Univ.-Prof. Dr. Michael Bitz

Investition und Finanzierung

Investition

Kurseinheit: 3
Entscheidungen unter Unsicherheit:
Modelltheoretische Grundlagen

wirtschafts
wissenschaft

FernUniversität in Hagen

Kurs 40520: Investition

Kurseinheit 1:	Grundlagen der Investitionstheorie (Workload: 40 Stunden)*
Kurseinheit 2:	Investitionsentscheidungen bei Sicherheit (Workload: 70 Stunden)*
Kurseinheit 3:	**Entscheidungen unter Unsicherheit: Modelltheoretische Grundlagen (Workload: 20 Stunden)***
Kurseinheit 4:	Entscheidungen in Risikosituationen (Workload: 20 Stunden)*
Kurseinheit 5:	Entscheidungen bei Ungewissheit und spieltheoretische Ansätze (Workload: 0 Stunden)**
*:	Die zum Modul angebotene Einsendearbeit bezieht sich inhaltlich auf die Kurseinheiten 1, 2, 3 und 4.
**:	Die Kurseinheit 5 ist nicht prüfungsrelevant.

Zusätzliche Informationen im Internet

Weitere und u.U. auch aktuellere Informationen über den Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Investitionstheorie und Unternehmensbewertung und das A-Modul (31021) „Investition und Finanzierung“ sind über das Internet unter

http://www.fernuni-hagen.de/hering

abrufbar. Dort finden Sie u.a. Informationen zum Lehrangebot, ein umfassendes Schriftenverzeichnis, alte Klausuren und Einsendearbeiten zum Herunterladen, Hinweise auf kursbezogene Betreuungen und vieles mehr. Nutzen Sie diese Angebote und Ihr Studium wird nicht nur interessanter, sondern auch in vielerlei Hinsicht inhaltsreicher und erfolgreicher!

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis

Symbolverzeichnis

a_i	Handlungsalternative i
e_{ij}	Ergebniswert der Handlungsalternative i im Umweltzustand j
$\hat{e}_{ij}$	modifizierter Ergebniswert der Handlungsalternative i im Umweltzustand j auf der Basis der Bedauernsmatrix beim SAVAGE-NIEHANS-Kriterium
e_i^{max}	bestmöglicher Ergebniswert der Alternative i
e_i^{min}	schlechtestmöglicher Ergebniswert der Alternative i
E_i	Ergebnisverteilung einer Alternative i über sämtliche Umweltzustände
f	Fraktilswert, d.h. größter Ergebniswert, für den die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens erreicht wird, nicht unterhalb einer kritischen Wahrscheinlichkeit p^k liegt.
G(x)	Gewinn in Abhängigkeit von der Absatzmenge x
K(x)	Kosten in Abhängigkeit von der Absatzmenge x
$\min_j(e_{ij})$	minimaler (schlechtester) Ergebniswert der Alternative i
$\max_j(e_{ij})$	maximaler (bester) Ergebniswert der Alternative i
p_j	Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Umweltzustand j eintritt
$p(e_i = e)$	Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines bestimmten Ergebniswertes e bei der Alternative i
$p(e_i \$ e^*)$	Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei der Alternative i zumindest ein Ergebniswert in Höhe von e* erzielt wird
s_j	Umweltzustand j
U(x)	Umsatz in Abhängigkeit von der Absatzmenge x
v_i	Verlust- bzw. Ruinwahrscheinlichkeit bei der Alternative i

V_i	Verlusterwartung bei der Alternative i
x	Absatzmenge
x*	gewinnmaximale Absatzmenge
y	Kennzahl für Ergebnisverteilungen, subsidiäre Zielvariable
$y(E_i)$	Kennzahl für die Ergebnisverteilung der Alternative i
y_i^*	maximaler Wert der ersten Kennzahl
$y_h(E_i)$	mehrere (h) Kennzahlen für die Ergebnisverteilung der Alternative i
y^{fix}	subsidiäre Zielvariable mit einem bestimmten Anspruchsniveau (Fixierung)
$\varphi(a_i)$	Präferenzwert der Alternative i
$\varphi'(a_i)$	modifizierter Präferenzwert der Alternative i
ϕ	Präferenzfunktion
$\phi(y_1, \ldots, y_n)$	Amalgamationsfunktion zur „Verschmelzung“ mehrerer Kennzahlen y
μ_i	Erwartungswert der (Ergebnisverteilung der) Alternative i
σ_i	Standardabweichung der (Ergebnisverteilung der) Alternative i
σ_i^2	Varianz der (Ergebnisverteilung der) Alternative i

Allgemeine Literaturhinweise

Zu den in den Kurseinheiten 3 bis 5 dieses Kurses angesprochenen entscheidungstheoretischen Problemen existiert ein so umfangreiches Schrifttum, dass wir erst gar keinen Versuch unternehmen wollen, Ihnen eine auch nur einigermaßen repräsentative Teilauswahl einschlägiger Titel anzugeben. Vielmehr wollen wir Sie hier nur über die Werke informieren, auf die in den folgenden Kurseinheiten vorrangig als Begleitlektüre zurückgegriffen wird. Diese Bücher enthalten zum Teil umfangreiche Literaturverzeichnisse, mit deren Hilfe Sie leicht einen tieferen Einstieg in das einschlägige Schrifttum finden können.

Als allgemeine themenbezogene Lehrbuchlektüre wird vor allem auf zwei Werke verwiesen:[1)]

BAMBERG / COENENBERG / KRAPP (2012)

LAUX / GILLENKIRCH / SCHENK-MATHES (2014).

Außerdem wird häufiger auf folgende Monografien verwiesen:

BITZ (1977)[2)]

GÄFGEN (1974)

HAX (1974)

SCHNEEWEISS (1967).

Dort finden sich vertiefende Überlegungen zu einzelnen im Kursmaterial angesprochenen Fragestellungen.

Zur Einübung des behandelten Stoffes schließlich wird häufig auf das 4. Kapitel des Übungsbuches BITZ/EWERT (2014) verwiesen.

Außerdem finden Sie zu Beginn der Kurseinheiten 3 bis 5 jeweils vor den Lehrzielen weitere Hinweise auf einige ausgewählte Arbeiten, die uns zur Vertiefung und Ergänzung jeweils besonders geeignet erscheinen.

1 Die vollständigen bibliografischen Angaben zu den genannten Literaturbeiträgen können Sie dem Literaturverzeichnis in Kurseinheit 5 entnehmen.

2 Im Buchhandel nicht mehr erhältlich.

Spezielle Literaturhinweise

Zum vertiefenden Studium der im Abschnitt 2.1 dargelegten Grundprobleme unsicherheitsbedingter Entscheidungsprobleme wird auf folgende Literaturstellen verwiesen:

Bamberg / Coenenberg / Krapp (2012).

Bitz (1977), S. 13–20, 51–90.

Gäfgen (1974), S. 95–136, 199–217, 323–363.

Hax (1974), S. 36–46.

Laux / Gillenkirch / Schenk-Mathes (2014).

Zum vertiefenden Studium der im Abschnitt 2.2 behandelten Probleme wird verwiesen auf:

Bitz (1977), S. 262–282, 393–398.

Gäfgen (1974), S. 363–372.

Schneeweiss (1967), S. 25–42.

Zur Vertiefung der im Abschnitt 2.3 erörterten Probleme schließlich wird verwiesen auf:

Bitz (1977), S. 283–310.

Gäfgen (1974), S. 372–377.

Lehrziele

Nachdem Sie diesen Studienbrief durchgearbeitet haben, sollen Sie in der Lage sein, die grundlegenden Formalkategorien einer präskriptiven Theorie der Entscheidungen unter Unsicherheit zu erläutern und verschiedene Anwendungsbeispiele in diesen Kategorien darzustellen. Zugleich sollen Sie erklären können, welche Probleme mit der Abbildung einer komplexen realen Entscheidungssituation durch ein derartiges Formalmodell verbunden sind. Dazu sollen Sie im einzelnen

1. die konstituierenden Elemente einer jeden Entscheidungssituation bei unsicheren Erwartungen (Aktionsfeld, Umweltzustände, Ergebnisverteilungen)
   – inhaltlich erläutern können,
   – für konkrete Anwendungsfälle spezifizieren können,
   – und dabei erkennen und erklären können, welche Abstraktionsprobleme die Anwendung dieses Instrumentariums im konkreten Fall beinhaltet;

2. den Unterschied zwischen Spiel-, Ungewissheits- und Risikosituationen erläutern können und Wahrscheinlichkeitsangaben danach klassifizieren können, auf welche Arten von Wahrscheinlichkeiten sie sich gründen;

3. in der Lage sein, drei für Unsicherheitsprobleme spezifische Ausprägungen des Dominanzprinzips darzustellen und anzuwenden;

4. die grundlegenden Strukturelemente von Entscheidungsregeln für Unsicherheitsprobleme unterscheiden und erläutern können und dabei insbesondere
   – Extremierungs-, Satisfizierungs- und Fixierungs-Zielkonzepte sowie die lexikografische Auswahlregel unterscheiden und auf Beispielfälle anwenden können,
   – sowie erklären können, auf welche Weise sich auch Fixierungs-, Satisfizierungs- sowie „gemischte“ Konzepte formal als reines Extremierungskonzept darstellen lassen, und in der Lage sein, selbst entsprechende Umformungen vorzunehmen;

5. erläutern können, welche Möglichkeiten grundsätzlich bestehen, verschiedene Klassen von Kennzahlen zu bilden, durch die sich Verteilungen alternativ möglicher Handlungsergebnisse abkürzend beschreiben lassen;

6. in der Lage sein, die wichtigsten derartigen Kennzahlen

   – aufzuzählen und zu definieren,
   – für konkrete Beispielfälle zu berechnen,
   – sowie darzustellen, welche Sachverhalte die einzelnen Kennzahlen primär zum Ausdruck bringen.

1 Zur Einführung: Glasperlenspiele[1]

Auch in Kastalien, der Provinz des Glasperlenspiels, haben sich seit den Zeiten des MAGISTERS LUDI JOSEF KNECHT die Verhältnisse geändert. Als Zugeständnis an das touristische Zeitalter sehen Pauschalarrangements verschiedener kastalischer Reiseveranstalter die Teilnahme an einem vielfältigen „Glasperlenspiel für Besucher“ vor. Ein einmaliger Einsatz von 10 Dollar ist im Pauschalpreis inbegriffen; die Wahl des Spiels steht dem Besucher frei. So entschieden sich auch der REGENMACHER, der BEICHTVATER und der INDER, drei Mitglieder einer Reisegruppe, jeweils für ein anderes Spiel.[2]

Spiel des REGENMACHERS

In dem vom REGENMACHER besuchten Spielsaal galten folgende Regeln:

Durch geheimnisvolle Glasperlenläufe, die einem allen Fremden gänzlich unbekannten Zufallsmechanismus folgen, wird eine Zahl zwischen 1 und 4 bestimmt. Ihre 10 Dollar können die Touristen auf eins von vier Feldern mit folgenden Bezeichnungen und Bedeutungen setzen:

PARO: Gerade Zahl

PRIMO: Primzahl

TUTO: Jede Zahl

TRIOLO: Durch drei teilbare Zahl .

Je nachdem, welche der Zahlen zwischen 1 und 4 durch das Glasperlenspiel bestimmt wird, erhält der Spieler für seinen 10-Dollar-Einsatz folgende Beträge zurück (Angaben in Dollar):

Feld	1	2	3	4
PA	–	24	–	36
PR	20	20	20	–
TU	6	3	12	24
TR	–	–	66	–

Tab. 1: Ergebnismatrix beim Spiel des REGENMACHERS

1 Sie sollten die Einführung lesen, da die einzelnen dargestellten Spielsituationen Gegenstand der Kurseinheiten 4 und 5 sind und bereits ein roter Faden in – wie wir hoffen – anschaulicher Form aufgezeigt wird.

2 Die in diesem einleitenden Kapitel enthaltenen Anspielungen, insbesondere die auftretenden Personen, beziehen sich auf Hermann HESSES „Glasperlenspiel“, übrigens eine sehr lohnende und interessante Lektüre. Nur, vergessen Sie deshalb unsere Studienbriefe nicht völlig!

Spiel des BEICHTVATERS

Auch in dem vom BEICHTVATER besuchten Spielsaal bestanden die gleichen Setz- und Gewinnmöglichkeiten. Jedoch war hier das für die Ermittlung der Gewinnzahlen maßgebliche Glasperlenspiel bekannt:

Ein SERVUS LUDI entnimmt mit verbundenen Augen eine Glasperle aus einem Gefäß, das mit 10 gleichbeschaffenen, jedoch mit unterschiedlichen Ziffern bezeichneten Perlen gefüllt ist. Die Häufigkeiten, mit denen die einzelnen Ziffern jeweils auf den Perlen vermerkt sind, ergeben sich aus folgender Tabelle:

Ziffer	1	2	3	4
Anzahl von Perlen	2	3	1	4

Tab. 2: Ergebnismatrix beim Spiel des BEICHTVATERS

Spiel des INDERS

Das Spiel des INDERS konnte ebenfalls durch die in Tab. 1 dargestellten Gewinnmöglichkeiten charakterisiert werden. Jedoch wurde ihm das seltene Glück zuteil, gegen den MAGISTER LUDI persönlich nach folgenden Regeln antreten zu können:

Beide Spieler müssen sich gleichzeitig und jeweils ohne die Entscheidung des anderen zu kennen für jeweils eine von vier zur Auswahl stehenden Alternativen entscheiden. Dabei hat der MAGISTER LUDI die Wahl zwischen den Zahlen 1 bis 4, d.h. er bestimmt die Gewinnzahl. Der INDER hingegen muss sich wiederum für eine der oben angegebenen Setzmöglichkeiten entscheiden.

Auf welches Feld würden Sie in der Situation eines jeden der drei Reisenden setzen? Welche Zahl würden Sie als MAGISTER LUDI bestimmen?

Nachdem Sie – hoffentlich ohne umzublättern – überlegt haben, wie **Sie** an Stelle des REGENMACHERS, des BEICHTVATERS, des INDERS und des MAGISTER LUDI entschieden hätten, wollen wir nun unsere Glasperlengeschichte weiter verfolgen und sehen, welche Wahl die vier Spieler selbst getroffen haben.

Entscheidung des REGENMACHERS

Der REGENMACHER neigte dazu, sich über Fehlentscheidungen sehr zu ärgern. Da er sich dieser Schwäche wohl bewusst war, suchte er die Setzmöglichkeit, bei der der **maximal mögliche Ärger am geringsten** sein würde. Als Maßstab für den im nachhinein evtl. auftretenden Ärger diente ihm die Differenz zwischen

– dem von ihm tatsächlich erzielten Gewinn
– und dem bei der eingetroffenen Gewinnzahl maximal möglich gewesenen Gewinn.

Um die verschiedenen Setzmöglichkeiten unter diesem Aspekt zu untersuchen, stellte der REGENMACHER zunächst eine Tabelle auf, in der er für jede der möglichen Gewinnzahlen den maximal möglichen Gewinn notierte:

Gewinnzahl	1	2	3	4
Maximalgewinn	20	24	66	36

Tab. 3: Möglicher Maximalgewinn beim Spiel des REGENMACHERS

Anschließend erstellte er eine der in der Tab. 1 dargestellten „Gewinn"-Matrix entsprechende „Ärger"-Matrix, indem er für jede mögliche Gewinnzahl die bei den verschiedenen Setzmöglichkeiten erzielbaren Gewinne von den Maximalgewinnen gem. Tab. 3 abzog:

	1	2	3	4	max. Ärger
PA	20	–	66	–	66
PR	–	4	46	36	46
TU	14	21	54	12	54
TR	20	24	–	36	36

Tab. 4: Maximal möglicher „Ärger" beim Spiel des REGENMACHERS

Schließlich ermittelte er für jede Setzmöglichkeit den maximal möglichen Ärger (letzte Spalte in Tab. 4) und entschied sich dann – immer bedacht, etwaigen Ärger möglichst gering zu halten – für die Möglichkeit, bei der der maximal mögliche Ärger am geringsten war. Der REGENMACHER setzte seine 10 Dollar also auf TRIOLO.

Entscheidung des BEICHTVATERS

Den BEICHTVATER interessierte weniger, wie viel er gewinnen konnte; ihm ging es vielmehr vorrangig darum, überhaupt einen Gewinn zu erzielen. So errechnete er für jede Setzmöglichkeit die zugehörige Gewinnchance, indem er feststellte, wie groß die Zahl der Perlen war, die bei den einzelnen Setzalternativen jeweils zu einem über den Einsatz von 10 hinausgehenden Gewinn führten. Indem er diese Zahlen zu der Gesamtzahl von 10 Perlen in Relation setzte, ermittelte er folgende Gewinnwahrscheinlichkeiten:[1)]

1 Setzt der BEICHTVATER etwa auf Feld PA, so führen gemäß Tab. 1 die Ziffern 2 und 4 zu einem Gewinn. Die Anzahl von Kugeln, die eine dieser beiden Ziffern trägt, beläuft sich gemäß Tab. 2 auf 7, was einer Gewinnwahrscheinlichkeit von 70% entspricht. Die übrigen Werte können in entsprechender Weise errechnet werden.

Setzmöglichkeit	PA	PR	TU	TR
Gewinnwahrscheinlichkeit	70%	60%	50%	10%

Tab. 5: Gewinnwahrscheinlichkeiten beim Spiel des BEICHTVATERS

Der BEICHTVATER entschied sich sodann dafür, seine 10 Dollar auf das Feld mit der größten Gewinnwahrscheinlichkeit, also auf PARO zu setzen.

Entscheidung des INDERS

Die Situation des INDERS unterschied sich von der seiner Reisegefährten grundsätzlich dadurch, dass in seinem Fall die über Gewinn oder Verlust entscheidende Zahl nicht durch einen Zufallsmechanismus bestimmt wurde, sondern durch das berechnende Handeln eines Gegenspielers, der die Gewinn- und Verlustmöglichkeiten genau so gut kannte wie er selbst, und dem es darum ging, den Gewinn seines Gegners möglichst klein zu halten. Um die eigene Entscheidung zu treffen, musste der INDER also versuchen, das Verhalten seines Spielpartners vorauszusehen. Dazu untersuchte der INDER zunächst einmal die Fragen,

(1) welche Zahl der MAGISTER LUDI wohl bestimmen würde, wenn er – der INDER – seine Entscheidung erst anschließend, also in Kenntnis der vom MAGISTER LUDI festgesetzten Gewinnzahl zu treffen hätte,

(2) auf welches Feld er selbst setzen sollte, wenn – umgekehrt zu (1) – der MAGISTER LUDI die Gewinnzahl erst im Anschluss an die Entscheidung seines Gegenspielers, also in Kenntnis des besetzten Feldes zu bestimmen hätte.

ad (1) In diesem Fall müsste der MAGISTER LUDI damit rechnen, dass der INDER jeweils das Feld wählt, das bei der von ihm – dem MAGISTER – festgesetzten Zahl den höchsten Gewinn erbringt. Mithin würde sich der MAGISTER für die Zahl mit dem **minimalen Maximalgewinn** entscheiden. Das ist – wie aus den in Tab. 6 angegebenen Maximalgewinnen hervorgeht – offenbar die Zahl 1.

Zahl	1	2	3	4
Maximalgewinn	20	24	66	36

Tab. 6: Möglicher Maximalgewinn des INDERS beim Spiel des INDERS

Der Inder würde dann – wie von dem MAGISTER LUDI richtig vorausgesehen – auf PRIMO setzen.

ad (2) In dieser Situation müsste der INDER davon ausgehen, dass der MAGISTER, nachdem er wüsste, welches Feld besetzt ist, diejenige Zahl bestimmen würde, bei der sich für den INDER der kleinste Gewinn ergäbe. Mithin wäre es sinnvoll, auf das Feld zu setzen, dem der **maximale Minimalgewinn** entspricht. Das ist – wie aus den in Tab. 7 angegebenen Minimalgewinnen je Feld hervorgeht – TUTO. Der MAGISTER würde dann – wie vom INDER richtig vorhergesehen – die Zahl 2 wählen.

Feld	PA	PR	TU	TR
Minimalgewinn	0	0	3	0

Tab. 7: Möglicher Minimalgewinn des INDERS beim Spiel des INDERS

De facto war jedoch weder die unter (1) noch die unter (2) beschriebene Situation gegeben, da sich beide – der INDER und der MAGISTER LUDI – gleichzeitig festlegen mussten. Immerhin zeigten die vorstehenden Überlegungen dem INDER folgendes über die möglichen Verhaltensweisen seines Gegenübers:

– Wäre der MAGISTER LUDI primär daran interessiert, den maximal möglichen Gewinn seines Gegenspielers so klein wie möglich zu halten, so würde er – der MAGISTER – die 1 bestimmen. Für den INDER wäre dann PRIMO das beste Feld.

– Ginge der MAGISTER hingegen davon aus, sein Gegner wolle zumindest einen gewissen Minimalgewinn sichern und daher auf TUTO setzen, so würde er die 2 bestimmen. Für den INDER wäre es dann jedoch das beste – entgegen der Annahme des MAGISTER – auf PARO zu setzen, umso statt der vom MAGISTER einkalkulierten 3 Dollar (bei TUTO) immerhin 24 Dollar zu gewinnen.

All das verwirrte unseren INDER letztlich jedoch mehr, als es ihm weiterhalf. Daher entschloss er sich ohne weiteres Nachdenken dazu, auf das Feld zu setzen, das im günstigsten Fall den maximalen Gewinn versprach. Er setzte also – ebenso wie der REGENMACHER in seinem Spiel, jedoch aus anderen Gründen – auf TRIOLO.

Er verlor übrigens; denn der MAGISTER LUDI hatte die 4 bestimmt.

> „Gäste wie dieser lassen sich stets verleiten; das Naheliegende ist ihnen zu fern“,

war seine knappe Erklärung.

Komponenten von Entscheidungs-problemen

Mit den Glasperlenspielereien unserer drei Besucher Kastaliens haben Sie nun bereits die wesentlichen Komponenten und Typen unsicherheitsbedingter Entscheidungsprobleme kennengelernt:

– Untersucht werden stets Entscheidungssituationen, d.h. Situationen, in denen die Wahl zwischen mehreren einander ausschließenden **Handlungsalternativen** zu treffen ist.

– Zu welchem Ergebnis die einzelnen Alternativen führen, ist jedoch nicht mit Sicherheit absehbar. Vielmehr sind je nach der Entwicklung sonstiger **Einflussfaktoren** alternativ verschiedene Ergebnisse möglich.

– Dabei mögen diese ergebnisbeeinflussenden Faktoren entweder durch reine **Zufallsereignisse** bestimmt werden oder aus den Handlungen eines **Gegenspielers** oder einer sonstigen, ihre eigenen Zielvorstellungen verfolgenden Person resultieren.

– In allen Fällen besteht das Problem jedoch letztlich in der Frage, nach welchen Kriterien die im Hinblick auf Präferenzvorstellungen und Risikobereitschaft des Entscheidenden **optimale Alternative** bestimmt werden soll.

Außerdem haben Sie auch schon die für das entscheidungstheoretische Schrifttum charakteristische Eigenart kennengelernt, zur Erläuterung von Problemstellungen und zur Verdeutlichung von Lösungsansätzen immer wieder auf relativ einfache Glücksspiele zurückzugreifen. So wimmelt es in den einschlägigen Monographien und Lehrbüchern nur so von Lotterien, Roulettespielen, Münzwürfen, mit verschiedenfarbigen Kugeln gefüllten Gefäßen und ähnlichem.

In den folgenden Kapiteln, in denen es darum geht, die Grundkomponenten unsicherheitsbedingter Entscheidungsprobleme sowie die zu ihrer Lösung vorgeschlagenen Ansätze zu systematisieren und zu analysieren, werden wir nebenbei auch den Grund für diese Vorliebe für die Welt der Spielsäle kennenlernen.

Im einzelnen ist dieser Teil des Kurses, der sich mit entscheidungstheoretischen Grundüberlegungen und Entscheidungskonzepten beschäftigt, in folgender Weise aufgebaut:

– In der vorliegenden dritten Kurseinheit werden wir nach der Einführung durch unser Glasperlenspiel zunächst einige allgemeine entscheidungstheoretische Grundbegriffe erörtern und so gewissermaßen das Handwerkszeug für die Erarbeitung des nachfolgenden Stoffes bereitlegen.

– In Kurseinheit 4 werden dann verschiedene Entscheidungsregeln für solche Situationen erörtert, in denen – so wie im Fall des BEICHTVATERS – der Entscheidende bestimmte Wahrscheinlichkeitsvorstellungen bezüglich der Zufallsereignisse hat. Dabei werden wir als einen besonders wichtigen Anwendungsfall entsprechender Entscheidungsregeln die Grundzüge der sog. Portefeuilletheorie (portfolio-selection) behandeln. Bei diesen Ansätzen geht es dann primär darum, entscheidungstheoretisch fundierte Aussagen zur optimalen Zusammenstellung von Wertpapierportefeuilles zu gewinnen. Darüber hinaus kommt den dabei abgeleiteten Prinzipien aber auch ganz allgemein für die Zusammenfügung verschiedener risikohafter Projekte Bedeutung zu.

  Die zweite Hälfte der Kurseinheit 4 ist dann dem sogenannten BERNOULLI-Prinzip gewidmet. Es handelt sich dabei um ein in seinen Grundsätzen schon sehr altes Konzept zur Behandlung von Entscheidungsproblemen mit bekannten Wahrscheinlichkeiten, das zunächst sehr lange in Vergessenheit geraten war, in der zweiten Hälfte des letzten Jahrhunderts jedoch in weiterentwickelter und verfeinerter Form zu einem der wichtigsten Prinzipien der modernen Entscheidungstheorie geworden ist.

– In Kurseinheit 5 werden dann zunächst verschiedene Entscheidungsregeln für solche Situationen erörtert, in denen – so wie im Fall des REGENMACHERS – keinerlei Vorstellungen darüber bestehen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ergebnisbeeinflussende Zufallsereignisse – wie die Glasperlenläufe in unserem Beispiel – eintreten. Anschließend werden dann solche Entscheidungsprobleme erörtert, wie sie der INDER bei seinem Spiel gegen den MAGISTER LUDI zu bewältigen hatte, also Entscheidungen, deren Konsequenzen von den Aktionen rationaler Gegenspieler abhängen.

2 Grundbegriffe und -probleme

2.1 Das Problem der Formulierung von Entscheidungsproblemen

2.1.1 Allgemeine Überlegungen zur Abbildung der Realität in Modellen

Isolierende Abstraktion

Nach dieser exemplarischen Verdeutlichung einiger Entscheidungsprobleme wollen wir uns nun dem Versuch zuwenden, derartige Probleme in übersichtlicher Weise darzustellen und im Hinblick auf verschiedene Lösungskonzepte zu analysieren. Wir folgen dabei dem Prinzip der **isolierenden Abstraktion.** D.h., wir werden jeweils nur abgegrenzte Teilbereiche der Realität betrachten und die Wechselbeziehungen zu anderen Teilbereichen entweder völlig vernachlässigen oder allenfalls durch bewusst vereinfachende Annahmen nur ansatzweise erfassen. Solche vereinfachenden und abstrahierenden Darstellungen eines bestimmten Realitätsausschnittes werden allgemein als **Modell**[1)] bezeichnet. Dabei stellt die Modellbildung einen Vorgang dar, der auch von subjektiven Faktoren abhängig ist. Die Konstruktion eines Modells bedingt, dass der Entscheider eine subjektive Auswahl trifft, welche Aspekte der Realität berücksichtigt werden sollen und welche nicht. Diese Auswahl ist auch abhängig von den konkreten Rahmenumständen, die eine Entscheidungssituation determinieren. Ebenso werden zu erwartende Entwicklungen ergebnisbeeinflussender Faktoren auf der Basis des jeweiligen Informationsstandes und des jeweiligen Prognoseverhaltens subjektiv eingeschätzt.[2)]

Entscheidungsmodelle

Im folgenden werden **Entscheidungsmodelle** betrachtet. Als Entscheidungsmodelle bezeichnet man solche Modelle, aus deren Analyse mittelbare oder unmittelbare Erkenntnisse darüber gewonnen werden sollen, wie die in der Realität effektiv anstehenden Entscheidungen optimal zu treffen sind, so dass ein vorgegebenes Ziel möglichst vollständig erreicht wird. Entscheidungsmodelle sind also letztlich auf die Ableitung einer **Handlungsempfehlung** gerichtet. Folgendes Schaubild verdeutlicht diesen Zusammenhang schematisch.

Ableitung von Handlungsempfehlungen

---

1 Zur näheren Analyse des Modellbegriffs vgl. KOSIOL (1961) sowie BITZ (1977), S. 13–24, 56–64.

2 Vgl. hierzu BITZ (1981), S. 18–20.

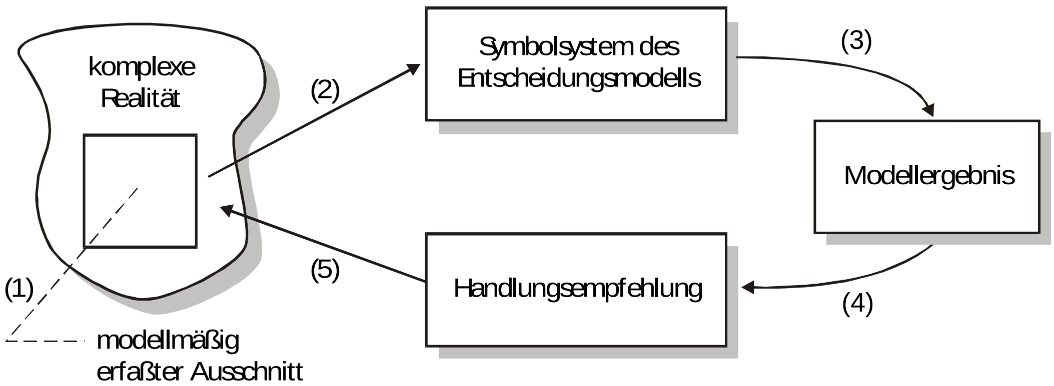


Abb. 1: Realität, Modell und Modellanalyse

Arbeitsschritte

Ausgehend von einer gegebenen Zielvorstellung können wir bei der Arbeit mit Entscheidungsmodellen folgende fünf Schritte unterscheiden:

(1) Festlegung des modellmäßig zu erfassenden Ausschnittes der Realität.

(2) Abstrahierende und vergröbernde Übertragung des Realitätsausschnittes in das Symbolsystem eines formalisierten Entscheidungsmodells.

(3) Analyse bzw. Lösung des Modells unter Anwendung bestimmter Rechentechniken; dies führt zu einem bestimmten rechnerischen Modellergebnis.

(4) Dieses rechnerische Modellergebnis beinhaltet zugleich eine bestimmte Handlungsempfehlung, die durch Rückübersetzung aus der Formalsprache des Modells in eine verbale Aussage noch verdeutlicht werden kann.

(5) Aus der modellmäßig abgeleiteten Handlungsempfehlung werden bestimmte Schlüsse gezogen und in entsprechende Entscheidungen umgesetzt, die sich unmittelbar auf die Realität auswirken.

Modellmäßig abgeleitete Handlungsempfehlung versus tatsächlich realisierte Aktion

Dabei ist zu beachten, dass die tatsächlich zu treffende Entscheidung keineswegs zwingend mit der modellmäßig abgeleiteten Handlungsempfehlung übereinzustimmen braucht, denn das Modell erfasst notgedrungen immer nur einzelne Teilaspekte der realen Entscheidungssituation. Die modellmäßige Handlungsempfehlung kann also auch nur im Hinblick auf diese Teilaspekte als optimal gelten. Für die letztlich in der Realität zu treffende Entscheidung muss jedoch versucht werden, in irgendeiner Weise auch den Gesamtzusammenhang zu beachten. Dabei kann es durchaus vernünftig sein, im Hinblick auf die modellmäßig nicht erfassten Sachverhalte letztlich doch zu einer anderen Entscheidung als der modellmäßig abgeleiteten zu kommen.

Da es uns im folgenden jedoch nur darum geht, die gedanklichen und funktionalen Verknüpfungen in einem Modellzusammenhang zu erkennen und zu analysieren, werden wir für diese Untersuchung von der Unterstellung ausgehen, die modellmäßig abgeleitete Handlungsempfehlung stelle zugleich auch den Inhalt der daraufhin in Angriff genommenen Aktionen dar.

Die folgenden Ausführungen bedürfen einer weiteren relativierenden Vorbemerkung. Abb. 1 verdeutlicht den Zusammenhang zwischen Realität und Modell, wie er bei der effektiven Anwendung entscheidungstheoretischer Kalküle auf real existierende Probleme der Praxis besteht. Wir wollen solche Modelle als „praktische“ Modelle bezeichnen. Im folgenden werden wir uns jedoch gar nicht auf praktische Modelle und konkrete, real existierende Entscheidungsprobleme beziehen. Grundlage unserer Betrachtungen werden vielmehr künstlich gedachte, „abstrakte“ Realitäten sein, die lediglich in Beispielen zu rechnerisch fixierten – aber immer „künstlich gedachten“ – Realitäten konkretisiert werden. Derartige Modelle seien als „theoretische“ Modelle bezeichnet.

Der weitgehende Verzicht auf die Behandlung praktischer Modelle, der im übrigen für weite Teile der Betriebswirtschaftslehre kennzeichnend ist, ist recht einsichtig. Sinn dieses in ein akademisches Studium eingebetteten Kurses ist es ja nicht, *ein* konkretes Entscheidungsproblem zu lösen. Sinn ist es vielmehr, dem Leser an Hand abstrakter und künstlich gedachter Realitäten ein *allgemeines* Konzept zu vermitteln, dessen Beherrschung ihn in die Lage versetzen soll, in der Praxis real auftauchende Einzelprobleme als konkrete Erscheinungsformen der gedachten Realität zu identifizieren und auf der Grundlage des allgemeinen Konzeptes zu lösen.[1)]

2.1.2 Formulierung eines Grundmodells: Handlungsalternativen, Umweltzustände und Handlungskonsequenzen

Aktionsfeld

Ausgangspunkt der folgenden Analyse theoretischer Entscheidungsmodelle ist die Annahme, dass dem Entscheidenden eine endliche Menge einander ausschließender Handlungsalternativen $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$, das sogenannte **Aktionsfeld,** zur Auswahl steht, so wie unseren Glasperlenspielern etwa verschiedene Setzmöglichkeiten.

Zum zweiten wird unterstellt, dass die Handlungskonsequenzen außer durch die Entscheidung des betrachteten Entscheidungssubjektes auch noch durch sonstige ergebnisbeeinflussenden Faktoren bestimmt werden, deren Entwicklung der Entscheidende weder kontrollieren noch eindeutig vorhersagen kann. Dabei sei

1 Wegen weitergehender Ausführungen zu diesem hier nur kurz angesprochenen Problemfeld sei auf BITZ (1977), S. 51–65 verwiesen.

angenommen, dass eine endliche Anzahl derartiger Konstellationen ergebnisbeeinflussender Faktoren, die sogenannten **Umweltzustände** $s_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, unterschieden werden können, also etwa verschiedene Kugelläufe in unserem Glasperlenspiel.

Umweltzustände

Nach der Zahl n der alternativ möglichen Umweltzustände lassen sich die folgenden beiden Arten von Entscheidungssituationen unterscheiden:

– In vielen betriebswirtschaftlichen Entscheidungsmodellen wird zur Vereinfachung unterstellt, der Entscheidende könne die zukünftige Entwicklung „seiner Umwelt" voraussehen, kenne also bereits den eintretenden Umweltzustand. Man spricht hier von **Entscheidungen unter Sicherheit** $(n = 1)$.

– Man kommt der Realität etwas näher, wenn man unterstellt, der Entscheidende könne die Zukunft *nicht* sicher vorhersehen, habe jedoch eine Vorstellung von der Gesamtheit der alternativ möglichen Umweltzustände. Man spricht hier von **Entscheidungen unter Unsicherheit** $(n > 1)$.

Zur weiteren Aufbereitung des Entscheidungsproblems wird schließlich unterstellt, dass die Konsequenzen, die sich ergeben, wenn der Entscheidende eine Handlungsalternative a_i wählt und der Zustand s_j eintritt, durch eine eindeutige Ergebnisangabe e_{ij} beschrieben werden können. Diese verdeutlichen in numerischer Form die Bedeutung der betrachteten Handlungskonsequenzen für die Zielvorstellungen des Entscheidenden. Im Detail sind dabei verschiedene Konstellationen entsprechender Ergebnisangaben zu unterscheiden, die sich aus der Art ihrer zeitlichen und der sachlichen Differenzierung ergeben.

– In *zeitlicher* Hinsicht ist es zum einen möglich, dass sich die Ergebnisangaben auf einen einzigen Zeitpunkt beziehen (**Einzeitpunktentscheidungen**). Es ist aber auch denkbar, dass die Handlungskonsequenzen durch eine ganze Sequenz auf mehrere Zeitpunkte bezogener Ergebniswerte zu kennzeichnen sind, also etwa durch die in den kommenden fünf Jahren eintretenden Gewinne (**Mehrzeitpunktentscheidungen**).

– Analog ist es in *sachlicher* Hinsicht denkbar, dass die – auf einen oder mehrere Ergebniszeitpunkte bezogenen – Ergebnisgrößen jeweils nur aus der Angabe *eines einzigen* Wertes bestehen, also z.B. in einer Gewinngröße oder einer Renditeangabe oder einem Umsatzwert o.ä. Ebenso ist es aber auch möglich, dass die Handlungskonsequenzen pro Ergebniszeitpunkt durch *mehrere* Größen gleichzeitig dargestellt werden, also z.B. durch eine Gewinngröße *und* eine Renditegröße *und* einen Umsatzwert etc. Dabei kann es durchaus zu **Zielkonflikten** kommen, etwa in der Weise, dass von zwei Ergebniskonstellationen die eine im Hinblick auf das Gewinnziel, die andere jedoch im Hinblick auf das Umsatzziel als günstiger einzustufen ist.

Lassen wir die zuletzt angesprochene Differenzierung zunächst außer acht, so lassen sich die durch Abb. 2 verdeutlichten vier Typen von Entscheidungsproblemen voneinander abschichten.

	Sicherheit	Unsicherheit
Ein Ergebniszeitpunkt	Typ a)	Typ b)
Mehrere Ergebniszeitpunkte	Typ c)	Typ d)

Abb. 2: Typen von Entscheidungssituationen

Typ a): Bei **Einzeitpunktentscheidungen unter Sicherheit** können jeder Handlungsalternative mit Sicherheit auf einen einzigen Zeitpunkt bezogene Ergebniswerte zugeordnet werden.

– Liegt dabei auch in sachlicher Hinsicht nur eine einzige Ergebnisgröße vor, so handelt es sich um ein entscheidungslogisch *triviales* Problem. Sie werden im Laufe ihres Studiums dennoch vergleichsweise viele Modelle von diesem besonders einfachen Typ kennenlernen. Die in diesem Zusammenhang erörterten Probleme beziehen sich in erster Linie auf die *Formulierung* solcher Modelle sowie auf deren *rechentechnische Lösung.*

– Sind zur Beschreibung der Handlungskonsequenzen *mehrere* Ergebnisgrößen nötig, so ist das Problem in entscheidungslogischer Hinsicht dann nicht mehr trivial, wenn zwischen den einzelnen Ergebnisgrößen Konflikte der oben verdeutlichten Art auftreten. Die Theorie der Zielkonflikte als ein Teilgebiet der Wirtschaftswissenschaft beschäftigt sich mit derartigen Problemen. Wir werden im Laufe dieses Kurses darauf jedoch nicht weiter eingehen.[1)]

Typ b): Auf **Einzeitpunktentscheidungen unter Unsicherheit** werden wir im Folgenden noch ausführlich eingehen, so dass sich hier eine weitere Kommentierung erübrigt.

Typ c): Auf **Mehrzeitpunktentscheidungen unter Sicherheit** sind wir bereits in den Kurseinheiten 1 und 2 dieses Kurses im Zusammenhang mit Investitionsentscheidungen ausführlich eingegangen.

1 Zur Behandlung von Zielkonflikten vgl. BITZ (1981), S. 25–30, und BITZ (1977), S. 262–282.

Typ d): Den kompliziertesten Fall stellen schließlich **Mehrzeitpunktentscheidungen unter Unsicherheit** dar, da sich hier Schwierigkeiten der Typen b) und c) überlagern. Methoden, sich mit derartigen Problemen auseinanderzusetzen, werden Sie erst in einzelnen Modulen des Wahlbereichs kennenlernen.

Die weiteren Ausführungen dieses Kurses sind Entscheidungsproblemen des Typs b) gewidmet, also in erster Linie dazu bestimmt, mit dem Problem der Unsicherheit umzugehen. Konkret nehmen wir dazu im folgenden stets an, dass sich die Handlungskonsequenzen

– nur auf einen einzigen Zeitpunkt beziehen und
– durch den Wert einer einzigen Ergebnisvariablen beschrieben werden können.

Jeder a_i-s_j-Kombination wird somit ein eindeutiger Ergebniswert e_{ij} zugeordnet.[1)] Dabei werden wir im Folgenden als Regelfall unterstellen, dass der Entscheidende einen möglichst großen Wert für diese Ergebnisvariable anstrebt. Die im folgenden zu behandelnden Entscheidungsprobleme können dann grundsätzlich in der Ihnen schon aus den Glasperlenspielen bekannten Weise durch eine **Ergebnismatrix** der in Tab. 8 allgemein gezeigten Art verdeutlicht werden.

	s_1	s_2	…	s_j	…	s_n
a_1	e_{11}	e_{12}	…	e_{1j}	…	e_{1n}
a_2	e_{21}	e_{22}	…	e_{2j}	…	e_{2n}
A	A	A		A		A
a_i	e_{i1}	e_{i2}	…	e_{ij}	…	e_{in}
A	A	A		A		A
a_m	e_{m1}	e_{m2}	…	e_{mj}	…	e_{mn}

Tab. 8: Ergebnismatrix in allgemeiner Darstellung

Diese Darstellungsform impliziert, dass die Voraussetzungen für das Eintreten der einzelnen s_j völlig unabhängig davon sind, welche Handlungsalternative der Entscheidende wählt. Zur Erläuterung dieser Forderung folgendes Beispiel:

1 Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass es sich trotz der unterstellten *Eindeutigkeit* der Zuordnung immer noch um ein Unsicherheitsproblem handelt, da wir ja unterstellen, dass der Entscheidende nicht weiß, welcher der alternativ möglichen Umweltzustände tatsächlich eintreten wird.

Beispiel 1:

Ein Händler steht vor der Entscheidung, seinen Absatzpreis um 18% auf 11,80 GE zu erhöhen (a_1) oder nicht (a_2). Im ersten Fall halte er Absatzmengen (x) von 100 oder 120, im zweiten Fall von 120 oder 140 alternativ für möglich.

Es könnte nun naheliegend erscheinen, als Umweltzustände die jeweils erzielbaren Absatzmengen (100, 120 oder 140) zu definieren und folgende Matrix der jeweils erzielbaren Umsätze aufzustellen:

	s_1 (x = 100)	s_2 (x = 120)	s_3 (x = 140)
a_1	1.180	1.416	1.652
a_2	1.000	1.200	1.400

Umsatzmaximierung als Zielsetzung unterstellt, erschiene a_1 in dieser Darstellung als die eindeutig bessere Alternative. Jedoch ist zu berücksichtigen, dass der Zustand s_3 bei Wahl von a_1 annahmegemäß gar nicht auftreten kann und entsprechend s_1 bei der Wahl von a_2 nicht.

Um in diesem Fall trotzdem zu einer für alle Handlungsalternativen in gleicher Weise relevanten Liste von Umweltzuständen zu gelangen, sind nun als Umweltzustände nicht einfach die alternativ möglichen Absatzmengen zu definieren, sondern die alternativ möglichen Kombinationen der bei den Preisen von 10 GE und 11,80 GE erzielbaren Absatzmengen.

Rein schematisch können somit folgende vier alternativ mögliche Kombinationen unterschieden werden:

	Absatzmenge bei einem Preis von ... 10 GE	... 11,80 GE
s_1	120	100
s_2	120	120
s_3	140	100
s_4	140	120

Definiert man nun – wie in der obigen Tabelle angedeutet – jede dieser Mengenkombinationen als gesonderten Umweltzustand, so ergibt sich folgende Ergebnismatrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	1.180	1.416	1.180	1.416
a_2	1.200	1.200	1.400	1.400

In dieser – sachgerechten – Darstellung der Ergebnismatrix erkennt man sofort, dass a_1 keineswegs so ganz eindeutig die bessere Alternative ist. Zur endgültigen Lösung unseres Problems bedarf es mit der Formulierung einer definitiven Entscheidungsregel allerdings noch erheblich weitergehender Überlegungen.

Notwendige Strukturierung

Wir können aber zunächst festhalten, dass die Anwendung des im folgenden zu entwickelnden entscheidungstheoretischen Instrumentariums in der Regel eine solche Strukturierung des Entscheidungsproblems voraussetzt, dass die (neben den eigenen Dispositionen des Entscheidenden) ergebnisbeeinflussenden Faktoren durch eine Liste einander ausschließender und für alle Handlungsalternativen in gleicher Weise relevanter Umweltzustände zum Ausdruck gebracht werden.

Übungsaufgabe 1:

Der Mafia-Boss LUCKY CRAVALLO spielt in einem Spielcasino an zwei Roulette-Tischen gleichzeitig. Zum Abschluss will er zu Ehren seiner am 27. Oktober geborenen Großmutter die letzten vier 5.000-Dollar-Jetons auf die Zahlen 10 und 27 setzen, und zwar so, dass pro Zahl insgesamt (an einem Tisch oder auf beide Tische verteilt) 10.000 Dollar gesetzt werden.

a) Definieren Sie alle relevanten Umweltzustände und alle Handlungsalternativen! (Sie müssen neun Umweltzustände und neun Handlungsalternativen unterscheiden.)

   Lösungshinweis:
   Falls Ihnen die Roulette-Regeln nicht bekannt sind, folgender Hinweis:
   Fällt die Kugel auf eine von Ihnen gesetzte Zahl, so erhalten Sie das 36-fache des gesetzten Betrages ausbezahlt, gewinnen also das 35-fache. Fällt die Kugel nicht auf die von Ihnen gesetzte Zahl, ist der Einsatz verloren.

b) Gehen Sie nun bitte von den in den Lösungsvorschlägen für Übungsaufgabe 1a) definierten Umweltzuständen und Handlungsalternativen aus und ergänzen Sie die nachstehende Ergebnismatrix, wobei als Ergebnis in den Zeilen der Matrix der Reingewinn einzutragen ist!

Ergebnismatrix (in tausend Dollar)									
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
a_1	340	340	–20	340	340	–20	340	340	–20
a_2	340			520		160			–20
a_3	340	–20			340			–20	–20
a_4	340	520	160		340		160		–20
a_5	340	340	160						–20
a_6	340	160	160		340				–20
a_7	340	700				–20	–20		–20
a_8	340			160		160		160	–20
a_9	340	340	340	340	340	340	–20	–20	

2.1.3 Grundtypen der in diesem Kurs betrachteten Entscheidungssituationen

Entscheidungen bei Unsicherheit

Im Zentrum unserer Untersuchungen stehen – wie schon gesagt – diejenigen Probleme, die sich aus der **Unsicherheit** über die genauen Konsequenzen der eigenen Handlungen ergeben. Dabei wurde bereits gesagt, welche Art von Handlungskonsequenzen betrachtet wird (Stichwörter: ein Ergebniszeitpunkt, eine Ergebnisvariable). Die in solchen Situationen auftretende Notwendigkeit, sich zwischen mehreren Alternativen entscheiden zu müssen, ohne genau zu wissen, welche Konsequenzen die eigene Entscheidung haben wird, bezeichnet man häufig auch als **Unsicherheitskonflikt.**

Dabei lassen sich folgende Grundtypen derartiger unsicherheitsbedingter Konfliktsituationen unterscheiden:

1. **Spielsituationen** sind dadurch gekennzeichnet, dass das Eintreten der s_j von den Entscheidungen rational handelnder Gegenspieler (z.B. Konkurrenten auf dem Absatzmarkt, des Gegenspieler beim Schach oder des MAGISTER LUDI im Glasperlenspiel des INDERS), bestimmt wird.

2. Von **Unsicherheitssituationen** im engeren Sinne spricht man demgegenüber dann, wenn die s_j durch „zufällige“ Ereignisse (z.B. die Witterung oder den Lauf einer Roulette-Kugel) bestimmt werden. Dabei unterscheidet man hier noch zwischen

Ungewissheitssituationen

   – **Ungewissheitssituationen,** d.h. Situationen, in denen den einzelnen Umweltzuständen aus Mangel an hinlänglichen Informationen keine

Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden (so beim Glasperlenspiel des REGENMACHERS), und

Risikosituationen

– **Risikosituationen,** d.h. Situationen, in denen jeweils Wahrscheinlichkeiten[1] p_j ($p_j \geq 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$; $\Sigma p_j = 1$) für den Eintritt eines Umweltzustandes s_j angegeben werden (so beim Glasperlenspiel des BEICHTVATERS). „Risiko“ wird hier also in Übereinstimmung mit der allgemeinen Praxis im entscheidungstheoretischen Schrifttum als eine spezielle Erscheinungsform der Unsicherheit verstanden. In anderen Teildisziplinen der Wirtschaftswissenschaft – wie auch im allgemeinen Sprachgebrauch – wird der Risikobegriff allerdings in anderen Bedeutungen verwendet.[2]

Subjektive und objektive Wahrscheinlichkeiten

Je nachdem, ob die Wahrscheinlichkeiten weitgehend auf Grund der nicht weiter kontrollierbaren subjektiven Intuition des Entscheidenden artikuliert werden oder aus intersubjektiv überprüfbaren Beobachtungen und Berechnungen abgeleitet werden, unterscheidet man hier noch weiter zwischen **subjektiven und objektiven Wahrscheinlichkeiten.**[3]

Mathematische und statistische Wahrscheinlichkeiten

Objektive Wahrscheinlichkeiten schließlich können je nach der Überschaubarkeit der für das Zustandekommen der s_j relevanten Zufallsereignisse entweder a priori errechnet werden (**mathematische Wahrscheinlichkeiten**) oder aber auf Grund der statistischen Auswertung von Vergangenheitsbeobachtungen, die durch

---

1 Allgemein werden Wahrscheinlichkeiten durch Zahlen zwischen 0 (unmögliches Ereignis) und 1 (sicheres Ereignis) ausgedrückt, wobei wir im Folgenden als allgemeines Symbol den Buchstaben p („probability“) verwenden wollen. Das Symbol p_j bezeichnet dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Zustand s_j eintritt. Weiterhin wollen wir im folgenden durch Symbole wie etwa $p(e_i = 3)$ oder $p(e_i > e^*)$ die Wahrscheinlichkeit dafür bezeichnen, dass eine Alternative zu dem Ergebnis 3 bzw. zu einem Ergebnis, das größer als e^* ist, führt. Sofern Sie mit dem Begriff der Wahrscheinlichkeit noch nicht aus anderen Kursen (oder schon nicht mehr) vertraut sind, empfehlen wir Ihnen, die einschlägigen Ausführungen in HAX (1974), S. 39–46, nachzulesen.

2 So wird in der betriebswirtschaftlichen Literatur unter Risiko auch z.B.

– die Gefahr negativer Entwicklungen, z.B. als Misserfolgsgefahr,
– die Gefahr der Fehlentscheidung oder
– die Gefahr der Fehlinformation

verstanden. Hinsichtlich der Risiko*messung* ist eine weitere Differenzierung möglich. Hierzu ist es erforderlich, eine Zielgröße und einen Referenzwert zu definieren. Vgl. hierzu BITZ (1993), S. 642f.

3 Vgl. zu Konzept und Rechtfertigung subjektiver Wahrscheinlichkeiten die kurzen Ausführungen in HAX (1974), S. 43–46, und allgemein LAUX / GILLENKIRCH / SCHENK-MATHES (2014).

Extrapolation gewonnen werden (**statistische Wahrscheinlichkeiten**), bestimmt werden.
Der so umschriebene Katalog verschiedener Entscheidungssituationen enthält nur die elementaren Grundtypen. Darüber hinaus sind beliebige Situationen vorstellbar, die als Mischung mehrerer dieser Elementartypen angesehen werden können. Ein solcher Mischfall liegt etwa vor, wenn eine Absatzprognose einerseits zwar auf den Umsatzstatistiken der vergangenen Perioden aufbaut, davon ausgehend aber letztlich doch „nach Fingerspitzengefühl" modifiziert wird, also statistische und subjektive Wahrscheinlichkeiten gemeinsam verarbeitet werden.

Im folgenden werden wir die Art, in der etwaige Wahrscheinlichkeitsangaben zustande kommen, im einzelnen nicht mehr berücksichtigen, sondern nur noch den gemeinsamen Oberbegriff der Risikosituation betrachten.

Vereinfachte Ergebnisdarstellung für Risikosituationen

Für derartige Risikosituationen kann die Darstellung der Handlungsergebnisse gegenüber ihrer Präsentation in Form einer Ergebnismatrix häufig in folgender Weise vereinfacht werden.

(1) Für jede Handlungsalternative individuell werden jeweils alle Umweltzustände, bei denen die betrachtete Alternative zu dem gleichen Ergebnis führt, zu einem einzigen Zustandsaggregat zusammengefasst.

(2) Die Eintrittswahrscheinlichkeit dieser Zustandsaggregate wird einfach als Summe der zugehörigen Einzelwahrscheinlichkeiten ermittelt.

(3) Schließlich werden die so bestimmten Ergebnis-Wahrscheinlichkeitskombinationen nach der Höhe der Ergebniswerte geordnet.

Zur Erläuterung folgendes Beispiel:

Beispiel 2: für Risikosituationen

Im folgenden ist noch einmal die Ergebnismatrix des BEICHTVATERS aus unserem Glasperlenspiel (einschließlich der Eintrittswahrscheinlichkeiten) angegeben, wobei wir die vier alternativen Glückszahlen 1 bis 4 unserer jetzt üblichen Terminologie entsprechend als Umweltzustände s_1 bis s_4 und die Setzmöglichkeiten (PA, PR, TU, TR) als Alternativen a_1 bis a_4 bezeichnet haben.

	0,2 s_1	0,3 s_2	0,1 s_3	0,4 s_4
a_1	–	24	–	36
a_2	20	20	20	–
a_3	6	3	12	24
a_4	–	–	66	–

Vollziehen wir nun zur beispielhaften Verdeutlichung die drei angegebenen Vereinfachungsschritte für a_1:

(1) Die Umweltzustände s_1 und s_3 führen bei a_1 zum gleichen Ergebnis; sie werden zu $s_{1.3}$ zusammengefasst.

(2) Damit ergeben sich folgende Eintrittswahrscheinlichkeiten für verbleibende Zustände s_2, s_4, $s_{1.3}$: $p_2 = 0{,}3$; $p_4 = 0{,}4$; $p_{1.3} = p_1 + p_3 = 0{,}3$.

(3) Ordnet man die Ergebniswerte von a_1 schließlich der Größe nach, so ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung:

a_1

e	0	24	36
$p(e_1 = e)$	0,3	0,3	0,4

Auf analoge Weise erhält man für die drei anderen Alternativen folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

a_2

e	0	20
$p(e_2 = e)$	0,4	0,6

a_3

e	3	6	12	24
$p(e_3 = e)$	0,3	0,2	0,1	0,4

a_4

e	0	66
$p(e_4 = e)$	0,9	0,1

Die in der Ergebnismatrix für alle Alternativen in gleicher Weise nach den Umweltzuständen s_j differenzierten **Ergebnisverteilungen** können auf diese Weise also zu alternativen individuellen **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** zusammengefasst werden. Wie wir im Folgenden noch sehen werden, können verschiedene Arten von Entscheidungsproblemen auf diese Weise formal z.T. erheblich vereinfacht werden.

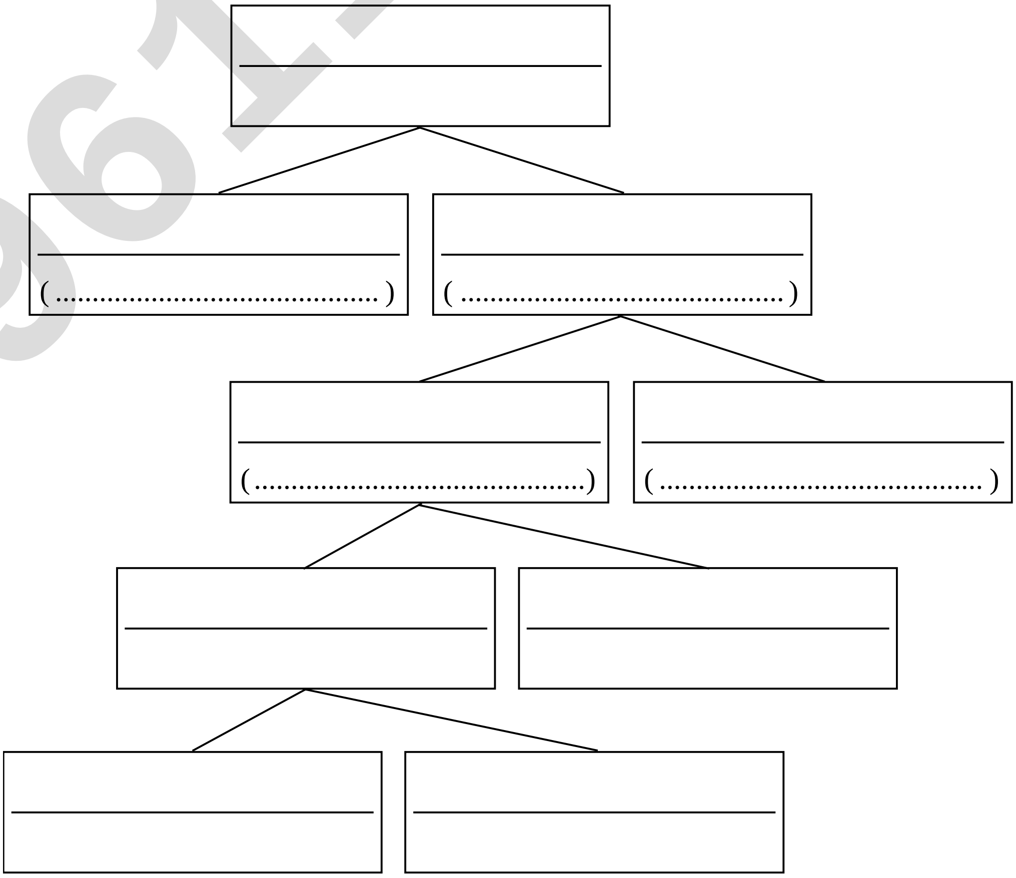
Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Übungsaufgabe 2:

a) Füllen Sie das folgende vorgegebene Schema mit den anschließend angegebenen Begriffen (einschließlich der vier in Klammern gesetzten erläuternden Hinweise) in der Weise aus, dass Sie eine systematische Übersicht über verschiedene Arten von Entscheidungsproblemen mit unsicheren Ergebnissen erhalten!

Einzusetzende Ausdrücke:

- Entscheidungsprobleme mit unsicheren Ergebnissen
- mathematische Wahrscheinlichkeiten
- objektive Wahrscheinlichkeiten
- Risikosituationen
- Spielsituationen
- statistische Wahrscheinlichkeiten
- subjektive Wahrscheinlichkeiten
- Ungewissheitssituationen
- Unsicherheitssituationen i.e.S.
- (Eintrittswahrscheinlichkeiten)
- (keine Wahrscheinlichkeiten)
- (rationale Gegner)
- (Zufall)



b) Geben Sie jeweils an, ob es sich bei den im folgenden aufgeführten Wahrscheinlichkeitsangaben eher um subjektive, mathematische oder statistische Wahrscheinlichkeitsangaben handelt. Versuchen Sie die Ermittlungen der mathematischen Wahrscheinlichkeitswerte nachzuvollziehen!

   (1) Der Politiker Herbert Josef Straussner:
   „Demoskopien hin und her – ich veranschlage die Chancen für einen Wahlsieg der Liga auf 80%.“

   (2) Die Wahrscheinlichkeit, beim Wurf mit zwei idealen Würfeln eine Augensumme von 8 oder mehr zu erzielen, beträgt 5/12.

   (3) Deutscher Fußballmeister in der kommenden Saison wird mit absoluter Sicherheit der 1. FC Köln.

   (4) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein neugeborenes Kind männlichen Geschlechts ist, beträgt 100/206.

   (5) Die Wahrscheinlichkeit, mit einem Tipp sechs Richtige im Lotto zu erreichen, beträgt ca. 1 zu 14 Millionen.

   (6) Die Unfallwahrscheinlichkeit auf Bundesstraßen ist erheblich größer als auf Autobahnen.

c) Errechnen Sie die Eintrittswahrscheinlichkeit für die einzelnen in Übungsaufgabe 1 zu definierenden Umweltzustände.

   Lösungshinweis:
   Die Roulette-Scheibe umfasst 37 Felder, nämlich die ‚Zahlen‘ (1 bis 36) und ‚Zero‘ (Null).

Übungsaufgabe 3:
Fassen Sie die in der Lösung zu Übungsaufgabe 1 für die Handlungsalternativen a_1, a_2, a_3 und a_5 angegebenen Ergebnisverteilungen jeweils zu individuellen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zusammen.

Lösungshinweis:
Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten entsprechend der Lösung zu Übungsaufgabe 2c jeweils als Brüche mit dem Nenner 37^2 an!

2.2 Die Bewertung von Ergebnisverteilungen

2.2.1 Dominanzprinzipien

Wenn wir nun wieder von der Prämisse eines durch die Ergebnismatrix vorgegebenen Entscheidungsfeldes ausgehen, verbleibt als entscheidungstheoretisches Hauptproblem die Frage, wie die optimale Alternative a_i^* ermittelt werden soll. Im allgemeinen ist es dazu nötig, die den einzelnen Alternativen zugeordneten Ergebnisverteilungen $E_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$ im Hinblick auf die Präferenz- und Risikovorstellungen des Entscheidungssubjektes zu **bewerten.** Häufig ist es jedoch möglich, schon vor der entsprechenden Bewertung die Anzahl der überhaupt noch in einen derartigen Bewertungsprozess einzubeziehenden Handlungsalternativen mit Hilfe gewisser „schwacher" Entscheidungsprinzipien, sog. Dominanz- oder Effizienzkriterien, in bestimmtem Umfang zu reduzieren. Diese Dominanzkriterien sind grundsätzlich auf den Vergleich von je zwei Alternativen ausgerichtet. Sie beinhalten Aussagen darüber, unter welchen Voraussetzungen eine der beiden Alternativen als vorziehenswürdig erkannt werden kann, auch ohne eine abschließende Bewertung der zugehörigen Ergebnisverteilungen vorzunehmen. Mit der allgemeinen zeitlichen Dominanz und der kumulativen zeitlichen Dominanz haben Sie in Kurseinheit 1 bereits zwei Dominanzkonzepte für Investitionsentscheidungen unter Sicherheit kennengelernt.

Im folgenden wollen wir die häufigsten Kriterien dieser Art in ihrer speziellen Ausprägung für die unsicherheitsbedingten Entscheidungsprobleme kurz darstellen. Dabei gehen wir zunächst davon aus, dass die verschiedenen Ergebnismöglichkeiten in einheitlicher Weise nach unterschiedlichen Umweltzuständen differenziert sind, das Entscheidungsproblem also in Form einer **Ergebnismatrix** dargestellt ist. Außerdem wird unterstellt, dass das Aktionsfeld nur noch aus Alternativen mit nicht völlig identischen Ergebnisverteilungen besteht; d.h. für je zwei beliebige Alternativen a_i, a_k lässt sich zumindest ein Umweltzustand s_j finden, für den $e_{ij} \neq e_{kj}$ gilt.

Absolute Dominanz

Als erstes – unmittelbar einsichtiges – Dominanzprinzip (**absolute Dominanz**) kann definiert werden:

x **Definition: Absolute Dominanz**

Eine Alternative a_1 ist einer anderen Alternative a_2 auf jeden Fall dann vorzuziehen, wenn das schlechtestmögliche Ergebnis von a_1 nicht schlechter ist als das bestmögliche Ergebnis von a_2, wenn also gilt:

$$(1) \quad \min_j (e_{1j}) \geq \max_j (e_{2j}) .$$

Als weiteres Dominanzprinzip (**Zustandsdominanz**) kann definiert werden:

Zustandsdominanz

x **Definition: Zustandsdominanz**

Eine Alternative a_1 ist einer anderen Alternative a_2 auf jeden Fall dann vorzuziehen, wenn a_1 bei keinem Umweltzustand zu einem schlechteren, bei mindestens einem Zustand jedoch zu einem besseren Ergebnis führt als die Alternative a_2, wenn also gilt:

$$(2) \quad \begin{array}{lll} e_{1j} \geq e_{2j} & \text{für alle} & j = 1, 2, \dots, n \\ e_{1j} > e_{2j} & \text{für mindestens ein} & j\ . \end{array}$$

Es dürfte unmittelbar einsichtig sein, dass aus dem Vorliegen der absoluten Dominanz stets auch die Existenz der Zustandsdominanz folgt, während umgekehrt Relation (2) erfüllt sein kann, ohne dass auch (1) zutrifft. Das Prinzip der Zustandsdominanz beinhaltet also eine stärkere Auswahlregel, d.h., durch seine Anwendung kann die Menge der überhaupt noch in Betracht zu ziehenden Handlungsalternativen allgemein in größerem Umfang eingeschränkt werden als nach dem der absoluten Dominanz.

Zur Verdeutlichung mag folgendes Beispiel dienen:

Beispiel 3:

Gegeben sei die in der folgenden Tabelle dargestellte Ergebnismatrix.

	20% s_1	10% s_2	30% s_3	20% s_4	20% s_5	min e_{ij}	max e_{ij}
a_1	20	30	10	0	20	0	30
a_2	0	10	20	10	20	0	20
a_3	20	20	–10	0	10	–10	20
a_4	0	–10	0	0	0	–10	0

Nach dem Prinzip der **absoluten Dominanz** kann offenbar nur a_4 ausgesondert werden; denn ein Vergleich von a_4 sowohl mit a_1 als auch mit a_2 zeigt, dass Relation (1) erfüllt ist, a_4 kommt somit auf jeden Fall **nicht** als Optimalalternative in Frage. Wenden wir nun weiter das Prinzip der **Zustandsdominanz** an, so erkennen wir zunächst, dass Relation (2) im Vergleich von a_4 mit a_1 und a_2 ebenfalls erfüllt ist. Außerdem ist (2) jedoch auch beim Vergleich von a_3 mit a_1 erfüllt; d.h. auch a_3 kommt als Optimalalternative nicht in Betracht. Nach dem Prinzip der Zustandsdominanz wird die verbleibende Menge nicht dominierter Alternativen also stärker eingeschränkt (nämlich auf a_1 und a_2) als nach dem Prinzip der absoluten Dominanz (a_1, a_2 und a_3).

Wahrscheinlichkeits-dominanz

Werden die einzelnen Ergebnisverteilungen nun nach dem oben bereits erörterten Verfahren zu Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen – der Größe nach geordneten – Ergebnismöglichkeiten aggregiert, so kann als weiteres Dominanzprinzip (**Wahrscheinlichkeitsdominanz**) definiert werden:

x **Definition: Wahrscheinlichkeitsdominanz**

Eine Alternative a_1 ist einer anderen Alternative a_2 auf jeden Fall dann vorzuziehen, wenn für jede reelle Zahl e' die Wahrscheinlichkeit, einen Ergebniswert von mindestens e' zu erzielen, bei Alternative a_1 nicht kleiner, für zumindest eine reelle Zahl e^* jedoch größer ist als bei Alternative a_2, wenn also gilt:[1)]

$$(3) \quad \begin{array}{lcll} p(e_1 \geq e') & \geq & p(e_2 \geq e') & \text{für alle } e' \in R \\ p(e_1 \geq e^*) & > & p(e_2 \geq e^*) & \text{für mindestens ein } e^* \in R \; . \end{array}$$

Zur Veranschaulichung des Prinzips der Wahrscheinlichkeitsdominanz[2)] wollen wir auf unser vorangegangenes Beispiel zurückgreifen.

Beispiel 4:

Den fünf in Beispiel 3 aufgeführten Umweltzuständen waren folgende Wahrscheinlichkeiten zugeordnet:

$$p_1 = 0{,}2; \quad p_2 = 0{,}1; \quad p_3 = 0{,}3;$$
$$p_4 = 0{,}2; \quad p_5 = 0{,}2 \, .$$

Zwischen den Alternativen a_1 und a_2 konnte nach den Prinzipien der absoluten Dominanz oder der Zustandsdominanz noch keine eindeutige Entscheidung getroffen werden. Um a_1 und a_2 außerdem auch nach dem Prinzip der Wahrscheinlichkeitsdominanz zu überprüfen, werden die Ergebnisverteilungen nun nach dem oben beschriebenen Verfahren zu folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen (untenstehende Tabelle, Zeile 1 und 2) zusammengefasst:

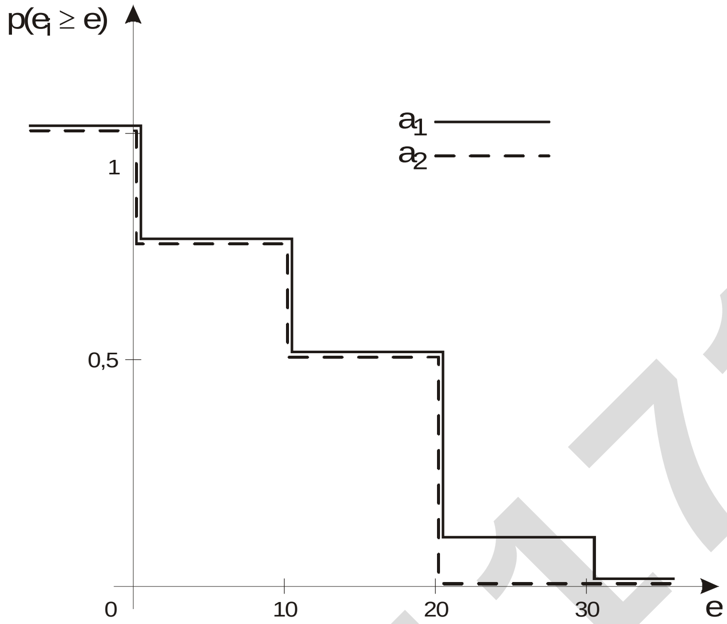
	0	10	20	30	>30
$p(e_1 = e)$	0,2	0,3	0,4	0,1	0
$p(e_2 = e)$	0,2	0,3	0,5	0	0
$p(e_1 \geq e)$	1	0,8	0,5	0,1	0
$p(e_2 \geq e)$	1	0,8	0,5	0	0

1 R soll die Menge aller reellen Zahlen bezeichnen; $\in$ bedeutet „Element von".

2 In der Literatur wird an Stelle des Begriffs „Wahrscheinlichkeitsdominanz" auch der Begriff „stochastische Dominanz" bzw. „stochastische Dominanz 1. Ordnung" verwendet, vgl. z.B. Eisenführ / Weber (2003), S. 265 – 268.

Die in Zeile 1 und 2 angegebenen Wahrscheinlichkeitswerte werden nun von den höchsten e-Werten ausgehend – also von rechts nach links – aufaddiert. Als Ergebnisse erhalten wir die in der Tabelle in den Zeilen 3 und 4 angegebenen Mindestwahrscheinlichkeiten.[1)]

Die kumulierten Wahrscheinlichkeiten können bekanntlich in Form einer fallenden Treppenkurve auch grafisch dargestellt werden, wie in der folgenden Abbildung verdeutlicht:[2)]



Man erkennt deutlich, dass die a_1 entsprechende Kurve der Mindestwahrscheinlichkeiten streckenweise oberhalb der a_2 entsprechenden Kurve verläuft, teils mit dieser Kurve gemeinsam, nie jedoch unterhalb der Kurve verläuft. Bedingung (3) ist also eindeutig erfüllt; d.h., a_1 dominiert a_2 im Sinne der Wahrscheinlichkeitsdominanz. Dieses grafisch gefundene Ergebnis kann auch sofort numerisch bestätigt werden. Denn gemäß der vorangegangenen Tabelle gilt:

$$p(e_1 \geq e) \begin{cases} > \;\; p(e_2 \geq e) & \text{für} \quad 20 < e \leq 30 \\ = \;\; p(e_2 \geq e) & \text{für} \quad e \leq 20 \;\text{ und }\; e > 30\,. \end{cases}$$

Relation (3) ist also erfüllt.

Auch hier dürfte es ohne weiteren Beweis einsichtig sein, dass aus Dominanz im Sinne von (1) oder (2) stets auch Dominanz im Sinne von (3) folgt. Andererseits kann Wahrscheinlichkeitsdominanz jedoch auch vorliegen, ohne dass absolute

1 So ergibt sich etwa die Mindestwahrscheinlichkeit $p(e_1 \geq 20)$ als Summe der Wahrscheinlichkeiten $p(e_1 = 20) + p(e_1 = 30) + p(e_1 > 30)$, also durch Kumulation „von rechts“.

2 Die senkrechten Kurvenabschnitte sind jeweils in ihren oberen Endpunkten definiert.

Dominanz oder Zustandsdominanz bestehen. Dabei ist es beim ausschließlichen Vorliegen von Wahrscheinlichkeitsdominanz – im Gegensatz zu den beiden anderen Dominanzprinzipien – durchaus möglich, dass eine dominante Alternative letztlich doch zu einem schlechteren Ergebnis führt als die dominierte Alternative. In unserem Beispiel wäre das etwa beim Eintreten der Zustände s_3 und s_4 der Fall. Die im Sinne der Wahrscheinlichkeitsdominanz dominierte Alternative a_2 führt also immerhin mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit (beim Eintreten der Zustände s_3 und s_4) zu einem besseren Ergebnis als a_1. Die Wahrscheinlichkeit, bei der Wahl der dominanten Alternative a_1 besser zu fahren als bei a_2, beträgt demgegenüber 30% (Zustände s_1 und s_2). Insoweit könnte man zunächst bezweifeln, dass die Forderung, rationales Entscheidungsverhalten müsse stets mit dem Prinzip der Wahrscheinlichkeitsdominanz übereinstimmen, so „unmittelbar einleuchtend“[1] ist, wie dies in der Literatur häufig dargestellt wird.

Diese Betrachtungsweise ist allerdings insoweit angreifbar, als sie nur auf die **Wahrscheinlichkeiten** dafür, dass eine Alternative die andere übertrifft, abstellt, das **Ausmaß** der jeweiligen Ergebnisdifferenzen jedoch gänzlich außer Acht lässt. So ist in unserem Beispielfall a_2 auch in 50% aller möglichen Fälle (Zustände s_3 und s_4) nur jeweils um 10 Einheiten besser, während umgekehrt a_1 die Alternative a_2 in 30% aller möglichen Fälle um 20 Einheiten übertrifft. So herrscht auch in der Literatur weitgehender Konsens darüber, dass das Dominanzprinzip auch im Sinne von (3) – und damit erst recht im Sinne von (1) und (2) – eine sinnvolle Grundanforderung an rationales Entscheidungsverhalten darstellt.

2.2.2 Die Formalstruktur von Entscheidungsregeln bei Unsicherheitskonflikten

2.2.2.1 Präferenzwerte und -funktionen

Nehmen wir an, dass ein Entscheidungsproblem bereits in Form einer Ergebnismatrix dargestellt ist und eine erste Vorauswahl nach einem der im Abschnitt 2.2.1 erörterten Dominanzprinzipien stattgefunden hat.

In der Regel werden nun auch nach einer solchen Vorauswahl *mehrere* Handlungsalternativen verbleiben, die von keiner anderen Alternative dominiert werden. Um hier zu einer endgültigen Entscheidung zu gelangen, sind die nicht zuvor ausgeschiedenen Alternativen auf Grund ihrer Ergebnisverteilungen zu **bewerten.**

1 SCHNEEWEISS (1967) , S. 42.

Präferenzfunktion Φ
Präferenzwert φ

Formal bedeutet dies, dass den einzelnen Alternativen mit Hilfe einer **Präferenzfunktion** Φ ein **Präferenzwert** $\varphi(a_i)$ zugeordnet wird,[1)] der als Indikator für den bei Realisierung der Alternative a_i erreichbaren Grad der Zielerfüllung angesehen werden kann. Der Unterschied zwischen Präferenzfunktion Φ und Präferenzwert $\varphi(a_i)$ bedarf einer kurzen Erläuterung: Φ bezeichnet das allgemeine Funktionsgesetz, nach dem die Ergebnisangaben einer Alternative zu der entscheidungsrelevanten Kennzahl zusammengefasst werden sollen, stellt also eine **Rechenregel** dar. $\varphi(a_i)$ bezeichnet demgegenüber in allgemeiner Form den für eine bestimmte Alternative bestimmten Präferenzwert, also das aus der Anwendung der Rechenregel erzielte **Rechenergebnis.** Der Vergleich zweier derartiger Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ und $\varphi(a_k)$ soll angeben, ob die Alternative a_i im Vergleich zu der Alternative a_k als besser, schlechter oder gerade gleichwertig eingeschätzt wird. Zwischen den Größenbeziehungen der Präferenzwerte und den Präferenzverhältnissen der Alternativen sollen also folgende eindeutige Zuordnungen bestehen:

(4)
$$\begin{aligned}
\varphi(a_i) &> \varphi(a_k) \leftrightarrow a_i \succ a_k \\
\varphi(a_i) &= \varphi(a_k) \leftrightarrow a_i \sim a_k \\
\varphi(a_i) &< \varphi(a_k) \leftrightarrow a_i \prec a_k \, .
\end{aligned}$$

Die Präferenzzeichen haben dabei die Bedeutung „wird vorgezogen“ ($\succ$), „ist gleichwertig“ ($\sim$) und „wird schlechter eingestuft“ ($\prec$).

Die gesuchte Optimalalternative a_i^* muss dann offenbar der Bedingung

(5) $$\varphi(a_i^*) \geq \varphi(a_i) \qquad \text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

genügen, d.h. es darf keine andere Alternative mehr geben, der ein höherer Präferenzwert zuzuordnen ist.

Wir müssen uns nun mit dem Aussehen der für die Ermittlung der Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ maßgeblichen **Präferenzfunktion** Φ befassen.

1 Φ und φ bezeichnen jeweils den griechischen Buchstaben Phi in großer bzw. kleiner Schreibweise.

2.2.2.2 Entscheidungsregeln und Optimierungskriterien

Entscheidungsregel

Eng verbunden mit den im vorigen Unterabschnitt eingeführten Begriffen Präferenzwert und Präferenzfunktion ist der Begriff der **Entscheidungsregel.** Darunter versteht man in dem hier zu untersuchenden Zusammenhang eine Aussage darüber, nach welchen Kriterien die optimale Alternative zu bestimmen ist.

Übungsaufgabe 4:

In unserem Glasperlenspiel haben Sie schon drei verschiedene Entscheidungsregeln kennengelernt. Geben Sie verbal möglichst kurz und präzise an, wie die Entscheidungsregeln des Beichtvaters, des Regenmachers und des Inders lauten!

Zielfunktion

Häufig ist es zweckmäßig, eine solche Entscheidungsregel formal-mathematisch auszudrücken. Einen solchen Ausdruck bezeichnet man oft auch als **Zielfunktion.** Dabei können bestimmte Entscheidungsregeln häufig auf unterschiedliche Weise durch Zielfunktionen ausgedrückt werden. Eine mögliche Ausdrucksweise haben wir im Abschnitt 2.2.2.1 mit Formel (5) ja schon kennengelernt. Stattdessen können wir die Entscheidungsregel, die Alternative mit dem höchsten Präferenzwert $\varphi(a_i)$ zu ermitteln, natürlich auch in der Ihnen geläufigen Form

$$(5') \qquad \max_i : \varphi(a_i)$$

ausdrücken. In deutsche Prosa übertragen beinhaltet (5′) bekanntlich die Anweisung: Bestimme aus der Menge aller Handlungsalternativen a_i diejenige mit dem maximalen Präferenzwert $\varphi(a_i)$.

Bevor wir nun allgemein verschiedene Formen von Zielfunktionen untersuchen, wollen wir – zunächst noch als unbewiesene Behauptung – festhalten, dass sich alle Arten von Entscheidungsregeln grundsätzlich auf die durch (5) oder (5′) bestimmte Form der reinen Maximierung bringen lassen.

Trotzdem ist es in vielen Fällen jedoch zweckmäßiger, die Entscheidungsregel in einer anderen Form auszudrücken.

Zur Verdeutlichung des Sachverhalts ist es nützlich, den Vorgang der Bewertung von Ergebnisverteilungen etwas differenzierter zu betrachten und gedanklich in mehrere Phasen zu zerlegen.

Kennzeichnung einer Ergebnisverteilung

Allgemein kann eine Ergebnisverteilung E_i durch bestimmte **Verteilungskennzahlen** charakterisiert werden. Für solche Kennzahlen wollen wir im folgenden das Symbol y verwenden. Zur Charakterisierung einer Ergebnisverteilung durch bestimmte Kennzahlen bestehen nun zwei Möglichkeiten:

– Entweder werden die zu bewertenden Ergebnisverteilungen E_i sofort auf **eine** Kennzahl $y(E_i)$ transformiert

– oder es werden zunächst **mehrere** Kennzahlen $y_h(E_i)$ $(h=1, 2, \ldots, \bar{h})$ gebildet.

Beispiel 5:

Ein erneuter Rückgriff auf unser Glasperlenspiel mag diese beiden Möglichkeiten verdeutlichen. Betrachten wir dazu noch einmal die Ergebnismatrix des REGENMACHERS, wie sie Tab. 1 (S. 1) zeigt:

– Die erste Möglichkeit bestünde nun darin, die Ergebnisverteilungen der einzelnen Alternativen sofort auf eine einzige Kennzahl zu reduzieren, etwa auf den **einfachen Durchschnitt** der alternativ möglichen Gewinnbeträge. Dabei stimmte diese Kennzahl dann sofort mit dem letztlich entscheidungsrelevanten Präferenzwert überein. Formal würde also gelten:

$$\varphi(a_i) = y(E_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \ .$$

– Eine andere Möglichkeit bestünde demgegenüber darin, die einzelnen Alternativen zunächst durch das jeweils **schlechteste** und das jeweils **beste** Ergebnis zu kennzeichnen, also zwei Kennzahlen y_1, y_2 zu bilden, für die formal gelten würde:

$$y_1(E_i) = \min_j (e_{ij})$$

$$y_2(E_i) = \max_j (e_{ij}) \ .$$

Der für die Entscheidung maßgebliche Präferenzwert wäre dann als Funktion dieser beiden Kennzahlen zu bestimmen, formal also durch

$$\varphi(a_i) = \Phi\left[y_1(E_i), y_2(E_i)\right] \ .$$

Derartige Kennzahlen sollen jene Qualitäten der Ergebnisverteilungen zum Ausdruck bringen, die den Entscheidenden besonders beeindrucken, und diejenigen Momente der Unsicherheitssituation erfassen, die ihm als vorrangig beachtenswert erscheinen. Diese Kennzahlen sollen also Niederschlag der weitgehend nur subjektiv begründbaren Einstellung des Entscheidungsträgers gegenüber dem Phänomen der Unsicherheit sein.

subsidiäre Zielvariablen

Wir wollen sie im folgenden auch als **subsidiäre** Zielvariablen bezeichnen.

Originäre Zielvariablen demgegenüber beziehen sich unmittelbar auf jene Größen, an denen der Entscheidende letztlich den Erfolg des Handelns misst. So stellt im Beispiel des REGENMACHERS der **$-Gewinn** die originäre Zielgröße dar. Als **subsidiäre** Zielvariable verwendeten unsere drei Reisenden dann solche Größen wie maximalen Ärger (REGENMACHER) oder die Gewinnwahrscheinlichkeit (BEICHTVATER).

Um auf der Basis einer oder mehrerer derartiger subsidiärer Zielvariablen zu einer definitiven Entscheidungsregel zu gelangen, muss noch angegeben werden, welche Anforderungen – ausgedrückt durch bestimmte Werte oder sonstige Qualitäten der subsidiären Zielvariablen – an diejenige Handlungsalternative zu stellen sind, deren Durchführung als Lösung des Entscheidungsmodells empfohlen wird.

Optimierungskriterium

Eine entsprechende Angabe wollen wir als **Optimierungskriterium** bezeichnen.

Grundsätzlich lassen sich drei Typen derartiger Optimierungskriterien unterscheiden, nämlich:

Extremierung:
Die Zielvariable soll einen möglichst großen oder kleinen Wert annehmen, also:

$$\max: y \quad \text{oder} \quad \min: y\ .$$

Satisfizierung:
Die Zielvariable soll nicht unterhalb (nicht oberhalb) eines bestimmten Anspruchsniveaus liegen, also:

$$y \geq y^{\min}! \quad \text{oder} \quad y \leq y^{\max}!$$

Fixierung:
Die Zielvariable soll genau einen bestimmten Wert annehmen, also

$$y = y^{\text{fix}}!$$

Je nachdem, ob den maßgeblichen Präferenz- und Risikovorstellungen des Entscheidungssubjektes entsprechend nur eine oder mehrere subsidiäre Zielvariablen gebildet werden, können verschiedene Typen von Entscheidungsregeln unterschieden werden. Wir wollen nun die wichtigsten dieser Typen kurz beschreiben und dabei außerdem jeweils deutlich machen, wie diese Entscheidungsregeln in der durch (5) und (5′) umschriebenen generellen Grundform ausgedrückt werden können.

(1) Eine subsidiäre Zielvariable[1)]

(1.a) Extremierung

Extremierung

Ist y zu maximieren, so kann die Zielfunktion im einfachsten Fall als

$$(6) \quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y(E_i)\right] = y(E_i)$$

geschrieben werden, Präferenzwert und subsidiäre Zielvariable stimmen also überein.

Im Falle der Minimierung hingegen ist die Zielfunktion im einfachsten Fall als

$$(7) \quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y(E_i)\right] = -y(E_i)$$

zu schreiben; der entscheidungsrelevante Präferenzwert wird also als das Negative der subsidiären Zielvariablen definiert.

Beispiele für diesen Typ von Optimierungskriterium sind Ihnen sicherlich aus vielen anderen ökonomischen Bereichen bekannt; Sie haben sie im übrigen ja auch bei den Entscheidungen unserer Glasperlenspieler kennengelernt.

(1.b) Satisfizierung

Satisfizierung

Sofern der Entscheidende die y-Werte aller Alternativen kennt, erscheint die dem Satisfizierungskonzept in diesem Fall zugrundeliegende Prämisse, dass der Entscheidende alle Alternativen, für die die subsidiäre Zielvariable ein kritisches Niveau nicht unterschreitet (bzw. nicht übersteigt), in gleicher Weise als optimal betrachtet, als wenig plausibel. Es ist eigentlich gar nicht einzusehen, warum er sich – sofern für den Entscheidenden wirklich nur eine subsidiäre Zielvariable zur Kennzeichnung der Ergebnisverteilungen relevant ist – nicht

- entweder für die Alternative mit dem höchsten oder niedrigsten y-Wert entscheidet
- oder diejenige Alternative wählt, bei der ein besonders wünschenswertes Niveau y^{fix} genau erreicht wird.

In diesem Fall erscheinen also nur Extremierung oder Fixierung als sinnvolle Zielkonzepte.

---

1 Die folgenden Ausführungen können in ganz analoger Weise auch auf den Fall einer originären Zielvariablen übertragen werden.

partielle Unkenntnis des Entscheidungsfeldes

Anders verhält es sich hingegen bei partieller Unkenntnis des Entscheidungsfeldes, also wenn die subsidiären Zielvariablenwerte oder evtl. sogar die Ergebnisverteilungen der einzelnen Alternativen noch gar nicht genau bekannt sind, sondern noch sukzessiv errechnet werden müssen. In einer solchen Situation könnte es durchaus als sinnvoll angesehen werden, den sukzessiven Informationsbeschaffungs- und -verarbeitungsprozess abzubrechen, sobald die erste Alternative gefunden worden ist, deren Zielvariablenwert dem vorab festgelegten **Anspruchsniveau** entspricht. Die Festlegung des entsprechenden kritischen Wertes y^{min} oder y^{max} impliziert dann die Prämisse, dass die nach dem Auffinden einer ersten „befriedigenden" Lösung mit der Suche nach einer noch besseren Alternative verbundenen Kosten und Mühen höher eingeschätzt werden als die entsprechende Verbesserung des Planungsergebnisses. In dieser Interpretation – nämlich als eine die Planungskosten mit einbeziehende heuristische Approximation eines primären Extremierungskonzeptes – kann also auch ein Satisfizierungskonzept als sinnvoll angesehen werden.

gebrochene Präferenzfunktion

Durch die Definition einer gebrochenen **Präferenzfunktion** kann jedoch auch ein solches Satisfizierungskonzept wieder in Form einer Maximierung geschrieben werden, nämlich als:

$$(8) \qquad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y(E_i)\right] = \begin{cases} 1, & \text{wenn } y(E_i) \geq y^{min} \\ 0, & \text{wenn } y(E_i) < y^{min} \end{cases} .$$ [1)]

Die Präferenzfunktion Φ ordnet also allen Alternativen, die im Hinblick auf das durch y^{min} festgelegte Anspruchsniveau als „unbefriedigend" anzusehen sind, den Wert null zu; „befriedigende" Alternativen erhalten demgegenüber den Wert eins. Dabei ist in (8) die Maximierungsvorschrift nicht unbedingt auf die Gesamtheit aller Alternativen zu erstrecken, sondern als **Stopregel** zu interpretieren, wonach die sukzessive Bewertung der einzelnen Alternativen abzubrechen ist, sobald eine befriedigende Alternative gefunden worden ist.

Stopregel

1 Relation (8) erfasst nur den Fall der unteren Begrenzung. Im Fall der Begrenzung nach oben sind die Ungleichheitszeichen jeweils umzukehren und y^{min} durch y^{max} zu ersetzen.

Beispiel 6:

Als Beispiel sei folgende Ergebnismatrix betrachtet:

	s_1	s_2	s_3
a_1	10	30	30
a_2	25	20	15

Angenommen, die Entscheidungsregel sehe vor, dass das **Mindestergebnis** den Wert von 12 nicht unterschreiten dürfe. Wie man leicht sieht, beträgt das Mindestergebnis bei a_1 (a_2) 10 (15); demnach erfüllt also nur a_2 die Satisfizierungsbedingung.

Um die genannte Entscheidungsregel formal zum Ausdruck zu bringen, sei das Mindestergebnis einer Alternative a_i mit y_i bezeichnet. (Für unser Beispiel gilt also $y_1 = 10$; $y_2 = 15$). Die angenommene Satisfizierungsbedingung könnte dann unmittelbar durch

(8.1) $\quad y_i \;\geq\; 12$

zum Ausdruck gebracht werden. Ebenso gut können wir aber auch analog zu (8) eine gebrochene Präferenzfunktion formulieren:

(8.2) $$\varphi(a_i) \;=\; \Phi(E_i) \;=\; \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad y_i \geq 12 \\ 0, & \text{wenn} \quad y_i < 12. \end{cases}$$

Dieser Funktion entsprechend gilt weiter

$$\Phi(a_1) \;=\; 0 \quad (\text{da } \; y_1 = 10 < 12)$$
$$\Phi(a_2) \;=\; 1 \quad (\text{da } \; y_2 = 15 > 12).$$

Die Maximierung des durch (8.2) definierten Präferenzwertes $\varphi(a_i)$ führt also zu dem gleichen Entscheidungsergebnis wie die unmittelbare Anwendung der Satisfizierungsbedingung (8.1).

(1.c) Fixierung

Im Gegensatz zur Satisfizierung kann die Fixierung auch im Fall nur einer einzigen subsidiären Zielvariablen ein sinnvolles Zielkonzept darstellen. Nehmen wir etwa als Beispiel aus dem Bereich der Entscheidungen unter Sicherheit an, der Gewinn G eines Einproduktunternehmens lasse sich als stetige Funktion $G(x)$ der Absatzmenge x darstellen. Dann wird – unter bestimmten weiteren Voraussetzungen – das Gewinnmaximum bei der Menge x^* erreicht, für die der Grenzgewinn $G'(x)$, d.h. die erste Ableitung von G nach x, gerade null beträgt. Berücksichtigt man weiter, dass sich der Grenzgewinn $G'(x)$ als Differenz zwischen Grenzumsatz $U'(x)$ und Grenzkosten $K'(x)$ darstellen lässt, und nehmen wir weiterhin an, dass sich die Grenzkosten konstant auf 10 GE/Mengeneinheit belaufen, so erscheint es durchaus sinnvoll, als Zielfunktion die Fixierungsbedingung

$$U'(x) \overset{!}{=} 10$$

einzusetzen.

Ähnliche Überlegungen können es natürlich auch in anderen Entscheidungssituationen plausibel erscheinen lassen, eine Fixierungsbedingung anzusetzen. Zugleich wird an unserem Beispiel auch deutlich, dass Fixierungsbedingungen häufig als Konkretisierung einer übergeordneten Extremierungsbedingung angesehen werden können. Ihre Rücküberführung in eine – allerdings andersartige – Extremierungsbedingung kann dann wie im Fall der Satisfizierung wiederum durch die Formulierung einer gebrochenen Präferenzfunktion erfolgen, indem

gebrochene Präferenzfunktion

$$\text{(9)} \qquad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y(E_i)\right] = \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad y(E_i) = y^{fix} \\ 0, & \text{wenn} \quad y(E_i) \neq y^{fix} \end{cases}$$

geschrieben wird. Ähnlich wie bei (8) werden auch hier also je nachdem, ob die Fixierungsbedingung erfüllt ist oder nicht, zwei Klassen „befriedigender“ Alternativen (jeweils mit den Präferenzwerten 1 bzw. 0) unterschieden.

Das Fixierungskonzept in der bislang untersuchten Form verlangte grundsätzlich, dass die betrachtete Zielvariable den vorgegebenen Fixwert genau erreicht. Daneben wäre als verwandter Ansatz auch die Zielsetzung denkbar, den Fixwert möglichst exakt zu erreichen oder zumindest den Abstand (absolut, quadratisch oder ähnlich definiert) zu diesem Wert möglichst klein zu halten. Ein solcher Ansatz stellt jedoch trotz aller Verwandtheit mit dem Fixierungskonzept ein reines Extremierungskonzept dar (nämlich Abstandsminimierung), das etwa durch Zielfunktionen wie

Abstandsminimierung

$$\text{(10.1)} \quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y(E_i)\right] = -\left| y(E_i) - y^{fix} \right|$$

oder

$$\text{(10.2)} \quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y(E_i)\right] = -\left(y(E_i) - y^{fix} \right)^2$$

zum Ausdruck gebracht werden kann.

(2) Mehrere subsidiäre Zielvariablen[1]

Werden die einzelnen Ergebnisverteilungen E_i jeweils durch mehrere Kennzahlen $y_h(E_i)$ $[h = 1, 2, \dots, \overline{h}]$ charakterisiert, so ist es im allgemeinen notwendig, diese Kennzahlen letztlich zu einem einzigen Präferenzwert zusammenzufassen. Zu diesem Zweck können nun die drei zuvor erörterten Optimierungskriterien in unterschiedlicher Form kombiniert werden, wobei zwei große Gruppen, nämlich „reine" und „gemischte" Zielkonzepte, unterschieden werden können. Den Inhalt dieser Konzepte werden wir im folgenden erläutern. Außerdem ist in diesem Zusammenhang die sog. lexikografische Auswahlregel zu nennen, die im Grunde eine Mischform zwischen Entscheidungsregeln mit einer und solchen mit mehreren Zielvariablen darstellt.

(2.a) „Reine" Konzepte

Amalgamation

Zum ersten besteht die in der entscheidungstheoretischen Literatur vorrangig erörterte Möglichkeit, sämtliche subsidiären Zielvariablen durch (konstante oder variable) Gewichtung zu einem Präferenzwert zu **„amalgamieren"** (im Sinne von „Verschmelzen") und für diesen Ausdruck das Erreichen eines möglichst hohen Wertes zu verlangen, also

$$(11)\quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) \;=\; \Phi\left[y_1(E_i), y_2(E_i), \dots, y_{\overline{h}}(E_i)\right].$$

reines Satisfizierungskonzept

Demgegenüber wäre aber auch ein reines Satisfizierungskonzept denkbar: Das Aktionsfeld wird solange abgesucht, bis eine Alternative gefunden ist, für die sämtliche subsidiären Zielvariablen den jeweiligen Anspruchsniveaus entsprechen. Für den Fall, dass ausschließlich Begrenzungen nach unten zu beachten sind, wäre hier also zu schreiben:

$$(12)\quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) \;=\; \Phi\left[y_1(E_i), \dots, y_{\overline{h}}(E_i)\right]$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad y_h(E_i) \geq y_h^{\min} \quad \text{für alle} \quad h = 1, \dots, \overline{h} \\ 0, & \text{wenn} \quad y_h(E_i) < y_h^{\min} \quad \text{für mindestens ein} \;\; h. \end{cases}$$

---

1 Die folgenden Ausführungen lassen sich ebenfalls analog auf den Fall mehrerer **originärer** Zielgrößen übertragen. Formal sind dazu lediglich die Größen $y_h(E_i)$ $(h = 1, 2, \dots, \overline{h})$ durch $z_k(e_i)$ $(k = 1, 2, \dots, \overline{k})$ zu ersetzen.

reines Fixierungskonzept

Ganz analog ergibt sich schließlich für ein reines Fixierungskonzept:

$$(13)\quad \max_i : \varphi(a_i) \quad \text{mit} \quad \varphi(a_i) = \Phi\left[y_1(E_i), \ldots, y_{\bar{h}}(E_i)\right]$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{wenn} \quad y_h(E_i) = y_h^{fix} \quad \text{für alle} \quad h = 1, \ldots, \bar{h} \\ 0, & \text{wenn} \quad y_h(E_i) \neq y_h^{fix} \quad \text{für mindestens ein} \ h\,. \end{cases}$$

(2.b) **Lexikografische Auswahlregel**

Die Bezeichnung für diesen Typ von Entscheidungsregel geht auf die Methode zurück, nach der die Stichwörter in einem Lexikon in eine Reihenfolge gebracht werden. In erster Linie richtet sich die Reihenfolge der Wörter nach der Stellung ihres Anfangsbuchstabens im Alphabet. Bei gleichen Anfangsbuchstaben entscheidet dann der zweite Buchstabe usw.

Die lexikografische Auswahlregel sieht dementsprechend vor, dass zunächst ein einfacher Extremierungsansatz für eine Zielvariable y_1 formuliert wird. Ergibt sich dabei genau eine Optimalalternative, so ist der Entscheidungsprozeß beendet. Erreichen hingegen mehrere Alternativen in gleicher Weise den maximalen (oder minimalen) Zielvariablenwert, so erfolgt die weitere Auswahl aus dieser Teilmenge von Alternativen mittels eines weiteren Extremierungsansatzes im Hinblick auf eine andere Zielvariable y_2. Ergibt sich dabei immer noch keine eindeutige Optimalalternative, wird eine dritte Zielvariable y_3 herangezogen usw.

Die lexikografische Auswahlregel kann somit als die mehrmalige Wiederholung einer einfachen Extremierungsregel interpretiert werden, wobei die Auswahl der im einzelnen vorzunehmenden Extremierungsvorgänge je nach der jeweils vorliegenden Problemstellung unterschiedlich sein kann.

Für praktische Zwecke lässt sich die lexikografische Auswahlregel nun in aller Regel durch ein reines Extremierungskonzept vom Typ (2a) approximieren, wie folgendes Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 7:
Gegeben seien folgende Ergebnisverteilungen E_i der Alternativen a_i $(i=1, 2, 3, 4)$:

	s_1	s_2	s_3
E_1	5	7	0
E_2	1	3	8
E_3	4	2	3
E_4	7	1	4

Als primäre Zielgröße y_1 sei nun der **Durchschnittsgewinn** angenommen, den es zu maximieren gilt. Wir erhalten für die vier Alternativen dann die Kennzahlwerte $y_1(E_1)=4$; $y_1(E_2)=4$; $y_1(E_3)=3$; $y_1(E_4)=4$. Für den maximalen Kennzahlenwert gilt also $y_1^*=4$.

Da dieser Maximalwert jedoch von den drei Alternativen a_1, a_2 und a_4 in gleicher Weise erreicht wird, werde als zweite Zielgröße y_2 der **Minimalgewinn** herangezogen. Dabei ergibt sich für die drei noch relevant gebliebenen Alternativen: $y_2(E_1)=0$; $y_2(E_2)=1$; $y_2(E_4)=1$; also $y_2^*=1$.

Alternative a_1 scheidet somit aus der weiteren Betrachtung aus, während zur Auswahl zwischen a_2 und a_4 als weitere Kennzahl y_3 der **Maximalgewinn** herangezogen werde. Aus $y_3(E_2)=8$ und $y_3(E_4)=7$ ergibt sich dann schließlich a_2 als Optimalalternative.

Die gleiche Rangfolge hätte man im vorliegenden Fall allerdings auch erhalten, wenn man direkt eine **Amalgamationsfunktion** etwa der Art

$$\varphi = \Phi(y_1, y_2, y_3) = 100\,y_1 + 10\,y_2 + y_3$$

maximiert hätte. In diesem Fall würden die Präferenzwerte $\varphi(a_1)=407$; $\varphi(a_2)=418$; $\varphi(a_3)=324$; $\varphi(a_4)=417$ resultieren. Man erkennt, dass genau wie nach der lexikografischen Auswahlregel a_2 knapp vor a_4 liegt; es folgt a_1, während a_3 die schlechteste Alternative darstellt.

(2.c) **Gemischte Konzepte**

Außerdem ist es natürlich möglich, die durch (11), (12) und (13) umschriebenen Zielfunktionstypen zu kombinieren, also Extremierungs- und Satisfizierungs- sowie Fixierungsbedingungen nebeneinander anzuwenden. Im einschlägigen Schrifttum werden Sie derartige „gemischte“ Konzepte zumeist in der Form kennenlernen, dass eine Variable y_1 unter der Nebenbedingung extremiert wird, dass für die übrigen Variablen $y_2, y_3, \ldots, y_{\bar{h}}$ jeweils eine Satisfizierungs- oder Fixierungsrestriktion eingehalten wird.

Daneben sind jedoch ohne weiteres kompliziertere Mischformen denkbar, wie folgendes Beispiel verdeutlicht, das außerdem zeigt, dass auch ein solches „gemischtes Konzept“ wiederum in die Form einer reinen Extremierungsbedingung überführt werden kann.

Beispiel 8:

Betrachten wir noch einmal die Tabelle aus dem vorangegangenen Beispiel. Die maßgebliche Entscheidungsregel besage nun jedoch, dass die Alternative gesucht wird,

– für die der mit 0,9 bzw. 0,1 gewichtete Durchschnitt aus Minimalgewinn (y_2) und Maximalgewinn (y_3) den größten Wert erreicht,

– jedoch grundsätzlich nur solche Alternativen in Betracht kommen, bei denen der Gesamtdurchschnitt (y_1) mindestens den Wert 3,5 erreicht.

Die zu maximierende Amalgamationsfunktion M lautet also:

$$M = 0{,}9 \cdot y_2 + 0{,}1 \cdot y_3 \ .$$

Konkret gilt also für unsere vier Alternativen:

$$M(a_1) = 0{,}7 \qquad M(a_2) = 1{,}7$$
$$M(a_3) = 2{,}2 \qquad M(a_4) = 1{,}6 \ .$$

Würde nun M maximiert, so wäre somit a_3 die Optimalalternative. Zusätzlich gilt jedoch noch die Satisfizierungsbedingung

$$y_1 \geq 3{,}5 \ .$$

Diese Bedingung ist jedoch für a_3 nicht erfüllt; also kommt diese Alternative nicht als Lösung in Betracht. Vielmehr stellt unter Berücksichtigung der Satisfizierungsbedingung erneut a_2 die Optimalalternative dar.

Das bislang untersuchte gemischte Extremierungs- und Satifizierungskonzept kann nun in folgender Weise formal wiederum durch eine einzige Extremierungsbedingung ausgedrückt werden:

$$\max_i : \varphi(a_i) = \Phi\left[y_1(E_i); y_2(E_i); y_3(E_i)\right]$$
$$= \begin{cases} 0{,}9\,y_2 + 0{,}1\,y_3\,, & \text{wenn} \quad y_1 \geq 3{,}5 \\ -\infty & \text{wenn} \quad y_1 < 3{,}5\,. \end{cases}$$

Demnach gilt:

$$\varphi(a_1) = 0{,}7 \qquad \varphi(a_2) = 1{,}7$$
$$\varphi(a_3) = -\infty \qquad \varphi(a_4) = 1{,}6\,.$$

2.2.2.3 Zusammenfassung und Ausblick

Zusammenfassend können wir das bislang erörterte Verfahren zur Bestimmung einer optimalen Handlungsalternative durch folgende vier Schritte kennzeichnen:

1. Schritt
Die Konsequenzen der zur Auswahl stehenden Handlungsmöglichkeiten $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ werden durch Verteilungen alternativ möglicher Ergebnisse $E_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$ zum Ausdruck gebracht.

2. Schritt
Die Ergebnisverteilungen werden durch eine oder mehrere Kennzahlen $y_h(E_i)$ $(h = 1, 2, \ldots, \overline{h})$ charakterisiert.

3. Schritt
Der maßgeblichen Entscheidungsregel entsprechend werden die Kennzahlen $y_h(E_i)$ teils in eine zu extremierende Amalgamationsfunktion einbezogen, teils Satisfizierungs- oder Fixierungsbedingungen unterworfen.

4. Schritt
Die Bestimmung der Optimalalternative erfolgt im allgemeinen in zwei Teilschritten:[1)]

– Es werden alle die Alternativen ausgesondert, die nicht sämtlichen Satisfizierungs- und Fixierungsbedingungen genügen.

– Aus den nach dieser Vorauswahl verbleibenden Alternativen wird diejenige ausgewählt, für die die Amalgamationsfunktion den höchsten Wert aufweist.

Dabei können die beiden zuletzt genannten Schritte formal auf jeden Fall als die Zuordnung eines Präferenzwertes φ zu den bewerteten Alternativen a_i interpretiert werden, indem φ für die im ersten Schritt aussortierten Alternativen den Wert $-\infty$ erhält, während für die verbliebenen Alternativen der jeweilige Wert der Amalgamationsfunktion angesetzt wird. Diese Möglichkeit der formalen Transformation von Zielkonzepten erlaubt es uns, im folgenden ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit nur noch das im Abschnitt 2.2.2.2 skizzierte Grundkonzept der reinen Extremierung zu betrachten.

---

1 Bei „reinen“ Extremierungs- oder Satisfizierungs- bzw. Fixierungskonzepten entfällt jeweils ein Schritt.

Im folgenden sind somit zwei eng miteinander verknüpfte Probleme zu untersuchen:

– Welche Kennzahlen sollen zur Charakterisierung der Ergebnisverteilungen herangezogen werden? (Schritt 2 in unserem Schema.)

– In welcher Weise sollen diese Kennzahlen in der Präferenzfunktion Φ berücksichtigt werden? (Schritte 3 und 4 in unserem Schema.)

Im folgenden Abschnitt 2.3 werden wir Ihnen dementsprechend zunächst einen Überblick über die gebräuchlichsten Kennzahlen vermitteln.

Die Analyse darauf aufbauender Entscheidungsregeln erfolgt dann in den Kurseinheiten 4 und 5 dieses Kurses.

2.3 Kennzahlen zur Charakterisierung von Ergebnisverteilungen

2.3.1 Ordnungskriterien

Wenn man vor der Aufgabe steht, verschiedene Kennzahlen, die grundsätzlich zur Charakterisierung von Ergebnisverteilungen herangezogen werden können, ein wenig zu systematisieren, so bieten sich zwei **Ordnungskriterien** an:

Informationsbasis

– Zum einen können derartige Zahlen danach sortiert werden, auf Basis welcher Informationen sie bestimmt werden können (**Informationsbasis**).

Informationsinhalt

– Zum zweiten können die Kennzahlen im Hinblick darauf geordnet werden, auf welche Qualitätsmerkmale der zu charakterisierenden Ergebnisverteilung sie in erster Linie ausgerichtet sind, also worüber sie vorrangig informieren (**Informationsinhalt**).

(1) **Ordnung nach Informationsbasis**

Im Hinblick auf dieses Kriterium lassen sich unter den in der Literatur erörterten Kennzahlen zur Charakterisierung von Ergebnisverteilungen im wesentlichen folgende drei Typen unterscheiden:

Typ I: Der Wert der ausgesuchten Kennzahl kann allein aus dem Vektor alternativ möglicher Ergebniswerte der einzelnen Handlungsalternativen abgeleitet werden. Dabei wird im Extremfall nur ein besonders ausgezeichneter Wert der möglichen Ergebniswerte ausgewählt; es ist jedoch möglich, $y_h(E_i)$ im Hinblick auf mehrere oder alle Werte der Ergebnisvariablen zu definieren.

Ein Beispiel hierfür haben Sie im Glasperlenspiel des INDERS bereits kennen gelernt. Er richtete sich nach dem Maximalgewinn. Als Kennzahl zur Charakterisierung eines Ergebnisvektors wurde hier also der höchste Einzelwert verwendet.

Typ II: Der Wert der Kennzahlen kann nicht allein aus den Ergebniswerten der betrachteten Handlungsalternativen abgeleitet werden; vielmehr werden außerdem auch die Ergebniswerte anderer Handlungsalternativen berücksichtigt.

Auch hierzu kennen Sie schon ein Beispiel aus unserem Glasperlenspiel: Der REGENMACHER richtete sich nach dem „maximalen Ärger" – einer Kennzahl, zu deren Ermittlung er – wie aus Tabelle 3 und 4 deutlich wird – jeweils die Gesamtheit der Ergebnisverteilungen heranziehen musste.

Typ III: Der Wert der gesuchten Kennzahl wird jeweils aus der Verteilung der Ergebniswerte der betrachteten Alternative sowie den Eintrittswahrscheinlichkeiten abgeleitet. Die Verwendung von Kennzahlen dieses Typs ist natürlich nur in Risikosituationen möglich.[1)]

Auch für diese Art von Kennzahlen kennen Sie schon ein Beispiel aus dem Glasperlenspiel: Der BEICHTVATER verwendete die Gewinnwahrscheinlichkeit als Kennzahl.

(2) **Ordnung nach dem Informationsinhalt**

Unter dem Gesichtspunkt des Informationsinhaltes können wir folgende vier Typen von Kennzahlen unterscheiden:

Zentralmaße: Das sind Kennzahlen, die in erster Linie auf einen mittleren, für die Gesamtheit der möglichen Ergebniswerte „repräsentativen" Wert abstellen. Zentralmaße

1 Allerdings lassen sich, auch wenn keine Wahrscheinlichkeiten gegeben sind, zu etlichen Variablen des Typs III analoge Kennzahlen des Typs I definieren, in dem statt der Eintrittswahrscheinlichkeiten für einen bestimmten Ergebniswert die Zahl der Umweltzustände herangezogen wird, bei denen sich ein bestimmter Ergebniswert ergibt.

Darüber hinaus wäre rein theoretisch auch noch ein – dem Übergang von Typ I zu Typ II entsprechend – zu Typ III analoger Typ IV denkbar, bei dem zur Ermittlung der entsprechenden Kennzahl sowohl die Ergebniswerte als auch die Ergebniswahrscheinlichkeiten der betrachteten Handlungsalternative und anderer Handlungsalternativen herangezogen werden müssen. Wegen ihrer allgemein als sehr gering erachteten Relevanz werden derartige Kennzahlen in der Literatur jedoch nur äußerst selten erörtert, so dass wir an dieser Stelle auf ihre explizite Untersuchung verzichten können.

Extremmaße

Extremmaße: Das sind Kennzahlen, die primär an gewissen extremen (besonders guten oder besonders schlechten) Ergebniswerten orientiert sind.

Streuungsmaße

Streuungsmaße: Das sind Kennzahlen, die in erster Linie Ausdruck für das Ausmaß der Schwankungsbreite der möglichen Ergebniswerte sein sollen.

Verteilungsmaße höherer Ordnung: Darunter versteht man Kennzahlen, die sich auf weitere Eigenschaften von Verteilungen, z.B. deren Schiefe oder deren Wölbung beziehen.

Unsicherheitsmaße

Streuungsmaße und solche Extremmaße, die sich auf extrem ungünstige Ergebnismöglichkeiten beziehen, werden gemeinsam allgemein als Maße für das mit einer bestimmten Aktionsmöglichkeit verbundene „Risiko“ verwendet. Die Größen seien im Folgenden unter der Bezeichnung „Unsicherheitsmaße“ zusammengefasst.

Die gebräuchlichsten Kennzahlen der verschiedenen Typen werden Sie nun in den folgenden Abschnitten kennenlernen.

2.3.2 Zentralmaße

Kennzahlen dieser Gruppe sollen einen möglichst für die gesamte Ergebnisverteilung repräsentativen „Durchschnitts-“ oder „Normalwert“ angeben. Für den Fall vorgegebener Eintrittswahrscheinlichkeiten (Typ III) werden dabei vor allem folgende drei Kennzahlen erörtert:[1)]

Erwartungswert

(K_1) Mathematischer **Erwartungswert** μ, also:

$$y_1(E_i) = \mu(E_i) = \mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j \;.^{2)}$$

Diese Kennzahl gibt also das Durchschnittsergebnis einer Alternative an, wobei die Wahrscheinlichkeiten als Gewichte verwendet werden. Hat eine Ergebnisverteilung schon das in Tabelle 9 beschriebene Aussehen,

1 Die Kennzahlen y_h werden im folgenden in der Reihenfolge ihrer Nennung numeriert.

2 Der mathematische Erwartungswert wird im allgemeinen mit dem griechischen Buchstaben μ (My) bezeichnet.

e	0	20	40	60	80	100	120	140
p(e)	0,2	0,11	0,12	0,10	0,12	0,15	0,1	0,1

Tab. 9: Ergebnisverteilung (zur Berechnung des Erwartungswertes)

so ergibt sich der Erwartungswert:

$$\begin{aligned}\mu &= 0 \cdot 0{,}2 + 20 \cdot 0{,}11 + 40 \cdot 0{,}12 + 60 \cdot 0{,}1 + 80 \cdot 0{,}12 \\ &\qquad + 100 \cdot 0{,}15 + 120 \cdot 0{,}1 + 140 \cdot 0{,}1 \\ &= 63{,}6 \ .\end{aligned}$$

(K_2) **Wahrscheinlichster** Wert, auch **Modus** genannt. Diese Kennzahl kann allerdings nur in begrenztem Umfang als Zentralmaß angesehen werden. Hat eine Ergebnisverteilung etwa das durch Tab. 9 beschriebene Aussehen, so kann der wahrscheinlichste Wert $e=0$ wohl kaum als Zentralmaß angesehen werden. Modus

(K_3) **Median,** d.h. größter Ergebniswert, für den die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens erreicht wird, nicht unterhalb von 0,5 liegt. Für die in Tab. 9 angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung beträgt der Median 60.[1)] Median

Für den Ungewissheitsfall ließen sich als analoge Kennzahlen des Typs I definieren:

($K_{1'}$) Die durch die Anzahl der Umweltzustände dividierte Summe aller Ergebniswerte, also:

$$y_1'(E_i) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \ .$$

($K_{2'}$) Der Ergebniswert, der bei der größten Zahl von Umweltzuständen eintrifft.

($K_{3'}$) Der größte Ergebniswert, der in mindestens der Hälfte aller Umweltzustände nicht unterschritten wird.

1 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein bestimmter Ergebniswert mindestens erreicht wird, ergibt sich wiederum durch Kumulation der Wahrscheinlichkeiten „von rechts nach links“. Dementsprechend gilt für Tab. 9 $p(e \geq 100)=0{,}35$; $p(e \geq 80)=0{,}47$; $p(e \geq 60)=0{,}57$; $p(e \geq 40)=0{,}69$; ...

Wir erkennen, dass 60 der größte Ergebniswert ist, für den die Mindestwahrscheinlichkeit oberhalb von 50% liegt.

Übungsaufgabe 5:
Die Konsequenzen zweier Handlungsalternativen a_1, a_2 mögen sich durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen möglicher Ergebnisse umschreiben lassen:

p_j	0,1	0,06	0,2	0,15	0,17	0,13	0,02	0,17
s_j	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8
e_{1j}	–1	0	+1	+2	0	0	–1	+1
e_{2j}	–1	+1	+2	–2	+3	0	–1	0

a) Bestimmen Sie mathematischen Erwartungswert, wahrscheinlichsten Wert und Median!

(1) $\mu(E_1) =$

$\mu(E_2) =$

(2)

e	–2					+3
$p(e_1 = e)$						
$p(e_2 = e)$						

$y_2(E_1) =$ mit $p(e_1 = \quad) =$

$y_2(E_2) =$ mit $p(e_2 = \quad) =$

(3)

e	–2					+3
$p(e_1 \geq e)$						
$p(e_2 \geq e)$						

$y_3(E_1) =$ mit $p(e_1 \geq \quad) =$

$y_3(E_2) =$ mit $p(e_2 \geq \quad) =$

b) Angenommen, es lägen keine Wahrscheinlichkeitsangaben vor. Bestimmen Sie die unter $(K_{1'})$ bis $(K_{3'})$ umschriebenen Kennzahlen!

(1′) $y_{1'}(E_1) =$

$y_{1'}(E_2) =$

(2′)

e	–2					+3

$y_{2'}(E_1)$ = (Häufigkeit:)

$y_{2'}(E_2)$ = (Häufigkeit:)

(3′)

e	–2					+3

$y_{3'}(E_1)$ =

$y_{3'}(E_2)$ =

2.3.3 Extremmaße

Sollen die Zentralmaße tendenziell die im Normalfall zu erwartende Ergebnisentwicklung zum Ausdruck bringen, so dienen die Extremmaße gerade entgegengesetzt zur Verdeutlichung extremer, also besonders schlechter oder auch besonders guter Ergebnismöglichkeiten. Beispiele der Kennzahlen dieser Art finden wir unter allen drei im Hinblick auf die Informationsbasis klassifizierten Grundtypen I bis III.[1)]

Als Extremmaße des Typs I sind zu nennen:

Extremmaße von Typ I: bestmögliches Ergebnis

(K_4) Der **bestmögliche Ergebniswert** e^{max}, also:

$$y_4(E_i) = e_i^{max} = \max_j(e_{ij}) .$$

Diese Kennzahl ist Ihnen ja schon aus dem Glasperlenspiel des INDERS geläufig.

1 Sie erinnern sich noch an diese Klassifikation? Wenn nicht, lesen Sie noch einmal kurz auf S. 41 f. nach.

schlechtestmögliches Ergebnis

(K_5) Der **schlechtestmögliche Ergebniswert** e^{min}, also:

$$y_5(E_i) = e_i^{min} = \min_j(e_{ij}) \; .$$

Auch diese Kennzahl ist in unserem Glasperlenspiel schon aufgetaucht. Der INDER hatte sie in seinen Vorüberlegungen schon einmal für alle vier Setzalternativen ausgerechnet (Tab. 7!), seine Entscheidung allerdings nicht daran orientiert.

Extremmaße vom Typ II:

Als Extremmaße des Typs II sind insbesondere zu nennen:

maximales Bedauern

(K_6) Der maximale Nachteil gegenüber den bei den jeweiligen Umweltzuständen bestmöglichen Ergebniswerten (= **„maximales Bedauern“**),[1] also

$$y_6(E_i) = \max_j\left[\max_k(e_{kj}) - e_{ij}\right] \; .$$

In dem Glasperlenspiel des REGENMACHERS haben Sie bereits ein Beispiel kennengelernt, in dem diese Kennzahl als – zu minimierende Zielvariable – verwendet wurde.

Analog zu dem durch (K_6) definierten „maximalen Bedauern“ ließe sich als entgegengesetzte Kennzahl definieren:

maximales Frohlocken

(K_7) Der maximale Vorteil gegenüber den bei den jeweiligen Umweltzuständen schlechtestmöglichen Ergebniswerten (= **„maximales Frohlocken“**), also

$$y_7(E_i) = \max_j\left[e_{ij} - \min_k(e_{kj})\right] \; .$$

Daneben werden in der Literatur gelegentlich auch noch als entsprechend zu bildende Kennzahlen das **„minimale Bedauern“** und das **„minimale Frohlocken“** erörtert. Zur Definition dieser Kennzahlen wäre in den unter (K_6) und (K_7) angegebenen Formeln nur jeweils das „$\max_j$“ durch „$\min_j$“ zu ersetzen.

Extremmaße vom Typ III:

Folgende Kennzahlen schließlich bilden Beispiele für Extremmaße des Typs III:

1 Statt „Bedauern“ – oder „Ärger“, wie wir im Glasperlenspiel gesagt haben – wird häufig auch der englische Terminus „regret“ verwendet.

Fraktilswert

(K_8) Der **Fraktilswert** f, d.h. der größte Ergebniswert, für den die Wahrscheinlichkeit, dass er mindestens erreicht wird, nicht unterhalb einer kritischen Wahrscheinlichkeit p^k liegt.

Der so definierte Fraktilswert kann allerdings nur dann als Extremmaß angesehen werden, wenn p^k nahe bei 0 oder 1 liegt.[1] Wird p^k hingegen in der Nähe von 0,5 festgesetzt, so stellt der Fraktilswert ein Zentralmaß dar. So ist ja auch der in (K_3) definierte Median nichts anderes als der Fraktilswert für $p^k = 0{,}5$.

Zur näheren Veranschaulichung dieser Kennzahlen wollen wir uns die im folgenden dargelegte Ergebnisverteilung der Alternative a_2 einmal näher anschauen.

	p_1=0,1	p_2=0,06	p_3=0,2	p_4=0,15	p_5=0,17	p_6=0,13	p_7=0,02	p_8=0,17
e_{2j}=	–1	+1	+2	–2	+3	0	–1	0

Die „von rechts nach links" kumulierten Wahrscheinlichkeiten $p(e_2 \geq e)$ betragen:

e	–2	–1	0	+1	+2	+3	+4
$p(e_2 \geq e)$	1,00	0,85	0,73	0,43	0,37	0,17	0

Tab. 10: Kumulierte Wahrscheinlichkeiten von Ergebniswerten (zur Berechnung von Fraktilswerten und Verlustwahrscheinlichkeiten)

1 Unter der Bezeichnung „Value at Risk" (VaR) wird insbesondere im Finanzsektor ein Risikomaß verwendet, das bei näherer Betrachtung nicht nur konzeptionell, sondern auch inhaltlich der hier allgemein als Fraktilswert bezeichneten Kennzahl entspricht. So kann für ein bestimmtes Portefeuille aus risikobehafteten Wertpapieren ein auf der Basis einer unterstellten Haltedauer von einem Tag und einem vorgegebenen Konfidenzniveau von 99% errechneter VaR von z.B. 500.000 GE wie folgt interpretiert werden:

- Der mögliche Verlust aus diesem Portefeuille wird für den Fall, dass das Portefeuille bis zum nächsten Tag gehalten wird, mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% den Betrag von 500.000 GE nicht überschreiten.

Die nachfolgende - inhaltlich identische - Interpretation lässt erkennen, dass der VaR nichts anderes als ein spezieller Fraktilswert ist:

- Die Wahrscheinlichkeit, dass der mögliche Verlust aus dem betrachteten Portefeuille bei der unterstellten Haltedauer von einem Tag den Wert von 500.000 GE überschreitet, ist kleiner als 1%.

VaR-Modelle spielen zunehmend auch im Kontext bankaufsichtsrechtlicher Regelungen eine Rolle.

Grafisch lässt sich diese Verteilung durch folgende Treppenkurve darstellen:

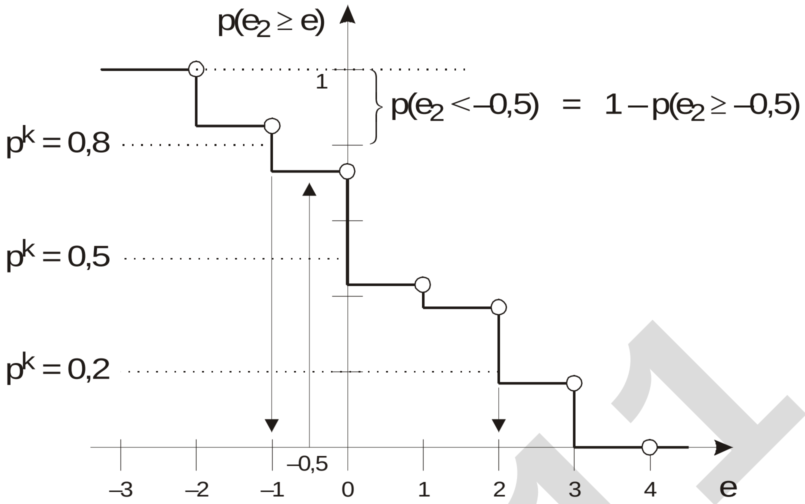


Abb. 3: Fraktilswert und Verlustwahrscheinlichkeit

Bei vorgegebener Wahrscheinlichkeit p^k kann der gesuchte Fraktilswert nun einfach als der Abszissenwert $e(p^k)$ bestimmt werden, den die Treppenkurve dem p^k-Wert zuordnet (vgl. die gepunkteten Linien in Abb. 3). So ergibt sich etwa für $p^k = 0{,}8$ (0,2) als Fraktilswert $f = -1$ (bzw. $f = +2$). Der Fraktilswert gibt hier das Ergebnisniveau an, das mit 80% (bzw. 20%) Wahrscheinlichkeit erreicht oder sogar noch übertroffen wird. Für nahe bei 1 liegende p^k-Werte kann der Fraktilswert also als ein auf den unteren (negativen) Ast der Ergebnisverteilung bezogenes Extremmaß angesehen werden; für nahe bei 0 liegende Werte hingegen als entgegengesetztes (positives) Extremmaß.

Enge Verwandtschaft mit dem Fraktilswert weist auch folgende Kennzahl auf:

Verlustwahrscheinlichkeit

(K_9) Die Wahrscheinlichkeit v dafür, dass ein besonders kritischer Ergebniswert e^k unterschritten wird (**Verlust-** oder **Ruinwahrscheinlichkeit** v), also:

$$y_9(E_i) = v_i = p(e_i < e^k) = \sum_{j \in K(i)} p_j \quad \text{mit} \quad K(i) = \left\{ j \mid e_{ij} < e^k \right\}.$$ [1]

Während zur Ermittlung des Fraktilswertes ein Wahrscheinlichkeitsniveau vorgegeben und ein zugehöriger Ergebniswert gesucht wird, wird bei dieser Kennzahl

1 Der in den geschweiften Klammern stehende Ausdruck ist zu lesen als: Menge aller Umweltzustände j, für die gilt, dass e_{ij} kleiner als e^k ist. Somit ist K(i) definiert als die (Index-) Menge aller Umweltzustände (j), bei denen die betrachtete Alternative (i) zu einem Ergebniswert (e_{ij}) führt, der unterhalb des kritischen Wertes e^k liegt.

nun umgekehrt ein bestimmtes Ergebnisniveau vorgegeben und ein zugehöriger Wahrscheinlichkeitswert ermittelt. Unter Benutzung der in Abb. 3 dargestellten Treppenkurve kann dann wie folgt verfahren werden:

– Man bestimmt den e^k entsprechenden Ordinatenwert $p(e \geq e^k)$. Dabei ist zu berücksichtigen, dass die senkrechten Kurvenstücke stets in ihrem oberen Endpunkt definiert sind.

– Der so bestimmte Wahrscheinlichkeitswert $p(e \geq e^k)$ wird dann von 1 subtrahiert, woraus sich sofort der gesuchte Wert $p(e < e^k)$ ergibt, da

$$p(e < e^k) \;=\; 1 - p(e \geq e^k) \; .$$

Beispiel 9:

In dem durch Tab. 10 und Abb. 3 verdeutlichten Beispiel erhält man so etwa folgende Werte:

Für $e^k = -0{,}5$ gilt:

$$\begin{aligned} p(e_2 < -0{,}5) &= 1 - p(e_2 \geq -0{,}5) \\ &= 1 - 0{,}73 \\ &= 0{,}27 \; . \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, einen über den Betrag von $-0{,}5$ hinausgehenden Verlust zu erleiden, beträgt also 0,27.

Für $e^k = +1$ gilt entsprechend:

$$\begin{aligned} p(e_2 < +1) &= 1 - p(e_2 \geq +1) \\ &= 1 - 0{,}43 \\ &= 0{,}57 \; . \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ergebnis von weniger als $+1$ erzielt wird, beträgt also 0,57.

Im Glasperlenspiel des BEICHTVATERS haben Sie übrigens das Gegenstück zu der hier untersuchten Kennzahl kennengelernt, nämlich die Gewinnwahrscheinlichkeit. Bezeichnet e^g die „Gewinnschwelle", d.h. den Ergebniswert, bei dem sich gerade ein Gewinn von ± 0 ergibt, so ist die Gewinnwahrscheinlichkeit, also die Wahrscheinlichkeit, dass die Gewinnschwelle überschritten wird, analog zu (K_9) definiert als:

Gewinnwahrscheinlichkeit

$$(K_{9'}) \qquad y_{9'}(E_i) \;=\; p(e_i > e^g) \;=\; \sum_{j \in G(i)} p_j \qquad \text{mit} \quad G(i) \;=\; \left\{ j \,|\, e_{ij} > e^g \right\} \; .$$

Ein drittes Extremmaß des Typs III schließlich stellt folgende Kennzahl dar:

Verlusterwartung

(K_{10}) Der Erwartungswert V des Abstandes aller unterhalb eines kritischen Ergebnisniveaus e^k liegenden Ergebnisse von diesem kritischen Wert e^k (**Verlusterwartung**), also:

$$y_{10}(E_i) = V_i = \sum_{j \in K(i)} p_j \cdot (e^k - e_{ij}) \quad \text{mit} \quad K(i) = \left\{ j \mid e_{ij} < e^k \right\}.$$

Für den im Schrifttum überwiegend betrachteten Spezialfall $e^k = 0$ vereinfacht sich diese Relation zu:

$$y'_{10}(E_i) = V'_i = -\sum_{j \in K(i)} p_j \cdot e_{ij} \quad \text{mit} \quad K(i) = \left\{ j \mid e_{ij} < 0 \right\}.$$

Im Unterschied zu (K_9) wird bei dieser Kennzahl also nicht nach der Wahrscheinlichkeit eines besonders ungünstigen Ausgangs gefragt, vielmehr werden alle Verlust-Ergebnisse mit ihren Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtet und die Produkte addiert.

Übungsaufgabe 6:

Bestimmen Sie für die in Übungsaufgabe 5 angegebenen Handlungsalternativen a_1 und a_2 jeweils

(1) den Fraktilswert f für $p^k = 0{,}75$,

(2) die Verlustwahrscheinlichkeit v für $e^k = 0$,

(3) die Verlusterwartung V für $e^k = 0$!

(1)

e	–2	–1				+3
$p(e_1 \geq e)$						
$p(e_2 \geq e)$						

Also gilt: f_1 = ; f_2 =

(2) $p(e_1 \geq \quad) =$

$p(e_2 \geq \quad) =$

Also gilt:

v_1 = = ;

v_2 = = ;

(3)

e	–2	–1				+3
$p(e_1 = e)$						
$p(e_2 = e)$						

$V_1 = -[\quad \cdot (-2) + \quad]$

$=$

$V_2 = -[\quad]$

$=$

2.3.4 Streuungsmaße

Zu den wichtigsten Streuungsmaßen, d.h. solchen Kennzahlen, die in erster Linie Indikator für die Schwankungsbreite sein sollen, zählen insbesondere:

(K_{11}) Die **Variationsbreite,** d.h. die Differenz zwischen maximalem und minimalem Ergebniswert, also

Variationsbreite

$$y_{11}(E_i) = \max_j(e_{ij}) - \min_j(e_{ij}) \ .$$

Für die in Tab. 9 dargestellte Ergebnisverteilung beispielsweise würde sich

$$y_{11}(E_i) = 140 - 0 = 140$$

ergeben.

(K_{12}) Die **mittlere absolute Abweichung** vom Erwartungswert, also:

mittlere absolute Abweichung

$$y_{12}(E_i) = \sum_{j=1}^{n} \left| e_{ij} - \mu_i \right| \cdot p_j \ .$$

Für die in Tab. 9 dargestellte Ergebnisverteilung gilt bekanntlich $\mu = 63{,}6$. Somit ergibt sich als mittlere absolute Abweichung:

$$
\begin{aligned}
y_{12} &= \left|0-63{,}6\right|\cdot 0{,}2 + \left|20-63{,}6\right|\cdot 0{,}11 + \left|40-63{,}6\right|\cdot 0{,}12 \\
&\quad + \left|60-63{,}6\right|\cdot 0{,}1 + \left|80-63{,}6\right|\cdot 0{,}12 + \left|100-63{,}6\right|\cdot 0{,}15 \\
&\quad + \left|120-63{,}6\right|\cdot 0{,}1 + \left|140-63{,}6\right|\cdot 0{,}1 \\
&= 63{,}6\cdot 0{,}2 + 43{,}6\cdot 0{,}11 + 23{,}6\cdot 0{,}12 + 3{,}6\cdot 0{,}1 + 16{,}4\cdot 0{,}12 \\
&\quad + 36{,}4\cdot 0{,}15 + 56{,}4\cdot 0{,}1 + 76{,}4\cdot 0{,}1 \\
&= 41{,}416\ .
\end{aligned}
$$

Zur Ermittlung dieser Kennzahl werden also die Abweichungen vom Erwartungswert absolut genommen, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und aufaddiert.

(K_{13}) Die quadratische Abweichung vom Erwartungswert, d.h. **Varianz** σ^2 (oder deren Wurzel, die **Standardabweichung** σ), also

$$
y_{13.1}(E_i) = \sigma^2(E_i) = \sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_{ij}-\mu_i)^2 \cdot p_j
$$

oder

$$
y_{13.2}(E_i) = \sigma(E_i) = \sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (e_{ij}-\mu_i)^2 \cdot p_j}\ . \quad ^{1)}
$$

Für die in Tab. 9 dargestellte Ergebnisverteilung beispielsweise ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= (-63{,}6)^2\cdot 0{,}2 + (-43{,}6)^2\cdot 0{,}11 + (-23{,}6)^2\cdot 0{,}12 \\
&\quad + (-3{,}6)^2\cdot 0{,}1 + 16{,}4^2\cdot 0{,}12 + 36{,}4^2\cdot 0{,}15 \\
&\quad + 56{,}4^2\cdot 0{,}1 + 76{,}4^2\cdot 0{,}1 \\
&= 2219{,}04 \\
\sigma &= \sqrt{2219{,}04} = 47{,}11\ .
\end{aligned}
$$

Zur Ermittlung der Varianz werden also alle Abweichungen vom Erwartungswert quadriert, mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gewichtet und dann addiert.

1 Die Standardabweichung wird üblicherweise mit dem griechischen Buchstaben σ (sigma) bezeichnet; die Varianz entsprechend mit σ^2.

Die Kennzahlen informieren also entweder über die gesamte Streubreite der Ergebniswerte oder über die durchschnittlichen Abweichungen vom Erwartungswert. An Stelle der Kennzahlen (K_{12}) und (K_{13}) könnten natürlich auch die Abweichungen von einem anderen Zentralwert (z.B. Modus und Median) als weitere Kennzahlen definiert werden.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass in betriebswirtschaftlichen Modellen, die Entscheidungssituationen unter Risiko implizieren, als Zentralwert häufig der Erwartungswert μ (K(1)), als Extremmaß die Verlusterwartung (K(10)) und als Streuungsmaß die Varianz σ^2 bzw. die Standardabweichung σ (K(13)) verwandt werden.

Übungsaufgabe 7:

Zum Abschluss des einführenden Kapitels 2 lösen Sie bitte folgende Aufgabe:

a) Erläutern Sie stichwortartig folgende Termini:

- Spielsituation
- Risikosituation
- Ungewissheitssituation
- Präferenzfunktion
- Optimierungskriterium
- Entscheidungsregel
- subsidiäre Zielvariable
- absolute Dominanz
- Zustandsdominanz .

b) Welche der insgesamt 17 Kennzahlen, die Sie im Kapitel 2.3 kennengelernt haben, sind für Entscheidungen bei Ungewissheit relevant?

Diese Seite bleibt frei!

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

a) Die zur Auswahl stehenden Alternativen können durch folgende Setz-Beträge (jeweils 1.000 Dollar) gekennzeichnet werden:

Zahl	Tisch I		Tisch II	
	„10“	„27“	„10“	„27“
a_1	10	10	0	0
a_2	10	5	0	5
a_3	10	0	0	10
a_4	5	10	5	0
a_5	5	5	5	5
a_6	5	0	5	10
a_7	0	10	10	0
a_8	0	5	10	5
a_9	0	0	10	10

Die relevanten Umweltzustände sind aus den Kombinationen der an beiden Tischen eintretenden Zahlen zu ermitteln, wie es folgende Tabelle verdeutlicht.

Tisch		I		
	Zahl	„10“	„27“	„*“
II	„10“	s_1	s_2	s_3
	„27“	s_4	s_5	s_6
	„*“	s_7	s_8	s_9

*: weder 10 noch 27

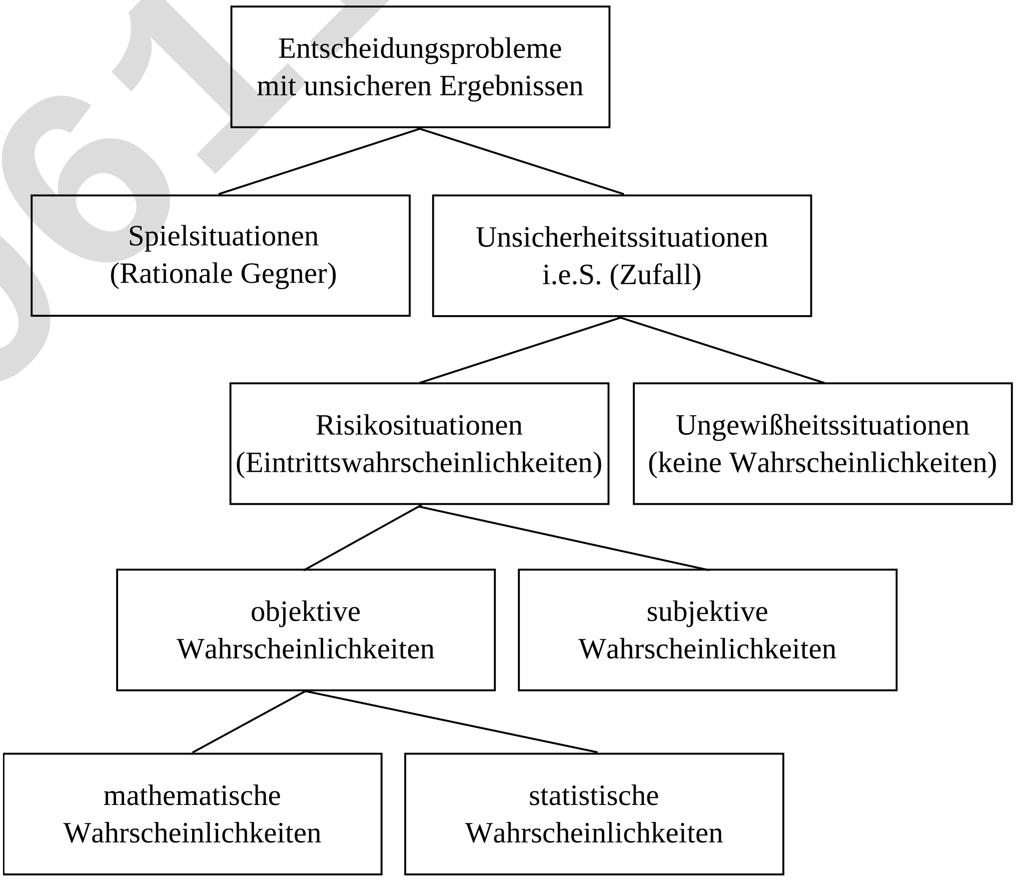
s_8 kennzeichnet z.B. den Umweltzustand, bei dem am Tisch I die 27 und bei Tisch II weder 10 noch 27, sondern eine der restlichen Zahlen eintritt.

b) Es ergibt sich folgende Ergebnismatrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7	s_8	s_9
a_1	340	340	–20	340	340	–20	340	340	–20
a_2	340	160	–20	520	340	160	340	160	–20
a_3	340	–20	–20	700	340	340	340	–20	–20
a_4	340	520	160	160	340	–20	160	340	–20
a_5	340	340	160	340	340	160	160	160	–20
a_6	340	160	160	520	340	340	160	–20	–20
a_7	340	700	340	–20	340	–20	–20	340	–20
a_8	340	520	340	160	340	160	–20	160	–20
a_9	340	340	340	340	340	340	–20	–20	–20

Übungsaufgabe 2

a)



b) (1): subjektiv

(2): mathematisch, nach der Formel

$$p = \frac{\text{Zahl der "günstigen" Ereignisse (g)}}{\text{Zahl der möglichen Ereignisse (m)}} .$$

Dabei gilt $g = 15$, da folgende Kombinationen von Augenzahlen zu einer Summe von 8 oder mehr führen:

lfd. Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1. Würfel	2	3	4	5	6	3	4	5	6	4	5	6	5	6	6
2. Würfel	6	5	4	3	2	6	5	4	3	6	5	4	6	5	6
Summe	8	8	8	8	8	9	9	9	9	10	10	10	11	11	12

Die Gesamtzahl denkbarer Kombinationen beträgt hingegen $m = 6^2 = 36$.

Also gilt: $p = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

(3): subjektiv

(4): statistisch

(5): mathematisch, nach der Formel

$$p = \frac{g}{m}$$

mit

$g = 1$ (es gibt nur genau eine Möglichkeit mit sechs Kreuzen, die richtigen sechs Zahlen zu treffen)

$m = \binom{49}{6}$ [1)]

1 Die allgemeine Formel lautet: $\binom{N}{n} = \frac{N!}{(N-n)!\, n!}$.

$$= \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$$

$$= 13.983.816\,.$$

p beträgt also ca. 1:14 Millionen.

(6): statistisch

c) Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen einer bestimmten Zahl an einem Roulettetisch beträgt (gem. der Formel [$p = g/m$]) 1/37 (36 „Zahlen" und „Zero"). Die Wahrscheinlichkeit, dass weder 10 noch 27 eintreffen, beträgt entsprechend 35/37.

Da die Kugelläufe an beiden Tischen unabhängig voneinander sind, ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Zusammentreffen zweier bestimmter Ereignisse an beiden Tischen als Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. Also gilt:[1)]

$$p_1 = p(10/I) \cdot p(10/II) = \frac{1}{37^2} \approx 0{,}00073$$

$$p_2 = p(27/I) \cdot p(10/II) = \frac{1}{37^2} \approx 0{,}00073$$

$$p_3 = p(*/I) \cdot p(10/II) = \frac{35}{37} \cdot \frac{1}{37} \approx 0{,}02557$$

$$p_4 = p_5 = \frac{1}{37^2} \approx 0{,}00073 \quad \text{(analog zu } p_1, p_2\text{)}$$

$$p_6 = p_7 = p_8 = \frac{35}{37} \cdot \frac{1}{37} \approx 0{,}02557 \quad \text{(analog zu } p_3\text{)}$$

$$p_9 = p(*/I) \cdot p(*/II) = \left(\frac{35}{37}\right)^2 \approx 0{,}89481\,.$$

1 Zur Schreibweise folgende Erläuterungen:
* bedeutet nach wie vor irgendeine Zahl außer 10 und 27.

p(10/I) beispielsweise bezeichnet die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an Tisch I die 10 fällt. Die übrigen Angaben sind entsprechend zu lesen.

Übungsaufgabe 3

Für die einzelnen Handlungsalternativen ergeben sich – unter Berücksichtigung der in Übungsaufgabe 2c) ermittelten Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Umweltzustände – folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

a_1:

e	–20	340
$p(e_1)$	$1295 / 37^2$	$74 / 37^2$

a_2:

e	–20	160	340	520
$p(e_2)$	$1260 / 37^2$	$71 / 37^2$	$37 / 37^2$	$1 / 37^2$

a_3:

e	–20	340	700
$p(e_3)$	$1296 / 37^2$	$72 / 37^2$	$1 / 37^2$

a_5:

e	–20	160	340
$p(e_5)$	$1225 / 37^2$	$140 / 37^2$	$4 / 37^2$

Beispielhafte Erläuterung:
Aus der als Lösung zu Übungsaufgabe 1 angegebenen Ergebnismatrix geht hervor, dass bei a_1 die Zustände s_3, s_6 und s_9 zu einem Ergebnis von –20 führen; also gilt (vgl. Lösung zu Übungsaufgabe 2c)

$$p(e_1 = -20) = p_3 + p_6 + p_9 = \frac{35}{37^2} + \frac{35}{37^2} + \frac{35^2}{37^2} = \frac{1295}{37^2} .$$

Die Zustände s_1, s_2, s_4, s_5, s_7 und s_8 hingegen führen zu einem Ergebnis von +340; also gilt:

$$p(e_1 = +340) = p_1 + p_2 + p_4 + p_5 + p_7 + p_8$$
$$= \frac{1}{37^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{1}{37^2} + \frac{35}{37^2} + \frac{35}{37^2} = \frac{74}{37^2} .$$

Bei Ermittlung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen von a_2, a_3 und a_5 ist ganz entsprechend zu verfahren.

Übungsaufgabe 4

REGENMACHER: Auswahl der Alternative, bei der der maximal mögliche Ärger am geringsten ist

bzw.

Minimierung des maximal möglichen Ärgers.

BEICHTVATER: Auswahl der Alternative, bei der die Wahrscheinlichkeit, einen Gewinn zu erzielen, am größten ist

bzw.

Maximierung der Gewinnwahrscheinlichkeit.

INDER: Auswahl der Alternative, bei der der maximal mögliche Gewinn am größten ist

bzw.

Maximierung des maximal möglichen Gewinnes.

Übungsaufgabe 5

a) Es ergibt sich:

(1)
$$\mu(E_1) = \sum_{j=1}^{8} e_{1j} \cdot p_j = -0{,}1 + 0 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0 + 0 - 0{,}02 + 0{,}17 = +0{,}55$$

$$\mu(E_2) = -0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}4 - 0{,}3 + 0{,}51 + 0 - 0{,}02 + 0 = +0{,}55\ .$$

Beide Ergebnisverteilungen weisen also trotz mancher Unterschiede den gleichen Erwartungswert auf.

(2) Die Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen bestimmter Werte ergeben sich aus der Addition der jeweiligen p_j. Für die beiden Alternativen ergeben sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

e	–2	–1	±0	+1	+2	+3
$p(e_1 = e)$	0	0,12	0,36	0,37	0,15	0
$p(e_2 = e)$	0,15	0,12	0,30	0,06	0,20	0,17

Also betragen die wahrscheinlichsten Werte

$$y_2(E_1) \;=\; +1 \qquad (\text{mit } \; p(e_1 = 1) \;=\; 0{,}37)$$

$$y_2(E_2) \;=\; \pm 0 \qquad (\text{mit } \; p(e_2 = 0) = 0{,}30) \;.$$

(3) Um den Median zu ermitteln, berechnen wir aus den vorstehenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen zunächst für jeden e-Wert die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens erreicht wird. Dazu kumulieren wir die angegebenen Wahrscheinlichkeiten „von oben"; dabei ergibt sich:

e	–2	–1	±0	+1	+2	+3
$p(e_1 \geq e)$	1,00	1,00	0,88	0,52	0,15	0
$p(e_2 \geq e)$	1,00	0,85	0,73	0,43	0,37	0,17

Der Median ist nun als der größte Ergebniswert definiert, der mit mindestens 50%-iger Wahrscheinlichkeit erreicht oder überschritten wird, also gilt:

$$y_3(E_1) \;=\; +1 \qquad (\text{mit } \; p(e_1 \geq 1) = 0{,}52)$$

$$y_3(E_2) \;=\; \pm 0 \qquad (\text{mit } \; p(e_2 \geq 0) = 0{,}73) \;.$$

b) In diesem Fall ergibt sich:

(1′) $$y_1'(E_1) \;=\; \frac{1}{8} \cdot \sum_{j=1}^{8} e_{1j} \;=\; \frac{1}{8} \cdot (+\,2) \;=\; \frac{2}{8}$$

$$y_1'(E_2) \;=\; \frac{1}{8} \cdot (+\,2) \;=\; \frac{2}{8} \;.$$

(2′) Für die einzelnen Ergebniswerte zwischen –2 und +3 ergeben sich folgende Häufigkeiten (Abkürzungen: H_i):

e	–2	–1	±0	+1	+2	+3
H_1	0	2	3	2	1	0
H_2	1	2	2	1	1	1

Mithin gilt für die häufigsten Werte:

$$y_2'(E_1) \;=\; \pm 0 \qquad \text{(Häufigkeit 3)}$$
$$y_2'(E_2) \;=\; -1 \text{ oder } \pm 0 \qquad \text{(Häufigkeit jeweils 2)} \;.$$

(3) Die dem Median entsprechende Kennzahl lässt sich aus einer „von rechts nach links“ kumulierten Häufigkeitsverteilung ableiten. Die entsprechenden Werte (Abkürzung: KH_i) geben jeweils an, bei wie vielen Umweltzuständen der jeweilige e-Wert erreicht oder überschritten wird.

e	–2	–1	±0	+1	+2	+3
KH_1	8	8	6	3	1	0
KH_2	8	7	5	3	2	1

Gesucht ist nun der größte Wert, der mindestens in der Hälfte aller Fälle (hier also in vier Fällen) nicht unterschritten wird. So ergibt sich:

$$y_3'(E_1) \;=\; \pm 0$$
$$y_3'(E_2) \;=\; \pm 0 \;.$$

Übungsaufgabe 6

(1) Die benötigten kumulierten Wahrscheinlichkeitswerte können unmittelbar aus der Tabelle zur Lösung von Übungsaufgabe 5a), Teil (3) entnommen werden. Für die gesuchten Fraktilswerte erkennt man daraus sofort:

$$f_1 \;=\; \pm 0\,; \qquad f_2 \;=\; -1 \;.$$

(2) Aus der gleichen Tabelle erkennt man außerdem, dass gilt:

$$p(e_1 \geq 0) \;=\; 0{,}88$$

$$p(e_2 \geq 0) \;=\; 0{,}73 \;.$$

Also ergibt sich für die Verlustwahrscheinlichkeit:

$$v_1 = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$$

$$v_2 = 1 - 0{,}73 = 0{,}27 \; .$$

(3) Zur Berechnung der Verlusterwartung kann auf die Tabelle in der Lösung zu Übungsaufgabe 5a), Teil (2) zurückgegriffen werden. Demnach gilt:

$$V_1 = \left|0 \cdot (-2) + 0{,}12 \cdot (-1)\right| = 0{,}12$$

$$V_2 = \left|0{,}15 \cdot (-2) + 0{,}12 \cdot (-1)\right| = 0{,}42 \; .$$

Übungsaufgabe 7

a) **Spielsituation**
Unsicherheitssituation, bei der die Umweltzustände von rational handelnden Gegenspielern bestimmt werden.

Risikosituation
Unsicherheitssituation, bei der den alternativ möglichen Umweltzuständen (subjektive oder objektive) Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können; Gegensatz: Ungewissheitssituation.

Ungewissheitssituation
Unsicherheitssituation, bei der den alternativ möglichen Umweltzuständen keine (subjektiven oder objektiven) Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können; Gegensatz: Risikosituation.

Präferenzfunktion
Funktion, die jeder Handlungsmöglichkeit einen Präferenzwert zuordnet, mit dessen Hilfe Alternativen ihrer Vorziehenswürdigkeit nach geordnet werden können.

Optimierungskriterium
Anforderungen, die an die zu wählende Handlungsalternative gestellt werden. Die drei Grundtypen der Optimierungskriterien sind: Extremierung, Satisfizierung, Fixierung.

Entscheidungsregel
(Verbale) Aussage darüber, nach welchen Kriterien aus den zur Wahl stehenden Alternativen die zu realisierende Aktion bestimmt werden soll; eine Entscheidungsregel wird durch eine Präferenzfunktion konkretisiert.

Subsidiäre Zielvariablen
Entscheidungsrelevante Kennzahlen der Ergebnisverteilung einer Alternative.

Absolute Dominanz
herrscht, wenn in einer Entscheidungssituation unter Unsicherheit das schlechtestmögliche Ergebnis einer Alternative a_i nicht schlechter ist als das bestmögliche Ergebnis einer Alternative a_k.

Zustandsdominanz
herrscht, wenn in einer Entscheidungssituation unter Unsicherheit bei keinem der alternativ möglichen Umweltzustände das Ergebnis einer Alternative a_i schlechter, bei mindestens einem Umweltzustand jedoch besser ist als das Ergebnis einer Alternative a_k.

b) Da im Kapitel 2.3 ausschließlich Ungewissheitssituationen erörtert werden sollen, sind nur Kennzahlen der Typen I und II (vgl. Abschnitt 2.3.1) relevant, also Kennzahlen, zu deren Ermittlung **keine Wahrscheinlichkeitsangaben** benötigt werden. Im Einzelnen sind dies die Kennzahlen (K_1'), (K_2'), (K_3'), (K_4), (K_5), (K_6), (K_7) und (K_{11}).