1 Euler-Winkel

Jede 3D-Rotation lässt sich durch die chronologische Ausführung dreier Basisrotationen um die jeweiligen Achsen darstellen. Somit bieten die Euler-Winkel eine intuitive Methode zur Rotation im dreidimensionalen Raum.

Das wesentliche Problem besteht im *Gimbal Lock*. Dieser entsteht, wenn ein Körper so rotiert wird, dass zwei Rotationsachsen übereinanderliegen, etwa wenn der Körper vom Ursprung aus an einer Achse um 90° rotiert wird. In diesem Zustand beschreibt die Rotation der beiden übereinanderliegenden Achsen dieselbe Bewegung, was zur Folge hat, dass ein Freiheitsgrad verlorengeht und somit nicht mehr jede Rotation durch eine Aneinanderreihung dreier Basisrotationen beschrieben werden kann.

2 Quaternionen

Wir wissen aus der Vorlesung, dass der um den Winkel θ um die Achse $\vec{n}$ rotierte Punkt $p = (0, \vec{p})$ mit dem Quaternion $r = (cos(\frac{\theta}{2}), sin(\frac{\theta}{2})\vec{n})$ bestimmt werden kann. Die Formel dazu entnehmen wir der Folie 27 aus der Vorlesung zu den Transformationen:

$p' = qpq^{-1} = cos(\theta)\vec{p} + (1 - cos(\theta))\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) + sin(\theta)(\vec{n} \times \vec{p})$.

Wir haben nun $q = (cos(\frac{\pi}{6}), sin(\frac{\pi}{6}) \begin{pmatrix} sin(\frac{\pi}{6}) \\ cos(\frac{\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix})$ und $p = (0, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix})$ in Quaternionenschreibweise. Somit sieht die Rechnung folgendermassen aus:

$$p' = qpq^{-1} = cos(\tfrac{\pi}{6})\vec{p} + (1 - cos(\tfrac{\pi}{6})\vec{n}(\vec{p} \cdot \vec{n}) + sin(\tfrac{\pi}{6})(\vec{n} \times \vec{p}) = cos(\tfrac{\pi}{6}) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + (1 - cos(\tfrac{\pi}{6}))sin(\tfrac{\pi}{6}) \begin{pmatrix} sin(\frac{\pi}{6}) \\ cos(\frac{\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} sin^2(\frac{\pi}{6}) \\ 3sin(\frac{\pi}{6})cos(\frac{\pi}{6}) \\ 0 \end{pmatrix} + sin(\tfrac{\pi}{6}) \begin{pmatrix} 4sin(\frac{\pi}{6})cos(\frac{\pi}{6}) \\ -4sin^2(\frac{\pi}{6}) \\ 3sin(\frac{\pi}{6}) - cos(\frac{\pi}{6}) \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt, dass der rotierte Punkt mit dem ursprünglichen identisch ist.