Univ.-Prof. Dr. Alfred Endres
Akad. Oberrat Dr. Jörn Martiensen

Theorie der Marktwirtschaft (Mikroökonomik)

Kurseinheit 3:
Theorie der Firma

wirtschafts
wissenschaft

FernUniversität in Hagen

Inhaltsübersicht

Abbildungsverzeichnis

Diese Seite bleibt aus technischen Gründen frei

Kurseinheit 3: Theorie der Firma

3.1. Einführung

Eine Firma ist ein Wirtschaftssubjekt (ein Akteur), welches *Güter* für den Markt produziert. Der Begriff Güter umfasst dabei sowohl materielle als auch immaterielle Produkte, d.h. Dienstleistungen. Wie Sie bereits wissen, verstehen wir unter einem *Wirtschaftssubjekt* eine natürliche oder juristische Person, welche selbständig Wirtschaftspläne aufstellt und verfolgt. Private und öffentliche Haushalte sind zwar ebenfalls Wirtschaftssubjekte, welche Güter produzieren, sie produzieren aber nicht für den Markt. *Private Haushalte* produzieren für den eigenen Bedarf (vor allem Dienstleistungen), *öffentliche Haushalte* produzieren Güter, die der Allgemeinheit ohne spezielles Entgelt zur Verfügung gestellt werden. Denken Sie z.B. an Dienstleistungen im Bildungs- und Ausbildungsbereich, im Bereich der inneren und äußeren Sicherheit, im Bereich des Verkehrssystems usw.

Begriffe

Zur Herstellung der Güter benötigt die Firma andere Güter, die als *Produktionsfaktoren* bezeichnet werden. Diese Produktionsfaktoren fragt die Firma auf den Faktormärkten nach. Wir werden weiter unten sehen, dass verschiedene Arten von Produktionsfaktoren zu unterscheiden sind. Unter dem Gesichtspunkt der Produktion können wir *Firmen* als Institutionen zur Transformation von Gütern ansehen: Güter, welche den Haushalten keinen direkten Nutzen stiften, werden in solche Güter transformiert, welche einen direkten Nutzen stiften.

Übungsaufgabe 1

Nennen Sie Beispiele für die Transformation von Gütern, die keinen direkten Konsumnutzen stiften, in solche, die einen derartigen Nutzen besitzen.

Die *mikroökonomische Theorie der Firma* ist eine vergleichsweise abstrakte Theorie. Ihr Ziel ist es, die Entscheidungen von Unternehmen in Bezug auf die Produktion von Gütern zu erklären. Bei der Behandlung der Marktpreisbildung in den Kurseinheiten 4 und 5 werden wir sehen, dass die grundlegenden Techniken der mikroökonomischen Analyse, die zur Erklärung der Produktionsentscheidungen eingesetzt werden, auch auf andere Bereiche unternehmerischen Handelns angewendet werden können, nämlich die Preispolitik, die Werbung, die Qualitätswahl u.ä. Speziellere Analysen, welche weitere Bereiche unternehmerischer Entscheidungen einbeziehen, werden im Rahmen der *Theorie der industriellen Organisation* und der *betriebswirtschaftlichen Theorie* durchgeführt.

Theorie der Firma

Die Theorie der Marktwirtschaft begnügt sich damit, die Produktionsentscheidungen von Unternehmen insoweit zu erfassen, wie es zur Erklärung der Preisbildung auf den Märkten erforderlich ist. Hierfür hat sich ein recht einfaches Modell als ausreichend erwiesen. Um den Unterschied zwischen dem Untersuchungsgegenstand der Betriebswirtschaftslehre und dem der Theorie der Marktwirtschaft deutlich zu machen, verwenden wir in der vorliegenden dritten Kurseinheit unseres Kurses den Begriff der *Firma* und nicht den der *Unternehmung*. Unser *Modell der*

Firma und Unternehmung

Firma besitzt eine Struktur, welche der des Haushalts sehr ähnlich ist: Beide Wirtschaftssubjekte versuchen, ein bestimmtes Ziel so gut wie möglich zu erreichen. Dabei müssen sie gewisse Restriktionen beachten.

Ziel der Firma

Als Ziel der Firma wird in der mikroökonomischen Theorie i.d.R. die Maximierung des Periodengewinns unterstellt. Er ist definiert als Differenz zwischen dem Erlös und den Kosten einer Produktionsperiode. Der *Erlös* ist das mathematische Produkt aus der erzeugten Menge und dem Preis des Gutes. Mit dem Begriff der Kosten werden wir uns weiter unten noch genauer beschäftigen müssen.

Produktionsperiode

Die *Produktionsperiode* umfasst den Zeitraum von der Aufnahme der Produktion bis zur Fertigstellung der geplanten Produktmenge. Bei der Verfolgung dieses Ziels muss die Firma zwei Arten von Restriktionen beachten: eine technische und eine ökonomische. Die *technische Restriktion* beschreibt die Gesetzmäßigkeiten, die bei der Produktion zu beachten sind.

Produktionsfunktion

Wir bezeichnen sie als *Produktionsfunktion*.[1] Die *ökonomische Restriktion* beschreibt das Verhalten der Nachfrager. Sie wird als *Marktnachfragefunktion* bezeichnet. Will man spezielle Fragen untersuchen, kann es notwendig sein, weitere Restriktionen einzuführen, z.B. Finanzierungsrestriktionen oder Restriktionen, die sich aus dem Verhalten der Konkurrenten ergeben. In der vorliegenden Kurseinheit werden wir von derartigen Restriktionen absehen. Wir stellen uns vor, dass sich eine Firma jeden für die Durchführung der Produktion erforderlichen Kredit zu dem geltenden Marktzins beschaffen kann. Jede Produktmenge kann zu dem am Markt herrschenden Preis abgesetzt werden, jede Faktormenge zu den am Markt geltenden Preisen gekauft werden. Jede Firma stellt genau ein Produkt her. Alle Größen, welche für die Produktionsentscheidung der Firma relevant sind, werden als bekannt vorausgesetzt. Mit anderen Worten:

Vollständige Information

Es besteht *vollständige Information*.

Übungsaufgabe 2

Können Sie sich vorstellen, über welche Größen eine Firma informiert sein muss, um ihre Produktionsentscheidung treffen zu können? Mit Produktionsentscheidung ist die Entscheidung über die Menge eines herzustellenden Produktes gemeint.

Realitätsnähe der Annahmen

Diese Annahmen mögen Ihnen zunächst etwas weltfremd vorkommen. Ob sie es wirklich sind, ist allerdings weniger durch einen Vergleich der Annahmen mit der Realität zu ermitteln, als vielmehr durch einen Vergleich von Analyseergebnissen, welche auf unterschiedlichen Annahmen basieren. *Wenn sich zeigt, dass die Ant-*

---

[1] Wir werden weiter unten sehen, dass die Interpretation der Produktionsfunktion als rein technische Restriktion nur als erste Annäherung hilfreich ist. Eine genauere Betrachtung zeigt, dass die Produktionsfunktion auch eine wichtige ökonomische Determinante besitzt.

worten auf uns interessierende Fragen weitgehend unabhängig von bestimmten Annahmen sind, sollte man die jeweils einfachste Annahme wählen. Ziel unserer Analyse ist es ja nicht, herauszufinden, wie sich ein konkretes Unternehmen in einer bestimmten Situation am besten verhalten sollte, sondern wie ein beliebiges Unternehmen mit seiner Produktmenge reagieren wird, wenn sich die Faktorpreise ändern oder wenn sich der Marktpreis des von ihm hergestellten Produktes ändert.

Dabei geht es nicht um die Beschreibung individuellen Verhaltens, sondern um die Erkenntnis von Strukturen, die über den Einzelfall hinaus von allgemeiner Bedeutung sind. Diese allgemeinen Strukturen sind von der in der Mikroökonomik vorherrschenden Arbeitshypothese geprägt, die Firma strebe danach, ihren Gewinn zu maximieren. Man kann sich die folgenden Abschnitte am besten erschließen, wenn man sie als Stilisierung des für das Erreichen der gewinnmaximalen Situation notwendigen Entscheidungsprozesses interpretiert.[2] Dieser Prozess verläuft in drei Stufen:

1. Stufe der Entscheidungsfindung

Stellen Sie sich zunächst ein Unternehmen vor, welches ein bestimmtes Produkt herstellen möchte. Das Unternehmen ist mit einer großen Zahl von Möglichkeiten konfrontiert, dieses Produkt auf unterschiedliche Weise durch die Kombination unterschiedlicher Produktionsfaktoren herzustellen. Um das Licht der Gewinnmaximierung in diesem undurchdringlichen Dickicht überhaupt wahrnehmen zu können, ist es naheliegend, dass das Unternehmen viele der technisch bestehenden Möglichkeiten von vornherein aus der Betrachtung ausschließt. Dies sind diejenigen Möglichkeiten, die „von Natur aus" überhaupt nicht als Mittel auf dem Weg zur Gewinnmaximierung in Frage kommen. Diejenige „natürliche" Eigenschaft eines Produktionsprozesses, die seine Eignung als Instrument der Gewinnmaximierung von vornherein ausschließt, ist seine Ineffizienz. *Ein Produktionsverfahren ist gerade dann ineffizient, wenn ein anderes Verfahren existiert, mit dem es möglich ist, denselben Output herzustellen und dabei von (mindestens) einem Produktionsfaktor eine geringere Menge einzusetzen, ohne von irgendeinem anderen Produktionsfaktor eine größere Menge zu verbrauchen.* Solange wir in einer Welt der Knappheit leben (und nur unter dieser Bedingung hat die mikroökonomische Theorie überhaupt eine Existenzberechtigung) wird eine Firma, die ihren Gewinn maximieren will, unter keinen Umständen ein Produktionsverfahren verwenden, das ineffizient ist.

Übungsaufgabe 3

Eine Firma, die ihren Gewinn maximieren möchte, wird niemals ein ineffizientes Produktionsverfahren wählen. Folgt daraus, dass eine Firma, die nicht ihren Gewinn, sondern z.B. ihren Absatz maximieren möchte, ineffizient produzieren wird?

2 Wenn hier das Wort „Prozess" verwendet wird, so ist damit nicht die Modellierung eines intertemporalen Zusammenhangs gemeint. Vielmehr handelt es sich um eine Darstellung von Eigenschaften des Gewinnmaximums, die tatsächlich simultan erfüllt sind. Aus didaktischen Gründen wird so getan, als seien sie zeitlich hintereinander geschaltet.

Aus der Menge aller möglichen Produktionsverfahren werden folglich in der *ersten Stufe* alle ineffizienten Verfahren von vornherein als irrelevant von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen.

Sie werden sehen, dass in dem folgenden Kapitel 3.2 über die *Produktionsfunktion* davon ausgegangen wird, dass die Firmen diesen wichtigen „ersten Schritt" auf dem langen Marsch zur Gewinnmaximierung bereits vollzogen haben. Wie Sie dort näher ausgeführt finden, erfasst die Produktionsfunktion lediglich diejenigen Zusammenhänge zwischen Produktionsfaktoren und Produktionsergebnis, die dem Effizienzpostulat genügen.

2. Stufe der Entscheidungsfindung

Natürlich ist die Menge der effizienten Produktionsverfahren immer noch viel zu groß, um mit einem Blick sehen zu können, wie das Ziel der Gewinnmaximierung realisiert werden kann.[3] Das zweite mikroökonomische Auswahlkriterium auf dem Weg zur Gewinnmaximierung erschließt sich wie folgt: Ganz gleich, welche Menge des in Rede stehenden Endprodukts die Firma sich letztlich zu produzieren entschließen wird, eines ist gewiss: Das Ziel der Gewinnmaximierung wird sie nur erreichen, wenn sie ihre Produktion in der *zweiten Stufe* der Entscheidungsfindung so organisiert, dass die Kosten so gering wie möglich ausfallen. Da die Kosten per definitionem die unangenehme Eigenschaft besitzen, den Gewinn zu mindern, gilt schon vor den später im Text im Einzelnen folgenden Erläuterungen der Grundsatz „*Keine Gewinnmaximierung ohne Kostenminimierung*!" Aus der Vielzahl der effizienten Möglichkeiten, eine bestimmte Endproduktmenge zu erzielen, wird die gewinnmaximierende Firma also genau diejenige auswählen, mit der das Produktionsziel zu geringsten Kosten erreicht wird.

Wir sehen, dass es sich bei der kostenminimalen Kombination von Produktionsfaktoren um eine „bedingt" geltende Eigenschaft handelt. Welcher Produktionsprozess ein gegebenes Endprodukt zu minimalen Kosten produziert, hängt nämlich davon ab, was die Produktionsfaktoren kosten. Bei einem gegebenen Satz von Faktorpreisen mag ein bestimmter Produktionsprozess kostenminimal sein. Er kann seine herausgehobene Stellung aber ohne weiteres verlieren, wenn sich die Faktorpreise ändern.

Die hier angesprochenen Zusammenhänge werden wir in Kapitel 3.3 wie folgt strukturiert darstellen: Nachdem wir uns zunächst in Abschnitt 3.3.1 etwas ausführlicher mit dem Begriff der Kosten befasst haben, werden wir im folgenden Abschnitt langfristige Kostenfunktionen kennen lernen. In Unterabschnitt 3.3.2.1 beschreiben wir zunächst die Eigenschaften des kostenminimalen Bündels von Produktionsfaktoren für eine vorgegebene Ausbringungsmenge grafisch und analytisch. Wir bezeichnen die betreffende Konstellation von Produktionsfaktoren als *Minimalkostenkombination.* Dann verallgemeinern wir die dabei gewonnenen Er-

3 Scherzhaft, aber doch wahr könnte man sagen: „Obwohl mit dem Aussondern ineffizienter Verfahren unendlich viele Möglichkeiten für die weitere Betrachtung entfallen, bleiben dennoch unendlich viele Möglichkeiten für die weitere Betrachtung übrig."

kenntnisse auf beliebig viele alternative Ausbringungsmengen. Für jede dieser Mengen existiert eine Minimalkostenkombination. Wir können die jeweils betrachtete Ausbringungsmenge und die bei Realisierung der zugehörigen Minimalkostenkombination anfallenden Kosten einander in Form einer Funktion zuordnen. Diese heißt *langfristige Kostenfunktion* (Unterabschnitt 3.3.2.2). Das Adjektiv „langfristig" soll dabei daran erinnern, dass alle Faktoren in denjenigen Mengen eingesetzt werden, die dem Rezept der Minimalkostenkombination gehorchen. „Lang" ist eine Frist dann, wenn sie genügend Zeit lässt, um die „Zutaten" in den erforderlichen Mengen zu besorgen.

Ist die Zeit hingegen dafür zu knapp, so heißt die betreffende Planungsperiode „kurz" und die betreffende Funktion *kurzfristige Kostenfunktion* (Abschnitt 3.3.3). Hier muss die Kostenminimierung unter der Nebenbedingung beschränkter Faktorverfügbarkeit durchgeführt werden.

3. Stufe der Entscheidungsfindung

Wenn ein Unternehmen weiß, wie hoch für jede vorgegebene Produktionsmenge die minimal verursachten Kosten sind, dann ist es auf dem Weg zur Gewinnmaximierung schon ein gutes Stück vorangekommen. Es ist aber noch nicht am Ziel, denn es ist ja noch nicht gesagt, welches der vielen möglichen Produktionsniveaus dem Ziel der Gewinnmaximierung am besten dient. Diese *dritte Stufe* der Entscheidungsfindung besteigen wir in dem folgenden Kapitel 3.4 über das Güterangebot der Firma, und wir hoffen, unsere Leserinnen und Leser begleiten uns dabei. Die Auswahl der gewinnmaximalen Menge kann nur als Ergebnis einer *Nutzen-Kosten-Analyse* erfolgen.[4] Etwas augenzwinkernd könnte man sagen, die Produktion hat für das Unternehmen Vor- und Nachteile: Die Vorteile liegen darin, dass Erlöse erwirtschaftet werden können, die Nachteile liegen in den dabei verursachten Kosten. Da die Kostenseite in den vorgehend kurz skizzierten Entscheidungsstufen schon genügend beleuchtet wurde, besteht das Entscheidende der dritten Stufe in der Hinzuziehung der Erlösseite. Wie dort im Einzelnen gezeigt wird, gelingt es, für jeden vorgegebenen Marktpreis des von der Firma produzierten Produkts genau anzugeben, wie hoch die Menge des Produkts ist, mit der die Firma ihr Gewinnmaximierungsziel erreicht. Steht diese Menge einmal fest, so kann daraus unter Beachtung des Gebots der Kostenminimierung auch gleich abgeleitet werden, welche Menge eines Produktionsfaktors die Firma im Gewinnmaximum einsetzt. In Kapitel 3.5 über die Faktornachfrage werden diese Auswirkungen der Firmenentscheidungen auf den Inputmärkten noch genauer expliziert. Kapitel 3.6 beschließt diese dritte Kurseinheit des Kurses mit einer Zusammenfassung.

4 Wir verwenden hier den Begriff des Nutzens nicht im Sinne der Haushaltstheorie, sondern als allgemeine Bezeichnung für alle Handlungsfolgen, die dem Unternehmensziel zuträglich sind. Entsprechend sind die Kosten alle Handlungsfolgen, die dem Ziel abträglich sind.

3.2. Produktionsfunktionen

Die *Produktionsfunktion* beschreibt in mathematischer Form den Zusammenhang zwischen der Produktmenge und jener Menge an Produktionsfaktoren, welche mindestens eingesetzt werden müssen, um die Produktmenge zu erzeugen. Die eingesetzten Produktionsfaktoren nennt man auch *Inputfaktoren* oder kurz: *Inputs*, die erzeugte Produktmenge *Output*.

Produktionsfunktionen als ökonomisch-technisches Modell

Dadurch, dass mit der Produktionsfunktion nicht der Zusammenhang zwischen dem Output und irgendwelchen Inputs, sondern den minimalen Inputs beschrieben wird, wird die *Effizienz* der Produktionsweise zum Definitionsbestandteil der Produktionsfunktion. Wie in der Einführung zu diesem Kapitel bereits angesprochen, liegt der Grund hierfür in der Zielsetzung, die wir der untersuchten Firma unterstellen, nämlich der Gewinnmaximierung. Wenn eine Firma Produktionsfaktoren verschwendet, also ineffizient produziert, so verletzt sie damit offensichtlich eine notwendige Bedingung für die Maximierung ihres Periodengewinns. Es ist daher sinnvoll, die Erklärung des Verhaltens eines nach Gewinnmaximierung strebenden Entscheidungsträgers von vornherein auf die Betrachtung effizienter Produktionsweisen zu beschränken. Insofern ist es nicht ganz glücklich (weil missverständlich), wenn die Produktionsfunktion in der Literatur häufig als technischer (also sozusagen „vorökonomischer“) Zusammenhang gesehen wird. Sie setzt bereits einen Ausleseprozess voraus, dem ineffiziente Produktionsmöglichkeiten zum Opfer fallen und stellt damit das Ergebnis eines ökonomischen Kalküls dar. Wenn wir im Folgenden im Zusammenhang mit der Produktionsfunktion und bestimmten ihrer Eigenschaften das Wort „technisch“ verwenden, so behalten wir dabei die gerade angesprochene Einschränkung „im Hinterkopf“. Es ist ja häufig sinnvoll, einer terminologischen Literaturtradition auch dann zu folgen, wenn sie als nicht ganz glücklich empfunden wird. Die Verwendung neuer Begriffe führt meist eher zur Verwirrung als zur Klärung, selbst wenn die Begriffsschöpfer fest daran glauben, dass mit ihren Schöpfungen eine Qualitätsverbesserung einhergeht.

3.2.1. Wozu benötigt man Produktionsfunktionen?

Aufgabe der Produktionsfunktion

Die Produktionsfunktion bildet in stark vereinfachter Form bestimmte Eigenschaften des Produktionsprozesses ab, und zwar jene, die für die Produktionsentscheidungen relevant sind. Die Produktionsfunktion hat für die Entscheidungen der Firma eine ähnliche Funktion wie die Budgetrestriktion für die Entscheidungen der Haushalte: Sie beschränkt den Entscheidungsspielraum. Wenn die Firma eine bestimmte Produktmenge herstellen möchte, gibt die Produktionsfunktion an, welche Mengen an Inputfaktoren hierfür benötigt werden. Die Produktionsfunktion soll dabei so allgemein sein, dass sie in gleicher Weise zur Beschreibung des Produktionsprozesses

- in einer Autofabrik,
- in einer Chemiefabrik,
- in einer handwerklich betriebenen Bäckerei,

- beim Bau eines einzelnen Hauses,
- in einer Bank,
- in einer Versicherung,
- in einem Warenhausunternehmen,
- in einem Kiosk an der Ecke,
- in einer Arztpraxis,
- in einer Anwaltskanzlei oder
- bei einem Fußballverein der Bundesliga

geeignet ist.

Produktionsfaktoren

Die wichtigsten Inputs sind Arbeit, Kapital und Vorleistungen. Mit *Arbeit* ist menschliche Arbeit in allen Formen und Qualifikationen gemeint. Mit *Kapital* sind Maschinen, Fabrikhallen, Bürogebäude und sonstige Anlagen gemeint. *Vorleistungen* sind Güter, die bei anderen Unternehmen gekauft und im Zuge des Produktionsprozesses innerhalb der Produktionsperiode verbraucht werden. Es kann sich dabei um *Rohstoffe* oder *Halbfabrikate*, aber auch um Hilfs- und Betriebsstoffe handeln. *Hilfs- und Betriebsstoffe* sind z.B. elektrische Energie oder Schmieröl für die Maschinen.

Produkt

Bei der Produktion materieller Güter betrachten wir jenes Gut als Output, welches am Markt verkauft wird. Bei immateriellen Gütern, also Dienstleistungen, ist nicht immer ohne weiteres ersichtlich, worin die Dienstleistung besteht oder wie sie zu messen ist. Denken Sie beispielsweise an Handelsunternehmen, Banken oder Versicherungen. Von diesen Schwierigkeiten wollen wir hier aber absehen und unterstellen, dass das Produkt definiert und messbar ist.

Übungsaufgabe 4

Wie könnte man die Dienstleistung eines Handelsunternehmens, einer Bank oder einer Versicherung messen?

Bezeichnen wir die Produktmenge mit Q, den Faktor Arbeit mit L (für Labour, da wir den Buchstaben A später für Angebot benötigen), den Faktor Kapital mit C (für Capital, da wir den Buchstaben K später für Kosten brauchen) und die Vorleistungen mit VL, so schreiben wir eine Produktionsfunktion als:

Produktionsfunktion

(3.2-1) $$Q = f(L,C,VL).$$

Stromgröße

Da es sich bei der Produktmenge um eine *Stromgröße* handelt, müssen auch die Inputfaktoren in Mengeneinheiten pro Periode, also als Stromgrößen gemessen werden. Argumente der Produktionsfunktion sind deshalb nicht die Anzahl der Arbeiter und die Anzahl der Maschinen, sondern die Anzahl der Arbeitsstunden bzw. der Maschinenstunden pro Periode. Wenn allerdings die Anzahl der Stunden, die ein Produktionsfaktor pro Periode leistet, konstant ist, und wenn die Periodenlänge selber auch konstant ist, z.B. ein Jahr, dann kann die Faktorleistung durch die Anzahl der betreffenden Faktoren ausgedrückt werden.

Produktionsfunktion als allgemeines Modell

Eine derartige Produktionsfunktion existiert für alle Firmen, unabhängig davon, ob sie materielle Güter oder Dienstleistungen produzieren, in welcher Rechtsform sie organisiert sind, wie viele Arbeitskräfte sie beschäftigen oder wie groß ihr Umsatz ist. Dies heißt aber nicht, dass sie für alle Firmen gleich wäre. Man wird sicher erwarten, dass die Produktionsfunktion eines Großunternehmens, wie die des VW-Werks, anders aussieht als jene eines Handwerksbetriebes. Auch zwischen Produktions- und Dienstleistungsunternehmen wird man wohl Unterschiede in der Produktionsfunktion erwarten. Aber auch wenn es zwischen den Firmen unterschiedlicher Branchen und selbst innerhalb einer Branche große Unterschiede in den Produktionsverfahren gibt, so reicht es für die Zwecke der Theorie der Marktwirtschaft aus, die grundlegenden Strukturen eines Produktionsprozesses abzubilden. Diese Strukturen werden im Wesentlichen durch drei Gruppen von Eigenschaften ausgedrückt, die sich als Antworten auf folgende Fragen ergeben:

Eigenschaften einer Produktionsfunktion

1. Wie ändert sich die Produktmenge, wenn die Einsatzmengen aller Faktoren mit einem konstanten Faktor multipliziert werden (*proportionale oder totale Faktorvariation*)?

2. Wie ändert sich die Produktmenge, wenn die Einsatzmenge eines einzelnen Faktors bei Konstanz der Einsatzmengen aller anderen Faktoren variiert wird (*partielle Faktorvariation*)?

3. Wie stark kann die Einsatzmenge eines Faktors reduziert werden, wenn die Einsatzmenge eines anderen Faktors erhöht wird und die Produktmenge konstant bleiben soll (*substitutionale Faktorvariation*)?

Wir werden uns bei der folgenden Darstellung dieser Eigenschaften auf den Fall der beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital beschränken. Dann lassen sich die Eigenschaften grafisch darstellen, und auch die analytische Behandlung wird vereinfacht. Der Aussagewert wird dadurch nicht beeinträchtigt. Alles, was wir über die Eigenschaften im Falle von zwei Faktoren sagen werden, gilt auch für den Fall von n Faktoren.

3.2.2. Die Eigenschaften von Produktionsfunktionen bei totaler Faktorvariation

3.2.2.1 Skalenerträge und Skalenelastizität

Bei proportionaler Erhöhung der Einsatzmengen aller Faktoren (totale Faktorvariation) können im Wesentlichen drei Fälle auftreten:

a) Der Output steigt proportional.
b) Der Output steigt überproportional.
c) Der Output steigt unterproportional.

Skalenerträge

In der Regel besitzt eine Produktionsfunktion nur eine dieser drei Eigenschaften. Im Fall a) spricht man von konstanten, im Fall b) von steigenden und im Fall c) von sinkenden *Skalenerträgen*.[5] Es gibt aber auch Produktionsfunktionen, die alle drei Fälle umfassen: Bis zu einer bestimmten Faktoreinsatzmenge steigt der Output überproportional, danach folgt ein Bereich proportionaler Outputsteigerung, und schließlich steigt der Output nur noch unterproportional.

Theoretisch ist natürlich auch der Fall denkbar, dass der Output bei steigendem Input sinkt, dass also eine umgekehrte Proportionalität vorliegt. Dies wäre ein Fall von Faktorverschwendung, also von Ineffizienz. Das schließen wir aber aus, da die Produktionsfunktion per definitionem nur effizienten Faktoreinsatz abbildet.

Sinkende Skalenerträge

Wenn Produktionsfaktoren homogen, beliebig teilbar und unbegrenzt verfügbar sind, kann die Einsatzmenge aller Faktoren proportional erhöht werden. Dann muss der Output streng genommen auch proportional steigen. Eine bestehende Firma wird quasi „geklont". In der Realität sind die Faktoren aber oftmals nicht homogen (kein Arbeiter ist identisch mit dem anderen), nicht beliebig teilbar (z.B. eine Fabrikhalle) und auch nicht unbegrenzt verfügbar (Arbeitskräfte einer speziellen Art, Rohstoffe, Boden etc.). Eine proportionale Erhöhung wirklich aller Faktoreinsatzmengen ist dann nicht möglich. Wenn aber die Einsatzmengen *fast aller* (aber eben nicht aller) Faktoren proportional erhöht werden, kann es so aussehen, als stiege der Output überproportional, da die Kosten unterproportional ansteigen. Dieser Fall tritt ein, wenn der oder die nicht vermehrten Faktoren vorher im „Überfluss" vorhanden waren. Die Leistungsabgabe dieser Faktoren steigt zwar, wenn die Einsatzmenge der übrigen Faktoren erhöht wird, diese Steigerung wird aber nicht erfasst. Beispiel: In der Fabrikhalle ist noch Platz für eine weitere Maschine. Diese Maschine wird durch einen zusätzlichen Arbeiter bedient. Die „Leistungsabgabe" der Fabrikhalle wird erhöht, ohne dass dies erfasst würde. Wenn die Leistungsabgabe der nicht vermehrten Faktoren dagegen vorher bereits maximal war, kommt es bei (fast) totaler Faktorvariation zu einer unterproportionalen Outputsteigerung. Es scheint so, als seien alle Einsatzmengen proportional erhöht worden, tatsächlich ist dies jedoch nicht der Fall. Beispiel: In der Fabrikhalle wird eine zusätzliche Maschine aufgestellt. Dadurch kommt es zur „Überfüllung" und die Arbeitsabläufe werden behindert. Ob es steigende oder sinkende Skalenerträge gibt, ist insoweit eine Frage der Definition des Begriffes *totale Faktorvariation*. Im Allgemeinen verwendet man den Begriff in der Weise, dass die Variation aller jener Faktoren gemeint ist, deren Einsatzmenge tatsächlich variiert werden kann.

Steigende Skalenerträge

Bereits Adam SMITH hat darauf hingewiesen, dass der vermehrte Einsatz von Faktoren eine größere Arbeitsteilung erlaube, und dass es dadurch zu einer überpro-

5 In dem Begriff *Skalenerträge* ist mit der *Skala* ein Proportionalitätsfaktor gemeint, mit dem die Einsatzmengen *aller* Produktionsfaktoren multipliziert werden.

portionalen Outputsteigerung komme.[6] Man könnte argumentieren, dass die größere Arbeitsteilung gleichbedeutend mit einer Änderung des Produktionsverfahrens sei, und dass ein derartiger Fall deshalb nicht durch steigende Skalenerträge bei konstanter Produktionsfunktion, sondern als Fall konstanter Skalenerträge bei geänderter Produktionsfunktion modelliert werden sollte. Was hätte man aber dadurch gewonnen? Man müsste eine Theorie über die Änderung von Produktionsfunktionen bei (fast) totaler Faktorvariation entwickeln, wollte man die darauf basierenden Entscheidungen vorhersagen. Die Annahme steigender bzw. sinkender Skalenerträge ersetzt im Grunde eine derartige Theorie: Wir wissen zwar nicht, wie sich die Produktionsfunktion ändert, wir wissen aber, dass der Output – gemessen an den tatsächlich veränderten Faktoreinsatzmengen – überproportional oder unterproportional steigt. Funktionen, die den Zusammenhang zwischen Produktmenge und Proportionalitätsfaktor bei proportionaler Faktorvariation beschreiben, bezeichnet man als *Niveau-Ertragsfunktionen*, ihre grafische Darstellung als *Niveau-Ertragskurve*. In Abbildung (A 3.2-1) sind die Niveau-Ertragskurven von Produktionsfunktionen mit konstanten, steigenden und sinkenden Skalenerträgen eingezeichnet.

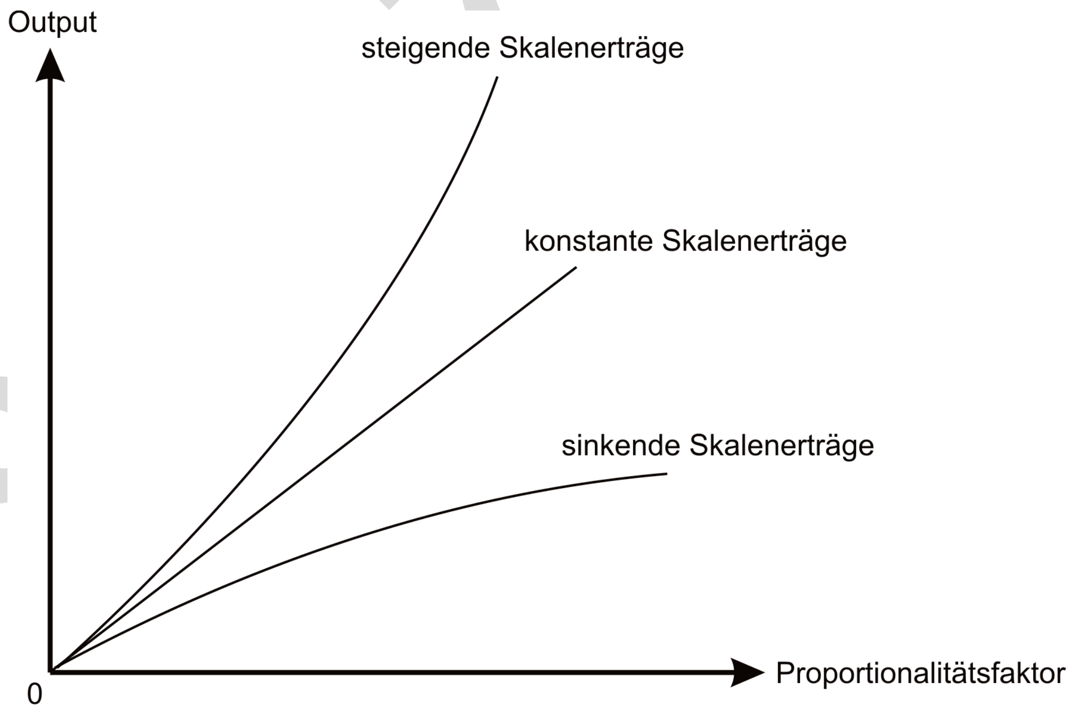


Abbildung (A 3.2-1): Die Niveau-Ertragskurven von Produktionsfunktionen mit konstanten, steigenden und sinkenden Skalenerträgen

Für die mathematische Beschreibung der Eigenschaften von Produktionsfunktionen bei totaler Faktorvariation verwendet man im Allgemeinen *homogene* Produktionsfunktionen. Für derartige Funktionen gilt:

6 Berühmt ist in diesem Zusammenhang sein Beispiel der Herstellung von Stecknadeln.

(3.2-2) $$\mu^h Q = \mu^h f(L,C) = f(\mu L, \mu C).$$

Homogene Produktionsfunktion

Die Funktion $f(L,C)$ ist homogen vom Grade h. Eine proportionale Erhöhung der Faktoreinsatzmengen um den Faktor μ führt zu einer Steigerung des Outputs um das μ^h-fache.[7] Für $h=1$ erhalten wir konstante, für $h>1$ steigende und für $h<1$ sinkende Skalenerträge. Eine Funktion, die homogen vom Grade $h=1$ ist, bezeichnet man als *linear-homogen*. Bitte beachten Sie, dass jede Produktionsfunktion, die homogen vom Grade $h>1$ ist, zunehmende Skalenerträge aufweist. Andererseits ist aber nicht jede Produktionsfunktion mit zunehmenden Skalenerträgen homogen. Entsprechendes gilt für den Zusammenhang zwischen Homogenität von einem Grade $h<1$ und abnehmenden Skalenerträgen. Homogenität und Skaleneigenschaften sind nur im Grenzfall miteinander deckungsgleich: Linearhomogenität heißt dasselbe wie Konstanz der Skalenerträge.

Skalenelastizität

An Stelle des Begriffs des Skalenertrags verwendet man oftmals den Begriff der *Skalenelastizität*, um die Eigenschaft einer Produktionsfunktion bei totaler Faktorvariation zu beschreiben. Die Skalenelastizität $\varepsilon_{Q,\mu}$ ist definiert als:

(3.2-3) $$\varepsilon_{Q,\mu} = \frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{d\mu}{\mu}} = \frac{dQ}{d\mu}\frac{\mu}{Q}.$$

Sie gibt näherungsweise die prozentuale Änderung der Produktmenge an, wenn alle Faktoreinsatzmengen um ein Prozent steigen.

Homothetische Produktionsfunktion

Wenn man eine linear-homogene Funktion einer positiven monotonen Transformation unterwirft, entsteht eine *homothetische Funktion*. Angenommen, $Q = f(L,C)$ sei eine linear-homogene Funktion und $Y = F(Q)$ sei eine streng monoton steigende Funktion, so dass $F'(Q) > 0$ für alle Q und $F(0) = 0$ gilt, dann ist $Y = F\left[f(L,C)\right]$ eine homothetische Funktion. Derartige Funktionen sind Verallgemeinerungen homogener Funktionen. Sie enthalten die linear-homogenen Funktionen als Spezialfälle. Wir kommen auf die Eigenschaften derartiger Funktionen weiter unten noch einmal zurück, wenn wir uns mit einigen speziellen Produktionsfunktionen beschäftigen.

Übungsaufgabe 5

Angenommen, eine Funktion besitze steigende Skalenerträge. Kann es sich hierbei um eine homothetische Funktion handeln?

7 Bei der oben gewählten Formulierung ist $\mu > 1$. Die Aussage gilt analog für proportionale Senkungen der Faktoreinsatzmengen ($\mu < 1$).

3.2.2.2 Empirische Untersuchungen zur Skalenelastizität

Wirtschaftspolitische Bedeutung steigender Skalenerträge

Die Frage, ob in einer Branche die Produktion unter steigenden Skalenerträgen erfolgt oder nicht, hat erhebliche Konsequenzen für die Wettbewerbspolitik. Wie wir in Kurseinheit 5 sehen werden, besteht in Branchen mit steigenden Skalenerträgen eine Tendenz zur Bildung eines *natürlichen Monopols*, und derartige Monopole führen im Allgemeinen zu einer schlechteren Versorgung der Haushalte als ein Markt, auf dem Konkurrenz herrscht. Außerdem führt ein Monopol zu Verteilungseffekten, die möglicherweise politisch unerwünscht sind. Aus diesem Grund sind immer wieder empirische Untersuchungen durchgeführt worden, um festzustellen, ob in bestimmten Branchen steigende Skalenerträge bestehen. Derartige Skalenerträge sind eine notwendige, wenn auch keine hinreichende Bedingung, will man regulierende Eingriffe des Staates aus Wettbewerbsgründen rechtfertigen.[8]

DOUGLAS

Einige der frühesten Untersuchungen stammen von DOUGLAS (1934), dem späteren Mit-Namensgeber der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion. Er kommt in seinen Untersuchungen der amerikanischen Wirtschaft für den Zeitraum 1900-1922 zu dem Ergebnis, dass in den meisten der von ihm untersuchten Branchen konstante Skalenerträge vorliegen. Spätere Untersuchungen kommen zu weniger einheitlichen Ergebnissen.[9] Je nach Beobachtungszeitraum, Schätzverfahren, Aggregationsgrad und Branche können sich steigende, konstante oder auch fallende Skalenerträge ergeben.

HENRIKSEN et al.

In einer umfangreichen Studie über Skalenerträge in 15 Zweigen der verarbeitenden Industrie in den Ländern Deutschland, Frankreich, Großbritannien und Italien kommen HENRIKSEN, KNARVIK und STEEN (2001) zu dem Ergebnis, dass steigende Skalenerträge auf der Ebene der einzelnen Firmen und der Branchen eine erhebliche Bedeutung haben. Die folgende Tabelle gibt einige ihrer Ergebnisse für Deutschland und Frankreich wieder.

8 Eine hinreichende Bedingung ist, dass die Wohlfahrt der Gesellschaft nach der staatlichen Intervention höher ist als vorher. Diese Bedingung ist jedoch keineswegs immer erfüllt, wie wir in Kap. 4.2 sehen werden.

9 Vgl. z.B. WALTERS (1963).

Industriezweig	Skalenelastizität der betreffenden Branche in Deutschland	Skalenelastizität der betreffenden Branche in Frankreich
Textilindustrie	1.4	1.2
Schuhindustrie	1.0	1.3
Maschinenbau	1.4	1.1
Radio-, Fernseh- und Kommunikationsgeräte	0.6	1.3
Schienenfahrzeugbau	1.4	1.3
Sonstiger Fahrzeugbau	0.8	-
Luftfahrzeugbau	1.4	1.5

Auf der Ebene einzelner Firmen und eng definierter Wirtschaftszweige sind die Unterschiede in den Skalenerträgen sehr groß. Die Skalenelastizitäten schwanken zwischen 0.6 und 1.5. Je mehr Firmen und Firmengruppen zu Branchen und Industriezweigen zusammengefasst werden, desto geringer werden die Unterschiede. Fasst man alle Firmen zusammen, so erhält man eine Produktionsfunktion für eine ganze Volkswirtschaft. Die Deutsche Bundesbank hat 1995 eine derartige Produktionsfunktion für die deutsche Volkswirtschaft geschätzt und dabei eine Skalenelastizität von 1.1 ermittelt.

3.2.3. Die Eigenschaften von Produktionsfunktionen bei partieller Faktorvariation

Wie bereits ausgeführt, ist der Fall, dass alle Faktoren proportional verändert werden können, eher als theoretischer Grenzfall zu betrachten. Immerhin handelt es sich um einen äußerst wichtigen Grenzfall. Ein entgegengesetzter Grenzfall liegt vor, wenn nur ein einziger Faktor variiert werden kann. Betrachtet man in einer Produktionsfunktion alle Inputfaktoren bis auf einen als konstant, so wird aus der Produktionsfunktion eine *Ertragsfunktion*. Sie beschreibt den Zusammenhang zwischen der Produktmenge und der Einsatzmenge des variablen Faktors bei gegebenen Einsatzmengen der übrigen Faktoren. Beispiel: Aus Ertragsfunktion

(3.2-4) $\quad Q = f(L, C)$ wird

(3.2-5) $\quad Q = g(L) = f(L, \bar{C})$,

falls der Faktor Arbeit bei Konstanz des Faktors Kapital variiert wird. Das Bild (den Graphen) einer Ertragsfunktion bezeichnet man als *Ertragskurve*.

Die partielle Ableitung der Produktionsfunktion nach dem betreffenden Faktor bezeichnet man als *Grenzertragsfunktion*. Sie ist identisch mit der Ableitung der Ertragsfunktion nach deren einzigem Argument: Grenzertragsfunktion

(3.2-6) $$\frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial f}{\partial L}(L,\bar{C}) = g'(L).$$[10]

Das Bild der Grenzertragsfunktion ist die *Grenzertragskurve*.

Durchschnittsertragsfunktion

Dividiert man die Ertragsfunktion durch den variablen Faktor, erhält man die *Durchschnittsertragsfunktion*:

(3.2-7) $$\frac{Q}{L} = \frac{g(L)}{L}.$$

Das Bild dieser Funktion ist die *Durchschnittsertragskurve*.

An Stelle des Wortes „Ertrag" wird auch das Wort *Produkt* verwendet, allerdings nicht bei der Ertragsfunktion und der Ertragskurve. Im allgemeinen Sprachgebrauch wird an Stelle des Begriffs „Durchschnittsprodukt" bzw. „Durchschnittsertrag" oftmals das Wort *Produktivität* verwendet, vor allem in Bezug auf den Produktionsfaktor Arbeit. Wenn davon gesprochen wird, die „Produktivität" sei gestiegen, meint man im Allgemeinen einen Anstieg des Durchschnittsertrags des Faktors Arbeit, also der Produktmenge pro eingesetzter Arbeitseinheit.

Klassifikationskriterien für Produktionsfunktionen

Wie ändert sich nun der Output, wenn die Einsatzmenge des variablen Faktors kontinuierlich erhöht wird? Hier lassen sich vier typische Fälle unterscheiden:

---

10 Die partielle Ableitung einer Funktion $y = f(x,z)$ nach dem Argument x lässt sich auf verschiedene Arten schreiben. So gilt: $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x,z)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = f_x = f_1$.

Wir werden im Allgemeinen die Schreibweisen $\frac{\partial f}{\partial x}$ oder f_x verwenden.

Für die zweiten Ableitungen gilt analog:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = f_{11}.$$

Für die gemischten Ableitungen gilt:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = f_{xz} = f_{12}.$$

Wir verwenden die Schreibweisen $\frac{\partial\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial z}$ oder f_{xz}.

a) Der Output steigt linear. Diese Eigenschaft weisen lineare Produktionsfunktionen auf, aber z.B. auch die Funktion $Q = LC$.

b) Der Output steigt bis zu einer gewissen Grenze proportional, danach bleibt er konstant. Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen *linear-limitationale Produktionsfunktionen*.

c) Der Output steigt stetig an, der Output*zuwachs* wird aber immer kleiner. Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen *neoklassische Produktionsfunktionen*.

d) Der Output wächst bis zu einem bestimmten Punkt mit zunehmender Rate, danach mit abnehmender Rate. Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen *ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen*.

Lineare Produktionsfunktionen

Eine lineare Produktionsfunktion hat im Fall zweier Inputs die Form:

(3.2-8) $$Q = \alpha L + \beta C\,,\ \alpha, \beta > 0\,.$$

Die Ertragsfunktion des Faktors Arbeit lautet dann

(3.2-9) $$Q = \alpha L + \beta \overline{C}\,,$$

die Grenzertragsfunktion

(3.2-10) $$\frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha\,,$$

die Durchschnittsertragsfunktion

(3.2-11) $$\frac{Q}{L} = \alpha + \frac{\beta \overline{C}}{L}\,.$$

In Abbildung (A 3.2-2) sind die Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven einer linearen Produktionsfunktion eingezeichnet.

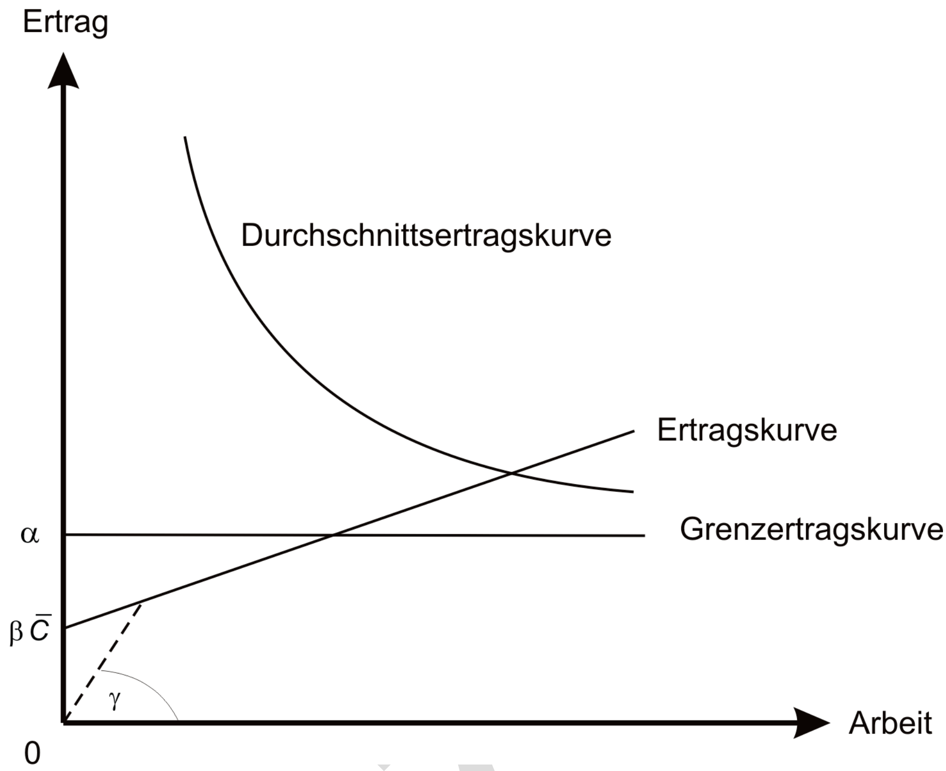


Abbildung (A 3.2-2): Die Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven einer linearen Produktionsfunktion

Die Durchschnittsertragskurve erhält man grafisch, indem man den gestrichelt eingezeichneten Fahrstrahl vom Ursprung aus an der Ertragskurve entlangwandern lässt. Der Tangens des Winkels γ gibt das Verhältnis von Ertrag zu Faktoreinsatzmenge an, also den Durchschnittsertrag des Faktors. Bei einer Faktoreinsatzmenge von null ist dieses Verhältnis unendlich und strebt gegen den Wert α, wenn die Faktoreinsatzmenge gegen unendlich strebt. Die Durchschnittsertragskurve nähert sich also asymptotisch der Grenzertragskurve.

Übungsaufgabe 6

Zeichnen Sie die Ertrags-, Durchschnittsertrags- und Grenzertragskurve der Produktionsfunktion $Q = \alpha L + \beta \bar{C}$ für den Fall, dass $\beta = 0$ gilt.

Linear-limitationale Produktionsfunktionen

Linear-limitationale Produktionsfunktionen sind durch zwei Eigenschaften charakterisiert:

1. Zwischen Input und Output besteht eine lineare Beziehung.

2. Die maximale Produktmenge wird durch den jeweils knappsten Faktor, den sog. *Engpassfaktor*, „limitiert“. Eine Steigerung der Einsatzmengen der übrigen Faktoren führt zu keiner Outputsteigerung.

Falls nur die beiden Faktoren Arbeit und Kapital benötigt werden, lässt sich eine derartige Funktion in mathematischer Form schreiben als:

(3.2-12) $Q = \min\{\pi_L L, \pi_C C\}$.

π_L ist die Durchschnittsproduktivität (oder kurz: Produktivität) der Arbeit, π_C die Produktivität des Kapitals. Die *Faktorproduktivität* gibt das Verhältnis von Produktmenge zur Einsatzmenge des betreffenden Faktors an.

Faktorproduktivität und Inputkoeffizient

Der Kehrwert der Faktorproduktivität ist der *Inputkoeffizient*, in unserem Fall der Arbeitskoeffizient bzw. der Kapitalkoeffizient. Der Inputkoeffizient gibt das Verhältnis der Einsatzmenge eines Faktors zur Produktmenge an. Die Produktionsfunktion besagt, dass die Produktmenge Q begrenzt wird durch das kleinere der beiden mathematischen Produkte aus Faktorproduktivität und Faktoreinsatzmenge. Angenommen, der Faktor L sei Engpassfaktor, dann kann der Output durch zusätzlichen Einsatz des Faktors L gesteigert werden, bis der Faktor C zum Engpassfaktor wird. Solange L Engpassfaktor ist, wächst der Output proportional. Für die Ertragsfunktion des Faktors Arbeit gilt dann:

(3.2-13) $Q = \pi_L L$ für $L \le \frac{\pi_C}{\pi_L} C$.

Grenzproduktivität

Die Änderung des Outputs bei einer marginalen Änderung eines Inputfaktors bezeichnet man als die *Grenzproduktivität* dieses Faktors. Mathematisch ausgedrückt ist es die partielle Ableitung der Produktionsfunktion nach diesem Faktor:

(3.2-14) $\frac{\partial Q}{\partial L} = \pi_L$ für $L < \frac{\pi_C}{\pi_L} C$.

Die Änderung der Produktmenge bezeichnet man als das *Grenzprodukt* oder den Grenzertrag:

(3.2-15) $dQ = \frac{\partial Q}{\partial L} dL = \pi_L dL$ für $L < \frac{\pi_C}{\pi_L} C$.

Da Grenzproduktivität und Grenzprodukt dem Wert nach gleich sind, wenn man die Faktoreinsatzmenge um genau eine Einheit ändert, werden die beiden Begriffe oft auch synonym verwendet. Die Dimension der beiden Größen ist aber unterschiedlich.

Das Bild der Produktionsfunktion $Q = \min\{\pi_L L, \pi_C \overline{C}\}$ bei partieller Faktorvariation bezeichnet man als *Ertragskurve*, das Bild der Grenzproduktionsfunktion

$$\frac{\partial Q}{\partial L} = \begin{cases} \pi_L & \text{für} \quad L < \dfrac{\pi_C}{\pi_L} C \\ 0 & \text{für} \quad L > \dfrac{\pi_C}{\pi_L} C \end{cases}$$

als *Grenzertragskurve*. In Abbildung (A 3.2-3) sind die Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven einer linear-limitationalen Produktionsfunktion eingezeichnet.

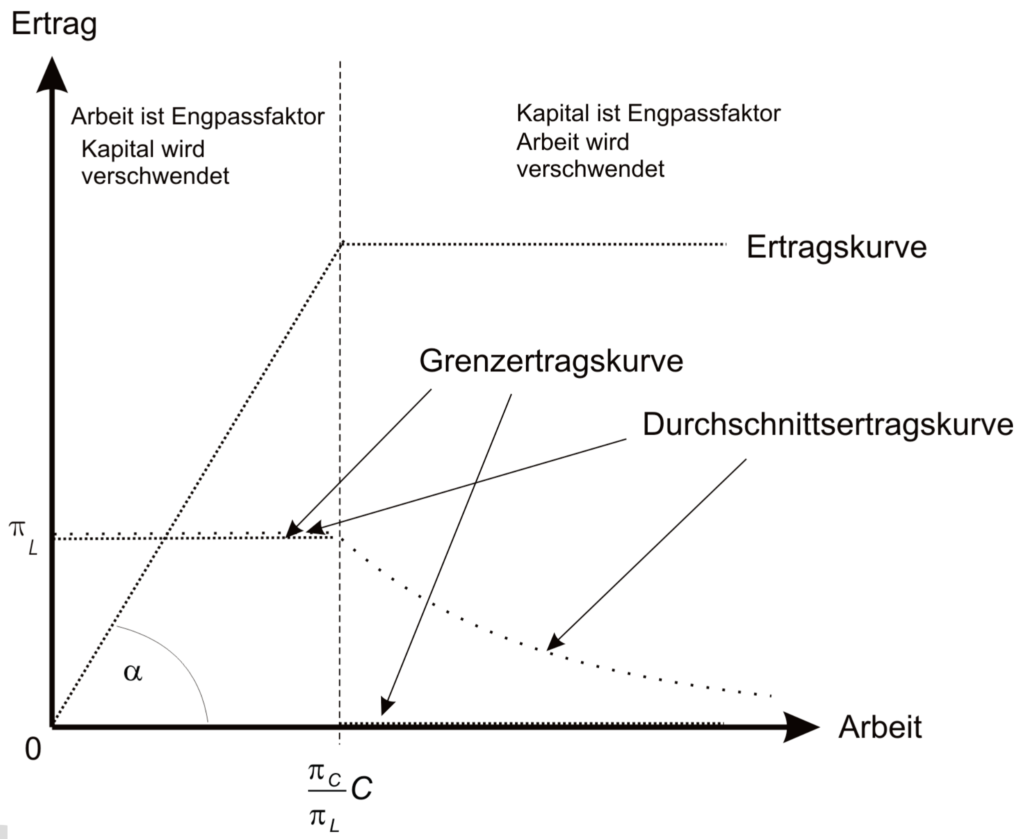


Abbildung (A 3.2-3): Die Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven einer linear-limitationalen Produktionsfunktion

Effizienter Produktionspunkt

Wir hatten die Produktionsfunktion so definiert, dass sie nur effiziente Inputmengen umfasst. Dann gehört der Bereich rechts der Arbeitsmenge $\frac{\pi_C}{\pi_L} C$ streng genommen nicht mehr zur Produktionsfunktion und damit auch nicht zu den entsprechenden Ertragsfunktionen, da hier der Faktor Arbeit verschwendet wird. Aber auch der Bereich links von $\frac{\pi_C}{\pi_L} C$ gehört nicht zur Produktionsfunktion, da hier der Faktor Kapital verschwendet wird. *Die Ertragskurve besteht also streng genommen nur aus einem einzigen Punkt.* Da eine derartige Ertragskurve aber wenig anschaulich ist, haben wir hier zur Veranschaulichung auch die ineffizienten Punkte eingezeichnet, wenn auch nur gepunktet. In jenem Bereich, in welchem Kapital verschwendet wird und Arbeit der Engpassfaktor ist, stellt die Ertragskurve des Faktors Arbeit eine Gerade mit der Steigung π_L dar. In dem anschließenden Bereich ist sie eine Parallele zur Abszisse. Die Grenzertrags- und

Durchschnittsertragskurven sind links von $\frac{\pi_C}{\pi_L}C$ Parallelen zur Abszisse im Abstand π_L. Rechts von $\frac{\pi_C}{\pi_L}C$ ist die Grenzertragskurve identisch mit der Abszisse, die Durchschnittsertragskurve fällt monoton und nähert sich asymptotisch der Abszisse. Analoges gilt für den Faktor Kapital.

Übungsaufgabe 7

Ein Unternehmen, welches seinen Gewinn maximieren möchte, wird bei der Wahl zwischen effizienten und ineffizienten Produktionsverfahren stets ein effizientes Verfahren wählen. Gilt diese Aussage auch dann noch, wenn es z.B. auf Grund gesetzlicher Vorschriften oder tarifvertraglicher Vereinbarungen gezwungen ist, ein Verfahren anzuwenden, welches wegen dieser Vorschriften ineffizient ist? (Plastisches Beispiel: Der auf einer Elektrolok mitfahrende Heizer)

Neoklassische Produktionsfunktionen

Neoklassische Produktionsfunktionen zeichnen sich bei partieller Faktorvariation durch folgende Eigenschaften aus:

Eigenschaften einer neoklassischen Produktionsfunktion

1. Die Grenzprodukte aller Faktoren sind positiv, d.h.
$$\frac{\partial Q}{\partial L}, \frac{\partial Q}{\partial C} > 0 .$$

2. Die Grenzprodukte nehmen bei steigendem Faktoreinsatz ab, d.h.
$$\frac{\partial \frac{\partial Q}{\partial L}}{\partial L} = Q_{LL} < 0 , \frac{\partial \frac{\partial Q}{\partial C}}{\partial C} = Q_{CC} < 0 .$$

Abbildung (A 3.2-4) stellt die zugehörigen Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven dar.[11]

11 Der Anstieg der Ertragskurve im Nullpunkt muss nicht endlich sein, er kann auch unendlich groß sein. Die weiter unten behandelten Cobb-Douglas-Funktionen weisen derartige Eigenschaften auf. Ein Beispiel hierfür bildet die Funktion $Q = L^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$.

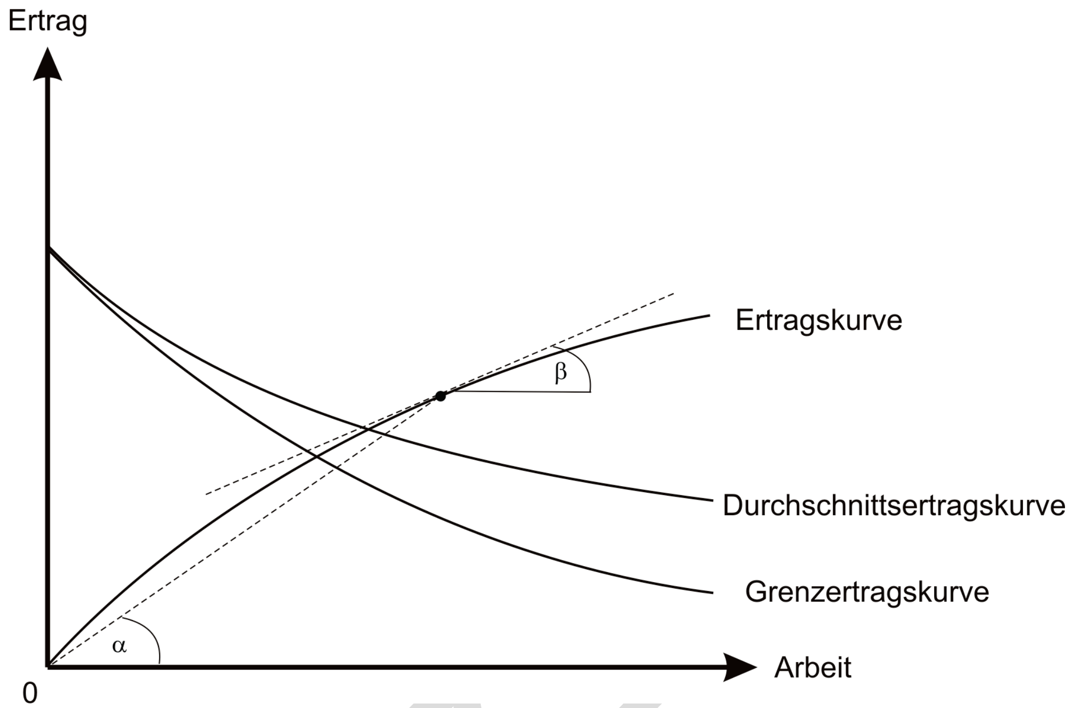


Abbildung (A 3.2-4): Die Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven einer neoklassischen Produktionsfunktion

Ertrags- und Grenzertragskurve

Da die Grenzprodukte abnehmen, ist die Ertragskurve vom Ursprung aus gesehen konkav gekrümmt. Der Grenzertrag stellt sich grafisch als die Steigung einer Tangente in einem Kurvenpunkt dar (Winkel β), der Durchschnittsertrag als die Steigung des Fahrstrahls vom Ursprung zu diesem Kurvenpunkt (Winkel α). Die Grenzertragskurve liegt im gesamten Definitionsbereich unterhalb der Durchschnittsertragskurve, da in jedem Kurvenpunkt der Grenzertrag kleiner ist als der Durchschnittsertrag.

Annahme abnehmender Grenzprodukte

Die Annahme abnehmender Grenzprodukte ist extrem wichtig für die gesamte Produktionstheorie und darüber hinaus für große Teile der Mikroökonomik. Es ist intuitiv einsichtig, dass bei genügend großer Steigerung der Einsatzmenge eines Faktors – bei Konstanz aller übrigen Faktoren – der Ertragszuwachs kleiner werden und schließlich gegen null konvergieren muss. Stellen Sie sich vor, eine Autofabrik erhöhte die Kapitalausstattung permanent, hielte die Zahl der eingesetzten Arbeitsstunden aber konstant. Hätte jede zusätzliche Kapitaleinheit eine immer gleich große Produktionssteigerung zur Folge? Wohl kaum. Entsprechendes gilt im Dienstleistungsbereich oder in der Landwirtschaft. Eine andere Situation tritt allerdings ein, wenn der vermehrte Einsatz eines Faktors, z.B. des Faktors Kapital, mit einer Änderung der Produktionstechnik einhergeht. Diesen Fall schließen wir hier aber aus. Wir betrachten die Produktionsfunktion als unveränderlich.[12]

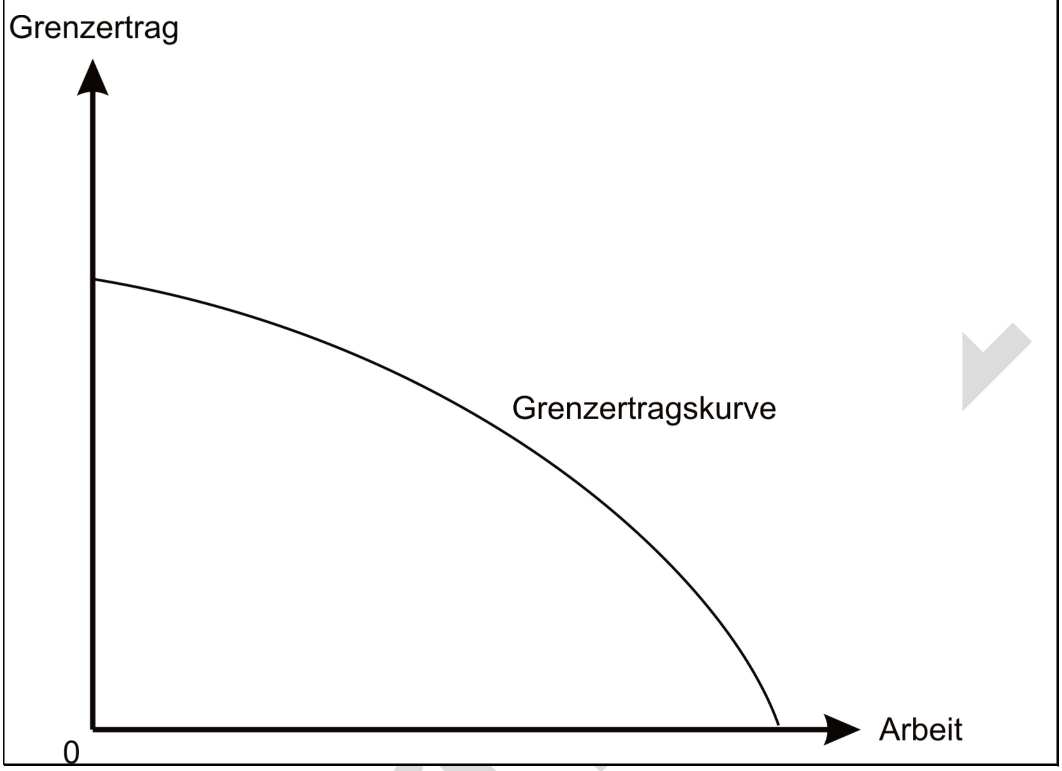
---

12 Will man die Auswirkungen des technischen Fortschritts auf die Wirtschaft untersuchen, muss man Änderungen der Produktionstechnik zulassen. Mit den Methoden der Mikroökonomischen Theorie werden z.B. die Auswirkungen des Patentrechts auf Verfahrens- und Pro-

(Forts. nächste Seite)

Übungsaufgabe 8

Könnte die in der folgenden Abbildung dargestellte Kurve die Grenzertragskurve einer neoklassischen Produktionsfunktion sein? Begründen Sie Ihre Antwort.



Ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen

Eigenschaften einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion

Ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen unterscheiden sich von neoklassischen dadurch, dass bei Letzteren der Grenzertrag bei partieller Faktorvariation von Beginn an abnimmt, währnd er bei Ersteren bis zu einem bestimmten Punkt zunimmt und danach abnimmt, bis er schließlich sogar negativ wird. Der Bereich negativer Grenzerträge zählt allerdings streng genommen nicht mehr zur Produktionsfunktion, da die Produktion in diesem Bereich ineffizient wäre. Formal lassen sich diese Eigenschaften darstellen als:

(3.2-16) $\frac{\partial Q}{\partial L}, \frac{\partial Q}{\partial C} > 0$ für $L < \breve{L}(\overline{C})$, $C < \breve{C}(\overline{L})$ und

---

duktinnovationen analysiert, mit Methoden der makroökonomischen Theorie die Auswirkungen des technischen Fortschritts auf das wirtschaftliche Wachstum. Eine Einführung in die Wettbewerbsökonomie finden Sie z.B. bei KNIEPS (2008), eine Einführung in die Wachstumstheorie bei ACEMOGLU (2009) oder MAUßNER/KLUMP(1996).

(3.2-17) $\quad Q_{LL} > 0$ für $L < \tilde{L}(\bar{C})$ und $Q_{CC} > 0$ für $C < \tilde{C}(\bar{L})$ und

(3.2-18) $\quad Q_{LL} < 0$ für $L > \tilde{L}(\bar{C})$ und $Q_{CC} < 0$ für $C > \tilde{C}(\bar{L})$.[13]

Abbildung (A 3.2-5) stellt die zugehörigen Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven dar.

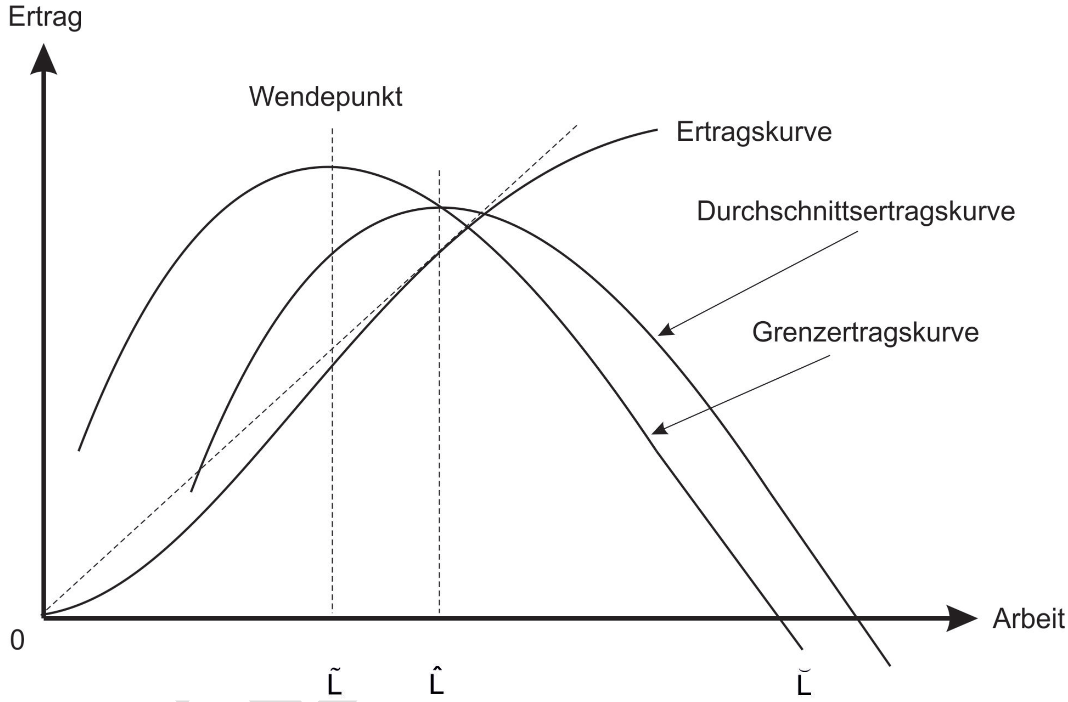


Abbildung (A 3.2-5): Die Ertrags-, Grenzertrags- und Durchschnittsertragskurven einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion

Ertrags- und Grenzertragskurve

Die Ertragskurve hat einen S-förmigen Verlauf mit einem Wendepunkt bei der Menge $\tilde{L}$. Die Ertragszuwächse steigen bis zu diesem Punkt, danach sinken sie. Entsprechend hat die Grenzertragskurve einen umgekehrt U-förmigen Verlauf mit dem Maximum im Wendepunkt der Ertragskurve. Dort ist ja der Anstieg der Ertragskurve, also der Grenzertrag, am höchsten. Auch die Durchschnittsertragskurve hat einen umgekehrt U-förmigen Verlauf, wie man nachprüfen kann, wenn man den Fahrstrahl vom Ursprung entlang der Ertragskurve wandern lässt. Sie erreicht ihr Maximum dort, wo der Fahrstrahl den größten Anstieg hat. Dies ist dort der Fall, wo der Fahrstrahl die Ertragskurve tangiert, also bei der Menge $\hat{L}$. In diesem Punkt haben der Fahrstrahl und die Tangente an die Ertragskurve den gleichen Anstieg, mithin sind Grenzertrag und Durchschnittsertrag bei dieser Menge

13 Die kritischen Werte $\tilde{L}, \tilde{C}$ hängen in der Regel vom (fixen) Niveau des 2. Faktors ab. Diese Niveaus sind hier mit $\bar{L}, \bar{C}$ bezeichnet.

gleich hoch.[14] Die Grenzproduktskurve schneidet die Durchschnittsproduktskurve in diesem Punkt. Links von diesem Punkt ist der Grenzertrag höher als der Durchschnittsertrag, rechts davon ist es umgekehrt.

Übungsaufgabe 9

Zeigen Sie, dass die Funktion $Q = \frac{L^2 C^2}{L^3 + C^3}$ für $L < 2^{\frac{1}{3}} C$ (falls L variiert wird) bzw. für $C < 2^{\frac{1}{3}} L$ (falls C variiert wird) ertragsgesetzliche Eigenschaften besitzt.

3.2.4. Die Eigenschaften von Produktionsfunktionen bei substitutionaler Faktorvariation

Faktorsubstitution

Manchmal erfolgt die Variation der Faktoreinsatzmengen in einem Unternehmen in der Weise, dass ein Faktor durch einen anderen ersetzt (substituiert) wird, die Produktmenge aber konstant gehalten wird. Eine derartige Substitution wird in der Regel vorgenommen, wenn sich die Faktorpreise oder die Faktorproduktivitäten ändern. Der relativ teurere Faktor wird durch den kostengünstigeren ersetzt. Eine Substitution ist allerdings nicht bei allen Produktionsprozessen möglich. Um diese unterschiedlichen Produktionsbedingungen abzubilden, unterscheidet man:

a) substitutionale Produktionsfunktionen und
b) nicht-substitutionale Produktionsfunktionen.

Falls eine Substitution grundsätzlich möglich ist, lassen sich wiederum zwei Fälle unterscheiden:

1. Ein Faktor kann vollständig durch einen anderen ersetzt werden.
2. Ein Faktor kann nur in gewissen Grenzen durch einen anderen ersetzt werden.

Im Falle der Substituierbarkeit kann der Grad der Schwierigkeit, mit dem der eine durch den anderen Faktor ersetzt werden kann, variieren.

14 Formal: $DE = \frac{Q(L,C)}{L} = \max! \rightarrow \frac{\partial DE}{\partial L} = \frac{\partial Q / \partial L \cdot L - Q}{L^2} = 0 \rightarrow \partial Q / \partial L = Q / L$.

Die Bedingung zweiter Ordnung lautet: $\frac{\partial\left(\frac{\partial DE}{\partial L}\right)}{\partial L} < 0$. Sie ist erfüllt, da $\frac{\partial\left(\frac{\partial DE}{\partial L}\right)}{\partial L} = \frac{L^2\left[Q_L + LQ_{LL} - Q_L\right] - 2L(Q_L L - Q)}{L^4} = \frac{Q_{LL}}{L} < 0$.

Mit Hilfe dieser Grundtypen der Substitutionseigenschaft lassen sich die unterschiedlichsten Produktionsbedingungen, die in der Realität zu beobachten sind, in einem relativ einfachen Produktionsmodell abbilden.

3.2.4.1 Isoquanten und die (technische) Grenzrate der Substitution

Isoproduktionsfunktion

Betrachten wir wieder unsere Produktionsfunktion $Q = f(L,C)$ und unterstellen, dass eine Substitution zwischen den Faktoren Arbeit und Kapital möglich sei. Falls die Substitution in der Weise erfolgt, dass der Output konstant bleibt, lässt sich die Produktionsfunktion in der Form

(3.2-19) $L = g(C;\bar{Q})$

schreiben. Diese Funktion ordnet einer gegebenen Menge des Faktors Kapital jene Menge des Faktors Arbeit zu, welche die Produktmenge $\bar{Q}$ konstant hält. Den Graph dieser Funktion bezeichnet man als *Isoquante*. Die Isoquante ist die Menge aller Faktorkombinationen, die bei effizienter Produktion zum gleichen Output führen. Abbildung (A 3.2-6) stellt den Graph dieser Funktion für drei unterschiedliche Werte von $\bar{Q}$ dar.

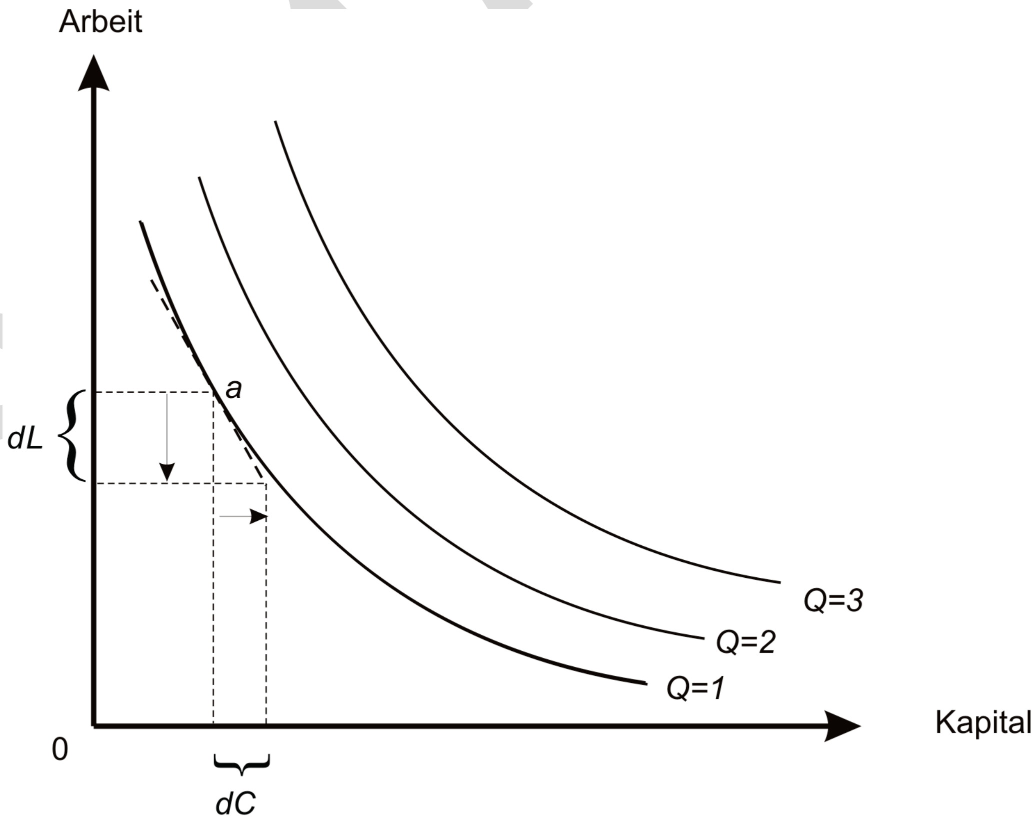


Abbildung (A 3.2-6): Isoquanten einer substitutionalen Produktionsfunktion

Isoquanten

dL gibt die Änderung des Faktors Arbeit, dC die des Faktors Kapital an. Das Verhältnis $\frac{dL}{dC}$ bezeichnet man als die *Grenzrate der Substitution* des Faktors Arbeit durch den Faktor Kapital. Geht man zur Marginalbetrachtung über, lässt also die Änderung der Einsatzmenge des Faktors Kapital gegen null gehen, so ist die Grenzrate der Substitution im Punkte a gleich der Steigung der Tangente an die Isoquante in diesem Punkt. Da der Einsatz des Faktors Arbeit sinkt, wenn der des Faktors Kapital steigt, ist die Grenzrate der Substitution negativ. Sie lässt sich durch Bildung des totalen Differenzials der Produktionsfunktion berechnen:

(3.2-20) $$dQ = \frac{\partial f}{\partial L} dL + \frac{\partial f}{\partial C} dC = 0 .$$

Die Änderung der Produktmenge ist null, da Arbeit und Kapital ja in der Weise gegeneinander substituiert werden sollen, dass sich die Produktmenge nicht ändert. Formt man die Gleichung um, so erhält man:

(3.2-21) $$\left.\frac{dL}{dC}\right|_{dQ=0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}} .$$

Damit wir im Folgenden nicht mit einer negativen Größe rechnen müssen, definieren wir wieder (wie schon in Kurseinheit 2):

$GRS(L,C) = -\left.\frac{dL}{dC}\right|_{dQ=0}$. Dann ist die Grenzrate der Substitution positiv.

Grenzrate der Substitution

Die Grenzrate der Substitution von Arbeit durch Kapital ist also gleich dem reziproken Verhältnis der zugehörigen Grenzprodukte. Da die Grenzprodukte positiv sind, muss die Isoquante eine negative Steigung haben.

Dabei ist zu beachten, dass $\frac{\partial f}{\partial C}$ und $\frac{\partial f}{\partial L}$ Funktionen von L und C sind. Ausführlich geschrieben lautet die Gleichung deshalb:

(3.2-22) $$\left.\frac{dL}{dC}\right|_{dQ=0} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial C}(L,C)}{\frac{\partial f}{\partial L}(L,C)} .$$

Im Allgemeinen ist die Grenzrate der Substitution keine Konstante, sondern ändert sich mit dem Einsatzverhältnis der Faktoren.

Übungsaufgabe 10

Welchen Verlauf müsste die Isoquante haben, wenn die Grenzrate der Substitution konstant sein sollte?

„Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der Substitution“

Es erscheint plausibel, dass die Grenzrate der Substitution kleiner wird, je stärker der eine Faktor durch den anderen ersetzt wird: Je mehr Einheiten des Faktors Arbeit bereits ersetzt worden sind, desto weniger Einheiten Arbeit lassen sich im weiteren Verlauf durch eine zusätzliche Einheit Kapital ersetzen. Man bezeichnet diese oft beobachtete Eigenschaft von Produktionsprozessen als das *„Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der Substitution“*. Die Eigenschaft der abnehmenden Grenzrate der Substitution folgt aus den Annahmen positiver, aber abnehmender Grenzprodukte sowie der zusätzlichen Annahme, dass das Grenzprodukt eines Faktors steigt, wenn die Einsatzmenge eines anderen Faktors erhöht wird. Für den Fall von zwei Faktoren lässt sich dies folgendermaßen zeigen:

(3.2-23) $Q = f(L,C)$ mit $f_L, f_C > 0$, $f_{LL}, f_{CC} < 0$ und $f_{LC}, f_{CL} > 0$.

$$\text{(3.2-24)} \qquad GRS(L,C) = \frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}} = \frac{f_C}{f_L}.$$

Für die Änderung der Grenzrate der Substitution gilt:

$$\text{(3.2-25)} \qquad \frac{\partial GRS(L,C)}{\partial C} = \frac{\partial\left(\frac{f_C}{f_L}\right)}{\partial C} = \frac{f_L f_{CC} - f_C f_{LC}}{(f_L)^2} < 0 .$$

Wenn der Einsatz desjenigen Faktors, durch den substituiert wird, bei konstanter Produktion steigt, wird die Grenzrate der Substitution kleiner.

Konvexe Isoquanten

Die Annahmen über die ersten und zweiten Ableitungen der Produktionsfunktion lassen sich zu einer einzigen Annahme zusammenfassen: *Die Produktionsfunktion besitzt konvexe Isoquanten*.

Unterschied zwischen Nutzen- und Produktionsfunktionen

Sie werden bemerkt haben, dass die Isoquante eine große formale Ähnlichkeit mit der *Indifferenzkurve* der Haushaltstheorie besitzt. Nutzenfunktion und Produktionsfunktion können sogar, mathematisch gesehen, identisch sein. Ein wichtiger ökonomischer Unterschied besteht jedoch darin, dass Produktmengen kardinal, Nutzen dagegen nur ordinal messbar sind. Eine Isoquante mit dem Wert 4 repräsentiert eine Produktmenge, welche genau doppelt so groß ist wie die Produktmenge einer Isoquante mit dem Wert 2. Eine Indifferenzkurve mit dem Wert 4 repräsentiert dagegen lediglich ein höheres Nutzenniveau als eine Indifferenzkurve mit dem Wert 2. Um wie viel das Nutzenniveau höher ist, bleibt unbestimmt.

Ein weiterer Unterschied zwischen Indifferenzkurve und Isoquante besteht in der Stellung, welche die von den beiden Kurven jeweils illustrierten Konzepte in der ökonomischen Theorie einnehmen. Die Indifferenzkurve ist ein Bild der Zielfunktion des Haushalts. Die Nutzenmaximierung des Haushalts kann graphisch als Bestreben illustriert werden, die höchstmögliche Indifferenzkurve zu erreichen. Dazu stellt die Isoquante in der Theorie der Firma kein Analogon dar. Es wäre aussichtslos, das Ziel der Firma in einem Isoquantensystem illustrieren zu wollen. Die Firm strebt nicht nach Output-, sondern nach Gewinnmaximierung.

Übungsaufgabe 11

Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution für folgende Produktionsfunktion: $Q = \gamma L^{\alpha} C^{1-\alpha}$.

3.2.4.2 Die Substitutionselastizität

Bedeutung der Substitutionselastizität

Die Krümmung der Isoquanten drückt aus, wie „leicht“ oder wie „schwer“ ein Faktor gegen einen anderen ausgetauscht werden kann. Ein Maß hierfür ist die *Substitutionselastizität* ε_{Sub}. Sie gibt die prozentuale Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses an, die mit einer prozentualen Änderung der Grenzrate der Substitution einhergeht. Wie wir später sehen werden (in Kurseinheit 4), ist die Grenzrate der Substitution unter bestimmten Bedingungen identisch mit dem Verhältnis der Faktorpreise. Dann kann man auch sagen: Die Substitutionselastizität gibt die prozentuale Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses an, die als Folge der Änderung des Faktorpreisverhältnisses um einen bestimmten Prozentsatz eintritt. Wenn z.B. der Lohnsatz steigt und der Kapitalkostensatz konstant bleibt, werden die Firmen versuchen, Arbeit durch Kapital zu ersetzen. Je leichter dies möglich ist, um so stärker wird sich das Faktoreinsatzverhältnis bei einer gegebenen Änderung des Faktorpreisverhältnisses verändern. Die formale Definition der Substitutionselastizität lautet:

$$\varepsilon_{Sub}(L,C) = \frac{\dfrac{d(L/C)}{L/C}}{\dfrac{d(f_C/f_L)}{f_C/f_L}} = \frac{d(L/C)}{d(f_C/f_L)} \frac{f_C/f_L}{L/C} > 0. \tag{3.2-26}$$

Variabilität der Substitutionselastizität

Bei einer Substitution von Arbeit durch Kapital sinkt das Faktoreinsatzverhältnis von Arbeit zu Kapital. Der Zähler des großen Bruches wird also negativ. Die Grenzrate der Substitution sinkt ebenfalls. Also ist auch der Nenner des großen Bruches negativ. Dann ist die Substitutionselastizität positiv. Grenzrate der Substitution und Faktoreinsatzverhältnis ändern sich also stets in die gleiche Richtung. Genauso wie die Grenzrate der Substitution im Allgemeinen keine Konstante ist, ist auch die Substitutionselastizität im Allgemeinen nicht konstant. Es gibt aber eine Klasse von Produktionsfunktionen, bei denen diese Elastizität konstant ist. Man bezeichnet sie als *CES-Funktionen* (CES steht für Constant Elasticity of Substitution). Diese stellen einen interessanten Spezialfall dar, der in empirischen Untersuchungen oftmals verwendet wird.

Abbildung (A 3.2-7) stellt die Isoquanten von fünf verschiedenen Produktionsfunktionen dar.

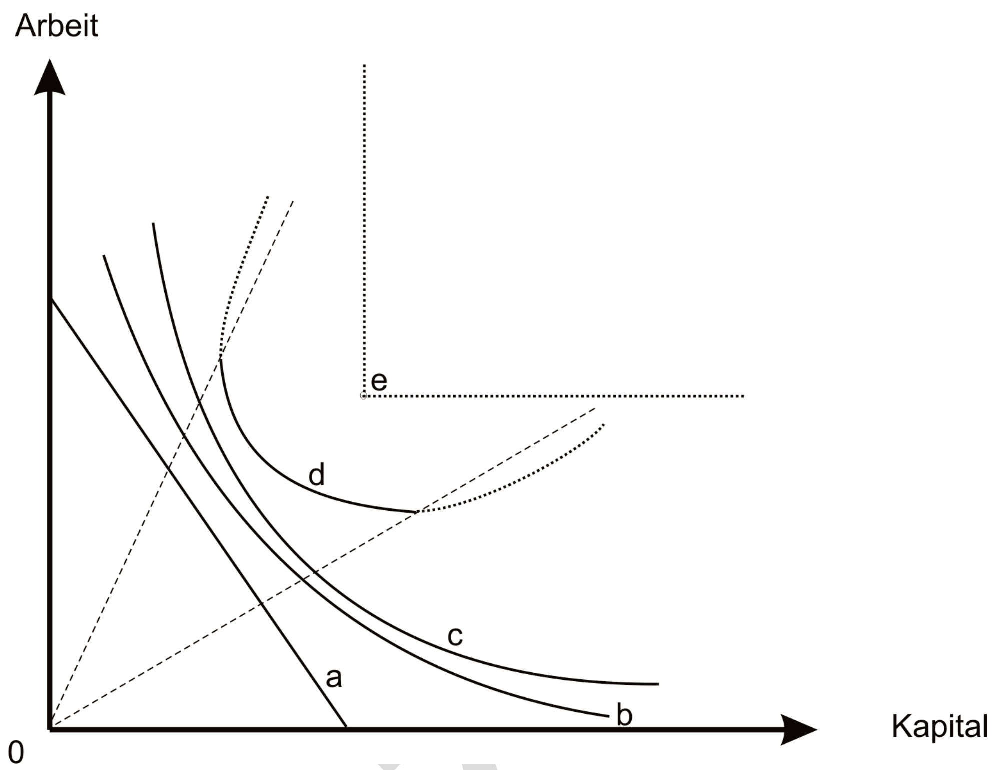


Abbildung (A 3.2-7): Isoquanten von Produktionsfunktionen mit unterschiedlicher Substitutionselastizität

Alternative Isoquantenverläufe

- Die Gerade a stellt die Isoquante der linearen Produktionsfunktion $Q = \alpha L + \beta C$ dar. Ihre Substitutionselastizität ist unendlich: $\varepsilon_{Sub} = \infty$.

- Die Kurven b und c stellen die Isoquanten neoklassischer Produktionsfunktionen dar. Für die Substitutionselastizität gilt: $0 < \varepsilon_{Sub} < \infty$. Die Substitutionselastizität der Kurve b ist größer als die der Kurve c.

- Die Kurve d stellt die Isoquante einer Produktionsfunktion dar, die einen beschränkten Substitutionsbereich besitzt. Eine Substitution ist nur innerhalb des Bereichs möglich, der durch die beiden gestrichelten Geraden begrenzt wird. Außerhalb dieses Bereichs müsste die Einsatzmenge beider Faktoren gesteigert werden, sollte die Produktmenge konstant bleiben.[15] Die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion

(3.2-27) $$Q = \frac{L^2C^2}{L^3 + C^3}$$

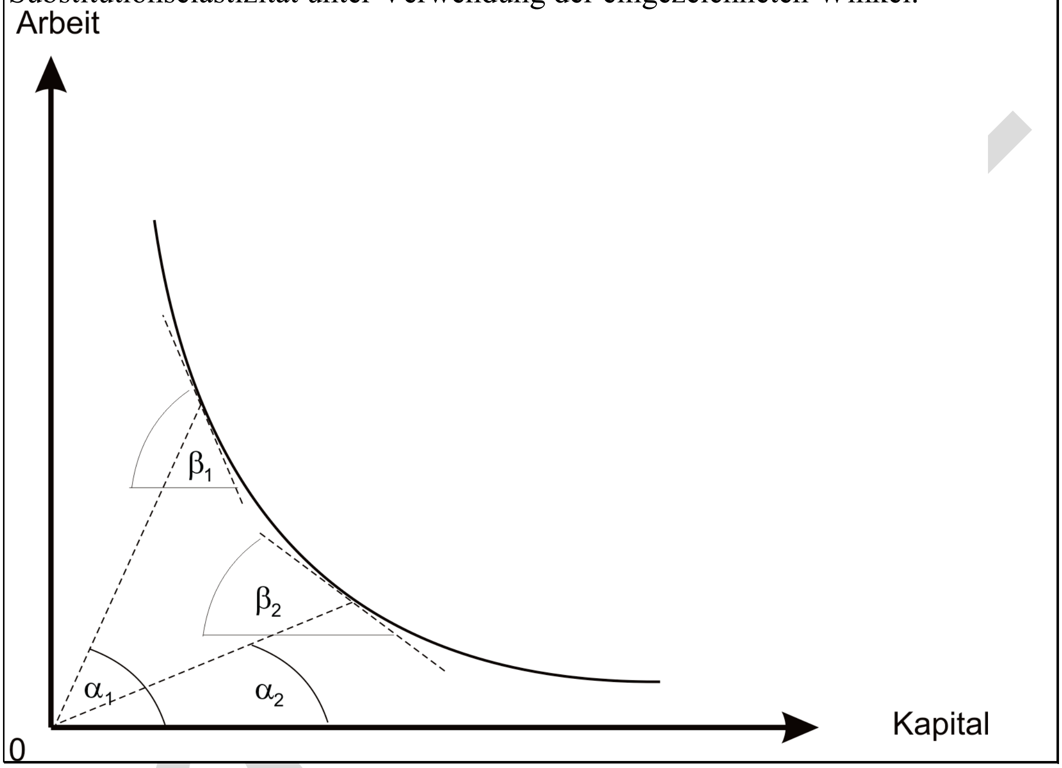
15 Streng genommen gehören die Bereiche außerhalb der gestrichelten Geraden nicht mehr zum Definitionsbereich der Produktionsfunktion, da diese Inputkombinationen ineffizient sind. Deshalb ist die Isoquante hier gepunktet gezeichnet. Die gleiche Produktmenge lässt sich mit kleineren Inputmengen erzeugen.

weist z.B. diese Eigenschaft auf.

- Die Kurve *e* stellt die Isoquante einer linear-limitationalen Produktionsfunktion dar. Eine Substitution ist nicht möglich. Die Substitutionselastizität beträgt null.[16]

Übungsaufgabe 12

In der folgenden Abbildung ist eine Isoquante eingezeichnet. Definieren Sie die Substitutionselastizität unter Verwendung der eingezeichneten Winkel.



3.2.4.3 Empirische Untersuchungen zur Substitutionselastizität

Substitutionselastizität bei linearer Produktionsfunktion

Lineare Produktionsfunktionen implizieren eine unendlich große Substitutionselastizität, also eine perfekte Substituierbarkeit der Produktionsfaktoren. Sie stellen deshalb eher einen theoretischen Grenzfall dar als ein realitätsnahes Produktionsmodell. Immerhin ist es denkbar, dass eine perfekte Substitution zwar nicht zwischen, wohl aber innerhalb der breit definierten Faktoren Arbeit, Kapital und Vorleistungen möglich ist. In bestimmten Bereichen könnte z.B. „Frauenarbeit" ein perfektes Substitut zur „Männerarbeit" sein. Zwei unterschiedliche Produktionsstandorte könnten perfekte Substitute sein. Die Stromlieferungen unterschiedlicher Anbieter werden im Regelfall perfekte Substitute sein. Die Beispiele zei-

16 Auch hier gehört streng genommen nur der Eckpunkt zum Definitionsbereich der Produktionsfunktion.

gen: *Wird der Begriff des Faktors eng genug definiert, so kann die Substitutionselastizität zwischen diesen Faktoren sehr groß sein*.

Substitutionselastizität bei linear-limitationaler Produktionsfunktion

Das andere Extrem stellen linear-limitationale Produktionsfunktionen dar. Hier ist keinerlei Substitution zwischen den Faktoren möglich. Die Substitutionselastizität ist null. Derartige Funktionen sind geeignet, um die kurzfristigen Bedingungen abzubilden, die bei den meisten industriellen Fertigungsprozessen anzutreffen sind. Deshalb spricht man z.B. auch von einem „Arbeitsplatz“ und meint damit eine mehr oder minder feste Koppelung von Kapitalausstattung und Arbeitseinsatz. Noch festere Koppelungen bestehen in der chemischen Industrie zwischen den Einsatzmengen der verschiedenen Rohstoffe. Hier müssen die Faktormengen im Allgemeinen in exakt festgelegten Proportionen eingesetzt werden.

Eine derartig feste Koppelung besteht allerdings – selbst in der chemischen Industrie – nur im Rahmen eines gegebenen Produktionsprozesses. Oftmals stehen aber eine ganze Reihe unterschiedlicher Verfahren zur Erzeugung eines Produktes zur Verfügung. Diese Verfahren unterscheiden sich durch die Faktorrelationen, die in ihnen zum Einsatz kommen. Die Substitution findet dann *nicht innerhalb* eines Produktionsverfahrens, *sondern zwischen* den Verfahren statt.

Änderung der Substitutionselastizität im Zeitverlauf

Der Übergang von einem Verfahren zu einem anderen erfordert normalerweise eine gewisse Zeit. Deshalb steigt die Substitutionselastizität mit der Länge der betrachteten Zeitperiode. Nach der ersten Ölpreiskrise von 1974, als der Ölpreis sich fast verdoppelte, blieb die Relation von Energieverbrauch zu Bruttoinlandsprodukt zunächst nahezu konstant. Nach 15 Jahren war der Energiekoeffizient (Energieverbrauch/reales Bruttoinlandsprodukt) um 37 % gesunken.[17] Ähnliches ist hinsichtlich des Einsatzes von Kapital und Arbeit zu beobachten. Wenn die Lohnkosten im Vergleich zu den Kapitalkosten steigen, geht man tendenziell zu kapitalintensiveren Verfahren über, bei denen relativ mehr Kapital und weniger Arbeit eingesetzt werden. Auch ein solcher Übergang erfolgt nicht abrupt, sondern allmählich. Ob man derartige Änderungen der Faktoreinsatzverhältnisse durch den Übergang von der einen limitationalen Produktionsfunktion zu einer anderen modelliert oder durch unveränderte, aber substitutionale Produktionsfunktionen mit geänderten Faktoreinsatzverhältnissen, ist eine Frage der Zweckmäßigkeit. In der Volkswirtschaftslehre und hierbei speziell im Bereich der mikroökonomischen Analyse bedient man sich im Allgemeinen substitutionaler Produktionsfunktionen. Linear-limitationale Produktionsfunktionen werden im Bereich der Volkswirtschaftslehre vor allem im Rahmen der *Input-Output-Analyse* verwendet. In der Betriebswirtschaftslehre modelliert man Produktionsprozesse dagegen sehr häufig durch linear-limitationale Produktionsfunktionen.

17 Quelle: Internetseite: http://www.ekd.de/EKD-Texte/2110_klima_1995_schoepfung13.html.

Substitutionselastizität und Faktornachfrage

Sie werden sich an dieser Stelle vielleicht fragen, weshalb sich der Ökonom überhaupt mit der Substitutionselastizität einer Produktionsfunktion befassen sollte. Welchen Nutzen hat dieser Begriff für die Analyse der Entscheidungen der Firmen? Eine erste Antwort auf diese Frage werden wir bekommen, wenn wir uns im nächsten Kapitel mit den Kostenminimierungsentscheidungen und der Faktornachfrage der Firmen beschäftigen. Eine umfassende Antwort muss warten, bis wir in Kurseinheit 4 die Preisbildung auf Konkurrenzmärkten erörtert haben. Dann werden wir sehen, dass die Substitutionselastizität unter bestimmten Bedingungen ein Maß dafür ist, welchen Einfluss Faktorpreisänderungen auf die Faktornachfrage haben.[18]

3.2.5. Spezielle Produktionsfunktionen

Allgemeingültigkeit produktionstheoretischer Annahmen

Die Produktionsfunktion stellt ein Modell der Firma dar, welches den Zusammenhang beschreibt, der zwischen den Mengen der eingesetzten Produktionsfaktoren und der Menge des erzeugten Produktes besteht. Ein derartiges Modell wird benötigt, wenn man z.B. Aussagen darüber treffen will, welche Auswirkungen Faktorpreisänderungen oder Produktivitätsänderungen auf die Nachfrage der Firmen nach Produktionsfaktoren oder auf die von den Firmen angebotene Produktmenge haben. Derartige Aussagen sind um so wertvoller, je allgemeiner sie sind. Die Aussage „Eine Verteuerung des Faktors Arbeit im Verhältnis zum Faktor Kapital führt ceteris paribus zu einer Substitution von Arbeit durch Kapital“ hat einen größeren Wert als die Aussage „Eine Verteuerung des Faktors Arbeit im Verhältnis zum Faktor Kapital führt ceteris paribus zu einer Substitution von Arbeit durch Kapital, *wenn die Produktionsfunktionen der beteiligten Firmen folgende Eigenschaften besitzen*: ...“ Jetzt folgt eine mehr oder minder lange Liste von Eigenschaften, welche diese Produktionsfunktionen besitzen müssen, damit die Aussage zutrifft. Je länger diese Liste ist, desto stärker wird der Anwendungsbereich des Modells eingeschränkt, desto geringer ist der Aussagewert. Aus diesem Grunde haben wir bisher versucht, unsere Annahmen bezüglich der Eigenschaften der Produktionsfunktion möglichst allgemein zu halten. Leider hat diese Allgemeingültigkeit ihren Preis: Oftmals ist es nicht möglich, zu eindeutigen Aussagen über die Auswirkungen bestimmter Änderungen in den exogenen Variablen (hier der Faktorpreise) auf die endogenen Variablen (hier der Faktornachfrage und der Produktmenge) zu kommen, wenn man keine zusätzlichen Annahmen über die Eigenschaften der Produktionsfunktion macht. Um den Aussagewert nicht zu stark zu reduzieren, wird man sich dabei bemühen, diese zusätzlichen Annahmen möglichst wenig restriktiv zu gestalten.

18 Empirische Aussagen zur Substitutionselastizität zwischen Arbeit und Kapital finden sich bei BEHRMAN (1982) und CLARO (2003).

Spezielle Produktionsfunktionen

Im Laufe der Zeit haben sich einige spezielle Produktionsfunktionen herauskristallisiert, die nach dem Urteil der Ökonomen einen guten Kompromiss zwischen dem Wunsch nach Allgemeingültigkeit und dem Wunsch nach Eindeutigkeit der Aussagen darstellen. Diese Produktionsfunktionen unterscheiden sich von unserer bisher behandelten, allgemeinen Produktionsfunktion $Q = f(L,C)$ dadurch, dass die Art des Zusammenhangs zwischen Input und Output, welche durch den Buchstaben f symbolisiert wird, jetzt mathematisch spezifiziert wird. Ein einfaches Beispiel bildet die Funktion:

(3.2-28) $$Q = \alpha L + \beta C .$$

Parameter einer Produktionsfunktion

Die Buchstaben α und β stellen Parameter dar, d.h. Größen, welche konstant bleiben, wenn sich die Variablen Q, L oder C ändern. Für viele Analysen reicht es aus, wenn diese Parameter als positiv angenommen werden. In anderen Fällen führt diese Annahme allein jedoch noch nicht zu eindeutigen Aussagen. Dann müssen zusätzlich die numerischen Werte der Parameter bekannt sein. An dieser Stelle kommt die Empirie ins Spiel. Falls die angenommene Funktion den in der Realität herrschenden Zusammenhang zwischen Input und Output angemessen beschreibt, lassen sich die numerischen Werte der Parameter α und β mit den Methoden der *empirischen Wirtschaftsforschung*, insbesondere den Methoden der *Ökonometrie*, schätzen. Die mit Hilfe einer derart numerisch spezifizierten Funktion abgeleiteten Aussagen sind gültig, solange diese Zahlenwerte die Realität angemessen repräsentieren. Dies wird im Allgemeinen für eine begrenzte Zeitdauer, eine klar abgegrenzte Branche und ein abgegrenztes geografisches Gebiet der Fall sein. Die Ökonometrie hat eine Reihe von Verfahren entwickelt, mit denen beurteilt werden kann, wie zuverlässig derartige Schätzungen sind.[19]

Eigenschaften spezieller Produktionsfunktionen

Will man ökonomische Analysen mit Hilfe von speziellen Funktionen, egal ob in allgemeiner oder in numerisch spezifizierter Form, durchführen, muss man die Eigenschaften derartiger Funktionen kennen. Nur dann lässt sich entscheiden, welche dieser Funktionen zur Untersuchung einer bestimmten Fragestellung geeignet ist, welche also eine „optimale" Wahl zwischen den Wünschen nach Allgemeingültigkeit auf der einen Seite und nach Eindeutigkeit auf der anderen Seite darstellt. Deshalb werden wir uns auf den folgenden Seiten mit einigen recht formalen Sachverhalten beschäftigen müssen, die auf den ersten Blick mehr mit Mathematik als mit Ökonomik zu tun haben. Ohne Beherrschung dieser Sachverhalte kann man aber nicht sinnvoll mit den Standardfunktionen der Produktionstheorie arbeiten, und ohne diese Funktionen lassen sich viele wirtschaftspolitisch relevante Fragen nicht beantworten.

19 Einführende Lehrbücher in die Ökonometrie sind FROHN (1995) und VON AUER (2011).

Eigenschaften bei partieller und substitutionaler Faktorvariation

Betrachten wir zunächst noch einmal die Eigenschaften von Produktionsfunktionen bei partieller und bei substitutionaler Faktorvariation. Diese Eigenschaften sind miteinander gekoppelt. Lineare Produktionsfunktionen besitzen lineare Ertragskurven und lineare Isoquanten. Linear-limitationale Produktionsfunktionen besitzen bis zur Kapazitätsgrenze lineare Ertragskurven und L-förmige Isoquanten. Streng genommen bestehen Ertragskurve und Isoquante allerdings nur aus einem einzigen Punkt. Alle anderen Punkte sind ineffizient. Neoklassische Produktionsfunktionen besitzen konkave Ertragskurven und konvexe Isoquanten. Ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen besitzen S-förmige Ertragskurven und Isoquanten, die in einem begrenzten Bereich eine negative Steigung, außerhalb dieses Bereichs aber eine positive Steigung besitzen. Auch hier repräsentieren die Isoquantenbereiche mit positiver Steigung ineffiziente Inputkombinationen. In den folgenden Abbildungen sind die Ertragskurven und die Isoquanten dieser vier Typen von Produktionsfunktionen noch einmal gegenübergestellt. Die linke Kurve stellt jeweils die Ertragskurve und die rechte die zugehörige Isoquante dar.

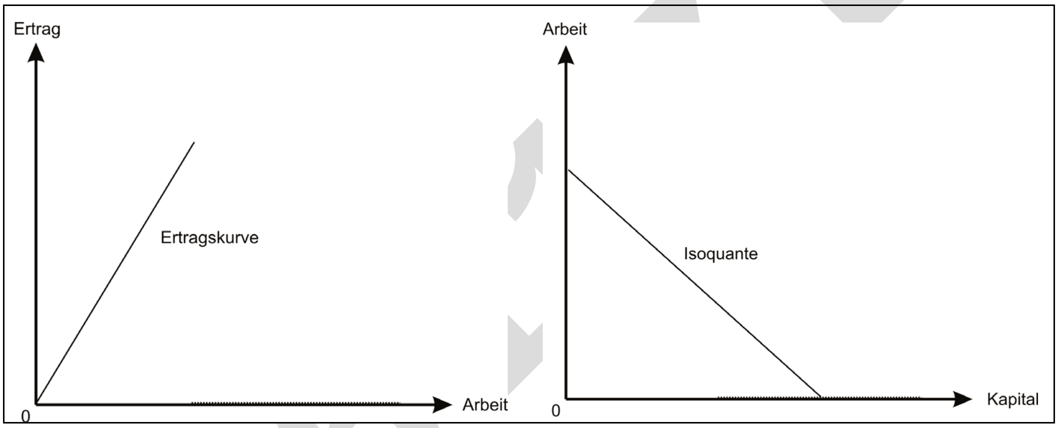


Abbildung (A 3.2-8a): Ertragskurve und Isoquante einer linearen Produktionsfunktion

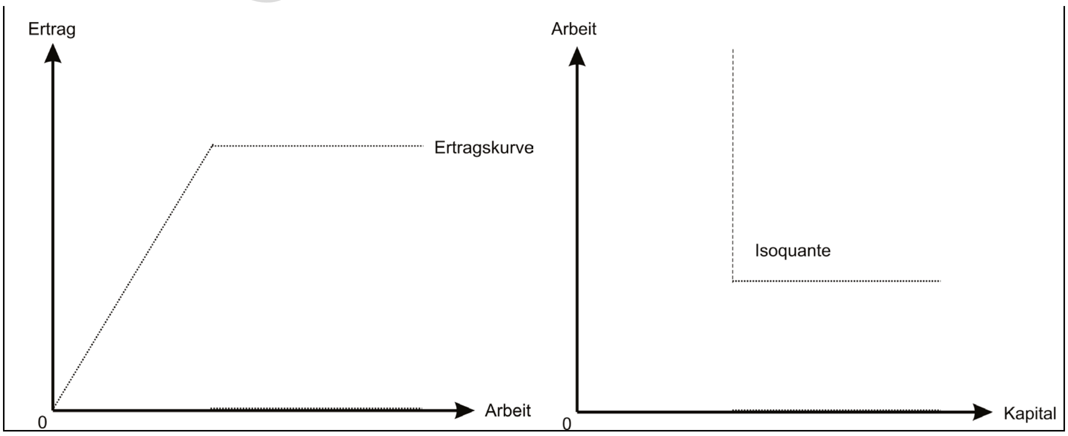


Abbildung (A 3.2-8b): Ertragskurve und Isoquante einer linear-limitationalen Produktionsfunktion

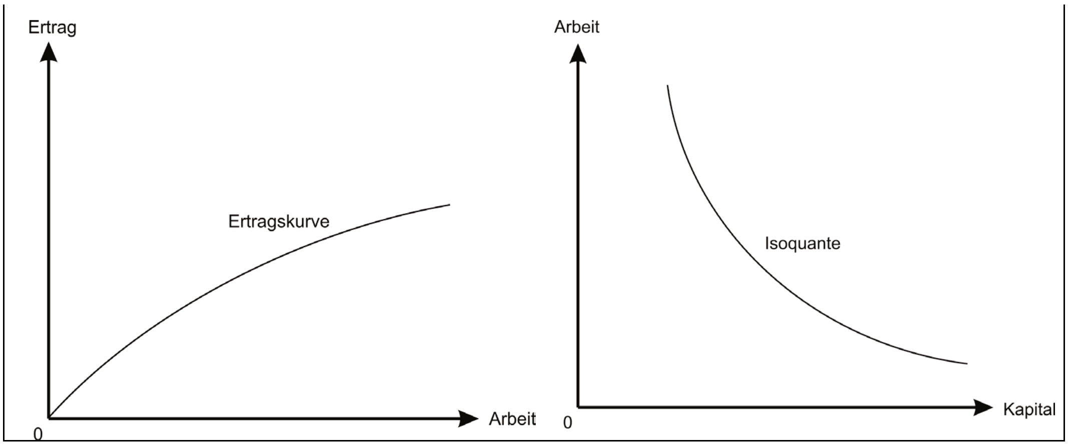


Abbildung (A 3.2-8c): Ertragskurve und Isoquante einer neoklassischen Produktionsfunktion

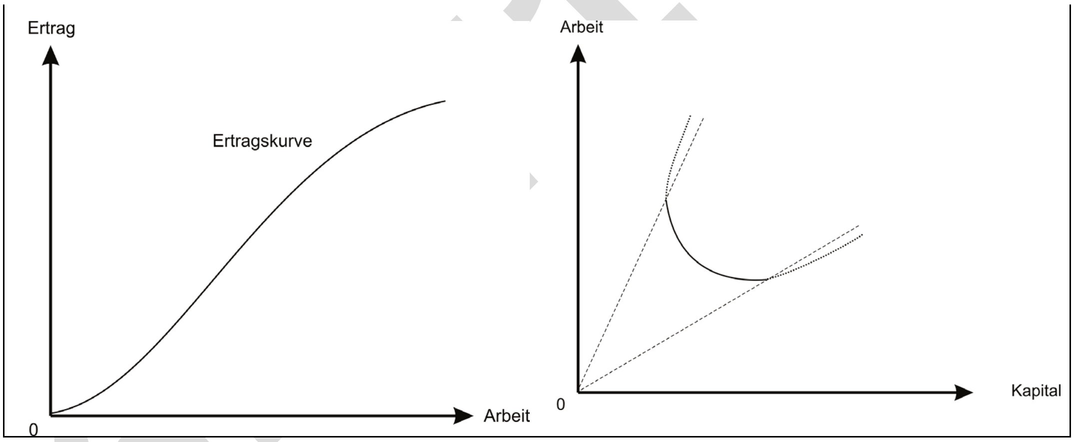


Abbildung (A 3.2-8d): Ertragskurve und Isoquante einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion

Skalenerträge spezieller Produktionsfunktionen

Die lineare und die linear-limitationale Produktionsfunktion besitzen definitionsgemäß konstante Skalenerträge (auf Grund der Linearität). Für neoklassische und ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen werden oftmals konstante Skalenerträge unterstellt. Die Eigenschaften, welche diese beiden Funktionen bei partieller oder substitutionaler Faktorvariation aufweisen, könnten aber auch mit steigenden oder sinkenden Skalenerträgen verbunden sein. Die folgende Tabelle kombiniert die Skalenelastizität (als Maß für die Skalenerträge) mit der Substitutionselastizität (als Maß für die Substituierbarkeit). Ein Strich in einem Feld bedeutet, dass diese Merkmalskombination definitionsgemäß nicht möglich ist, ein Kreuz, dass sie möglich ist. Die Cobb-Douglas- und die CES-Funktion sind Beispiele für neoklassische Produktionsfunktionen, die in theoretischen, aber vor allem in empirischen Untersuchungen sehr oft verwendet werden. Wir wollen uns deshalb in den folgenden beiden Abschnitten etwas näher mit ihnen beschäftigen.

Substitutions-elastizität / Skalen-elastizität	$\varepsilon_{Sub} = 0$	$\varepsilon_{Sub} = 1$	$0 < \varepsilon_{Sub} < \infty$ $\varepsilon_{Sub} = const.$	$0 < \varepsilon_{Sub} < \infty$	$\varepsilon_{Sub} = \infty$
	linear-limitational	neoklassisch		ertragsgesetzlich	linear
$\varepsilon_{Q,\mu} > 1$	-	Cobb-Douglas	CES	X	-
$\varepsilon_{Q,\mu} = 1$	X	Cobb-Douglas	CES	X	X
$\varepsilon_{Q,\mu} < 1$	-	Cobb-Douglas	CES	X	-

Tabelle (T 3.2-1): Die Kombination von Substitutions- und Skalenelastizitäten bei einigen wichtigen Produktionsfunktionen[20]

Übungsaufgabe 13

Angenommen, eine neoklassische Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen wird einer streng monotonen positiven Transformation unterworfen, derart, dass die resultierende homothetische Funktion zunächst steigende, dann sinkende Skalenerträge aufweist. Ist die homothetische Funktion eine neoklassische Funktion?

3.2.5.1 Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

C. W. COBB und P. H. DOUGLAS sind zwei amerikanische Ökonomen, welche die nach ihnen benannte Produktionsfunktion in empirischen Arbeiten zur Analyse der Determinanten des Wirtschaftswachstums verwendet haben.[21] Falls nur die beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital eingesetzt werden, hat diese Funktion die Form:

Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

(3.2-29) $Q = f(L,C) = \gamma L^{\alpha} C^{\beta}$, wobei $\alpha, \beta, \gamma > 0$ gilt.

Die Exponenten α und β haben eine wichtige ökonomische Bedeutung. Sie geben näherungsweise an, um wie viel Prozent der Output steigt, wenn die Einsatzmenge des betreffenden Faktors um ein Prozent steigt. Diesen Ausdruck bezeichnet man als *Produktionselastizität*. Für die Produktionselastizität der Arbeit erhalten wir:[22]

20 Man beachte, dass die Tabelle nicht so zu verstehen ist, dass jede Cobb-Douglas-Funktion zugleich neoklassisch ist. Eine Cobb-Douglas-Funktion zählt nur dann zu den neoklassischen Funktionen, wenn $\alpha<1$ und $\beta<1$ gilt.

21 Die erste Veröffentlichung ist COBB/DOUGLAS (1928). Ein Überblick über empirische Arbeiten findet sich in DOUGLAS (1976).

22 $Q = \gamma L^{a} C^{b} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha \gamma L^{\alpha-1} C^{\beta} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \alpha$.

Produktionselastizität

(3.2-30) $$\frac{\partial Q}{\partial L}\frac{L}{Q} = \alpha$$

und entsprechend für den Faktor Kapital:

(3.2-31) $$\frac{\partial Q}{\partial C}\frac{C}{Q} = \beta \ .$$

Grenzprodukt

$\frac{\partial Q}{\partial L}$ ist das Grenzprodukt (genauer: die Grenzproduktivität) des Faktors Arbeit. Wie wir in Kurseinheit 4 sehen werden, ist es unter bestimmten Bedingungen für eine Firma optimal, die Faktoren nach ihrem Grenzprodukt zu entlohnen. Dann ergeben sich aus den Produktionselastizitäten der Faktoren wichtige Implikationen für die Einkommensverteilung in einer Volkswirtschaft.

Berechnung der Substitutionselastizität

Die *Substitutionselastizität einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion* lässt sich wie folgt berechnen:

Wir hatten in Unterabschnitt 3.2.4.2 die Substitutionselastizität als das Verhältnis der relativen Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses zur relativen Änderung der Grenzrate der Substitution GRS definiert. Setzt man $\kappa = \frac{L}{C}$ und berücksichtigt (3.2-24), so können wir (3.2-26) schreiben als:

(3.2-32) $$\varepsilon_{Sub} = \frac{\frac{d\kappa}{\kappa}}{\frac{dGRS}{GRS}} \ .$$

Die relative Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses ergibt sich zu[23]:

(3.2-33) $$\frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{dL}{L} - \frac{dC}{C} \ .$$

Für die relative Änderung der Grenzrate der Substitution erhält man[24]:

23 $d\kappa = \frac{1}{C}dL - \frac{L}{C^2}dC \ \Rightarrow \ \frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{1}{C}\frac{C}{L}dL - \frac{L}{C^2}\frac{C}{L}dC \ \Rightarrow \ \frac{d\kappa}{\kappa} = \frac{dL}{L} - \frac{dC}{C}$.

24 $dQ = \frac{\alpha\gamma L^{\alpha} C^{\beta}}{L}dL + \frac{\beta\gamma L^{\alpha} C^{\beta}}{C}dC = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha\frac{dL}{L} + \beta\frac{dC}{C} = 0 \quad \Rightarrow \quad GRS = -\frac{dL}{dC} = \frac{\beta}{\alpha}\frac{L}{C}$.

$\Rightarrow dGRS = \frac{\beta}{\alpha}d\kappa \ \Rightarrow \ \frac{dGRS}{GRS} = \frac{\frac{\beta}{\alpha}d\kappa}{\frac{\beta}{\alpha}\kappa} = \frac{d\kappa}{\kappa}$

(3.2-34) $$\frac{dGRS}{GRS}=\frac{dL}{L}-\frac{dC}{C}.$$

Verallgemeinerung der C-D-Funktion

Damit ergibt sich die Substitutionselastizität zu $\varepsilon_{Sub}=1$. Dieser Wert ist recht speziell. Würde man keine Cobb-Douglas-Funktion verwenden, könnte er irgendwo zwischen null und unendlich liegen. Die Wahl einer Cobb-Douglas-Funktion zur Beschreibung der Gesetzmäßigkeiten des Produktionsprozesses schränkt den Wert der darauf basierenden Aussagen also nicht unerheblich ein. Nur dann, wenn die tatsächliche Substitutionselastizität in der Nähe von eins liegt, könnte man den Aussagen vertrauen. Wie kann man aber feststellen, ob diese Bedingung erfüllt ist? Eine Möglichkeit hierzu bietet die Schätzung einer Produktionsfunktion, welche unterschiedliche Werte der Substitutionselastizität zulässt, mit Hilfe ökonometrischer Verfahren. Ein Beispiel für eine derartige Funktion ist die CES-Funktion. Ergibt sich dabei, dass die Substitutionselastizität tatsächlich in der Nähe von eins liegt, kann man mit der mathematisch einfacheren Cobb-Douglas-Funktion arbeiten.

Skalenelastizität

Betrachten wir als nächstes die *Skalenelastizität*. Wir hatten diese Größe als

$$\varepsilon_{Q,\mu}=\frac{\frac{dQ}{Q}}{\frac{d\mu}{\mu}}=\frac{dQ}{d\mu}\frac{\mu}{Q}$$

definiert. Sie gibt (näherungsweise) die prozentuale Änderung des Outputs an, wenn alle Inputfaktoren um ein Prozent geändert werden. Für die Skalenelastizität einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion gilt:[25]

$$\varepsilon_{Q,\mu}=\alpha+\beta.$$

Die Skalenelastizität ist in diesem Fall also gleich der Summe der Produktionselastizitäten. Falls $\alpha+\beta=1$ gilt, hat sie konstante Skalenerträge.

Außerdem weist sie eine Eigenschaft auf, über die wir bei der Behandlung der totalen Faktorvariation nur kurz gesprochen haben, die aber die ökonomische Analyse oftmals stark vereinfacht: die *Homogenität*.

Homogenitätsgrad

Für die Cobb-Douglas-Funktion gilt:

(3.2-35) $$\mu^h f(L,C)=\gamma(\mu L)^\alpha(\mu C)^\beta.$$

25 Aus $\overline{Q}=\gamma(L)^\alpha(C)^\beta$ und $Q(\mu)=\gamma(\mu L)^\alpha(\mu C)^\beta$ folgt $Q(\mu)=\mu^{\alpha+\beta}\gamma L^\alpha C^\beta$ und damit $Q(\mu)=\mu^{\alpha+\beta}\overline{Q}$. Dann ergibt sich: $\frac{\partial Q(\mu)}{\partial\mu}\frac{\mu}{Q}=(\alpha+\beta)\mu^{\alpha+\beta-1}\overline{Q}\frac{\mu}{\mu^{\alpha+\beta}\overline{Q}}=\alpha+\beta$.

mit

(3.2-36) $h = \alpha + \beta$.[26]

h bezeichnet den *Homogenitätsgrad*. Die Summe der Exponenten der Cobb-Douglas-Funktion gibt also nicht nur die Skalenelastizität, sondern zugleich den Homogenitätsgrad an. Falls $h = 1$ ist, heißt die Funktion linear-homogen. Für $h > 1$ besitzt sie steigende, für $h < 1$ sinkende Skalenerträge. *Die Eigenschaft, dass die Skalenelastizität gleich dem Homogenitätsgrad ist, gilt nicht nur für die Cobb-Douglas-Funktion, sondern generell für alle homogenen Funktionen*:

Skalenelastizität und Homogenitätsgrad

Bezeichnet man das Ausgangsniveau der Produktion mit $\bar{Q}$, so gilt bei einer proportionalen Erhöhung der Faktoreinsatzmengen um den Faktor μ:

(3.2-37) $Q = \mu^h \bar{Q}$.

Dann ist:

(3.2-38) $\dfrac{dQ}{d\mu} = h\mu^{h-1}\bar{Q}$ und

(3.2-39) $\dfrac{dQ}{d\mu}\dfrac{\mu}{Q} = h\dfrac{\mu^h\bar{Q}}{\mu}\dfrac{\mu}{Q} = h\dfrac{Q}{\mu}\dfrac{\mu}{Q} = h$,

wobei $\dfrac{dQ}{d\mu}\dfrac{\mu}{Q}$ die Skalenelastizität ist. Der Homogenitätsgrad ist also gleich der Skalenelastizität.

Übungsaufgabe 14

Berechnen Sie für die Produktionsfunktion
$Q = 10\sqrt{LC}$
folgende Ausdrücke:

a) Die Grenzprodukte beider Faktoren,
b) die Grenzrate der Substitution,
c) die Substitutionselastizität,
d) die Skalenelastizität und
e) den Homogenitätsgrad.

26 $\mu^h f(L,C) = \gamma(\mu L)^\alpha(\mu C)^\beta \Rightarrow \mu^h f(L,C) = \mu^{\alpha+\beta}\gamma(L)^\alpha(C)^\beta \Rightarrow \mu^h = \mu^{\alpha+\beta}$.

3.2.5.2 CES-Produktionsfunktion

konstante Substitutionselastizität

Wenn man den Produktionsprozess einer Firma durch eine Cobb-Douglas-Produktionsfunktion abbildet, hat man also implizit eine recht spezielle Annahme über die Substitutionsbeziehungen zwischen den Produktionsfaktoren getroffen. Eine allgemeinere Funktion ist die *CES-Funktion*. Die Abkürzung CES steht für: *C*onstant *E*lasticity of *S*ubstitution. Die Substitutionselastizität ist zwar, wie bei der Cobb-Douglas-Funktion, weiterhin konstant, sie kann aber jeden Wert zwischen null und unendlich annehmen. Die CES-Funktion lautet in unserem Fall:

(3.2-40) $$Q = \gamma \left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha) C^{-\rho} \right]^{-\frac{h}{\rho}}.$$

Interpretation der Parameter

Dabei gilt: $0 < \alpha < 1$, $h, \gamma > 0$ und $\rho > -1$. γ ist eine Niveaukonstante. Sie bestimmt, auf welchem „Niveau“ die Produktion stattfindet, wenn die Einsatzmengen der Faktoren gegeben sind. α ist ein Parameter, der die Verteilung des Produkts auf die Faktoren bestimmt, falls die Faktoren nach ihrem Grenzprodukt entlohnt werden.[27] ρ wird als *Substitutionsparameter* bezeichnet, da er die Höhe der Substitutionselastizität bestimmt, und h ist ein Parameter, welcher die Skalenelastizität angibt.

Übungsaufgabe 15

Berechnen Sie für die Produktionsfunktion
$$Q = \gamma \left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha) C^{-\rho} \right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
folgende Ausdrücke:

a) Die Grenzprodukte beider Faktoren,
b) die Grenzrate der Substitution,
c) die Substitutionselastizität,
d) die Skalenelastizität und
e) den Homogenitätsgrad.

Auch die CES-Funktion ist eine neoklassische Funktion. Die ersten Ableitungen sind positiv, die zweiten sind negativ und die Isoquanten sind konvex. Sie ist linear homogen, wenn $h = 1$ gilt.

Die *Substitutionselastizität der CES-Funktion* errechnet sich zu:

27 Bei einer Entlohnung nach dem Grenzprodukt ist der Preis eines Faktors (im Falle des Faktors Arbeit also der Lohnsatz) gleich dem Wert, den die letzte Einheit dieses Faktors, der im Produktionsprozess eingesetzt wird, erzeugt. Wir werden uns in Kapitel 4.1 genauer mit den Fragen der Faktorentlohnung befassen.

$$\varepsilon_{Sub} = \frac{1}{1+\rho}. \tag{3.2-41}$$

Lineare, linear-limitationale und Cobb-Douglas-Produktionsfunktionen als Spezialfälle der CES-Funktion

Da die Substitutionselastizität aus ökonomischen Gründen stets positiv sein muss, besteht für den Parameter ρ die Beschränkung: $\rho > -1$. Strebt $\rho \to -1$, so wird die CES-Funktion zu einer linearen Funktion der Form

$$Q = \gamma\left[aL + (1-a)C\right] \tag{3.2-42}$$

und die Substitutionselastizität strebt gegen unendlich. Mit etwas komplizierteren mathematischen Methoden lässt sich zeigen, dass die CES-Funktion für $\rho \to 0$ in eine Cobb-Douglas-Funktion und für $\rho \to \infty$ in eine linear-limitationale-Funktion übergeht. Strebt $\rho \to 0$, wird die Substitutionselastizität 1, strebt $\rho \to \infty$, wird die Substitutionselastizität 0. *Die CES-Funktion enthält also die lineare, die linear-limitationale und die Cobb-Douglas-Funktion als Spezialfälle.*[28]

Plausibilität einer konstanten Substitutionselastizität

Die Frage, ob man mit der einfacheren Cobb-Douglas- oder der allgemeineren CES-Funktion arbeiten soll, hängt davon ab, ob eine Substitutionselastizität von 1 plausibel erscheint oder ob die Größe der Substitutionselastizität durch empirische Untersuchungen erst ermittelt werden soll. Bei der Analyse des wirtschaftlichen Wachstums zeigt sich z.B., dass die Entwicklung der Einkommensverteilung im Wachstumsprozess entscheidend von der Höhe der Substitutionselastizität abhängig ist. Ihr numerischer Wert kann also erhebliche wirtschaftspolitische Implikationen haben. Wenn der numerische Wert der Substitutionselastizität unbekannt ist, sollte man deshalb lieber mit einer Produktionsfunktion arbeiten, welche unterschiedliche Werte zulässt. Benötigt man für eindeutige Aussagen einen konkreten Wert für die Substitutionselastizität, so kann man z.B. einen hohen und alternativ einen niedrigen Wert vorgeben, um auf diese Weise Ober- und Untergrenzen für mögliche Entwicklungen zu bestimmen.

VES-Funktion

Die CES-Funktion stellt zwar bereits eine wesentliche Verallgemeinerung der Cobb-Douglas-Funktion dar, sie ist aber insofern immer noch speziell, als dass die Substitutionselastizität konstant ist, d.h. unabhängig von den Faktoreinsatzmengen. Auch diese Einschränkung lässt sich aufheben. Man kommt dann zur Klasse der sogenannten *VES-Funktionen* (*V*ariable *E*lasticity of *S*ubstitution). Wir wollen hierauf aber nicht weiter eingehen, da diese Funktionen in mikroökonomischen Analysen keine große Bedeutung haben. Die Ökonomen sind offensichtlich der Meinung, dass der Gewinn an Allgemeingültigkeit den Preis des höheren Aufwands und der Mehrdeutigkeit der Aussagen nicht aufwiegt.

28 Für einen Beweis vgl. z.B. HENDERSON/QUANDT (1983, S. 114ff.).

3.2.5.3 Homogene und homothetische Produktionsfunktionen

Konstanz der GRS auf den Isoklinen

Lineare und linear-limitationale Produktionsfunktionen sind homogen vom Grade eins, d.h. linear-homogen. Neoklassische und ertragsgesetzliche können homogen vom Grade 1 sein. Unabhängig von ihrem Homogenitätsgrad besitzen homogene Funktionen eine Eigenschaft, welche sie für die ökonomische Analyse besonders attraktiv macht: *Die Grenzrate der Substitution hängt nicht vom Niveau der Produktion ab, sondern nur von dem Verhältnis, in welchem die Faktoren eingesetzt werden*. Wenn dieses Verhältnis konstant bleibt, bleibt auch die Grenzrate der Substitution gleich, unabhängig von der Höhe des Produktionsniveaus. Wenn man also die Grenzrate der Substitution für irgendein Outputniveau kennt und das Faktoreinsatzverhältnis konstant bleibt, kennt man die GRS für jedes Outputniveau. Abbildung (A 3.2-8) stellt einen derartigen Fall grafisch dar.[29]

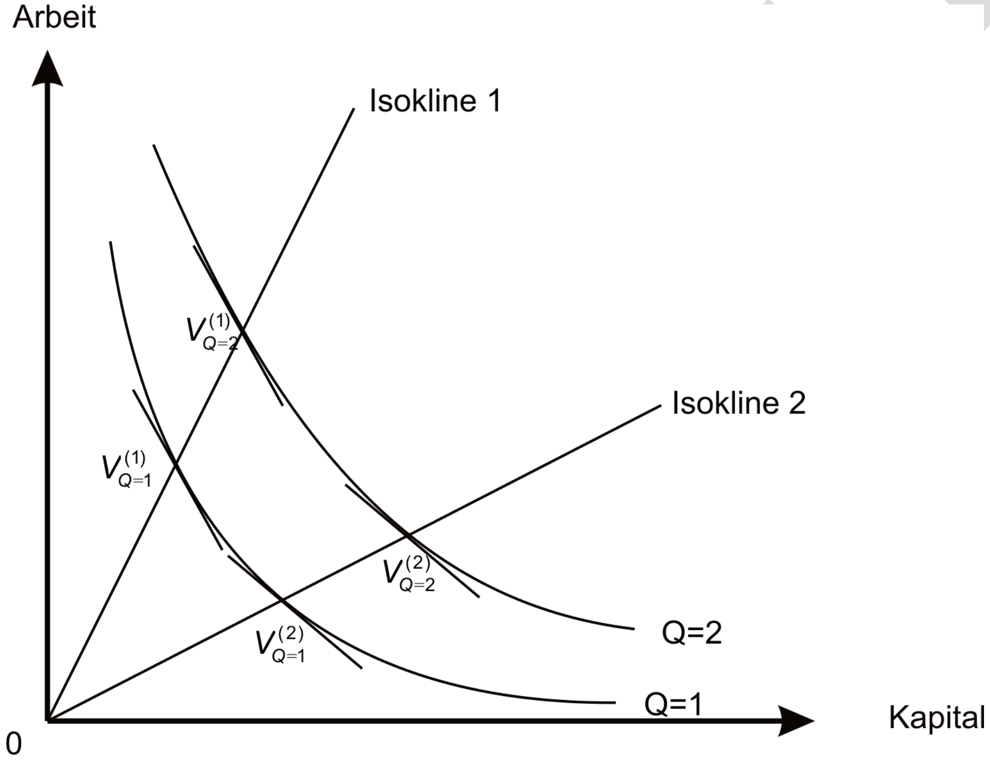


Abbildung (A 3.2-8): Isoquanten einer homogenen Produktionsfunktion

Die Produktmenge $Q = 1$ kann sowohl mit dem Inputbündel $V_{Q=1}^{(1)}$ als auch mit dem Bündel $V_{Q=1}^{(2)}$ hergestellt werden. Die Grenzrate der Substitution in den beiden Produktionspunkten wird durch die Steigung der jeweiligen Tangenten angegeben. Alle Tangenten, die auf demselben Fahrstrahl durch den Ursprung liegen, besitzen die gleiche Steigung. Die Produktmenge $Q = 2$ kann mit dem Inputbündel

29 In der Literatur wird die Menge aller Faktoreinsatzmengen-Kombinationen, bei denen die Grenzraten der Substitution einander gleich sind, bisweilen als „Isokline“ bezeichnet. Bei homogener Produktionsfunktion sind damit die Isoklinen Geraden durch den Ursprung.

$V_{Q=2}^{(1)}$ oder mit dem Bündel $V_{Q=2}^{(2)}$ hergestellt werden. Die Grenzrate der Substitution in dem Punkt $V_{Q=2}^{(1)}$ ist die gleiche wie in dem Punkt $V_{Q=1}^{(1)}$. Entsprechendes gilt für die Punkte $V_{Q=2}^{(2)}$ und $V_{Q=1}^{(2)}$. Bei linear-homogenen Funktionen sind die Abstände zwischen den Isoquanten proportional zu den Produktmengen. Ist der Homogenitätsgrad größer als 1, liegen also steigende Skalenerträge vor, so werden die Abstände zwischen den Isoquanten immer kleiner, die Abstände steigen unterproportional. Eine proportionale Erhöhung von Arbeit und Kapital führt zu einer überproportionalen Erhöhung der Produktmenge. Ist der Homogenitätsgrad kleiner als 1, steigen die Abstände überproportional.

Auch homothetische Funktionen besitzen konstante *GRS*

Die Eigenschaft, dass die Grenzrate der Substitution nur von dem Verhältnis abhängig ist, in welchem die Faktoren eingesetzt werden und nicht von deren Niveau, gilt nicht nur für linear-homogene, sondern für alle Funktionen, die sich als streng monoton steigende Transformationen einer linear-homogenen Produktionsfunktion darstellen lassen, also für alle homothetischen Funktionen. Wie weiter oben bereits erwähnt wurde, können homothetische Funktionen sowohl Bereiche steigender, als auch solche konstanter, als auch solche sinkender Skalenerträge aufweisen. Sie stellen somit eine Verallgemeinerung linear-homogener Funktionen dar. Wenn man nicht sicher ist, ob die Annahme der Linear-Homogenität problemadäquat ist, eine nur vom Faktoreinsatzverhältnis abhängige Grenzrate der Substitution aber für plausibel hält, sollte man der Analyse eine homothetische Funktion zu Grunde legen.

Übungsaufgabe 16

Ist die Substitutionselastizität homothetischer Funktionen konstant?

3.2.6. Zusammenfassung

Ausgangspunkt unserer Überlegungen in dieser Kurseinheit war die Frage, wie wir die ökonomisch-technischen Bedingungen der Produktion in einem Unternehmen modellieren können, um die Entscheidungen über die Höhe des Güterangebots sowie die Höhe und Zusammensetzung der Faktornachfrage zu analysieren. Als besonders geeignet hat sich dabei das Konzept der Produktionsfunktion erwiesen. Die Produktionsfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen Faktoreinsatzmengen und Produktmenge unter der Bedingung, dass keine Faktoren verschwendet werden, dass eine bestimmte Produktmenge also mit minimalem Faktoreinsatz hergestellt wird.

Da die Produktionsfunktion ein möglichst allgemeines Modell einer Unternehmung liefern soll, haben wir nur einige sehr globale Gruppen von Eigenschaften definiert, welche diese Produktionsfunktion aufweisen soll. Diese Eigenschaften beziehen sich auf folgende Fragen:

1. Wie ändert sich die Produktmenge, wenn alle Faktoreinsatzmengen proportional verändert werden?

Im Hinblick auf diese Eigenschaft haben wir Produktionsfunktionen mit steigenden, konstanten und sinkenden Skalenerträgen sowie Produktionsfunktionen, welche alle drei Eigenschaften zugleich aufweisen können, unterschieden. Der Zusammenhang zwischen der Produktmenge und dem Proportionalitätsfaktor, mit dem das Inputbündel multipliziert wird, wird durch die Niveauertragsfunktion beschrieben. Oftmals wird die Annahme gemacht, dass die Produktionsfunktion homogen oder homothetisch sei. Erfolgt die Produktion unter steigenden Skalenerträgen, so besteht eine Tendenz zur Monopolbildung. Die Frage der Skalenerträge hat deshalb erhebliche wirtschaftspolitische Bedeutung.

2. Wie ändert sich die Produktmenge, wenn die Menge eines Faktors verändert wird, die Mengen aller anderen Faktoren aber konstant bleiben?

Im Hinblick auf diese Eigenschaft haben wir lineare, linear-limitationale, neoklassische und ertragsgesetzliche Produktionsfunktionen unterschieden.

3. Wie muss sich die Einsatzmenge eines Faktors L ändern, wenn die Einsatzmenge eines anderen Faktors C bei Konstanz aller anderen Faktoren und bei Konstanz der Produktmenge verändert wird?

Im Hinblick auf diese Eigenschaft haben wir zwischen substitutionalen und limitationalen Produktionsfunktionen unterschieden. Die Substitutionsmöglichkeiten werden analytisch durch die Substitutionselastizität und grafisch durch die Krümmung der Isoquante beschrieben. Je geringer die Substitutionselastizität ist oder je stärker die Isoquante gekrümmt ist, desto schlechter lassen sich die Faktoren gegeneinander substituieren. Die Substitutionselastizität gibt u.a. darüber Auskunft, welchen Einfluss eine Faktorpreisänderung auf die Nachfrage nach Produktionsfaktoren hat und wie sich die Einkommensverteilung in einer Volkswirtschaft ändert, wenn sich der Bestand an Produktionsfaktoren ändert.

Diese drei Gruppen von Eigenschaften gestatten die Modellierung einer großen Zahl unterschiedlichster Produktionsbedingungen. Der Wunsch nach Allgemeingültigkeit steht zuweilen im Widerspruch zu dem Wunsch nach Eindeutigkeit der Aussagen. Eindeutigkeit erfordert manchmal speziellere Annahmen, wie sie z.B. durch die CES-Funktion und noch spezieller durch die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion verkörpert werden. Deshalb haben wir uns mit den Eigenschaften dieser beiden Standardproduktionsfunktionen intensiver befasst.

3.3. Kostenfunktionen

Begriff der Kostenfunktion

Kostenfunktionen beschreiben den Zusammenhang zwischen der Produktmenge und jenen Kosten, welche mindestens erforderlich sind, um diese Produktmenge zu erzeugen. Sie beziehen sich deshalb nur auf solche Produktionsverfahren, bei denen keine Faktoren verschwendet werden, also auf effiziente Produktionsverfahren. Aber nicht alle effizienten Produktionsverfahren verursachen die gleichen Kosten. Falls Faktoren z.B. gegeneinander substituierbar sind, lässt sich dieselbe Produktmenge mit unterschiedlichen Faktoreinsatzmengen herstellen. Alle diese Einsatzmengen sind technisch gesehen effizient, sie verursachen aber möglicherweise unterschiedliche Kosten. *Nur jene Kombination der Faktoreinsatzmengen, welche die niedrigsten Kosten verursacht, ist Bestandteil der Kostenfunktion*. Der Begriff der Kostenfunktion beschränkt sich deshalb auf jene technisch effizienten Produktionsverfahren, welche die Herstellung einer gegebenen Produktmenge mit minimalen Kosten gestatten.

Gewinnmaximierung und Kostenminimierung

Im Rahmen der Theorie der Marktwirtschaft wird im Allgemeinen angenommen, dass die Firmen bestrebt sind, ihren Periodengewinn zu maximieren. Dann müssen sie aber zugleich bestrebt sein, ihre Kosten zu minimieren. Solange die Kosten für ein gegebenes Produktionsniveau nämlich noch nicht minimal sind, lässt sich der Gewinn als Folge einer Kostensenkung steigern. Die Beschränkung des Begriffs der Kostenfunktion auf ökonomisch effiziente Produktionsverfahren ist also sinnvoll, wenn man Gewinnmaximierung als Zielsetzung unterstellt.

Kurze und lange Frist

Bei der Modellierung des Produktionsprozesses im vorhergehenden Kapitel hatten wir zwischen einer partiellen und einer totalen Faktorvariation unterschieden. Im Allgemeinen wird man davon ausgehen können, dass die Variation *aller* Faktoreinsatzmengen mehr Zeit beansprucht als die Variation der Einsatzmenge eines einzelnen Faktors. Wir definieren deshalb jenen Zeitraum, der benötigt wird, um *alle* Faktoreinsatzmengen zu verändern, als *lange Frist* und jenen Zeitraum, in welchem die Einsatzmenge mindestens eines Faktors nicht verändert werden kann, als *kurze Frist*. Anders formuliert: *In der kurzen Frist ist die Einsatzmenge mindestens eines Faktors fix, in der langen Frist sind die Einsatzmengen aller Faktoren variabel*.[30] Diese Unterscheidung behalten wir auch bei der Modellierung der Produktionskosten bei: In der kurzen Frist ist ein Teil der Kosten fix, in der langen Frist sind alle Kosten variabel, d.h. von der Höhe der Produktmenge abhängig.

Faktorpreise sind gegeben

Weiter werden wir postulieren, dass die Preise der Produktionsfaktoren von den Firmen als gegeben betrachtet werden. Dieses Postulat folgt aus bestimmten Annahmen über die Wettbewerbssituation auf den Faktormärkten, auf die wir in

30 In Kapitel 4.1, bei der Behandlung der Preisbildung auf Konkurrenzmärkten, werden wir uns noch etwas genauer mit der Abgrenzung zwischen kurzer und langer Frist beschäftigen.

Kurseinheit 4 eingehen werden. Zu diesen Preisen kann jede Firma jede gewünschte Menge an Produktionsfaktoren beschaffen. Mit anderen Worten: *Das Faktorangebot ist vollkommen elastisch*.

Wir beschränken unsere Analyse weiterhin auf Firmen, welche nur ein Produkt herstellen und hierzu die beiden Faktoren Arbeit und Kapital einsetzen. Die produktionstechnischen Zusammenhänge werden durch jene Produktionsfunktionen beschrieben, welche wir im vorangegangenen Kapitel behandelt haben.

Einproduktfirma

In diesem Abschnitt wollen wir den Zusammenhang zwischen Produktmenge und Kosten auf kurze und auf lange Frist bei unterschiedlichen Annahmen über die Produktionstechnik analysieren. Dabei werden wir uns zunächst mit einigen wichtigen Kostenbegriffen vertraut machen müssen. Anschließend werden wir mit Hilfe einer grafischen Darstellung den kostenminimalen Faktoreinsatz für eine gegebene Produktmenge bestimmen. Wenn wir die Produktmenge variieren und die jeweiligen Faktorkombinationen, welche mit minimalen Kosten verbunden sind (*Minimalkostenkombinationen*), in der grafischen Darstellung verbinden, erhalten wir eine Kurve, welche als *Expansionspfad* einer Firma bezeichnet wird und aus welchem sich die (langfristige) Kostenkurve ergibt. Mathematisch lässt sich die zugrunde liegende Kostenfunktion mit Hilfe des Ihnen bereits aus der Theorie des Haushalts vertrauten Lagrange-Verfahrens aus einer Kostengleichung unter Berücksichtigung der Produktionsfunktion bestimmen. Am Beispiel einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion werden wir zur Illustration eine numerische Analyse durchführen.

Überblick: Langfristige Analyse

Anschließend werden wir uns mit den Verläufen langfristiger Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven für unterschiedliche Typen von Produktionsfunktionen beschäftigen. Wir werden weiter danach fragen, wie sich diese Kurven ändern, wenn sich die Faktorpreise ändern. Bevor wir analoge Überlegungen für die kurzfristigen Kostenkurven anstellen, wird der Zusammenhang zwischen kurz- und langfristigen Kostenkurven erörtert. Es zeigt sich, dass langfristige Kostenkurven die „Einhüllenden“ der kurzfristigen Kostenkurven bilden.

Bei der Analyse kurzfristiger Kostenfunktionen müssen die von der langfristigen Analyse her bekannten Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten weiter differenziert werden, und zwar nach fixen und variablen Kosten. Hieraus ergeben sich einige Komplikationen für die nachfolgenden komparativ-statischen Überlegungen bezüglich der Faktorpreisänderungen. Deshalb werden die Auswirkungen derartiger Änderungen zunächst am Beispiel einer kurzfristigen Kostenfunktion, welche auf einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion basiert, mathematisch abgeleitet. Anschließend werden die Verlagerungen der verschiedenen kurzfristigen Kostenkurven grafisch dargestellt. Schließlich werden wir kurz auf die Ergebnisse einiger empirischer Untersuchungen zu dem Verlauf von Kostenkurven eingehen.

Kurzfristige Analyse

Übungsaufgabe 17

Fassen Sie die wichtigsten Annahmen der mikroökonomischen Theorie über eine Firma, welche die Preise auf den Produkt- und Faktormärkten als gegeben betrachtet, zusammen.

3.3.1. Der Begriff der Kosten

Die *Kosten* einer Produktmenge bestehen aus dem bewerteten Verbrauch von Faktoren bzw. Faktorleistungen. Je nachdem, welche Faktoren erfasst werden und wie diese bewertet werden, lassen sich *Kosten im buchhalterischen und im ökonomischen Sinn* unterscheiden.

Kosten im buchhalterischen Sinn

In buchhalterischer Betrachtung werden die Produktionsfaktoren

- fremdbezogene Arbeitsleistungen,
- fremdbezogene Sachkapitalleistungen,
- eigene Sachkapitalleistungen,
- Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe sowie
- Halbfertigwaren

erfasst. Fremdbezogene Arbeitsleistungen sind solche, für die ein Entgelt vertraglich vereinbart worden ist. Die Arbeitsleistung des Unternehmers und gegebenenfalls seiner Familienangehörigen fällt nicht hierunter. Die fremdbezogenen Sachkapitalleistungen umfassen gemietete Fabrikationsräume, Maschinen, Fahrzeuge etc. Eigene Sachkapitalleistungen umfassen die gleichen Güter, sofern sie Eigentum des Unternehmens sind. Die fremdbezogenen Arbeitsleistungen werden mit den vereinbarten Entlohnungssätzen (einschließlich der Lohnnebenkosten), die fremdbezogenen Sachkapitalleistungen mit den vereinbarten Mietpreisen, die eigenen Sachkapitalleistungen mit ihren zu Wiederbeschaffungspreisen bewerteten Abschreibungen, die Roh-, Hilfs- und Betriebsstoffe sowie die Halbfertigwaren mit den in der Produktionsperiode geltenden Marktpreisen bewertet.

Kosten im ökonomischen Sinn

Im Gegensatz zum buchhalterischen umfasst der ökonomische Kostenbegriff auch die *kalkulatorischen* Kosten für die Arbeitsleistung des Unternehmers (und gegebenenfalls seiner Familienangehörigen) und für die Nutzung des eigenen Sachkapitals. Bewertet werden diese Faktoren mit ihren *Alternativ-* oder *Opportunitätskosten*. Die Alternativkosten der Arbeitsleistung des Unternehmers bestehen in dem Gehalt, welches er als Angestellter in der lohnendsten alternativen Verwendung erzielen würde. Die Alternativkosten des eigenen Sachkapitals bestehen in dem höchsten Mietpreis, welchen diese Güter erzielen könnten, würden sie vermietet. Wenn später (in Kurseinheit 4) davon gesprochen wird, dass Firmen auf Konkurrenzmärkten langfristig einen Gewinn von null erzielen, muss man sich vergegenwärtigen, dass der *ökonomische* Gewinn als Differenz zwischen Erlös und *ökonomischen* Kosten definiert ist. Die Entlohnung des Unternehmers mit seinem Alternativlohn und des eigenen Sachkapitals mit einem alternativen Mietpreis werden hier als Teil der Kosten und nicht als Teil des Gewinns angesehen. Im Prinzip müssten auch die anderen Faktoren mit ihren Opportunitätskosten bewertet werden. Unter bestimmten Bedingungen, welche in dem Kurs „Preisbildung auf unvollständigen Märkten und Allgemeines Gleichgewicht" behandelt werden, sind die Marktpreise der Faktoren allerdings identisch mit deren Opportunitätskosten. Ein Arbeitnehmer wird z.B. tendenziell nur dann in seinem gegenwärtigen Job bleiben, wenn er dort mindestens so viel verdient wie in der besten Alternative, die ihm offen steht, und sein Arbeitgeber wird ihm tendenziell nicht mehr zahlen, als nötig ist, um ihn in seinem derzeitigen Job zu halten. Unter diesen Umständen entspricht der gezahlte Lohn den Opportunitätskosten.[31]

Private und externe Kosten

In dem weiterführenden Aufbaukurs „Marktversagen" (B-Modul) werden die ökonomischen Kosten in *interne* (*private*) und *externe* Kosten unterteilt und die Summe dieser beiden Kostenarten als *soziale* oder *volkswirtschaftliche* Kosten bezeichnet. Bei den externen Kosten handelt es sich um die Kosten von Faktorleistungen, welche das Unternehmen im Grenzfall zum Preis von null erhält, die aber anderen Verwendungen dadurch entzogen werden. Das wichtigste Beispiel hierfür sind der Verbrauch von Umweltfaktoren wie Luft, Wasser, Boden. Für die Nutzung dieser Güter sind zwar heute oftmals Entgelte zu entrichten, diese entsprechen aber nicht immer den Nutzeneinbußen, d.h. den externen Kosten, welche die Gesellschaft durch diese Nutzung erfährt. Umweltfaktoren geben Leistungen entweder direkt in den Produktionsprozess ab oder sie dienen als Aufnahmemedium für Abfallstoffe, die bei der Produktion anfallen[32]. *Bis wir in unserem Studium der Mikroökonomie soweit fortgeschritten sind, gehen wir von der vereinfachenden Annahme aus, dass keine externen Kosten existieren, dass private und soziale Kosten also übereinstimmen.*

Sunk costs

In der Theorie der Marktwirtschaft werden Kosten erfasst, um kostenminimale Produktionsentscheidungen modellieren zu können. Aber nicht alle Kosten sind entscheidungsrelevant. Manche Faktorkosten sind weitgehend unabhängig davon, ob produziert wird oder nicht oder wie viel produziert wird. Wenn ein Kraftwerk z.B. eine Turbine einsetzt, die speziell für dieses Werk gebaut worden ist und welche wegen der hohen Montage- und Transportkosten in keinem anderen Werk eingesetzt werden kann, so sind die Opportunitätskosten dieser Turbine nahezu null. Wenn die Kosten erst einmal entstanden sind, wird ihre Höhe durch nachfol-

31 Auch diese Aussage gilt streng genommen nur unter der Voraussetzung fehlender Transaktionskosten. Ein wichtiger Bestandteil dieser Kosten sind Informationskosten. Wie bereits in dem einleitenden Kapitel erwähnt, unterstellen wir – wenn nicht ausdrücklich etwas Gegenteiliges gesagt wird – fehlende Informationskosten und damit vollständige Information. Andere Transaktionskosten wie z.B. Transportkosten oder Vertragsanbahnungs-, Vertragsaushandlungs- oder Vertragsdurchsetzungskosten werden zur Vereinfachung der Analyse vernachlässigt.

32 Vgl. hierzu z.B. ENDRES (2007).

gende Produktionsentscheidungen nicht mehr beeinflusst. Die Kosten sind insoweit entscheidungs*ir*relevant, da sie „versunken" sind. Sie stellen deshalb keine Kosten im ökonomischen, wohl aber im buchhalterischen Sinne dar. In der Buchhaltung werden sie in Höhe ihrer Abschreibungen erfasst. Entscheidungsirrelevante Kosten werden als versunkene Kosten oder – mit der englischen Originalbezeichnung – als *sunk costs* bezeichnet. Wir werden diesen Kostenbegriff bei der Behandlung des kurzfristigen Güterangebots der Firma in Abschnitt 3.4.2 benötigen.

Unterschiede zwischen buchhalterischen und ökonomischen Kosten

Die Unterschiede zwischen dem buchhalterischen und dem ökonomischen Kostenkonzept lassen sich am besten an Hand von Beispielen erklären. Betrachten wir hierzu die drei Produktionsfaktoren: Arbeit, Kapital sowie einen bisher nicht erwähnten Faktor: die unternehmerische Leistung.

Arbeit

Die buchhalterischen Kosten des Faktors Arbeit bestehen in dem Lohn (einschließlich der Lohnnebenkosten), welcher dem Faktor zufließt. Die ökonomischen Kosten bestehen in jenen (hypothetischen) Zahlungen, die notwendig sind, um den Faktor in seiner gegenwärtigen Verwendung zu halten. Falls die tatsächliche Entlohnung diesen Betrag übersteigt, stellt die Differenz eine *Rente* dar, welche der Faktor Arbeit bezieht. Weshalb sind Unternehmen bereit, Arbeitsentgelte zu bezahlen, die höher sind als notwendig, um die Arbeitskraft zu halten? Hierfür sind vor allem Informationsprobleme verantwortlich. Bei vollständiger Information, die wir im größten Teil unserer Analyse unterstellen, und vollkommen elastischem Faktorangebot kann es keine positiven Faktorrenten geben. Kein Unternehmen wäre bereit, eine solche Rente zu zahlen. Eine negative Rente ist ebenfalls unmöglich. Erhielte ein Arbeitnehmer einen geringeren Lohn, als notwendig wäre, um ihn in seiner gegenwärtigen Beschäftigung zu halten, wäre er definitionsgemäß nicht in dieser Beschäftigung zu finden. Eine negative Rente ist also begrifflich nicht möglich.[33]

Kapital

Die buchhalterischen Kosten des Faktors „eigenes Kapital" bestehen aus den zu Wiederbeschaffungspreisen bewerteten Abschreibungen. Die ökonomischen Kosten bestehen aus den entgangenen Einnahmen, die bei einer alternativen Verwendung des Kapitals, z.B. den Mieteinnahmen im Falle einer Vermietung, hätten erzielt werden können. Die ökonomischen Kosten können höher oder niedriger als die buchhalterischen Kosten sein.

Leistung des Unternehmers

Die buchhalterischen Kosten des Produktionsfaktors *Unternehmerleistung* sind null, da dieser Faktor kein vereinbartes Entgelt erhält, sondern den Residualge-

33 Dies schließt nicht aus, dass der gezahlte Lohn niedriger ist als die Opportunitätskosten, falls Transaktionskosten bestehen. Ausgesagt wird lediglich, dass der gezahlte Lohn nicht niedriger sein kann als die Opportunitätskosten unter Einschluss der Transaktionskosten. Sind Letztere null, so kann der gezahlte Lohn nicht niedriger sein als die Opportunitätskosten.

winn. Seine ökonomischen Kosten entsprechen dem Einkommen dieses Faktors in der besten alternativen Verwendung, z.B. dem Einkommen eines angestellten Leiters eines vergleichbaren Unternehmens. Gewinn im ökonomischen Sinn ist nur der über diese Opportunitätskosten hinausgehende Teil des buchhalterischen Gewinns.

Übungsaufgabe 18

Angenommen, die Marktpreise entsprechen den Opportunitätskosten jener Faktoren, welche zu Marktpreisen bewertet werden. Unter welchen Umständen sind die ökonomischen Kosten

a) höher oder

b) niedriger

als die buchhalterischen Kosten?

3.3.2. Langfristige Kostenfunktionen

3.3.2.1 Kostenminimaler Faktoreinsatz

Die von uns betrachtete Firma möchte eine bestimmte Menge Q eines Produktes herstellen.[34] Sie benötigt dazu die beiden substitutionalen Produktionsfaktoren Arbeit L und Kapital C. Der Preis für eine (Nutzungs-)Einheit des Faktors Arbeit beträgt l, der für eine Nutzungseinheit des Faktors Kapital r. Die gesamten Kosten K betragen dann:

(3.3-1) $$K = lL + rC.$$ Kostengleichung

Diese *Definitionsgleichung* bezeichnet man als *Kostengleichung*. Sie definiert die Gesamtkosten als Summe der Faktorkosten. Die zur Herstellung der Menge Q erforderlichen Faktoreinsatzmengen werden durch die Produktionsfunktion

(3.3-2) $$Q = f(L,C)$$ Produktionsfunktion

gegeben. Diese Funktion soll neoklassische Eigenschaften haben, also insbesondere zweimal stetig differenzierbar sein und konvexe Isoquanten besitzen.[35] Die

34 Natürlich ist die herzustellende Menge Q für eine nach Gewinnmaximierung strebende Firma nicht von vornherein gegeben. Dennoch ist es sinnvoll, die Betrachtung des kostenminimalen Faktoreinsatzes zunächst unter dieser einschränkenden Bedingung zu verfolgen. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse über die Natur der minimalen Kostenkombination können dann ohne weiteres auf *jede* gegebene Produktionsmenge verallgemeinert werden. Sie gelten demnach auch für diejenige Menge, die sich letztlich als gewinnmaximal erweist.

35 Diese Annahme erleichtert die nachfolgenden Überlegungen erheblich, da wir uns dann nicht mit Differenzierbarkeitsproblemen oder Bedingungen zweiter Ordnung herumschlagen müssen.

Firma möchte die Einsatzmengen von L und C so wählen, dass eine Menge Q hergestellt werden kann und gleichzeitig die Kosten minimal sind. Wie lassen sich diese Einsatzmengen bestimmen? Sehen wir uns dazu Abbildung (A 3.3-1) an.

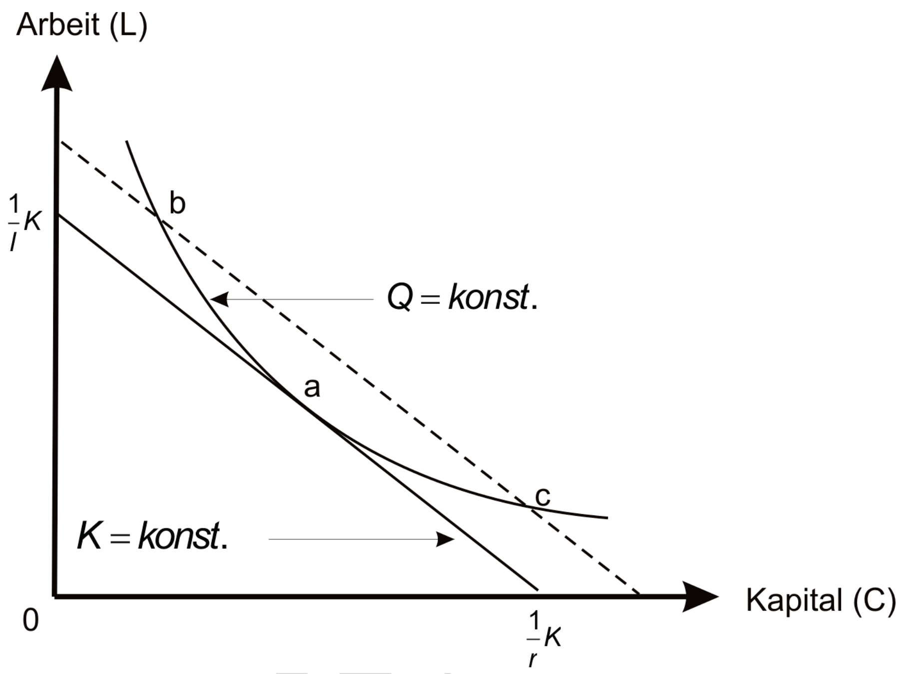


Abbildung (A 3.3-1): Minimalkostenkombination

Minimalkostenkombination

Die Gerade $K = konst.$ ist der Graph der umgestellten Kostengleichung (3.3-1):

(3.3-3) $$L = \frac{1}{l}K - \frac{r}{l}C.$$

Auf einer Kostengeraden sind die Gesamtkosten konstant. Die Kurve $Q = konst.$ stellt die Isoquante der Produktionsfunktion (3.3-2) dar:

Isoquante

(3.3-4) $$L = g(Q,C).$$

Auf einer Isoquante ist die Produktmenge konstant. In dem Punkt a tangiert die Kostengerade die Isoquante. Falls die Firma die Menge Q herstellen möchte, kann sie hierfür Faktorkombinationen wählen, die links von a (z.B. im Punkt b) oder rechts von a (z.B. im Punkt c) oder aber genau im Punkte a liegen. Faktorkombinationen links oder rechts von a verursachen höhere Gesamtkosten als die Faktorkombination a. Dieser Punkt ist also für die Produktmenge Q die Minimalkostenkombination. *Im Kostenminimum („Tangentialpunkt“) ist die Steigung der Kostengeraden gleich der Steigung der Isoquante*. Die Steigung der Kostengeraden erhält man durch Bildung des totalen Differenzials der Kostengleichung:

(3.3-5) $$dK = ldL + rdC = 0,$$

(3.3-6) $$\frac{dL}{dC} = -\frac{r}{l}\,.$$

Die Steigung der Isoquanten erhält man durch Bildung des totalen Differenzials der Produktionsfunktion:

(3.3-7) $$dQ = \frac{\partial f}{\partial L}dL + \frac{\partial f}{\partial C}dC = 0\,,$$

(3.3-8) $$\frac{dL}{dC} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}}\,.$$

Im Kostenminimum muss also gelten:

Bedingung für Kostenminimum

(3.3-9) $$\frac{r}{l} = \frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}}\,.$$

Übungsaufgabe 19

Welche der folgenden Gleichungen stellen die notwendigen Bedingungen für ein Kostenminimum zutreffend dar?

a) $\frac{dL}{dC} = -\frac{Q_L}{Q_C}$

b) $\frac{r}{l} = \frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}}$

c) $GRS(L,C) = \frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}}$

d) $\frac{r}{l} = GRS(L,C)$

Dies bedeutet: *Die Mengen der beiden Faktoren müssen so gewählt werden, dass das Verhältnis ihrer Grenzprodukte gleich dem Verhältnis der Faktorpreise ist*. Wie bereits erwähnt, sind die oben für ein vorgegebenes Produktionsniveau angestellten Überlegungen ohne weiteres zu verallgemeinern: Bestimmt man die Minimalkostenkombination für beliebige Outputniveaus und verbindet die Tangentenpunkte, so erhält man den in Abbildung (A 3.3-2) eingezeichneten *Expansionspfad*.

Expansionspfad

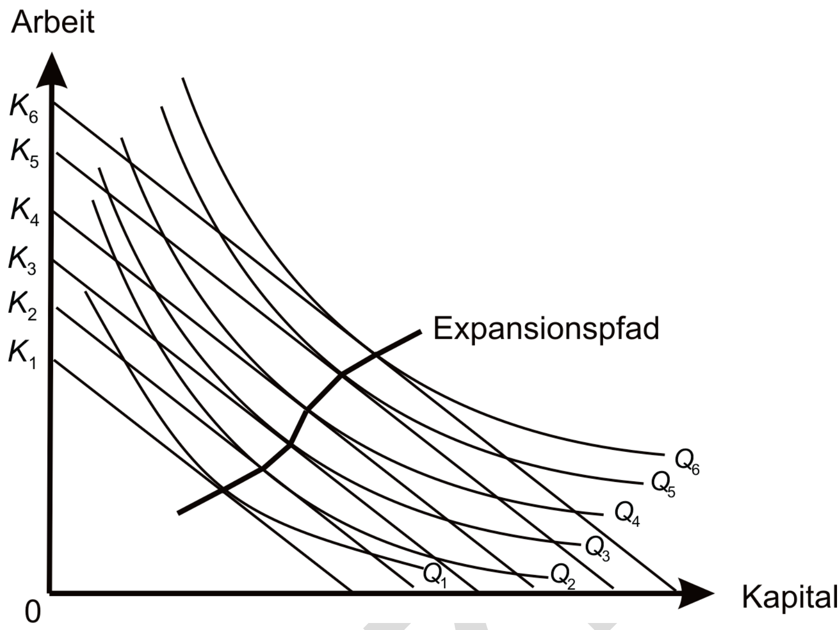


Abbildung (A 3.3-2): Der Expansionspfad einer Firma

Er ist der geometrische Ort aller kostenminimalen Kombinationen der Produktionsfaktoren. Den Produktmengen Q_1 bis Q_6 sind die jeweils minimalen Kosten K_1 bis K_6 zugeordnet. Überträgt man die K- und Q-Werte in ein Kosten-Mengen-Diagramm, erhält man das Bild einer Kostenfunktion, eine Kostenkurve, wie in Abbildung (A 3.3-3) dargestellt. Da jetzt beide, d.h. in diesem Fall alle, Einsatzmengen der Produktionsfaktoren verändert worden sind, handelt es sich um eine langfristige Kostenkurve.

Übungsaufgabe 20

Könnte der Expansionspfad auch eine Parallele zur Abszisse sein?

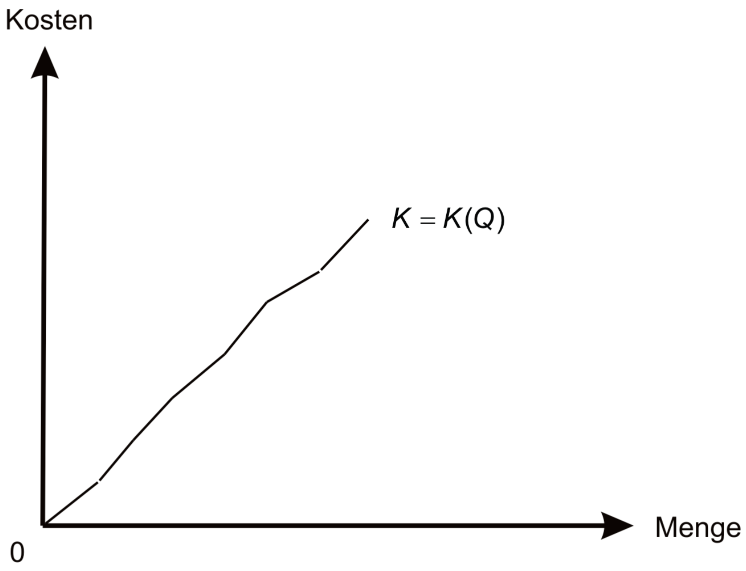


Abbildung (A 3.3-3): Vom Expansionspfad zur Kostenkurve

Unterschied zwischen Expansionspfad und Engelkurven

Der *Expansionspfad* einer Firma weist zwar eine äußerliche Ähnlichkeit mit den *Engelkurven* der Haushaltstheorie auf, hat aber eine ganz andere Bedeutung. Die Tangentenpunkte der Budgetgeraden mit den Indifferenzkurven in der Haushaltstheorie werden in ein Nachfrage-Einkommens-Diagramm übertragen und bilden auf diese Weise den Zusammenhang zwischen der Budgetsumme und der Nachfrage nach einem Gut ab. Die analoge Konstruktion im Falle der Firma ergäbe eine Kurve, welche die Nachfrage nach einem Produktionsfaktor in Abhängigkeit von dem „Budget" der Firma, also in Abhängigkeit von den gesamten Kosten darstellt. Dies wäre aber keine Kostenkurve, sondern eine Faktornachfragekurve unter der Bedingung eines gegebenen Kostenbudgets. Derartige Kurven werden in der Mikroökonomik jedoch selten betrachtet, da die Kosten für ein Unternehmen in weit geringerem Maße als eine exogen gegebene Größe angenommen werden können als das Einkommen für einen Haushalt.

Kostenfunktion und indirekte Nutzenfunktion

Das Gegenstück zur Kostenkurve wäre in der Theorie des Haushalts eine Kurve, welche den Zusammenhang zwischen der Höhe des Nutzens und der Budgetsumme angäbe. Der Nutzen entspricht der Produktmenge, die Budgetsumme den Produktionskosten. Eine derartige Kurve ist das Bild einer *indirekten* Nutzenfunktion. Bei einem Vergleich von Kostenfunktion und indirekter Nutzenfunktion ist aber zu beachten, dass die Höhe des Nutzens nur bis auf eine monoton wachsende Transformation bestimmt ist, während die Produktmenge kardinal messbar ist. Einer gegebenen Budgetsumme kann deshalb jeder beliebige Nutzenindex zugeordnet werden, sofern er eine monoton wachsende Transformation des ursprünglichen Wertes darstellt. Einer gegebenen Produktmenge sind dagegen eindeutige minimale Kosten zugeordnet.

Expansionspfad bei homothetischen Produktionsfunktionen

Wir haben gesehen, dass bei Kostenminimierung das Faktoreinsatzverhältnis so gewählt werden muss, dass das Faktorpreisverhältnis dem Verhältnis der Grenzprodukte entspricht (vgl. (3.3-9)). Bei der Behandlung homothetischer und insbesondere homogener Produktionsfunktionen im Unterabschnitt 3.2.5.2 hatten wir gesehen, dass die Grenzrate der technischen Substitution für homothetische Produktionsfunktionen entlang eines Fahrstrahls durch den Ursprung konstant bleibt. *Da das Faktorpreisverhältnis ebenfalls konstant bleibt, folgt hieraus, dass für homothetische Produktionsfunktionen der Expansionspfad eine Gerade durch den Ursprung ist*. *Für linear-homogene Produktionsfunktionen gilt zusätzlich, dass die Abstände zwischen den Isoquanten konstant sind*. Dann ist die Kostenkurve ebenfalls eine Gerade. Mit anderen Worten: In diesem Fall sind die Kosten proportional zur Produktmenge. Die Tatsache, dass dieser Fall in der Realität sehr oft zu beobachten ist, stellt ein gewichtiges Argument zu Gunsten der Annahme linear-homogener Produktionsfunktionen dar.

Übungsaufgabe 21

Wenn der Expansionspfad eine Gerade durch den Ursprung ist und die Produktionsfunktion homothetisch ist, muss dann auch die Kostenkurve eine Gerade durch den Ursprung sein?

Inferiore Inputs

Bei der Behandlung der Haushaltstheorie in Kurseinheit 2 hatten wir gesehen, dass die Höhe der Nachfrage nach einem Gut nicht immer positiv mit der Höhe der Budgetsumme korreliert sein muss, sondern dass es auch inferiore Güter geben kann. Kann dieser Fall auch bei der Faktornachfrage einer Firma eintreten? Gibt es so etwas wie *inferiore Inputs*? Die Antwort auf diese Frage lautet: Ja. In Abbildung (A 3.3-4) ist ein derartiger Fall dargestellt. Ab einer Menge von Q_2 geht der Einsatz des Faktors Arbeit bei Outputexpansion zurück.

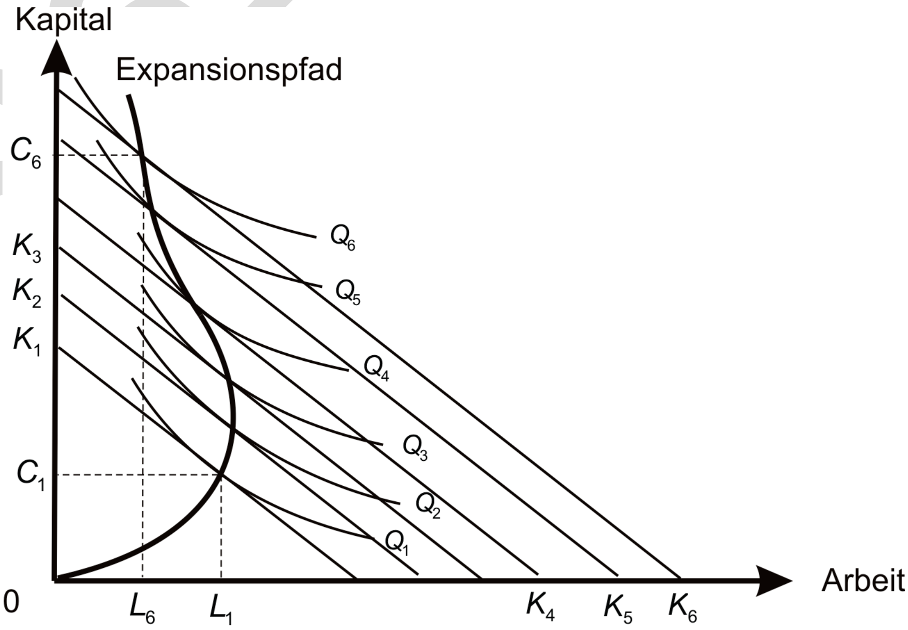


Abbildung (A 3.3-4): Expansionspfad bei inferioren Inputs

Ein derartiger Fall tritt z.B. auf, wenn bei steigender Produktion der Faktor Arbeit durch den Faktor Kapital substituiert wird, weil Automatisierung lohnend wird. Ein anderes Beispiel ist die Substitution von gering qualifizierter Arbeit durch hoch qualifizierte Arbeit. Man könnte einen derartigen Fall natürlich auch als eine Änderung der Produktionsfunktion modellieren. Ähnlich wie bei der Behandlung steigender oder sinkender Skalenerträge ist es aber oftmals zweckmäßiger, von einer unveränderten Produktionsfunktion auszugehen, welche Isoquanten besitzt, die zu inferioren Inputs führen.

Formale Ableitung der Kostenfunktionen

Die bisher weitgehend grafisch durchgeführte Ableitung der Kostenfunktion wollen wir jetzt durch eine mathematische Ableitung ergänzen, indem wir die Kosten (dargestellt in Form der Kostengleichung (3.3-1)) unter Berücksichtigung der Produktionsfunktion als Nebenbedingung minimieren. Wir verfahren dabei ganz analog zu unserer Ableitung der Güternachfragefunktion in der Theorie des Haushalts.

Die *Lagrangefunktion* lautet:

(3.3-10) $\Lambda = lL + rC + \lambda(Q - f(L,C))$.

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Minimum sind:

(3.3-11) $\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = l - \lambda f_L = 0$,

(3.3-12) $\frac{\partial \Lambda}{\partial C} = r - \lambda f_C = 0$,

(3.3-13) $\frac{\partial \Lambda}{\partial \lambda} = Q - f(L,C) = 0$.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

(3.3-14) $\frac{l}{r} = \frac{f_L}{f_C}$.

Im Kostenminimum entspricht das Faktorpreisverhältnis dem Verhältnis der Faktorgrenzprodukte

Im Kostenminimum entspricht also das Faktorpreisverhältnis dem Verhältnis der Faktorgrenzprodukte. Aus der Definition der Grenzrate der Substitution (vgl. 3.2-24) folgt entsprechend, dass Letztere gleich dem Faktorpreisverhältnis ist. Diese Zusammenhänge sind auch unmittelbar plausibel: Je teurer ein Produktionsfaktor ceteris paribus wird, desto eher besteht der Anreiz, seine Einsatzmenge zurückzufahren. Mit der geringeren Einsatzmenge dieses Faktors steigt (bei einer neoklassischen Produktionsfunktion) stets sein Grenzprodukt. Eine Umformung der vorstehenden Gleichung ergibt (unter Verwendung von 3.3.-11 und 3.3-12), dass das Verhältnis von Grenzproduktivität zu den Grenzkosten eines Faktors für alle Faktoren gleich ist:

(3.3-15) $\frac{1}{\lambda} = \frac{f_L}{l} = \frac{f_C}{r}$.

Übungsaufgabe 22

Fügen Sie den Größen in der Gleichung $\frac{f_L}{l} = \frac{f_C}{r}$ die jeweiligen Einheiten hinzu, in denen diese Größen gemessen werden. Begründen Sie die folgende Aussage: „Bei Kostenminimierung erzeugt jeder Euro Faktorleistung die gleiche Produktmenge.“

Bedeutung des Lagrange-Multiplikators

Der Lagrange-Multiplikator λ besitzt eine wichtige ökonomische Interpretation, wie folgende Überlegung zeigt: Das totale Differenzial der Produktionsfunktion lautet:

(3.3-16) $\quad dQ = f_L dL + f_C dC$.

Das totale Differenzial der Kostengleichung lautet:

(3.3-17) $\quad dK = l dL + r dC$.

Ersetzt man die Faktorpreise in (3.3-17) durch die mathematischen Produkte aus Grenzproduktivität und Lagrange-Multiplikator (vgl. 3.3-11 und 12), ergibt sich:

(3.3-18) $\quad dK = \lambda(f_L dL + f_C dC) = \lambda dQ$.

Daraus folgt:

(3.3-19) $\quad \lambda = \frac{dK}{dQ}$.

Grenzkosten

Der Lagrange-Multiplikator ist also gleich dem Quotienten aus einer Änderung der Kosten und einer Änderung der Produktmenge. Diesen Quotienten bezeichnet man als Grenzkosten. Wie wir noch sehen werden, ist der Begriff der Grenzkosten einer der wichtigsten Begriffe in der Mikroökonomik überhaupt.

Aus den Bedingungen 1. Ordnung für ein Kostenminimum (3.3-11) und (3.3-12) ergeben sich die *bedingten* Faktornachfragefunktionen:

Bedingte Faktornachfragefunktionen

(3.3-20) $\quad L^* = L(l, r, Q)$ bzw.

(3.3-21) $\quad C^* = C(l, r, Q)$.

Die Nachfrage nach den beiden Faktoren steht unter der Bedingung einer gegebenen Produktmenge. Da die Produktmenge für die Firma tatsächlich aber nicht gegeben ist, sondern von dieser so gewählt wird, dass ihr Gewinn maximiert wird, ist die Erklärung der Faktornachfrage vorläufig noch unvollständig. Erst in Kapitel 3.5 werden wir Kostenminimierung und Gewinnmaximierung zusammenführen, um die Faktornachfrage vollständig zu erklären.

Mit Hilfe von (3.3-20) und (3.3-21) lässt sich die *langfristige Kostenfunktion* in allgemeiner Form schreiben als:

Eigenschaften der langfristigen Kostenfunktion

(3.3-22) $K = lL^* + rC^* = K(l, r, Q)$.

Diese Kostenfunktion hat folgende Eigenschaften:

a) $\dfrac{\partial K}{\partial Q} > 0$.

Die Kosten nehmen mit steigender Produktmenge zu:

b) $\dfrac{\partial K}{\partial l} \geq 0$, $\dfrac{\partial K}{\partial r} \geq 0$.

Bei einer Faktorpreissteigerung können die Kosten nicht sinken, sie brauchen aber nicht zu steigen. Falls nur der Preis eines Faktors steigt, könnte es nämlich z.B. bei einer linearen Produktionsfunktion passieren, dass dieser Faktor vollständig durch den anderen, im Preis unverändert gebliebenen Faktor, ersetzt wird. Dann steigen die Kosten nicht:

c) $K(\alpha l, \alpha r, Q) = \alpha K(l, r, Q)$.

Die Kostenfunktion ist linear-homogen in den Faktorpreisen. Eine proportionale Steigerung aller Faktorpreise führt zu einem proportionalen Anstieg der Produktionskosten. Diese Eigenschaft ist plausibel, wenn man sich vor Augen führt, dass bei einem proportionalen Anstieg aller Faktorpreise das Faktoreinsatzverhältnis konstant bleibt. Dann müssen wegen (3.3-1) die Kosten proportional steigen.

Übungsaufgabe 23

Erklären Sie den Unterschied zwischen der Kostengleichung (3.3-1) und der Kostenfunktion (3.3-22).

3.3.2.2 Explizite Ableitung einer Kostenfunktion: Kostenminimierung unter der Nebenbedingung einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

Solange die Produktionsfunktion nicht bekannt ist, lässt sich eine Kostenfunktion nicht explizit angeben. Wir kennen lediglich die Bedingungen, welche erfüllt sein müssen, damit eine Produktmenge mit minimalen Kosten hergestellt wird und die daraus abgeleiteten allgemeinen Eigenschaften der Kostenfunktion. Jetzt wollen wir eine Kostenfunktion explizit aus einer Produktionsfunktion ableiten. Wir wählen als Beispiel die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion:[36]

(3.3-23) $$Q = L^{\alpha} C^{\beta}.$$

Die Lagrange-Funktion zur Bestimmung des kostenminimalen Faktoreinsatzes lautet:

Lagrange-Ansatz

(3.3-24) $$\Lambda = lL + rC + \lambda[Q - L^{\alpha} C^{\beta}].$$

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Kostenminimum ergeben sich zu:

(3.3-25) $$\frac{\partial \Lambda}{\partial L} = l - \lambda \alpha \frac{L^{\alpha} C^{\beta}}{L} = 0,$$

(3.3-26) $$\frac{\partial \Lambda}{\partial C} = r - \lambda \beta \frac{L^{\alpha} C^{\beta}}{C} = 0.$$

Daraus folgt für das kostenminimale Faktoreinsatzverhältnis:[37]

Kostenminimales Faktoreinsatzverhältnis

(3.3-27) $$L = \frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} C.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Produktionsfunktion ein, erhält man:[38]

(3.3-28) $$Q = \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{\alpha} C^{\alpha+\beta}.$$

Löst man nach C auf, ergibt sich die optimale Einsatzmenge des Faktors Kapital, die einer gegebenen Produktmenge Q zugeordnet ist:

Bedingte Faktornachfragefunktion

(3.3-29) $$C = \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

und entsprechend für den Faktor Arbeit:[39]

---

36 Zur Vereinfachung der Darstellung ist der Niveauparameter $\gamma = 1$ gesetzt worden.

37 $$\frac{l}{r} = \frac{\lambda \alpha \frac{L^{\alpha} C^{\beta}}{L}}{\lambda \beta \frac{L^{\alpha} C^{\beta}}{C}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{C}{L} \Rightarrow L = \frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} C.$$

38 $$Q = \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} C \right]^{\alpha} C^{\beta} \Rightarrow Q = \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{\alpha} C^{\alpha+\beta}.$$

(3.3-30) $$L = \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Kostengleichung ein, erhält man die Kostenfunktion:[40]

Kostenfunktion

(3.3-31) $$K = \left\{ l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right\} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Für $\alpha + \beta = 1$ vereinfacht sich die Kostenfunktion zu:

(3.3-32) $$K = \left\{ l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta} + r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha} \right\} Q.$$

Die Kosten sind also proportional zur Produktmenge. Der Proportionalitätsfaktor ist abhängig von den Faktorpreisen l und r sowie den Produktionselastizitäten α und β.

Übungsaufgabe 24

a) Überprüfen Sie, ob die Kostenfunktion (3.3-32) linear-homogen in den Faktorpreisen ist.

b) Überprüfen Sie, ob ein Anstieg der Kapitalkosten zu einem Anstieg der Gesamtkosten führt.

3.3.2.3 Langfristige Gesamt-, Grenz- und Durchschnittskosten

Kostenkurven bei alternativen Produktionsfunktionen

In (3.3-32) sind die Kosten proportional zur Produktmenge. Diese Eigenschaft gilt nicht nur für eine Cobb-Douglas-Funktion mit $\alpha + \beta = 1$, sondern für jede Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen. Wie wir wissen, wächst bei derartigen Funktionen der Output proportional zum Input. Weist die Produktions-

---

39 $L = \frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \Rightarrow L = \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$

40 $K = lL + rC \Rightarrow K = l\left[\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] + r\left[\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right] \Rightarrow$

$$K = \left\{ l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{-\alpha}{\alpha+\beta}} \right\} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

funktion dagegen steigende Skalenerträge auf, ist die Summe der Produktionselastizitäten im Falle der Cobb-Douglas-Funktion also größer als 1, so steigen die Kosten unterproportional; liegen stattdessen sinkende Skalenerträge vor, so steigen die Kosten überproportional. Weist die Produktionsfunktion zunächst steigende, dann sinkende Skalenerträge auf, wie dies bei homothetischen Produktionsfunktionen der Fall sein kann, dann steigen die Kosten zunächst unterproportional, danach überproportional.[41]

Die Annahme steigender Grenzkosten ist in der Mikroökonomie besonders bedeutend. Wie in Kurseinheit 4 deutlich werden wird, ist es für die Existenz von Konkurrenzgleichgewichten wichtig, dass die Grenzkosten (zumindest von einer bestimmten Produktionsmenge an) zunehmen oder wenigstens nicht abnehmen. [42]

In Abbildung (A 3.3-5) sind Kostenkurven eingezeichnet, die sich ergeben, wenn die Produktion unter steigenden, konstanten oder sinkenden Skalenerträgen erfolgt, in Abbildung (A 3.3-6) die Kostenkurve einer Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen.

---

41 Homogene Funktionen besitzen einen konstanten Homogenitätsgrad. Ihre Skalenelastizität entspricht dem Homogenitätsgrad und kann deshalb nicht schwanken. Sie besitzen entweder steigende oder konstante oder sinkende Skalenerträge.

42 Die *Plausibilität* dieser Annahme illustriert die folgende Passage aus dem Roman *Die Musik des Zufalls* von Paul Auster (1990): "Nashe und Pozzi stellten bald fest, dass es eine Sache war, einen sechzig Pfund schweren Stein zu heben, aber eine ganz andere, danach einen zweiten sechzig Pfund schweren Stein zu heben, und dass die Sache noch anders aussah, wenn man sich nach diesem zweiten Stein einem dritten zuwenden sollte. Ganz gleich, wie stark sie sich auch beim Heben des ersten fühlten, wenn es an den zweiten ging, war schon viel von dieser Kraft verbraucht, und wenn der zweite gehoben war, bleib für den dritten noch viel weniger übrig. So lief das also. Sobald sie an der Mauer arbeiteten, stießen Nashe und Pozzi auf das gleiche faszinierende Rätsel: Die Steine waren alle vollkommen gleich, und doch war jeder Stein schwerer als der vorige."

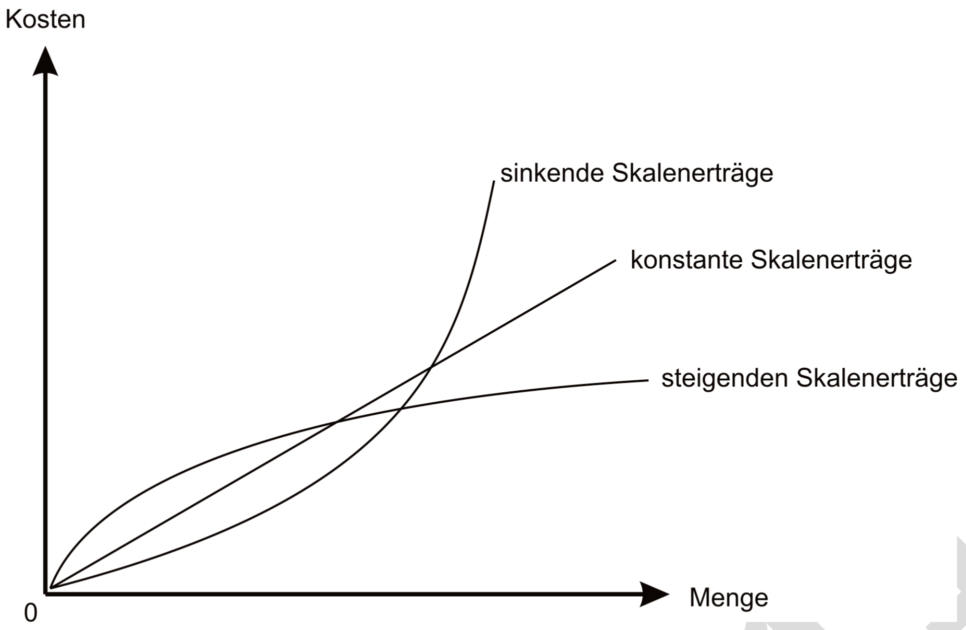


Abbildung (A 3.3-5): Langfristige Kostenkurven mit sinkenden, konstanten und steigenden Skalenerträgen

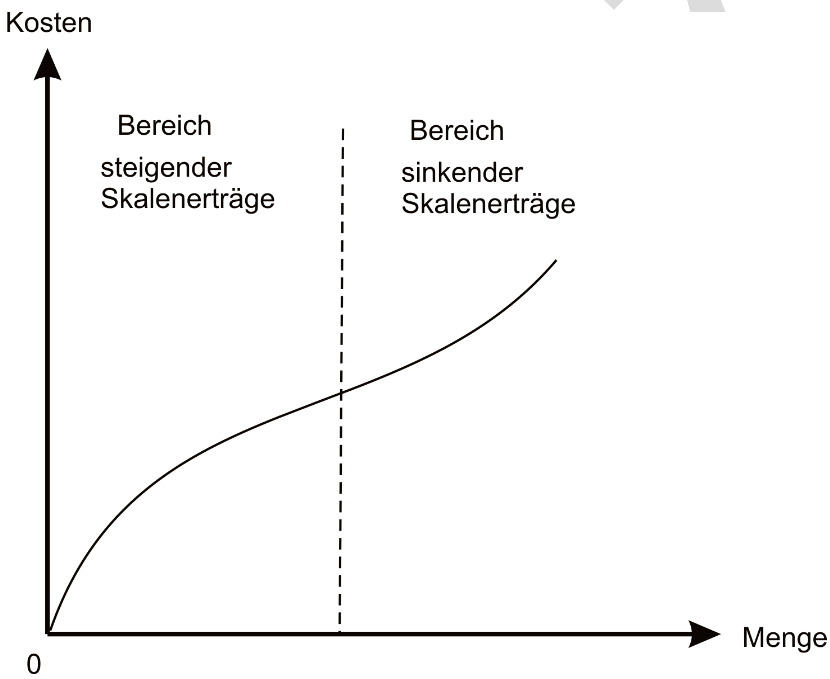


Abbildung (A 3.3-6): Langfristige Kostenkurve mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

Wie wir noch sehen werden, ist für die Produktionsplanung einer Firma nicht die absolute Höhe der Kosten entscheidend, sondern die Höhe der Grenzkosten und der Durchschnitts- oder Stückkosten. Wir hatten den Begriff der Grenzkosten bereits als Quotient aus der Änderung der Kosten und der sie auslösenden Veränderung der Produktmenge eingeführt. Mathematisch können wir die Grenzkosten als partielle Ableitung einer Gesamtkostenfunktion nach der Produktmenge ausdrücken:

Grenzkosten

(3.3-33) $$GK = \frac{\partial K}{\partial Q} = K'.$$

Grafisch gesehen, stellen die *Grenzkosten* die Steigung der Tangente an die Gesamtkostenkurve dar. Die *Grenzkostenkurve* erhält man, indem man die Tangente vom Nullpunkt aus an der Gesamtkostenkurve entlang wandern lässt.

Durchschnittskosten

Die *Durchschnittskosten* sind der Quotient aus den Kosten und der Produktmenge: $DK = \frac{K}{Q}$. Analog zur grafischen Ableitung der Durchschnitts*ertrags*kurve lässt sich die Durchschnitts*kosten*kurve dadurch ermitteln, dass man einen Fahrstrahl vom Koordinatenursprung an der Gesamtkostenkurve entlang wandern lässt. In Abbildung (A 3.3-7) sind beispielhaft ein Fahrstrahl a und eine Tangente b gestrichelt eingezeichnet. Der Tangens des Winkels α ist gleich dem Quotienten aus den Gesamtkosten, die bei der Herstellung einer Produktmenge Q_2 anfallen, geteilt durch die Menge Q_2, also gleich den Durchschnittskosten bei dieser Produktmenge. Entsprechend gibt β die Höhe der Grenzkosten bei einer Produktmenge Q_1 an.

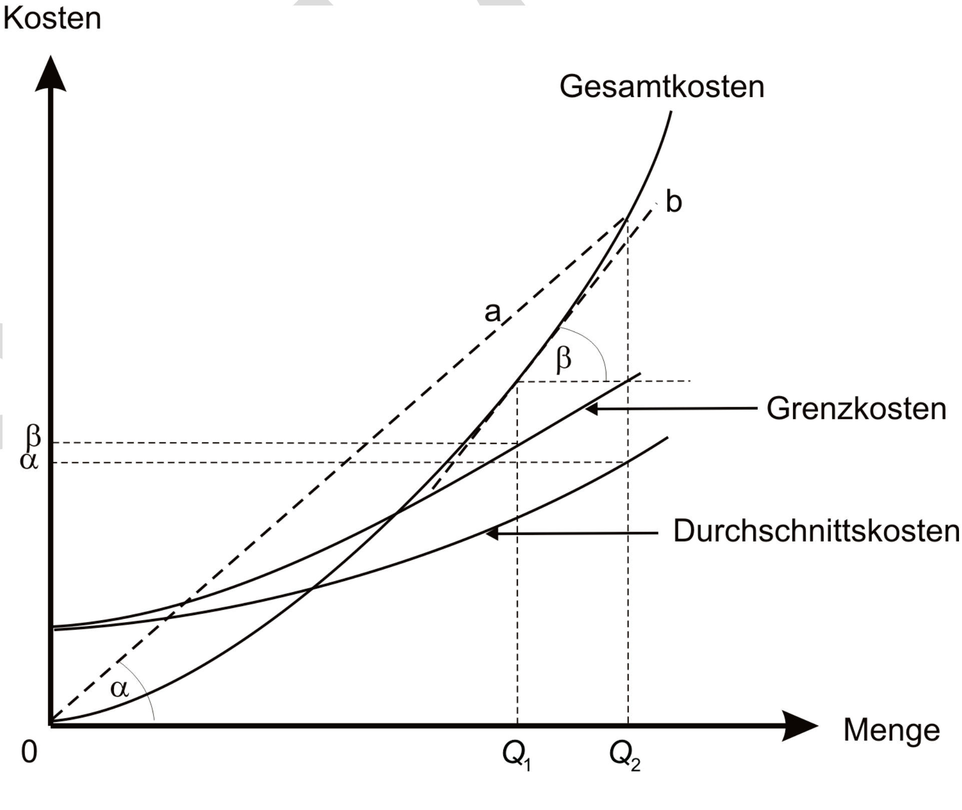


Abbildung (A 3.3-7): Langfristige Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven einer Produktionsfunktion mit sinkenden Skalenerträgen

Gesamtkostenkurve

Die Gesamtkostenkurve beginnt im Koordinatenursprung. Da langfristig alle Faktoren variabel sind, sind die Kosten bei einer Produktmenge von null ebenfalls null. Solange nichts produziert wird, entstehen keine Kosten. Da die Gesamtkostenkurve konvex verläuft, wenn die Produktion unter sinkenden Skalenerträgen erfolgt, nimmt die Steigung des gestrichelt eingezeichneten Fahrstrahls *a* vom Ursprung an die Gesamtkostenkurve zu, die Durchschnittskosten steigen also.

Durchschnittskostenkurve

Die Durchschnittskostenkurve beginnt im Ursprung, falls die Gesamtkostenkurve im Nullpunkt einen Anstieg von null hat. Dies ist der Fall, falls der Anstieg der Ertragskurve der Produktionsfunktion gegen unendlich strebt, wenn der Faktoreinsatz gegen null strebt. Dies ist jedoch ein Spezialfall. Im Allgemeinen ist der Anstieg der Ertragskurve endlich. Deshalb ist die Durchschnittskostenkurve mit einem positiven Ordinatenabschnitt eingezeichnet.

Grenzkostenkurve

Die Grenzkosten einer gegebenen Produktmenge entsprechen der Steigung der gestrichelt eingezeichneten Tangente *b* an diesen Punkt der Gesamtkostenkurve. Die Steigung der Tangente nimmt stetig zu. Sie ist in jedem Punkt der Gesamtkostenkurve mit positiver Produktmenge größer als die des Fahrstrahls durch den Ursprung. Die Grenzkosten sind also stets höher als die Durchschnittskosten, sobald die Produktmenge positiv ist. Die Grenzkostenkurve liegt oberhalb der Durchschnittskostenkurve. Da Grenz- und Durchschnittskostenkurve die gleiche Steigung besitzen, wenn die Produktmenge gegen null strebt, besitzen sie den gleichen Ordinatenabschnitt. Sowohl Durchschnitts- als auch Grenzkostenkurve können konvex, konkav oder linear verlaufen. Ohne nähere Information über den Verlauf der Gesamtkostenkurve lässt sich hierzu keine Aussage machen.

Kostenkurven bei steigenden Skalenerträgen

Analog ist die folgende Abbildung (A 3.3-8) zu interpretieren, in welcher eine Gesamtkostenkurve eingezeichnet ist, die steigende Skalenerträge aufweist.

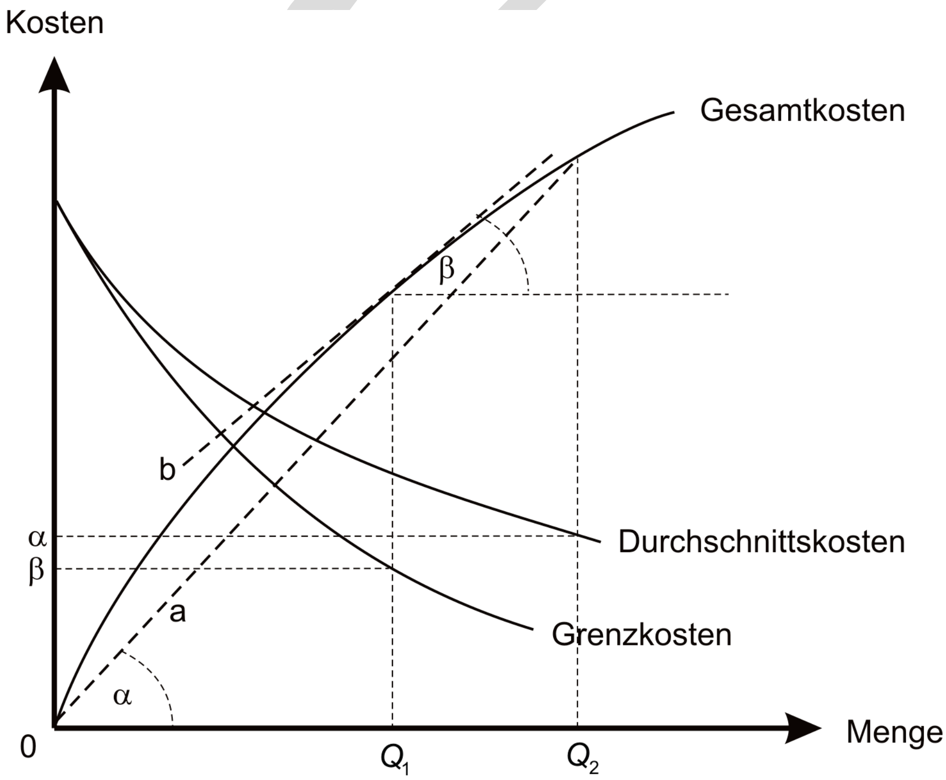


Abbildung (A 3.3-8): Langfristige Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven einer Produktionsfunktion mit steigenden Skalenerträgen

Kostenkurven bei konstanten Skalenerträgen

Falls die Produktionsfunktion konstante Skalenerträge aufweist, ist die langfristige Kostenkurve eine Gerade durch den Ursprung. Einen derartigen Verlauf hat z.B. die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion, wenn die Summe ihrer Produktionselastizitäten den Wert eins ergibt. Durchschnitts- und Grenzkosten sind in diesem Fall identisch. Abbildung (A 3.3-9) zeigt den Verlauf der betreffenden Kostenkurven.

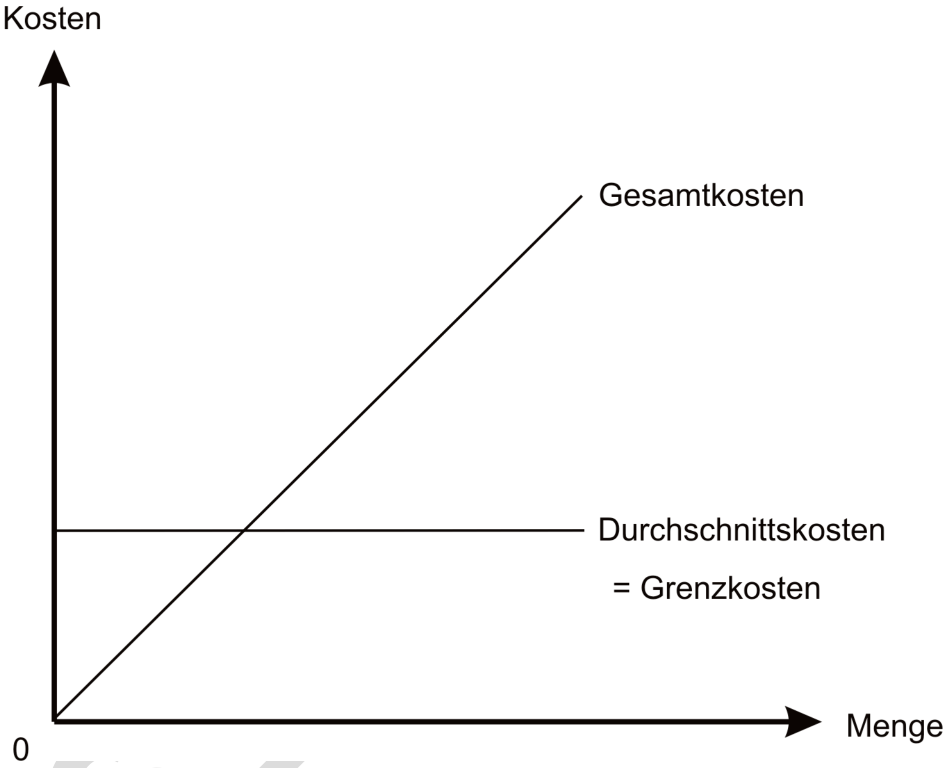


Abbildung (A 3.3-9): Langfristige Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven einer Produktionsfunktion mit konstanten Skalenerträgen

Schließlich sind noch die langfristigen Kostenkurven von Produktionsfunktionen mit zunächst steigenden und dann sinkenden Skalenerträgen zu behandeln. Diese Kostenkurven haben einen S-förmigen Verlauf. Die Ableitung der zugehörigen Durchschnitts- und Grenzkostenkurven erfolgt ganz analog zu den drei bisher betrachteten Kostenkurven. Trotzdem sind einige Besonderheiten zu beachten. Betrachten wir zunächst Abbildung (A 3.3-10).

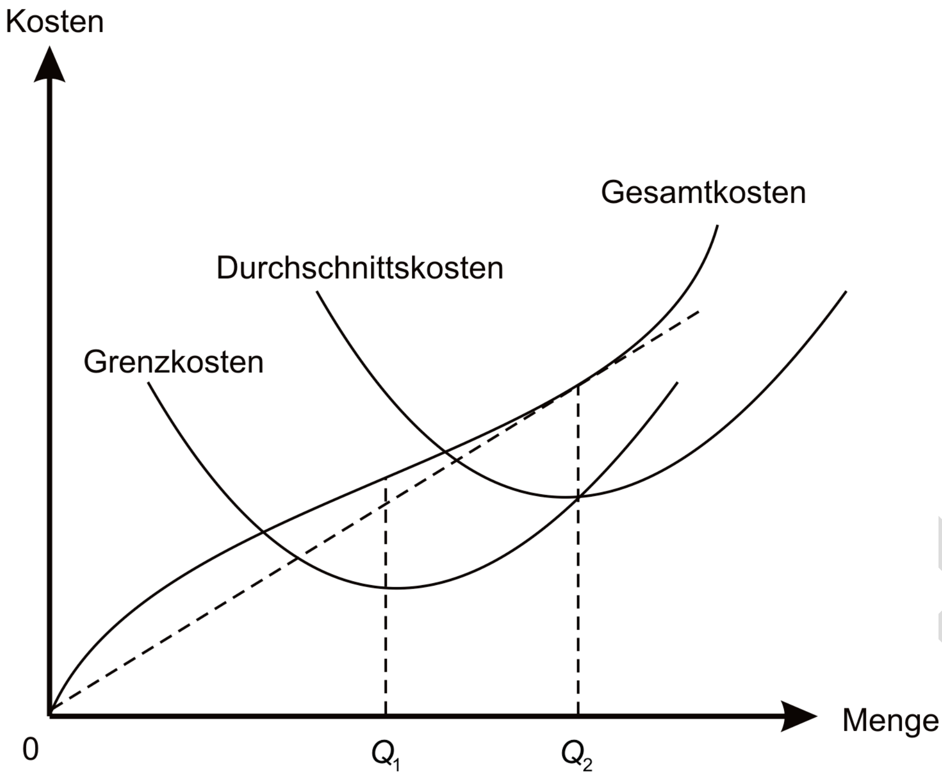


Abbildung (A 3.3-10): Langfristige Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven einer Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

Kostenkurven bei Produktionsfunktionen mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

Die Steigung des Fahrstrahls vom Ursprung an die Gesamtkostenkurve sinkt zunächst, erreicht bei der Menge Q_2 ihr Minimum und steigt danach kontinuierlich. Die Durchschnittskostenkurve hat demnach einen U-förmigen Verlauf mit einem Minimum bei jener Menge, bei welcher der Fahrstrahl die Gesamtkostenkurve tangiert, d.h. bei der Menge Q_2. Die Steigung der Tangente an die Gesamtkostenkurve nimmt ebenfalls zunächst ab, erreicht im Wendepunkt Q_1 der Gesamtkostenkurve ihr Minimum und steigt anschließend wieder an. Tangente und Fahrstrahl besitzen bei der Menge Q_2 die gleiche Steigung. In diesem Punkt sind Grenzkosten und Durchschnittskosten also gleich hoch. Deshalb müssen sich die beiden Kurven in diesem Punkt schneiden. Links von Q_2 ist die Steigung der Tangente kleiner als die des Fahrstrahls. In diesem Bereich sind die Durchschnittskosten höher als die Grenzkosten. Im Punkte Q_2 sind beide Kosten gleich hoch, rechts von Q_2 sind die Grenzkosten höher als die Durchschnittskosten. Zwischen Q_1 und Q_2 liegt ein Bereich, in welchem die Durchschnittskosten noch sinken, die Grenzkosten aber bereits ansteigen. Wenn eine Firma die Menge Q_2 produziert, sind ihre Durchschnittskosten minimal. Man sagt dann, die Firma produziere in ihrem *Betriebsoptimum*. Wie wir später, bei der Behandlung der Preisbildung in Kurseinheit 4, sehen werden, ist die Existenz eines Betriebsoptimums von erheblicher Bedeutung für die Funktionsfähigkeit von Märkten. Homothetische Produktionsfunktionen mit zunächst steigenden und dann sinkenden Skalenerträgen, welche zu U-förmigen Durchschnittskostenkurven und damit zu optimalen Betriebsgrößen führen, sind deshalb von besonderem theoretischen Interesse.

Economies of scale

Sinkende Durchschnittskosten bei steigender Produktmenge bezeichnet man als *economies of scale*, steigende Durchschnittskosten als *diseconomies of scale.* Steigende Skalenerträge bei der Produktion führen zu economies of scale, sinkende Skalenerträge zu diseconomies of scale. Der Zusammenhang zwischen Skalenerträgen und economies of scale wird besonders deutlich bei homothetischen Produktionsfunktionen. Definieren wir die Elastizität der Kosten in Bezug auf die Produktmenge als

$$(3.3\text{-}34) \qquad \varepsilon_{K,Q} = \frac{\partial K}{\partial Q}\frac{Q}{K}$$

und die Skalenelastizität als

$$(3.3\text{-}35) \qquad \varepsilon_{Q,\mu} = \frac{\partial Q}{\partial \mu}\frac{\mu}{Q},$$

so gilt für alle homothetischen Funktionen

$$(3.3\text{-}36) \qquad \varepsilon_{K,Q} = \frac{1}{\varepsilon_{Q,\mu}}.$$

Kostenelastizität

Die Kostenelastizität ist also umgekehrt proportional der Skalenelastizität. Wir wollen diesen Satz hier nicht beweisen. Die interessierten Leserinnen und Leser seien auf entsprechend formale Darstellungen der Mikroökonomik verwiesen.[43]

Minimale Durchschnittskosten

Analytisch ergibt sich das Minimum der Kurve der gesamten Durchschnittskosten durch Differenziation der Funktion der gesamten Durchschnittskosten nach Q:

$$(3.3\text{-}37) \qquad \frac{d\frac{K}{Q}}{dQ} = \frac{Q\frac{\partial K}{\partial Q} - K}{Q^2} = 0\,.$$

Die Bedingung 2. Ordnung für ein Minimum lautet:[44]

43 Vgl. z.B. GRAVELLE/REES (2004), S. 122.

44 $\frac{d^2\left(\frac{K}{Q}\right)}{dQ^2} = \frac{Q^2\left[K_Q + QK_{QQ} - K_Q\right] - 2Q\left[QK_Q - K\right]}{Q^4} > 0$. Daraus folgt:

$\frac{d^2\left(\frac{K}{Q}\right)}{dQ^2} = \frac{K_{QQ}}{Q} > 0$, da $QK_Q - K = 0$ wegen der Bedingung 1. Ordnung.

(3.3-38) $$\frac{d^2\left(\frac{K}{Q}\right)}{dQ^2} = \frac{K_{QQ}}{Q} > 0\,.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Kostenkurve konvex ist, die Produktion also im Bereich sinkender Ertragszuwächse erfolgt. Aus der Bedingung 1. Ordnung folgt:

(3.3-39) $$\frac{\partial K}{\partial Q} = \frac{K}{Q}\,,$$

also Grenzkosten gleich Durchschnittskosten. *Die Kurve der langfristigen Durchschnittskosten hat demnach ihr Minimum bei jener Produktmenge, bei der die Grenzkosten gleich den Durchschnittskosten sind.*

Übungsaufgabe 25

Falls die Gesamtkostenkurve diseconomies of scale aufweist, können die Grenz- und Durchschnittskostenkurven dann konkav zum Ursprung verlaufen?

3.3.2.4 Die Auswirkungen von Faktorpreisänderungen auf die Lage der langfristigen Kostenkurven

komparativ-statische Analyse

Auf Märkten unter vollständiger Konkurrenz haben die einzelnen Firmen keinen Einfluss auf die Faktorpreise. Letztere können aber z.B. von der Wirtschaftspolitik beeinflusst werden. Wenn wir wissen, wie Faktorpreisänderungen auf die Kosten einer Firma wirken, haben wir einen Anhaltspunkt dafür, wie nach Gewinnmaximierung strebende Entscheidungsträger auf diese Änderungen reagieren werden. Diese Reaktionen können in Änderungen der Produktionsmenge und/oder in Änderungen des relativen Einsatzes verschiedener Produktionsfaktoren liegen. Mit unseren diesbezüglichen Überlegungen entwickeln wir also Bausteine für eine Analyse, die es ermöglicht, das Anpassungsverhalten von Firmen an wirtschaftspolitische Maßnahmen (oder sonstige für die Firma exogene Änderungen) zu erklären und zu prognostizieren. Damit ergeben sich dann Anhaltspunkte für die Entwicklung eines optimalen Designs der Wirtschaftspolitik. Anders ausgedrückt ist es unmöglich, eine zielgerechte Wirtschaftspolitik zu formulieren, wenn keine begründeten Vorstellungen darüber bestehen, wie die Normadressaten auf wirtschaftspolitische Regelungen reagieren. Deshalb wollen wir als nächsten Schritt untersuchen, wie sich die Kostenkurven verlagern, wenn sich die Faktorpreise ändern.

Proportionale Änderung beider Faktorpreise bei konstanter Produktmenge

Eine proportionale Änderung der beiden Faktorpreise lässt die Lage der Kostengeraden in Abbildung (A 3.3-2) unverändert. Sie erhalten lediglich einen neuen Zahlenwert. Da die Isoquanten durch die Faktorpreisänderung ebenfalls nicht berührt werden, ändert sich auch der Tangentialpunkt der beiden Kurven nicht. Also ändert sich auch nicht das Faktoreinsatzverhältnis, jedenfalls dann nicht, wenn die Produktmenge konstant bleibt. Die Lage der Expansionskurve bleibt unverändert.

Den Produktmengen sind jetzt lediglich höhere Kostenwerte zugeordnet. Die proportionale Änderung aller Faktorpreise drückt sich grafisch in einer Verschiebung (in der Regel allerdings keine Parallelverschiebung) der Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven nach oben bzw. nach unten aus.

Änderung der Produktmenge

Etwas anderes gilt allerdings, wenn es auf Grund der Kostensteigerung zu einer Änderung der Produktmenge kommt. Es wäre z.B. möglich, dass es wegen der Kostensteigerung zu einer Preissteigerung, dadurch zu einem Nachfragerückgang und dadurch zu einer Produktionseinschränkung kommt. Wie wir wissen, bleibt bei homothetischen Produktionsfunktionen die Grenzrate der Substitution entlang eines Fahrstrahls durch den Ursprung konstant. In diesem Fall ändert sich das Faktoreinsatzverhältnis der Minimalkostenkombination auch bei Änderungen der Produktmenge nicht. Bei anderen Produktionsfunktionen kann es sich aber ändern, und es kommt zu einer Substitution des einen Faktors durch den anderen selbst dann, wenn beide Faktorpreise sich proportional verändern.

Änderung eines Faktorpreises

Steigt lediglich ein Faktorpreis, so steigen die Gesamtkosten ebenfalls, falls dieser Faktor weiterhin nachgefragt wird. Das Ausmaß der Kostensteigerung ist davon abhängig, wie groß der Anteil des betreffenden Faktors an den gesamten Kosten ist. Das Gleiche gilt für die Durchschnittskosten. Während die langfristigen Gesamt- und Durchschnittskosten steigen, lassen sich die Auswirkungen der Preissteigerung eines Faktors auf die Grenzkosten dagegen nur angeben, wenn die Produktionsfunktion bekannt ist. Falls der betreffende Faktor ein „normaler“ Faktor ist, dieser Faktor also bei einer Outputsteigerung vermehrt eingesetzt wird, steigen die Grenzkosten. Ist der Faktor jedoch inferior, so sinken die Grenzkosten bei einer Erhöhung des betreffenden Faktorpreises.

Übungsaufgabe 26

Geben Sie eine Erklärung dafür, weshalb die Grenzkosten bei einer Erhöhung des Preises eines inferioren Faktors sinken.

Wir hatten gesehen, dass bei homothetischen Funktionen der Expansionspfad eine Gerade durch den Ursprung ist. In diesem Fall sind alle Faktoren normale Inputs, und die Grenzkosten steigen bei einer Faktorpreissteigerung.

Auswirkungen von Faktorpreisänderungen im Fall einer CD-Produktionsfunktion

Zur Illustration wollen wir uns die Auswirkungen von Faktorpreissteigerungen auf die Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkosten noch einmal am Beispiel der Cobb-Douglas-Funktion ansehen.

Die Gesamtkostenfunktion lautet für den Fall der Linear-Homogenität, wenn also gilt $\alpha + \beta = 1$:

$$K = \left\{ l \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{\beta} + r \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{-\alpha} \right\} Q . \qquad (3.3\text{-}40)$$

Ändern sich beide Faktorpreise proportional, z.B. um den Faktor μ, so steigen die Kosten ebenfalls um diesen Faktor:

$$(3.3\text{-}41) \qquad \mu K = \left\{ \mu l \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{\mu r}{\mu l} \right]^{\beta} + \mu r \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{\mu r}{\mu l} \right]^{-\alpha} \right\} Q .$$

Ändert sich lediglich der Preis des Faktors Arbeit, so gilt:

$$(3.3\text{-}42) \qquad \frac{\partial K}{\partial l} = \left[\left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\beta} (1-\beta) l^{-\beta} r^{\beta} + \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{-\alpha} \alpha r^{1-\alpha} l^{\alpha-1} \right] Q > 0 .$$

Die Gesamtkosten steigen also mit steigendem Faktorpreis. Der absolute Kostenanstieg ist um so größer, je größer die Produktmenge ist. Entsprechendes gilt für den Faktor Kapital.

Änderung der Faktorproduktivitäten

Analoge Überlegungen könnte man für Änderungen der Faktorproduktivitäten anstellen. Die Annahme, dass derartige Änderungen für eine Firma exogen sind, ist aber selbst unter den Bedingungen vollständiger Konkurrenz problematisch. Wir werden uns mit diesem Problem später in den Kurseinheiten 4 und 5 noch ausführlich beschäftigen. Deshalb wollen wir an dieser Stelle auf eine Analyse der Kostenwirkungen von Produktivitätsänderungen verzichten.

In Abbildung (A 3.3-11) sind die Verschiebungen der langfristigen Kostenkurve einer linear-homogenen Produktionsfunktion bei einem Anstieg eines Faktorpreises eingezeichnet. Dabei gilt: $l_1 < l_2$.

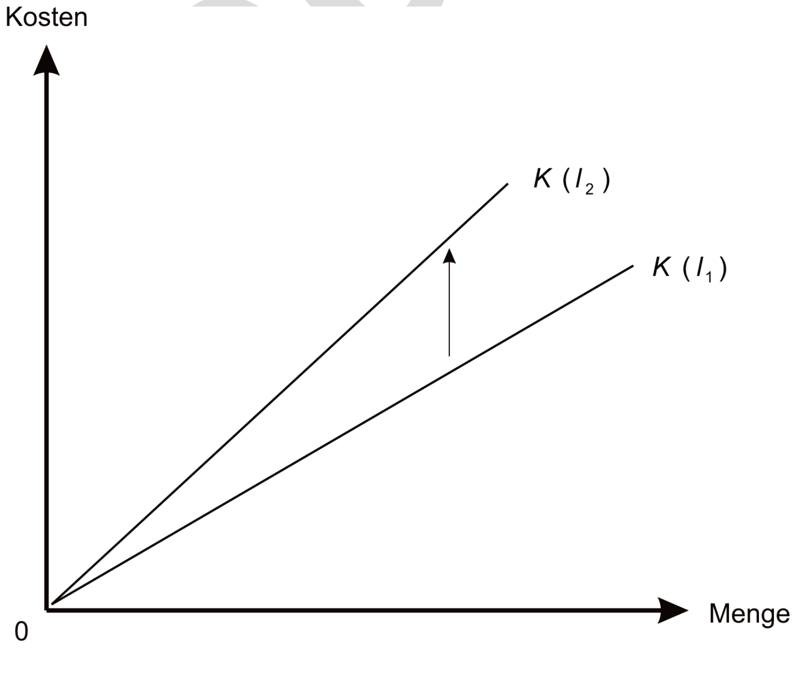


Abbildung (A 3.3-11): Die Auswirkungen von Veränderungen der Faktorpreise auf die Lage der langfristigen Kostenkurve einer linear-homogenen Produktionsfunktion

Übungsaufgabe 27

Stellen Sie die Verschiebung der langfristigen Durchschnittskostenkurve einer linear-homogenen Produktionsfunktion grafisch dar, die als Folge einer Faktorpreisänderung eintritt.

Wenn die Produktionsfunktion zunächst steigende, dann sinkende Skalenerträge aufweist, besitzt die zugehörige langfristige Kostenfunktion zunächst sinkende, dann steigende langfristige Grenz- und Durchschnittskosten. Eine Änderung der Faktorpreise hat tendenziell die gleichen Auswirkungen auf die Lage der Kostenkurven wie im Fall der linear-homogenen Produktionsfunktion. Allerdings kann sich in diesem Fall das Minimum der Durchschnittskosten verschieben. Abbildung (A 3.3-12) zeigt die Auswirkungen von Faktorpreisänderungen auf die Lage einer langfristigen Kostenfunktion mit zunächst sinkenden, dann steigenden Grenz- und Durchschnittskosten.

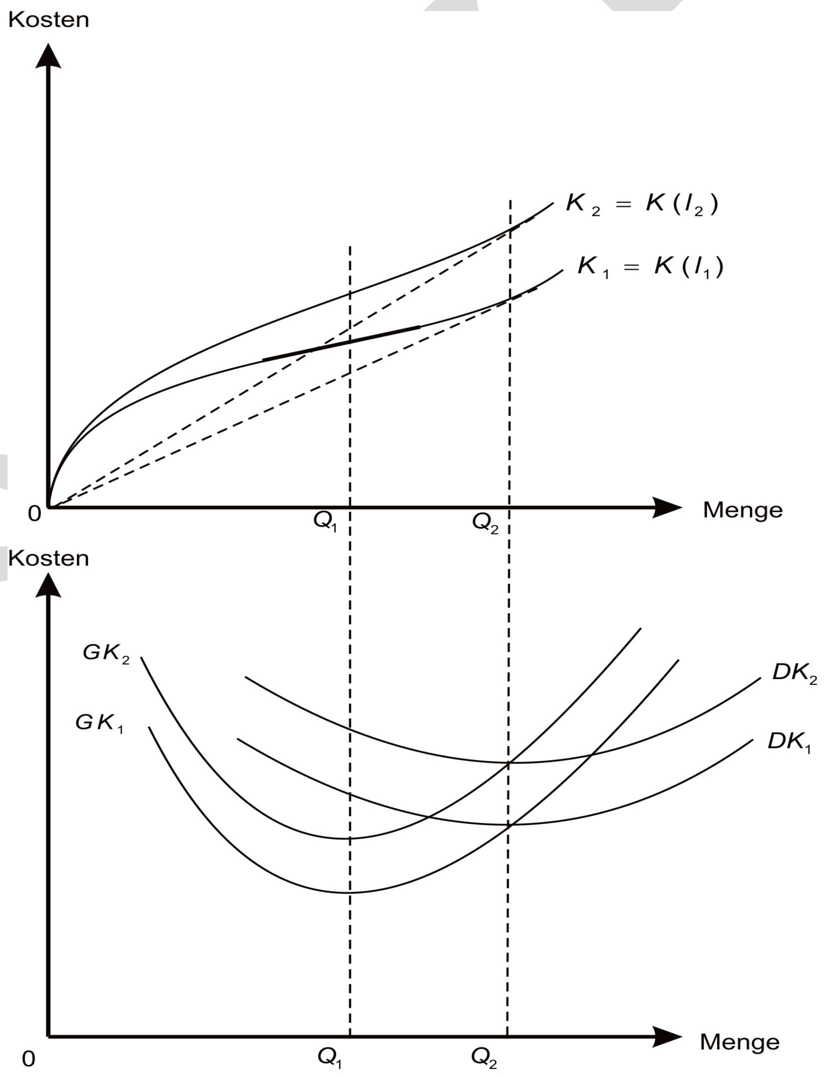


Abbildung (A 3.3-12): Die Auswirkungen von Veränderungen der Faktorpreise auf die Lage der langfristigen Kostenfunktionen von Produktionsfunktionen mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

Das Minimum der Grenzkosten der langfristigen Kostenkurve $K_1 = K(l_1)$ liegt bei der Produktmenge Q_1 und das Minimum der Durchschnittskosten bei der Produktmenge Q_2. Eine Erhöhung der Arbeitskosten führt zu einer Verlagerung der Kostenkurve nach $K_2 = K(l_2)$. Die Verlagerung ist hier derart eingezeichnet, dass die Grenz- und Durchschnittskostenkurven ihre Minima bei der gleichen Produktmenge wie vorher erreichen. Dies ist aber nicht notwendig. Es könnte auch sein, dass sich die Minima zu kleineren oder größeren Produktmengen verschieben. Dies hängt von dem jeweiligen Verlauf der Produktionsfunktionen ab.

Übungsaufgabe 28

Stellen Sie eine Kostenfunktion in mathematischer Form auf, welche folgende Eigenschaften besitzt:

a) Die Grenzkostenkurve ist eine Gerade.

b) Die Durchschnittskostenkurve hat einen U-förmigen Verlauf.

3.3.3. Kurzfristige Kostenfunktionen

3.3.3.1 Der Zusammenhang zwischen kurz- und langfristigen Kosten

Restriktion: ein Faktor ist fix

Bei der oben grafisch und analytisch abgeleiteten Kostenfunktion sind beide Faktoren (und damit in diesem Fall „alle“ Faktoren) variabel. Die Firma kann also die kostengünstigste Faktoreinsatzkombination frei wählen. Falls die Frist zwischen dem Zeitpunkt der Produktionsplanung und dem Zeitpunkt des Produktionsbeginns kurz ist, kann es sein, dass die Einsatzmenge eines der beiden Faktoren nicht verändert werden kann. Denken Sie z.B. an Fabrikgebäude oder größere Spezialmaschinen. Eine Produktionsanpassung kann dann nur durch Variation des variablen Faktors erfolgen, in unserem Fall durch einen vermehrten Arbeitseinsatz, z.B. durch Überstunden. Welche Auswirkungen ergeben sich aus dieser Restriktion für die Kosten?

Betrachten wir zunächst noch einmal die Minimalkostenkombinationen für unterschiedliche Produktmengen, wie sie in Abbildung (A 3.3-13) dargestellt sind.

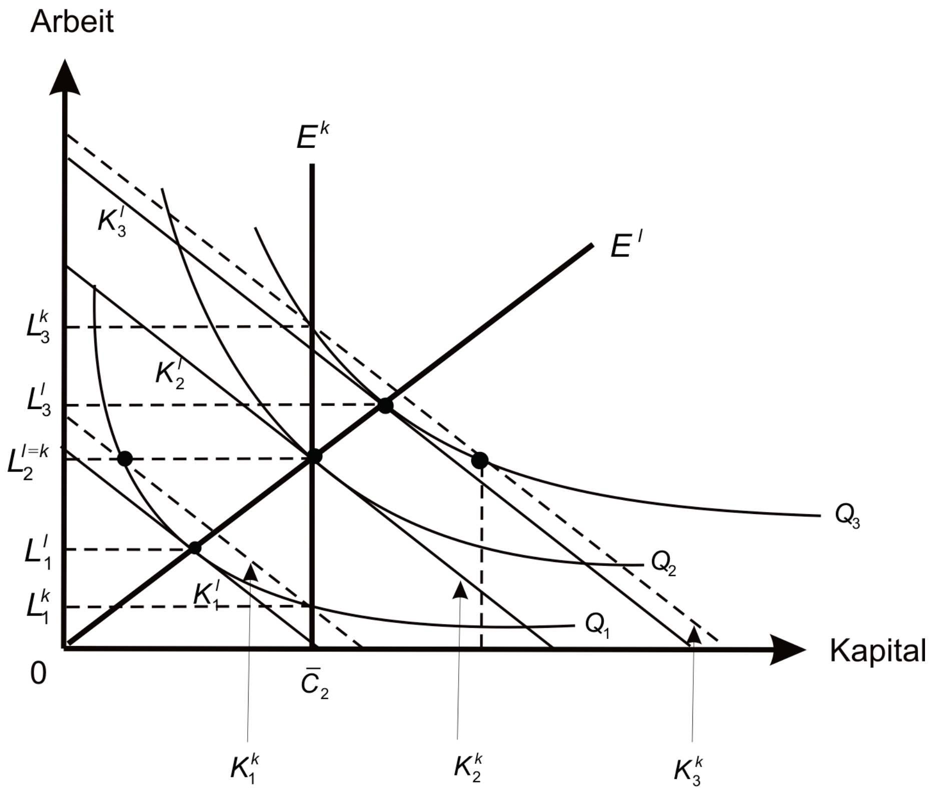


Abbildung (A 3.3-13): Kurzfristige und langfristige Minimalkostenkombinationen bei unterschiedlichen Produktmengen und kurzfristig fixem Faktor Kapital

Kurz- und langfristige Minimalkostenkombinationen

Diese Abbildung unterscheidet sich von der bereits vorher eingeführten Minimalkostenkombination in Abbildung (A 3.3-2) dadurch, dass der Faktor Kapital jetzt kurzfristig als fix bei der Menge $\bar{C}_2$ angenommen wird und dass eine homothetische Produktionsfunktion unterstellt ist. Die Tangenten an die Isoquanten, die auf einer Ursprungsgeraden liegen, haben also alle die gleiche Steigung. Langfristig ist der Faktor Kapital nach wie vor variabel, und es ergibt sich der langfristige Expansionspfad E^l. Angenommen, die betrachtete Firma befindet sich in ihrem langfristigen Kostenminimum und produziert die Menge Q_2. Wenn sie jetzt diese Menge auf Q_1 reduzieren möchte, kann sie sich nicht entlang des langfristigen Expansionspfades in Richtung Koordinatenursprung bewegen, weil die Einsatzmenge des Faktors Kapital kurzfristig nicht verändert werden kann. Die Firma muss sich entlang des kurzfristigen Expansionspfades E^k bewegen, und zwar nach unten, bis die Einsatzmenge des Faktors Arbeit von $L_2^{l=k}$ auf L_1^k gesunken ist. Die Faktormengenkombination aus $\bar{C}_2$ und L_1^k ergibt die Produktmenge Q_1. Die hierbei entstehenden Kosten werden durch die gestrichelt gezeichnete Kostengerade K_1^k angegeben. Sie liegt weiter vom Ursprung entfernt als die langfristige Kostengerade K_1^l. *Die kurzfristigen Kosten sind mithin höher als die langfristigen*. Analoge Überlegungen können wir anstellen, wenn die Firma die Produktmenge auf Q_3 erhöhen will. Kurzfristig steigt die Arbeitsmenge dann auf L_3^k. Hierbei entstehen Kosten in Höhe von K_3^k. Langfristig ist der Faktor Kapital variabel und kann erhöht werden. Wenn die Produktmenge weiterhin Q_3 betragen soll, wird die Firma den Arbeitseinsatz wieder reduzieren, und zwar auf L_3^l, und den Kapitaleinsatz entsprechend erhöhen. Die Kosten sinken dann auf K_3^l. Die hier nur für drei verschiedene Produktmengen durchgeführten Überlegungen können für beliebige Mengen durchgeführt werden und die zugehörigen kurz- und langfristigen Kosten-Mengen-Kombinationen in ein Kosten-Mengen-Diagramm übertragen werden. Wir erhalten auf diesem Wege die in Abbildung (A 3.3-14) eingezeichneten lang- und kurzfristigen Kostenkurven.

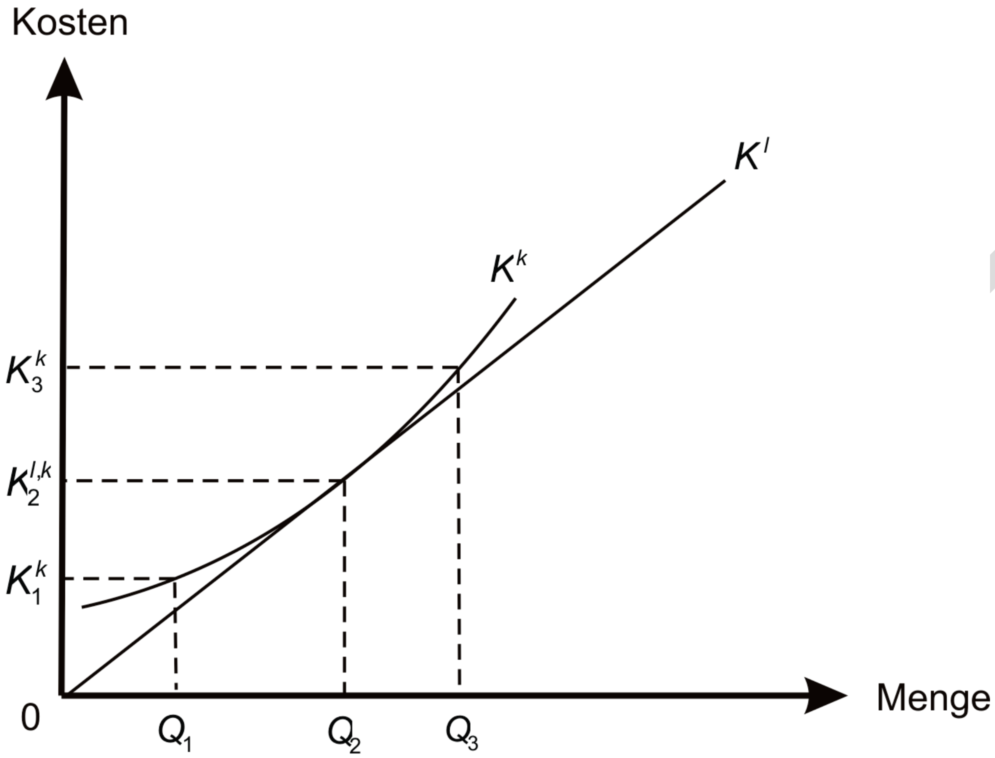


Abbildung (A 3.3-14): Kurz- und langfristige Gesamtkostenkurven einer neoklassischen, linear-homogenen Produktionsfunktion

Kurz- und langfristige Gesamtkostenkurve

Die hier eingezeichnete kurzfristige Kostenkurve tangiert die langfristige bei der Produktmenge Q_2, weil bei dieser Menge kurz- und langfristige Kosten gleich sind. Die vorhandene Menge des Faktors Kapital ist optimal für diese Produktmenge. Auf analoge Weise könnten wir kurzfristige Kostenkurven ableiten, die zu alternativen Einsatzmengen des kurzfristig fixen Faktors korrespondieren würden. Wäre die Einsatzmenge des Faktors Kapital optimal für eine Menge Q_1, und würde man ausgehend von dieser Kapitalmenge die Produktmenge variieren, erhielte man eine kurzfristige Kostenkurve, welche die langfristige bei der Menge Q_1 tangiert. Entsprechendes gilt für eine Menge Q_3. Das Ergebnis derartiger Überlegungen ist in Abbildung (A 3.3-15) eingezeichnet.

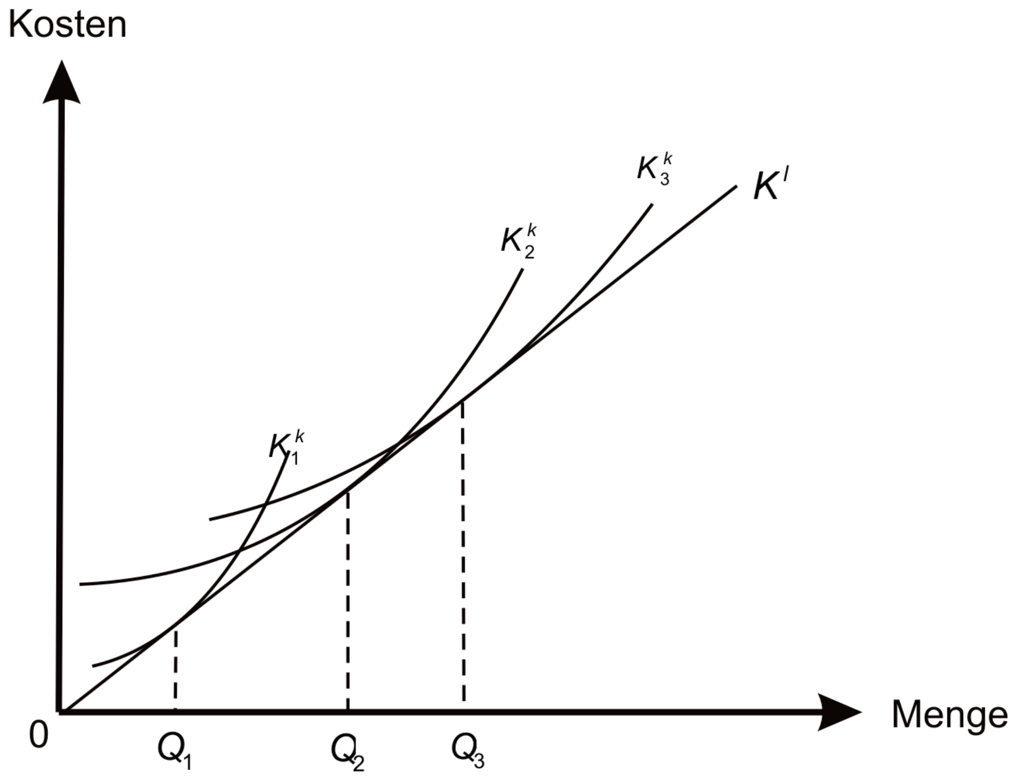


Abbildung (A 3.3-15): Die langfristige Kostenkurve als Einhüllende der kurzfristigen Kostenkurven bei einer neoklassischen, linear-homogenen Produktionsfunktion

Langfristige Kostenkurve als Einhüllende einer Schar kurzfristiger Kostenkurven

Man erkennt, dass die langfristige Kostenkurve die *Einhüllende* einer Schar kurzfristiger Kostenkurven ist. Mit Hilfe des bereits bei der grafischen Ableitung der *langfristigen* Durchschnitts- und Grenzkosten angewendeten Verfahrens können wir jetzt auch die zu den *kurzfristigen* Gesamtkosten korrespondierenden Durchschnitts- und Grenzkostenkurven ermitteln. Abbildung (A 3.3-16) gibt die kurz- und langfristigen Grenz- und Durchschnittskostenkurven der in Abbildung (A 3.3-15) dargestellten Gesamtkostenkurven wieder.

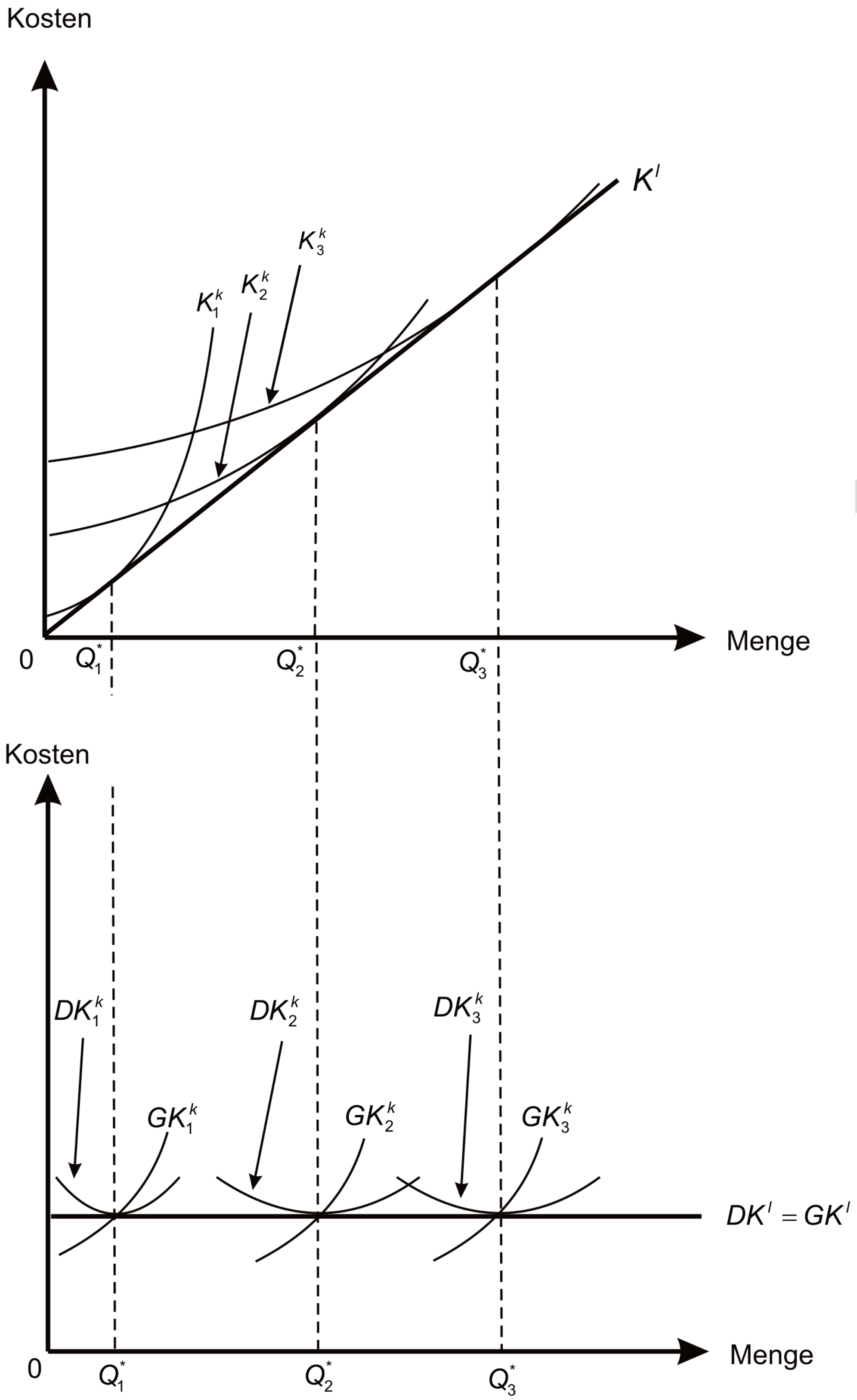


Abbildung (A 3.3-16): Kurz- und langfristige Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven einer neoklassischen, linear-homogenen Produktionsfunktion für alternative fixe Niveaus des Produktionsfaktors Kapital

Bei der Produktmenge Q_1^* gilt: $DK_1^k = DK^l = GK^l = GK_1^k$. Links und rechts von Q_1^* sind die kurzfristigen Durchschnittskosten höher als die langfristigen. Die kurzfristigen Grenzkosten sind links von Q_1^* niedriger und rechts von Q_1^* höher als die langfristigen. Außerdem gilt weiterhin, dass die kurzfristigen Grenzkosten links vom Schnittpunkt der Grenzkosten- mit der Durchschnittskostenkurve niedriger und rechts davon höher sind als die kurzfristigen Durchschnittskosten. Aus der Abbildung kann man entnehmen, dass die kurzfristigen Durchschnittskosten bei fluktuierender Produktmenge steigen, und zwar selbst dann, wenn die langfristigen Grenz- und Durchschnittskosten konstant sind. Wenn die Firma z.B. auf Grund einer Nachfrageerhöhung die Produktion steigern möchte, kann sie dies kurzfristig nur durch den vermehrten Einsatz des variablen Faktors tun. Dann verlässt sie aber die für den gegebenen Einsatz des fixen Faktors kostenminimale Produktmenge und es entstehen höhere Grenz- und Durchschnittskosten. Erst langfristig, wenn sie auch die Einsatzmenge des kurzfristig fixen Faktors variieren kann, ist sie wieder in der Lage, jene Faktorkombination zu wählen, welche für die gewünschte Produktmenge optimal ist. Entsprechendes gilt für Produktionseinschränkungen. Abbildung (A 3.3-17) stellt die kurz- und langfristigen Auswirkungen einer Produktionserhöhung auf die Grenz- und die Durchschnittskosten noch einmal vergrößert dar.

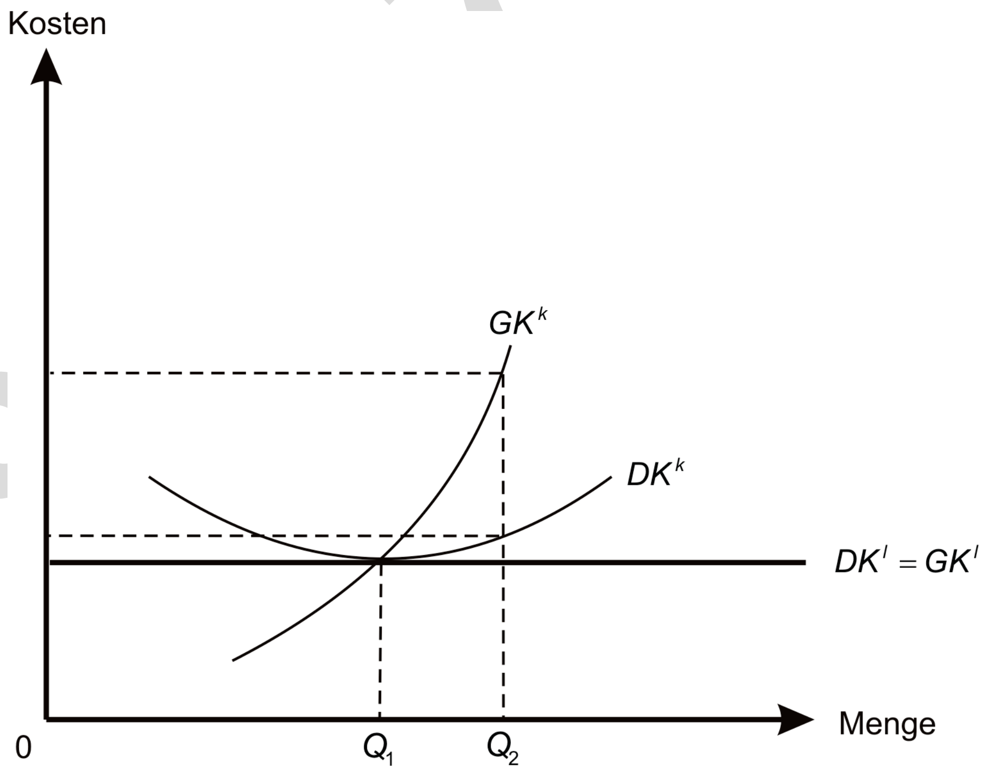


Abbildung (A 3.3-17): Die kurz- und langfristigen Änderungen der Kosten bei Outputänderungen

Kurz- und langfristige Kostenkurven einer homothetischen Produktionsfunktion

Der hier eingezeichneten langfristigen Kostenkurve liegt eine linear-homogene Produktionsfunktion zu Grunde. Auf analoge Weise lässt sich aber auch der Zusammenhang zwischen den kurz- und langfristigen Kostenkurven einer homothetischen Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen darstellen. Auch in diesem Fall bildet die langfristige Kostenkurve die Einhüllende zu den kurzfristigen Kostenkurven, wie Abbildung (A 3.3-18) zeigt.

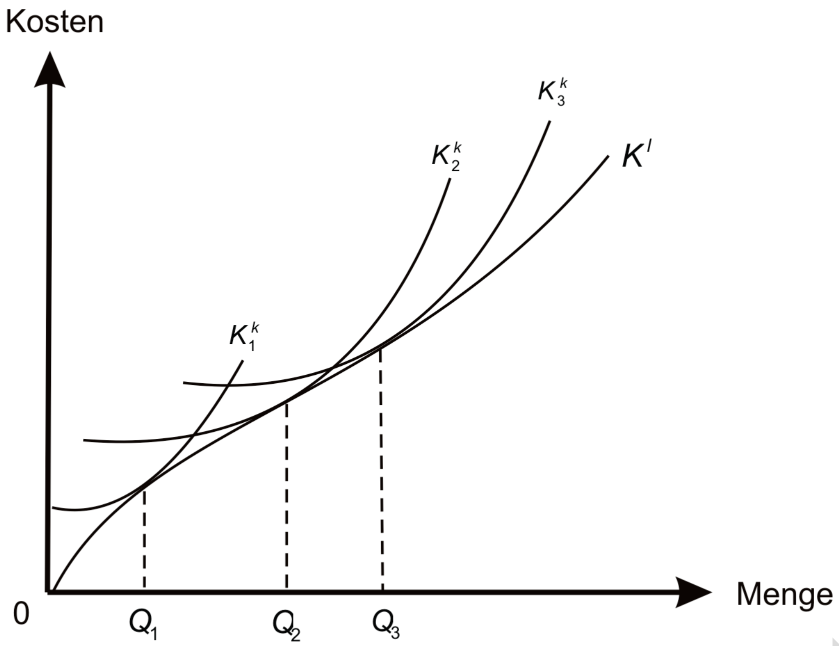


Abbildung (A 3.3-18): Die langfristige Kostenkurve als Einhüllende der kurzfristigen Kostenkurven bei einer homothetischen Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

Übungsaufgabe 29

Stellen Sie die zu Abbildung (A 3.3-18) korrespondierenden kurz- und langfristigen Durchschnitts- und Grenzkostenkurven grafisch dar.

3.3.3.2 Fixe und variable Kosten

Fixe und variable Kosten

Auf kurze Frist ist definitionsgemäß mindestens ein Faktor fix, d.h. seine Einsatzmenge kann innerhalb dieses Zeitraums nicht verändert werden. Die diesem Faktor zugeordneten Kosten werden als *fixe Kosten* bezeichnet, die Kosten der variablen Faktoren als *variable Kosten*. Die Unterscheidung zwischen fixen und variablen Kosten ist nur bei kurzfristigen Kostenfunktionen sinnvoll, da langfristig definitionsgemäß alle Faktoren variabel sind. Insofern könnten wir uns den Zusatz „kurzfristig“ bei den variablen Kosten sparen. Zur Verdeutlichung wollen wir ihn aber in den folgenden Ausführungen beibehalten.

Wir bleiben wieder bei unserem Beispiel mit den beiden Faktoren Arbeit und Kapital und unterstellen, dass der Faktor Kapital für eine längere Periode fix ist als der Faktor Arbeit. Wir schreiben die Produktionsfunktion deshalb als:

(3.3-43) $Q = f(L, \bar{C})$.

$\bar{C}$ ist der fixe Bestand des Faktors Kapital. Die kurzfristigen Gesamtkosten

(3.3-44) $K^k = K_f + K_v$

setzen sich zusammen aus den kurzfristigen fixen Kosten

(3.3-45) $K_f = r\bar{C}$

und den kurzfristigen variablen Kosten

(3.3-46) $K_v = lL$, d.h.:

(3.3-47) $K^k = r\bar{C} + lL$.

Kurzfristige Kostengleichung

Dies ist die Definitionsgleichung der kurzfristigen Kosten. Die kurzfristige Kosten*funktion* gibt den Zusammenhang zwischen den Kosten und der Produktmenge unter der Bedingung an, dass ein Faktor – in diesem Fall der Faktor Kapital – fix ist:

Kurzfristige Kostenfunktion

(3.3-48) $K^k = r\bar{C} + lL(\bar{C}, Q)$.

Die eingesetzte Arbeitsmenge ist eine Funktion der gewünschten Produktmenge und der vorhandenen Menge des fixen Faktors. Der Buchstabe L steht hier als Funktionssymbol. Die kurzfristige Kostenfunktion lässt sich auch schreiben als:

(3.3-49) $K^k = K_f(\bar{C}) + K_v(\bar{C}, Q)$.

Durch diese Schreibweise kommt deutlicher zum Ausdruck, dass die kurzfristigen Kosten von der gewünschten Produktmenge und dem vorhandenen Bestand des fixen Faktors abhängig sind.

Kurzfristige Kostenkurven

Die folgenden drei Abbildungen (A 3.3-19, A 3.3-20, A 3.3-21) stellen die Kurven der fixen Kosten, der variablen Kosten und der gesamten kurzfristigen Kosten grafisch dar. Die der Kostenfunktion in diesem Beispiel zugrunde liegende Produktionsfunktion weist zunächst steigende, dann abnehmende Grenzprodukte auf. Bis zu der Produktmenge $\bar{Q}$ steigt der Output bei steigendem Arbeitseinsatz überproportional, danach unterproportional.

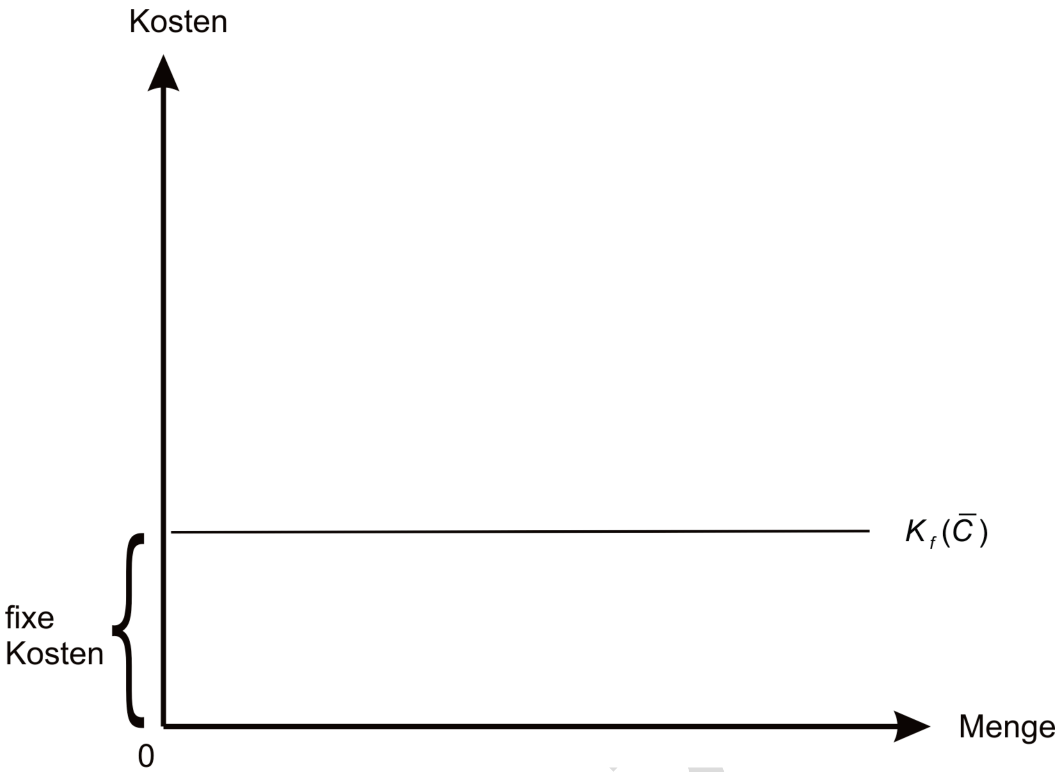


Abbildung (A 3.3-19): Die Kurve der fixen Kosten

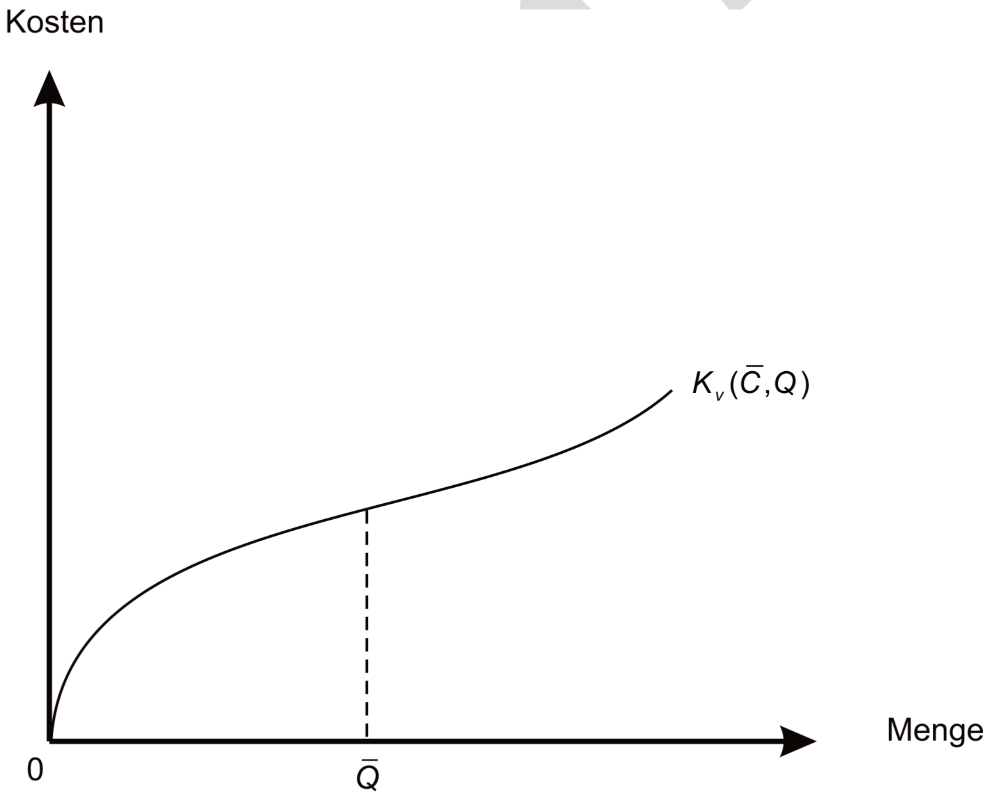


Abbildung (A 3.3-20): Die Kurve der variablen Kosten

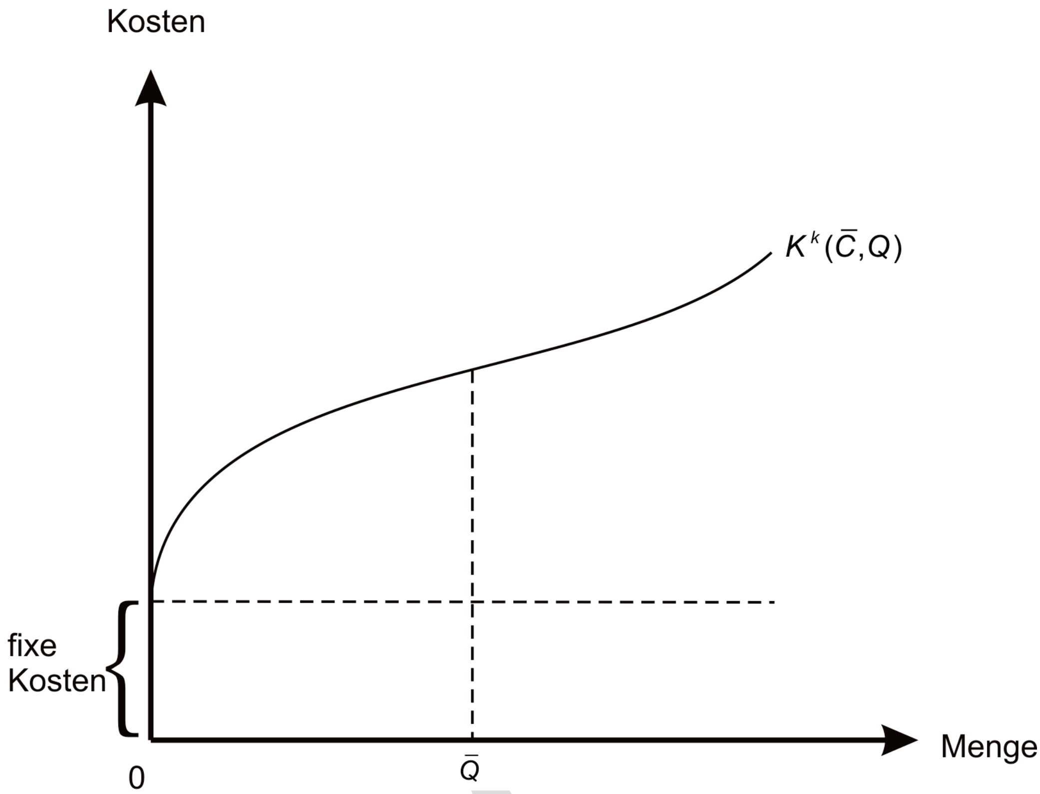


Abbildung (A 3.3-21): Die Kurve der gesamten kurzfristigen Kosten

Übungsaufgabe 30

Begründen sie, warum die kurzfristige Nachfrage nach dem Faktor Arbeit $L(\bar{C},Q)$ unabhängig von den Faktorpreisen ist.

3.3.3.3 Grenzkosten und Durchschnittskosten

kurzfristige Grenzkosten

Wie bereits bei der Behandlung der langfristigen Kostenfunktionen erwähnt wurde, ist für die Produktionsplanung der Firma nicht die absolute Höhe der Kosten entscheidend, sondern die Höhe der Grenzkosten und der Durchschnitts- oder Stückkosten. Dies gilt nicht nur für die langfristigen, sondern auch für die kurzfristigen Kosten. Mathematisch können wir die kurzfristigen Grenzkosten als partielle Ableitung einer kurzfristigen Gesamtkostenfunktion nach der Produktmenge ausdrücken:

(3.3-50) $$GK^k = \frac{\partial K^k}{\partial Q} = K^{k\prime}(Q).$$

Grafisch gesehen stellen die *kurzfristigen Grenzkosten* die Tangente an die kurzfristige Gesamtkostenkurve dar.

Kurzfristige Durchschnittskosten

Die *kurzfristigen Durchschnittskosten* sind der Quotient aus den kurzfristigen Kosten und der Produktmenge. Es kann sich bei den kurzfristigen Kosten um die Gesamtkosten, die fixen oder die variablen Kosten handeln. Entsprechend erhält man die durchschnittlichen Gesamtkosten (oder Stückkosten), die durchschnittlichen variablen oder die durchschnittlichen fixen Kosten:

(3.3-51) $$DK^k = \frac{K^k}{Q},\ DK_v^k = \frac{K_v^k}{Q},\ DK_f^k = \frac{K_f^k}{Q}.$$

Grafische Ableitung kurzfristiger Kostenkurven

Weiter oben, in Abbildung (A 3.3-10), ist die grafische Ableitung der Grenz- und Durchschnittskostenkurven einer langfristigen Kostenkurve dargestellt worden, welche auf einer Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen basiert. In der jetzt folgenden Abbildung (A 3.3-22) wird dargestellt, wie sich kurzfristige Durchschnitts- und Grenzkostenkurven aus einer kurzfristigen Gesamtkostenkurve grafisch ableiten lassen. Die Produktionsfunktion, welche der kurzfristigen Gesamtkostenkurve zu Grunde liegt, weist zunächst steigende, dann sinkende Ertragszuwächse auf. Die langfristige Kostenkurve in Abbildung (A 3.3-10) und die kurzfristige Kostenkurve in Abbildung (A 3.3-22) sehen ganz ähnlich aus, ihnen liegen aber unterschiedliche Faktormengenänderungen zu Grunde. *Die langfristige Kostenkurve entsteht dadurch, dass alle Faktoren variiert werden, und zwar derart, dass das Faktoreinsatzverhältnis stets kostenminimal ist. Die kurzfristige Kostenfunktion entsteht dadurch, dass mindestens ein Faktor konstant bleibt, während der bzw. die anderen Faktoren variiert werden*. Existieren mehrere variable Faktoren, so wird eine gewinnmaximierende Firma zwischen den variablen Faktoren ein kostenminimales Einsatzverhältnis wählen. In dem von uns betrachteten Fall mit nur zwei Faktoren existiert nur ein einziger variabler Faktor, so dass für die Firma keine Wahlmöglichkeit und damit kein Entscheidungsproblem bezüglich des Einsatzes der variablen Faktoren besteht.

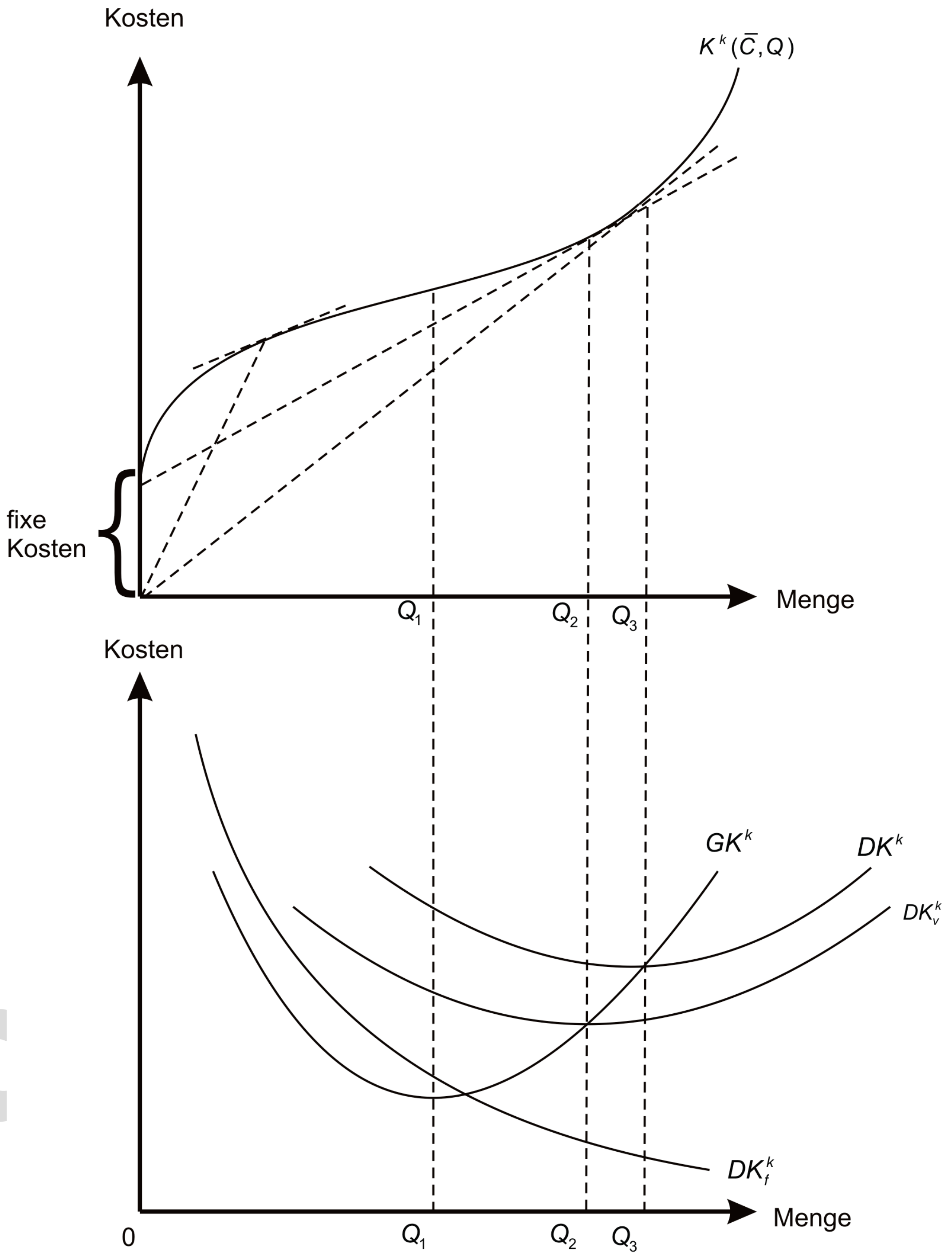


Abbildung (A 3.3-22): Ableitung der kurzfristigen Durchschnitts- und Grenzkostenkurven aus einer kurzfristigen Gesamtkostenkurve

Im unteren Teil der Abbildung (A 3.3-22) sind die Grenzkostenkurve, die Kurve der variablen Durchschnittskosten, die Kurve der gesamten Durchschnittskosten und die Kurve der durchschnittlichen fixen Kosten eingezeichnet, welche sich aus der im oberen Teil der Abbildung eingezeichneten kurzfristigen Gesamtkostenkurve ableiten lassen.

Kurzfristige Gesamtkostenkurven

Lässt man gedanklich eine Tangente an der Gesamtkostenkurve entlangwandern, so sieht man, dass die Steigung der Tangente bis zum Wendepunkt (bei der Produktmenge Q_1) abnimmt und danach ansteigt. Da die Tangente an die Gesamtkostenkurve die Grenzkosten angibt, erhält man auf diese Weise die kurzfristige Grenzkostenkurve GK^k im unteren Teil von Abbildung (A 3.3-22).

Schnittpunkt von Grenzkosten- und variabler Durchschnittskostenkurve

Lässt man einen Fahrstrahl von dem Ordinatenabschnitt aus, der die Höhe der fixen Kosten angibt, an der Gesamtkostenkurve entlangwandern, so erkennt man, dass die Steigung des Fahrstrahls bis zu dem Punkt sinkt, an dem der Fahrstrahl die Kostenkurve tangiert. Dies ist bei der Produktmenge Q_2 der Fall. Die Steigung des Fahrstrahls ist das Verhältnis der variablen Kosten zur Produktmenge, also gleich den variablen Durchschnittskosten. Diese sind bei der Produktmenge Q_2 minimal. Gleichzeitig kann man erkennen, dass die Steigung der Tangente an die Gesamtkostenkurve bis zur Menge Q_2 kleiner ist als die Steigung des Fahrstrahls. Die Grenzkosten sind also bis zu diesem Punkt kleiner als die variablen Durchschnittskosten. Die Grenzkostenkurve liegt unterhalb der Kurve der variablen Durchschnittskosten. Bei der Menge Q_2 wird der Fahrstrahl zur Tangente. Dann sind Grenzkosten und variable Durchschnittskosten gleich hoch. Rechts von Q_2 wird die Tangente steiler als der Fahrstrahl. Die Grenzkosten sind jetzt höher als die variablen Durchschnittskosten: Die kurzfristige Grenzkostenkostenkurve schneidet die Kurve der *variablen* Durchschnittskosten in deren Minimum.

Kurve der gesamten kurzfristigen Durchschnittskosten

Auf analoge Weise erhalten wir die Kurve der gesamten Durchschnittskosten. Hierfür müssen wir einen Fahrstrahl vom Ursprung aus an der Gesamtkostenkurve entlangwandern lassen. Er tangiert die Gesamtkostenkurve bei der Produktmenge Q_3. In diesem Punkt sind also Grenzkosten und gesamte Durchschnittskosten gleich hoch. Links von Q_3 sind die Grenzkosten niedriger, rechts von Q_3 sind sie höher als die gesamten Durchschnittskosten: Die Grenzkostenkurve schneidet auch die Kurve der *gesamten* Durchschnittskosten in deren Minimum.

Die Kurve der variablen Durchschnittskosten liegt stets unterhalb der Kurve der gesamten Durchschnittskosten, da sie ja nur einen Teil der gesamten Kosten repräsentiert, nämlich die variablen. In der Abbildung erkennt man dies daran, dass der Fahrstrahl durch den Ursprung für jede Produktmenge steiler ist als der Fahrstrahl durch den Ordinatenabschnitt in Höhe der Fixkosten.

Durchschnittliche fixe Kosten

Über den Verlauf der durchschnittlichen fixen Kosten lässt sich Folgendes sagen: Diese Kosten sind bei einer Produktmenge von null unendlich, sinken mit steigender Produktmenge, sind stets kleiner als die durchschnittlichen Gesamtkosten und streben gegen null, wenn die Produktmenge gegen unendlich strebt. Bei welcher Produktmenge sie die Grenzkostenkurve und die Kurve der variablen Durchschnittskosten schneiden, lässt sich dagegen ohne Kenntnis des genauen Verlaufs der Gesamtkostenkurve nicht sagen.

Formale Ableitung des Minimums der gesamten Durchschnittskosten

Analytisch ergibt sich das Minimum der Kurve der gesamten kurzfristigen Durchschnittskosten durch Differenziation der Funktion der gesamten kurzfristigen Durchschnittskosten nach Q, analog zu unserem Vorgehen bei den langfristigen Kostenfunktionen:

$$(3.3\text{-}52)\qquad \frac{\partial \frac{K^k}{Q}}{\partial Q} = \frac{Q\frac{\partial K^k}{\partial Q} - K^k}{Q^2} = 0\,.$$

Die Bedingung 2. Ordnung für ein Minimum lautet:[45]

$$(3.3\text{-}53)\qquad DK^k_{QQ} = \frac{\partial^2(\frac{K^k}{Q})}{\partial Q^2} = \frac{K^k_{QQ}}{Q} > 0\,.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die Kostenkurve konvex ist, die Produktion also im Bereich sinkender Ertragszuwächse erfolgt.

Aus der Bedingung 1. Ordnung folgt:

$$(3.3\text{-}54)\qquad \frac{\partial K^k}{\partial Q} = \frac{K^k}{Q}\,,$$

also Grenzkosten gleich Durchschnittskosten. Die Kurve der gesamten Durchschnittskosten hat ihr Minimum bei jener Produktmenge, bei der die Grenzkosten gleich den Durchschnittskosten sind. Entsprechend erhält man für das Minimum der variablen Durchschnittskosten:

$$(3.3\text{-}55)\qquad \frac{\partial K^k}{\partial Q} = \frac{\partial K^k_v}{\partial Q} = \frac{K^k_v}{Q}\,.$$

Die Kurve der variablen Durchschnittskosten hat ihr Minimum bei jener Produktmenge, bei der die Grenzkosten gleich den variablen Durchschnittskosten sind.

Wir haben die verschiedenen Kostenfunktionen hier für eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion abgeleitet. Auf gleiche Weise lassen sich die verschiedenen Kostenfunktionen für eine neoklassische Produktionsfunktion ableiten.

Zusammenstellung wichtiger Kostenbegriffe

Wir sehen also, dass man sowohl bei den Gesamtkosten, als auch bei den Grenzkosten, als auch bei den Durchschnittskosten zwischen kurz- und langfristigen Kosten (und damit Kostenfunktionen und Kostenkurven) unterscheiden muss.

45 $\frac{\partial^2(\frac{K^k}{Q})}{\partial Q^2} = \frac{Q^2\left[K^k_Q + QK^k_{QQ} - K^k_Q\right] - 2Q\left[QK^k - K\right]}{Q^4} > 0$. Daraus folgt:

$\frac{\partial^2(\frac{K^k}{Q})}{\partial Q^2} = \frac{Q^3 K^k_{QQ}}{Q^4} = \frac{K^k_{QQ}}{Q} > 0$, da $QK^k - K = 0$ wegen der Bedingung 1. Ordnung.

Dadurch erhält man eine ganze Reihe ähnlich klingender Kostenbegriffe, die man leicht verwechseln kann. Zur Verdeutlichung sind deshalb in der folgenden Tabelle noch einmal alle Symbole aufgeführt, welche man unterscheiden muss, wenn man die Kostenfunktionen nach den Kriterien der Fristigkeit (lang, kurz), der Faktorvariabilität (variabel, fix) und der Bezugnahme auf die Produktmenge (absolut, durchschnittlich, marginal) differenzieren will:

	Absolute Kosten		Durchschnittskosten		Grenzkosten	
	kurz	lang	kurz	lang	kurz	lang
fix	K_f^k	_	DK_f^k	_	_	_
variabel	K_v^k	_	DK_v^k	_	_	_
gesamt	K^k	K	DK^k	DK	GK^k	GK

Tabelle (T 3.3-1): Symbole zur Unterscheidung von Kostenfunktionen nach Fristigkeit, Faktorvariabilität und Bezugnahme auf die Produktmenge

Übungsaufgabe 31

Gegeben sei eine neoklassische Produktionsfunktion. Leiten Sie aus der kurzfristigen Gesamtkostenkurve auf grafischem Wege die zugehörigen Kurven der gesamten Durchschnittskosten, der variablen Durchschnittskosten, der fixen Durchschnittskosten und der Grenzkosten ab.

3.3.3.4 Die Auswirkungen von Faktorpreisänderungen auf die Lage der kurzfristigen Kostenkurven: Analytische Darstellung am Beispiel der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

komparative Statik für kurzfristige Kostenfunktionen

Analog zu unserem Vorgehen bei der Analyse der langfristigen Kostenfunktionen wollen wir jetzt danach fragen, wie sich die Lage der kurzfristigen Kostenkurven ändert, wenn sich die Faktorpreise ändern. Zur Erleichterung des Verständnisses legen wir dabei eine explizite kurzfristige Kostenfunktion zu Grunde, nämlich jene, die sich aus der Cobb-Douglas-Funktion ergibt.

Die kurzfristige Gesamtkostenfunktion der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

(3.3-56) $Q = L^{\alpha} C^{\beta}$ mit $0 < \alpha, \beta < 1$ und $\alpha + \beta = 1$

lautet:[46]

(3.3-57) $K^k = lQ^{\frac{1}{\alpha}} \overline{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} + r\overline{C}$.

46 $Q = L^{\alpha} C^{\beta} \Rightarrow L^{\alpha} = Q\overline{C}^{-\beta} \Rightarrow L = Q^{\frac{1}{\alpha}} \overline{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} \Rightarrow K^k = lQ^{\frac{1}{\alpha}} \overline{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} + r\overline{C}$.

Der Zusammenhang zwischen den kurzfristigen Kosten und der Produktmenge wird durch die Faktorpreise, die Produktionselastizitäten und die Einsatzmenge des fixen Faktors bestimmt. Wir interessieren uns nur für die Auswirkungen von Änderungen der Faktorpreise, da nur diese als (weitgehend) exogen für die Firma betrachtet werden können. Wir wollen die Auswirkungen auf fünf verschiedene Kostenfunktionen untersuchen, so dass sich die in der folgenden Tabelle aufgeführten zehn Fälle ergeben:

Fallunterscheidungen

Kostenfunktionen	Preis des variablen Faktors	Preis des fixen Faktors
	l	r
K^k	(1)	(2)
DK^k	(3)	(4)
DK_v^k	(5)	(6)
DK_f^k	(7)	(8)
GK^k	(9)	(10)

Tabelle (T 3.3-2): Fallunterscheidungen zu Verlagerungen der kurzfristigen Kostenkurven in Abhängigkeit von Änderungen der Faktorpreise

Die Wirkung einer Änderung des Preises des variablen Faktors auf die Funktion der kurzfristigen Gesamtkosten (Fall 1) ergibt sich aus:

Fall 1

(3.3-58) $$\frac{\partial K^k}{\partial l} = Q^{\frac{1}{\alpha}} \bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} > 0 .$$

Die Gesamtkosten steigen, wenn der Preis des Faktors Arbeit steigt. Die Kostenkurve verschiebt sich nach oben, wobei der Abstand zur ursprünglichen Kostenkurve mit steigender Produktmenge zunimmt. Entsprechend ergibt sich die Wirkung einer Änderung des Preises des fixen Faktors (Fall 2) aus:

Fall 2

(3.3-59) $$\frac{\partial K^k}{\partial r} = \bar{C} > 0 .$$

Die Gesamtkosten steigen, wenn der Preis des Faktors Kapital steigt. Der Kostenanstieg ist proportional zum Preisanstieg. Die Kostenkurve verschiebt sich parallel nach oben.

Die Wirkung einer Faktorpreisänderung auf die kurzfristigen Durchschnittskosten ergibt sich aus:

Fälle 3 und 4

(3.3-60) $$DK^k = \frac{K^k}{Q} = lQ^{\frac{1}{\alpha}-1} \bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} + \frac{r\bar{C}}{Q} .$$

Ein Faktorpreisanstieg führt zu höheren Durchschnittskosten. Wenn der Preis l des variablen Faktors Arbeit steigt (Fall 3), wächst die Differenz zwischen den Durchschnittskostenkurven mit steigender Produktmenge; wenn der Preis des fixen Faktors steigt (Fall 4), sinkt die Differenz.

Das Minimum der Durchschnittskosten liegt bei:[47]

(3.3-61) $$Q^{*} = \left(\frac{r}{l}\right)^{\alpha} \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha} \bar{C}^{\alpha+\beta}.$$

Wenn der Preis des fixen Faktors steigt, wandert das Minimum der Durchschnittskosten nach rechts, wenn der Preis des variablen Faktors steigt, wandert es nach links.

Für die Fälle 5 und 6 gilt

Fälle 5 und 6

$$DK_v^k = lQ^{\frac{1}{\alpha}-1}\bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}}.$$

Eine Änderung des Preises des fixen Faktors r hat demnach keine Auswirkungen auf die variablen Durchschnittskosten.

Wenn der Preis des variablen Faktors l steigt, wächst die Differenz zwischen den Durchschnittskostenkurven mit steigender Produktmenge. Es gilt

$$\frac{\partial DK_v^k}{\partial Q} = l\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)Q^{\frac{1}{\alpha}-2}\bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} > 0.$$

DK_v^k ist streng monoton steigend.

Für die durchschnittlichen Fixkosten gilt:

Fälle 7 und 8

(3.3-62) $$\frac{K_f^k}{Q} = \frac{r\bar{C}}{Q}.$$

Änderungen des Preises des variablen Faktors (Fall 7) haben keinen Einfluss auf die Funktion. Ein Anstieg des Preises des fixen Faktors (Fall 8) führt zu einem Anstieg der durchschnittlichen fixen Kosten. Dieser Effekt schwächt sich mit steigender Produktmenge ab.

Die kurzfristige Grenzkostenkurve lautet:

47 $\frac{\partial \frac{K^k}{Q}}{\partial Q} = l\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)Q^{\frac{1}{\alpha}-2}\bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} - \frac{r\bar{C}}{Q^2} = 0 \Rightarrow l\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)Q^{\frac{1}{\alpha}}\bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} = r\bar{C} \Rightarrow$

$l\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)Q^{\frac{1}{\alpha}} = r\bar{C}^{1+\frac{\beta}{\alpha}} \Rightarrow Q^{\frac{1}{\alpha}} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{r}{l}\bar{C}^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} \Rightarrow Q = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{\alpha}\left(\frac{r}{l}\right)^{\alpha}\bar{C}^{\alpha+\beta}.$

Fall 9

(3.3-63) $$GK^k = \frac{\partial K^k}{\partial Q} = \frac{1}{\alpha} l Q^{\frac{1}{\alpha}-1} \bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} .$$

Die kurzfristigen Grenzkosten steigen, wenn der Preis des variablen Faktors steigt (Fall 9). Die Grenzkostenkurve verschiebt sich nach oben, wobei der Abstand zur ursprünglichen Kostenkurve mit steigender Produktmenge größer wird. Der Preis des fixen Faktors (Fall 10) hat keinen Einfluss auf die Lage der Grenzkostenkurve.

Übungsaufgabe 32

Ist eine größere Einsatzmenge des fixen Faktors ceteris paribus mit höheren oder niedrigeren kurzfristigen Gesamtkosten verbunden?

3.3.3.5 Die Auswirkungen von Faktorpreisänderungen auf die Lage der kurzfristigen Kostenkurven: Grafische Darstellung

Auf Grund der vorausgegangenen Ableitungen können wir die Verschiebungen der Kostenkurven, die sich bei Änderungen der Faktorpreise ergeben, jetzt grafisch darstellen. Aus Platzgründen beschränken wir uns auf eine Darstellung der Fälle 1-4 sowie 9.

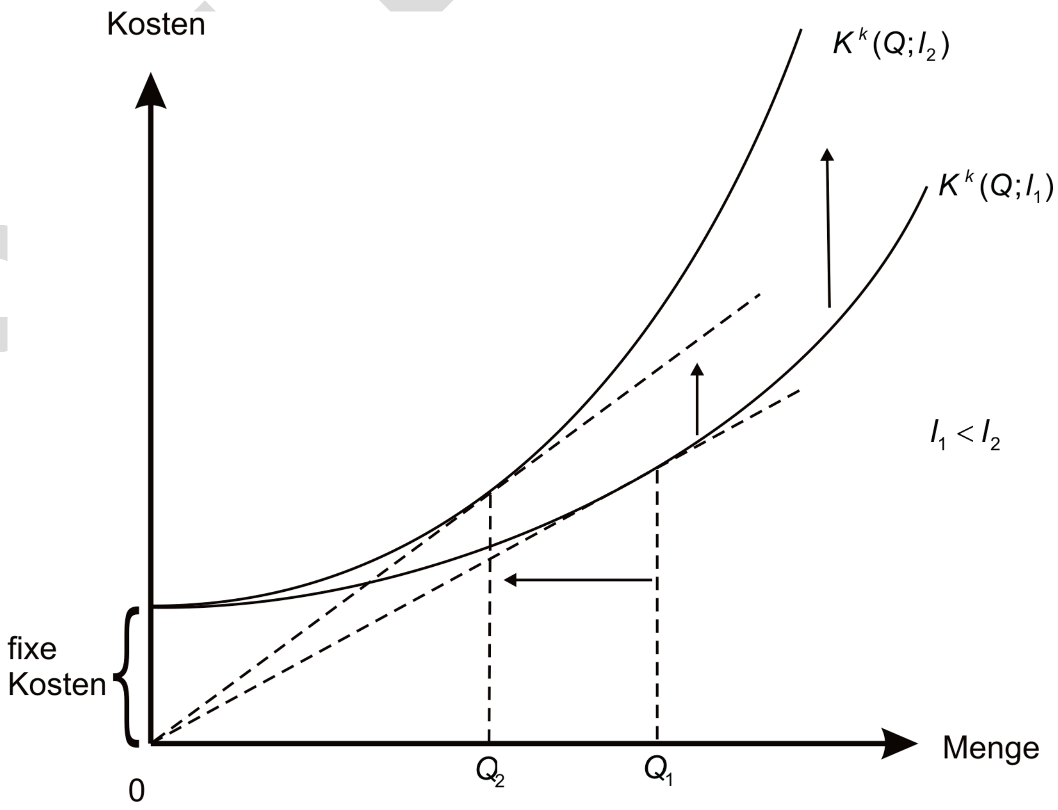


Abbildung (A 3.3-23): Fall 1: Verschiebung der kurzfristigen Gesamtkostenkurve einer neoklassischen Produktionsfunktion auf Grund eines Preisanstiegs des variablen Faktors

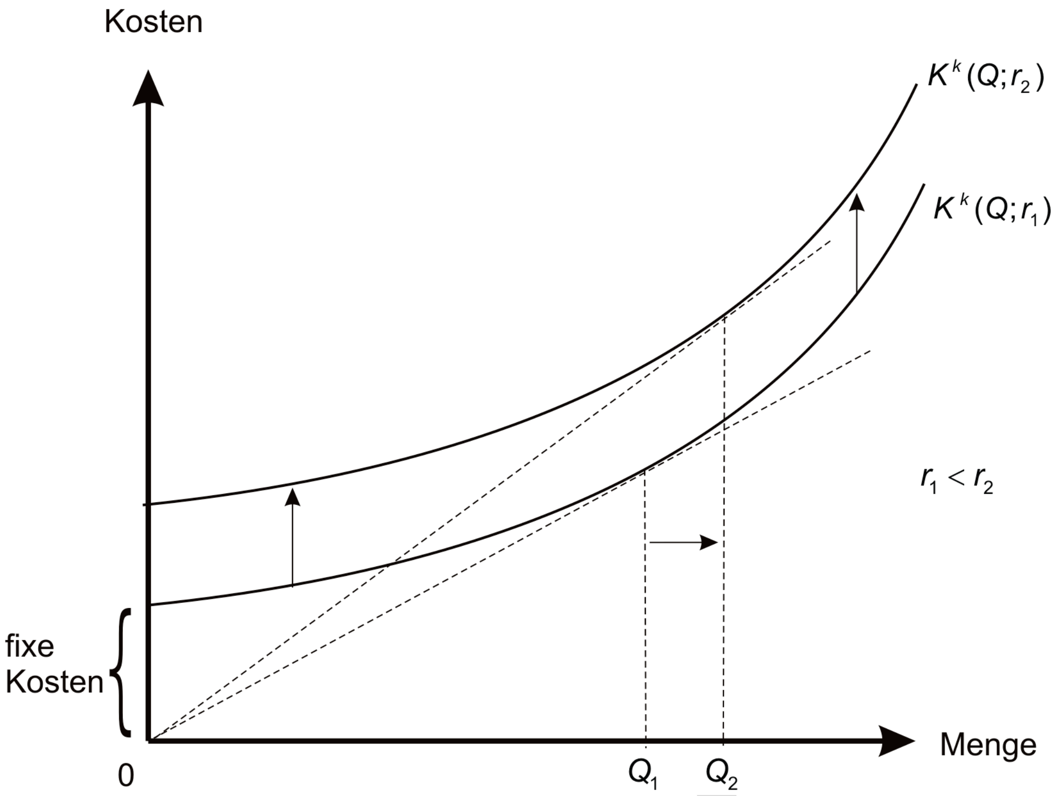


Abbildung (A 3.3-24): Fall 2: Verschiebung der kurzfristigen Gesamtkostenkurve einer neoklassischen Produktionsfunktion auf Grund eines Preisanstiegs des fixen Faktors

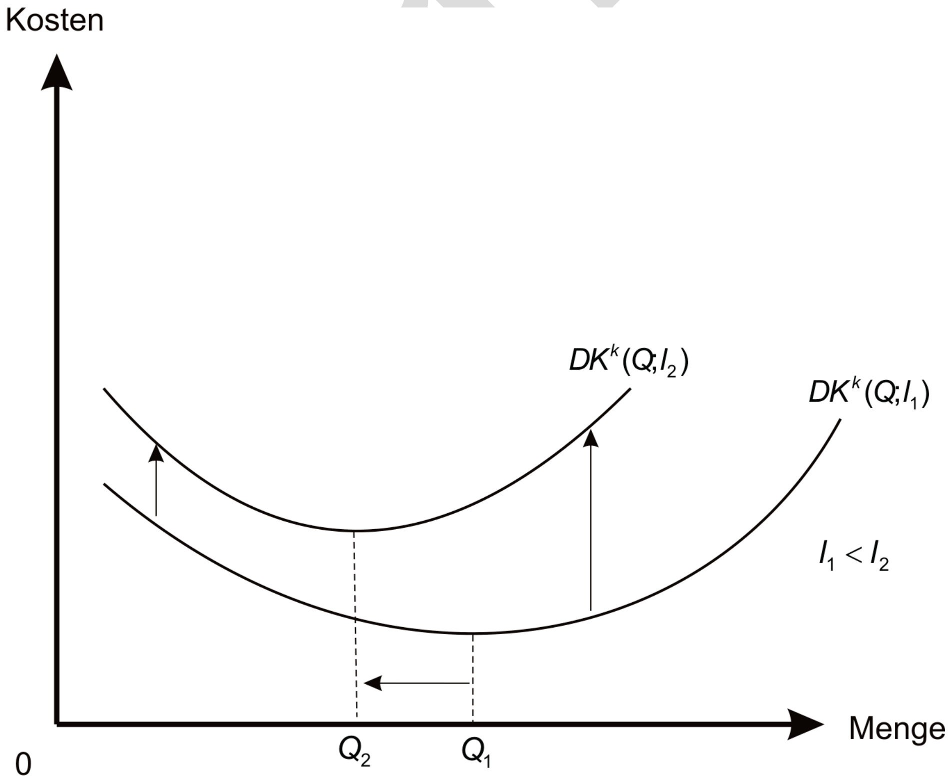


Abbildung (A 3.3-25): Fall 3: Verschiebung der kurzfristigen gesamten Durchschnittskostenkurve einer neoklassischen Produktionsfunktion auf Grund eines Preisanstiegs des variablen Faktors

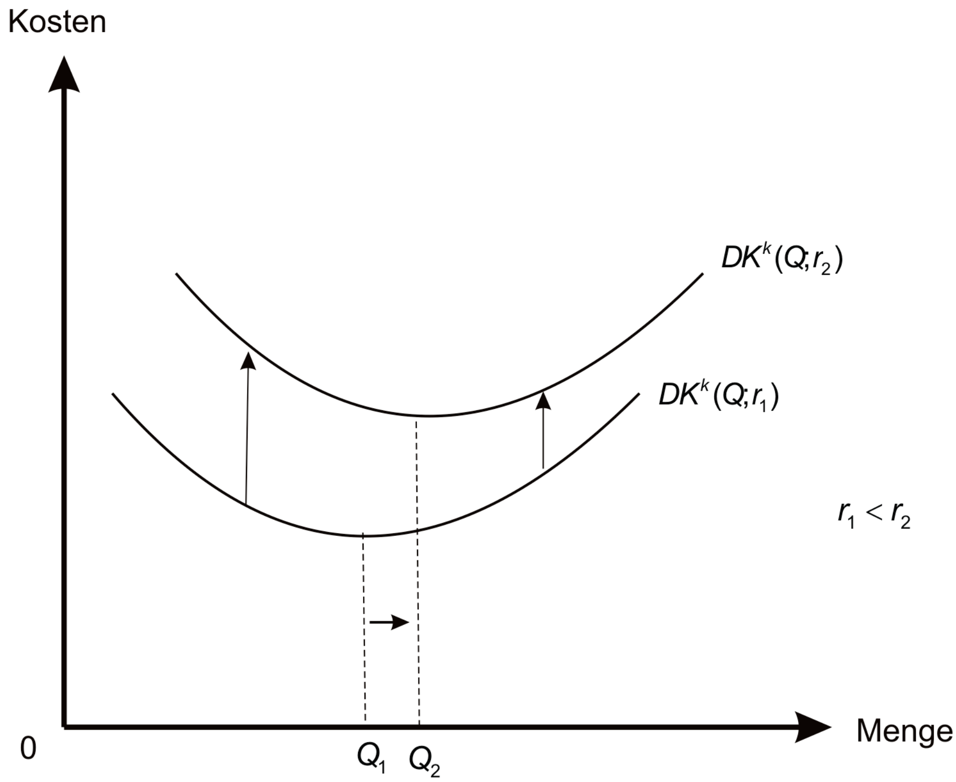


Abbildung (A 3.3-26): Fall 4: Verschiebung der kurzfristigen gesamten Durchschnittskostenkurve einer neoklassischen Produktionsfunktion auf Grund eines Preisanstiegs des fixen Faktors

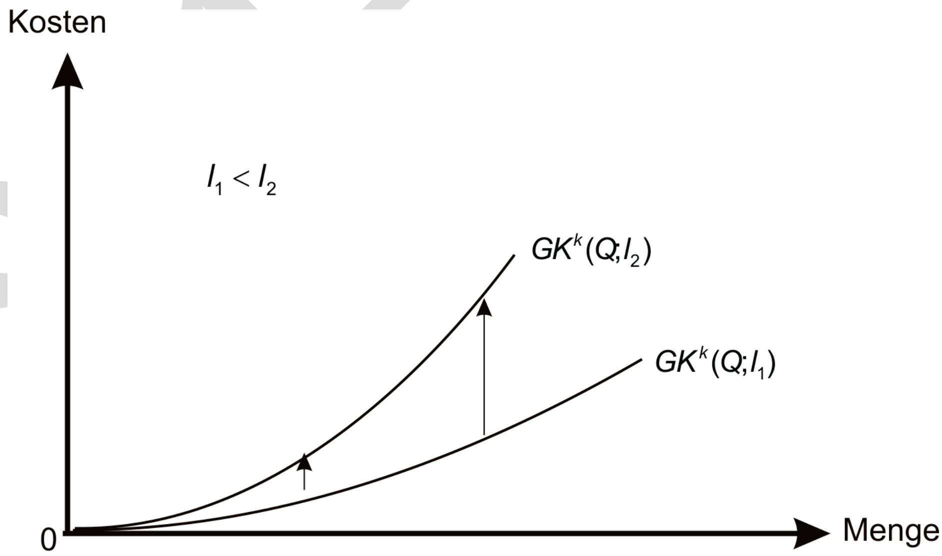


Abbildung (A 3.3-27): Fall 9: Verschiebung der kurzfristigen Grenzkostenkurve einer neoklassischen Produktionsfunktion auf Grund eines Preisanstiegs des variablen Faktors

Übungsaufgabe 33

Stellen Sie die Auswirkungen

a) einer Erhöhung des Preises des variablen Faktors auf die kurzfristigen durchschnittlichen Fixkosten,

b) einer Erhöhung des Preises des fixen Faktors auf die kurzfristigen durchschnittlichen variablen Kosten

dar.

3.3.4. Empirische Untersuchungen zu kurz- und langfristigen Kostenfunktionen

Wettbewerbspolitische Implikationen sinkender Durchschnittskosten

Der Verlauf der Kostenfunktionen hat eine erhebliche wirtschaftspolitische Bedeutung, wie wir in Kurseinheit 5 „Preisbildung im Monopol“ sehen werden. Erfolgt die Produktion im Bereich sinkender Durchschnittskosten, so kann ein einziges großes Unternehmen den Markt zu niedrigeren Kosten bedienen, als eine Vielzahl kleinerer Unternehmen dies könnte. Damit besteht aber die Gefahr, dass die Funktionsfähigkeit des Wettbewerbs verloren geht. Für die Marktaufsichtsbehörde besteht dann das Problem darin, zwischen den Vor- und Nachteilen einer Wettbewerbsbeeinträchtigung abzuwägen und entsprechende Maßnahmen zu ergreifen. Firmenzusammenschlüsse werden in aller Regel von den beteiligten Unternehmen mit dem Vorliegen sinkender Durchschnittskosten begründet. Ob dieser Fall tatsächlich vorliegt oder nur als vorgeschobene Begründung für eine Fusion zur Reduzierung des Wettbewerbs verwendet wird, ließe sich an Hand der Kostenfunktionen beurteilen, wären diese bekannt. Wir hatten auf eine derartige wettbewerbspolitische Implikation bereits bei der Behandlung der Produktionsfunktionen hingewiesen. Es geht letzten Endes um die Frage, ob bei der Produktion steigende Skalenerträge auftreten oder nicht.

Empirische Ermittlung von Kosten- und Produktionsfunktionen

Produktionsfunktionen lassen sich aber im Allgemeinen schwerer ermitteln als Kostenfunktionen, da das betriebliche Rechnungswesen eher in der Lage ist, Kostendaten zur Verfügung zu stellen als Daten über die tatsächlich eingesetzten Faktormengen. Faktoren, die fix sind, werden nämlich üblicherweise nach ihrem Leistungspotential, nicht aber nach ihrer tatsächlich erbrachten Leistung entlohnt. Denken Sie z.B. an Arbeitskräfte, die ein festes Gehalt pro Periode beziehen oder an Fabrikationsstätten und Maschinen, bei denen die abnutzungsbedingten und damit variablen Kosten nur einen kleinen Teil ihrer Gesamtkosten ausmachen. Wir hatten gesehen, wie sich Kostenfunktionen aus Produktionsfunktionen ableiten lassen. Umgekehrt lassen sich Produktions- aus Kostenfunktionen ableiten. *Kosten- und Produktionsfunktionen sind sozusagen zwei Seiten einer Medaille*. Ein spezieller Zweig der *Dualitätstheorie* beschäftigt sich mit den diesbezüglichen Fragen.

Probleme bei der Schätzung von Kostenfunktionen

Aber auch bei der Schätzung von Kostenfunktionen treten spezifische Probleme auf:

1. Den Kostendaten liegt im Allgemeinen der buchhalterische und nicht der ökonomische Kostenbegriff zu Grunde. Die Opportunitätskosten der unternehmenseigenen Faktoren (eigenes Sachkapital, Arbeitsleistung des Unterneh-

mers) werden dann nicht berücksichtigt. Die Produktivität der erfassten Faktorleistungen wird überschätzt.

2. Die statistische Ermittlung des Zusammenhangs zwischen Kosten und Produktmengen erfolgt entweder mit Hilfe einer *Zeitreihen-* oder einer *Querschnittsanalyse*. Bei der Zeitreihenanalyse werden die in einem bestimmten Zeitraum beobachteten Kosten und Produktmengen einer Firma oder einer Branche zueinander in Beziehung gesetzt. Wenn sich in diesem Zeitraum die Faktorpreise verändert haben, kommt es zur Fehlschätzung. Sind die Faktorpreise gestiegen und wird dies nicht berücksichtigt, erscheinen die Kosten zu hoch, die Faktorproduktivität zu niedrig. Gegebenen Faktoreinsatzmengen werden zu geringe Produktmengen zugeordnet. Um dieses Problem zu umgehen, werden Querschnittsanalysen durchgeführt. Hierbei werden die Kosten und Produktionsdaten unterschiedlich großer Unternehmen einer Branche für ein und dieselbe Periode zueinander in Beziehung gesetzt. Diese Methode kann jedoch nur dann die gewünschte Information über die produktionstechnischen Beziehungen liefern, wenn die Unternehmen annähernd die gleiche Produktionsfunktion verwenden. Ansonsten erhielte man eine *Branchenproduktionsfunktion*, deren Eigenschaften von den Marktanteilen der einbezogenen Unternehmen abhängig wäre. Gleiche Produktionsfunktionen bei unterschiedlich großen Unternehmen sind aber eher unwahrscheinlich.

3. Wir hatten gesehen, dass die Durchschnittskostenkurven einer linearhomogenen neoklassischen Produktionsfunktion in kurzer Frist einen U-förmigen Verlauf, in langer Frist aber einen linearen Verlauf mit einem Anstieg von null aufweisen. Wirtschaftspolitische Konsequenzen lassen sich aus Kostenkurven deshalb erst dann ziehen, wenn zwischen kurz- und langfristigen Kostenkurven unterschieden wird. Aus den Kostendaten ist aber nicht ohne weiteres ersichtlich, ob es sich hierbei um kurzfristige oder langfristige Kosten handelt.

Beobachtungen zu den kurzfristigen Kostenkurven deuten darauf hin, dass sowohl die Grenzkosten als auch die Durchschnittskosten nur geringfügig auf Schwankungen der Produktmenge reagieren. Das Schwanken der Outputpreise wäre dann eher auf Schwankungen der Gewinnaufschläge als auf Schwankungen der Kosten zurückzuführen.

Typischer Verlauf langfristiger Kostenfunktionen

Bei der Schätzung langfristiger Kostenkurven ergibt sich im Allgemeinen der in Abbildung (A 3.3-28) dargestellte Verlauf der Durchschnittskosten. Die Durchschnittskosten fallen anfänglich mehr oder minder stark und bleiben von einer bestimmten Menge $\bar{Q}$ an konstant.

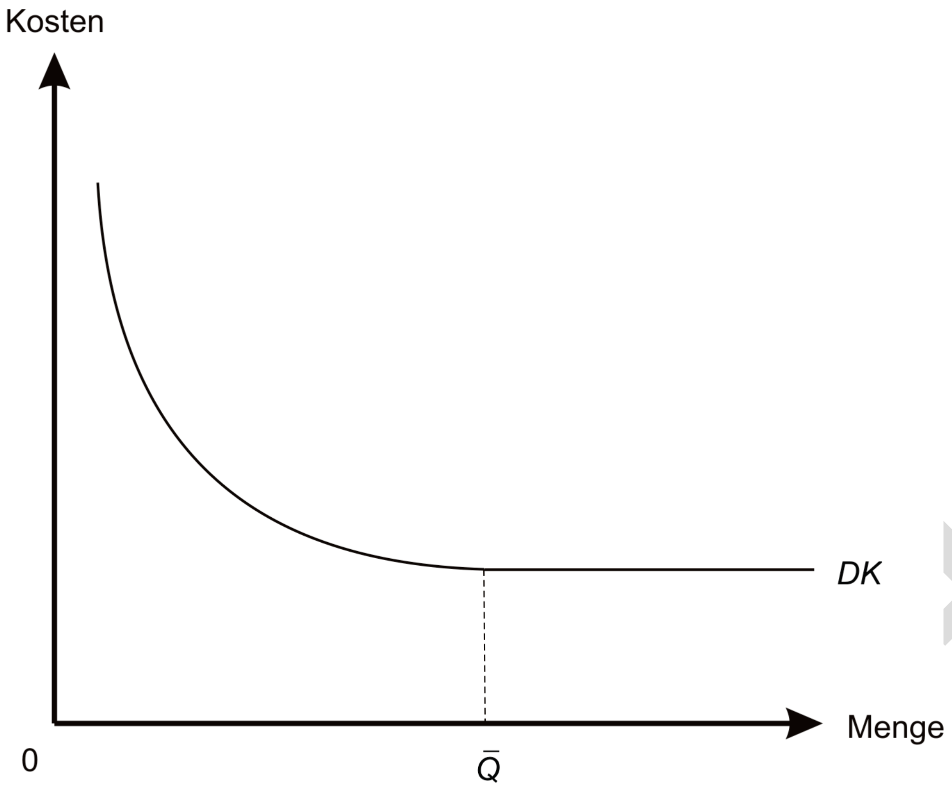


Abbildung (A 3.3-28): Typischer Verlauf einer langfristigen Durchschnittskostenkurve

Wenn die empirisch ermittelten Kostenkurven das Minimum der Durchschnittskosten bereits bei relativ kleinen Produktmengen ereichen, wenn der Wert $\bar{Q}$ gemessen an der gesamten erzeugten Produktmenge also relativ klein ist, geht man von konstanten Skalenerträgen aus. Wenn die empirisch ermittelten Kostenkurven das Minimum der Durchschnittskosten dagegen erst bei relativ großen Produktmengen ereichen, nimmt man steigende Skalenerträge an. Im Extremfall ist $\bar{Q}$ so groß, dass diese Menge ausreicht, um den gesamten Markt zu versorgen.

Übungsaufgabe 34

Zeichnen Sie eine kurzfristige Gesamtkostenkurve einschließlich der zugehörigen Durchschnitts- und Grenzkostenkurve, welche den empirisch festgestellten Sachverhalt wiedergibt, dass Schwankungen der Produktmenge keinen wesentlichen Einfluss auf die Höhe der kurzfristigen Grenz- und Durchschnittskosten haben.

3.3.5. Zusammenfassung

Obgleich streng genommen bereits das Konzept der Produktionsfunktion eine ökonomische Entscheidung impliziert, nämlich die Entscheidung für eine technisch effiziente Produktion, tritt das ökonomische Entscheidungsproblem in aller Deutlichkeit erst beim Übergang vom Konzept der Produktionsfunktion zu dem Konzept der Kostenfunktion hervor. Die Kostenfunktion beschreibt den Zusammenhang zwischen den Kosten der Produktion und der Produktmenge unter der Bedingung, dass eine kostenminimale Kombination der Faktoreinsatzmengen gewählt worden ist. Wir haben diese *Minimalkostenkombination* zunächst grafisch bestimmt, daraus den Expansionspfad und schließlich die Kostenkurve abgeleitet. Hierbei wurden alle Faktoren als veränderbar betrachtet. Da eine derartige Änderung der Einsatzmengen in der ökonomischen Wirklichkeit Zeit erfordert, bezeichnet man eine solche Kostenkurve und die ihr zu Grunde liegende Kostenfunktion als langfristig. Die Eigenschaften der Gesamtkostenfunktion und der aus ihr abgeleiteten Durchschnitts- und Grenzkostenfunktionen werden durch die Eigenschaften der zu Grunde liegenden Produktionsfunktion bestimmt. Zur Verdeutlichung dieser Zusammenhänge haben wir eine Kostenfunktion aus einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion abgeleitet und die Eigenschaften der Kostenfunktion untersucht. Ausgehend von diesen Erkenntnissen konnten wir schließlich in einer komparativ-statischen Analyse die Auswirkungen von Faktorpreisänderungen auf die Verläufe der Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenkurven ermitteln.

Ist der Zeitraum zwischen dem Zeitpunkt der Produktionsentscheidung und dem des Produktionsbeginns kurz, so sind in der Regel nicht alle Faktoreinsatzmengen veränderbar. Als kurze Frist haben wir jenen Zeitraum bezeichnet, in welchem die Einsatzmenge mindestens eines Faktors nicht verändert werden kann. Die Kostenminimierung muss dann unter dieser zusätzlichen Restriktion erfolgen. Wir haben unsere Analyse auf einen Zwei-Faktoren-Fall beschränkt: Der Faktor Kapital wurde als kurzfristig fix, der Faktor Arbeit als kurzfristig variabel angesehen. Analog zur Behandlung der langfristigen Kostenfunktionen haben wir die Eigenschaften kurzfristiger Gesamt-, Durchschnitts- und Grenzkostenfunktionen in Abhängigkeit von den zu Grunde liegenden Produktionsfunktionen untersucht und komparativ-statische Analysen der Auswirkungen von Faktorpreisänderungen durchgeführt. Auch hier haben wir zur Illustration eine Cobb-Douglas-Funktion herangezogen. Unter wirtschaftspolitischen Gesichtspunkten ist insbesondere der Verlauf der Durchschnittskostenkurven von Interesse. Erreichen sie erst bei hohen Marktanteilen ihr Minimum, so besteht die Gefahr der Monopolisierung eines Marktes.

3.4. Das Güterangebot einer Firma

Ableitung der gewinnmaximalen Produktmenge

Bei der Ableitung der kurz- und langfristigen Kostenfunktionen haben wir unsere Überlegungen für alternative Produktionsmengen, die jeweils als gegeben angesehen worden sind, durchgeführt. Jetzt wollen wir die Annahme einer gegebenen Produktmenge aufheben und danach fragen, wie diese Menge bestimmt wird. Wir gehen weiterhin von einer Firma aus,

- welche die Preise auf den Güter- und Faktormärkten als gegeben annimmt,
- nur ein einziges Produkt herstellt,
- dafür die beiden Faktoren Arbeit und Kapital einsetzt, von denen der zweite Faktor kurzfristig fix ist, und welche
- ihren Periodengewinn maximieren möchte.

Wir werden zunächst kurz die Frage ansprechen, ob die Gewinnmaximierung eine plausible Annahme über die Zielsetzung einer Unternehmung ist. Anschließend werden wir die Angebotsfunktionen für die kurze sowie für die lange Frist und danach die hierzu korrespondierenden Faktornachfragefunktionen ableiten.

3.4.1. Gewinnmaximierung als Zielsetzung

Ist die Gewinnmaximierung ein plausibles Unternehmensziel?

Wenn man die Äußerungen führender Manager hört, könnte man manchmal meinen, Ziel der Unternehmen sei die Schaffung von Arbeitsplätzen (oder die Einhaltung anspruchsvoller Umwelt- und Sozialstandards) und nicht die Erwirtschaftung eines möglichst hohen Gewinns. Vielleicht ist dieser Gedanke auch gar nicht so falsch. Eigentümer-Unternehmer und Manager-Unternehmer stehen zwar unter einem gewissen Anreiz, Gewinne zu erzielen, und zwar möglichst hohe, andererseits unterliegen sie auch anderen Anreizen. Sofern das wichtigste Ziel eines Managers darin besteht, seine Position zu halten und auszubauen, mag die Höhe des Gewinns nur eine von mehreren Determinanten seiner Entscheidungen sein. Es ist auch nicht ohne weiteres klar, ob die Organisationsstruktur der Institution *Unternehmung* geeignet ist, Entscheidungen zu generieren, welche die Zielfunktion der Unternehmung maximieren. Ziehen Finanzvorstand, Produktionsvorstand, Vertriebsvorstand und Personalvorstand stets an einem Strang oder verfolgen sie auch eigennützige Ziele, die mit den Unternehmenszielen nicht deckungsgleich sind? Haben solche Eigentümer-Unternehmer wie Springer, Krupp, Henkel u.a. neben der Gewinnerzielung nicht auch noch andere Ziele verfolgt, die teilweise im Konflikt mit dem Gewinnziel standen? Andererseits ist zu fragen, inwieweit der Wettbewerb in den jeweils betrachteten Märkten den Entscheidungsträgern überhaupt Abweichungen vom Ziel der Gewinnmaximierung gestattet. Schließlich müsste geklärt werden, inwieweit unternehmerische Aktivitäten, die scheinbar dem Ziel der Gewinnmaximierung widersprechen, in Wahrheit indirekte Wege zur Erreichung dieses Ziels ebnen. So könnte es z.B. sein, dass Unternehmen freiwillige Selbstverpflichtungen im Umweltschutz eingehen, um ansonsten drohende, weit schmerzlichere staatliche Eingriffe zu vermeiden („Freiwilligkeit im Schatten drohender Regulierung“). Außerdem können z.B. Bekenntnisse zu einer nachhaltigen Produktionsweise (deren praktische Relevanz im Einzelfall noch überprüft werden müsste) der Imagepflege und damit letztlich der Gewinnerzielung dienen. Wir wollen diese Fragen hier nicht erörtern. Sie würden uns zu weit in das (spannende!) Gebiet der Organisationstheorie führen. *Statt dessen unterstellen wir, dass alle Entscheidungen im Unternehmen einer einheitlichen Zielsetzung dienen und zwar dem Ziel der Maximierung des Periodengewinns*. Wie bereits in Kapitel 3.1 erwähnt, nennen wir die Institution, innerhalb derer die Produktion stattfindet, Firma und nicht Unternehmung, um deutlich zu machen, dass es sich hierbei um eine Abstraktion handelt.[48]

3.4.2. Das kurzfristige Güterangebot

Vorgehensweise

Aus logischen Gründen läge es nahe, zunächst die Frage zu erörtern, unter welchen Bedingungen eine Firma in einen Markt eintritt, d.h. den Betrieb aufnimmt. Anschließend sollte dann die Frage behandelt werden, wie hoch das Güterangebot auf kurze (vielleicht sogar auf sehr kurze) Frist und auf lange Frist ist. Schließlich wäre zu klären, unter welchen Bedingungen eine Firma den Markt wieder verlässt, also aufgelöst wird.

Ein derartiges Vorgehen hat aber den Nachteil, dass es schwer verständlich ist. Zur Erklärung des Markteintritts werden Begriffe benötigt, die erst im Zusammenhang mit der Ableitung des kurzfristigen Angebots verständlich werden. Deshalb werden wir zunächst das kurzfristige Angebot einer Firma betrachten, die bereits im Markt ist. Anschließend wird das langfristige Angebot dieser Firma beleuchtet. Bei der Frage nach dem Markteintritt und dem Marktaustritt werden wir zwei Fälle unterscheiden: Firmen, deren fixe Kosten keine *sunk costs* enthalten, und Firmen, deren fixe Kosten ausschließlich aus sunk costs bestehen. Wir werden sehen, dass die Höhe der sunk costs maßgeblichen Einfluss auf die Eintritts- und Austrittsentscheidung einer Firma hat. Zur Vereinfachung der Schreibweise verzichten wir in dem vorliegenden Abschnitt auf die Kennzeichnung der Kurzfristigkeit der Kostengrößen durch den hochgestellten Index k, da es sich *stets* um kurzfristige Kostengrößen handelt.

Kosten und Gewinn

Eine Firma erzielt einen positiven Gewinn, wenn der Erlös größer ist als die Kosten. Der Erlös ist das Produkt aus dem Preis und der Menge:[49]

48 In der Literatur werden auch Modelle der Firma vorgetragen, bei denen andere Zielfunktionen verwendet werden, z.B. die Maximierung einer Manager-Nutzen-Funktion oder die Maximierung des Marktanteils. Häufig wird bei diesen anderen Varianten die Nebenbedingung verwendet, ein bestimmter Mindestgewinn dürfe (insbesondere zur Beruhigung der Aktionäre!) nicht unterschritten werden. Natürlich handelt es sich auch bei diesen Modellen um Abstraktionen.

49 Wir erinnern an unsere Voraussetzung, der Marktpreis des Produktes sei für die einzelne Firma ein Datum.

(3.4-1) $$E = PQ\,.$$

Die Kosten werden durch die Kostenfunktion gegeben, die wir für den Fall, dass Kapital der fixe Faktor ist, als

(3.4-2) $$K(Q) = K_f(\bar{C}) + K_v(\bar{C}, Q)$$

geschrieben hatten.

Der Gewinn ist definiert als:

(3.4-3) $$G = E - K = PQ - K(Q)\,.$$

Der Stückgewinn ist dann

(3.4-4) $$\frac{G}{Q} = P - \frac{K(Q)}{Q}\,,$$

also gleich der Differenz zwischen Preis und Stückkosten.

Kurzfristige Kostenkurven und Produktionsentscheidungen

Sehen wir uns jetzt unsere kurzfristigen Kostenkurven an, so können wir hieraus das kurzfristige Güterangebot der Firma ableiten. Wir gehen dabei zunächst von U-förmigen Grenzkosten- und Durchschnittskostenkurven aus, wie sie sich aus ertragsgesetzlichen Produktionsfunktionen ergeben. An Hand dieser Kurven lässt sich die Produktionsentscheidung besonders gut darstellen. Anschließend werden wir kurzfristige Angebotskurven aus neoklassischen und linear-limitationalen Produktionsfunktionen ableiten.

In der folgenden Abbildung (A 3.4-1) sind die kurzfristigen Grenz- und Durchschnittskostenkurven einer Firma eingezeichnet, deren Produktionstechnik durch eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion beschrieben wird.

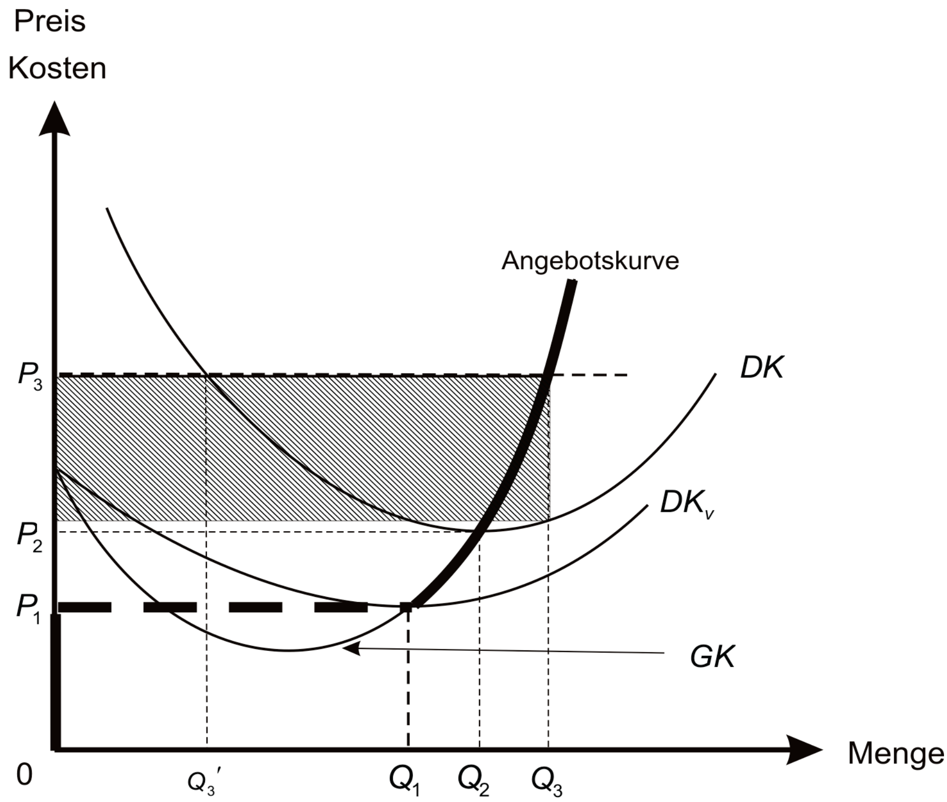


Abbildung (A 3.4-1): Kurzfristige Angebotskurve auf der Grundlage einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion

Grenzkostenkurve und Angebotskurve

Angenommen, in der Ausgangssituation betrage der Güterpreis P_3. Strebt die Angebots(= Produkt)menge gegen null, streben die gesamten Durchschnittskosten DK (Stückkosten) gegen unendlich. Der Grenzwert des mathematischen Produkts aus Stückkosten und Angebotsmenge ergibt dann die fixen Kosten.[50] Es entstünden also Verluste in Höhe der fixen Kosten. Wird die Angebotsmenge um eine marginale Einheit erhöht, so entstehen für diese zusätzliche Einheit Zusatzkosten (Grenzkosten), die kleiner sind als der Zusatzerlös, welcher identisch mit dem Preis ist. Die Ausdehnung der Produktion lohnt sich also. Trotzdem werden weiterhin Verluste gemacht, da die Stückkosten DK weiterhin höher sind als der Stückerlös, d.h. der Preis P_3. Wird die Produktion weiter ausgedehnt bis zur Menge Q_3', so sinken die Stückkosten auf die Höhe des Stückerlöses. Der Stückgewinn ist dann null. Ist dies aber schon die beste Lösung für die Firma? Wenn sie die Angebotsmenge um eine weitere marginale Einheit erhöht, sind die Grenzkosten immer noch deutlich niedriger als der Preis, d.h. die zusätzlichen Kosten sind geringer als der zusätzliche Erlös. Der Gewinn steigt also. Diese Argumentation bleibt gültig, bis die Angebotsmenge Q_3 erreicht ist. Wird die Angebotsmenge über diesen Punkt hinaus gesteigert, so sind die Grenzkosten höher als der Preis.

---

50 $\lim\limits_{Q \to 0} \frac{K_{fix} + K_v(Q)}{Q} Q = K_{fix}$.

Der Erlös, den die zusätzliche Einheit erbringt, ist also kleiner als die Kosten, welche diese Einheit verursacht. Die letzte Einheit würde mit Verlust produziert und würde deshalb den Gesamtgewinn reduzieren. Die optimale, d.h. gewinnmaximale Produktmenge bei einem Preis von P_3 beträgt also Q_3. Der Gewinn, welcher dieser Angebotsmenge zugeordnet ist, wird durch die schraffierte Fläche angegeben. Er beträgt:

$$G = Q_3\left[P_3 - DK(Q_3)\right]. \tag{3.4-5}$$

Preisuntergrenze

Sänke der Preis jetzt wieder, würde die Firma auf Grund analoger Überlegungen die Angebotsmenge reduzieren. Wenn der Preis bis auf P_2 gesunken ist, wird die Angebotsmenge auf Q_2 reduziert. Bei dieser Menge werden gerade noch die minimalen Stückkosten gedeckt. Der Stückerlös ist null. Die Firma erzielt einen Gewinn von null. Was passiert jetzt, wenn der Preis noch weiter sinkt? Angenommen, der neue Preis läge zwischen P_2 und P_1. Dann sind selbst die *minimalen* Durchschnittskosten höher als der Preis und die Firma macht einen Verlust in Höhe der Differenz zwischen Preis und Durchschnittskosten multipliziert mit der angebotenen Menge. Sollte die Firma dann nicht besser die Produktion ganz einstellen? Würde sie dann nicht einen Verlust von null machen? Nein! Bei Einstellung der Produktion erzielte sie keinen Erlös mehr, die fixen Kosten blieben aber weiterhin bestehen! Solange der Preis noch über den minimalen durchschnittlichen variablen Kosten liegt, lohnt die Produktion noch. Mit Hilfe des Überschusses des Preises über die variablen Kosten kann immerhin ein Teil der fixen Kosten gedeckt werden. Die Firma erwirtschaftet immer noch einen Beitrag zur Deckung der fixen Kosten, d.h. einen *Deckungsbeitrag*. Erst wenn der Preis auf die Höhe der minimalen variablen Stückkosten abgesunken ist, also bis auf P_1, ist der Deckungsbeitrag null, und die Firma ist indifferent zwischen den Produktionsmengen null und Q_1. In beiden Fällen entsteht ein Verlust in Höhe der fixen Kosten. Genau wie bei Preisen, die zwischen P_3 und P_2 liegen, wird die Firma auch bei Preisen, die zwischen P_1 und P_2 liegen, stets jene Menge anbieten, für die Preis = Grenzkosten gilt. Eine größere Menge würde bei der letzten Einheit zu Verlusten, eine kleinere Menge bei der letzten Einheit zu verpassten Gewinnchancen führen. Unsere grafische Analyse ergibt also folgende Erkenntnisse:

Produktionsentscheidung

1. Eine auf dem Markt befindliche Firma, welche die Güter- und die Faktorpreise als gegeben ansieht (Mengenanpasser), wird jene Produktmenge wählen, bei der Preis = Grenzkosten gilt und die Grenzkostenkurve einen steigenden Verlauf hat.

2. Eine im Markt befindliche Firma wird die Produktion aufnehmen, wenn die minimalen variablen Durchschnittskosten kleiner oder gleich dem Preis sind.

3. Eine derartige Firma wird die Produktion einstellen, wenn die minimalen variablen Durchschnittskosten höher sind als der Preis.

Angebotskurve

Aus diesen Erkenntnissen folgt, dass die kurzfristige Angebotskurve unterhalb eines Preises P_1 *identisch mit der Ordinate ist und für Preise ab* P_1 *identisch ist mit jenem Teil der Grenzkostenkurve, der oberhalb des Schnittpunkts mit der Kurve der variablen Durchschnittskosten liegt*. Die Angebotskurve ist in Abbildung (A 3.4-1) fett ausgezogen.

Die hier verbal und grafisch abgeleiteten Ergebnisse lassen sich leicht analytisch bestätigen. Dazu wird die Gewinnfunktion nach der Produktmenge differenziert:

Mathematische Formulierung der Gewinnmaximierungsbedingung

(3.4-6) $$\frac{dG}{dQ} = P - \frac{dK}{dQ} = 0\,.$$

Die notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum lautet: Preis = Grenzkosten. Die hinreichende Bedingung lautet:

(3.4-7) $$G_{QQ} = -K_{QQ} < 0\,.$$

Die 2. Ableitung der Kostenfunktion muss im Gewinnmaximum positiv sein, d.h. die Grenzkostenkurve muss ansteigen.

Eine im Markt befindliche Firma wird die Produktion aufnehmen und so lange aufrechterhalten, wie der Preis nicht kleiner ist als das Minimum der variablen Stückkosten:

(3.4-8) $$P \geq \left(\frac{K_v}{Q}\right)_{\min}.$$

Angebotskurven bei alternativen Produktionsfunktionen

Die hier abgeleiteten Ergebnisse gelten auch für Kostenfunktionen, denen neoklassische oder linear-limitationale Produktionsfunktionen zu Grunde liegen. Betrachten wir hierzu die beiden folgenden Abbildungen (A 3.4-2) und (A 3.4-3).

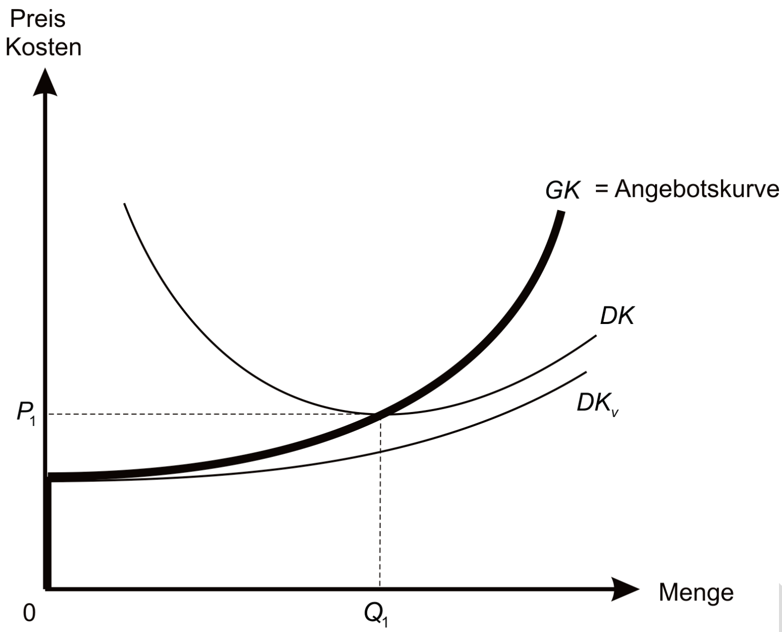


Abbildung (A 3.4-2): Kurzfristige Angebotskurve auf der Grundlage einer neoklassischen Produktionsfunktion

Neoklassische Produktionsfunktion

Auch die kurzfristige Grenzkostenkurve einer neoklassischen Produktionsfunktion schneidet die kurzfristige Durchschnittskostenkurve in deren Minimum. Es existiert aber kein Schnittpunkt mit der Kurve der variablen Durchschnittskosten, jedenfalls nicht bei positiven Mengen. Da die kurzfristige Angebotskurve identisch ist mit jenem Teil der kurzfristigen Grenzkostenkurve, der oberhalb des Schnittpunkts mit der Kurve der variablen Durchschnittskosten verläuft, ist im Falle einer neoklassischen Produktionsfunktion die gesamte kurzfristige Grenzkostenkurve eine Angebotskurve.

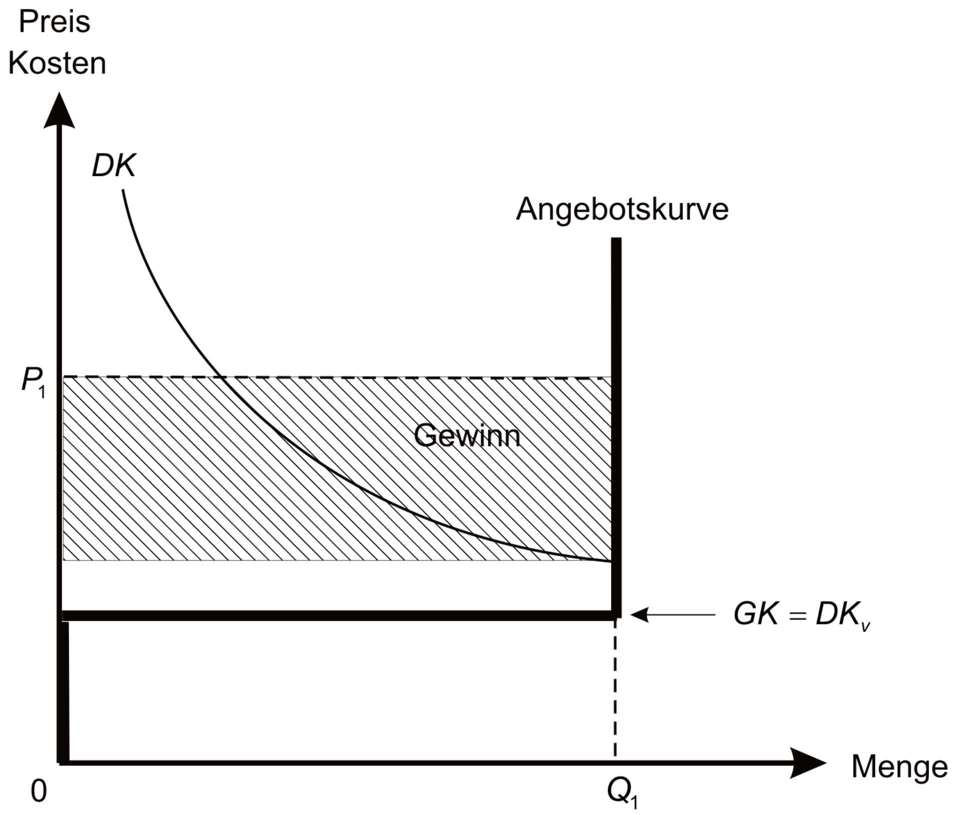


Abbildung (A 3.4-3): Kurzfristige Angebotskurve einer linear-limitationalen Produktionsfunktion

Linear-limitationale Produktionsfunktionen

Die kurzfristige Grenzkostenkurve einer linear-limitationalen Produktionsfunktion ist bis zur Kapazitätsgrenze eine Parallele zur Mengenachse und identisch mit der Kurve der variablen Durchschnittskosten. Die Kurve der gesamten Durchschnittskosten ist eine fallende Kurve, die sich asymptotisch der Grenzkostenkurve annähert. Die Menge Q_1 bezeichnet die durch den fixen Faktor definierte Kapazitätsgrenze. Die kurzfristige Grenzkostenkurve ist wieder identisch mit der kurzfristigen Angebotskurve, da Erstere nie unterhalb der variablen Durchschnittskostenkurve verläuft. Liegt der Preis unterhalb der Grenzkostenkurve, wird die Menge null angeboten, liegt der Preis auf oder oberhalb der Grenzkostenkurve, wird die Kapazitätsmenge Q_1 angeboten. Eine größere Menge kann nicht angeboten werden, egal wie hoch der Preis ist.

An dieser Stelle wird verständlich, weshalb wir bei der Darstellung der linear-limitationalen Produktionsfunktion deren Ertragskurven und Isoquante nicht lediglich als einen Punkt, sondern, wenn auch gestrichelt, einschließlich ihrer ineffizienten Abschnitte eingezeichnet haben. Unter produktionstheoretischen Gesichtspunkten sind die ineffizienten Punkte uninteressant, da der Faktor Zeit nicht einbezogen wird. Unter Kostengesichtspunkten sind die ineffizienten Punkte dagegen durchaus von Interesse, da die kurze Frist gerade dadurch charakterisiert ist, dass zumindest ein Faktor fix ist. *Selbst unter der Zielsetzung der Gewinnmaximierung kann es unter diesen Bedingungen sinnvoll sein, ineffizient zu produzieren, weil Effizienz kurzfristig nicht zu erreichen ist*. Bei limitationalen Produktionsfunktionen fallen technische Effizienz und Kostenminimierung zusammen, d.h. ein technisch effizientes Inputbündel ist auch stets kostenminimal. Bei substitutionalen Produktionsfunktionen wird die Firma stets eine technisch effiziente Faktormengenkombination wählen. Von den unendlich vielen effizienten Faktormengenkombinationen ist aber nur eine einzige kostenminimal.

Komparativ-statische Überlegungen

Bevor wir uns der langfristigen Angebotsfunktion zuwenden, wollen wir noch kurz überlegen, welche Änderung die kurzfristige Angebotskurve, d.h. die Grenzkostenkurve, erfährt, wenn sich die Faktorpreise ändern. Wir können hierzu auf die Ergebnisse zurückgreifen, die wir bei der Analyse der kurzfristigen Kostenfunktionen gewonnen haben. Wir beschränken uns deshalb auf den Fall einer neoklassischen Produktionsfunktion, da die Änderungen bei den Angebotsfunktionen, die auf alternativen Produktionsfunktionen basieren, ganz analog zu behandeln sind. Danach ist ein höherer Preis des variablen Faktors mit einer Verlagerung der Grenzkostenkurve nach oben verbunden, die proportional zur Produktmenge ist (vgl. Abb. (A 3.3-27)). Entsprechendes gilt umgekehrt für einen niedrigeren Preis.

Übungsaufgabe 35

Stellen Sie die Auswirkungen einer Preissteigerung des variablen Faktors auf das kurzfristige Angebot grafisch dar, wenn die Produktion durch eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion beschrieben wird.

3.4.3. Das langfristige Güterangebot bei einer Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

langfristige Angebotskurve

In der langen Frist sind alle Faktoren und alle Kosten variabel. Damit entfällt die Unterscheidung zwischen fixen und variablen Kosten. Die *langfristige Angebotskurve* ergibt sich aus Abbildung (A 3.4-4) auf Grund von Überlegungen, die ganz analog zu denen sind, die wir in Bezug auf die kurzfristige Angebotskurve angestellt haben. Wir können uns deshalb an dieser Stelle entsprechend kurz fassen. Alle Kostengrößen repräsentieren jetzt langfristige Kosten. Den eingezeichneten Kostenkurven liegt eine Produktionsfunktion zu Grunde, welche zunächst steigende und dann abnehmende Skalenerträge aufweist. Die Gesamtkostenkurve hat demnach einen umgekehrt S-förmigen Verlauf.

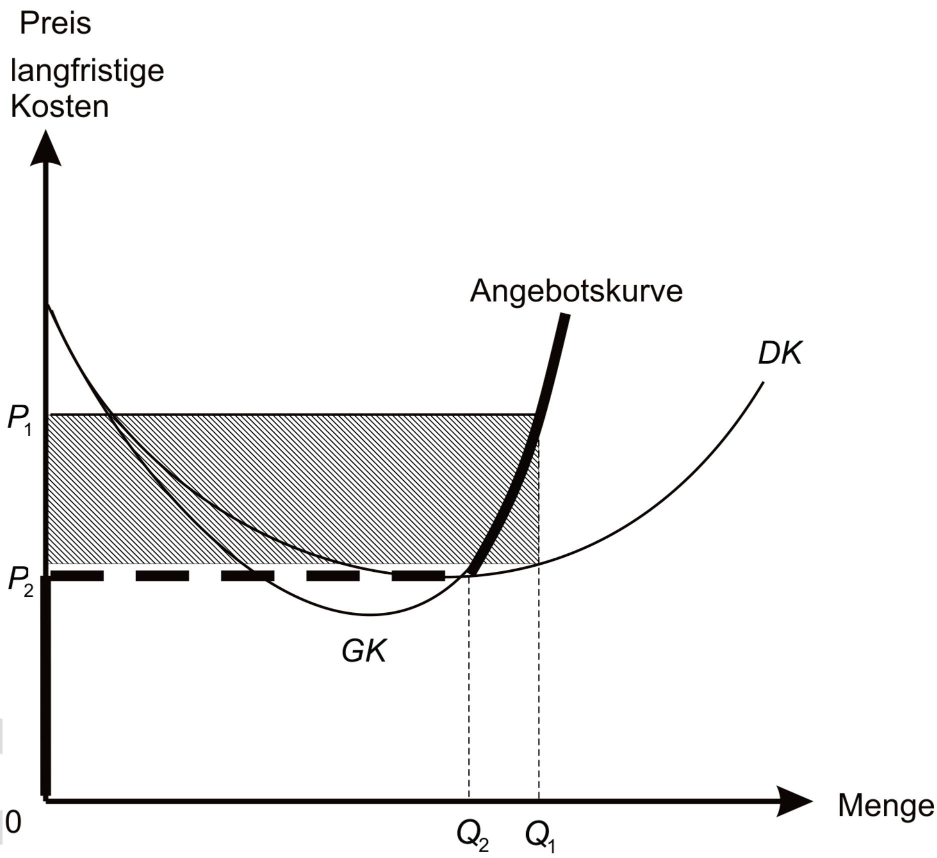


Abbildung (A 3.4-4): Langfristige Angebotskurve auf der Grundlage einer Produktionsfunktion mit zunächst steigenden, dann sinkenden Skalenerträgen

Grafische Ableitung der Angebotskurve

Bei einem Preis von P_1 bietet die Firma die Menge Q_1 an. Bei einer größeren Angebotsmenge wären die Grenzkosten höher als der Peis, bei einer kleineren Menge wäre der Preis höher als die Grenzkosten. In beiden Fällen könnte der Gewinn gesteigert werden, wenn die Produktmenge verändert würde. Der Gewinn, den die Firma beim Preis P_1 erzielt, wird durch die schraffierte Fläche angegeben. Sinkt der Peis auf P_2, so ist der Gewinn bei einer Angebotsmenge von Q_2 null. Das Gleiche gilt für eine Angebotsmenge von null. Bei jeder anderen Menge würde die Firma einen negativen Gewinn, also einen Verlust machen. *Die langfristige Güterangebotskurve der Firma ist demnach für Preise unterhalb von P_2 identisch mit der Ordinate, für Preise ab P_2 identisch mit jenem Teil der langfristigen Grenzkostenkurve, der oberhalb des Schnittpunkts mit der Kurve der langfristigen*

Durchschnittskosten verläuft. In der Abbildung ist die Angebotskurve fett ausgezogen.

Die mathematischen Bedingungen für eine langfristig gewinnmaximale Produktmenge sind formal identisch mit denen der kurzfristigen. Sie lauten

Gewinnmaximierungsbedingung

(3.4-9) $P = K'(Q)$

(3.4-10) $G_{QQ} = -K_{QQ} < 0$ und

(3.4-11) $P \geq \left(\frac{K}{Q}\right)_{\min}$.

Höhere Faktorpreise drücken sich in Verschiebungen der Grenzkosten und der Durchschnittskostenkurven nach oben aus (vgl. Abb. (A 3.3-25 und 3.2-26)). Bei gleichbleibenden Güterpreisen geht das Angebot entsprechend zurück. Das Umgekehrte gilt für niedrigere Faktorpreise.

Komparative Statik

Ändern sich die Faktorpreise und der Güterpreis proportional, kommt es zu keiner Änderung der Angebotsmenge (vorausgesetzt, die Güternachfrage bleibt konstant!), wie folgende Überlegung zeigt: Da das Faktoreinsatzverhältnis konstant bleibt (s.o. zur langfristigen Kostenfunktion), ändern sich die Gesamtkosten- und damit die Grenzkostenfunktion nicht. Sie werden lediglich mit einem konstanten Faktor multipliziert. Das Gleiche gilt für die Grenzerlösfunktion, die ja identisch mit dem Preis ist.

Übungsaufgabe 36

Zeigen Sie, dass die Grenzerlösfunktion identisch mit dem Preis ist, falls Letzterer unabhängig von der Angebotsmenge ist.

Homogenität vom Grade null

Da im Gewinnmaximum Preis = Grenzkosten gilt, bleibt die Produktmenge, bei der diese Bedingung erfüllt ist, unverändert. Mathematisch ausgedrückt heißt dies: *Die langfristige Angebotsfunktion ist homogen vom Grade null in den Preisen*; oder: Eine proportionale Veränderung aller Preise führt zu keiner Änderung der Angebotsmenge.

Übungsaufgabe 37

Hat die Höhe des Preises des fixen Faktors einen Einfluss auf die Lage der langfristigen Angebotskurve?

3.4.4. Das langfristige Güterangebot bei alternativen Produktionsfunktionen: sinkende, konstante oder steigende Skalenerträge

Wir haben bisher eine langfristige Angebotsfunktion betrachtet, die sich auf der Basis einer Produktionsfunktion ergibt, welche zunächst steigende und dann sinkende Skalenerträge besitzt. Derartige Produktionsfunktionen implizieren einen U-förmigen Verlauf der Durchschnittskostenkurve und damit ein eindeutiges Minimum der Durchschnittskosten. Jene Produktmenge, bei der die Durchschnittskosten minimal sind, bezeichnet man als das *Betriebs(größen)optimum*. Wie wir bereits bei der Behandlung der langfristigen Kostenfunktionen erwähnt hatten, ist diese Eigenschaft von erheblicher Bedeutung für die Funktionsfähigkeit von Konkurrenzmärkten. Bei der Behandlung der Produktionsfunktionen hatten wir aber darauf hingewiesen, dass durchaus Produktionsprozesse denkbar sind, bei denen entweder sinkende oder konstante oder auch steigende Skalenerträge auftreten, nicht aber Skalenerträge, die mit der Produktionsmenge variieren. Welche Angebotskurven sind unter diesen Bedingungen zu erwarten? In Abbildung (A 3.4-5) sind die langfristigen Durchschnitts- und Grenzkostenkurven einer Produktionsfunktion mit sinkenden Skalenerträgen eingezeichnet.

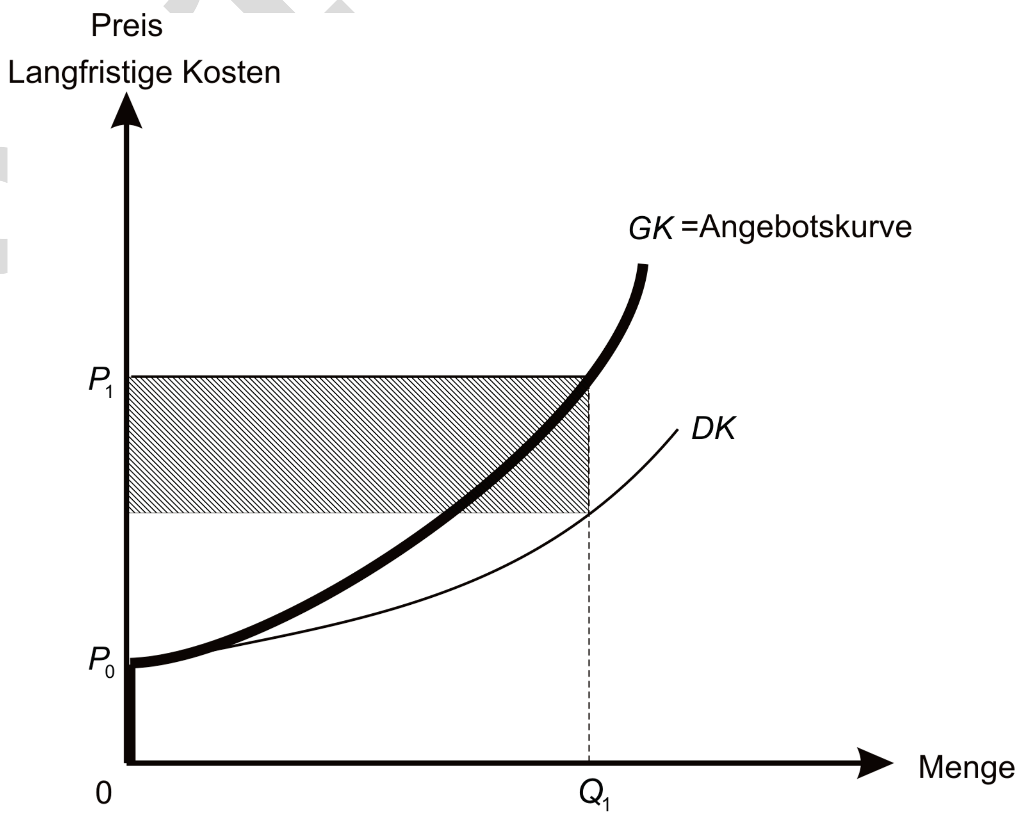


Abbildung (A 3.4-5): Langfristige Angebotskurve bei sinkenden Skalenerträgen

Grenzkostenkurve und Durchschnittskostenkurve besitzen denselben Ordinatenabschnitt und steigen monoton an. Die Grenzkostenkurve liegt stets oberhalb der Durchschnittskostenkurve. Bei einem Preis in Höhe von P_1 wird die Firma die Menge Q_1 anbieten. Bei dieser Menge sind die Bedingungen für ein Gewinnmaximum erfüllt: Der Preis ist gleich den Grenzkosten und die Grenzkosten sind nicht kleiner als die minimalen Durchschnittskosten. Diese Bedingungen sind für jeden Preis erfüllt, der oberhalb von P_0 liegt. *Die langfristige Angebotskurve ist also identisch mit der langfristigen Grenzkostenkurve.*

Langfristige Angebotskurve bei sinkenden Skalenerträgen

Im Falle konstanter Skalenerträge ergibt sich folgendes Bild:

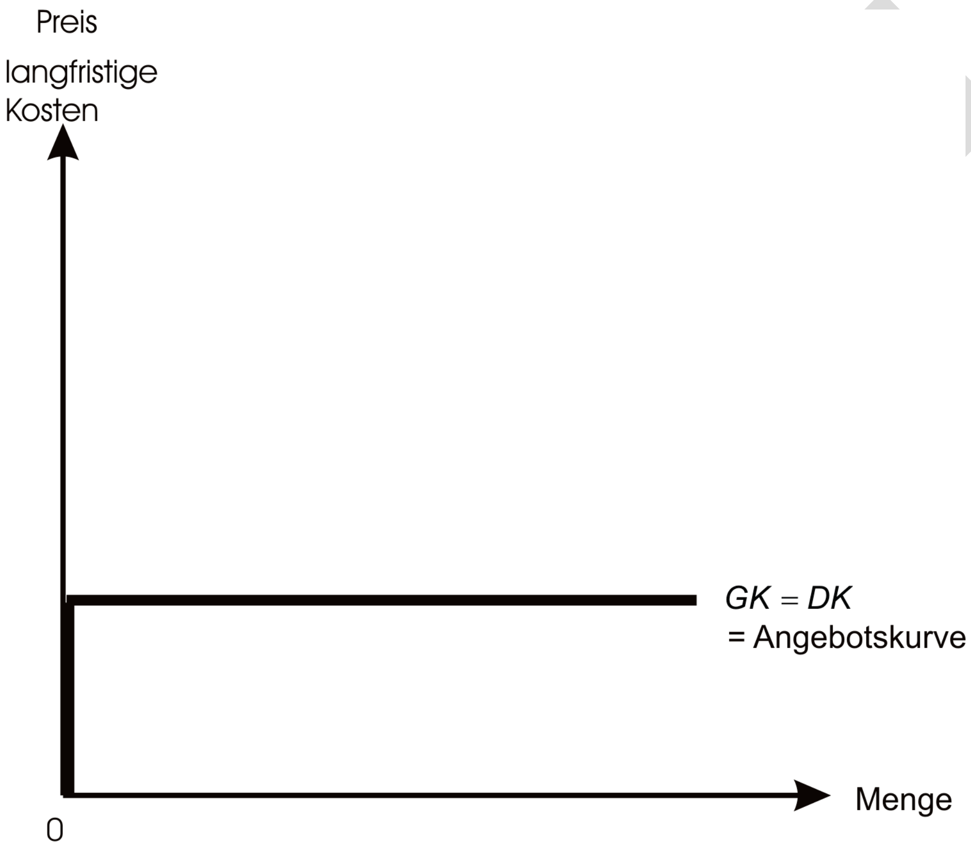


Abbildung (A 3.4-6): Langfristige Angebotskurve bei konstanten Skalenerträgen

Die Grenzkosten- und die Durchschnittskurve sind Parallelen zur Mengenachse und identisch. Bei einem Preis, der kleiner ist als die Durchschnittskosten, wird die Menge null angeboten, bei einem Preis, der genau die Durchschnittskosten deckt, ist die gewinnmaximale Menge unbestimmt! Es gibt kein eindeutiges Optimum. Jede Menge erbringt einen Gewinn von null. Bei einem Preis, der höher ist als die Grenzkosten, ist der Stückgewinn positiv. Der Gesamtgewinn wird maximiert, wenn die Produktmenge maximal gewählt wird. Da die Angebotsmenge unter unserer Annahme freier Verfügbarkeit der Faktoren nicht begrenzt ist, kann die Menge nur durch die Nachfrage begrenzt werden. Ohne die in Kurseinheit 4 anzustellenden Erörterungen zur Preisbildung auf Konkurrenzmärkten vorwegnehmen zu wollen, können wir aber jetzt schon vermuten, dass sich der Preis unter derartigen Produktionsbedingungen nicht lange über dem Niveau der Durchschnittskos-

Langfristige Angebotskurve bei konstanten Skalenerträgen ten halten wird. Von Dauer wird vermutlich nur ein Preis sein, der identisch ist mit den Durchschnittskosten. Es bleibt aber festzuhalten, dass kein eindeutiges Betriebsoptimum existiert. *Jede Betriebsgröße ist optimal*!

Langfristiges Angebot bei steigenden Skalenerträgen

Für den Fall steigender Skalenerträge haben die langfristigen Grenz- und Durchschnittskostenkurven den in Abbildung (A 3.4-7) eingezeichneten Verlauf. Es brauchen allerdings keine gekrümmten Kurven zu sein, es könnten auch Geraden sein. Sie müssen nur monoton fallend sein, und die Durchschnittskostenkurve muss oberhalb der Grenzkostenkurve liegen.

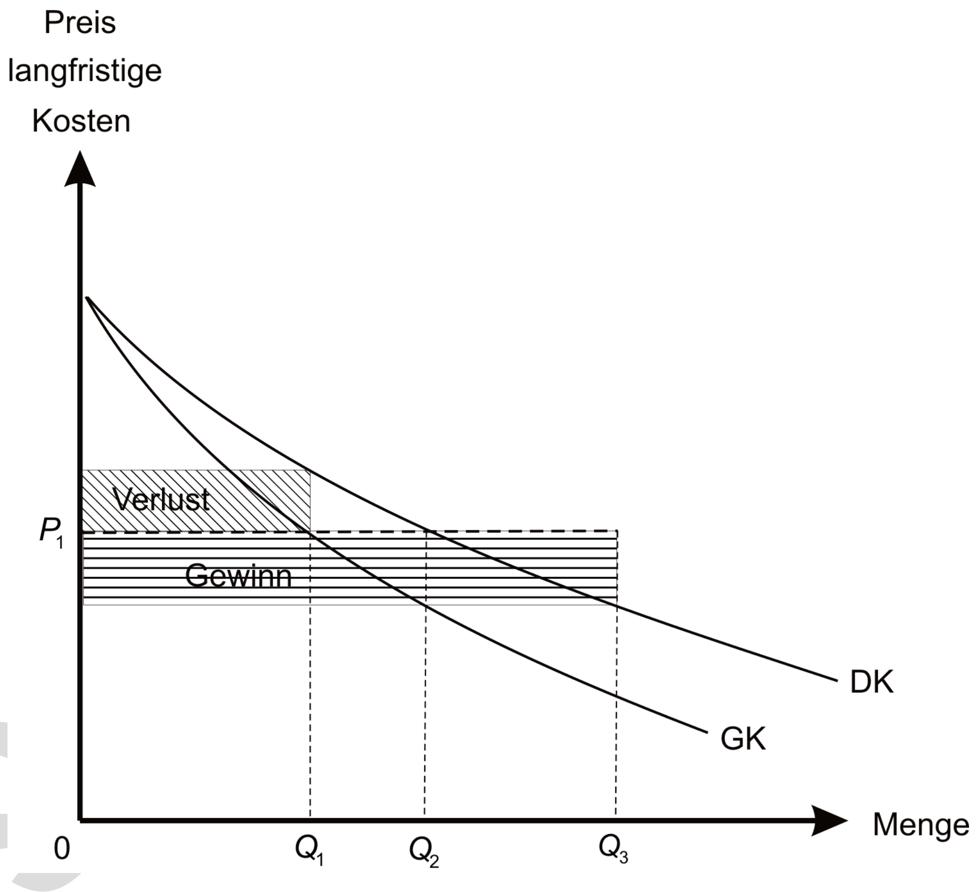


Abbildung (A 3.4-7): Das Problem des Güterangebots bei steigenden Skalenerträgen

keine Angebotskurve bei steigenden Skalenerträgen

Wenn die Firma sich an die Optimalitätsregel Preis = Grenzkosten hielte, müsste sie bei einem Preis P_1 die Menge Q_1 anbieten. Dann würde sie aber einen Stückverlust in Höhe der Differenz zwischen den Durchschnitts- und Grenzkosten machen. Der Gesamtverlust wird durch die diagonal schraffierte Fläche angegeben. Die Firma könnte den Verlust verkleinern, wenn sie die Angebotsmenge erhöhte. Bei einer Menge Q_2 wäre der Verlust null. Der Preis wäre dann gleich den Durchschnittskosten. Angenommen, Q_3 bezeichnete die gesamte Marktnachfrage, die zum Preis P_1 besteht, dann maximierte die Firma ihren Gewinn, wenn sie diese Menge anböte. Unter diesen Umständen wäre aber kaum anzunehmen, dass die Firma den Preis als gegeben ansähe. Sie würde sehr schnell merken, dass er davon abhängt, welche Menge sie anbietet. Mit anderen Worten: *Es existiert keine Angebotskurve in dem Sinne, dass einem gegebenen Preis eine gewinnmaximale Ange-*

botsmenge zugeordnet wird. Dieses Ergebnis ist darauf zurückzuführen, dass die Bedingung: Grenzkosten ≥ Durchschnittskosten für keine positive Menge erfüllt ist. Der Gewinn wird maximiert (und damit der Verlust minimiert), wenn eine Angebotsmenge gewählt wird, bei welcher der Grenzerlös gleich den Grenzkosten ist. Was das genau heißt, werden wir in Kurseinheit 5 bei der Behandlung der Preisbildung auf Monopolmärkten erörtern.

Übungsaufgabe 38

Zeigen Sie, dass die Bedingung Grenzkosten ≥ Durchschnittskosten für keine positive Produktmenge erfüllt wird, wenn die Produktionstechnik durch eine Cobb-Douglas-Funktion beschrieben wird, deren Summe der Produktionselastizitäten größer als eins ist.

3.4.5. Der Markteintritt und der Marktaustritt

Bisher sind wir in unserer Argumentation von der Annahme ausgegangen, die Firma sei bereits im Markt vertreten. Jetzt wollen wir der Frage nachgehen, unter welchen Bedingungen eine Firma überhaupt in den Markt eintritt, und unter welchen Bedingungen sie wieder austritt.

Produktionseinstellung

Intuitiv wird man sagen: Eine Firma tritt in einen Markt ein, wenn sie sich davon einen Gewinn verspricht. Dann muss der Marktpreis höher sein als das Minimum der gesamten durchschnittlichen Kosten. Stellt sich heraus, dass der Preis unter dieses Minimum sinkt, tritt sie wieder aus. Diese einfache Überlegung scheint in Bezug auf den Marktaustritt nicht richtig zu sein. Bei der Ableitung der kurzfristigen Angebotskurve hatten wir gesehen, dass eine Firma so lange weiter produzieren wird, wie zumindest noch die *variablen* Durchschnittskosten gedeckt sind. Wenn der Preis über diesem Minimum liegt, wird noch ein Beitrag zur Deckung der fixen Kosten erzielt (Deckungsbeitrag), wenn auch keine vollständige Deckung. Bei einer Einstellung der Produktion würde die Firma dagegen Verluste in voller Höhe der fixen Kosten machen.

Marktaustritt

Gilt dieses Argument aber auch dann noch, wenn die Alternative zur Produktion nicht darin besteht, die Produktion einzustellen, die Firma aber bestehen zu lassen, sondern darin, die Firma aufzulösen? Wird die Firma aufgelöst, entfallen nämlich die fixen Kosten. Denken Sie z.B. an die Geschäftsräume oder die Geschäftsausstattung. Diese Anlagen können nach Auflösung der Firma anderen Verwendungszwecken zugeführt werden, und zwar jenen, in denen sie den höchsten alternativen Ertrag erwirtschaften. Dieser Ertrag ist gleichbedeutend mit den Opportunitätskosten dieser Vermögensgegenstände und repräsentiert die fixen Kosten. Bei einer Auflösung der Firma entfallen diese Kosten. Bei einer Weiterführung der Firma entfallen sie nicht, selbst dann nicht, wenn die Produktionsmenge null beträgt. *Die „fixen Kosten“ sind eben nur in Bezug auf die Produktmenge fix, nicht aber in Bezug auf die Existenz der Firma*!

Übungsaufgabe 39

Machen Sie sich den Unterschied zwischen ökonomischen und buchhalterischen Fixkosten klar.

Marktaustritt und sunk costs

Sollte eine Firma unter diesen Umständen nicht aber stets aufgelöst werden, sobald der Preis niedriger ist als das Minimum der gesamten Durchschnittskosten? Die Antwort auf diese Frage hängt davon ab, ob die fixen Kosten sunk costs enthalten oder nicht.

Fixe Kosten ohne sunk costs

Enthalten die fixen Kosten keine sunk costs, sollte die Firma in der Tat aufgelöst werden, sobald die minimalen Durchschnittskosten höher sind als der Produktpreis. In diesem Fall ist unsere intuitive Vorstellung richtig. Existieren jedoch sunk costs, wird die Entscheidung schwieriger.

Sunk costs sind die Kosten spezifischer Investitionen, d.h. solcher Vermögensobjekte, die nach ihrer Durchführung nur in dieser Verwendung einen Nutzen erzeugen, aber in keiner anderen. Sobald sie in die Firma eingebracht sind, sind ihre Opportunitätskosten null. Investitionen in den Markennamen gehören z.B. hierzu. Sie werden wertlos, wenn die Marke nicht mehr existiert. Definiert man den Firmenwert als die Differenz zwischen dem Verkaufswert der kompletten Firma und dem Verkaufswert der einzelnen Vermögensgegenstände der Firma, so bilden die Investitionen in diesen Firmenwert die umfassendsten sunk costs. Wird die Firma aufgelöst, sind diese sunk costs verloren.

Fixe Kosten bestehen ausschließlich aus sunk costs

Bestehen die fixen Kosten ausschließlich aus sunk costs, so ist der ökonomische Wert der fixen Faktoren null. Sie besitzen keine alternative Verwendung. Dann sind die gesamten Durchschnittskosten identisch mit den variablen Durchschnittskosten und unser ursprüngliches Ergebnis bleibt bestehen: Solange der Preis nicht kleiner ist als die variablen Durchschnittskosten, wird die Produktion aufrechterhalten. Werden die variablen Durchschnittskosten nicht mehr gedeckt, wird die Produktion eingestellt. Die Einstellung der Produktion ist in diesem Fall gleichbedeutend mit der Auflösung der Firma, da es keine verwertbaren Vermögensgegenstände gibt.

Die Aussage, dass die Produktion aufrechterhalten wird, solange der Produktpreis nicht niedriger ist als das Minimum der variablen Durchschnittskosten, gilt also dann und nur dann, wenn die fixen Kosten ausschließlich sunk costs darstellen. Umgekehrt gilt: Falls die gesamten Durchschnittskosten höher sind als der Produktpreis, lässt sich nur dann folgern, dass die Produktion eingestellt wird, wenn die fixen Kosten keine sunk costs enthalten.

Markteintritt bei Vorliegen von sunk costs

Hieraus ergeben sich Konsequenzen für den Markteintritt: Angenommen, der Produktpreis sei höher als das Minimum der gesamten Durchschnittskosten der im Markt befindlichen Firmen. Die Firmen machen also Gewinn. Alle Firmen seien identisch. Die Fixkosten seien erheblich und bestünden vollständig aus sunk costs. Denken Sie beispielsweise an Bergwerke oder Atomkraftwerke. Die Opportunitätskosten der fixen Faktoren sind dann null, und damit - bei ökonomischer Betrachtung - auch die fixen Kosten. Die variablen Durchschnittskosten sind somit identisch mit den gesamten Durchschnittskosten. Für diese Firmen liegt die Preisuntergrenze, bei welcher sie ihre Produktion einstellen und aus dem Markt austreten, im Minimum ihrer variablen Durchschnittskosten.

Für eine Firma, die sich überlegt, in den Markt einzutreten, stellt sich die Kostensituation selbst bei identischer Produktionstechnik und identischen Faktorpreisen anders dar. Für diese Firma sind bis zur Aufnahme der Produktion alle Faktoren variabel. Ihre Opportunitätskosten sind deshalb höher als nach erfolgtem Markteintritt, wenn ein Teil der Faktoren investitionsspezifisch ist und nicht mehr anders verwendet werden kann. Die neu eintretende Firma muss deshalb, trotz identischer Produktionstechnik, mit höheren Stückkosten kalkulieren als die bereits im Markt befindlichen Firmen. Nur wenn der Marktpreis mindestens diese höheren Stückkosten deckt, wird sie in den Markt eintreten.

Übungsaufgabe 40

Nehmen Sie Stellung zu folgender Behauptung: „Wenn die fixen Faktoren mit ihren ökonomischen Kosten bewertet werden, sollte eine Firma aufgelöst werden, sobald die gesamten Durchschnittskosten höher als der Preis des Produktes sind, selbst dann, wenn noch ein positiver Deckungsbeitrag erwirtschaftet wird.“

3.4.6. Zusammenfassung

Unter der Annahme, dass eine Firma das Ziel der Gewinnmaximierung verfolgt und dass der Produktpreis und die Faktorpreise für die Firma gegeben sind, ist es mit Hilfe des Konzepts der Kostenfunktion möglich, die optimale Produktmenge einer Firma zu bestimmen. Die Annahme der Gewinnmaximierung ist gerechtfertigt, wenn auf den betreffenden Märkten Konkurrenz herrscht. Im Fall einer ertragsgesetzlichen und einer neoklassischen Produktionsfunktion ist die kurzfristige Angebotskurve identisch mit jenem Teil der Grenzkostenkurve, der oberhalb der Kurve der *variablen* Durchschnittskosten verläuft. Im Fall einer linear-limitationalen Produktionsfunktion sind Grenzkosten und variable Durchschnittskosten identisch und damit auch identisch mit der kurzfristigen Angebotskurve.

Die langfristige Angebotskurve einer Firma ist im Fall sinkender Skalenerträge identisch mit jenem Teil der langfristigen Grenzkostenkurve, der oberhalb der langfristigen Durchschnittskostenkurve verläuft. Im Fall konstanter Skalenerträge sind Grenz- und Durchschnittskosten konstant und identisch. Die Angebotskurve fällt dann mit diesen beiden Kurven zusammen. Bei steigenden Skalenerträgen existiert keine Angebotsfunktion, da der Markt von einer einzigen Firma bedient wird und diese den Produktpreis nicht als gegeben ansieht.

Firmen treten in einen Markt ein, wenn der Marktpreis über dem Minimum der gesamten Durchschnittskosten der eintretenden Firmen zum Zeitpunkt ihres Markteintritts liegt. Die Durchschnittskosten der eintretenden Firma sind ceteris paribus höher als die der bereits im Markt tätigen Firmen, sofern der Markteintritt mit sunk costs verbunden ist. Falls die Opportunitätskosten des fixen Faktors null sind, weil dieser Faktor z.B. in keiner anderen Verwendung einsetzbar ist, stellen die fixen Kosten versunkene Kosten dar. Firmen, für die dies gilt, treten aus einem Markt aus, wenn der Produktpreis unterhalb des Minimums der variablen Kosten liegt, die in diesem Fall aber mit den Durchschnittskosten identisch sind. Sind die Opportunitätskosten des fixen Faktors positiv, da dieser Faktor in anderen Verwendungen einen Ertrag erzielt, tritt eine Firma aus dem Markt aus, wenn der Deckungsbeitrag in der bisherigen Verwendung kleiner ist als die Opportunitätskosten des fixen Faktors.

3.5. Die Faktornachfrage

Faktornachfrage und Güternachfrage

Faktornachfragekurven lassen sich nicht auf die gleiche Art und Weise grafisch ableiten wie Güternachfragekurven. Letztere hatten wir konstruiert, indem die Budgetgerade um einen Achsenabschnitt gedreht und der sich ergebende Tangentialpunkt der Budgetgeraden an die Indifferenzkurve in ein Preis-Mengen-Diagramm übertragen wurde. Wir hatten also gefragt: Wie ändert sich die Nachfrage nach einem Gut, wenn sich der Preis dieses Gutes bei Preiskonstanz des anderen Gutes und bei Konstanz der Budgetsumme ändert? Für die Haushaltsentscheidung bildet die Budgetgleichung eine Restriktion.

Ginge man bei der Ableitung der Faktornachfrage analog vor, erhielte man eine Antwort auf die Frage: Welche Faktormenge fragt eine Firma nach, welche ihre Produktmenge (und nicht ihren Gewinn) maximieren möchte, wenn sich der Preis eines Faktors bei Konstanz des Preises des anderen Faktors und bei Konstanz der Kosten ändert? Dies ist aber nicht das Entscheidungsproblem der von uns betrachteten Firma. Die Kosten spielen für die Firma nicht die gleiche Rolle wie das Budget für den Haushalt. Sie sind keine gegebenen Größen. Auch die Produktmenge ist keine gegebene Größe, sondern hängt von den Produktionskosten ab, wie wir bei der Ableitung der Angebotsfunktionen gesehen haben. Die Ableitung der Faktornachfragekurven ist deshalb komplizierter als die der Güternachfragekurven.

Übungsaufgabe 41

Können Sie sich eine Situation vorstellen, in welcher ein Unternehmen vor dem Problem steht, die Produktmenge für ein gegebenes Kostenniveau zu maximieren? Wie müsste in diesem Fall die Lagrange-Funktion lauten?

Simultane Entscheidung über Produktionsmenge und Faktornachfrage

Die Produktionsfunktion ordnet jedem Inputbündel eine bestimmte Produktmenge zu. Mit anderen Worten: Um eine bestimmte Produktmenge zu erzeugen, sind bestimmte Faktoreinsatzmengen erforderlich. Sofern die Faktoren gegeneinander substituiert werden können, gibt es technisch gesehen mehrere Möglichkeiten, diese Produktmenge zu erzeugen. Das Gewinnstreben zwingt aber dazu, aus den verschiedenen technisch möglichen Verfahren das kostengünstigste auszuwählen. Daraus resultiert die Zuordnung eines bestimmten Inputbündels zu einer gegebenen Produktmenge. *Wenn die Firma über die Höhe ihres Güterangebots entscheidet, entscheidet sie deshalb zugleich über die Faktoreinsatzmengen und damit über ihre Faktornachfrage.*

3.5.1. Kurzfristige Faktornachfrage

kurzfristige Faktornachfrage bei CD-Funktion

Auf kurze Frist ist definitionsgemäß mindestens einer der Produktionsfaktoren fix. Falls nur die beiden Faktoren Arbeit und Kapital eingesetzt werden und Kapital der fixe Faktor ist, ist die Nachfrage nach Arbeit eine Funktion der geplanten Produktmenge und der vorhandenen Kapitalmenge:

(3.5-1) $L = L(Q, \bar{C})$.

Betrachten wir z.B. die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion

(3.5-2) $Q = L^{\alpha}\bar{C}^{\beta}$,

so ergibt sich eine „bedingte“ Arbeitsnachfragefunktion, indem die Produktionsfunktion nach dem Faktor Arbeit aufgelöst wird:

bedingte Faktornachfrage

(3.5-3) $L = \bar{C}^{-\frac{\beta}{\alpha}} Q^{\frac{1}{\alpha}}$.

Entsprechend gilt im umgekehrten Fall für den Faktor Kapital:

(3.5-4) $C = \bar{L}^{-\frac{\alpha}{\beta}} Q^{\frac{1}{\beta}}$.

Die Funktionen heißen bedingte Faktornachfragefunktionen, weil sie unter der Bedingung einer gegebenen Produktmenge stehen. Wir erhalten somit folgendes Ergebnis: Falls eine gegebene Produktmenge mit Hilfe von zwei Faktoren hergestellt wird, von denen der eine fix ist, ist die Nachfrage nach dem anderen Faktor in dem Sinne „rein technisch“ bestimmt, dass sie unabhängig von dem Preis des variablen Faktors ist.

Unbedingte Faktornachfrage

Die Faktornachfrage kann aber auch dann bestimmt werden, wenn die Produktmenge nicht gegeben ist, sondern nur die Menge des fixen Faktors sowie der Preis des Produktes und die Preise der Faktoren. Intuitiv sollte man nämlich erwarten, dass eine Firma gerade so viel von einem Faktor nachfragt, wie sich für die Firma „lohnt“. Wenn eine Firma z.B. vor der Entscheidung steht, eine zusätzliche Arbeitskraft einzustellen oder nicht, wird sie zwischen den zusätzlichen Kosten, die ihr hierdurch entstehen und dem, „was ihr die zusätzliche Arbeitskraft einbringt“, abwägen. Die zusätzlichen Kosten bezeichnen wir als die Grenzkosten GK des Faktors oder kurz als die *Faktorgrenzkosten.* Das, „was die zusätzliche Arbeitskraft einbringt“, bezeichnen wir als den *Grenzerlös* GE *des Faktors*.

Faktorgrenzkosten

Die Faktorgrenzkosten sind jene Kosten, die durch die letzte noch eingesetzte Faktoreinheit verursacht werden. Mathematisch gesehen bilden sie die Ableitung der Faktorkosten nach der Faktormenge:

(3.5-5) $GK(L) = \dfrac{d(lL)}{dL} = l$.

Für den Fall, dass der Preis des Faktors Arbeit unabhängig von der nachgefragten Menge dieses Faktors ist – und davon sind wir ja bisher ausgegangen – sind die Grenzkosten des Faktors Arbeit also gleich seinem Preis.

Grenzerlös eines Faktors

Der Grenzerlös eines Faktors ist das mit dem Preis des Produktes multiplizierte physische Grenzprodukt:[51]

$$GE(L) = P\frac{\partial Q\left(L,\bar{C}\right)}{\partial L}. \tag{3.5-6}$$

Intuitiv würde man wohl erwarten, dass eine Firma so lange die Einsatzmenge des variablen Faktors erhöht, bis der Grenzerlös gleich den Grenzkosten des Faktors ist, bis also gilt:

Marginalbedingung für Gewinnmaximum

$$P\frac{\partial Q\left(L,\bar{C}\right)}{\partial L} = \frac{d(lL)}{dL} = l. \tag{3.5-7}$$

Hierbei setzen wir voraus, dass die Firma bei dieser Faktoreinsatzmenge überhaupt einen Gewinn macht. Diese Voraussetzung bezeichnet man auch als *Totalbedingung*, im Gegensatz zur Bedingung (3.5-7), welche eine *Marginalbedingung* darstellt.

Mathematische Ableitung

Wir können die Richtigkeit unserer Intuition überprüfen, indem wir die (kurzfristige) Gewinnfunktion

$$G = PQ(L,\bar{C}) - lL - r\bar{C} \tag{3.5-8}$$

nach der Einsatzmenge des variablen Faktors differenzieren und die Bedingungen für ein Gewinnmaximum ermitteln:

$$\frac{\partial G}{\partial L} = P\frac{\partial Q\left(L,\bar{C}\right)}{\partial L} - l = 0. \tag{3.5-9}$$

Daraus folgt als notwendige Bedingung für ein Gewinnmaximum:

$$P\frac{\partial Q\left(L,\bar{C}\right)}{\partial L} = l. \tag{3.5-10}$$

Die hinreichende Bedingung lautet:

$$PQ_{LL} < 0. \tag{3.5-11}$$

Für eine neoklassische Produktionsfunktion ist diese Bedingung stets erfüllt. Für eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion ist sie in dem Bereich sinkender Ertragszuwächse erfüllt. Unser intuitives Ergebnis wird also bestätigt: *Eine Firma*

---

[51] Deshalb wird der Grenzerlös eines Faktors auch häufig als sein *Wertgrenzprodukt* bezeichnet.

maximiert ihren Gewinn, wenn sie die Einsatzmenge des variablen Faktors derart wählt, dass der Grenzerlös gleich den Grenzkosten des Faktors ist. Die aus (3.5-10) folgende kurzfristige Faktornachfrage ist demnach eine Funktion des Produktpreises und des Preises des variablen Faktors sowie der verfügbaren Menge des fixen Faktors. Sie lässt sich schreiben als:

Faktornachfragefunktion

(3.5-12) $L = L(P, l, \bar{C})$.

Grafische Darstellung für die neoklassische Produktionsfunktion

Diese (allgemeine) Faktornachfragekurve können wir grafisch darstellen, wenn wir ihren Verlauf kennen. Was können wir hierüber sagen? Wir wissen, dass ein gewinnmaximierendes Unternehmen stets jene Faktormenge wählen wird, bei welcher der Grenzerlös des Faktors – also das mathematische Produkt aus Produktpreis und physischem Grenzprodukt – gleich dem Faktorpreis ist. Wenn wir die Grenzproduktskurve mit einem konstanten Faktor – dem Produktpreis – multiplizieren, und in ein Koordinatensystem einzeichnen, dessen Abszisse die Faktoreinsatzmenge und dessen Ordinate die Höhe des Grenzerlöses misst, erhalten wir das Bild der Faktornachfragefunktion. Der Grenzerlös ist ja im Gewinnmaximum stets gleich dem Faktorpreis. Die Grenzerlöskurve ordnet demnach einer bestimmten Faktormenge nicht nur den Grenzerlös, sondern zugleich den Faktorpreis zu, oder anders ausgedrückt: Sie gibt an, welche Faktormenge bei welchem Faktorpreis nachgefragt wird. Abbildung (A 3.5-1) stellt den Verlauf der Arbeitsnachfragekurve für eine neoklassische Produktionsfunktion dar.

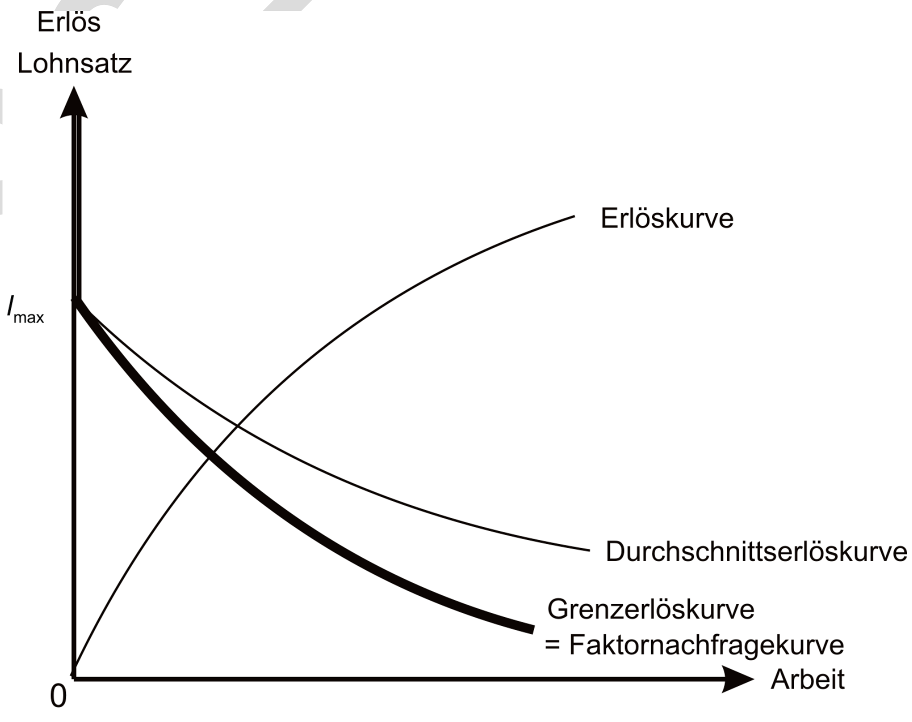


Abbildung (A 3.5-1): Die Faktornachfragekurve auf Grundlage einer neoklassischen Produktionsfunktion

Die Arbeitsnachfrage ist null, solange der Lohnsatz oberhalb von l_{max} liegt. Dies ist der höchste Lohnsatz, den die Firma zu zahlen bereit ist. Sinkt der Lohnsatz, so nimmt die Arbeitsnachfrage zu. Man könnte auch sagen: Mit steigendem Arbeitseinsatz sinkt der Grenzerlös des Faktors Arbeit, und da im Gewinnmaximum der Lohnsatz gleich dem Grenzerlös sein muss, muss der Lohnsatz im gleichen Maße sinken.

Den Verlauf der Faktornachfragekurve hätten wir auch durch die Bildung des totalen Differenzials der notwendigen Bedingung (3.5-9)

(3.5-13) $$Q_L dP + PQ_{LL} dL = dl$$

ermitteln können. Da die zweite Ableitung der neoklassischen Produktionsfunktion negativ ist, muss dL negativ sein, wenn dl positiv ist und der Produktpreis konstant bleibt. *Ein steigender Faktorpreis führt also zu einer sinkenden Faktornachfrage*. Die Faktornachfragekurve hat eine negative Steigung.

Faktornachfragekurve bei ertragsgesetzlichem Kurvenverlauf

Für den Fall, dass die Produktionsfunktion einen ertragsgesetzlichen Verlauf besitzt, hat die Faktornachfragekurve den in Abbildung (A 3.5-2) fett eingezeichneten Verlauf.

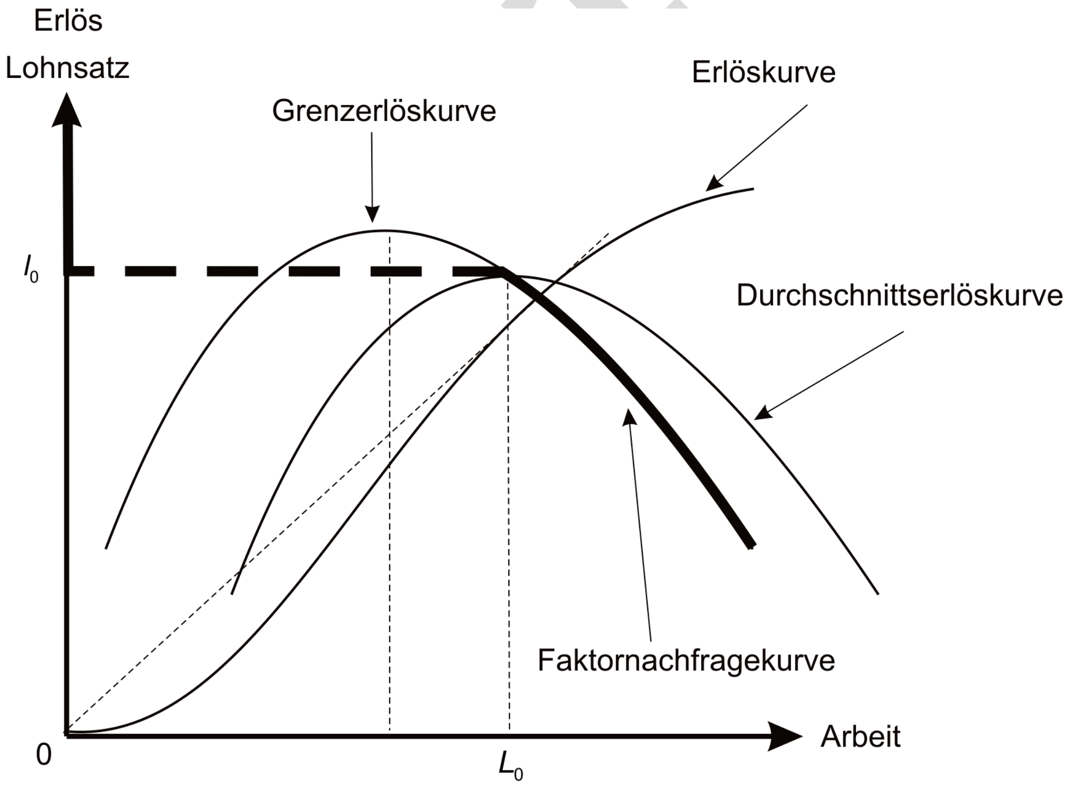


Abbildung (A 3.5-2): Grafische Ableitung der kurzfristigen Arbeitsnachfragekurve

Solange der Faktorpreis l oberhalb des maximalen Durchschnittserlöses des Faktors Arbeit $\left[P\frac{Q(L,\bar{C})}{L}\right]_{max}$ liegt, solange wird der Faktor nicht nachgefragt, da die Firma einen Verlust machen würde. Der Wert der gesamten Produktion würde nicht ausreichen, den Faktor Arbeit zu entlohnen. Sinkt der Faktorpreis auf $l_0 = \left[P \frac{Q(L,\bar{C})}{L} \right]_{max}$, so tritt die Firma in den Markt ein und fragt die Menge L_0 des Faktors Arbeit nach. Wenn der Faktorpreis weiter sinkt, steigt die Arbeitsnachfrage, und zwar derart, dass die Bedingung Lohnsatz = Grenzerlös eingehalten wird. Dies ist entlang der Grenzerlöskurve der Fall.

Komparative Statik

Eine Erhöhung des Produktpreises bewirkt eine Verschiebung der Erlös-Kurven nach oben. Jedem Faktorpreis ist dann eine höhere Faktornachfrage zugeordnet. *Steigen Produktpreis und Preis des variablen Faktors proportional, also um den gleichen Prozentsatz, so ändert sich die Faktornachfrage nicht*. Dies erkennt man aus dem totalen Differenzial der Gewinnmaximierungsbedingung bei einer Änderung des Produktpreises:[52]

(3.5-14) $$\frac{dP}{P} + \frac{Q_{LL}}{Q_L} dL = \frac{dl}{l}.$$

Ändern sich P und l um den gleichen Prozentsatz, ist $dL = 0$.

Übungsaufgabe 42

Stellen Sie die kurzfristige Arbeitsnachfragekurve für den Fall grafisch dar, dass die Produktionsfunktion linear-limitational ist.

3.5.2. Langfristige Faktornachfrage

Die *bedingte* langfristige Faktornachfragefunktion gibt die Höhe der Faktornachfrage bei gegebenen Faktorpreisen und gegebener Produktmenge an. In allgemeiner Form lautet sie für den Faktor Arbeit:

(3.5-15) $$L^* = L^*(l,r,Q).$$

Durch den hochgestellten Stern wird verdeutlicht, dass es sich um optimale Größen handelt. Die Funktion ergibt sich, indem man das kostenminimale Faktoreinsatzverhältnis für eine gegebene Produktmenge bestimmt, dieses Verhältnis in die Produktionsfunktion einsetzt und nach dem betreffenden Produktionsfaktor auflöst. Das kostenminimale Faktoreinsatzverhältnis hatten wir im Zusammenhang mit der Ableitung der langfristigen Kostenfunktion als

---

52 $Q_L dP + PQ_{LL} dL = dl \Rightarrow \frac{l}{P} dP + PQ_{LL} dL = dl \Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{Q_{LL}}{Q_L} dL = \frac{dl}{l}.$

(3.5-16) $$\frac{l}{r} = \frac{Q_L(L,C)}{Q_C(L,C)}$$

bestimmt (vgl. (3.3-14)). Das kostenminimale Faktoreinsatzverhältnis ist demnach eine Funktion der Faktorpreise:

(3.5-17) $$\frac{L^*}{C^*} = f(l,r).$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Produktionsfunktion ein, ergeben sich

(3.5-18) $$Q = Q\left[f(l,r)C^*, C^*\right]$$

und damit die bedingten langfristigen Faktornachfragefunktionen

bedingte langfristige Faktornachfragefunktion

(3.5-19) $C^* = C^*\left[l,r,Q\right]$ bzw. $L^* = L^*\left[l,r,Q\right]$.

Wir hatten derartige bedingte langfristige Faktornachfragefunktionen für den Fall der Cobb-Douglas-Produktionsfunktion bereits weiter oben abgeleitet (vgl. (3.3-29) und (3.3-30)):

(3.5-20) $$C = \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

und entsprechend für den Faktor Arbeit:

(3.5-21) $$L = \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}.$$

Ableitung der „unbedingten“ langfristigen Faktornachfragefunktion

Die „*unbedingte*“ langfristige Faktornachfrage, d.h. jene, die nur von den Faktorpreisen und dem Produktpreis abhängig ist, erhält man, wenn die optimale Produktmenge Q simultan mit der Faktornachfrage bestimmt wird. Wir wissen, dass im Gewinnmaximum die Grenzkosten gleich dem Preis sein müssen, sofern der Preis für die Firma gegeben ist. Die Grenzkostenfunktion lautet in allgemeiner Form:

(3.5-22) $$K' = K'(l,r,Q).$$

Aus der Bedingung Preis = Grenzkosten lässt sich dann die optimale Produktmenge ermitteln:

(3.5-23) $$Q^* = Q^*(l,r,P).$$

Setzt man diese Menge in die allgemeine Faktornachfragefunktion ein, ergibt sich:

(3.5-24) $L^* = L^*[l,r,P]$ und entsprechend $C^* = C^*[l,r,P]$.

Auch diese Ableitung wollen wir an Hand des Beispiels einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion verdeutlichen.

Beispiel: CD-Funktion

Die Gewinnfunktion kann in Abhängigkeit von den Faktoreinsatzmengen geschrieben werden als:

(3.5-25) $G(L,C) = PL^{\alpha}C^{\beta} - lL - rC$.

Die Bedingungen erster Ordnung für ein Gewinnmaximum lauten:

(3.5-26) $\dfrac{\partial G(L,C)}{\partial L} = \alpha P L^{\alpha-1}C^{\beta} - l = 0$ und

(3.5-27) $\dfrac{\partial G(L,C)}{\partial C} = \beta P L^{\alpha}C^{\beta-1} - r = 0$.

Die Bedingungen 2. Ordnung sind erfüllt, falls $\alpha + \beta < 1$ gilt.[53]

Löst man (3.5-26) nach C auf und setzt in (3.5-27) ein, erhält man die Nachfragefunktion für den Faktor Arbeit:[54]

Nachfrage nach Arbeit

---

53 Für einen Beweis vgl. z.B. HENDERSON/QUANDT (1983), S. 79f.

54 $\alpha P L^{\alpha-1}C^{\beta} = l \Rightarrow C^{\beta} = l\left[\alpha P L^{\alpha-1}\right]^{-1} \Rightarrow C = l^{\frac{1}{\beta}}\left[\alpha P L^{\alpha-1}\right]^{-\frac{1}{\beta}}$

$$\beta P L^{\alpha}C^{\beta-1} = r \Rightarrow \beta P L^{\alpha}\left\{l^{\frac{1}{\beta}}\left[\alpha P L^{\alpha-1}\right]^{-\frac{1}{\beta}}\right\}^{\beta-1} = r \Rightarrow \beta P L^{\alpha}\left\{l^{\frac{\beta-1}{\beta}}\left[\alpha P L^{\alpha-1}\right]^{-\frac{\beta-1}{\beta}}\right\} = r \Rightarrow$$

$$\beta P L^{\alpha}\left\{l^{\frac{\beta-1}{\beta}}\left[\alpha P L^{\alpha-1}\right]^{\frac{(1-\beta)}{\beta}}\right\} = r \Rightarrow L^{\alpha}\left\{\left[\alpha P L^{\alpha-1}\right]^{\frac{(1-\beta)}{\beta}}\right\} = r\beta^{-1}P^{-1}l^{\frac{1-\beta}{\beta}} \Rightarrow$$

$$L^{\alpha}\left\{\left[L^{\alpha-1}\right]^{\frac{(1-\beta)}{\beta}}\right\} = r\beta^{-1}P^{-1}l^{\frac{1-\beta}{\beta}}\alpha^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}P^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}} \Rightarrow L^{\frac{\alpha\beta-(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta}} = r\beta^{-1}P^{-1}l^{\frac{1-\beta}{\beta}}\alpha^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}P^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}$$

$$\Rightarrow L = \left[r\beta^{-1}P^{-1}l^{\frac{1-\beta}{\beta}}\alpha^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}P^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha\beta-(1-\alpha)(1-\beta)}} \Rightarrow L = \left[r\beta^{-1}P^{-1}l^{\frac{1-\beta}{\beta}}\alpha^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}P^{-\frac{(1-\beta)}{\beta}}\right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}$$

$$\Rightarrow L = \left[r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}\beta^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}P^{-\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}}l^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}}\alpha^{-\frac{(1-\beta)}{\alpha+\beta-1}}P^{-\frac{(1-\beta)}{\alpha+\beta-1}}\right] \Rightarrow$$

$$L = \left(\frac{\alpha^{-(1-\beta)}}{\beta^{\beta}}\right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} l^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} P^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}}.$$

(3.5-28) $$L = \left[\left(\frac{\alpha^{-(1-\beta)}}{\beta^{\beta}} \right) l^{1-\beta} r^{\beta} P^{-1} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}$$

und entsprechend für den Faktor Kapital:[55]

Nachfrage nach Kapital

(3.5-29) $$C = \left[\left(\frac{\alpha^{-\alpha}}{\beta^{(1-\alpha)}} \right) l^{\alpha} r^{(1-\alpha)} P^{-1} \right]^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}}.$$

Die Auswirkungen einer Faktorpreisänderung auf die Faktornachfrage lassen sich durch die entsprechenden Elastizitäten beschreiben:

Komparative Statik

(3.5-30) $$\varepsilon_{C,r} = \frac{1-\alpha}{\alpha+\beta-1},\ \varepsilon_{L,r} = \frac{\beta}{\alpha+\beta-1},$$

(3.5-31) $$\varepsilon_{L,l} = \frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1},\ \varepsilon_{C,l} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta-1}.$$

$\alpha + \beta < 1$

Falls $\alpha + \beta < 1$ gilt, wenn die Produktionsfunktion also sinkende Skalenerträge aufweist, sind die optimalen Faktormengen eindeutig bestimmt. Die Faktornachfrageelastizitäten sind dann alle negativ. Steigt der Preis eines Faktors, geht die Nachfrage nach beiden Faktoren zurück. *Im Gegensatz zu den Güternachfragefunktionen in der Theorie des Haushalts existiert bei den Faktornachfragefunktionen kein Einkommenseffekt, der den Substitutionseffekt kompensieren könnte*. Der Grund liegt darin, dass wir die Produktionsentscheidung des Unternehmens nicht

---

55 $$\alpha P L^{\alpha-1} C^{\beta} = l \Rightarrow C = l^{\frac{1}{\beta}} \alpha^{-\frac{1}{\beta}} P^{-\frac{1}{\beta}} L^{\frac{1-\alpha}{\beta}} \Rightarrow$$

$$C = l^{\frac{1}{\beta}} \alpha^{-\frac{1}{\beta}} P^{-\frac{1}{\beta}} \left[\left(\frac{\alpha^{-(1-\beta)}}{\beta^{\beta}} \right)^{\frac{1}{\alpha+\beta-1}} l^{\frac{1-\beta}{\alpha+\beta-1}} r^{\frac{\beta}{\alpha+\beta-1}} P^{-\frac{1}{\alpha+\beta-1}} \right]^{\frac{1-\alpha}{\beta}} \Rightarrow$$

$$C = l^{\frac{1}{\beta}} \alpha^{-\frac{1}{\beta}} P^{-\frac{1}{\beta}} \left[\left(\frac{\alpha^{-(1-\beta)}}{\beta^{\beta}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\beta(\alpha+\beta-1)}} l^{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} r^{\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} P^{-\frac{1-\alpha}{\beta(\alpha+\beta-1)}} \right] \Rightarrow$$

$$C = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left[\left(\frac{\alpha^{-(1-\beta)}}{\beta^{\beta}} \right)^{\frac{1-\alpha}{\beta(\alpha+\beta-1)}} l^{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\alpha+\beta-1)}+\frac{1}{\beta}} r^{\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} P^{-\frac{1-\alpha}{\beta(\alpha+\beta-1)}-\frac{1}{\beta}} \right] \Rightarrow$$

$$C = \alpha^{-\frac{1}{\beta}} \left[\alpha^{-\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} \beta^{-\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-1)}} l^{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\alpha+\beta-1)}+\frac{1}{\beta}} r^{\frac{\beta(1-\alpha)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} P^{-\frac{\beta}{\beta(\alpha+\beta-1)}} \right] \Rightarrow$$

$$C = \alpha^{-\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\alpha+\beta-1)}-\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} \beta^{-\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-1)}} l^{\frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta(\alpha+\beta-1)}+\frac{(\alpha+\beta-1)}{\beta(\alpha+\beta-1)}} r^{\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-1)}} P^{-\frac{1}{(\alpha+\beta-1)}} \Rightarrow$$

$$C = \alpha^{\frac{-\alpha}{(\alpha+\beta-1)}} \beta^{-\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-1)}} l^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta-1)}} r^{\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-1)}} P^{-\frac{1}{(\alpha+\beta-1)}} \Rightarrow C = \left(\frac{\alpha^{-\alpha}}{\beta^{(1-\alpha)}} \right)^{\frac{1}{(\alpha+\beta-1)}} l^{\frac{\alpha}{(\alpha+\beta-1)}} r^{\frac{(1-\alpha)}{(\alpha+\beta-1)}} P^{-\frac{1}{(\alpha+\beta-1)}}.$$

unter der Nebenbedingung gegebener Kosten modelliert haben, dass wir die Kosten also nicht als eine gegebene Größe angesehen haben, während wir bei der Nachfrageentscheidung des Haushalts das Budget als gegeben angesehen haben.

$\alpha + \beta \geq 1$

Falls $\alpha + \beta \geq 1$ gilt, wenn die Produktionsfunktion also konstante oder steigende Skalenerträge aufweist, ist die Produktmenge und damit auch die Faktornachfrage unbestimmt.

Produktpreis ist abhängig vom Faktorpreis

Die langfristigen Faktornachfragefunktionen sind hier unter der Annahme abgeleitet worden, dass der Produktpreis unabhängig von den Faktorpreisen gegeben ist. Für eine einzelne Firma, die wir bisher ja betrachtet haben, ist diese Annahme vertretbar. Wenn eine Faktorpreisänderung jedoch viele oder sogar alle Firmen betrifft und diese dann entsprechend reagieren, wird sich die Produktmenge aller Firmen und damit die Angebotsmenge auf dem Markt ändern. Dann kann man aber nicht mehr davon ausgehen, dass der Produktpreis unverändert bleibt. Die Änderung des Produktpreises muss in die Überlegungen einbezogen werden. Mit dieser Ausweitung der Analyse werden wir uns in Kurseinheit 4 beschäftigen.

Übungsaufgabe 43

Charakterisieren Sie kurz die verschiedenen Arten von Faktornachfragefunktionen, die wir unterschieden haben.

3.6. Zusammenfassung

Bei gegebenen Produkt- und Faktorpreisen ist die gewinnmaximale Angebotsmenge eindeutig bestimmt, wenn die Produktionsfunktion – und damit die kurz- bzw. langfristige Kostenfunktion – bestimmte Eigenschaften aufweist. Damit ist gleichzeitig die Höhe und Zusammensetzung der kostenminimalen Faktoreinsatzmengen determiniert. Betrachtet man die Faktornachfrage in Abhängigkeit von den Faktorpreisen und einer gegebenen Produktmenge, so erhält man bedingte Faktornachfragefunktionen. Da die Produktmenge im Rahmen unserer Analyse aber keine gegebene, sondern selbst eine zu bestimmende Größe darstellt, haben wir „unbedingte" Faktornachfragefunktionen abgeleitet, d.h. solche, bei denen die Faktornachfrage durch die Faktorpreise und den Produktpreis bestimmt wird. Auch hier haben wir wieder zwischen einer kurzen und einer langen Frist unterschieden. Eine Firma maximiert ihren Gewinn, wenn sie jene Faktormenge einsetzt, bei welcher die Faktorgrenzkosten gleich dem Grenzerlös des Faktors sind, vorausgesetzt, sie erzielt bei dieser Einsatzmenge überhaupt einen Gewinn. Die kurzfristige Faktornachfragekurve ist identisch mit jenem Teil der Grenzerlöskurve, welche unterhalb der Durchschnittserlöskurve verläuft und einen fallenden Verlauf aufweist. Wenn die Produktionsfunktion sinkende Skalenerträge aufweist, hat die langfristige Faktornachfragekurve einen fallenden Verlauf. Bei konstanten oder steigenden Skalenerträgen ist die Faktornachfrage unbestimmt.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Lösung zu Übungsaufgabe 1

Eine Autofabrik erzeugt aus Tausenden von Einzelteilen, welche dem Haushalt keinen Nutzen stiften, ein neues Gut, welches einen direkten Nutzen stiftet. Gleiches gilt für praktisch alle industriell erzeugten Produkte.

Manchmal besteht der Transformationsprozess aber auch darin, dass der Konsumnutzen eines Gutes lediglich erhöht wird. Dieser Fall tritt besonders häufig in der Nahrungsmittelindustrie auf. Hier werden Güter im Produktionsprozess eingesetzt, die bereits einen gewissen direkten Konsumnutzen besitzen. Durch Kombination mit anderen Gütern wird der Konsumnutzen aber gesteigert. Beispiel: Tiefkühlkost.

Lösung zu Übungsaufgabe 2

Eine umfassende Antwort auf diese Frage ist im Grunde der Inhalt der gesamten dritten Kurseinheit des vorliegenden Kurses. Intuitiv könnten Sie aber vielleicht jetzt schon folgende Größen nennen:

- Der Preis, zu dem das Produkt abgesetzt werden kann,
- die Mengen an Produktionsfaktoren, die zur Herstellung erforderlich sind,
- die Preise dieser Produktionsfaktoren und
- die zur Verfügung stehende Produktionstechnik.

Lösung zu Übungsaufgabe 3

Nein, dies folgt nicht daraus. Eine Firma könnte z.B. das Ziel der Absatzmaximierung unter der Nebenbedingung eines gegebenen Mindestgewinns verfolgen. Sie würde dann ebenfalls nur effiziente Produktionsverfahren verwenden, um die Produktmenge zu maximieren.

Lösung zu Übungsaufgabe 4

Die Dienstleistung derartiger Unternehmen könnte man z.B. durch die Wertschöpfung, also die Summe der Faktorentgelte (Lohneinkommen + Gewinneinkommen) messen. Die Wertschöpfung gibt jenen Wertzuwachs an, der durch den Einsatz der Produktionsfaktoren entstanden ist. Diese Wertgröße könnte man rechnerisch in eine Preis- und eine Mengenkomponente zerlegen, wenn man Preisänderungen durch einen geeigneten Index eliminiert. Die Mengenkomponente repräsentiert dann die Outputgröße.

Lösung zu Übungsaufgabe 5

Ja. Eine homothetische Funktion ist die streng monoton steigende Transformation einer linear-homogenen Funktion. Die Linear-Homogenität bewirkt, dass die Outputsteigerung proportional zur Inputsteigerung ist. Die positive Transformation bewirkt, dass die homothetische Funktion sowohl steigende als auch fallende Skalenerträge besitzen kann.

Betrachtet sei die linear-homogene Funktion $Q = L^{\frac{1}{2}}C^{\frac{1}{2}}$. Eine streng monoton positive Transformation dieser Funktion mit $Y = Q^2$ führt zu steigenden Skalenerträgen $(\mu^2 Y = (\mu L)(\mu C))$, während eine positiv monotone Transformation mit $Y = \sqrt{Q}$ zu sinkenden Skalenerträgen führt $(\mu^{\frac{1}{2}}Y = (\mu L)^{\frac{1}{4}}(\mu C)^{\frac{1}{4}})$.

Lösung zu Übungsaufgabe 6

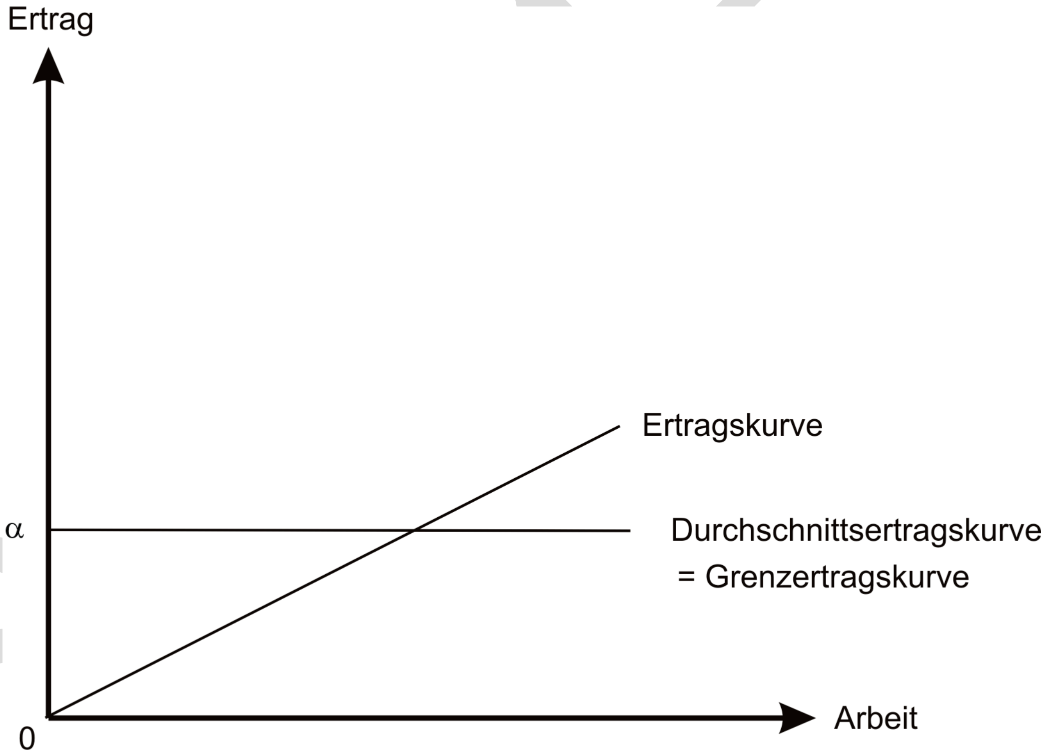


Abbildung (L 6): Lösung zu Übungsaufgabe 6

Lösung zu Übungsaufgabe 7

Diese Frage lässt sich erst beantworten, wenn man den Begriff der Effizienz verallgemeinert. Versteht man unter Effizienz die Lösung eines Optimierungsproblems unter Nebenbedingungen, so ist die durch tarifvertragliche Vorschriften erzwungene Mitfahrt eines Heizers auf einer Elektrolokomotive als effizient zu bezeichnen. Die Firma wählt nämlich aus der Menge der zulässigen Produktionsverfahren jenes, welches die Erzeugung der gewünschten Produktmenge (in dem Bespiel: Fahrleistung) mit minimalem Faktoreinsatz gestattet. Für die Beurteilung einer Situation als effizient oder ineffizient kommt es entscheidend darauf an, welche Restriktionen berücksichtigt werden. Wird eine Restriktion aufgehoben, kann eine Allokation, die vorher effizient war, ineffizient werden.

Lösung zu Übungsaufgabe 8

Die Grenzprodukte einer neoklassischen Produktionsfunktion sind für endliche Faktoreinsatzmengen positiv. Die abgebildete Kurve besitzt aber für endliche Werte der Arbeitseinsatzmenge einen Grenzertrag von null. Die Kurve kann also nicht die Grenzertragskurve einer neoklassischen Produktionsfunktion sein.

Lösung zu Übungsaufgabe 9

Auf Grund der Symmetrie reicht es, die Variation des Faktors Arbeit zu betrachten.

$$\frac{\partial Q}{\partial L}=\frac{2LC^2(L^3+C^3)-L^2C^2\cdot 3L^2}{(L^3+C^3)^2}=\frac{LC^2(2C^3-L^3)}{(L^3+C^3)^2}>0 \text{ für } L<2^{\frac{1}{3}}C\approx 1{,}260\cdot C\,.$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}=\ldots=\frac{2C^2(L^6-7L^3C^3+C^6)}{(L+C)^3(L^2-LC+C^2)^3}>0 \Leftrightarrow L^6-7L^3C^3+C^6>0\,.$$

Substituiere $\tilde{L}=L^3$ und $\tilde{C}=C^3$. Dann gilt:

$$\tilde{L}_{1,2}=\frac{7}{2}\tilde{C}\pm\sqrt{\frac{49}{4}\tilde{C}^2-\tilde{C}^2}=\left(\frac{7}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)\tilde{C}\text{. Hieraus folgt } L_{1,2}=\left(\frac{7}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C\,.$$

$L_1\approx 0{,}526\,C,\ L_2\approx 1{,}9\,C$. Wegen $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}\Big|_{L=0}>0$ gilt:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}>0 \text{ für } 0<L<\left(\frac{7}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C \text{ oder } L>\left(\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C \text{ und}$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}<0 \text{ für } \left(\frac{7}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C<L<\left(\frac{7}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C\,.$$

Insbesondere gilt $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}>0$ für $0<L<\left(\frac{7}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C$ und $\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2}<0$ für $\left(\frac{7}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}C<L<2^{\frac{1}{3}}C$. Im Bereich $L<2^{\frac{1}{3}}C$ besitzt die Funktion somit ertragsgesetzliche Eigenschaften.

Lösung zu Übungsaufgabe 10

Die Grenzrate der Substitution ist konstant, wenn die Isoquante eine Gerade ist.

Lösung zu Übungsaufgabe 11

$$GRS(L,C) = \frac{Q_C}{Q_L}, \quad \frac{\partial Q}{\partial L} = \alpha\gamma L^{\alpha-1}C^{1-\alpha} = \alpha\frac{Q}{L}, \ \frac{\partial Q}{\partial C} = (1-\alpha)\frac{Q}{C},$$

$$GRS(L,C) = \frac{(1-\alpha)\frac{Q}{C}}{\alpha\frac{Q}{L}} = \frac{(1-\alpha)}{\alpha}\frac{L}{C}.$$

Lösung zu Übungsaufgabe 12

Die Substitutionselastizität ist definiert als $\varepsilon_{Sub}(L,C) = \dfrac{\frac{d(L/C)}{L/C}}{\frac{d(f_C/f_L)}{f_C/f_L}}$.

Das Verhältnis $\frac{L}{C}$ wird durch $\tan\ \alpha_1$ gegeben, die relative Änderung dieses Verhältnisses durch das Verhältnis $\frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{\tan\alpha_1}$. Die Grenzrate der Substitution wird durch $\tan\beta_1$, die relative Änderung der Grenzrate der Substitution durch das Verhältnis $\frac{\tan\beta_2 - \tan\beta_1}{\tan\beta_1}$ gegeben. Die Substitutionselastizität ist dann:

$$\varepsilon_{Sub}(L,C) = \frac{\frac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{\tan\alpha_1}}{\frac{\tan\beta_2 - \tan\beta_1}{\tan\beta_1}}.$$

Lösung zu Übungsaufgabe 13

Eine neoklassische Produktionsfunktion zeichnet sich durch positive erste und negative zweite Ableitungen sowie konvexe Isoquanten aus. Die homothetische Funktion lautet:

$H = F\left[Q(L,C)\right]$ mit $F' > 0$ und $Q(L,C)$ neoklassisch. Dann gilt:

$H_L = F'\left[Q(L,C)\right]Q_L$ und $H_{LL} = F''\left[Q(L,C)\right]Q_L^2 + F'\left[Q(L,C)\right]Q_{LL}$.

Für $F'' > 0$ und $F''\left[Q(L,C)\right]Q_L^2 > \left|F'\left[Q(L,C)\right]Q_{LL}\right|$ ist $H_{LL} > 0$. Dann ist H keine neoklassische Funktion.

Lösung zu Übungsaufgabe 14

a) Grenzprodukte beider Faktoren: $Q_L = 0.5\dfrac{Q}{L} = 5\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, $Q_C = 0.5\dfrac{Q}{C} = 5\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

b) Grenzrate der Substitution: $GRS(L,C) = \dfrac{Q_C}{Q_L} = \dfrac{0.5\frac{Q}{C}}{0.5\frac{Q}{L}} = \dfrac{L}{C}$

c) Substitutionselastizität: $\varepsilon_{Sub} = 1$

d) Skalenelastizität: $\varepsilon_{Q,\mu} = 1$

e) Homogenitätsgrad: $h = 1$

Lösung zu Übungsaufgabe 15

a) Die Grenzprodukte beider Faktoren lassen sich wie folgt berechnen:

$$Q = \gamma\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$

$$Q^{-\rho} = \gamma^{-\rho}\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]$$

$$\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right] = \gamma^{\rho} Q^{-\rho}$$

$$Q_L = -\frac{1}{\rho}\gamma\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}-1}\left(-\rho\alpha L^{-\rho-1}\right)$$

$$= \frac{\gamma\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}}{\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]}\left(\frac{\alpha}{L^{\rho+1}}\right) = \frac{Q}{\gamma^{\rho}Q^{-\rho}}\frac{\alpha}{L^{\rho+1}} = \frac{\alpha\gamma^{-\rho}Q^{1+\rho}}{L^{1+\rho}} = \alpha\gamma^{-\rho}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho}.$$

Analog: $Q_C = (1-\alpha)\gamma^{-\rho}\left(\dfrac{Q}{C}\right)^{1+\rho}$.

b) Die Grenzrate der Substitution ergibt sich zu:

$$GRS(L,C) = \frac{Q_C}{Q_L} = \frac{(1-\alpha)\gamma^{-\rho}\left(\frac{Q}{C}\right)^{1+\rho}}{\alpha\gamma^{-\rho}\left(\frac{Q}{L}\right)^{1+\rho}} = \left(\frac{L}{C}\right)^{1+\rho}\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

Setzt man zur Abkürzung: $\dfrac{L}{C} = \kappa$ und $1+\rho = \sigma$, so gilt:

$$GRS(L,C) = \kappa^{\sigma}\frac{1-\alpha}{\alpha}.$$

c) Für die Änderung der Grenzrate der Substitution erhält man dann:

$$dGRS(L,C) = (\sigma\kappa^{\sigma-1}\kappa_L dL - \sigma\kappa^{\sigma-1}\kappa_C dC)\frac{1-\alpha}{\alpha} = \frac{1-\alpha}{\alpha}\sigma\frac{\kappa^{\sigma}}{\kappa}\left[\frac{1}{C}dL - \frac{L}{C^2}dC\right]$$

und für die relative Änderung:

$$\frac{dGRS(L,C)}{GRS(L,C)} = \sigma\frac{1}{\kappa}\left[\frac{L}{C}\frac{dL}{L} - \frac{L}{C}\frac{dC}{C}\right] = \sigma\left[\frac{dL}{L} - \frac{dC}{C}\right].$$

Der Ausdruck in Klammern ist aber nichts anderes als die relative Änderung des Faktoreinsatzverhältnisses, denn $\dfrac{d\kappa}{\kappa} = \dfrac{\left[\dfrac{1}{C}dL - \dfrac{L}{C^2}dC\right]}{\dfrac{L}{C}} = \dfrac{dL}{L} - \dfrac{dC}{C}$.

Dann ist $\varepsilon_{sub} = \dfrac{\dfrac{d\kappa}{k}}{\dfrac{dGRS(L,C)}{GRS(L,C)}} = \dfrac{1}{\sigma} = \dfrac{1}{1+\rho}$ die Substitutionselastizität.

d) Die Skalenelastizität berechnet sich wie folgt:

$$\bar{Q} = \gamma\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$= \gamma\left[\alpha(\mu L)^{-\rho} + (1-\alpha)(\mu C)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$= \gamma\left[\alpha\mu^{-\rho}L^{-\rho} + (1-\alpha)\mu^{-\rho}C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$= \gamma\left[\mu^{-\rho}\left(\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right)\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$= \mu\gamma\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$Q = \mu\bar{Q}$$
$$\varepsilon_{Q,\mu} = \frac{dQ}{d\mu}\frac{\mu}{Q} = \bar{Q}\frac{\mu}{\mu\bar{Q}} = 1.$$

e) Analog ergibt sich für den Homogenitätsgrad:

$$\mu^h Q = \gamma\left[\alpha(\mu L)^{-\rho} + (1-\alpha)(\mu C)^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$= \gamma\mu\left[\alpha L^{-\rho} + (1-\alpha)C^{-\rho}\right]^{-\frac{1}{\rho}}$$
$$= \mu Q$$
$$\mu^h = \mu$$
$$h = 1.$$

Lösung zu Übungsaufgabe 16

Für homothetische Funktionen gilt, dass die Grenzrate der Substitution entlang einer Ursprungsgeraden (Isokline) konstant ist. Da das Faktoreinsatzverhältnis entlang der Isokline ebenfalls konstant ist, muss die Substitutionselastizität entlang einer Isoklinen dann ebenfalls konstant sein. Sie ist also unabhängig von der Höhe der Produktion. Das heißt aber noch nicht, dass sie auch bei Änderungen des Faktoreinsatzverhältnisses, also bei Bewegungen entlang der Isoquante, konstant wäre. Bei einer derartigen Bewegung ändert sich sowohl das Faktoreinsatzverhältnis als auch die Grenzrate der Substitution. Im Allgemeinen ändert sich dann auch die Substitutionselastizität. Nur in dem speziellen Fall der CES-Funktion bleibt die Substitutionselastizität sowohl bei Bewegungen entlang der Isoquante als auch bei Bewegungen entlang der Isokline konstant.

Lösung zu Übungsaufgabe 17

1. Es wird nur ein Produkt hergestellt.
2. Dieses Produkt wird mit Hilfe der beiden Produktionsfaktoren Arbeit und Kapital erzeugt.
3. Die zur Anwendung kommende Produktionstechnik lässt sich durch eine Produktionsfunktion beschreiben.
4. Ziel der Firma ist die Maximierung ihres Periodengewinns. Dies impliziert die Minimierung der Kosten.
5. Auf kurze Frist ist die Einsatzmenge mindestens eines Faktors nicht variabel. Auf lange Frist sind die Einsatzmengen aller Faktoren variabel.
6. Die Preise der Produktionsfaktoren sowie des Produktes werden von der Firma als gegeben betrachtet, d.h. sie hat keinen Einfluss auf die Höhe dieser Preise.
7. Zu diesen Preisen kann die Firma jede beliebige Faktormenge kaufen und jede beliebige Produktmenge verkaufen, d.h. Faktorangebot und Produktnachfrage sind vollkommen elastisch.
8. Alle Größen, die für die Produktionsentscheidungen relevant sind, werden als bekannt vorausgesetzt, d.h. es herrscht vollständige Information.

Lösung zu Übungsaufgabe 18

Die ökonomischen Kosten sind höher als die buchhalterischen Kosten, wenn die Opportunitätskosten der eigenen Faktorleistungen des Unternehmens (Arbeitsleistung des Unternehmers, Nutzung des eigenen Kapitals) höher sind als die buchhalterischen Kosten. Die Arbeitsleistung des Unternehmers wird buchhalterisch nicht als Faktorleistung angesehen, geht also nicht in die Kostenrechnung ein. Die Kosten des eigenen Kapitals werden mit den Abschreibungen zu Wiederbeschaffungspreisen angesetzt. Die Opportunitätskosten der Arbeitsleistung des Unternehmers sind vermutlich immer größer als null, die des eingesetzten eigenen Kapitals können höher, können aber auch niedriger sein als die Abschreibungen.

Lösung zu Übungsaufgabe 19

a) $\frac{dL}{dC} = -\frac{Q_L}{Q_C}$: Falsch! Erstens müsste es heißen $\frac{dL}{dC} = -\frac{Q_C}{Q_L}$, und zweitens gibt die Gleichung lediglich die Steigung der Isoquante an.

b) $\frac{r}{l} = \frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}}$: Richtig!

c) $GRS(L,C) = \frac{\frac{\partial f}{\partial C}}{\frac{\partial f}{\partial L}}$: Falsch! Dies ist keine Kostenminimierungsbedingung, sondern eine Definition der Grenzrate der Substitution .

d) $\frac{r}{l} = GRS(L,C)$: Richtig!

Lösung zu Übungsaufgabe 20

Ja. Die folgende Abbildung stellt diesen Fall dar.

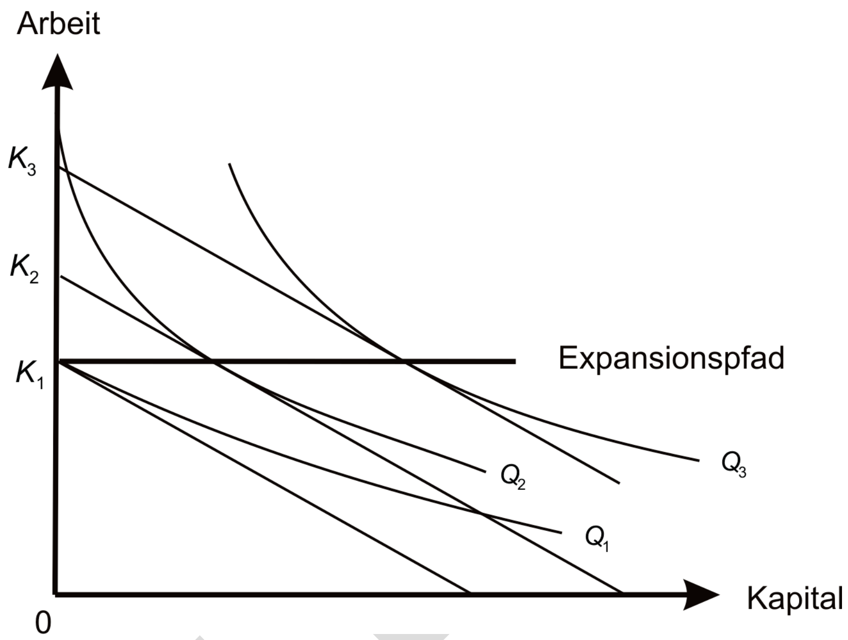


Abbildung (L 20): Lösung zu Übungsaufgabe 20

Lösung zu Übungsaufgabe 21

Wenn der Expansionspfad eine Gerade durch den Ursprung ist, muss auch die Kostenkurve im Ursprung beginnen. Sie braucht aber keine Gerade zu sein. Dies ist nur bei Produktionsfunktionen mit konstanten Skalenerträgen der Fall. Homothetische Produktionsfunktionen brauchen aber keine konstanten Skalenerträge aufzuweisen.

Lösung zu Übungsaufgabe 22

Bezeichnen wir die Einheiten wie folgt:

Gütereinheit: GE
Währungseinheit: WE
Arbeitseinheit: LE
Kapitaleinheit: CE
Unter Verwendung der zugehörigen Einheiten lässt sich (3.3-15) dann schreiben als:

$$\frac{f_L\left[\frac{GE}{LE}\right]}{l\left[\frac{WE}{LE}\right]} = \frac{f_C\left[\frac{GE}{CE}\right]}{r\left[\frac{WE}{CE}\right]} = \ldots\left[\frac{GE}{WE}\right].$$

Jeder der Terme in (3.3-15) hat dann die Dimension $\left[\frac{GE}{WE}\right]$, also Gütereinheit pro Währungseinheit. Deshalb die Aussage: Bei Kostenminimierung erzeugt jeder Euro Faktoreinsatz die gleiche Gütermenge.

Lösung zu Übungsaufgabe 23

Die Kostengleichung ist eine Definitionsgleichung, welche die Gesamtkosten als Summe der einzelnen Faktorkosten definiert. Diese Gleichung ist stets erfüllt, unabhängig davon, welche Faktoreinsatzmengen gewählt werden.

Die Kostenfunktion ordnet gegebenen Produktmengen jene Kosten zu, die entstehen, wenn die Faktoreinsatzmengen optimal gewählt werden.

Lösung zu Übungsaufgabe 24

Zu a) $\mu^h K = \left\{\mu l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu r}{\mu l}\right]^{\beta} + \mu r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{\mu r}{\mu l}\right]^{-\alpha}\right\}Q$

$$\mu^h K = \mu\left\{l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta} + r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha}\right\}Q$$

$$\mu^h K = \mu K$$

$$h = 1.$$

Zu b) $K = \left\{l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta} + r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha}\right\}Q$

$$K_r = \frac{\partial K}{\partial r} = \left\{\beta l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta l}\right) + \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha} - \alpha r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{\beta l}\right)\right\}Q.$$

K_r ist positiv, falls der Ausdruck in der geschweiften Klammer positiv ist. Dies ist der Fall, da:

$$\beta l\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta-1}\left(\frac{\alpha}{\beta l}\right) + \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha} > \alpha r\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{\beta l}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta l}{r}\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta} + \left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha} > \alpha\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha}$$

$\Leftrightarrow \frac{\beta l}{r}\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{\beta} + \beta\left[\frac{\alpha}{\beta}\frac{r}{l}\right]^{-\alpha} > 0$. Dies ist erfüllt, da $\alpha, \beta > 0$ und $r, l > 0$.

Lösung zu Übungsaufgabe 25

Diseconomies of scale bedeuten, dass die Gesamtkostenkurve konvex zum Ursprung verläuft. Die Grenz- und Durchschnittskosten steigen also, ihre Kurven haben einen positiven Anstieg. Dies heißt aber noch nicht, dass die Steigung zunehmen muss. In der folgenden Abbildung ist eine konvexe Gesamtkostenkurve mit konkaven Grenz- und Durchschnittskostenkurven eingezeichnet.

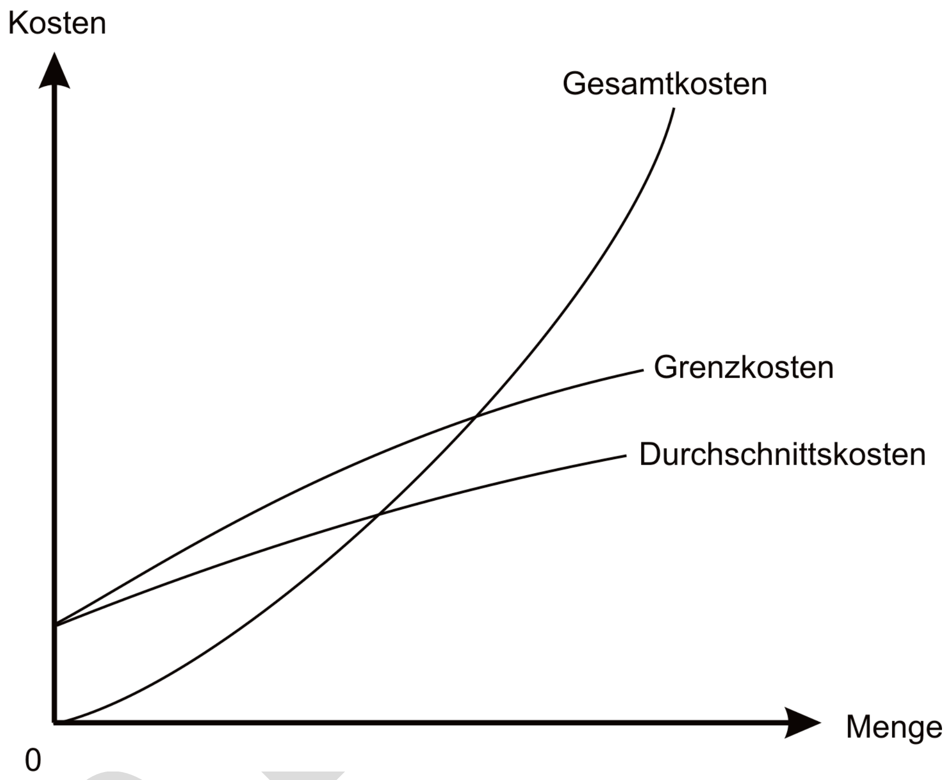


Abbildung (L 25): Lösung zu Übungsaufgabe 25

Beispiel:

Betrachte die Kostenfunktion $K(Q) = Q^{\frac{3}{2}}$.

Für diese Funktion gilt:

$$K'(Q) = \frac{3}{2}Q^{\frac{1}{2}}$$

$$K''(Q) = \frac{3}{4}Q^{-\frac{1}{2}}$$

$$K'''(Q) = -\frac{3}{8}Q^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow K' \text{ ist konkav.}$$

Für die Durchschnittskosten gilt

$$DK = \frac{K}{Q} = Q^{\frac{1}{2}}$$

$$DK' = \frac{1}{2} Q^{-\frac{1}{2}}$$

$DK'' = -\frac{1}{4} Q^{-\frac{3}{2}}$. Die Durchschnittskosten steigen und sind konkav.

Lösung zu Übungsaufgabe 26

Wenn Faktoren bei einer Produktionssteigerung vermehrt nachgefragt werden, wenn es sich also um normale Faktoren handelt, steigen die Kosten dieser Faktoren bei einer Produktionssteigerung. Dieser Kostenanstieg ist um so größer, je höher der Faktorpreis ist. Sinkt dagegen die Nachfrage nach einem Faktor bei einer Produktionssteigerung, ist dieser Faktor also inferior, so treten zwei kostenwirksame Effekte auf:

a) Die Kosten des inferioren Faktors sinken, weil von dem inferioren Faktor weniger nachgefragt wird.
b) Die Kosten der normalen Faktoren steigen, weil der inferiore Faktor durch normale Faktoren ersetzt werden muss.

Je höher der Preis des inferioren Faktors, desto stärker wirkt sich der kostensenkende Effekt aus, während der kostensteigernde Effekt einer Substitution des inferioren Faktors durch die normalen Faktoren durch die Preiserhöhung des inferioren Faktors nicht berührt wird. Die Preise der normalen Faktoren bleiben ja konstant. Deshalb sinken die Grenzkosten, wenn der Preis eines inferioren Faktors steigt. In der folgenden Abbildung ist ein derartiger Fall dargestellt.

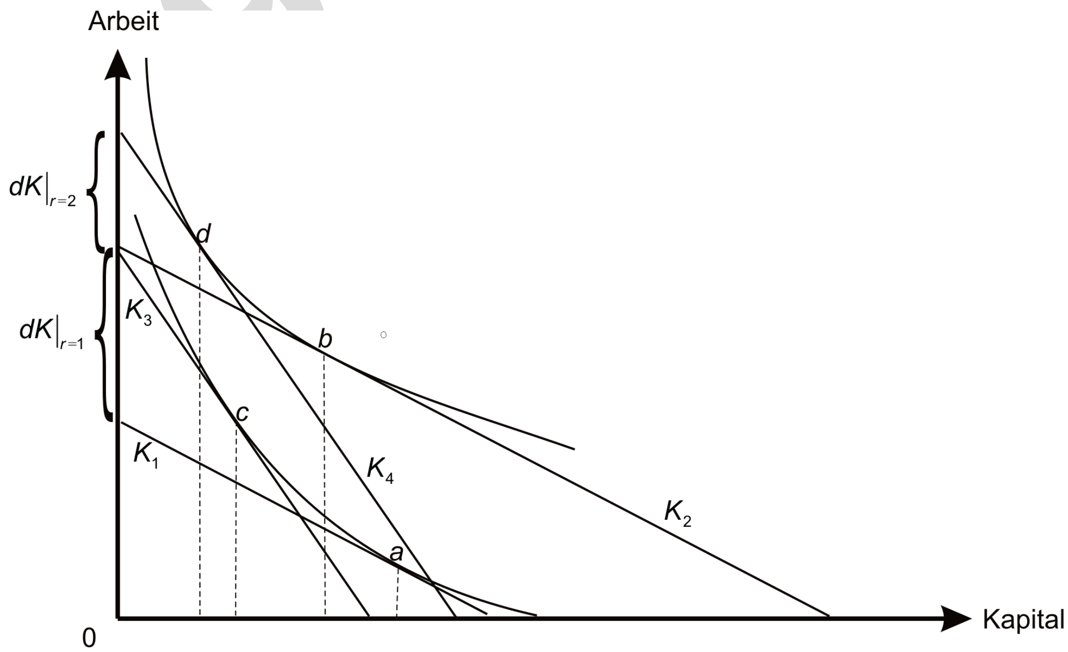


Abbildung (L 26): Lösung zu Übungsaufgabe 26

In der Ausgangssituation wird das Inputbündel a gewählt. Nach Anstieg des Faktorpreises r von $r=1$ auf $r=2$ wird das Bündel c gewählt, mit welchem die gleiche Menge hergestellt werden kann. Die „Grenzkosten“ im Punkt a, d.h. der Kostenanstieg, der mit einer Ausweitung der Produktion von a nach b verbunden ist, werden durch $dK|_{r=1}$ angegeben. Die „Grenzkosten“ im Punkt c, d.h. der Kostenanstieg, der mit einer Ausweitung der Produktion von c nach d verbunden ist, werden durch $dK|_{r=2}$ angegeben. Infolge des Preisanstiegs für den inferioren Faktor kommt es also zu einem Sinken der Grenzkosten.

Lösung zu Übungsaufgabe 27

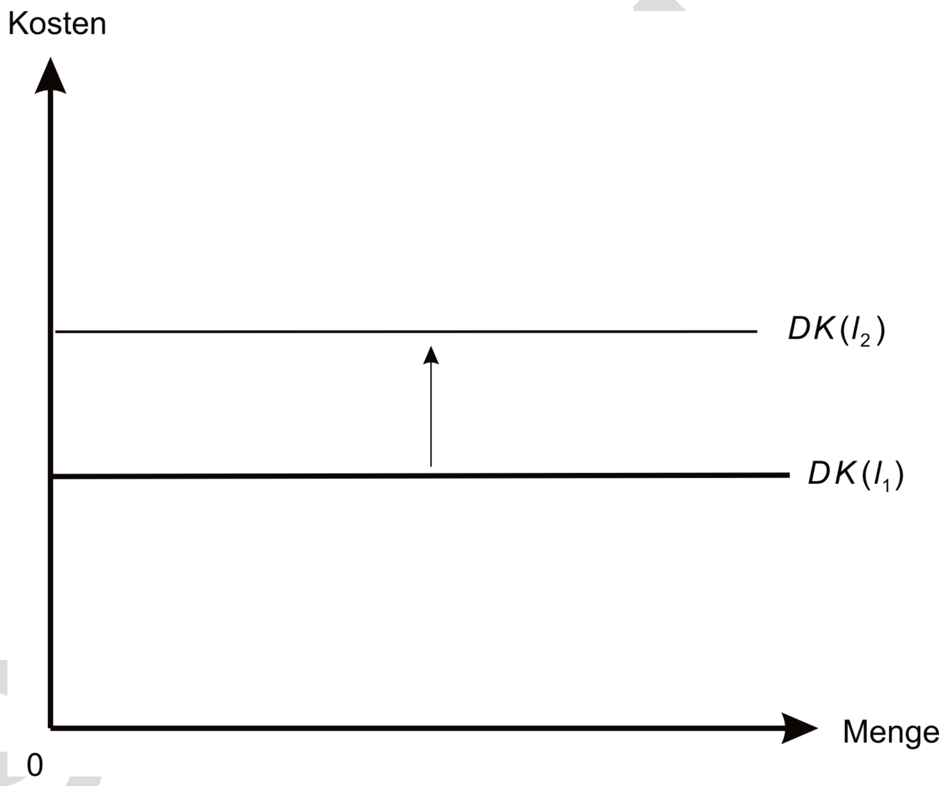


Abbildung (L 27): Lösung zu Übungsaufgabe 27

Lösung zu Übungsaufgabe 28

Die Grenzkostenfunktion hat die Form: $K' = a + bQ$ mit $a,b>0$.

Die Durchschnittskostenfunktion könnte die Form $DK = \frac{K}{Q} = a + \frac{b}{2}Q + \frac{c}{Q}$ mit $c>0$ haben. Es gilt nämlich $\frac{\partial DK}{\partial Q} = \frac{1}{2}b - \frac{c}{Q^2}\begin{cases} <0 & \text{für } Q<\sqrt{\frac{2c}{b}} \\ >0 & \text{für } Q>\sqrt{\frac{2c}{b}} \end{cases}$ und

$DK'' = \frac{2c}{Q^3} > 0$.

Die Kostenfunktion lautet dann: $K = aQ + \frac{b}{2}Q^2 + c$.

Lösung zu Übungsaufgabe 29

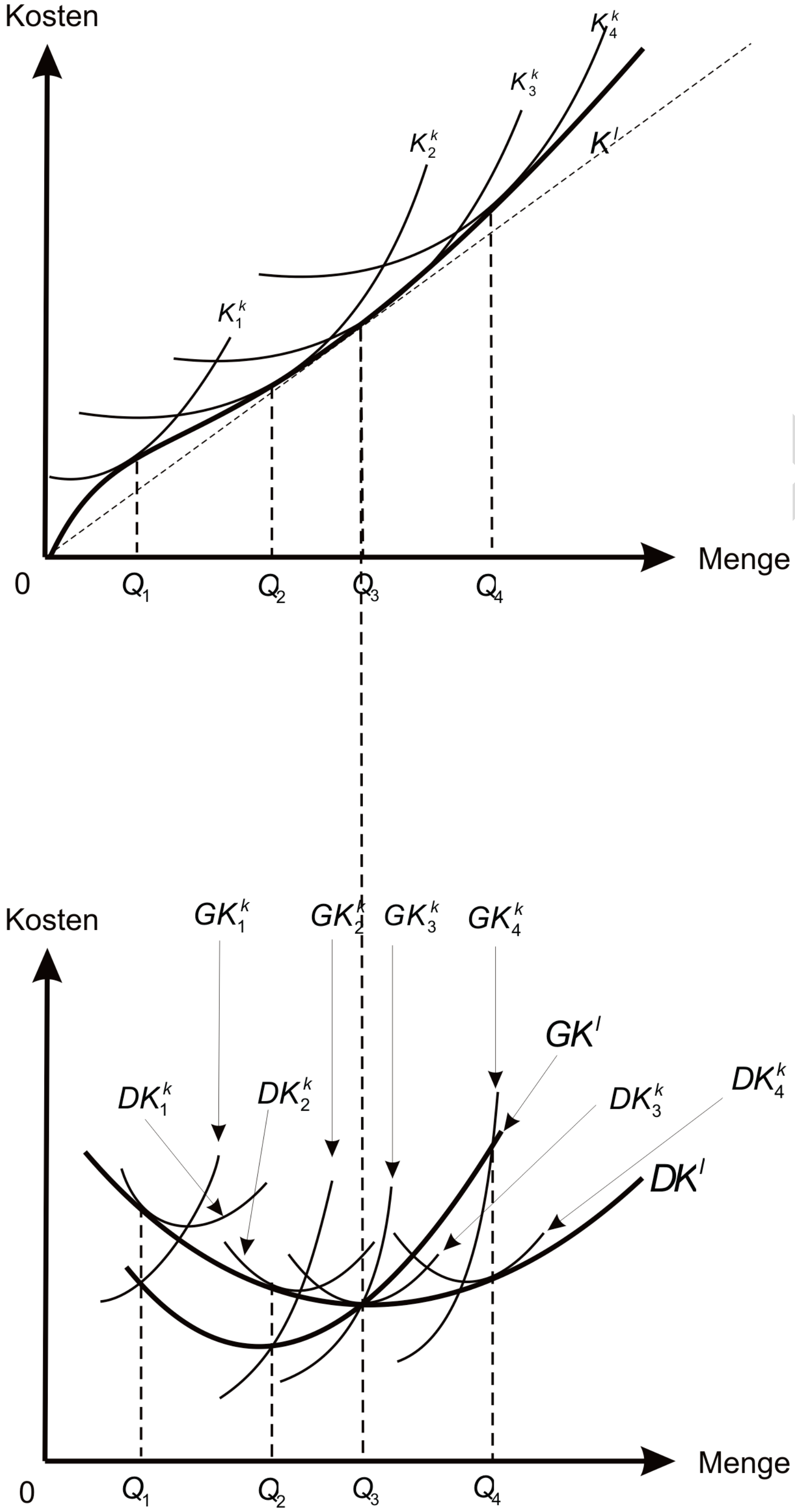


Abbildung (L 29): Lösung zu Übungsaufgabe 29

Lösung zu Übungsaufgabe 30

Die Funktion ist unabhängig von den Faktorpreisen, da die Firma keine Entscheidungsfreiheit besitzt. Die Firma möchte die Menge Q herstellen, und der Faktor Kapital ist fix. Dann ist sie aus technischen Gründen gezwungen, eine bestimmte Menge des variablen Faktors Arbeit einzusetzen. Die Faktorpreise haben (bei gegebener Produktmenge!) keinen Einfluss auf die Inputentscheidung. Falls es außer dem Faktor Arbeit noch weitere variable Faktoren gäbe, müsste die Firma zwischen diesen variablen Faktoren eine Entscheidung treffen, die von der Höhe der Preise dieser Faktoren abhängig wäre.

Lösung zu Übungsaufgabe 31

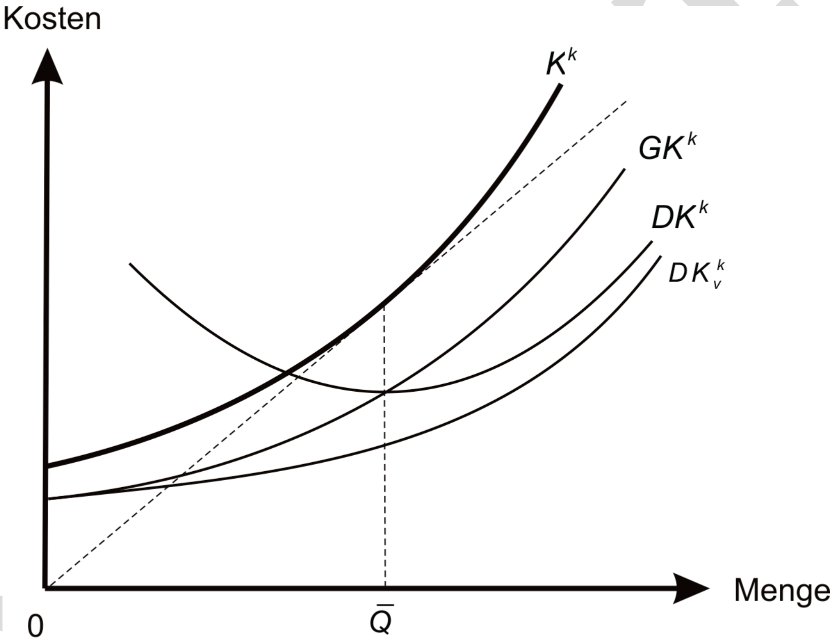


Abbildung (L 31): Lösung zu Übungsaufgabe 31

Lösung zu Übungsaufgabe 32

Für die kurzfristigen Gesamtkosten gilt: $K^k = lQ^{\frac{1}{\alpha}}\bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}} + r\bar{C}$. Daraus folgt: $\frac{\partial K^k}{\partial \bar{C}} = \frac{-\beta}{\alpha} lQ^{\frac{1}{\alpha}}\bar{C}^{\frac{-\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\alpha}} + r \;\Rightarrow\; \frac{\partial K^k}{\partial \bar{C}} = \frac{-\beta}{\alpha} lQ^{\frac{1}{\alpha}}\bar{C}^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} + r$. Dieser Ausdruck ist null, falls: $\frac{\beta}{\alpha} lQ^{\frac{1}{\alpha}}\bar{C}^{-\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = r$ oder $Q^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha r}{\beta l}\bar{C}^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}$ oder $Q = \left(\frac{\alpha r}{\beta l}\right)^{\alpha} \bar{C}^{\alpha+\beta}$. Daraus folgt: Für $Q \gtrless \left(\frac{\alpha r}{\beta l}\right)^{\alpha} \bar{C}^{\alpha+\beta}$ ist $\frac{\partial K^k}{\partial \bar{C}} \lessgtr 0$. Die Antwort auf die Frage lautet also: Sobald die Produktmenge eine gewisse Grenze überschreitet, ist eine größere Einsatzmenge des fixen Faktors mit geringeren Gesamtkosten verbunden.

Lösung zu Übungsaufgabe 33

Die Änderung des Preises eines variablen Faktors hat keinen Einfluss auf die Höhe der fixen Kosten. Die Änderung des Preises eines fixen Faktors hat keinen Einfluss auf die Höhe der variablen Kosten. Die entsprechenden Kurven verschieben sich nicht.

Lösung zu Übungsaufgabe 34

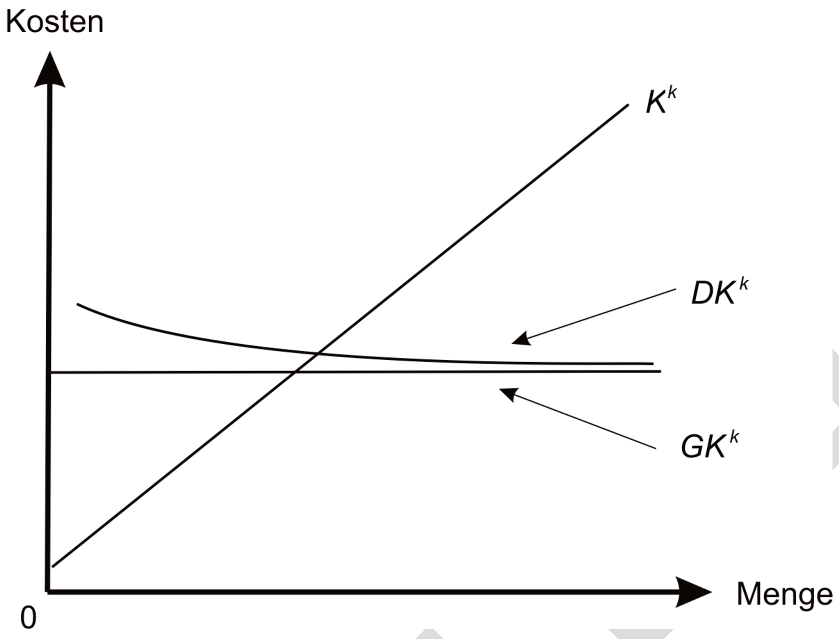


Abbildung (L 34): Lösung zu Übungsaufgabe 34

Lösung zu Übungsaufgabe 35

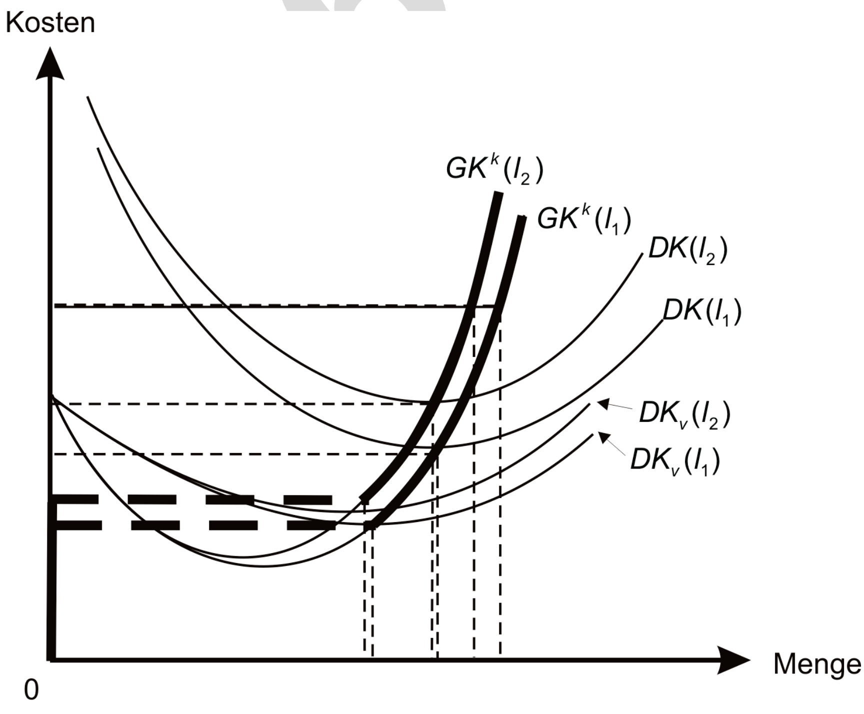


Abbildung (L 35): Lösung zu Übungsaufgabe 35

Lösung zu Übungsaufgabe 36

$$E = PQ$$

$$E_Q = \frac{\partial E}{\partial Q} = P\ .$$

Lösung zu Übungsaufgabe 37

Die Höhe des Preises des fixen Faktors hat insofern keinen Einfluss auf die Lage der langfristigen Angebotskurve, da langfristig alle Faktoren variabel sind und somit langfristig kein fixer Faktor existiert.

Lösung zu Übungsaufgabe 38

Die langfristige Kostenfunktion auf der Grundlage einer Cobb-Douglas-Produktionsfunktion lautet:

$$K = \left\{ l \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right\} Q^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

. Für die Grenzkosten gilt dann

$$K' = \frac{1}{\alpha+\beta} \left\{ l \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right\} Q^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$$

und für die Durchschnittskosten:

$$\frac{K}{Q} = \left\{ l \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + r \left[\frac{\alpha}{\beta} \frac{r}{l} \right]^{-\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \right\} Q^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}\ .$$

Für $\alpha + \beta > 1$ ist dann $\frac{K}{Q} > K'$ für alle $Q > 0$.

Lösung zu Übungsaufgabe 39

Die buchhalterischen Kosten fremdbezogener Kapitalleistungen bestehen aus dem vereinbarten Mietpreis, Kosten eigener Kapitalleistungen aus den zu Wiederbeschaffungspreisen bewerteten Abschreibungen. Die ökonomischen Kosten bestehen in beiden Fällen aus der höchsten Entlohnung (z.B. Mieteinnahmen), den diese Faktoren in einer anderen Verwendung erzielen könnten. Falls keine alternative Verwendung möglich ist, z.B. wegen zu hoher Transportkosten, sind die ökonomischen Kosten null. Die buchhalterischen Kosten können trotzdem positiv sein.

Lösung zu Übungsaufgabe 40

Die ökonomischen Kosten der fixen Faktoren sind der Ertrag, den diese Faktoren in der besten alternativen Verwendung erzielen könnten. Etwaige Transaktionskosten (Transport-, Montage-, Vertragskosten etc.) sind von den potentiellen Erträgen bereits abgezogen. In der besten alternativen Verwendung wird definitionsgemäß ein hundertprozentiger Deckungsbeitrag erwirtschaftet, denn die Kosten und der Ertrag sind identisch, weil die Kosten Opportunitätskosten sind. In der bisherigen Verwendung wird dagegen ein Deckungsbeitrag erwirtschaftet, der kleiner als einhundert Prozent ist, sobald der Produktpreis unterhalb der gesamten Durchschnittskosten liegt.

Dieses Ergebnis steht scheinbar im Widerspruch zu unserem weiter oben abgeleiteten Ergebnis, wonach die Produktion solange aufrechterhalten werden sollte, wie noch ein positiver Deckungsbeitrag erwirtschaftet wird, d.h. solange der Preis höher ist als die *variablen* Durchschnittskosten. Jetzt wird empfohlen, die Produktion bereits einzustellen, sobald der Preis niedriger ist als die *gesamten* Durchschnittskosten. Die Erklärung für diesen Widerspruch liegt in unterschiedlichen (impliziten) Annahmen über den Zeitbedarf für eine Auflösung der Firma. Wenn die Firma in der kurzen Frist nicht aufgelöst werden kann, wenn es also tatsächlich „fixe" Faktoren gibt, gilt die erste Formulierung. Wenn die Firma dagegen bereits in der kurzen Frist aufgelöst werden kann und es deshalb im Grunde gar keine „fixen" Faktoren gibt, gilt die zweite Formulierung.

Lösung zu Übungsaufgabe 41

Eine derartige Situation kann z.B. eintreten, wenn die Möglichkeiten des Unternehmens zur Kreditaufnahme beschränkt sind. Wir haben in unserer Argumentation unterstellt, dass die Firma zum geltenden Zinssatz jeden Kredit bekommen kann. In der Realität ist diese Voraussetzung nicht immer erfüllt, da Rentabilitäts-, Liquiditäts- und Bonitätsüberlegungen bei der Kreditvergabe durch die Bank ebenfalls eine Rolle spielen.

Die Lagrange-Funktion würde in diesem Fall lauten:

$$\Lambda = Q(L,C) + \lambda\left[\bar{K} - lL - rC\right].$$

Bei diesem Gesichtspunkt wirkt sich das später (im Kurs „Marktversagen") zu behandelnde Problem der asymmetrischen Information zwischen dem Kreditgeber (Bank) und dem Kreditnehmer (Firma) aus.

Lösung zu Übungsaufgabe 42

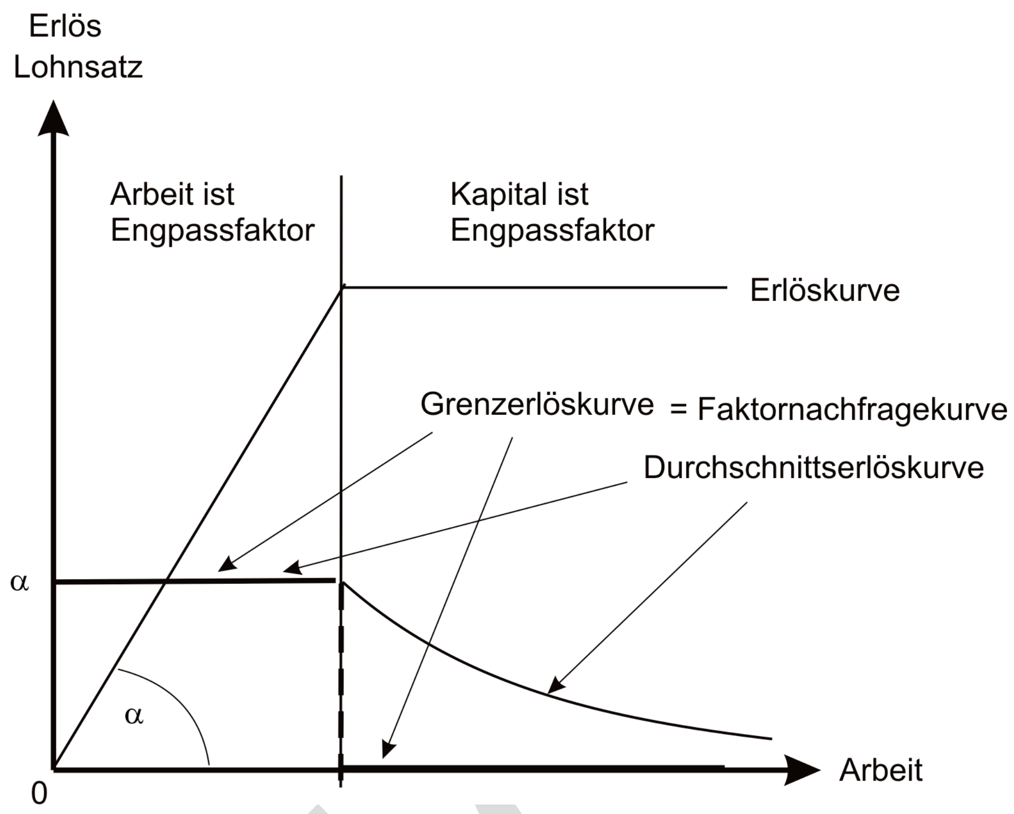


Abbildung (L 42): Lösung zu Übungsaufgabe 42

Lösung zu Übungsaufgabe 43

Wir hatten einerseits unterschieden zwischen bedingten und nicht bedingten und andererseits zwischen kurz- und langfristigen Faktornachfragefunktionen. Kurzfristige Faktornachfragefunktionen zeichnen sich dadurch aus, dass mindestens ein Faktor fix ist, bedingte dadurch, dass die Produktmenge gegeben ist. Sowohl kurzfristige als auch langfristige Faktornachfragefunktionen können bedingt oder unbedingt formuliert werden.

Index

Autorenverzeichnis

Literatur zu Kurseinheit 3

Acemoglu, D., (2009), Introduction to Modern Economic Growth, New Jersey.

Behrman, J.R., (1982), Country and Sectoral Variations in Manufacturing Elasticities of Substitution between Capital and Labor, in: A.O. Krueger (Hrsg.), Trade and Employment in Developing Countries – Vol. 2: Factor Supply and Substitution, Chicago, 159-192.

Claro, S., (2003), A Cross-Country Estimation of the Elasticity of Substitution between Labor and Capital in Manufacturing Industries,Latin American Journal of Economics 40, 239-257..

Cobb, C.W., P.H. Douglas, (1928), A Theory of Production, American Economic Review 18, 139-165.

Deutsche Bundesbank, (1995), Das Produktionspotential in Deutschland und seine Bestimmungsfaktoren, Monatsbericht August, 41-56.

Douglas, P.H., (1934), The Theory of Wages, New York, 132-135.

Douglas, P.H., (1976), The Cobb-Douglas Production Function Once Again: Its History, its Testing, and Some New Empirical Values, Journal of Political Economy 84, 903-915.

Endres, A., (2007), Umweltökonomie, 3. Aufl., Stuttgart.

Frohn, J., (1995), Grundausbildung in Ökonometrie, 2. Aufl., Berlin, New York.

Gravelle, H., R. Rees, (2004), Microeconomics, 3. Aufl., London, New York.

Henderson, J.M., R.E. Quandt, (1983), Mikroökonomische Theorie, 5. Aufl., München.

Henriksen, E., K.H.M. Knarvik, F. Steen, (2001), Economies of Scale in European Manufacturing Revisited, CEPR (Centre for Economic Policy Research) Discussion Paper 2896, London.

Knieps, G., (2008), Wettbewerbsökonomie, 3. Auflage, Berlin.

Maußner, A., R. Klump, (1996), Wachstumstheorie, Berlin.

von Auer, L., (2011), Ökonometrie: Eine Einführung, 5. Auflage, Berlin.

Walters, A.A., (1963), Production and Cost Functions: An Econometric Survey, Econometrica 31, 1-66.

002 498 316 (10/16)

00049-4-03-S1