МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ ФН
КАФЕДРА «ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Дисциплина: Теория случайных процессов

Отчет по выполнению домашнего задания №2.2
” Моделирование двумерного винеровского процесса”

*Группа: ФН11-62Б*
Вариант 6

Студент: Ладыгина Л.В.
Преподаватель: Облакова Т.В

*Москва, 2022*

## Задание

1. На интервале $[0, T]$ смоделируйте $n$ траекторий двумерного винеровского процесса интенсивности $\sigma$ с шагом $h$.
2. Выведите на печать 5-7 траекторий (мультимедийность приветствуется)
3. Для каждой траектории вычислите

1) вариации компонент $\left(\sum_k \left|W_{(k+1)h}^{(1)} - W_{kh}^{(1)}\right|, \sum_k \left|W_{(k+1)h}^{(2)} - W_{kh}^{(2)}\right|\right)$

   Найдите среднее значение вариации $\left(Var^{(1)}(h), Var^{(2)}(h)\right)$ по всем траекториям

2) суммы квадратов приращений компонент $\left(\sum_k \left|W_{(k+1)h}^{(1)} - W_{kh}^{(1)}\right|^2, \sum_k \left|W_{(k+1)h}^{(2)} - W_{kh}^{(2)}\right|^2\right)$

   Найдите среднее значение этих сумм $\left(SqVar^{(1)}(h), SqVar^{(2)}(h)\right)$

4. Уменьшите значение $h$ в два раза и вычислите $\left(Var^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right), Var^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$ и $\left(SqVar^{(1)}\left(\frac{h}{2}\right), SqVar^{(2)}\left(\frac{h}{2}\right)\right)$. Сравните полученные значения для исходного и уменьшенного шага и объясните результат.

**Замечание**. Для более качественного изучения свойств винеровского процесса надо изначально смоделировать $2N$ пар $\left(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}\right)$ с независимыми компонентами, распределенными по закону $N\left(0, \sigma\sqrt{\frac{h}{2}}\right)$. Тогда при моделирования винеровского процесса с шагом $h$ используем попарные суммы $\left(\xi_{2k-1}^{(1)} + \xi_{2k}^{(1)}, \xi_{2k-1}^{(2)} + \xi_{2k}^{(2)}\right)$, компоненты которых по свойствам нормального закона распределены по закону $N(0, \sigma\sqrt{h})$.

5. Вычислите теоретическую вероятность $P\left(\left|\overline{W}_T\right| \geq z\right)$ и сравните ее с эмпирической вероятностью достижения указанного уровня $z$ в момент $T$.

| Вар | $T$ | $n$ | $\sigma$ | $h$ | $z$ | Вар | $T$ | $n$ | $\sigma$ | $h$ | $z$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 5 | 180 | 0.75 | 0.02 | 2 | 17 | 12 | 140 | 0.6 | 0.08 | 4 |

```
T = 5
n = 180
sigma = 0.75
h = 0.02
z = 2
```

```
N = int(T/h)
#N=250
```

Пусть необходимо найти значения двумерного винеровского процесса $\overline{W}_t = \left(W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right)$ интенсивности $\sigma$ в точках вида $t_k = k \cdot h$, причем $t_0 = 0, t_N = T$.

1) Полагаем $\overline{W}_0 = (0{,}0)$
2) Для каждого $k$ моделируем пару $\left(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}\right)$ независимых нормально распределенных случайных величин с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями $\sigma^2 \cdot h$
3) Вычисляем $\left(W_{(k+1)h}^{(1)}, W_{(k+1)h}^{(2)}\right) = \left(W_{kh}^{(1)}, W_{kh}^{(2)}\right) + \left(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)}\right)$
4) Результат – последовательность точек $\left(W_{kh}^{(1)}, W_{kh}^{(2)}\right)$. Соединив эти точки для наглядности отрезками прямых, получим смоделированную траекторию.

1. Моделируем $2N$ пар $(\xi_k^{(1)}, \xi_k^{(2)})$ с независимыми компонентами, распределенными по закону $N$ $(0, \sigma\sqrt{\frac{h}{2}})$. Тогда при моделирования винеровского процесса с шагом $h$ используем попарные суммы $(\xi_{2k-1}^{(1)} + \xi_{2k}^{(1)}, \xi_{2k-1}^{(2)} + \xi_{2k}^{(2)})$, компоненты которых по свойствам нормального закона распределены по закону $N(0, \sigma\sqrt{h})$.

Векторы $\xi_{2k}^{(1)}$ и $\xi_{2k}^{(2)}$:

```
Xi = np.zeros((n, 2*N + 1, 2))
for i in range(0, n):
    for j in range(0, 2*N + 1):
        Xi[i][j][0] = sps.norm(0, sigma * np.sqrt(h/2)).rvs(size = 1)
        Xi[i][j][1] = sps.norm(0, sigma * np.sqrt(h/2)).rvs(size = 1)
```

Вектор Xi[i][j][0]:

```
-0.03030995299232452
-0.11636596813599766
-0.0232877922803923
-0.027274734714278742
0.09065624525371031
0.027047920796125696
-0.06272573113564106
-0.02636488430292922
-0.1681825110899047
0.07557779820023616
0.02527750249749181
-0.05828680272189722
```

…

Вектор Xi[i][j][1]:

```
0.06609677004093087
-0.03670236613700757
-0.044550808448288653
-0.0457759146726047
-0.0228167478099167
-0.03934258242719358
0.04234719530881779
0.13444697526276167
0.03260472922507754
0.004580896131341322
-0.029451149693912347
-0.05311378488624448
0.05346702937047315
```

…

Траектории двумерного Винеровского процесса W1  с шагом $h$

```
W1 = np.zeros((n, N + 1, 2))
for i in range(0, n):
    for j in range(1, N+1):
        W1[i][j][0] = W1[i][j - 1][0] + Xi[i][2*j - 2][0] + Xi[i][2*j - 1][0]
        W1[i][j][1] = W1[i][j - 1][1] + Xi[i][2*j - 2][1] + Xi[i][2*j - 1][1]

        print(W1[i][j][0], W1[i][j][1])
```

W1[i][j][0] ,

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | -0.005 | -0.0777 | 0.139 | 0.2831 |
| 0.0 | -0.1351 | -0.1692 | -0.0632 | -0.1219 |
| 0.0 | -0.0472 | -0.1467 | -0.0471 | -0.08 |
| 0.0 | -0.1822 | -0.1622 | -0.0722 | 0.06 |
| 0.0 | -0.0725 | -0.1374 | -0.1045 | -0.2344 |
| 0.0 | 0.0108 | 0.0786 | 0.121 | 0.035 |
| 0.0 | -0.0133 | 0.0893 | 0.1164 | -0.0013 |
| 0.0 | 0.0228 | 0.0855 | 0.2041 | 0.2621 |
| 0.0 | 0.0424 | 0.0914 | -0.0165 | -0.3212 |
| 0.0 | -0.0472 | -0.0206 | -0.0337 | -0.0126 |
| 0.0 | -0.092 | 0.0483 | 0.0899 | -0.0305 |
| 0.0 | 0.0604 | -0.0196 | 0.0843 | -0.0772 |
| 0.0 | 0.1542 | 0.2091 | -0.026 | -0.0082 |
| 0.0 | -0.0296 | 0.064 | 0.0002 | 0.0795 |
| 0.0 | 0.1028 | 0.0267 | -0.0102 | -0.1074 |
| 0.0 | 0.0778 | 0.0045 | 0.0749 | -0.1132 |
| 0.0 | 0.1683 | 0.1123 | 0.1794 | 0.111 |
| 0.0 | 0.0345 | 0.026 | 0.12 | 0.0372 |
| 0.0 | 0.1765 | 0.2958 | 0.4205 | 0.3668 |
| 0.0 | 0.1484 | 0.0565 | 0.028 | 0.1059 |

…

W1[i][j][1]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.1236 | 0.0283 | 0.0478 | 0.1061 |
| 0.0 | 0.0062 | 0.0314 | -0.0593 | -0.0857 |
| 0.0 | 0.1183 | 0.1943 | 0.1227 | 0.204 |
| 0.0 | 0.0809 | 0.0159 | -0.085 | -0.0005 |
| 0.0 | -0.1049 | -0.139 | -0.1689 | -0.2345 |
| 0.0 | -0.0601 | -0.1005 | 0.0009 | 0.0906 |
| 0.0 | 0.1159 | -0.0585 | -0.0707 | 0.0022 |
| 0.0 | 0.0483 | 0.0815 | 0.2834 | 0.2675 |
| 0.0 | -0.0103 | -0.0407 | 0.0861 | 0.0809 |
| 0.0 | -0.0017 | -0.0404 | -0.192 | -0.0749 |
| 0.0 | 0.0381 | -0.0052 | 0.0768 | 0.0784 |
| 0.0 | 0.0449 | -0.121 | -0.2336 | -0.1333 |
| 0.0 | 0.085 | 0.0141 | 0.0609 | 0.0198 |
| 0.0 | 0.2078 | 0.1123 | 0.1827 | 0.266 |
| 0.0 | -0.2251 | -0.3316 | -0.2054 | -0.3365 |
| 0.0 | 0.1289 | 0.0799 | -0.0336 | -0.1617 |
| 0.0 | -0.2333 | -0.1119 | -0.0104 | 0.1749 |
| 0.0 | 0.221 | 0.2796 | 0.3706 | 0.4834 |
| 0.0 | -0.0181 | 0.0408 | -0.0548 | -0.1415 |
| 0.0 | -0.0484 | -0.0304 | -0.1792 | -0.1148 |

…

Траектории двумерного Винеровского процесса W2 с шагом $\hbar/2$ :

W2[i][j][0]

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | -0.062 | -0.005 | 0.0647 | -0.0777 |
| 0.0 | -0.0794 | -0.1351 | -0.1362 | -0.1692 |
| 0.0 | -0.0011 | -0.0472 | -0.1414 | -0.1467 |
| 0.0 | -0.0792 | -0.1822 | -0.2233 | -0.1622 |
| 0.0 | -0.0408 | -0.0725 | -0.1555 | -0.1374 |
| 0.0 | 0.0287 | 0.0108 | 0.0703 | 0.0786 |
| 0.0 | -0.0535 | -0.0133 | 0.0639 | 0.0893 |
| 0.0 | -0.0484 | 0.0228 | 0.0523 | 0.0855 |
| 0.0 | 0.0394 | 0.0424 | 0.0434 | 0.0914 |
| 0.0 | 0.0718 | -0.0472 | -0.0341 | -0.0206 |
| 0.0 | 0.0159 | -0.092 | 0.03 | 0.0483 |
| 0.0 | -0.0506 | 0.0604 | 0.0929 | -0.0196 |
| 0.0 | 0.0517 | 0.1542 | 0.2353 | 0.2091 |
| 0.0 | 0.0179 | -0.0296 | -0.0013 | 0.064 |
| 0.0 | 0.0584 | 0.1028 | 0.0562 | 0.0267 |
| 0.0 | 0.0632 | 0.0778 | 0.0186 | 0.0045 |
| 0.0 | 0.0461 | 0.1683 | 0.2097 | 0.1123 |
| 0.0 | -0.1189 | 0.0345 | 0.121 | 0.026 |
| 0.0 | 0.2007 | 0.1765 | 0.2176 | 0.2958 |
| 0.0 | 0.0587 | 0.1484 | 0.1713 | 0.0565 |

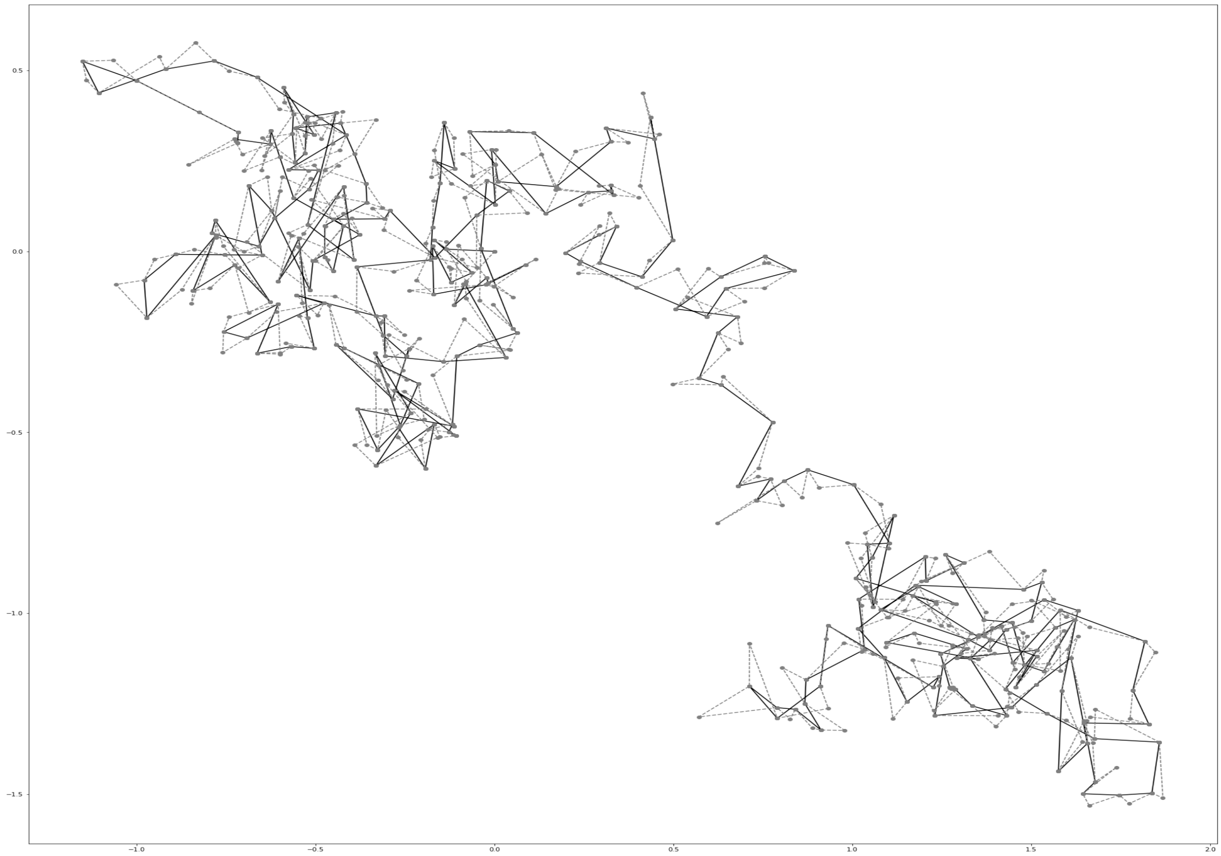
W2[i][j][1]:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 0.0 | 0.0681 | 0.1236 | 0.0385 | 0.0283 |
| 0.0 | -0.0832 | 0.0062 | 0.0263 | 0.0314 |
| 0.0 | 0.1645 | 0.1183 | 0.2114 | 0.1943 |
| 0.0 | 0.0968 | 0.0809 | 0.1204 | 0.0159 |
| 0.0 | -0.147 | -0.1049 | -0.0953 | -0.139 |
| 0.0 | -0.0259 | -0.0601 | -0.0264 | -0.1005 |
| 0.0 | 0.0519 | 0.1159 | 0.0371 | -0.0585 |
| 0.0 | -0.0046 | 0.0483 | 0.0267 | 0.0815 |
| 0.0 | -0.0727 | -0.0103 | 0.0149 | -0.0407 |
| 0.0 | 0.0409 | -0.0017 | -0.0362 | -0.0404 |
| 0.0 | -0.0922 | 0.0381 | 0.0152 | -0.0052 |
| 0.0 | -0.0137 | 0.0449 | 0.0253 | -0.121 |
| 0.0 | 0.0524 | 0.085 | 0.0526 | 0.0141 |
| 0.0 | 0.1384 | 0.2078 | 0.1522 | 0.1123 |
| 0.0 | -0.0984 | -0.2251 | -0.2905 | -0.3316 |
| 0.0 | 0.085 | 0.1289 | 0.1461 | 0.0799 |
| 0.0 | -0.0347 | -0.2333 | -0.1641 | -0.1119 |
| 0.0 | 0.0809 | 0.221 | 0.1873 | 0.2796 |
| 0.0 | 0.0138 | -0.0181 | 0.0712 | 0.0408 |
| 0.0 | -0.0414 | -0.0484 | 0.0301 | -0.0304 |

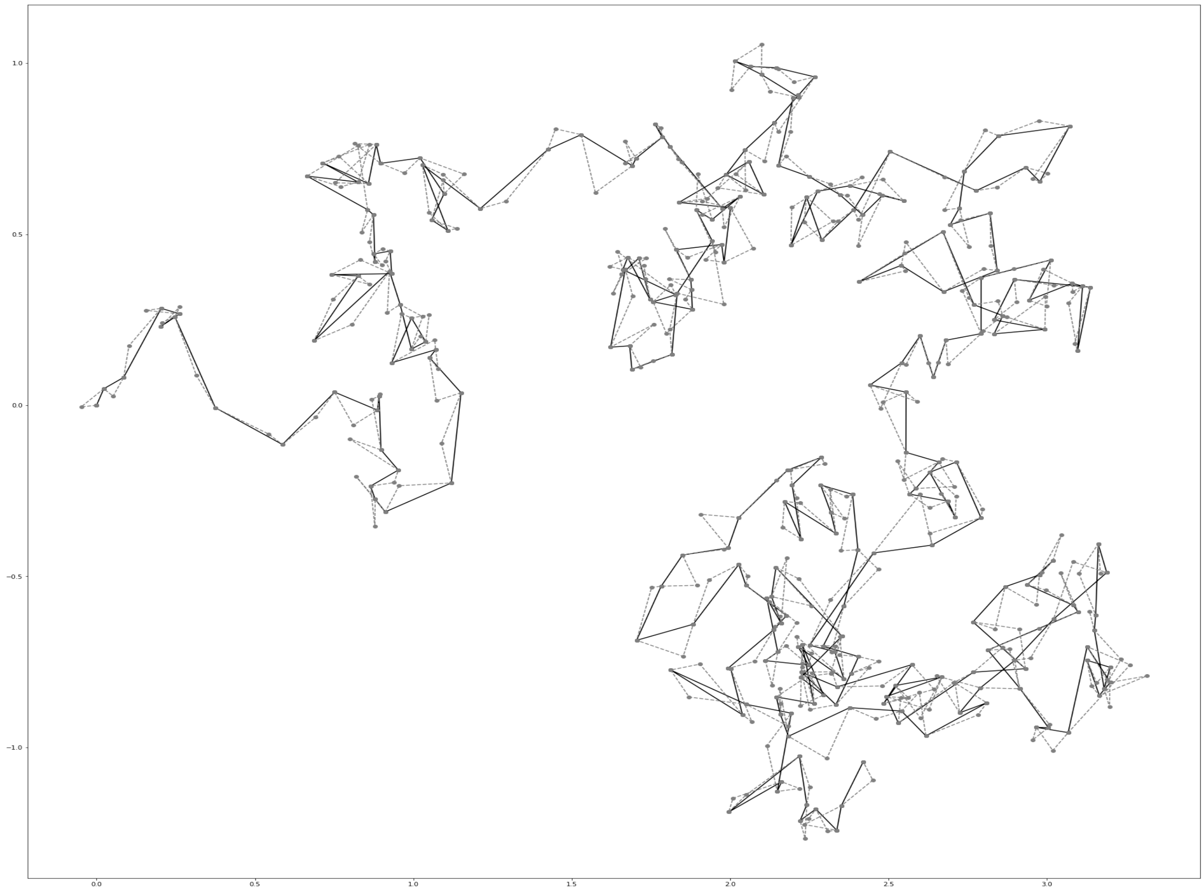
Выводим на печать некоторые совмещенные траектории W1,W2(1,7,10, 49, 73,112)

```
trajectory = np.array([1, 7, 10, 49, 73, 112])
```

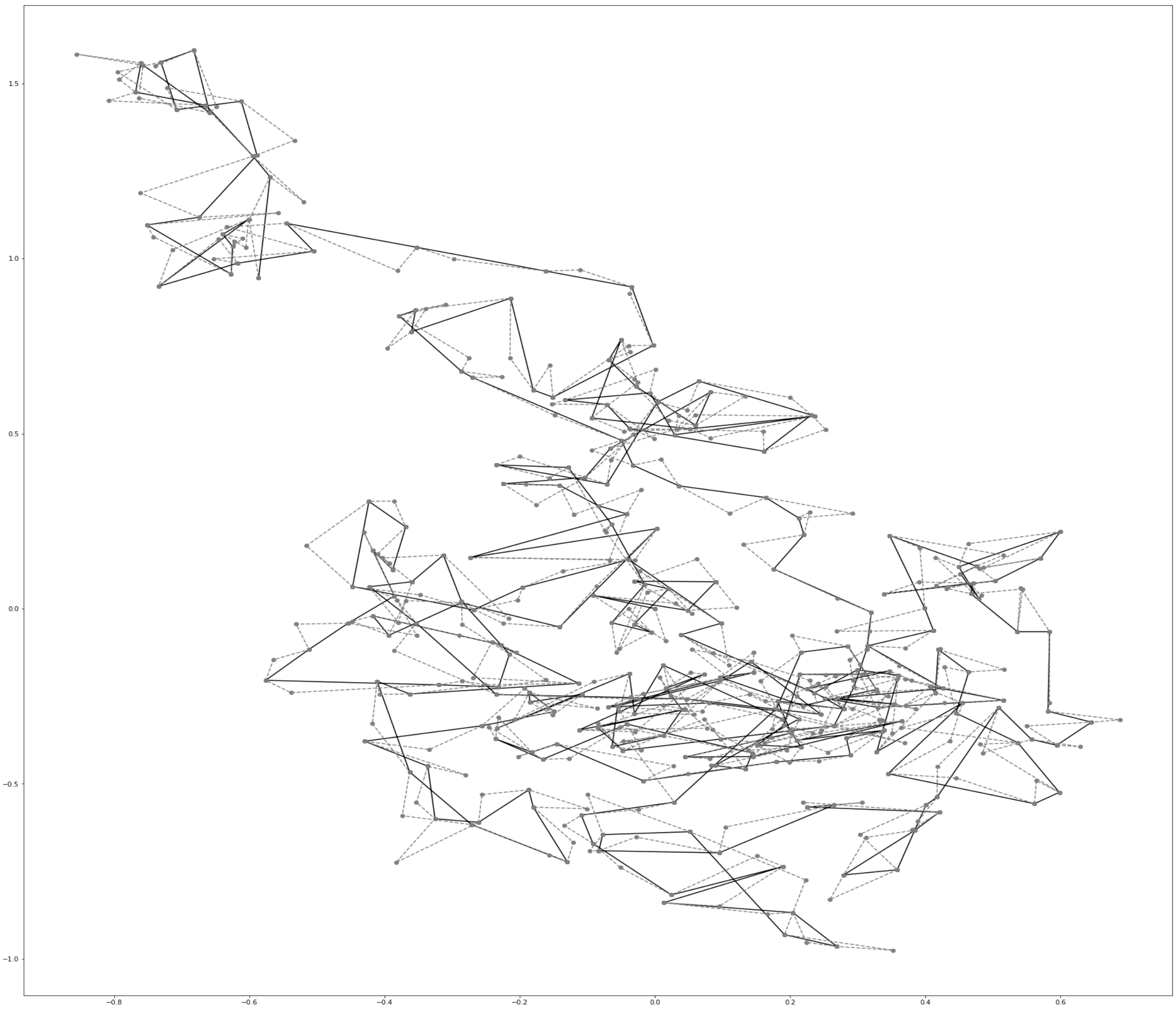
```
for i in range(0,6):
    fig, ax = plt.subplots(figsize = (30,30))
    ax.plot(W1[trajectory[i], :, 0], W1[trajectory[i], :, 1], color = 'black', marker = 'o' )
    ax.plot(W2[trajectory[i], :, 0], W2[trajectory[i], :, 1], color = 'grey', marker = 'o', linestyle = '--')
    fig.savefig('./Model' + str(trajectory[i]) + '.png')
```



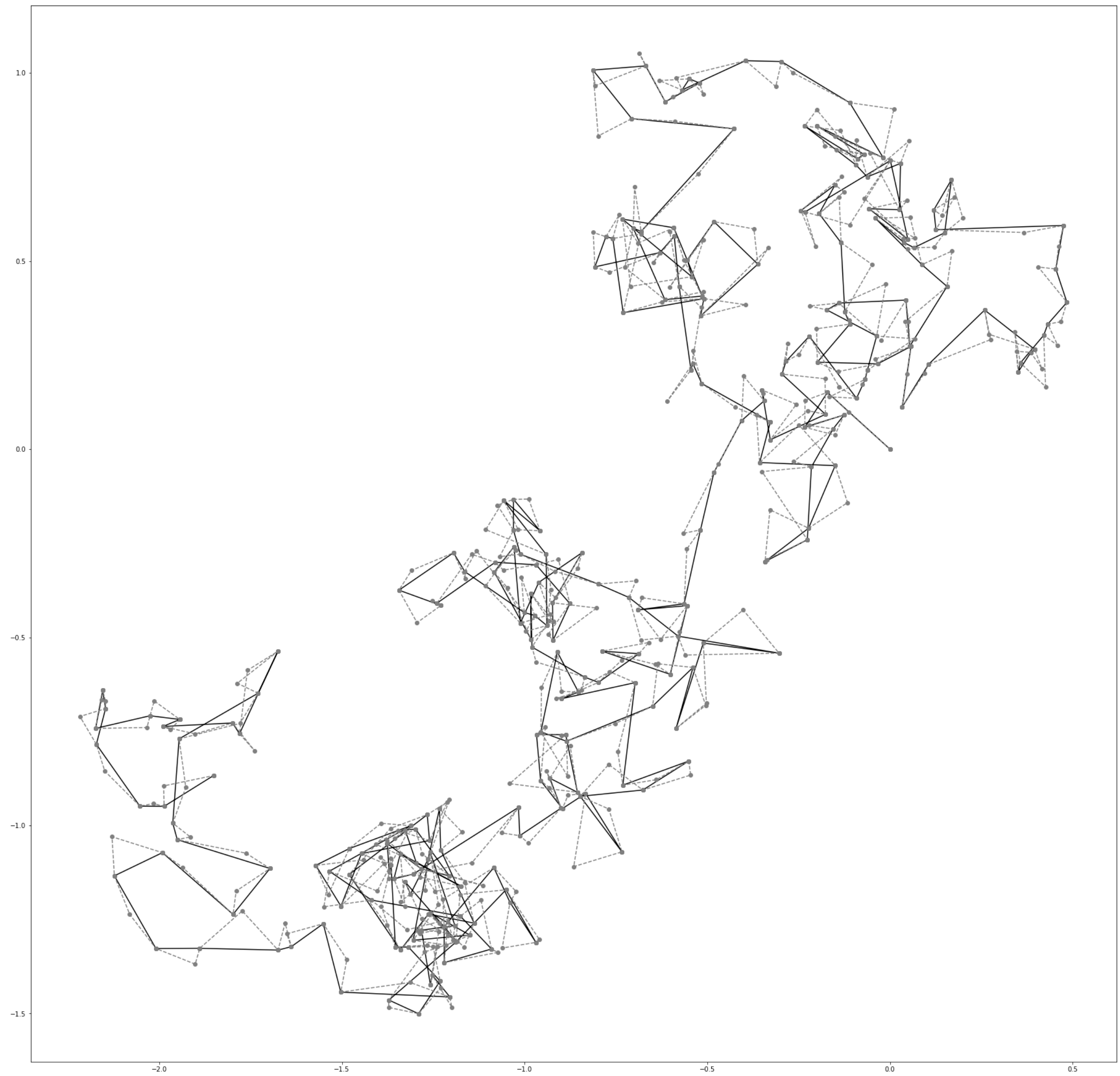

траектория 1




траектория 7

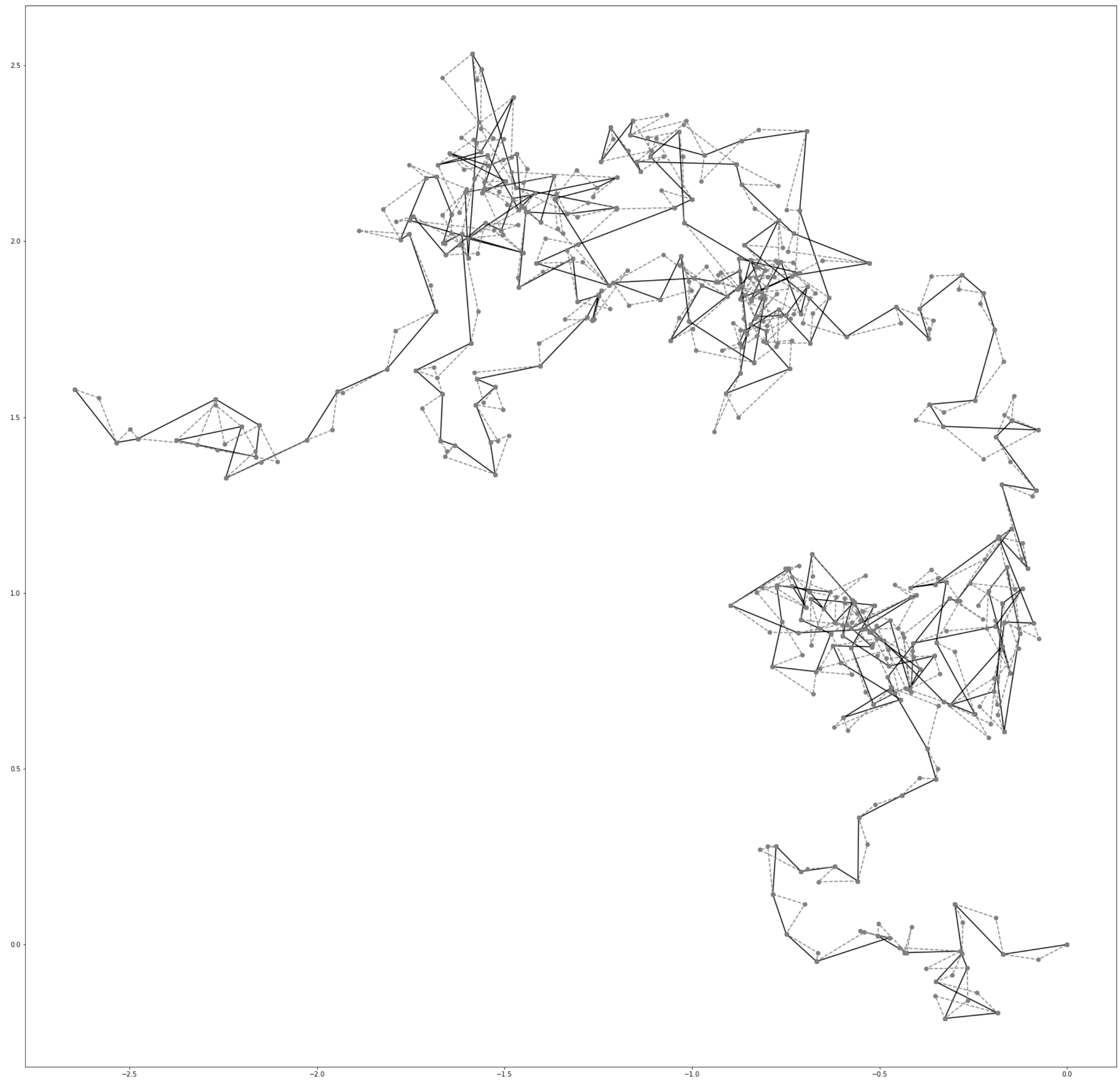



траектория 10




траектория 49


траектория 73




траектория 112

3. Вычислим среднее значение вариации компонент и среднее значение суммы квадратов приращений по всем траекториям для модели с шагом $\hbar$ и $\hbar/2$

среднее значение вариации компонент и среднее значение суммы квадратов приращений вектора W1:

```
sum_w1_0 = 0
sum_w1_1 = 0
sqSum_w1_0 = 0
sqSum_w1_1 = 0

for i in range(0, n):
    for j in range(1, N+1):
        sum_w1_0 += abs(W1[i, j, 0] -  W1[i, j-1, 0])
        sum_w1_1 += abs(W1[i, j, 1] -  W1[i, j-1, 1])
        sqSum_w1_0 += (W1[i, j, 0] -  W1[i, j-1, 0]) ** 2
        sqSum_w1_1 += (W1[i, j, 1] -  W1[i, j-1, 1]) ** 2
Var_w1_0 = sum_w1_0/n
Var_w1_1 = sum_w1_1/n
SqVar_w1_0 = sqSum_w1_0/n
SqVar_w1_1 = sqSum_w1_1/n
```

среднее значение вариации компонент и среднее значение суммы квадратов приращений вектора W2:

```
sum_w2_0 = 0
sum_w2_1 = 0
sqSum_w2_0 = 0
sqSum_w2_1 = 0

for i in range(0, n):
    for j in range(1, 2*N+1):
        sum_w2_0 += abs(W2[i, j, 0] -  W2[i, j-1, 0])
        sum_w2_1 += abs(W2[i, j, 1] -  W2[i, j-1, 1])
        sqSum_w2_0 += (W2[i, j, 0] -  W2[i, j-1, 0]) ** 2
        sqSum_w2_1 += (W2[i, j, 1] -  W2[i, j-1, 1]) ** 2
Var_w2_0 = sum_w2_0/n
Var_w2_1 = sum_w2_1/n
SqVar_w2_0 = sqSum_w2_0/n
SqVar_w2_1 = sqSum_w2_1/n
```

Полученные значения:

```
Var_w1_0= 21.10983295942434 SqVar_w1_0= 2.806701499451129

Var_w1_1= 21.243421035390174 SqVar_w1_1= 2.8298040984596007

Var_w2_0= 29.86376932137231 SqVar_w2_0= 2.799039369508044

Var_w2_1= 29.9421577098412 SqVar_w2_1= 2.8245126390457242
```

Посчитаем $\sigma^2 T$ = 2.8125

Вычислим эмпирическую вероятность достижения уровня $z$ в момент времени T. Для этого рассчитываем вероятность как среднее от суммы индикаторов :

$$P = \frac{\sum I(|\overline{W}_T| \geq z)}{n}$$

```python
amount_z = 0
for i in range(0, n):
    if np.linalg.norm(W1[i, N, :]) >= z:
        amount_z += 1
amount_z /= n
print(amount_z)
```

```
0.5166666666666667
```

$P_{emp} = 0.5167$

Вычислим теоретическую вероятность достижения уровня z в момент времени T, используя $\chi^2 -$ распределение:

$$P(|\overline{W}_T| \geq z) = 1 - F_{\chi^2(2)}\left(\frac{z^2}{\sigma^2 T}\right)$$

```
amount_z_T = 1 - sps.chi2(2).cdf((z * z)/(sigma * sigma * T))
print(amount_z_T)
```

```
0.4910982295021551
```

$P_{th} = 0.4911$

Выводы: По результатам, изложенным в 3-ем пункте, видим, что:

$$\begin{matrix} \sum_k \left| W^{(1)}_{(k+1)\frac{h}{2}} - W^{(1)}_{k\frac{h}{2}} \right|^2 \\ \sum_k \left| W^{(2)}_{(k+1)\frac{h}{2}} - W^{(2)}_{k\frac{h}{2}} \right|^2 \end{matrix} \xrightarrow{h\to 0} \begin{pmatrix} \sigma^2 T \\ \sigma^2 T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.8125 \\ 2.8125 \end{pmatrix}$$

Также получаем, что среднее значение вариации компонент для $\hbar/2$ больше приблизительно в $\sqrt{2}$, чем для $\hbar$. Полученные результаты согласуются с теорией, где сумма квадратов приращений стремится в среднеквадратичном к $\sigma^2 T$Вычисленные эмпирические и теоретические вероятности достижения уровня $z$ в момент $T$ оказались близки, т.к $\Delta P = |P_{emp} - P_{th}|$ =0.0256