



гистограмма распределения для T2



гистограмма распределения для T3

4. построим выборочный критерий хи-квадрат, для этого считаем теоретические вероятности и абсолютные частоты. Разбиваем выборку по интервалам и записываем границы интервала в массив I. В массив Fr записываем абсолютные частоты.

```
h0=float(np.max(T0)-np.min(T0))/l_T


I0=[]
for i in range(l_T+1):
  I0.append(round(np.min(T0)+i*h0,4))
print("I0", I0)
Fr0=[]
for i in range(l_T+2):
  Fr0.append(0)

for i in range(M):
  for j in range(1,l_T+1):
    if(T0[i]>I0[j-1] and T0[i]<=I0[j]):
      Fr0[j]+=1
  if(T0[i]<=I0[0]):
    Fr0[0]+=1
  if(T0[i]>=I0[l_T]):
    Fr0[l_T+1]+=1
print("\nn0_i", Fr0)
```

Абсолютные частоты:

```
n0_i [1, 9, 12, 34, 42, 26, 12, 3, 1, 1]
```

Считаем вероятности:

$$p0 = \Phi(\frac{I_0 - \overline{T_0}}{\sigma})$$

$$p1 = \Phi(\frac{I_1 - \overline{T_0}}{\sigma}) - \Phi(\frac{I_0 - \overline{T_0}}{\sigma})$$

$$p_i = \Phi(\frac{I_i - \overline{T_0}}{\sigma}) - \Phi(\frac{I_{i-1} - \overline{T_0}}{\sigma}), i = \overline{1, l\_T}$$

$$p_{l\_T+1} = 1 - \Phi(\frac{I_{l\_T} - \overline{T_0}}{\sigma})$$

```
p0=[]
for i in range(l_T+2):
  p0.append(0)
p0[0]=round(norm.cdf(float(I0[0]-T0_avg)/ math.sqrt(S0)) ,4)
p0[l_T+1]=round(1-norm.cdf(float(I0[l_T]-T0_avg)/ math.sqrt(S0)),4)
for i in range(1, l_T+1):
  p0[i]=round(norm.cdf(float(I0[i]-T0_avg)/ math.sqrt(S0))-norm.cdf(float(I0[i-1]-T0_avg)/ math.sqrt(S0)),4)
print("\np0_i", p0)
```

```
p0_i= [0.0102, 0.043, 0.1282, 0.2372, 0.2726, 0.1945, 0.0862, 0.0237, 0.004, 0.0005]
```

Считаем произведение Mp0:

```
Mp0=[]
for i in range(l_T+2):
  Mp0.append(0)
  Mp0[i]=round(M*p0[i],4)
```

```
Mp0= [1.428, 6.02, 17.948, 33.208, 38.164, 27.23, 12.068, 3.318, 0.56, 0.07]
```

$$\chi^2_{emp} = \frac{\sum_i (n_i - Mp_i)^2}{n_i}$$

n_i	1	9	12	34	42	26	12	3	1	1
p_i	0.0102	0.043	0.1282	0.2372	0.2726	0.1945	0.0862	0.0237	0.004	0.0005
Mp_i	1.428	6.02	17.948	33.208	38.164	27.23	12.068	3.318	0.56	0.07

Количество интервалов m=6. Количество степеней свободы m-1-1=4 для расчета теоретического критерия хи-квадрат χ^2_{th}

```
chi_square_emp=0
for i in range(l_T+1):
  chi_square_emp+=float(Fr0[i]-Mp0[i])**2/Mp0[i]
print("\nchi0 emp=", round(chi_square_emp,4))
print("\nchi_t=", chi.ppf(0.95, 4))
```

```
chi0 emp= 4.4112

chi_t= 3.080215745168048
```

Критерии близки- гипотеза о нормальном распределении T0 принимается.

Аналогичным образом считаем данные для сечений T1, T2, T3:

для T1:

```
n1_i [1, 0, 3, 18, 86, 21, 10, 0, 1, 1]

p1_i [0.0, 0.002, 0.0353, 0.2059, 0.4085, 0.2782, 0.0648, 0.0051, 0.0001, 0.0]
Mp [0.0, 0.28, 4.942, 28.826, 57.19, 38.948, 9.072, 0.714, 0.014, 0.0]
chi0 emp= 28.702
chi_t= 2.7954834829151074
```

Критерии существенно различаются- гипотеза о нормальном распределении T1 отклоняется

для T2:

```
n2_i [1, 0, 3, 18, 86, 21, 10, 0, 1, 1]

p2_i [0.0196, 0.1021, 0.2714, 0.3405, 0.202, 0.0565, 0.0074, 0.0005, 0.0, 0.0]
Mp [2.744, 14.294, 37.996, 47.67, 28.28, 7.91, 1.036, 0.07, 0.0, 0.0]
chi0 emp= 20.1663
chi_t= 2.7954834829151074
```

Критерии существенно различаются- гипотеза о нормальном распределении T2 отклоняется

```
n3_i [1, 2, 3, 27, 84, 14, 7, 0, 2, 1]

p3_i [0.0004, 0.0082, 0.073, 0.2609, 0.3775, 0.2219, 0.0528, 0.005, 0.0002, 0.0]
Mp [0.056, 1.148, 10.22, 36.526, 52.85, 31.066, 7.392, 0.7]
chi0 emp= 52.5863
chi_t= 2.7954834829151074
```

Критерии существенно различаются- гипотеза о нормальном распределении T3 отклоняется