1 Modelltheoretische und entscheidungslogische Grundlagen

1.1 Vorbemerkung

Objekte der Investitionstheorie

Gegenstand der betriebswirtschaftlichen Investitionstheorie und dieses Kurses sind Entscheidungen über **Investitionsprojekte.** Dabei werden unter Investitionsprojekten Aktivitäten verstanden, die durch folgende Merkmale gekennzeichnet sind:

– Zunächst erfolgt ein Faktoreinsatz (Input),

– erst in späteren Zeitpunkten folgen, evtl. neben weiterem Faktoreinsatz, Ergebnisse (Output) und

– die zeitliche Divergenz zwischen Input und Output erreicht eine solche Größenordnung, dass ihre explizite Berücksichtigung für eine sachgerechte Entscheidung erforderlich ist.

Beispiele für Investitionsprojekte

Beispiele für Investitionsprojekte in diesem Sinne können etwa sein:

– Gründung eines Zweigwerkes;
– Kauf einer neuen Produktionsanlage;
– Rationalisierungsmaßnahmen am vorhandenen Maschinenpark;
– Einleitung eines Werbefeldzuges zur Vorbereitung der Einführung eines neuen Produktes;
– Ausbildung von Mitarbeitern;
– Durchführung eines Forschungsprojektes.

Übungsaufgabe 1:
Geben Sie jeweils mit wenigen Stichworten an, worin bei den soeben genannten Investitionsprojekten Input und Output bestehen können!

Investitionsentscheidungen als langfristige Entscheidungen

Das letztgenannte Merkmal eines Investitionsprojektes (zeitliche Divergenz) impliziert, dass sich die hier in ihren Grundzügen vorgestellte betriebswirtschaftliche Investitionstheorie in der Regel mit der Entscheidung über solche Projekte beschäftigt, deren unmittelbare Konsequenzen sich über mehrere Perioden erstrecken. Investitionsentscheidungen werden daher oft auch als **langfristige Entscheidungen** bezeichnet – im Gegensatz etwa zur Planung des monatlichen Produktionsprogramms als einer eher kurzfristigen Entscheidung, deren unmittelbare Konsequenzen sich über einen kürzeren Zeitraum erstrecken.

Gegenstand einer Investitionsentscheidung sind stets Wahlentscheidungen über alternative Investitionsprojekte oder ganze Investitionsprogramme, d.h. Entscheidungen, durch die die **Struktur oder Höhe des Unternehmensvermögens** nachhaltig beeinflußt werden.

Behandlung spezieller theoretischer Entscheidungsmodelle

Innerhalb der Kurseinheiten 1 und 2 dieses Kurses werden wir uns auf eine isolierte, modellgestützte Betrachtung von Investitionsentscheidungen beschränken. Die hier behandelten Modelle können dabei der Klasse der theoretischen Entscheidungsmodelle für Mehrzeitpunktentscheidungen unter Sicherheit zugeordnet werden.[1] Bevor der Blick auf diese Modellsicht verengt wird, soll zur Vermeidung von Missverständnissen aber zunächst noch einmal ausdrücklich auf wesentliche Grenzen dieser Betrachtungsweise hingewiesen werden.

Grenzen modellgestützter Investitionsentscheidungen

Wie alle theoretischen Entscheidungsmodelle sind auch die hier zu behandelnden Investitionsentscheidungsmodelle vom Prinzip der isolierenden Abstraktion und damit zwangsläufig von einer Diskrepanz zwischen Modellwelt und Realität geprägt. *Reale* Investitionsentscheidungen können von den hier in einem Modellrahmen betrachteten, *idealisierten* Investitionsentscheidungen in der Weise abweichen, dass in der Realität auch Aspekte von Investitionsalternativen zu berücksichtigen sind, die durch die hier verwendeten Modelle nicht erfasst werden. Dementsprechend muss die in der Realität für ein konkretes Investitionsproblem tatsächlich zu treffende Entscheidung auch nicht zwingend mit der Handlungsempfehlung übereinstimmen, die mit Hilfe eines der nachfolgend behandelten Modelle abgeleitet wird.

Wenn wir im folgenden unterstellen, dass modellmäßig abgeleitete Handlungsempfehlungen zugleich den Inhalt der in Angriff genommenen Aktionen darstellen, so sollte stets bedacht werden, dass wir hier auch nur „künstlich gedachte Realitäten“ in Modellen abbilden und wir diese „künstlich gedachten Realitäten“ immer gerade so konzipieren, dass modellmäßige Handlungsempfehlungen und in Angriff zu nehmende Aktionen übereinstimmen. Bei der modellmäßigen Behandlung „praktischer“ Investitionsentscheidungsprobleme muss diese Übereinstimmung aber nicht unbedingt gegeben sein.

1 Zum Begriff des „theoretischen Entscheidungsmodells“ sowie einer „Mehrzeitpunktentscheidung unter Sicherheit“ als speziellem Entscheidungstyp vgl. Abschnitte 2.1.1 und 2.1.2 der Kurseinheit 3 dieses Kurses.

1.2 Darstellung von Investitionsprojekten

1.2.1 Vermögensmaximierung als Zielsetzung

Pluralität möglicher Zielvorstellungen

Zur Formulierung eines Optimalitätskriteriums (für das Entscheidungsmodell) ist zunächst festzustellen, welche **Zielvorstellungen** (in der abzubildenden Realwelt) für die Auswahl des Investitionsprogramms relevant sind. Dazu ist insbesondere nach den **Personengruppen** zu fragen, deren Ziele für das Treffen von Investitionsentscheidungen maßgeblich sind.

Je nachdem, welche Personengruppe (z.B. Gesellschafter, Gläubiger, Arbeitnehmer, Manager, öffentliche Stellen) als die für Investitionsentscheidungen maßgebliche Gruppe betrachtet wird, können sich die relevanten Zielvorstellungen unter Umständen stark unterscheiden. So könnten etwa Gesellschafter und Gläubiger im Detail zwar unterschiedliche, aber insgesamt wohl eher monetär orientierte Interessen haben, während Arbeitnehmer vielleicht eher an einer hohen Sicherheit gegen Entlassungen und Unfälle interessiert sein könnten.

Vermögensmaximierung der Gesellschafter als Zielsetzung

In der Investitionstheorie, wie wir sie im folgenden behandeln wollen, wird als maßgebliche Gruppe auf die **Gesellschafter** abgestellt. Weiterhin wird unterstellt, dass diese vorrangig monetäre Ziele verfolgen und ein möglichst hohes Vermögen anstreben. Auch diese Annahme ist wegen möglicher Mehrdeutigkeit noch nicht unbedingt eine ausreichend präzise Zielvorgabe, die in jedem Zusammenhang die Ableitung von Investitionsentscheidungen erlauben muss. So ist zunächst zu bedenken, dass Vermögenseffekte von Investitionsprojekten im Allgemeinen nicht mit Sicherheit im Voraus bekannt sind, so dass zusätzliche Präzisierungen bezüglich des letztlich maßgeblichen Entscheidungskriteriums notwendig werden. Es bedarf also weiterer Festlegungen der Art, wie Sie sie in den Kurseinheiten 3 und 4 dieses Kurses noch kennenlernen werden.[1] Im Rahmen dieses einführenden Kurses wollen wir dieses Problem allerdings aus unseren Betrachtungen ausklammern und im folgenden von der Annahme ausgehen, dass die vermögensmäßigen Konsequenzen der Investitionsprojekte *mit Sicherheit* vorhergesehen werden.[2] Auf Erweiterungen dieser insoweit sicherlich realitätsfernen Ansätze um Ungewissheiten und Risikoaspekte werden wir erst in den vertiefenden B-Modulen näher eingehen.

Evtl. erforderliche Präzisierung der Zielvorstellung

1 Vgl. dazu insbesondere die Kurseinheit 4 „Entscheidungen in Risikosituationen“.

2 Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass wir zunächst nur unterstellen, dass der Investor die Konsequenzen der jeweils betrachteten Investitionsprojekte mit Sicherheit abschätzen kann. Wir unterstellen hingegen *nicht*, dass er die zukünftige Entwicklung „der ganzen Welt“ sicher voraussieht.

Endvermögen als Zielgröße

Darüber hinaus bedarf die Zielsetzung der Vermögensmaximierung auch unter der Prämisse der sicheren Voraussicht weiterer Präzisierungen:

– Zum einen ist zu beachten, dass „Vermögen" sich aus einer Vielzahl unterschiedlicher Komponenten zusammensetzt, wie z.B. Grundstücken, Vorräten, Wertpapieren oder – als Negativkomponente – verschiedenen Arten von Schulden. Um alle diese Sachverhalte zu *einer* Vermögensgröße zusammenzufassen, bedarf es eines einheitlichen Bewertungsmaßstabes. Dabei ist es in der Betriebswirtschaftslehre – wie auch in der betrieblichen Praxis – üblich, Vermögensbestände und dementsprechend auch die Vermögensveränderungen in Geldeinheiten auszudrücken. Auf einige Einzelheiten dieses Umrechnungsproblems werden wir im nächsten Abschnitt noch etwas näher eingehen.

– Zum anderen ist zu bedenken, dass es sich bei dem Vermögen um eine *zeitpunktbezogene* Bestandsgröße handelt, und es somit einer Antwort auf die Frage bedarf, auf welchen Zeitpunkt sich denn das als Zielgröße verwendete Vermögen beziehen soll. Zu diesem Punkt wollen wir hier zunächst die vorläufige Annahme treffen, dass die Investoren das Vermögen nach vollständiger Abwicklung eines Investitionsprojektes, das sogenannte **Endvermögen**, als ihre Zielgröße betrachten. Auch auf diese Annahme werden wir im folgenden noch einmal – relativierend und modifizierend – zurückkommen.

Relativierung der Zielsetzung

Dabei handelt es sich bei der Zielvorstellung wohlgemerkt um eine vereinfachende Prämisse im Rahmen eines präskriptiven (= praktisch-normativen) Entscheidungsmodells. Es wird weder behauptet, in der Realität erfolgten alle Investitionsentscheidungen nach diesem Prinzip (empirische Aussage), noch wird behauptet, Investitionsentscheidungen sollten grundsätzlich nach diesem Prinzip erfolgen (ethisch-normative Aussage). Um jedoch überhaupt Anhaltspunkte für die optimale Steuerung des Entscheidungsprozesses zu gewinnen, ist es notwendig, von irgendeiner Zielvorstellung auszugehen, die mit verschiedenen, in der Realität anzutreffenden Zielvorstellungen zumindest streckenweise kompatibel ist. Das scheint bei der Zielsetzung der Vermögensmaximierung immer noch am ehesten zuzutreffen. Im übrigen werden wir – unabhängig allerdings von dem Problem der Investitionsplanung, also allgemein – auf das Problem mehrfacher Zielsetzung in verschiedenen weiterführenden B- und C-Modulen noch näher eingehen.

Fehlinterpretation der Zielsetzung

Zusätzliche Berücksichtigung nicht quantifizierbarer Aspekte

Die skizzierte Beschränkung der hier zu behandelnden investitionstheoretischen Ansätze auf die rein monetären Zielsetzungen der Anteilseigner hat diesen Ansätzen u.a. den Vorwurf eingebracht, sie enthielten die Aufforderung zu einer ausschließlich an den Profitinteressen der „Kapitalisten" orientierten Investitionspolitik, in der keinerlei Raum mehr für – als durchaus notwendig erachtete – Investitionen bleibe, deren Output sich gar nicht oder nur zu einem geringen Teil in monetären Größen messen lasse. Dieser Vorwurf geht an dem Anliegen der hier erörterten investitionstheoretischen Verfahren vorbei, denn wie wir einleitend bereits kurz dargelegt haben, geht es bei diesen modelltheoretischen Untersuchungen ja gar nicht darum, eine bestimmte Investitionsalternative im konkreten Anwendungsfall auch wirklich zur Durchführung zu empfehlen. Vielmehr geht es darum, im Sinne einer Rationalisierung des gesamten Entscheidungsprozesses zumindest diejenigen Aspekte eines Investitionsprojektes, die sich in monetären Größen quantifizieren lassen, deutlich zum Ausdruck zu bringen. Es ist dann immer noch Sache des Investors zu entscheiden, ob auf ein Investitionsprojekt, für das eine Vermögenserhöhung errechnet wird, dann wegen sonstiger, aber nicht quantifizierbarer Nachteile besser verzichtet werden soll; oder ob umgekehrt ein Investitionsprojekt, für das insgesamt eine Vermögensminderung errechnet wird, wegen gewisser sonstiger, als positiv eingeschätzter Effekte doch realisiert werden soll. Im Hinblick auf eine derartige Zweiteilung des Entscheidungsprozesses wird gelegentlich begrifflich unterschieden zwischen

– der **quantitativen Analyse,** d.h. der Auswertung der unmittelbar fass- und rechenbaren Konsequenzen, und

– der **qualitativen Analyse,** d.h. der zusätzlichen Beurteilung aller weiteren Aspekte, die sich einem rechnerischen Zugriff entziehen, nichtsdestoweniger aber dennoch von Bedeutung für den Grad der Zielrealisierung sein können.

Grundannahme: Finanzielle Mittel sind knapp

Da es überall – sowohl in privaten Haushalten, in Unternehmen, als auch in öffentlichen Haushalten – stets darum geht, mit den insgesamt verfügbaren knappen finanziellen Mitteln zu einer optimalen Verwendung zu gelangen, ist es stets unumgänglich, bei der Abwägung der Vor- und Nachteile einzelner Handlungsmöglichkeiten vorrangig auch die damit verbundenen finanziellen Konsequenzen zu berücksichtigen. Insoweit bildet die hier gewählte Modellierung zwar im allgemeinen nicht alle relevanten Aspekte einer realen Entscheidungssituation ab, aber zumindest doch solche Aspekte, die bei jeder realen Investitionsentscheidung eine bedeutende Relevanz besitzen dürften. Und selbst wenn die Personen, die über Investitionsprojekte zu entscheiden haben, sich letztlich nicht von Vermögensaspekten oder sogar überhaupt nicht von monetären Zielvorstellungen leiten lassen, können die im folgenden behandelten Verfahren immer noch dazu benutzt werden, um sich doch ein Bild von den möglichen vermögensmäßigen Konsequenzen der betrachteten Projekte zu machen, und die so gewonnenen Erkenntnisse zumindest als Nebenaspekte in die endgültige Entscheidung einfließen zu lassen.

1.2.2 Darstellung von Investitionsprojekten durch Zahlungsströme

Erfassung finanzieller Konsequenzen

Eingangs haben wir Investitionsprojekte als eine Folge (bzw. Zusammenfassung) bestimmter Aktivitäten gekennzeichnet, die sich über einen längeren Zeitraum erstrecken. Gegenstand der Investitionstheorie ist es allerdings nicht, die Aktivitäten „als solche" zu beurteilen, also etwa die technische Ausstattung einer neu angeschafften Maschine oder die Qualität der darauf hergestellten Erzeugnisse. Wie Sie soeben gelernt haben, beziehen sich investitionstheoretische Ansätze vielmehr auf die Frage, wie sich die mit einem Investitionsprojekt verbundenen Konsequenzen letztlich auf die Vermögenssituation des Investors nach vollständiger Abwicklung des Investitionsprojektes, also auf sein Endvermögen, auswirken. Dazu gilt es, die aus den verschiedenen Aktivitäten resultierenden finanziellen Konsequenzen zu erfassen.

Bei der konkreten Lösung dieser Aufgabe stellen sich vor allem zwei Probleme, auf die wir im folgenden kurz eingehen werden. Zum einen ist die Vorgabe, die Auswirkungen eines Investitionsprojektes ausschließlich anhand der finanziellen Konsequenzen darzustellen, noch nicht präzise genug. Wie Sie bereits aus anderen Zusammenhängen wissen, können finanzielle Konsequenzen auf verschiedenen Ebenen erfasst werden, wobei zwei Darstellungsweisen, die Sie bereits kennengelernt haben, von besonderer Bedeutung sind:

- Zum einen die Ebene von Erträgen und Aufwendungen, so wie Sie das etwa im Rahmen der Buchhaltung und der Gewinn- und Verlustrechnung kennengelernt haben.
- Zum anderen die Ebene von Zahlungsströmen, so wie wir das im Einleitungskapitel der Kurseinheit 2 (Kurs 40525) gesehen haben.

Relevante Darstellungsebene: Zahlungsmittelebene

Aus Gründen, die erst an späterer Stelle voll verständlich werden, wollen wir hier zunächst ohne weitere Erläuterung die Vereinbarung treffen, dass die Konsequenzen von Investitionsprojekten im Folgenden stets auf der Zahlungsebene dargestellt werden sollen. Gegenstand der folgenden Überlegungen zur Einführung in die Investitionstheorie sind dann solche betrieblichen Aktivitäten, die sich durch eine Zeitreihe von Ein- und Auszahlungen kennzeichnen lassen und üblicherweise mit einem Auszahlungsüberschuss beginnen. Formal kann eine Investitionsentscheidung dann also auch als Wahl zwischen mehreren Zahlungsreihen definiert werden.

Auch nach dieser Festlegung verbleibt allerdings als zweites die Frage, was genau denn nun unter den aus einem bestimmten Investitionsprojekt resultierenden zahlungsmäßigen Konsequenzen verstanden werden soll. Es erscheint zweckmäßig, in diesem Zusammenhang *zwei* Kategorien zahlungsmäßiger Konsequenzen zu unterscheiden:

– Zum einen nämlich solche, die dem betrachteten Investitionsprojekt, d.h. den mit ihm verbundenen Aktivitäten, unmittelbar zugerechnet werden können, und

– zum anderen darüber hinausgehende, indirekte Folgewirkungen.

Unmittelbar zurechenbare Zahlungsgrößen

Wir wollen hier zunächst nur Konsequenzen der ersten Kategorie, also die dem Projekt *unmittelbar* zurechenbaren Zahlungsgrößen betrachten. Dabei kann es sich etwa um Auszahlungen für die Beschaffung einer Maschine und den mit ihrem Einsatz verbundenen Energieverbrauch oder um Einzahlungen aus dem Verkauf der auf der Maschine hergestellten Erzeugnisse oder aus der Veräußerung der abgenutzten Maschine am Ende ihrer Einsatzdauer handeln. In ähnlicher Weise ist es auch möglich, dass die unmittelbar mit der Investition verbundenen Aktivitäten dazu führen, dass ansonsten anfallende Ein- oder Auszahlungen entfallen. So kann etwa die Anschaffung einer Filteranlage dazu führen, dass eine ansonsten fällige Umweltabgabe vermieden wird. Wenn wir im folgenden – der Einfachheit halber – weiter nur von den durch ein Investitionsprojekt unmittelbar bewirkten *Ein- und Auszahlungen* reden, so sollen im Begriff der Einzahlungen stets auch entfallende Auszahlungen mit eingeschlossen sein und analog im Begriff der Auszahlungen auch entgehende Einzahlungen. Als indirekte Folgeeffekte nicht in der Zahlungsreihe zu berücksichtigen sind demgegenüber z.B. Zahlungskonsequenzen, die aus der Finanzmittelbeschaffung zur Deckung von Zahlungsdefiziten bzw. aus der zwischenzeitlichen Anlage von Zahlungsüberschüssen resultieren.[1)]

Bündelung relevanter Zahlungsgrößen

Bei der Darstellung eines Investitionsprojektes durch die mit ihm unmittelbar verbundenen Ein- und Auszahlungen in diesem Sinne ist es zweckmäßig – und auch in der Investitionstheorie weithin üblich –, die relevanten Zahlungsgrößen jeweils nicht ganz exakt auf die Zeitpunkte zu beziehen, in denen sich die entsprechenden Zahlungstransaktionen vollziehen, sondern die innerhalb einer bestimmten Zeitperiode anfallenden Zahlungen darstellungstechnisch zu „bündeln". In der Investitionstheorie ebenso wie in der praktischen Anwendung entsprechender Ansätze ist es dabei ebenfalls üblich geworden, als „Bündelungsperiode" das Jahr zu wählen, obwohl es technisch ohne weiteres möglich ist, auch auf andere Periodisierungen, also etwa halbjährliche oder quartalsweise Darstellungen überzugehen.

---

1 Wie Sie in den nachfolgenden Kapiteln der KE 1 und 2 dieses Kurses noch sehen werden, werden diese Arten von indirekten Zahlungseffekten implizit bei der Berechnung investitionstheoretischer Kennzahlen berücksichtigt. Vgl. dazu auch Beispiel 5 in Abschnitt 1.3.3. Ebenfalls nicht in der Zahlungsreihe werden in einem ersten Zug Zahlungskonsequenzen berücksichtigt, die aus zeitlich-horizontalen Interdependenzen resultieren. Zur Behandlung dieser Art indirekter Zahlungskonsequenzen vgl. Abschnitt 1.2.3 dieser Kurseinheit.

Im folgenden wollen wir jedoch der üblichen Periodeneinteilung folgen und dabei so verfahren, dass

– die mit der unmittelbaren Anschaffung eines Investitionsprojektes verbundenen Auszahlungen auf den Zeitpunkt $t = 0$ bezogen werden, also auf den Beginn der ersten Periode, und

– sämtliche danach folgenden Ein- und Auszahlungen jeweils in saldierter Form auf das *Ende* der jeweiligen Periode bezogen werden.

Bezeichnen wir die Laufzeit eines Investitionsprojektes mit T und die auf den Startzeitpunkt $t = 0$ sowie die Periodenendzeitpunkte $t = 1, 2, \ldots, T$ bezogenen Zahlungssalden mit e_t $(t = 0, 1, \ldots, T)$, so sind die unmittelbaren finanziellen Konsequenzen eines Investitionsprojektes unserer Verabredung nach also durch eine Zahlungsreihe $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_T$ zu kennzeichnen. Dabei verdeutlicht ein positiver Wert von e_t $(e_t > 0)$, dass dem Zeitpunkt t per Saldo ein **Einzahlungs**überschuss zugerechnet wird; $e_t < 0$ signalisiert hingegen einen **Auszahlungs**überschuss. Folgendes Beispiel verdeutlicht diese Vorgehensweise an einem ganz einfachen Fall.

Beispiel 1:

Ein Investor plant den Kauf eines Hauses zum Preis von 480 TGE, das er für vier Jahre zu vermieten und dann wieder zu verkaufen beabsichtigt. Die monatlichen Mieteinnahmen setzt er über die vier Jahre konstant mit 2,5 TGE an, den Wiederverkaufserlös mit 500 TGE. Außerdem geht er davon aus, zwei Garagen des Hauses vier Jahre lang selbst nutzen zu können und dadurch die ansonsten fällige Miete von 500 GE pro Quartal für eine andere Doppelgarage einsparen zu können.

Während Kauf und Verkauf des Hauses sowie die Garagenmiete keine steuerliche Wirkung haben, muss der Investor auf die jährlichen Mieteinnahmen im Zuge seiner Einkommensteuerveranlagung im darauffolgenden Jahr jeweils 30% Steuern zahlen. Andererseits wird der Erwerb des Hauses im Anschaffungszeitpunkt aus einem Programm zur Vermögensbildung mit 50 TGE vom Staat bezuschusst.

Das Investitionsprojekt „Hauskauf" lässt sich demnach durch folgende Zahlungsreihe charakterisieren, in der alle „unterjährlichen" Zahlungen auf den Jahresendzeitpunkt aggregiert werden.

	t = 0	**t = 1**	**t = 2**	**t = 3**	**t = 4**	**t = 5**
Einzahlungen*	+ 50	+ 30	+ 30	+ 30	+ 530	0
+ Eingesparte Ausz.**	0	+ 2	+ 2	+ 2	+ 2	0
./. Auszahlungen***	– 480	0	– 9	– 9	– 9	– 9
= e_t	– 430	+ 32	+ 23	+ 23	+ 523	– 9

*	t = 0: Zuschuss des Staates; t = 1, 2, 3: Mieteinnahmen von 12 · 2,5 TGE
	t = 4: Mieteinnahmen + Verkaufserlös
**	t = 1, 2, 3, 4: Eingesparte Mietzahlungen von 4 · 0,5 TGE
***	t = 0: Kaufpreis; t = 2, t = 3, t = 4 und t = 5: Steuern für Mieteinnahmen aus dem Vorjahr (= 30 · 0,3).

Als Zwischenergebnis können wir zunächst festhalten, dass wir Investitionsprojekte im Folgenden durch eine auf äquidistante Zeitpunkte bezogene Reihe von Salden der mit dem Projekt unmittelbar verbundenen Ein- und Auszahlungen *darstellen* wollen. Dabei wird üblicherweise davon ausgegangen, dass zumindest die erste Zahlungsgröße negativ ist, also einen Auszahlungsüberschuss anzeigt.

Veranschaulichung durch Zeitstrahldarstellung

Zur besseren Veranschaulichung der mit einem Investitionsprojekt verbundenen Zahlungskonsequenzen wird dabei gelegentlich auch auf das grafische Hilfsmittel eines Zeitstrahls zurückgegriffen, wobei Einzahlungsüberschüsse als von diesem Zeitstrahl nach oben weisende Pfeile und Auszahlungsüberschüsse als von diesem Zeitstrahl nach unten weisende Pfeile entsprechender Länge dargestellt werden. In der Lösung zu Übungsaufgabe 2 findet sich eine entsprechende Darstellung.

Notwendigkeit der Trennung von Modell und Realität

Anmerkung: Bevor wir Ihnen abschließend die Möglichkeit geben, sich an Hand eines etwas komplexeren Beispiels noch einmal selbst mit der Ableitung einer derartigen Zahlungsreihe zu beschäftigen, sei auf ein kleines semantisches Problem hingewiesen: Im Schrifttum finden Sie gelegentlich Formulierungen der Art „Investitionsprojekte sind Zahlungsreihen, die mit einer Auszahlung beginnen …". Solche Formulierungen bergen die Gefahr in sich, dass mit ihnen die Trennung von Realität und Modell verwischt wird. Investitionsprojekte stellen Bündel von Aktivitäten auf der Realebene dar, Zahlungsreihen hingegen nur eine mögliche Form ihrer *Abbildung* auf der Modellebene. Investitionsprojekte können durch Zahlungsreihen vereinfachend dargestellt werden, aber Investitionsprojekte *sind* keine Zahlungsreihen.

Übungsaufgabe 2:

Ein Unternehmen, das der Inhaber in genau drei Jahren liquidieren will, verfügt über einen Maschinenpark von drei gleichartigen Maschinen, deren Restlebensdauer noch drei Jahre beträgt. Angesichts der nachhaltig guten Beschäftigungslage überlegt der Inhaber, ob er eine weitere Maschine zu 80.000 GE kaufen soll. Der Kaufpreis wäre sofort, d.h. im Zeitpunkt t = 0 fällig. In t = 0 verfügt das Unternehmen weder über liquide Mittel, noch erhält es Rückflüsse aus den bereits lfd. Investitionsprojekten.

Im einzelnen sind dabei folgende Planungsdaten zu beachten:

(1) Die Jahresproduktion bei unveränderter Maschinenkapazität beträgt 30.000 Stück und könnte durch die Investition auf 50.000 Stück erhöht werden.

(2) Die Lohnkosten pro Stück betragen im **ersten** Jahr 3 GE; es wird mit einer jährlichen Steigerungsrate von 10% gerechnet.

(3) Die gesamten Materialkosten im **ersten** Jahr würden bei einer Produktion von 30.000 Stück 4 GE/Stück betragen; sie setzen sich zusammen aus 3 GE für Vorprodukt A und 1 GE für Vorprodukt B. Bei A wird mit konstanten Preisen gerechnet, während bei B pro Jahr eine Preissteigerung von 0,15 GE/Stück erwartet wird.

Für die jährliche Produktion von 50.000 Stück gelten die gleichen Preiserwartungen; allerdings könnte bei Vorprodukt A ein Gesamtrabatt von 5% erreicht werden.

(4) Die sonstigen variablen Herstellkosten belaufen sich konstant auf 2 GE/Stück.

(5) Neben den direkten Fertigungslöhnen – (vgl. dazu (2)) – sind im **ersten** Jahr bei einer Produktion von 30.000 Stück sonstige Löhne und Gehälter von 100.000 GE zu zahlen. Im Fall der Produktionsausweitung würde sich dieser Betrag um 40.000 GE erhöhen. In beiden Fällen ist mit einer jährlichen Steigerungsrate von 10% zu rechnen.

(6) Bei einer Produktion von 30.000 Stück im Jahr rechnet der Unternehmer im **ersten** Jahr mit einem Absatzpreis von 15 GE/Stück. Außerdem geht er davon aus, dass er in jedem Jahr danach den Preis um 1 GE anheben kann.

Die Menge von 50.000 Stück könnte er im ersten Jahr hingegen nur bei einem Preis von 14 GE/Stück absetzen; auch in diesem Fall geht er von jährlichen Preissteigerungen von 1 GE aus.

(7) Bei der Liquidation des Unternehmens am Ende des dritten Jahres könnte für die zusätzliche Maschine ein Nettoerlös von 5.000 GE erzielt werden.

Bestimmen Sie für die Zeitpunkte $t = 0$, 1, 2 und 3 die Zahlungsreihe e_t, von der Sie bei der Beurteilung des Maschinenkaufs ausgehen müssen! Gehen Sie dabei davon aus, dass die den Angaben (2) bis (6) entsprechenden Umsatz- und Kostengrößen zugleich zahlungswirksam sind! Stellen Sie Ihre Ergebnisse in einer Tabelle übersichtlich zusammen!

1.2.3 Zeitlich-horizontale Interdependenzen

Mit der – in der skizzierten Weise bündelnden und aggregierenden – Darstellung der mit einem Investitionsprojekt *unmittelbar* verbundenen Zahlungsströme sind allerdings in aller Regel noch nicht alle vermögensmäßigen Konsequenzen erfasst, die sich für den Investor aus der Durchführung des Investitionsprojektes ergeben. Vielmehr können sich über die unmittelbaren Konsequenzen hinaus weitere Folgeeffekte unterschiedlicher Art ergeben. Dabei ist zunächst an die Möglichkeit zu denken, dass im Planungszeitpunkt $t = 0$ *mehrere* Investitionsprojekte parallel zur Disposition stehen, deren Durchführungs- und Ergebnismöglichkeiten sich wechselseitig mehr oder weniger stark beeinflussen. In Anlehnung an das einschlägige Schrifttum wollen wir derartige Zusammenhänge als **zeitlich-horizontale Interdependenzen** bezeichnen.

Typisierung zeitlich-horizontaler Interdependenzen

Zur groben Typisierung derartiger Interdependenzen erscheint es zunächst zweckmäßig, folgende Konstellationen zu unterscheiden:

(1) Unabhängigkeit:

Zwei Projekte können völlig unabhängig durchgeführt werden und beeinflussen sich auch in ihren Zahlungskonsequenzen nicht.

(2) Wechselseitige Beeinflussung:

Zwei Projekte A und B können grundsätzlich parallel durchgeführt werden, beeinflussen sich jedoch ergebnismäßig in ihren Konsequenzen.[1] Formal bedeutet dies, dass die bei *gemeinsamer* Durchführung beider Projekte insgesamt eintretende Zahlungsreihe $e_t^{A,B}$ $(t = 0, 1, \ldots)$ in mindestens einem Zeitpunkt, aber keineswegs zwingend in allen Zeitpunkten von der Summe der bei jeweils isolierter Durchführung maßgeblichen Zahlungsgrößen e_t^A und e_t^B abweicht. Als besonders prägnante Fälle sind dabei die folgenden beiden Konstellationen festzuhalten:

- **Wechselseitige Beeinträchtigung**

  In den Zeitpunkten, in denen überhaupt Beeinflussungen auftreten, fallen diese *stets* negativ aus. Für diese Zeitpunkte gilt also

  $$e_\tau^{A,B} < e_\tau^A + e_\tau^B \qquad \text{für alle} \quad \tau \in T^*.$$ [2]

  Derartige wechselseitige Beeinträchtigungen können ihre Gründe sowohl in technischen als auch in marktmäßigen Restriktionen haben. Ein solcher Fall läge etwa vor, wenn ein Automobilhersteller davon ausgehen müßte, dass die *gleichzeitige* Erweiterung des Programms um einen neuen Kompaktwagen sowie einen Wagen der unteren Mittelklasse insgesamt zu einem schlechteren Ergebnis führte als die Summe der für die Einführung nur eines der beiden Fahrzeuge jeweils isoliert ermittelten Zahlungsreihen.

- **Wechselseitige Begünstigung**

  In den Zeitpunkten, in denen überhaupt Beeinflussungen auftreten, fallen diese *stets* positiv aus. Für diese Zeitpunkte gilt also

---

1 Beeinflussungen der hier unter 2 behandelten Art sind auch als Einfluß der „neuen“ Projekte auf bereits „laufende“ Projekte analog denkbar. Deren Erfassung erfolgt aber bereits unter den direkten Zahlungskonsequenzen bei der Aufstellung der ursprünglichen Zahlungsreihen.

2 T* = Menge aller Zeitpunkte mit Beeinflussung.

$$e_\tau^{A,B} > e_\tau^A + e_\tau^B \qquad \text{für alle} \quad \tau \in T^*.$$

Auch diese Konstellation kann ihren Grund sowohl in technischen als auch in marktmäßigen Bedingungen haben. So kann man sich etwa vorstellen, dass bei einer *gleichzeitigen* Durchführung von Umbau- und Erweiterungsmaßnahmen im Materiallager (Projekt A) und in den Montagehallen (Projekt B) zum einen wegen der größeren Abnahmemengen günstigere Preise bei den Materiallieferanten erzielt werden könnten und zum anderen die mit der gemeinsamen Abwicklung beider Maßnahmen verbundenen Beeinträchtigungen des sonstigen Betriebsablaufs in ihren zahlungsmäßigen Konsequenzen weniger gravierend ausfallen als die Summe der bei jeweils isolierter Durchführung der einen oder der anderen Maßnahme zu erwartenden Belastungen.

Folgendes Beispiel verdeutlicht die bisher erörterten Arten von Interdependenzen.

Beispiel 2:

		t = 0	t = 1	t = 2
Zahlungsreihe bei isolierter Durchführung	von a_1 von a_2	– 100 – 120	+ 50 + 70	+ 80 + 85
	Summe	– 220	+ 120	+ 165
Zahlungsreihe bei gleichzeitiger Durchführung von a_1 und a_2	… Unabhängigkeit	– 220	+ 120	+ 165
	… Beeinträchtigung	– 230	+ 115	+ 165
	… Begünstigung	– 220	+ 125	+ 170
	… teils, teils	– 215	+ 105	+ 170

In den ersten beiden Zeilen der Tabelle sind die Zahlungsreihen der Projekte a_1 und a_2 angegeben, die für den Fall angenommen werden, dass jeweils nur eines dieser Projekte durchgeführt würde.

Werden a_1 und a_2 gemeinsam durchgeführt, können u.a. folgende Konstellationen auftreten:

– Bei „Unabhängigkeit" stimmt die „gemeinsame" Zahlungsreihe mit der Summe der projekt-individuellen Zahlungsreihen überein.

– Im Falle der „Beeinträchtigung" oder der „Begünstigung" weicht die gemeinsame Zahlungsreihe demgegenüber negativ bzw. positiv von der genannten Summe ab.

– In der letzten Zeile schließlich wird die Möglichkeit verdeutlicht, dass es sowohl zu positiven Effekten (in t = 0) und (t = 2) als auch zu negativen Effekten (in t = 1) kommen kann.

Neben der Unabhängigkeit und der ergebnismäßigen Beeinflussung sind noch die folgenden beiden Abhängigkeitskonstellationen denkbar, die sich auf die generelle Durchführbarkeit von Projekten auswirken.

(3) Wechselseitiger Ausschluss:

Zwei Investitionsprojekte schließen einander aus, d.h. es ist nur möglich, entweder das eine oder das andere zu realisieren.

Sich wechselseitig ausschließende Investitionsprojekte liegen z.B. vor, wenn auf einem betriebseigenen Grundstück entweder nur eine Lagerhalle oder nur eine Fabrikationshalle errichtet werden kann, für beide der Platz jedoch nicht ausreicht.

(4) Ein- oder wechselseitige Bedingtheit:

Hier sind im einzelnen zwei Unterfälle zu unterscheiden:

- Zwei Projekte können auf jeden Fall nur gemeinsam durchgeführt werden. In diesem Fall wechselseitiger Bedingtheit sind sie für die Investitionsplanung von vornherein als ein einziges Projekt anzusehen.
- Ein Projekt a_2 kann nur in Verbindung mit einem Projekt a_1 durchgeführt werden; Projekt a_1 kann jedoch auch ohne a_2 realisiert werden (einseitige Bedingtheit).

Ausgangspunkt der klassischen Investitionstheorie

In der klassischen Investitionstheorie, auf deren Behandlung wir uns hier ganz überwiegend beschränken wollen, wird generell davon ausgegangen, dass ein Katalog einander ausschließender Handlungsalternativen vorliegt, aus dem die beste ausgewählt werden soll. Für die in Kurseinheit 2 dieses Kurses folgende Analyse ist es in diesem Zusammenhang zweckmäßig, die folgenden beiden Typen von Alternativenkatalogen zu unterscheiden:

Projektindividuelle Entscheidungen

Projektindividuelle Entscheidungen:

Bei Entscheidungssituationen dieses Typs geht es um die Frage, ob eine bestimmte Investition durchgeführt werden soll oder nicht; gefordert ist also ein Vorteilhaftigkeitsvergleich zwischen Investitionsprojekt und dem schlichten Unterlassen, der Unterlassensalternative, wie wir dies im folgenden nennen wollen. Einige weitere Erläuterungen zum Begriff der Unterlassensalternative werden wir im Abschnitt 1.3.3 noch nachtragen. Diese Entscheidungssituation liegt bei der Beurteilung eines Investitionsprojektes vor, das vollständig unabhängig von allen anderen zu beurteilenden Investitionsprojekten durchgeführt werden kann, also in Fällen der Konstellation (1).

Auswahlentscheidungen

Auswahlentscheidungen aus mehreren, einander ausschließenden Projekten:

Bei Entscheidungssituationen dieses Typs stehen mehrere, also mindestens zwei, einander ausschließende Investitionsprojekte zur Auswahl. Diese Entscheidungssituation entspricht unmittelbar der oben betrachteten Konstellation (3). Dabei kann im Detail weiter danach differenziert werden, ob

– zwingend eines der in dem vorgegebenen Katalog enthaltenen Projekte ausgewählt werden muss,
– oder zusätzlich auch noch die Unterlassensalternative zur Auswahl steht.

Auf den ersten Blick könnte nach dieser Einteilung der Eindruck entstehen, als sei für Entscheidungsprobleme der Konstellationen (2) und (4) im Rahmen der klassischen Investitionstheorie kein Raum. Dieser Eindruck trügt jedoch, da sich auch derartige Probleme in folgender Weise in die Struktur von Konstellation (3) überführen lassen:

zu (2): Stehen – ggf. neben der Unterlassensalternative – zwei Projekte A und B zur Auswahl und beeinflussen sich diese Projekte ergebnismäßig, so lassen sich daraus stets folgende einander ausschließende Investitionsalternativen formulieren, neben denen ggf. auch noch die Unterlassensalternative zur Auswahl steht.

a_1 : A

a_2 : B

a_3 : A & B

Dieses Modellierungskonzept lässt sich auch auf einen Fall mit mehr als zwei einander beeinflussenden Projekten verallgemeinern.

zu (4): Stehen – ggf. neben der Unterlassensalternative – zwei Projekte A und B zur Auswahl und kann Projekt B nur in Verbindung mit Projekt A durchgeführt werden, A jedoch auch allein, so lassen sich – ggf. neben der Unterlassensalternative – folgende einander ausschließende Alternativen formulieren:

a_1 : A

a_2 : A & B.

Formulierung einander ausschließender Handlungsalternativen

Wir können also zunächst festhalten, dass es grundsätzlich bei jedweder Art von Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Investitionsprojekten, wie wir sie in den Konstellationen (2) bis (4) verdeutlicht haben, stets möglich ist, einen Katalog einander ausschließender Handlungsalternativen zu formulieren, wobei jede nur zulässige Kombination einzelner Investitionsprojekte als eine Handlungsalternative darzustellen ist und außerdem auch die Unterlassensalternative als in Betracht zu ziehende Handlungsmöglichkeit erfasst werden kann. Strenggenommen handelt es sich daher bei den in den investitionstheoretisch ausgerichteten Lehrbüchern überwiegend isoliert behandelten „Nutzungsdauer-“ bzw. „Ersatzzeitpunktproblemen“ auch nur um spezielle Auswahlentscheidungen, bei denen es um die Bestimmung der optimalen Nutzungsdauer bzw. die Bestimmung des optimalen Ersatzzeitpunktes einer einzelnen vorhandenen oder noch zu beschaffenden Anlage geht. Jede einzelne mögliche Nutzungsdauer bzw. jeder einzelne mögliche Ersatzzeitpunkt determiniert bei diesen Problemen eine eigene Handlungsalternative, so dass der Katalog sich ausschließender Handlungsalternativen also durchaus auch aus einem einzigen Projekt, dessen zahlungsmäßige Konsequenzen allerdings für unterschiedliche Nutzungsdauern modellmäßig erfasst werden, bestehen kann. Wenn wir im folgenden der sprachlichen Einfachheit halber in aller Regel nur noch von Investitionsprojekten sprechen, so gehen wir von einem relativ weiten Projektbegriff aus, insbesondere sollen darin stets auch immer aus einzelnen Projekten zusammengesetzte Projektbündel der durch die Konstellationen (2) und (4) verdeutlichten Art mit inbegriffen sein.

Übungsaufgabe 3:

Ein Investor betrachtet vier Investitionsprojekte mit den jeweils angegebenen Zahlungsreihen:

	t = 0	t = 1	t = 2
A	– 100	+ 20	+ 102
B	– 100	+ 60	+ 80
C	– 150	+ 80	+ 55
D*)	– 120 – 120	+ 80 + 85	+ 55 + 60

*) Die obere Zahlungsreihe gilt für den Fall, dass B durchgeführt wird, die untere für den Fall, dass B nicht durchgeführt wird.

Dabei bestehen folgende Interdependenzen:

- A und B schließen sich wechselseitig aus,
- B und D beeinflussen sich wechselseitig negativ,
- C kann völlig unabhängig von den übrigen Projekten durchgeführt werden und hat auch keinerlei Einfluß auf deren Zahlungsreihen.

a) Erstellen Sie – unter Berücksichtigung der Unterlassensalternative – einen Katalog aller einander ausschließender Handlungsmöglichkeiten!

b) Ermitteln Sie für alle nach a) aufgestellten Handlungsalternativen mit Ausnahme der Unterlassensalternative die zugehörigen Zahlungsreihen!

c) Welche Vereinfachungsmöglichkeiten für die Formulierung (und auch die spätere Lösung) des Entscheidungsproblems ergeben sich im Hinblick auf die Erfassung von Projekt C?

1.3 Indirekte Folgeeffekte von Investitionsprojekten

1.3.1 Finanzwirtschaftliche Komplementärmaßnahmen und zeitlich-vertikale Interdependenzen

Kategorien indirekter Folgeeffekte

Im Abschnitt 1.2.3 haben wir gezeigt, dass es möglich ist, zeitlich-horizontale Interdependenzen zwischen mehreren gleichzeitig zur Disposition stehenden Investitionsprojekten durch eine geeignete Definition der Handlungsalternativen und der entsprechenden Zahlungsreihen zu erfassen. Neben diesen Interdependenzen können mit einem Investitionsprojekt allerdings noch weitere, durch die er zugeordnete Zahlungsreihe immer noch nicht vollständig erfasste, Auswirkungen auf die Vermögenssituation des Investors verbunden sein. Für die folgende einführende Darstellung erscheint es zweckmäßig, diese weitergehenden Folgeeffekte in die beiden Kategorien

– finanzwirtschaftlicher Komplementärmaßnahmen und
– der darüber hinausgehenden zeitlich-vertikalen Interdependenzen

zu unterteilen.

- **Finanzwirtschaftliche Komplementärmaßnahmen**

  Wir gehen von einem Unternehmen aus, das in eine marktwirtschaftliche Ordnung mit einem funktionierenden Geldsystem eingebettet ist. Dann dürfte ein Investitionsprojekt über die damit *unmittelbar* verbundenen Konsequenzen hinaus in aller Regel mit bestimmten weiteren finanziellen Effekten in der unmittelbaren „Umgebung“ des Projektes verbunden sein. Derartige Effekte können zunächst aus der *Finanzierung* der mit dem Beginn eines Projektes typischerweise verbundenen Anfangsauszahlungen resultieren. Dabei wollen wir von der Möglichkeit absehen, dass die Investition im Falle ihrer Durchführung durch eigens dazu erfolgende Einlagen der Gesellschafter finanziert wird. Stattdessen werden wir den folgenden beiden Finanzierungsvarianten besondere Aufmerksamkeit schenken:

  – Finanzierung durch Aufnahme eines Kredites; wir sprechen dann von einer **fremdfinanzierten Investition.**

  – Finanzierung durch Rückgriff auf ohnehin vorhandene liquide Mittel; wir sprechen dann von einer **aus Liquiditätsreserven finanzierten Investition.**

Anmerkung: Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass die zweite Finanzierungsvariante im Schrifttum häufig ohne weitere Differenzierung als „Eigenfinanzierung“ oder auch „Eigenkapitalfinanzierung“ und die Investitionsmaßnahme dementsprechend als „eigenfinanzierte“ Investition bezeichnet wird. Diese Terminologie suggeriert allerdings möglicherweise verschiedene Missverständnisse, wie etwa die folgenden:

- *Gleichsetzung* von Begriffen wie „Eigenkapital“ oder „Eigenmittel“ – als bilanzielle Saldogröße auf der Passivseite – mit „verfügbaren liquiden Mitteln“ als realer Bestandsgröße, die sich in der bilanziellen Darstellung als Aktivposten niederschlägt.

- *Unterstellung*, die Verfügbarkeit über liquide Mittel resultiere aus einem unmittelbar vorangegangenen Vorgang der Eigenfinanzierung in dem Sinne, wie Sie das in der Kurseinheit 2 des Kurses 40525 bereits kennengelernt haben, also aus Einlagen alter oder neuer Gesellschafter.

Während die erstgenannte *Gleichsetzung* nichts anderes darstellt als einen elementaren Denkfehler, für den Studenten der FernUniversität nach der Lektüre des Kursprogramms zu „Investition und Finanzierung“ mit der schlechtestmöglichen Note belegt werden, zielt die angesprochene *Unterstellung* auf eine Konstellation ab, die zwar möglich ist, realiter jedoch eher die Ausnahme als der Regelfall sein dürfte. In diesem speziellen Fall wäre im übrigen auch in der hier gewählten Terminologie eine „eigenfinanzierte“ und gerade nicht mehr eine „aus ohnehin vorhandenen liquiden Reserven finanzierte“ Investition gegeben.

Arten indirekter Folgeeffekte

Aus der *Anfangsauszahlung* und ggf. auch aus später auftretenden *Auszahlungsüberschüssen* können dementsprechend zwei Arten indirekter Folgeeffekte entstehen:

- Entweder sind wegen der erfolgten Fremdfinanzierungsmaßnahmen in späteren Perioden Zins- und Tilgungszahlungen zu leisten, die bei Verzicht auf das Investitionsprojekt nicht angefallen wären.

- Oder es kommt dazu, dass aus der anderweitigen Anlage der verfügbaren liquiden Mittel ansonsten erzielbare Zins- und Rückzahlungsbeträge als Folge der Investitionsdurchführung entfallen.

In analoger Weise können die in der weiteren Abwicklung eines Investitionsprojektes auftretenden *Einzahlungsüberschüsse* bewirken, dass entweder zusätzliche Anlagen getätigt oder bestehende Kredite abgebaut werden, was in den Folgeperioden zu zusätzlichen Einzahlungen bzw. einer Verminderung von Auszahlungen führen würde.

- **Zeitlich-vertikale Interdependenzen**

Neben derartigen Effekten, die jeweils aus komplementären Finanztransaktionen im „Umfeld“ des Investitionsprojektes resultieren, sind in vielen Fällen weitere sogenannte **zeitlich-vertikale Interdependenzen** zu berücksichtigen. Damit wird der Umstand bezeichnet, dass sich die Inangriffnahme eines Investitionsprojektes (und ggf. auch der damit verbundenen Finanzierungsmaßnahmen) im Zeitpunkt $t = 0$ auch über Komplementärmaßnahmen in seiner unmittelbaren „Umgebung“ hinaus auf Durchführungs- und Ergebnismöglichkeiten erst später zur Disposition stehender Investitions- und Finanzierungsmaßnahmen auswirken kann.

- So ist es beispielsweise denkbar, dass wegen der Realisierung eines Investitionsprojektes A im Zeitpunkt t = 0 in einem späteren Zeitpunkt ein anderes Investitionsprojekt B gar nicht mehr durchführbar ist, sei es etwa, weil angesichts des hohen Finanzbedarfs für A die notwendigen Finanzierungsmittel für B nicht mehr verfügbar sind, oder sei es, weil die notwendigen räumlichen Kapazitäten durch A gebunden werden und somit für B nicht mehr bereitstehen. Andererseits sind auch Situationen denkbar, in denen erst die im Zeitpunkt t = 0 getroffene Entscheidung für eine bestimmte Maßnahme in den Folgeperioden die Möglichkeit zu bestimmten Anschlussprojekten eröffnet, die ansonsten gar nicht realisierbar gewesen wären.

- Neben dem Effekt, dass sich die im Zeitpunkt t = 0 getroffenen Entscheidungen auf die Menge der in späteren Perioden überhaupt realisierbaren Investitions- und Finanzierungsprojekte (positiv oder negativ) auswirken können, ist als zweite Komponente zeitlich-vertikaler Interdependenzen die Möglichkeit zu beachten, dass in späteren Perioden nach wie vor durchführbare Handlungsalternativen in ihren *Ergebnissen* beeinflußt werden können. Dabei können auch derartige ergebnisbeeinflussende Interdependenzen wiederum in positiver oder negativer Form oder auch in beiden Richtungen zugleich auftreten.

1.3.2 Ansätze zur expliziten Erfassung indirekter Folgeeffekte

Um die Auswirkungen eines Investitionsprojektes auf die Vermögenssituation des Investors in sachgerechter Weise zu erfassen, ist es grundsätzlich notwendig, über die dem Projekt unmittelbar zugerechnete Zahlungsreihe hinaus auch indirekte Folgeeffekte beider Kategorien in ihren zahlungsmäßigen Konsequenzen zu erfassen. In der betriebswirtschaftlichen Investitionstheorie findet man im wesentlichen zwei Kategorien von Entscheidungsmodellen, in denen versucht wird, dieser Anforderung durch die Darstellung der zu beurteilenden Handlungsalternativen zumindest in Ansätzen gerecht zu werden, nämlich

- Ansätze der **simultanen Investitions- und Finanzplanung,**
- Verfahren, die wir unter dem Begriff der **komplementären Finanzpläne** zusammenfassen wollen.

Wir werden diese beiden Konzepte im folgenden in ihren Grundzügen kurz skizzieren.

- **Simultane Investitions- und Finanzplanung**

  Diese Modelle beinhalten den theoretisch saubersten Ansatz, *sämtliche* vermögensmäßigen Konsequenzen der im Betrachtungszeitpunkt (t = 0) zur Disposition stehenden Investitionsprojekte („Ausgangsprojekte“) zu erfassen. Dazu sind allerdings in einem ersten Schritt nicht nur die Ausgangsprojekte, sondern auch alle zukünftig (also in t = 1, 2, 3, …) zur Auswahl stehenden Investitionsprojekte sowie die aktuell und zukünftig realisierbaren Finanzierungsprojekte modellmäßig zu erfassen und durch die mit ihnen *unmittelbar* verbundenen Zahlungsströme zu verdeutlichen. Gegenstand der modellmäßigen Analyse sind dann allerdings gar nicht mehr die Einzelprojekte als solche, sondern ganze Investitions- und Finanzierungs*programme*, die jeweils umfangreiche Bündel aktuell und in Zukunft zur Disposition stehender Investitions- und Finanzierungsprojekte umfassen und daraufhin untersucht werden, wie sie sich auf die Zielgröße des Investors, z.B. sein Vermögen am Ende des Betrachtungszeitraums, auswirken.

  Von ihrer konzeptionellen Ausrichtung her sind derartige Ansätze durchaus geeignet, reale Investitionsprobleme in anspruchsvoller Weise modellmäßig abzubilden und dabei beide Kategorien indirekter Folgewirkungen von Investitionsprojekten zu erfassen. Ihre praktische Anwendbarkeit scheitert in aller Regel jedoch an den außerordentlich hohen informatorischen Anforderungen, die die Prognosefähigkeit der Investoren zumeist bei weitem übersteigen. Im Rahmen dieses einführenden Kurses können wir ohnehin nicht weiter auf diese Ansätze eingehen.

- **Komplementäre Finanzpläne**

  Diese zweite Gruppe von Modellansätzen ist dadurch gekennzeichnet, dass auf die Erfassung zeitlich-vertikaler Interdependenzen weitgehend verzichtet wird. In die Darstellung der mit einem Investitionsprojekt verbundenen Konsequenzen werden lediglich einige vergleichsweise einfache Finanztransaktionen im unmittelbaren „Umfeld“ des Projektes einbezogen. Folgendes Beispiel verdeutlicht diese Vorgehensweise in ihren Grundzügen.

Beispiel 3:

Ein Investitionsprojekt ist durch die unmittelbare Zahlungsreihe $e_0 = -100$, $e_1 = 60$ und $e_2 = 60$ gekennzeichnet. Es handelt sich also um ein Projekt, dessen Start zunächst eine Anfangsauszahlung von 100 (gedanklich auf den Zeitpunkt t = 0 konzentriert) bedingt, das 2 Jahre lang läuft und in beiden Jahren jeweils zu einem (gedanklich auf das jeweilige Jahresende konzentrierten) Einzahlungsüberschuss von 60 Geldeinheiten führt. Zielgröße ist annahmegemäß das Endvermögen des Investors am Ende der Investitionslaufzeit, also im Zeitpunkt t = 2.

Um die Frage zu beantworten, wie sich das dargestellte Investitionsprojekt, dessen Konsequenzen sich ja zunächst auf die drei Zeitpunkte t = 0, 1, 2 beziehen, letztlich auf das ausschließlich auf den Zeitpunkt t = 2 bezogene Endvermögen auswirkt, könnte etwa folgender „komplementärer Finanzplan" erstellt werden:

– Die Anfangsauszahlung wird durch die Aufnahme eines Kredites in Höhe von 100 Geldeinheiten finanziert, der pro Jahr mit 8% zu verzinsen und am Ende der Laufzeit vollständig zurückzuzahlen ist. Die diesen Kredit isoliert betrachtet kennzeichnende Zahlungsreihe hätte also (bezogen auf die Zeitpunkte t = 0, 1, 2) das Aussehen + 100; –8; –108.

– Bei Durchführung des Projektes und seiner Finanzierung durch den genannten Kredit würde im Zeitpunkt t = 1 nach Abführung der Zinszahlung ein Zahlungsüberschuss von 52 Geldeinheiten verbleiben. Hier könnte nun weiter unterstellt werden, dass dieser Betrag zu 5% für ein Jahr angelegt wird. Die Zahlungsreihe dieser ergänzenden Anlageaktivität würde also (bezogen auf die Zeitpunkte t = 1, 2) durch folgende Werte verdeutlicht: –52; +54,6.

– Fasst man nun die unmittelbar auf das Investitionsprojekt bezogene Zahlungsreihe, die Zahlungsreihe des unterstellten Finanzierungsprojektes sowie die der ergänzenden Anlagetransaktion zusammen, so ergibt sich folgendes Bild:

	t = 0	**t = 1**	**t = 2**
Investitionsprojekt	– 100	+ 60	+ 60
Finanzierungsprojekt	+ 100	– 8	– 108
Anlagetransaktion	–	– 52	+ 54,6
Summe	**0**	**0**	**+ 6,6**

Würde das genannte Projekt also durchgeführt und würden die in unserem Beispiel unterstellten Finanztransaktionen „im Umfeld" dieses Projektes durchgeführt, so würde sich aus diesem Projektbündel ein auf den Zeitpunkt t = 2 bezogener Vermögenszuwachs von 6,6 Geldeinheiten ergeben.

Wie Beispiel 3 zeigt, ist das Verfahren der komplementären Finanzpläne sehr viel einfacher zu handhaben und mit deutlich geringeren informatorischen Anforderungen verbunden als die Simultanansätze. Dieser Vorteil wird allerdings dadurch erreicht, dass mögliche Einflüsse der aktuell zu beurteilenden Investitionsprojekte auf

Realisierungs- und Ergebnismöglichkeiten erst später zur Disposition stehender Investitions- und Finanzierungsprojekte weitgehend außer acht bleiben. Im praktischen Anwendungsfall bleibt hier keine andere Möglichkeit, als zu versuchen, derartige Effekte wenigstens überschlägig abzuschätzen und im Zuge der qualitativen Analyse zumindest ansatzweise zu berücksichtigen. Im Rahmen dieses Kurses wollen wir auch das Verfahren der komplementären Finanzpläne nicht systematisch weiter verfolgen, sondern uns auf den dritten, formal noch einfacheren Ansatz der „klassischen" Investitionsrechnung beschränken. An einzelnen Stellen werden wir allerdings zur Verdeutlichung der Leistungsfähigkeit dieser Verfahren auf – in aller Regel sehr einfach konstruierte – komplementäre Finanzpläne zurückgreifen.

1.3.3 Implizite Erfassung von Folgeeffekten in der klassischen Investitionstheorie

Genau wie das Verfahren der komplementären Finanzpläne vernachlässigen auch die klassischen Ansätze der Investitionstheorie zeitlich-vertikale Interdependenzen weitgehend. Darüber hinaus verzichten sie aber auch noch auf die *explizite* Erfassung der finanziellen Konsequenzen, die sich im „unmittelbaren Umfeld" des betrachteten Investitionsprojektes ergeben. Allerdings wird versucht, derartige Effekte und ihre Auswirkungen auf das Endvermögen *implizit* durch bestimmte finanzmathematische Operationen zu erfassen. Mit den dazu notwendigen Rechentechniken (Kapitel 2) sowie den darauf aufbauenden Methoden selbst (KE 2 dieses Kurses) werden wir uns im folgenden ausführlich beschäftigen. Zuvor muss das dazu notwendige gedankliche und begriffliche Fundament allerdings durch einige weitere grundlegende Überlegungen verbreitert werden.

Ob es gelingt, zumindest die im unmittelbaren Umfeld eines Investitionsprojektes notwendigen Finanztransaktionen in impliziter Weise angemessen zu erfassen, hängt entscheidend von den Konditionen ab, zu denen diese Komplementärmaßnahmen durchgeführt werden können. Die klassische Investitionstheorie hat sich hier mit der **Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes** – zumeist auch vollkommener „Kapitalmarkt" genannt – eine Modellwelt geschaffen, in der eine derartige implizite Erfassung in idealer Weise möglich ist.

In ihrer überwiegend verwendeten, besonders strengen Form beinhaltet diese Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes die Annahme, dass der Investor in seinen Planungsüberlegungen

Vollkommener Finanzmarkt im strengen Sinne

– mit Sicherheit davon ausgehen kann,

– zu jedem zukünftigen Zeitpunkt

– für jeweils eine Periode

– zu einem im Zeitablauf konstanten,
– für Geldanlage und Geldaufnahme identischen Zinssatz
– in jeder Höhe

Kredite aufnehmen und liquide Mittel anlegen zu können.

Kalkulationszins

Ein Zinssatz, der diese Bedingung erfüllt, wird in den Entscheidungsmodellen der traditionellen Investitionstheorie, auf die wir in Kurseinheit 2 dieses Kurses noch explizit eingehen werden, überwiegend vorausgesetzt und als sogenannter **Kalkulationszins** bei der Beurteilung von Investitionsprojekten verwendet. In dieser strengen Form ermöglicht es die Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes tatsächlich, auf die explizite Berücksichtigung komplementärer Finanztransaktionen zu verzichten und diese nur noch implizit, nämlich über die Verrechnung von Finanzierungskosten auf der Basis des Kalkulationszinsfußes, zu erfassen. Mit den verschiedenen Techniken, die hierzu zur Auswahl stehen, werden wir uns im folgenden noch ausgiebig zu befassen haben.

Schwächere Finanzmarktprämissen

Gleichzeitig ist aber bereits jetzt festzustellen, dass die Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes in ihrer strengen Form übermäßig eng ist und es auch bereits schwächere Finanzmarktprämissen erlauben, komplementäre Finanztransaktionen ohne Abstriche an der Entscheidungsqualität nur implizit durch Verrechnung von Finanzierungskosten in Investitionsentscheidungen zu berücksichtigen. Daher formulieren wir hier zusätzlich schwächere Finanzmarktprämissen. Zwar wird weiter unterstellt, dass

– zukünftige Zinssätze mit Sicherheit bekannt sind und
– nicht von der Höhe der Mittelaufnahme bzw. Mittelanlage abhängen und dass
– in jedem zukünftigen Zeitpunkt
– Mittelaufnahme- und Mittelanlagemöglichkeiten für jeweils eine Periode

Variationen der strengen Prämissen des vollkommenen Finanzmarktes

bestehen. Aber mindestens eine der beiden zusätzlichen Annahmen der strengen Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes wird aufgehoben, nämlich dass

– Zinssätze im Zeitablauf konstant sein und
– Zinssätze für Geldaufnahme und Geldanlage übereinstimmen müssen.

Variation 1: Vollkommener Finanzmarkt mit wechselnden Periodenzinsfüßen

Wird nur die erste dieser beiden Teilprämissen aufgehoben, so liegt immer noch ein vollkommener Finanzmarkt vor, allerdings mit wechselnden Periodenzinsfüßen.

Variation 2: Unvollkommener Finanzmarkt

Wird hingegen die zweite Prämisse aufgehoben, so sind die Voraussetzungen des vollkommenen Finanzmarktes nicht mehr gegeben. Im Hinblick auf die Fortgeltung der ersten Prämisse kann dann noch zusätzlich danach differenziert werden,

- ob unterstellt wird, dass die divergierenden Soll- und Habenzinsen im Zeitablauf jeweils konstant bleiben, oder
- zusätzlich auch noch angenommen wird, dass sie in den einzelnen Perioden jeweils andere Werte annehmen können.

Wir werden in den weiteren Ausführungen zunächst der üblichen Vorgehensweise folgen und einen vollkommenen Finanzmarkt mit einem im Zeitablauf konstanten Zins unterstellen. Ergänzend werden wir jedoch auch zeigen, dass diese Standardprämisse zwar die Darstellungs- und Rechentechnik vereinfacht, für die Anwendbarkeit der im Folgenden zu entwickelnden Entscheidungsregeln jedoch keineswegs eine zwingende Voraussetzung darstellt.

Folgt man nun aber der Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes, so macht es für die Beurteilung eines Investitionsprojektes gar keinen Unterschied mehr, ob die Anfangsauszahlung oder auch später auftretende Auszahlungsüberschüsse aus verfügbaren Liquiditätsreserven oder der Aufnahme zusätzlicher Kredite finanziert werden.

- Im ersten Fall werden die investierten Mittel der anderweitig möglichen Anlage zum Marktzins r entzogen.
- Im zweiten Fall ist der zusätzlich aufzunehmende Kredit gerade zum Zinssatz r zu verzinsen.

Dabei stimmen die im ersten Fall *entgehenden* und die im zweiten Fall zu *leistenden* Zins-, Zinseszins- und Rückzahlungsbeträge genau überein. Ebenso ist es ohne Bedeutung, ob die aus dem Investitionsprojekt resultierenden Einzahlungsüberschüsse dazu verwendet werden,

- zusätzliche, zum Zinssatz r verzinsliche, Anlagen zu bilden, oder
- zur Finanzierung der Investition aufgenommene oder auch anderweitig entstandene, ebenfalls zum Satz r zu verzinsende, Kredite zu tilgen.

In allen Fällen ergibt sich die gleiche Summe aus zusätzlichen Anlagezinsen und eingesparten Kreditzinsen. Diese Zusammenhänge werden nachfolgend beispielhaft verdeutlicht.

Beispiel 4:

Ein Investitionsprojekt ist mit der Zahlungsreihe

$e_0 = -100; \quad e_1 = +40; \quad e_2 = +37; \quad e_3 = +54$

verbunden. Am vollkommenen Finanzmarkt können Mittel jederzeit zu 10% angelegt oder aufgenommen werden. Bezüglich der Finanzierung des Projektes und der Verwendung der späteren Einzahlungsüberschüsse seien die nachfolgend aufgeführten Fälle unterschieden. Zur Notation seien folgende Festlegungen getroffen:

C_A, C_E Stand eines Guthabenkontos (+) oder Kreditkontos (–) zu Anfang bzw. Ende der Periode.

Z Zinsgutschrift (+) oder -belastung (–) auf einem Guthaben- bzw. Kreditkonto.

E Einzahlungsüberschuss (+) oder Auszahlungsüberschuss (–) des Investors ohne Durchführung des Investitionsprojektes.

e Ein- und Auszahlungsüberschüsse des Projektes nach o. g. Vorgabe.

Fall 1: Ständige Verschuldung

Ohne Durchführung des Investitionsprojektes würde der ständig in Anspruch genommene Kontokorrentkredit des Investors folgende – vollkommen willkürlich angenommene – Entwicklung nehmen:

Periode	**C_A +**	**Z +**	**E =**	**C_E**
1	– 1.000	– 100	+ 600	– 500
2	– 500	– 50	– 350	– 900
3	– 900	– 90	+ 190	– 800

Fall 2: Ständige Guthaben

Ohne Durchführung des Investitionsprojektes würde das Guthaben des Investors folgende Entwicklung nehmen:

Periode	**C_A +**	**Z +**	**E =**	**C_E**
1	+ 2.000	+ 200	– 1.200	+ 1.000
2	+ 1.000	+ 100	– 600	+ 500
3	+ 500	+ 50	– 250	+ 300

Fall 3: Wechselnde Situationen

Ohne Durchführung des Investitionsprojektes würden sich Guthaben- bzw. Kreditkonto des Investors wie folgt entwickeln:

Periode	**C_A +**	**Z +**	**E =**	**C_E**
1	+ 70	+ 7	+ 123	+ 200
2	+ 200	+ 20	– 320	– 100
3	– 100	– 10	+ 110	± 0

Das anfängliche Guthaben würde in der zweiten Periode also aufgebraucht und zusätzlich ein Kredit beansprucht, der in der dritten Periode gerade wieder einschließlich Zins zurückgeführt werden könnte.

Wird nun das Investitionsprojekt durchgeführt, so nehmen die Guthaben- und Kreditkonten statt der in den vorstehenden Tabellen enthaltenen Darstellung folgende Entwicklung: Die in der ersten Periode unter C_A aufgeführten Beträge sind dabei um die Investitionsauszahlung von 100 niedriger; in Fall 3 tritt an die Stelle des Anfangsguthabens von 70 nun eine Kreditbelastung von 30. Die unter der Rubrik Δ Z aufgeführten Zahlen geben dabei die bei Durchführung des Investitionsprojektes entstehenden Zinsvorteile (+: eingesparte Kreditzinsen und zusätzliche Anlagezinsen) sowie Zinsnachteile (–: zusätzliche Kreditzinsen und entgehende Anlagezinsen) an.

Fall 1:

Periode	C_A +	**Z** +	**E** +	**e** =	C_E	Δ Z
1	– 1.100	– 110	+ 600	+ 40	– 570	– 10
2	– 570	– 57	– 350	+ 37	– 940	– 7
3	– 940	– 94	+ 190	+ 54	– 790	– 4

Fall 2:

Periode	C_A +	**Z** +	**E** +	**e** =	C_E	Δ Z
1	+ 1.900	+ 190	– 1.200	+ 40	+ 930	– 10
2	+ 930	+ 93	– 600	+ 37	+ 460	– 7
3	+ 460	+ 46	– 250	+ 54	+ 310	– 4

Fall 3:

Periode	C_A +	**Z** +	**E** +	**e** =	C_E	Δ Z
1	– 30	– 3	+ 123	+ 40	+ 130	– 10
2	+ 130	+ 13	– 320	+ 37	– 140	– 7
3	– 140	– 14	+ 110	+ 54	+ 10	– 4

Vergleicht man die jeweils korrespondierenden Tabellen miteinander, so stellt man folgende Übereinstimmung fest:

– Bei Durchführung der Investition stellt sich der Investor am Ende der 3. Periode stets um 10 besser, weil er entweder über ein entsprechend höheres Guthaben verfügt (Fall 2 und 3) oder eine um 10 geringere Kreditbelastung hat (Fall 1). Im Rahmen einer projektindividuellen Analyse wäre das Projekt somit als vorteilhaft einzustufen, da es im Vergleich zur Unterlassensalternative zu einem höheren Endvermögen führt.

– Für alle 3 Fälle bringt das Investitionsprojekt Zinsnachteile in jeweils übereinstimmender Höhe von 10, 7 bzw. 4 in den drei Perioden, insgesamt also von 21.

Auf den ersten Blick könnten diese beiden Befunde widersprüchlich erscheinen. Denn einerseits wird das Projekt im Vergleich zur Unterlassensalternative als vorteilhaft qualifiziert; andererseits führt es im Vergleich zur Unterlassensalternative zu einem Zinsnachteil von insgesamt 21. Dieser scheinbare Widerspruch löst sich jedoch wie folgt schnell auf:

- Betrachtet man nur die Zahlungsreihe des Projektes ohne Berücksichtigung aller Zinseffekte, so ergibt sich im Vergleich zur Unterlassensalternative zunächst ein Bruttoüberschuss von + 31 (– 100 + 40 + 37 + 54 = + 31).
- Dem stehen allerdings die oben schon angesprochenen Zinsnachteile von 21 gegenüber.
- Per Saldo verbleibt also als Differenz zwischen Bruttoüberschuss und Zinsnachteil ein Nettoüberschuss von 10, was wieder genau dem oben schon auf anderem Wege ermittelten „Endvermögensvorteil“ entspricht.

Wie wir in Kurseinheit 2 dieses Kurses noch ausführlich zeigen werden, laufen die klassischen investitionstheoretischen Verfahren Kapitalwert, Endwert und äquivalente Annuität im Kern darauf hinaus,

- bestimmte *finanzmathematische Rechenverfahren* anzuwenden,
- um die Konsequenzen komplementärer Finanztransaktionen der in Beispiel 4 exemplarisch verdeutlichten Art *implizit* zu erfassen und
- an Hand verschiedener Kennzahlen Aussagen über die *relative Vorteilhaftigkeit* des Projektes im Vergleich zur Unterlassensalternative abzuleiten,
- ohne dabei jedoch die *Unterlassensalternative* selbst explizit darzustellen und zu bewerten.

Definition der Unterlassensalternative

Als Unterlassensalternative ist dabei die Möglichkeit zu verstehen,

- das betrachtete Investitionsprojekt nicht durchzuführen,
- Kredite, deren Aufnahme es im Zuge der Investitionsdurchführung bedurft hätte, ebenfalls nicht aufzunehmen und
- verfügbare Liquiditätsreserven, auf die im Zuge der Investitionsdurchführung zurückgegriffen würde, zu dem vorgegebenen Finanzmarktzins anzulegen.

1.4 Vorentscheidungen mittels Dominanzüberlegungen

1.4.1 Rein präferenzorientierte Investitionsentscheidungen

Abstraktion von vollkommenem Finanzmarkt und Endvermögensmaximierung

Wir haben oben eine Investitionsentscheidung formal als Wahl zwischen mehreren Zahlungsreihen definiert. Dazu hatten wir mit der Zielsetzung einer „Endvermögensmaximierung“ aber auch bereits eine recht spezielle Zielsetzung und mit der Existenz eines vollkommenen Finanzmarktes bereits einen bestimmten Rahmen für die Investitionsentscheidung ins Auge gefasst. Bevor wir uns im folgenden weiter mit einer Investitionsentscheidung unter diesen für die „klassische Investitionstheorie“ typischen Annahmen beschäftigen, wollen wir hier zunächst noch einmal einen Schritt zurücktreten und einen allgemeineren Blick auf Investitionsentscheidungsprobleme gewinnen.

Dazu abstrahieren wir hier zunächst wieder von der Existenz eines Finanzmarktes und darüber hinaus zunächst auch von der Möglichkeit einer Kassenhaltung. Wir versetzen uns also in eine Welt,

– in der der Investor – abgesehen von den zu beurteilenden Investitionsprojekten selbst – über keine sonstigen Mittelanlage- und Mittelaufnahmemöglichkeiten verfügen soll und

– in der der Investor – abgesehen von der Investitionsmöglichkeit im Zeitpunkt $t = 0$ – finanzielle Mittel nur im Zeitpunkt ihres Eingangs zu Konsumzwecken einsetzen kann. Nicht sofort eingesetzte Mittel werden wertlos.

Außerdem abstrahieren wir von der bereits sehr speziellen Zielvorstellung der Endvermögensmaximierung.

Grundproblem: Intertemporaler Vergleich von Zahlungen

Das Entscheidungsproblem eines Investors stellt sich in allgemeiner Sichtweise dann wie folgt dar: Jede zur Wahl stehende Zahlungsreihe repräsentiert eine ganze Sequenz von Ergebnissen, die zwar alle Einfluß auf die Vermögenssituation des Investors haben, die aber jeweils zu unterschiedlichen Zeitpunkten anfallen und daher in ihrer Wirkung auf seine Vermögenssituation nicht ohne weiteres miteinander vergleichbar sind. Z.B. kann ohne weiteres keine Aussage darüber getroffen werden, wie hoch ein zusätzlicher Einzahlungsüberschuss von X in einem Zeitpunkt sein muss, damit ihm genau dieselbe Vermögenswirkung wie einem zusätzlichen Einzahlungsüberschuss von Y in einem anderen Zeitpunkt zugeordnet werden kann. Genau um solche intertemporären Vergleiche von Zahlungskonsequenzen muss es bei einer Wahl zwischen verschiedenen Zahlungsreihen aber offensichtlich gehen. Bei der Suche nach einem rationalen Verfahren zur Investitionsentscheidung geht es also im Kern um die Suche nach einem Konzept zum intertemporären Zahlungsvergleich.

Ansatz einer präferenzorientierten Investitionsentscheidung

Auf Anhieb könnte man sich vorstellen, ein solches rationales Investitionsentscheidungsverfahren etwa folgendermaßen aufzubauen: Der Investor könnte jeder Zahlungsreihe mittels einer subjektiven Präferenzfunktion, die seine intertemporalen Präferenzen zum Ausdruck bringt, zunächst einen eindimensionalen Präferenzwert zuordnen und sich dann für die Investitionsalternative mit dem höchsten Präferenzwert entscheiden. Solche Konzepte werden Sie in den Kurseinheiten 3 bis 5 bei der Untersuchung von Entscheidungen zwischen Handlungsalternativen mit unsicheren Handlungskonsequenzen noch ausführlich kennenlernen.

Entscheidungen auf der Basis eines solchen Entscheidungskonzeptes könnte man als **präferenzorientierte Investitionsentscheidung** bezeichnen. Bezeichnet man die intertemporale Präferenzfunktion des Investors, die jeder Zahlungsreihe $e_t^i \; (t = 0, 1, \ldots, T)$ einen Präferenzwert φ^i zuordnet, mit ϕ, so kann als Entscheidungsregel für eine präferenzorientierte Investitionsentscheidung einfach formuliert werden:

Formale Entscheidungsregel einer präferenzgestützten Investitionsentscheidung

$$\max_i : \varphi^i = \phi(e_0^i, e_1^i, \ldots, e_T^i) \text{ mit } i = 1, \ldots, I \text{ (I: Anzahl der Handlungsalternativen).}$$

So einfach diese Formel in allgemeiner Form auch niedergeschrieben ist, so problematisch ist jedoch ihre konkrete Anwendung sowohl in theoretischer als auch in praktischer Hinsicht. Die Anwendbarkeit der Formel hängt von der Kenntnis der intertemporalen Präferenzfunktion des Investors ab. Zum einen wird sich ein Investor in der Praxis aber schwertun, seine intertemporale individuelle Präferenzfunktion in allgemeiner Form anzugeben. Zum anderen fällt es aber auch aus theoretischer Sicht schwer, Bedingungen zu formulieren, denen eine intertemporale Präferenzfunktion sinnvollerweise entsprechen sollte.

Grundeigenschaft intertemporaler Präferenzfunktionen

Die einzige Bedingung, die auf Anhieb von einer intertemporalen Präferenzfunktion vernünftigerweise zu erfüllen ist, lautet:

$$\delta \phi / \delta e_t \;>\; 0 \qquad \text{für} \quad t = 0, 1, \ldots, T.$$

Diese Bedingung besagt, dass die Erhöhung einer Einzahlung e_t (bzw. Verminderung einer Auszahlung) bei Konstanz aller übrigen Zahlungswerte stets zu einem höheren Präferenzwert führt, oder anders ausgedrückt, dass der Investor in keinem Zeitpunkt hinsichtlich seines Zahlungsmittelbestandes saturiert (zufriedengestellt) ist.

Allein auf der Basis dieser Grundeigenschaft intertemporaler Präferenzfunktionen lassen sich erste, grundlegende Aussagen über eine optimale Investitionsentscheidung treffen. Möglichkeiten und Grenzen der auf dieser Basis zu treffenden, präferenzorientierten Investitionsentscheidung werden nachfolgend an einem Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 5:

In einer Welt ohne Finanzmarkt und Kassenhaltungsmöglichkeit ist eine Wahl zwischen einander ausschließenden Investitionsprojekten zu treffen, wobei die zur Wahl stehenden Investitionsprojekte a_1, a_2, a_3 und a_4 durch nachfolgende Zahlungsreihen charakterisiert werden können.

Projekt	e_0	e_1	e_2
a_1	– 100	+ 60	+ 60
a_2	–110	+ 60	+ 55
a_3	– 100	+ 45	+ 70
a_4	– 100	+ 70	+ 45

Versucht man sich der Investitionsentscheidung zunächst durch paarweisen Vergleich von Zahlungsreihen zu nähern, so stellt man bei einem Vergleich der Projekte a_1 und a_2 fest, dass

- Projekt a_1 in den Zeitpunkten t = 0 und t = 2 höhere Zahlungssalden als Projekt a_2 liefert und[1)]
- Projekt a_1 in keinem Zeitpunkt einen niedrigeren Zahlungssaldo als Projekt a_2 liefert.

Bei dieser Konstellation ist auch ohne die Existenz eines Finanzmarktes und ohne die Möglichkeit einer Kassenhaltung allein wegen der unterstellten Grundeigenschaft einer intertemporalen Präferenzfunktion davon auszugehen, dass jeder Investor sich für Projekt a_1 und gegen a_2 entscheiden wird. Die zwischen Projekt a_1 und a_2 bestehende Konstellation bietet damit offensichtlich die Möglichkeit einer eindeutigen Investitionsentscheidung unabhängig von speziellen subjektiven Präferenzvorstellungen des Investors.

Demgegenüber kann bei allen anderen im Beispiel möglichen paarweisen Projektvergleichen ohne Finanzmarkt und Kassenhaltungsmöglichkeit keine Investitionsentscheidung getroffen werden, ohne dass speziellere Annahmen über die Präferenzen des Investors getroffen werden.

Bei allen anderen paarweisen Projektvergleichen zwischen zwei Projekten a_i und a_j gilt nämlich, dass

- in mindestens einem Zeitpunkt Projekt a_i einen höheren Zahlungssaldo liefert und
- in mindestens einem anderen Zeitpunkt Projekt a_j einen höheren Zahlungssaldo liefert.

Allgemeine zeitliche Dominanz

Die im Beispiel (zwischen den Projekten a_1 und a_2) verdeutlichte Konstellation liefert in verallgemeinerter Form eine Grundkonstellation für eine Investitionsentscheidung, die als **allgemeine zeitliche Dominanz** bezeichnet wird.

---

1 Im Sinne der hier anzustellenden Betrachtungen sind stärker negative Zahlungssalden kleiner als weniger stark negative Zahlungssalden anzusehen.

Eine allgemeine zeitliche Dominanz eines Projektes i über ein Projekt j liegt genau dann vor, wenn für die Zahlungsreihen (e_t^i, t = 0, 1, …, T) und (e_t^j, t = 0, 1, …, T) gilt:[1)]

$$e_t^i \geq e_t^j \quad \text{für jedes} \quad t = 0, 1, \ldots, T \quad \text{und}$$

$$e_t^i > e_t^j \quad \text{für mindestens ein} \quad t = 0, 1, \ldots, T \ .$$

Investitionsentscheidung bei allgemeiner zeitlicher Dominanz

Bei allgemeiner zeitlicher Dominanz reicht allein die Annahme, dass der Investor in jedem Zeitpunkt mehr Geld höher bewertet als weniger Geld, für eine eindeutige Entscheidung zugunsten des dominanten Projektes aus.[2)] Die Entscheidung zwischen Projekten mit allgemeiner zeitlicher Dominanzbeziehung ist damit unabhängig von weitergehenden Präferenzvorstellungen des Investors und unabhängig von Transformationsmöglichkeiten des Finanzmarktes und einer Kassenhaltungsmöglichkeit. Die Anwendung investitions- oder entscheidungstheoretischen Instrumentariums ist für eine Entscheidung zwischen solchen Projekten also gar nicht erforderlich. Umgekehrt kann im Sinne spezieller investitionstheoretischer oder entscheidungstheoretischer Entscheidungsmodelle anhand des Kriteriums „allgemeine zeitliche Dominanz“ eine Vorauswahl getroffen werden, welche Investitionsalternativen überhaupt noch einer weitergehenden Beurteilung zu unterziehen sind.

Einordnung der allgemeinen zeitlichen Dominanz

Die Relation der allgemeinen zeitlichen Dominanz beim Vergleich von Zeitreihen kann als Pendant zur Relation der Zustandsdominanz beim Vergleich von zustandsabhängigen Ergebnisverteilungen betrachtet werden.[3)] Für die Relation allgemeiner zeitlicher Dominanz gilt Transitivität, d.h., dass ein Projekt a_i ein Projekt a_j dominiert, wenn Projekt a_i ein Projekt a_k dominiert und Projekt a_k Projekt a_j dominiert.

---

1 Beim Vergleich von Projekten mit unterschiedlicher Laufzeit bezeichnet T den Endzeitpunkt des Projektes mit der längeren Laufzeit. Für Zeitpunkte, in denen das kürzer laufende Projekt keine Zahlungskonsequenzen mehr hat, wird ein Zahlungssaldo von ± 0 unterstellt.

2 Besonders hingewiesen sei in diesem Zusammenhang darauf, dass der Dominanzbegriff nicht mit dem ebenfalls häufig in der Ökonomie verwendeten Effizienzbegriff zu verwechseln ist. Im allgemeinen wird von einer effizienten Alternative gesprochen, wenn diese Alternative von keiner anderen Alternative dominiert wird. Aus der Tatsache, dass eine Alternative i eine Alternative j dominiert, kann bei Existenz weiterer Alternativen aber noch nicht auf die Effizienz der Alternative i geschlossen werden. Alternative i kann ja immer noch von einer Alternative k dominiert werden. Außerdem kann aus der Effizienz der Alternative i nicht geschlossen werden, dass sie Alternative j oder überhaupt irgendeine Alternative dominiert, sondern eben nur, dass sie selbst von keiner anderen Alternative dominiert wird.

3 Zum Begriff der Zustandsdominanz vgl. Abschnitt 2.2.1 der Kurseinheit 3 dieses Kurses.

Um Investitionsentscheidungen zwischen Projekten ohne allgemeine zeitliche Dominanz in einer Welt ohne Finanzmarkt und Kassenhaltungsmöglichkeit zu treffen, reicht die sehr schwache Annahme, dass ein Investor in jedem Zeitpunkt mehr Geld höher bewertet als weniger Geld, allerdings nicht mehr aus. Dazu ist eine weitergehende Spezifizierung der Präferenzfunktion erforderlich. Alle weitergehenden Spezifizierungen der Präferenzfunktion können aber nicht mehr allgemeingültig, sondern nur noch investorenindividuell vorgenommen werden.

Auch diese Problematik lässt sich an dem obigen Beispiel verdeutlichen.

Beispiel 5 (Fortsetzung I):
Bei einem paarweisen Vergleich der Projekte a_1 und a_3 ist z.B. festzustellen, dass

– Projekt a_3 in $t = 2$ einen Zahlungsvorteil von 10 aufweist, dem
– in $t = 1$ ein Zahlungsvorteil von 15 für Projekt a_1 gegenübersteht.

Nun ist zu vermuten, dass viele Investoren Projekt a_1 vorziehen würden, da sie dessen Zahlungsnachteil in $t = 2$ als durch den früheren und zudem höheren Zahlungsvorteil in $t = 1$ deutlich überkompensiert ansehen. Eine derartige Abwägung von Vor- und Nachteilen setzt ohne Finanzmarkt und Kassenhaltungsmöglichkeit aber letztlich doch bereits spezielle Vorstellungen über die intertemporalen Präferenzen des Investors voraus, d.h. darüber, wie der Investor auf verschiedene Zeitpunkte bezogene Ergebnisse subjektiv bewertet. Zumindest denkbar erscheint aber auch, dass ein Investor intertemporale Präferenzen hegt, die ihn trotzdem Projekt a_3 vorziehen lassen.

So könnte man sich z.B. vorstellen, dass ein Investor noch weitere Investitionsprojekte durchführt, die in $t = 1$ insgesamt ohnehin bereits relativ hohe Rückflüsse und in $t = 2$ nur noch relativ geringe Rückflüsse liefern, dass der Investor in $t = 1$ ohne Berücksichtigung des zu beurteilenden Investitionsprojektes also relativ „reich“ und in $t = 2$ relativ „arm“ ist. Für einen solchen Investor erschiene eine Entscheidung zu Gunsten von Projekt a_1 keineswegs zwingend, wenn man davon ausgeht, dass er eine zusätzliche Geldeinheit in einem Zustand umso niedriger bewertet, je höher sein ansonsten bereits realisierter Zahlungssaldo ist.

Problematische zusätzliche Annahmen über intertemporale Präferenzen

Verschiedentlich wird davon ausgegangen, dass über die Annahme nicht saturierter Investoren hinaus auch noch weitere Eigenschaften der Präferenzfunktion als allgemein erfüllt angesehen werden können.

Häufig wird z.B. davon ausgegangen, dass sich der Präferenzwert erhöht, wenn eine frühere Zahlung um einen bestimmten Betrag erhöht und gleichzeitig eine spätere Zahlung um denselben Betrag vermindert wird. Diese zusätzliche Eigenschaft der Präferenzfunktion wird auch als **Gegenwartspräferenz** bezeichnet.

In einer Welt ohne Kassenhaltungsmöglichkeit erscheint aber bereits die An-nahme von Gegenwartspräferenz – im Vergleich zur Annahme der Nichtsaturiertheit – sehr speziell und insgesamt keineswegs zwingend. Eine allgemeingültige Investitionstheorie, die Aussagen über optimale Investitionsentscheidungen in einer Welt ohne Finanzmarkt und Kassenhaltungsmöglichkeiten machen soll, muss damit bei einem Verzicht auf einschränkende Präferenzannahmen letztlich auf den Fall allgemeiner zeitlicher Dominanz beschränkt bleiben.

1.4.2 Präferenzorientierte Investitionsentscheidungen bei Kassenhaltungsmöglichkeit

Kassenhaltung

Eine erste wesentliche Erweiterung allgemeingültiger, d.h. von speziellen subjektiven Präferenzen des Investors unabhängiger Aussagemöglichkeiten über die Bestimmung des optimalen Investitionsprojektes ergibt sich durch Berücksichtigung einer substanzneutralen Kassenhaltungsmöglichkeit. Im Gegensatz zur Annahme eines Finanzmarktes setzt die Annahme einer Kassenhaltungsmöglichkeit noch nicht voraus, dass unterschiedliche Kontrahenten sich zu einer vorübergehenden Geldüberlassung zusammenfinden. Vorausgesetzt wird nur, dass ein Investor die individuelle Möglichkeit hat, Zahlungsmittel für eine gewisse Zeit (z.B. eine Periode) „zur Seite zu legen“, d.h. die in einem Zeitpunkt $t = i$ einsetzbaren Mittel um einen bestimmten Betrag zu vermindern und dadurch die im Zeitpunkt $t = i + k$ ($k = 1, 2, \ldots, T - i$) verfügbaren Mittel um denselben Betrag zu erhöhen.

Beispiel 5 (Fortsetzung II):

In dem paarweisen Vergleich der Investitionsprojekte a_1 und a_3 lässt sich eine eindeutige Entscheidung zugunsten von Projekt a_1 treffen, wenn als intertemporale Transformationsmöglichkeit allein von der Möglichkeit einer unverzinslichen Kassenhaltung ausgegangen wird. Dann können z.B. bei Realisation von Projekt a_1 im Zeitpunkt $t = 1$ Einzahlungsüberschüsse in Höhe von 10 zur Erhöhung des Kassenbestandes genutzt werden. Im Zeitpunkt $t = 2$ können dann die Einzahlungsüberschüsse des Projektes a_1 um eine gleichhohe Entnahme von 10 aus der Kasse erhöht werden. Durch Kassenhaltung kann also Projekt a_1 mit der Zahlungsreihe (–100, +60, +60) z.B. mit der Finanztransaktion „Kassenhaltung“ a_1' mit der Zahlungsreihe (0, –10, +10) zu einem neuen Projekt $A_{1,1}$ mit der Zahlungsreihe (–100, +50, +70) kombiniert werden. Das neue Projekt $A_{1,1}$ dominiert das ursprüngliche Projekt a_3 mit der Zahlungsreihe (–100, +45; +70) im Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz.

Die Realisierung von Projekt a_3 kann also für keinen Investor optimal sein, da sich mit gleichzeitiger Realisierung von Projekt a_1 und a_1' eine eindeutig bessere Ergebnissequenz erzielen lässt.

In analoger Weise kann allein durch die Berücksichtigung von Kassenhaltungsmöglichkeiten gezeigt werden, dass

- Projekt a_4 gegenüber Projekt a_2 und
- Projekt a_4 gegenüber Projekt a_3

unabhängig von subjektiven Präferenzvorstellungen zu präferieren ist.

Beim Vergleich der Projekte a_4 und a_3 lässt sich allein durch die Ergänzung um Kassenhaltungsaktivitäten aus Projekt a_4 zwar kein neues Projekt kreieren, das dem Projekt a_3 im *strengen* Sinne der allgemeinen zeitlichen Dominanz überlegen ist. Aus Projekt a_4 lässt sich durch Kassenhaltung aber eine Vielzahl verschiedener neuer Projekte konstruieren, von denen genau eines dem Projekt a_3 hinsichtlich seiner Zahlungskonsequenzen entspricht. Projekt a_4 zzgl. einer Kassenhaltungsmöglichkeit kann für einen Investor je nach seiner speziellen Präferenzfunktion damit zwar unter Umständen genausoviel wie, aber nie weniger Wert sein als Projekt a_3. Ein Paket aus a_4 und Kassenhaltungsmöglichkeit ist Projekt a_3 damit zumindest im *schwachen* Sinne der allgemeinen zeitlichen Dominanz überlegen.

Nach wie vor keine eindeutige Präferenzordnung erlaubt die ausschließliche Berücksichtigung einer Kassenhaltungsmöglichkeit beim paarweisen Vergleich der Projekte a_1 und a_4 und der Projekte a_2 und a_3. Mit Berücksichtigung der Kassenhaltungsmöglichkeit lässt sich das Entscheidungsproblem aber immerhin auf eine Wahl zwischen den Projekten a_1 und a_4 reduzieren, da nur diese Projekte keinem anderen Projekt eindeutig unterlegen sind.

Die in obigem Beispiel (zwischen den Projekten a_1 und a_3) verdeutlichte Konstellation soll nachfolgend als **kumulative zeitliche Dominanz** bezeichnet werden.

Kumulative zeitliche Dominanz

Eine kumulative zeitliche Dominanz eines Projektes i über ein Projekt j liegt genau dann vor, wenn für die Zahlungsreihen (e_t^i, t = 0, 1,…,T) und (e_t^j, t = 0, 1, …, T) gilt:

$$\sum_{\tau=0}^{t} e_\tau^i \geq \sum_{\tau=0}^{t} e_\tau^j \quad \text{für jedes} \quad t = 0, 1, \ldots, T \quad \text{und}$$

$$\sum_{\tau=0}^{t} e_\tau^i > \sum_{\tau=0}^{t} e_\tau^j \quad \text{für mindestens ein} \quad t = 0, 1, \ldots, T \ .$$

Die Relation der kumulativen zeitlichen Dominanz beim Vergleich von Zeitreihen weist Ähnlichkeiten zur Relation der Wahrscheinlichkeitsdominanz beim Vergleich von zustandsabhängigen Ergebnisverteilungen auf.[1)] Auch für die Relation der kumulativen zeitlichen Dominanz gilt Transitivität. Außerdem kann festgestellt werden, dass die kumulative zeitliche Dominanz im Vergleich zur allgemeinen zeitlichen Dominanz die eindeutig schwächere Dominanzrelation darstellt, d.h., dass aus einer allgemeinen zeitlichen Dominanz eines Projektes a_i über ein Projekt a_j

---

1 Zum Begriff der Wahrscheinlichkeitsdominanz vgl. Abschnitt 2.2.1 der Kurseinheit 3 dieses Kurses. Sowohl bei der kumulativen zeitlichen Dominanz als auch bei der Wahrscheinlichkeitsdominanz werden bestimmte Größen der zu beurteilenden Ausgangsverteilungen zusammengefaßt und einer aggregierenden Betrachtung unterzogen. Beide Dominanzprinzipien weisen daher zwar formale Ähnlichkeiten auf, sind ansonsten jedoch sehr unterschiedliche Konzepte zur Identifikation suboptimaler Handlungsalternativen.

zwar auf eine kumulative zeitliche Dominanz von Projekt a_i über Projekt a_j geschlossen werden kann, aber umgekehrt aus einer kumulativen zeitlichen Dominanz eines Projektes a_i über ein Projekt a_j nicht zwingend auf eine allgemeine zeitliche Dominanz von Projekt a_i über Projekt a_j geschlossen werden kann.

Zusammenhang zwischen kumulativer zeitlicher Dominanz, Kassenhaltung und Investitionsentscheidungen

Der im Beispiel verdeutlichte Zusammenhang lässt sich dann wie folgt verallgemeinern:

> Dominiert ein Projekt a_i ein Projekt a_j im Sinne kumulativer zeitlicher Dominanz, so kann Projekt a_i stets mit einer Kassenhaltung a'_k zu einem Projektbündel A_{ik} so kombiniert werden, dass das Projektbündel A_{ik} das Projekt a_j mindestens im *schwachen* Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz dominiert.

Geht man zusätzlich davon aus, dass ein Finanzmarkt mit zwar numerisch unbekannten, aber zumindest stets positiven Zinssätzen für Mittelanlage und -aufnahme existiert, dann kann aus der kumulativen zeitlichen Dominanz von Projekt a_i über Projekt a_j weitergehend geschlossen werden, dass Projekt a_i stets mit einer Finanztransaktion a'_k zu einem Projektbündel A_{ik} so kombiniert werden kann, dass das Projektbündel A_{ik} das Projekt a_j auch im strengen Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz dominiert.

Bei kumulativer zeitlicher Dominanz bedarf eine Investitionsentscheidung also weder spezieller Präferenzannahmen noch eines Finanz*marktes*, sondern lediglich der Möglichkeit einer substanzneutralen Geld*lagerung*. Eine Anwendung weitergehenden investitions- oder entscheidungstheoretischen Instrumentariums ist auch unter diesen Bedingungen nicht erforderlich.

1.4.3 Investitionsentscheidungen mit Finanzmarkt

Eine weitere, ganz deutliche Erweiterung allgemeingültiger Aussagemöglichkeiten über die Bestimmung des optimalen Investitionsprojektes ergibt sich mit der Existenz eines Finanzmarktes.

Beispiel 5 (Fortsetzung III):

Geht man etwa davon aus, dass ein vollkommener Finanzmarkt im strengen Sinne mit einem einheitlichen Zinssatz von $r = 10\%$ existiert, so kann in dem paarweisen Vergleich der Investitionsprojekte a_1 und a_4 eine eindeutige Entscheidung zugunsten von Projekt a_1 getroffen werden. Dies wird z.B. deutlich, wenn man das Projekt a_1 mit der Zahlungsreihe (–100, +60, +60) mit einer Finanztransaktion a'_2 mit der Zahlungsreihe (0, +10, –11) zu einem neuen Projekt $A_{1,2}$ mit der Zahlungsreihe (–100, +70, +49) kombiniert. Das neue Projekt $A_{1,2}$ dominiert das ursprüngliche Projekt a_4 mit der Zahlungsreihe (–100, +70, +45) im Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz. Eine Durchführung von Projekt a_4 ist für den Investor daher nicht optimal.

> Zum selben Ergebnis kann man auch durch ganz andere Kombinationen von Investitionsprojekten und Finanztransaktionen gelangen. Zum Beispiel könnte man auch Projekt a_1 mit der Zahlungsreihe (–100, +60, +60) mit einer Finanztransaktion a'_3 mit der Zahlungsreihe (0, +12, –13,2) zu einem neuen Projekt $A_{1,3}$ mit der Zahlungsreihe (–100, +72, +46,8) kombinieren. Auch dieses neue Projekt $A_{1,3}$ dominiert das ursprüngliche Projekt a_4.

Investitionsentscheidungen allein durch Dominanzüberlegungen bei vollkommenem Finanzmarkt

Allgemein lässt sich feststellen, dass die intertemporalen Transformationsmöglichkeiten eines vollkommenen Finanzmarktes es stets ermöglichen, die ursprünglichen Investitionsprojekte in solcher Weise mit Finanztransaktionen zu kombinieren, dass die Investitionsentscheidung auf reine Dominanzüberlegungen zurückgeführt werden kann. Für die Investitionsentscheidungen sind dann überhaupt nur noch die Transaktionsmöglichkeiten des Finanzmarktes, nicht mehr aber die individuellen intertemporalen Präferenzen des Investors von Bedeutung. Statt einer präferenzorientierten Investitionsentscheidung ist im Kontext eines Finanzmarktes also eine **marktorientierte Investitionsentscheidung** zu treffen.

Ausblick und Einordnung

Wir wollen uns hier aber zunächst der Frage widmen, welche konkreten Methoden die Investitionstheorie für marktorientierte Investitionsentscheidungen bereithält. Dabei beschränken wir uns in diesem einführenden Modul bewußt auf diejenigen Verfahren der Investitionsrechnung, die auf reine Dominanzüberlegungen zurückgeführt werden können. Da sich diese Verfahren ausschließlich durch unterschiedliche Kombinationen der Projektzahlungsreihe mit Finanztransaktionen unterscheiden (vgl. dazu auch das letzte Beispiel), führen sie erwartungsgemäß auch nicht zu unterschiedlichen Vergleichsergebnissen (sofern sie sachgerecht angewandt werden). Andere Verfahren der Investitionsrechnung, wie z.B. die in der Praxis noch recht häufig verwendete sog. „Interne Zinsfußmethode“, die sich nicht als spezielle Dominanzüberlegungen interpretieren lassen, können unter bestimmten Umständen beim Vergleich mehrerer Investitionsprojekte zu abweichenden Vergleichsergebnissen führen und sind in diesen Fällen auch nicht mehr mit der Zielsetzung Endvermögensmaximierung kompatibel. Mit der Internen Zinsfußmethode und der Diskussion der für die Betriebswirtschaftslehre und insbesondere auch für die Investitionstheorie doch recht wichtigen Untersuchung der Ursachen, Bedingungen und Konsequenzen abweichender Vergleichsergebnisse werden wir uns noch ausführlich in Kurseinheit 2 dieses Kurses beschäftigen.

Die dort zu behandelnden investitionstheoretischen Kennziffern werden durchweg in der Weise gebildet, dass die für die Investitionsprojekte maßgeblichen Zahlungsreihen mittels bestimmter finanzmathematischer Techniken zu einem einzigen Wert zusammengefasst und dann nur noch anhand dieses Kennzahlenwertes beurteilt werden. Bevor wir die verschiedenen Kennziffern im einzelnen analysieren, wollen wir daher – gewissermaßen als Auffrischung Ihrer Schulmathematik – die grundlegenden finanzmathematischen Techniken, soweit wir sie im folgenden benötigen, kurz darstellen.

Übungsaufgabe 4:

Es sei eine Entscheidung zwischen vier einander ausschließenden Investitionsprojekten zu treffen, die durch folgende Zahlungsreihen gekennzeichnet sind:

	e_0	e_1	e_2	e_3
a_1	– 100	+ 44	+ 44	+ 44
a_2	– 100	+ 25	+ 25	+ 80
a_3	– 100	–	–	+ 125
a_4	– 100	–	–	+ 135

a) Inwieweit lässt sich die Investitionsentscheidung allein auf der Basis von Dominanzüberlegungen (unter Einbeziehung von Kassenhaltung, aber ohne weitere Annahmen über Finanztransaktionen und intertemporale Präferenzen des Investors) treffen?

b) Inwieweit lässt sich die Investitionsentscheidung auf der Basis von Dominanzüberlegungen treffen, wenn zusätzlich berücksichtigt wird, dass am Finanzmarkt jederzeit die Möglichkeit besteht, liquide Mittel in beliebigem Umfang zu einem Zinssatz von 10% anzulegen oder aufzunehmen?

c) Wie ist ein Entscheidungsverfahren zu beurteilen, bei dem für jede Zahlungsreihe einfach alle Zahlungen aufsummiert werden und dann das Projekt mit der höchsten Zahlungssumme realisiert wird?

2 Finanzmathematische Grundlagen der Investitionsrechnung

2.1 Vorbemerkung

Gesellschafter G scheidet im Laufe des Jahres 2006 aus seinem Unternehmen aus. Laut Gesellschaftsvertrag steht ihm zum 31.12.2006 eine „angemessene“ Abfindung zu, die auf Grund einer Bewertung des gesamten Unternehmens durch einen Sachverständigen festgelegt werden soll. Der Sachverständige kommt zu dem Ergebnis, dass der angemessene Abfindungsbetrag 500.000 GE beträgt. Dieser Vorschlag wird allseits akzeptiert, jedoch fragen die verbleibenden Gesellschafter an, ob G mit einer Stundung des Abfindungsbetrages einverstanden sei, und schlagen wahlweise vor,

– eine einmalige Zahlung zum 31.12.2011 oder
– fünf gleich hohe Teilzahlungen jeweils zum Ende der Jahre 2007 bis 2011

zu leisten. G erklärt sich grundsätzlich einverstanden, weist jedoch darauf hin, dass ihm als Folge der Stundung sonst mögliche Zinserträge von 8% p. a. entgehen. Mithin müßten die Raten jeweils mehr als 100.000 GE betragen, bzw. die einmalige Zahlung zum Ende des Jahres 2011 müßte 500.000 GE in entsprechendem Umfang übersteigen. Dies sehen die verbleibenden Gesellschafter auch ein. Ratlosigkeit herrscht jedoch bezüglich der Frage, wie hoch die in Rede stehenden Zahlungen denn nun angesetzt werden müssen, um exakt den Zinsverlust, nicht mehr und auch nicht weniger, auszugleichen.

Gegenstand der Finanzmathematik …

Die Klärung derartiger Fragen ist **Gegenstand der Finanzmathematik.** Sie beschäftigt sich mit dem Problem, Zahlungsgrößen, die auf unterschiedliche Zeitpunkte bezogen sind, unter Berücksichtigung von Zins- und Zinseszinseffekten vergleichbar zu machen. Die dazu entwickelten elementaren Rechentechniken sollen in den folgenden drei Abschnitten in ihren Grundzügen dargestellt und jeweils an einfachen Beispielen verdeutlicht werden. Dabei werden die folgenden drei grundlegenden Fragestellungen behandelt:

… und grundlegende Fragestellungen

– Wie groß ist der zukünftige (heutige) Wert *einer* heutigen (zukünftigen) Zahlung? (**Zins- und Zinseszinsrechnung**)
– Wie groß ist der heutige (zukünftige) Wert eines über mehrere Perioden gleichbleibenden Zahlungsstromes? (**Rentenrechnung**)
– Wie groß müssen die einzelnen Zahlungen eines über mehrere Perioden gleichbleibenden Zahlungsstroms sein, damit ihr Gesamtwert einem vorgegebenen heutigen (zukünftigen) Zahlungsbetrag entspricht? **(Annuitätenrechnung)**

Dabei gehen wir, sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, im Folgenden stets davon aus, dass alle Zahlungen jeweils nur zu Beginn oder zu Ende eines Jahres anfallen und auch die Zinsen jährlich jeweils nachschüssig, d.h. zum Jahresende, anfallen. Zur formalen Schreibweise vereinbaren wir außerdem, die verschiedenen Zeitpunkte durch den Index t ($t = 0, 1, 2, \ldots$) zu kennzeichnen. $t = 0$ verdeutlicht also den Beginn des ersten Jahres und damit zugleich den Betrachtungszeitpunkt, $t = 1$ das Ende des ersten Jahres etc. Der Anfangszeitpunkt einer Periode t ist dementsprechend der Zeitpunkt $t - 1$ und der Endzeitpunkt einer Periode t der Zeitpunkt t.

2.2 Zins- und Zinseszinsrechnung

2.2.1 Auf- und Abzinsung bei einheitlichem Periodenzins

Unterstellt man zunächst vereinfachend, dass der in den einzelnen Betrachtungsperioden geltende Zinssatz nicht variiert, so lässt sich die finanzmathematische Grundoperation der Aufzinsung beispielhaft wie folgt verdeutlichen:

Beispiel 6:

Angenommen, Sie legen im Zeitpunkt $t = 0$ einen Betrag von 1.000 GE auf einem Sparkonto an. Wie hoch ist Ihr Endguthaben nach 3 Jahren, wenn Ihnen die Bank jeweils am Ende jeden Jahres 10% Zinsen auf das zu Jahresbeginn vorhandene Guthaben (einschließlich der aus den Vorjahren aufgelaufenen Zinsen) gutschreibt?

Um diese Frage zu beantworten, können wir als umständlichste Methode damit beginnen, das Guthaben nach einem Jahr zu berechnen, darauf die Zinsen zu ermitteln und entsprechend das Guthaben nach zwei Jahren usw., bis zur Ermittlung des Endguthabens. Bezeichnet man den Guthabenbestand in einem Zeitpunkt t mit c_t und den als Dezimalzahl ausgedrückten Zins mit r, so gilt für den Guthaben-Bestand nach einer Periode allgemein: $c_{t+1} = c_t + r \cdot c_t$.

Das Endguthaben nach einer Periode ergibt sich also als Summe aus Anfangsguthaben und Zinsgutschrift. Letztere wiederum ergibt sich als Produkt aus Anfangsguthaben und dem Zinssatz. Klammert man in der vorstehenden Relation den Betrag des Anfangsguthabens aus, so kann auch geschrieben werden: $c_{t+1} = c_t \cdot (1 + r)$. Im Beispiel ergibt sich also mit $c_0 = 1.000$:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 \cdot (1 + r) \\ &= 1.000 \cdot 1{,}1 \qquad = 1.100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_2 &= c_1 \cdot (1 + r) \\ &= \left[c_0 \cdot (1 + r)\right] \cdot (1 + r) \\ &= c_0 \cdot (1 + r)^2 \\ &= 1.000 \cdot 1{,}1^2 \qquad = 1.210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_3 &= c_2 \cdot (1+r) \\ &= \left[c_0 \cdot (1+r)^2\right] \cdot (1+r) \\ &= c_0 \cdot (1+r)^3 \\ &= 1.000 \cdot 1{,}1^3 \qquad = 1.331\ . \end{aligned}$$

Das Endguthaben nach 3 Jahren beträgt also 1.331 GE.

Aus dem einfachen Beispiel erkennt man bereits die allgemeine Gesetzmäßigkeit, dass zwischen dem Anfangsguthaben c_0 und dem Endguthaben nach t Jahren c_t bei jeweiliger Verzinsung am Jahresende zum Jahreszinssatz r die Beziehung

$$(\mathrm{FM}_1) \quad c_t = c_0 \cdot (1+r)^t = c_0 \cdot q^t$$

besteht. Dabei bezeichnet r den als Dezimalzahl geschriebenen **Zinssatz** und q (: = 1 + r) den zugehörigen **Zinsfaktor.**[1)]

Zinssatz und Zinsfaktor

Verbal bringt man (FM_1) etwa durch die Formulierung zum Ausdruck, dass man das gesuchte Endvermögen c_t erhält, indem man das Anfangsguthaben c_0 über t Jahre zum Zinssatz r **aufzinst.** Den Ausdruck q^t bezeichnet man dementsprechend als **Aufzinsungsfaktor.** Wie man aus (FM_1) erkennt, hängt der Wert des anzusetzenden Aufzinsungsfaktors von der Höhe des Zinssatzes und der Zahl der Jahre, über die der Betrag aufzuzinsen ist, ab.

Aufzinsungsfaktor q^t

Tabelle I im Anhang dieses Studienbriefes enthält eine Zusammenstellung der q^t-Werte für verschiedene Laufzeiten und Zinssätze. Allen nachfolgenden Rechnungen werden die (gerundeten) Werte der im Anhang befindlichen finanzmathematischen Tabellen zugrundegelegt. Bei Verwendung eines Taschenrechners, der insbesondere auch beim Potenzieren mit anderer Genauigkeit Rundungen vornimmt, kann es zu geringfügig abweichenden Rechenergebnissen kommen. Benutzen Sie bitte Tabelle I zur Lösung der Übungsaufgaben 5 und 6.

Finanzmathematische Tabellen als Rechengrundlage

Für das in Abschnitt 2.1 angesprochene Problem, statt einer sofortigen Abfindungszahlung von 500.000 GE eine in genau 5 Jahren fällige Zahlung zu erbringen, kann beim vorgegebenen Zinssatz von 8% p. a. somit folgende Lösung gefunden werden:

1 Eine Übersicht über die hier und auch nachfolgend verwendeten Symbole finden Sie zu Beginn dieses Studientextes unter der Überschrift „Symbolverzeichnis". Die Bezeichnung der Formeln orientiert sich vornehmlich am inhaltlichen Themenbezug. So steht z.B. „FM_1" für „Formel 1 zum Themenbereich **F**inanz-**M**athematik".

$$\begin{aligned} c_5 &= 500.000 \cdot 1{,}08^5 \\ &= 500.000 \cdot 1{,}4693 \\ &= 734.650\,[\mathrm{GE}] \;. \end{aligned}$$

Legt man einen Zins von 8% zugrunde, so entspricht eine Zahlung von 734.650 GE zum 31.12.2011 (also in t = 5) einer am 31.12.2006 (also in t = 0) fälligen Zahlung von 500.000 GE. Der über den in t = 0 zu leistenden Abfindungsbetrag von 500.000 GE hinausgehende Anteil der Gesamtzahlung von 734.650 GE gibt dabei den Betrag an, der wegen der Zins- und Zinseszinseffekte nach 5 Jahren zusätzlich zu zahlen ist. Der „Überschussbetrag“ von 234.650 GE (734.650 – 500.000) kann im einzelnen auf zwei Effekte zurückgeführt werden:

x **Einfacher Zinseffekt**

Auf die Ausgangssumme von 500.000 GE sind jährlich 8% Zinsen zu berechnen, also 40.000 GE. Für fünf Jahre aufaddiert ergibt sich somit als „einfacher Zinseffekt“ ein Betrag von 200.000 GE.

x **Zinseszinseffekt**

Der noch verbleibende Restbetrag von 34.650 GE ist darauf zurückzuführen, dass in unserer Rechnung ja nicht nur die 500.000 GE verzinst werden, sondern auch noch die jährlich „gutgeschriebenen“ Zinsen sowie die Zinsen auf die Zinsen und auch die Zinsen auf die Zinsen der Zinsen etc.

Unser Zahlenbeispiel könnte die Vermutung nahelegen, Zinseszinseffekte seien im Vergleich zu dem einfachen Zinseffekt von eher nachrangiger Bedeutung. Dies ist allerdings keineswegs generell der Fall. Vielmehr kommt dem Zinseszinseffekt bei längeren Laufzeiten und höheren Zinssätzen ein dominantes Gewicht zu, wie folgendes Beispiel zeigt.

Beispiel 7:

Die CAPITAL BANK will 100 Mio. GE Zero Bonds mit einer Laufzeit von 30 Jahren emittieren, also Anleihen, die keine laufenden Zinszahlungen vorsehen, sich jedoch indirekt dadurch verzinsen, dass der Rückzahlungsbetrag deutlich höher ist als der Ausgabebetrag. Bei einem Marktzins von 8% müßte der Rückzahlungsbetrag eines für 100 GE emittierten Zero-Bonds der KAPITAL BANK somit

$$100 \cdot 1{,}08^{30} = 100 \cdot 10{,}0627 = 1.006{,}27\,[\mathrm{GE}]$$

betragen. Das von der CAPITAL BANK in 30 Jahren zu erbringende Rückzahlungsvolumen von gerundet 1.006 Mio. GE lässt sich in folgende drei Komponenten zerlegen:

Rückzahlung des ursprünglich erhaltenen Finanzbetrages („Tilgung“)	100 Mio. GE
„Einfache“ Zinszahlung (30 Jahre à 8 Mio. GE)	240 Mio. GE
Zinseszinseffekt	666 Mio. GE
	1.006 Mio. GE

In diesem Fall kommt dem Zinseszinseffekt also mehr als doppelt so viel Gewicht zu wie dem einfachen Zinseffekt.

Übungsaufgabe 5:

Ein Sparer legt am 01.01.2006 GE 2.000 zu einem Zinssatz von jährlich 6% auf einem Sparkonto an. Die Zinszahlungen werden dem Sparkonto jeweils am Jahresende gutgeschrieben.

a) Wie hoch ist sein Guthaben nach 5 Jahren?

b) Zu welchem Zeitpunkt weist sein Guthaben mehr als 4.000 GE auf?

c) Angenommen, unser Sparer hebt nach genau 3 Jahren 500 GE ab und lässt den Rest bis zum 31.12.2014 stehen. Wie hoch ist dann das erreichte Endguthaben?

Ökonomische Interpretation der Aufzinsung

Wenn wir den Vorgang der Aufzinsung ökonomisch interpretieren wollen, können wir – etwas vergröbernd – sagen: Durch die Aufzinsung wird unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins der **zukünftige Wert** eines **gegenwärtigen Geldbetrages** bestimmt. Oder noch vereinfachender: Durch die Aufzinsung wird ein gegenwärtiger Betrag wertmäßig in einen zukünftigen Betrag umgerechnet.

Übungsaufgabe 6:

Greifen Sie auf den im Abschnitt 2.1 dargestellten Fall des ausscheidenden Gesellschafters zurück!

a) Wie hoch müßte die nach 5 Jahren vorgesehene Einmalzahlung C_5 sein, wenn ein Zinssatz von 10% p. a. zugrunde gelegt wird?

b) Zerlegen Sie den für C_5 ermittelten Betrag in die drei Komponenten
   - ursprünglicher Abfindungsbetrag,
   - „einfacher Zins“ für 5 Jahre,
   - Zinseszins!

Abzinsung

Bislang haben wir den *künftigen Wert* einer heutigen Zahlung mittels Aufzinsung ermittelt. Der **Abzinsung** liegt gerade die entgegengesetzte Fragestellung zugrunde: Der *heutige Wert* einer zukünftigen Zahlung soll ermittelt werden.

Beispiel 8:

Nehmen wir etwa an, die Eltern einer Tochter rechnen damit, dass ihre Tochter in genau 5 Jahren ihren Führerschein erlangen werde, und wollten ihr an diesem Tag für den Kauf des ersten Autos einen Betrag von 10.000 GE überreichen. Wie viel Geld müßten sie dann heute bereits auf einem Sparkonto anlegen, wenn dieses sich jährlich mit 6% verzinst?

Zur Beantwortung dieser Frage können wir zunächst auf Formel (FM_1) zurückgreifen, müssen diese jedoch etwas umstellen, denn gegeben sind nun offenbar das Endguthaben ($c_t = 10.000$), der Zinsfaktor ($q = 1{,}06$) und die Periodenzahl ($t = 5$); zu bestimmen ist das dementsprechende Anfangsguthaben.

Es gilt also:

$$10.000 \;=\; c_0 \cdot 1{,}06^5, \quad \text{also} \quad c_0 = \frac{10.000}{1{,}06^5} \left(= 10.000 \cdot 1{,}06^{-5}\right) \;,$$

woraus sich unter Benutzung von Tabelle I bestimmen lässt:

$$c_0 \;=\; \frac{10.000}{1{,}3382} \;=\; 7.472{,}72\,[\text{GE}] \;.$$

Die Eltern müßten heute also 7.472,72 GE anlegen, um einschließlich Zins und Zinseszins in fünf Jahren über 10.000 GE verfügen zu können.

Verallgemeinert man unser Rechenbeispiel, so ergibt sich:

$$(\text{FM}_2) \quad c_0 \;=\; c_t \cdot (1 + r)^{-t} \;=\; c_t \cdot q^{-t} \;.$$

Abzinsungsfaktor q^{-t}

Das gesuchte Anfangsguthaben c_0 erhält man also, indem man das vorgegebene Endvermögen c_t über t Jahre zum Zinssatz r **abzinst.** Die Größe q^{-t} nennt man dementsprechend auch den **Abzinsungsfaktor.** Wenn wir den Aufzinsungsfaktor q^t kennen – etwa aus Tabelle I –, könnten wir den entsprechenden Abzinsungsfaktor als dessen Kehrwert ermitteln. Die Arbeit, den Kehrwert zu bestimmen, wird uns jedoch durch die beiliegende Tabelle II abgenommen, in der die Abzinsungsfaktoren q^{-t} für verschiedene Zinssätze und Laufzeiten abgedruckt sind.

Ökonomische Interpretation der Abzinsung

Wollen wir den Vorgang der Abzinsung ökonomisch interpretieren, so können wir vergröbernd sagen: Durch die Abzinsung wird – unter Berücksichtigung von Zins und Zinseszins – der **gegenwärtige** Wert eines **zukünftigen** Geldbetrages bestimmt. Oder noch einfacher: Durch die Abzinsung wird ein zukünftiger Betrag wertmäßig in einen auf die Gegenwart bezogenen Betrag umgerechnet**.** Dabei bezeichnet man das Ergebnis eines solchen Abzinsungsvorganges (also c_0) allgemein als den **Barwert** des zukünftigen Betrages c_t.

Barwert

Übungsaufgabe 7:

a) Ein Sparer möchte in 10 Jahren (t = 10) ein Endguthaben von genau 10.000 GE haben. Welchen Betrag muss er heute (t = 0) anlegen, wenn sich das Guthaben jährlich mit 4% verzinst?

b) Wie groß ist das Produkt aus
   - Abzinsungsfaktor für 7,5% und 9 Jahre und
   - dem Aufzinsungsfaktor für 7,5% und 9 Jahre?

2.2.2 Auf- und Abzinsung bei wechselndem Periodenzins

Bislang haben wir für alle Perioden einen einheitlichen Zinssatz r unterstellt. Gehen wir nun von dieser keineswegs zwingenden – sondern lediglich der Vereinfachung dienenden – Annahme ab und unterstellen, dass in jeder Periode t ein unterschiedlicher Zinssatz r_t (t = 1, 2, …) gegeben ist, so sind die Formeln (FM_1) und (FM_2) lediglich geringfügig zu modifizieren.

Nach wie vor ergibt sich das Endguthaben einer Periode t als Summe aus Anfangsguthaben und Zinsgutschrift. Für periodenindividuelle Zinssätze r_t gilt jeweils nach Verstreichen eines Jahres:

$$c_t = c_{t-1} \cdot (1 + r_t) \ .$$

Wird im Zeitpunkt 0 der Betrag c_0 angelegt, so gilt für den Kontostand späterer Zeitpunkte:

$$\begin{aligned} c_1 &= c_0 \cdot (1 + r_1) \\ c_2 &= c_1 \cdot (1 + r_2) = c_0 \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \\ c_3 &= c_2 \cdot (1 + r_3) = c_0 \cdot (1 + r_1) \cdot (1 + r_2) \cdot (1 + r_3) \ . \end{aligned}$$

Der Kontostand in einem Zeitpunkt t ergibt sich also auch im Falle wechselnder Periodenzinsen aus dem mit den jeweiligen periodenindividuellen Zinssätzen aufgezinsten Anfangsguthaben. Allgemein gilt also für den Kontostand nach t Perioden:

$$(\mathrm{FM}_3) \qquad c_t = c_0 \cdot (1+r_1) \cdot (1+r_2) \cdot \ldots \cdot (1+r_t)$$

$$c_t = c_0 \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (1+r_\tau) \; .$$

Für den Barwert c_0 eines zukünftigen Betrages c_t gilt dementsprechend:

$$(\mathrm{FM}_4) \qquad c_0 = c_t \cdot (1+r_t)^{-1} \cdot (1+r_{t-1})^{-1} \cdot \ldots \cdot (1+r_1)^{-1}$$

$$c_0 = c_t \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (1+r_\tau)^{-1} \; .$$

Vergleicht man paarweise die Formeln FM_1 und FM_3 bzw. FM_2 und FM_4, so wird deutlich, dass FM_1 bzw. FM_2 nur einen ganz speziellen Sonderfall des in FM_3 bzw. FM_4 erfassten allgemeineren Falls abdecken, und zwar den Spezialfall eines für alle betrachteten Perioden identischen Zinssatzes.

Übungsaufgabe 8:

Für die kommenden drei Perioden wird mit Zinssätzen von 5% (1. Periode), 20% (2. Periode) und 10% (3. Periode) gerechnet.

a) Bestimmen Sie das Endguthaben, das bei heutiger Anlage von 100 GE nach 3 Jahren erreicht wird!

b) Bestimmen Sie den Barwert eines in drei Jahren fälligen Betrages von 6.930 GE!

c) Was ändert sich an den Antworten zu a) und b), wenn mit folgender Zinsentwicklung gerechnet wird: $r_1 = 10\%$, $r_2 = 5\%$, $r_3 = 20\%$?

2.3 Rentenrechnung

Bislang haben wir uns unter dem Stichwort Abzinsung nur mit der Frage beschäftigt, den gegenwärtigen Wert **eines** zukünftigen Geldbetrages zu ermitteln. Wir können unsere diesbezüglichen Überlegungen natürlich auch auf den Fall ausdehnen, dass **mehrere** Geldbeträge, die zu unterschiedlichen zukünftigen Zeitpunkten fällig werden, in die Gegenwart übertragen werden und zusammen einen einzigen Gegenwartswert bilden sollen. Dabei wollen wir uns an dieser Stelle zunächst auf die einfache Konstellation beschränken, dass derartige künftige Zahlungen über einen bestimmten Zeitraum in jährlich gleichbleibender Höhe anfallen.

Rente

Eine solche, über mehrere Perioden hinweg in konstanter Höhe anfallende Zahlung bezeichnet man in der Finanzmathematik allgemein als **Rente.**[1)] Dabei werden im allgemeinen zwei Typen von Renten unterschieden. Wird eine Zahlung der t-ten Periode zu Periodenbeginn geleistet, so spricht man von einer vorschüssigen Rente. Wird die Zahlung der t-ten Periode zu Periodenende gezahlt, so spricht man von einer nachschüssigen Rente. Wenn hier im folgenden einfach von einer Rente die Rede ist, ist damit stets eine **nachschüssige** Rente gemeint. Alle hier abgeleiteten Zusammenhänge sind unter geringfügigen Modifikationen auf den Fall vorschüssiger Renten übertragbar.

Zunächst wollen wir uns der Frage widmen, wie hoch der Barwert, d.h. der auf den Beginn des ersten Jahres (also den Zeitpunkt t = 0) abgezinste Wert, des aus der Rente resultierenden Zahlungsstromes ist.[2)]

Beispiel 9:

Hat etwa ein Erfinder über 5 Jahre hinweg (t = 1, 2, …, 5) einen nachschüssigen Anspruch auf eine Zahlung von 10.000 GE und einigt er sich mit dem zahlungspflichtigen Unternehmen bei einem Zins von 8% auf eine sofort (t = 0) fällige einmalige Zahlung, so berechnet sich deren Höhe als (nachschüssiger) Rentenbarwert (RB), d.h. als Summe der fünf jeweils auf den Zeitpunkt t = 0 abgezinsten Rentenbeträge, wie folgt:

$$\text{RB} \;=\; 10.000 \cdot \left[1{,}08^{-1} + 1{,}08^{-2} + \ldots + 1{,}08^{-5}\right].$$

---

1 Der Zusammenhang mit dem üblichen Sprachgebrauch des Wortes Rente ist wohl klar; gleichzeitig wird jedoch auch deutlich, dass diese Terminologie auf Zeiten vor Einführung der dynamischen – d.h. der in der Regel jährlich steigenden – Sozialversicherungsrente zurückgeht.

2 Allgemein bezeichnet man die Summe von abgezinsten zukünftigen Zahlungen als Barwert des entsprechenden Zahlungsstroms. Es muss sich also nicht zwangsläufig – so wie beim Rentenbarwert – um eine Reihe gleichbleibender Zahlungen handeln.

Unter Rückgriff auf die in Tab. II enthaltenen Abzinsungsfaktoren könnte dieser Ausdruck wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} RB &= 10.000 \cdot [0,9259 + 0,8573 + 07938 + 0,7350 + 0,6806] \\ &= 10.000 \cdot 3,9926 = 39.926\,[GE]\ . \end{aligned}$$

Rentenbarwert (= Barwert einer nachschüssigen Rente)

Der Barwert einer über T Perioden laufenden nachschüssigen Rente (Rentenbarwert) kann also als die Summe der Barwerte aller einzelnen Rentenzahlungen und damit mit Hilfe einer Tabelle von Abzinsungsfaktoren ermittelt werden, indem man alle Abzinsungsfaktoren von t = 1 bis t = T addiert und den Rentenbetrag mit dieser Summe multipliziert. Stellen wir den Zusammenhang formal dar, so erkennen wir, dass für den Barwert (RB) einer über T Perioden hinweg anfallenden jährlichen Rente von e gilt:

$$(FM_5) \qquad RB = e \cdot \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t} \ .$$

Den in (FM_5) enthaltenen Summenausdruck bezeichnet man allgemein als **Rentenbarwertfaktor.** Wie aus (FM_5) ersichtlich, hängt der Wert dieser Summe von der Laufzeit T und vom Zinssatz r ab. Wir wollen daher im folgenden für den Rentenbarwertfaktor das Symbol RBF(T, r) verwenden.

Den Wert des RBF(T, r) könnte man nun grundsätzlich, so wie in unserem Beispiel zunächst geschehen, durch Addition der entsprechenden Abzinsungsfaktoren ermitteln. Besonders bei Renten über einen längeren Zeitraum wäre dieses Verfahren jedoch recht umständlich. Man kann stattdessen zu einem einfacheren Verfahren greifen.

Berechnung von Rentenbarwertfaktoren

Die aufzuaddierenden Abzinsungsfaktoren bilden nämlich eine besonders einfache geometrische Reihe – jedes Reihenelement geht aus seinem Vorgänger durch Multiplikation mit demselben Faktor (oben $1{,}08^{-1}$) hervor. Für die Summe einer solchen Reihe stehen allgemeine Formeln bereit, die es auch hier erlauben, den Rentenbarwert in vereinfachter Weise zu berechnen. Es gilt nämlich (wie nachfolgend noch explizit gezeigt wird):

$$\begin{aligned} (FM_6) \qquad RBF(T,r) &= (1+r)^{-1} + (1+r)^{-2} + \ldots + (1+r)^{-T} = \frac{1-(1+r)^{-T}}{r} \\ &= \frac{1-q^{-T}}{r} \ . \end{aligned}$$

Zur Herleitung des Rentenbarwertfaktors

Zur Verdeutlichung der Herleitung von Formel (FM_6) dient folgende – im Hinblick auf unser Problem ein wenig umgeformte – Anekdote aus der Schulzeit des später berühmten Mathematikers Carl Friedrich GAUSS (1777–1855):

Um seine Schulklasse für die ganze Stunde zu beschäftigen und den eigenen Rausch ausschlafen zu können, stellte der Schulmeister die Aufgabe, für einen Zinssatz von 3% die Summe der Abzinsungsfaktoren für 32 Jahre zu berechnen (und zwar alles „per Hand", da es weder Logarithmentafeln noch Zinstabellen gab). Zum maßlosen Erstaunen des verkaterten Schulmeisters präsentierte der kleine GAUSS jedoch schon nach gut zehn Minuten das richtige Ergebnis von 20,389 und erklärte seinem Lehrer den „GAUSS'SCHEN Trick" (mit dem der kleine GAUSS übrigens nichts anderes als die Formel für die Summe einer geometrischen Reihe entwickelt hatte).

Dieser Trick lässt sich – etwas verallgemeinert – wie folgt darstellen:

– Gesucht ist für einen Zinssatz r und die Laufzeit T der Rentenbarwertfaktor RBF(T, r), d.h. die Summe aller Abzinsungsfaktoren von t = 1 bis t = T, also:

$$\mathrm{RBF}(T, r) = q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(T-1)} + q^{-T} .$$

– Multipliziert man nun beide Seiten dieses Ausdruckes mit q, so ergibt sich:

$$q \cdot \mathrm{RBF}(T, r) = 1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(T-1)} ;$$

denn es gilt:

$$q^{-1} \cdot q = 1, \quad q^{-2} \cdot q = q^{-1} ; \quad q^{-T} \cdot q = q^{-(T-1)} .$$

– Schreibt man nun q · RBF(T, r) und RBF(T, r) in geeigneter Form untereinander und bildet die Differenz, so ergibt sich:

$$\begin{array}{rcl} q \cdot \mathrm{RBF}(T, r) & = & 1 + q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(T-1)} \\ \mathrm{RBF}(T, r) & = & \phantom{1 +{}} q^{-1} + q^{-2} + \ldots + q^{-(T-1)} + q^{-T} \\ \hline q \cdot \mathrm{RBF}(T, r) - \mathrm{RBF}(T, r) & = & 1 + 0 + 0 + \ldots + 0 - q^{-T} . \end{array}$$

Nach Zusammenfassung ergibt sich:

$$\mathrm{RBF}(T, r) \cdot (q-1) = 1 - q^{-T}$$

und damit (unter Beachtung von q = 1 + r) für den gesuchten Rentenbarwertfaktor:

$$\mathrm{RBF}(T, r) = \frac{1-q^{-T}}{q-1} = \frac{1-q^{-T}}{r} .$$

Mithin kann für den Barwert einer sich über T Jahre erstreckenden nachschüssigen Rente in Höhe von e allgemein geschrieben werden:

$$(\text{FM}_7) \quad RB \;=\; e \cdot \frac{1-(1+r)^{-T}}{r} \;=\; e \cdot \frac{1-q^{-T}}{r} \;=\; e \cdot RBF(T, r) \;.$$

Zur Ermittlung des Barwertes einer T-jährigen nachschüssigen Rente ist der Rentenbetrag also einfach mit dem RBF für T Jahre zu multiplizieren. Zur Überprüfung der eingangs durch Addition der Abzinsungsfaktoren ermittelten Lösung ist somit der RBF für 8% und 5 Jahre zu ermitteln. Lt. Tabelle III, in der die Rentenbarwertfaktoren für verschiedene Laufzeiten und Zinssätze abgedruckt sind, gilt:

$$\text{RBF}(5\text{ J.}, 8\%) \;=\; 3{,}9927 \quad .$$

Mithin erhält man für den gesuchten Barwert einer 5-jährigen nachschüssigen Rente von 10.000 GE:

$$RB \;=\; 10.000 \cdot 3{,}9927 \;=\; 39.927\,[\text{GE}] \;.$$

Von einer geringfügigen Rundungsdifferenz abgesehen, stimmt dieses Ergebnis mit dem oben im Wege der Einzeladdition hergeleiteten überein. Der Rechenaufwand ist allerdings deutlich geringer.

Übungsaufgabe 9:

a) Ein treusorgender Vater möchte seiner Tochter ermöglichen, vom kommenden Jahr an ($t = 1$) jeweils fünf Jahre lang (also bis $t = 5$) jeweils zu Jahresbeginn einen Betrag von 20.000 GE zur Finanzierung ihres Studiums abzuheben. Welchen Betrag muss er zu Beginn diesen Jahres (also im Zeitpunkt $t = 0$) auf ein jeweils zu 5% verzinsliches Bankkonto einzahlen?

b) Wie groß ist der Barwert einer Rente von jährlich 1.000 GE, die über 12 Jahre hinweg gezahlt wird, bei einem Zinssatz von 4%?

Bei den bisherigen Überlegungen zur Berechnung des Barwertes einer Rente wurde durchgängig unterstellt, dass eine nachschüssige Rente mit erster Rentenzahlung im Zeitpunkt $t = 1$ zu bewerten ist. Fällt die erste Rentenzahlung nicht im Zeitpunkt $t = 1$, sondern erst in einem späteren Zeitpunkt an, so kann der Barwert dieser Rente nicht mehr gemäß (FM_7) durch eine einfache Multiplikation des Rentenbetrages mit einem Rentenbarwertfaktor gemäß Tabelle III ermittelt werden. Die Fortsetzung I von Beispiel 9 verdeutlicht die Vorgehensweise bei der Bewertung einer „zeitlich verschobenen“ Rente.

Beispiel 9 (Fortsetzung I):

In Abweichung zur Ausgangssituation unseres Erfinders aus Beispiel 9 sei nunmehr unterstellt, dass dieser weiterhin einen nachschüssigen Anspruch auf 5 Rentenzahlungen über jeweils 10.000 GE hat, die erste Rentenzahlung jedoch erst am Ende des dritten Jahres, also im Zeitpunkt $t = 3$, und die letzte dementsprechend erst im Zeitpunkt $t = 7$ fällig würde. Der Barwert dieser Rente errechnet sich in diesem Fall aus:

$$RB = 10.000 \cdot [1{,}08^{-3} + 1{,}08^{-4} + 1{,}08^{-5} + 1{,}08^{-6} + 1{,}08^{-7}] \ .$$

Der in Klammern angegebene Ausdruck entspricht zwar wieder einer Summe von Abzinsungsfaktoren, stimmt jedoch – wie man durch Vergleich mit den beiden nachfolgend angegebenen Rentenbarwertfaktoren unschwer erkennt – weder mit dem dem Gesamtbetrachtungszeitraum entsprechenden Rentenbarwertfaktor für 7 Jahre, noch mit dem der Anzahl der Rentenzahlungen entsprechenden Rentenbarwertfaktor für 5 Jahre überein.

$$\begin{aligned} RBF(7J.; 8\%) &= 1{,}08^{-1} + 1{,}08^{-2} + 1{,}08^{-3} + 1{,}08^{-4} + 1{,}08^{-5} \\ &\quad + 1{,}08^{-6} + 1{,}08^{-7} \end{aligned}$$

$$RBF(5J.; 8\%) = 1{,}08^{-1} + 1{,}08^{-2} + 1{,}08^{-3} + 1{,}08^{-4} + 1{,}08^{-5}$$

Die unmodifizierte Anwendung der Bestimmungsgleichung (FM_7) führt also in die Irre. Der Barwert einer Rente hängt bei gegebener Rentenhöhe, gegebener Anzahl zu bewertender Rentenzahlungen und gegebenem Bewertungszins erkennbar auch von dem Zeitpunkt der ersten Rentenzahlung ab.

Will man diesen speziellen Zeitaspekt bei der Berechnung des Rentenbarwerts berücksichtigen, weiterhin jedoch darauf verzichten, für jede einzelne Rentenzahlung zunächst den Barwert zu ermitteln, so bieten sich zumindest zwei besonders einfache Modifikationen der Bestimmungsgleichung (FM_7) an.

- **Berechnungsmöglichkeit 1**

  Multipliziert man in unserem Beispiel den Rentenbetrag e mit dem zur Rentenlaufzeit von 5 Jahren korrespondierenden Rentenbarwertfaktor RBF (5 J.; 8%), so hat man den Barwert nicht bezogen auf den Zeitpunkt $t = 0$ berechnet, sondern vielmehr bezogen auf den Zeitpunkt vor der ersten Rentenzahlung, hier also den Zeitpunkt $t = 2$.

  Will man diesen auf den Zeitpunkt $t = 2$ bezogenen Barwert der Rente nun auf den Zeitpunkt $t = 0$ „umrechnen“, so ist dieser (quasi ein Zwischenergebnis darstellende Betrag) nochmals für zwei Perioden abzuzinsen. Der Barwert einer Rente über den Betrag e mit erster Rentenzahlung im Zeitpunkt $t = 3$ und letzter Rentenzahlung im Zeitpunkt $t = 7$ lässt sich also dadurch ermitteln, dass der Rentenbetrag e zunächst mit dem der Anzahl zu berücksichtigender Rentenzahlungen korrespondierenden Rentenbarwertfaktor und anschließend mit dem der Anzahl der Perioden ohne Rentenzahlungen korrespondierenden Abzinsungsfaktor multipliziert wird.

Es ergibt sich demnach:

$$\begin{aligned} RB &= 10.000 \cdot RBF(5\,J.;\,8\%) \cdot 1{,}08^{-2} \\ &= 10.000 \cdot 3{,}9927 \cdot 0{,}8573 \\ &= 34.229\,[GE]\ . \end{aligned}$$

- **Berechnungsmöglichkeit 2**

Multipliziert man in unserem Beispiel hingegen den Rentenbetrag e mit dem zum Gesamtbetrachtungszeitraum von 7 Jahren korrespondierenden Rentenbarwertfaktor, so hat man zwar den Barwert einer Rentenzahlungsreihe bezogen auf den Zeitpunkt $t = 0$ berechnet, ist jedoch bei der Berechnung davon ausgegangen, dass die zu bewertende Rentenzahlungsreihe zwei zusätzliche Rentenzahlungen in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ aufweist. Der ermittelte Wert ist also um den Barwert dieser beiden zuviel berücksichtigten Rentenzahlungen zu vermindern. Der Barwert einer Rente über den Betrag e mit erster Rentenzahlung im Zeitpunkt $t = 3$ und letzter Rentenzahlung im Zeitpunkt $t = 7$ lässt sich also – wie der nachfolgende Rechenansatz konkret verdeutlicht – auch dadurch ermitteln, dass der Rentenbetrag e mit dem Wert der Differenz der relevanten Rentenbarwertfaktoren multipliziert wird.

Es ergibt sich demnach

$$\begin{aligned} RB &= 10.000 \cdot \left[RBF(7\,J.;\,8\%) - RBF(2\,J.;\,8\%)\right] \\ &= 10.000 \cdot [5{,}2064 - 1{,}7833] \\ &= 34.231\,[GE]\ . \end{aligned}$$

Hinweis:
Die geringfügigen Ergebnisabweichungen bei den beiden Berechnungsmöglichkeiten sind ausschließlich auf die Verwendung gerundeter Zinsfaktoren zurückzuführen.

Rentenbarwert bei wechselnden Periodenzinsen

Kommen wir nun zurück zu dem eingangs behandelten Fall einer nachschüssigen Rente mit erster Rentenzahlung im Zeitpunkt $t = 1$. Nun sei jedoch die Bewertung einer solchen Rente vor dem Hintergrund eines vollkommenen Finanzmarktes mit wechselnden Periodenzinsen betrachtet. Auch für diesen Fall müßte offensichtlich sein, dass der Barwert einer solchen Rente nicht mehr gemäß (FM_7) durch eine einfache Multiplikation des Rentenbetrages mit einem Rentenbarwertfaktor gemäß Tabelle III ermittelt werden kann. Die Fortsetzung II von Beispiel 9 verdeutlicht die Vorgehensweise bei der Berechnung des Rentenbarwerts im Fall eines vollkommenen Finanzmarktes mit wechselnden Periodenzinsen.

Beispiel 9 (Fortsetzung II):

In Abweichung zur Ausgangssituation unseres Erfinders aus Beispiel 9 sei nunmehr unterstellt, dass bei der Bewertung der in den Zeitpunkten t = 1, 2, 3, 4 und 5 anfallenden Rentenzahlungen in Höhe von jeweils 10.000 GE zu berücksichtigen ist, dass am vollkommenen Finanzmarkt in den Perioden 1 und 2 der Zinssatz nach wie vor 8% p. a. beträgt, in den nachfolgenden Perioden jedoch eine Zinserhöhung auf 10% p. a. (sicher) eintreten wird.

Zur Verdeutlichung gehen wir erneut von dem nachfolgend explizit angegebenen umständlichen Rechenansatz aus, bei dem der Barwert der Rente über die Berechnung der Barwerte jeder einzelnen Rentenzahlung erfolgt

$$
\begin{aligned}
RB &= \frac{10.000}{1{,}08} + \frac{10.000}{1{,}08^2} + \frac{10.000}{1{,}08^2 \cdot 1{,}1} + \frac{10.000}{1{,}08^2 \cdot 1{,}1^2} \; \frac{10.000}{1{,}08^2 \cdot 1{,}1^3} \\
&= 10.000 \cdot [1{,}08^{-1} + 1{,}08^{-2}] \;+\; 10.000 \cdot [1{,}1^{-1} + 1{,}1^{-2} + 1{,}1^{-3}] \cdot 1{,}08^{-2} \\
&= 10.000 \cdot \mathrm{RBF}(2\,\mathrm{J.}; 8\%) \;+\; 10.000 \cdot \mathrm{RBF}(3\,\mathrm{J.}; 10\%) \cdot 1{,}08^{-2} \\
&= 10.000 \cdot 1{,}7833 \;+\; 10.000 \cdot 2{,}4869 \cdot 0{,}8573 \\
&= 39.153\,[\mathrm{GE}] \;.
\end{aligned}
$$

An vorstehenden Umformungen der Ausgangsgleichung erkennt man:

1. Im Fall wechselnder Periodenzinsen lässt sich der gesamte Rentenzahlungsstrom gedanklich in mehrere Zahlungsreihen aufspalten.
2. Die Bewertung der ersten „Teilrente“ kann analog zu der in Beispiel 9 aufgezeigten Vorgehensweise mittels unmodifizierter Anwendung von (FM_7) erfolgen.
3. Die Bewertung der zweiten „Teilrente“ kann dann analog zu der in Beispiel 9 (Fortsetzung I) verdeutlichten Berechnungsmöglichkeit 1 erfolgen. Zu beachten ist jetzt allerdings, dass bei der für die Rückrechnung auf den Zeitpunkt t = 0 notwendigen Multiplikation mit dem Abzinsungsfaktor dieser zwingend auf Basis des für den ersten Teilzeitraum relevanten Periodenzinses bestimmt werden muss.

Zum Abschluss dieses Abschnittes über den Rentenbarwert wollen wir den Spezialfall der sog. **ewigen Rente** betrachten:

Ewige Rente

Sind Zinssatz r und Rentenbetrag e gegeben, so hängt der Rentenbarwert RB nur noch von der Laufzeit T ab. Dabei erkennen wir aus (FM_6), dass der Rentenbarwertfaktor RBF(T, r) für r > 0 umso größer ist, je größer T ist. Um die Abhängigkeit des Rentenbarwertfaktors von T näher zu untersuchen, ist es aufschlussreich festzustellen, wie er sich entwickelt, wenn für T immer größere Werte angenommen werden. Mathematisch gesprochen fragen wir also nach dem Grenzwert von RBF(T, r) für $T \to \infty$. Da sich der Ausdruck q^{-t} (mit q > 1) für $T \to \infty$ dem Wert Null nähert, folgt aus (FM_6):

Grenzwert des Rentenbarwertfaktors

$$\lim_{T \to \infty} RBF(T, r) = \lim_{T \to \infty} \frac{1 - q^{-T}}{r} = \frac{1}{r} .$$

Barwert einer ewigen Rente

Für den Barwert einer ewigen Rente RB^{∞} gilt also:

$$(FM_8) \quad RB^{\infty} = e \cdot \frac{1}{r} .$$

Den Barwert einer ewigen Rente erhält man also, indem man ganz einfach den Rentenbetrag durch den – als Dezimalzahl ausgedrückten – Zinssatz dividiert.

Beispiel 10:

Angenommen, Sie erhalten in Zukunft an jedem Jahresende („bis in alle Ewigkeit") jedes Jahr 223 GE ausgezahlt. Der Gegenwartswert (Barwert) dieser Zahlungsreihe wäre bei einem Zins von 10% dann

$$223 \cdot \frac{1}{0{,}1} = 2.230\,[GE] .$$

Die Plausibilität dieses Ergebnisses kann man sich wie folgt vergegenwärtigen:

Wollte man nämlich an jedem Jahresende „bis in alle Ewigkeit" von einem Konto 223 GE abheben können, so müsste man bei dem unterstellten Zinssatz von 10% p. a. im Zeitpunkt t = 0 einen Betrag von exakt 2230 GE anlegen, denn bei Anlage von 2.230 GE zu 10% p. a. entspricht die Höhe der jährlichen Zinsgutschrift exakt der Höhe der jährlichen Rentenzahlung. Dieser „Anlagebetrag" entspricht also für einen konstanten Zinssatz von 10% p. a. zwingend dem Barwert der ewigen Rente, da man durch die Anlage von 2.230 GE den Rentenzahlungsstrom in Höhe von jährlich 223 GE „duplizieren" könnte.

Das Ergebnis gemäß (FM_8) ist in zweifacher Hinsicht von Bedeutung. Zum einen wird in verschiedenen modelltheoretischen Untersuchungen gerne mit ewigen Renten gearbeitet, da man die entsprechenden Modelle dadurch in formaler Hinsicht oftmals stark vereinfachen kann, ohne jedoch ihren Aussagewert wesentlich zu beeinträchtigen. Entsprechende Beispiele werden Sie in weiterführenden B- und C-Modulen noch kennenlernen.

Zum anderen ist (FM_8) auch für praktische Berechnungen relevant. Denn zumindest für überschlägige Kalkulationen ist es häufig ausreichend, statt des exakten Wertes von RBF(T, r) hilfsweise 1/r als Näherungswert zu verwenden.

So beläuft sich der Rentenbarwertfaktor bei einem Zinssatz von 10% für T = 30 auf 9,4269, während der Näherungswert 1/r genau 10 beträgt; für viele Zwecke dürfte das eine hinlängliche Approximation darstellen. Wie (FM_8) zeigt, stellt der Ersatz des Rentenbarwertfaktors durch 1/r eine umso bessere Approximation dar, je kleiner der Wert des vernachlässigten Gliedes q^{-T} ist. Das ist tendenziell umso eher der Fall

Ewige Rente als Approximation

- je höher der Zinssatz r (und damit auch q) ist und
- je länger die Laufzeit T ist.

Übungsaufgabe 10:

Für den Barwert einer Rente wird approximativ gem. (FM_8) ein Betrag von 10.000 GE ermittelt. Um welchen Betrag ist dieser Wert zu vermindern, um den exakten Barwert zu erhalten, wenn gilt:

i) r = 0,05; T = 50
ii) r = 0,07; T = 40
iii) r = 0,08; T = 30.

2.4 Annuitätenrechnung

Im vorigen Abschnitt sind wir stets von einem vorgegebenen Rentenbetrag e ausgegangen und haben den Rentenbarwert RB ermittelt. Die Fragestellung kann natürlich auch umgekehrt werden. Während bei der Rentenrechnung ein Zahlungsstrom in eine einzige äquivalente Zahlungsgröße umgerechnet wird, geht es bei der Annuitätenrechnung darum, zu einem vorgegebenen Zahlungsbetrag im Zeitpunkt t = 0 einen äquivalenten Strom gleichbleibender Zahlungen in den Zeitpunkten t = 1, 2, …, T zu bestimmen. Gefragt ist konkret, wie hoch eine T-jährige nachschüssige Rente sein muss, damit ihr Barwert einem vorgegebenen Ausgangsbetrag entspricht.

Fragestellung der Annuitätenrechnung

Beispiel 11:

So könnte man etwa – um an unser Beispiel 9 anzuschließen – fragen, welchen konstanten Betrag der Erfinder während der kommenden sechs Jahre am Jahresende (also in den Zeitpunkten t = 1, 2, …, 6) jeweils abheben könnte, wenn das zahlungspflichtige Unternehmen heute (t = 0) einen Betrag von 40.000 GE zu 5% Zins p. a. anlegen würde. Lösen wir (FM_7) nach e auf, so ergibt sich:

$$e = 40.000 \cdot \frac{1}{RBF(T, r)} ,$$

woraus gem. Tabelle bei 5% und 6 Jahren

$$e = 40.000 \cdot \frac{1}{5{,}0757} = 7.880{,}69 \, [GE]$$

folgt. Wird ein Betrag von 40.000 GE zu 5% angelegt, so kann davon also sechs Jahre lang jeweils ein Betrag von 7.880,69 GE abgehoben werden, bis das Guthaben gerade den Stand Null erreicht hat.

Übungsaufgabe 11:

Überprüfen Sie das in Beispiel 11 „errechnete“ Ergebnis, indem Sie ausgehend von einem Kontostand von 40.000 GE in t = 0 die Kontostände der Zeitpunkte t = 1, 2, …, 6 unter der Annahme einer jährlichen Entnahme von 7.880,69 GE errechnen!

Zur Lösung des umseitig beschriebenen Problems in allgemeiner Form kann unmittelbar auf Formel (FM_7) zurückgegriffen werden. Dort wurde bei gegebenem Rentenbetrag e nach dem Rentenbarwert RB gefragt; nun wird bei gegebenem Ausgangsbetrag AB nach dem äquivalenten Rentenbetrag gefragt, den wir als Annuität bezeichnen und durch die Variable a verdeutlichen wollen.[1] Dementsprechend gilt:

$$(FM_9) \quad a = AB \cdot \frac{r}{1 - q^{-T}} .$$

Annuitätenfaktor

Der in (FM_9) enthaltene Bruch – dies ist der Kehrwert des Rentenbarwertfaktors RBF (T, r) – wird auch als **Annuitätenfaktor** (ANF) oder gelegentlich auch als Wiedergewinnungsfaktor bezeichnet. Mithin kann statt (FM_9) auch geschrieben werden:

$$(FM_{10}) \quad a = AB \cdot \frac{1}{RBF(T, r)} = AB \cdot ANF(T, r) .$$

1 Als Annuität (von lat. „annus“, das Jahr) bezeichnet man – ebenso wie mit dem Wort „Rente“ – eine über mehrere Jahre hinweg konstant bleibende Zahlung.

In der im Anhang befindlichen Tabelle IV ist der Annuitätenfaktor für einige gängige T- und r-Werte angegeben.

Für das im Abschnitt 2.1 angesprochene Problem, statt einer sofortigen Abfindungszahlung von 500.000 GE fünf gleich hohe, nachschüssige Teilzahlungen zu erbringen, kann so folgende Lösung gefunden werden:

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= 500.000 \cdot \mathbf{ANF}\,(5\ \mathbf{J}., 8\%)\\ &= 500.000 \cdot 0{,}2505\\ &= 125.250\,[\mathbf{GE}]\ .\end{aligned}$$

Legt man einen Zins von 8% zugrunde, so entsprechen fünf nachschüssige Teilzahlungen von jeweils 125.250 GE einer sofort fälligen Zahlung von 500.000 GE. Der über die einfache Rate von 500.000: 5 = 100.000 GE hinausgehende Anteil dieser Annuität gibt dabei den Betrag an, der wegen der Zins- und Zinseszinseffekte pro Jahr zusätzlich zu zahlen ist.

Annuitätendarlehen als Anwendungsfall

Ein wichtiges Anwendungsgebiet der Annuitätenrechnung ergibt sich im Zusammenhang mit langfristigen Finanzierungsmaßnahmen. Langfristige Darlehen, insbesondere Hypothekendarlehen, werden häufig in der Weise vereinbart, dass die Summe der jährlichen Zins- und Tilgungsleistungen über die gesamte Darlehenslaufzeit hinweg konstant bleibt. Dabei wird die Annuität a, also die Summe aus Zins und Tilgung, so ermittelt, dass der Barwert aller Annuitäten bei dem zugrundegelegten Darlehenszins gerade dem Darlehensbetrag entspricht. Die Annuität ist also genau nach Formel (FM_9) bzw. (FM_{10}) zu ermitteln. Die Vereinbarung eines Darlehens als Annuitätendarlehen impliziert eine über die Laufzeit abnehmende Höhe des Zinsanteils und im selben Umfang zunehmende Höhe des Tilgungsanteils an der zu zahlenden Annuität.

Beispiel 12:

Lässt man zunächst die in der Praxis anzutreffende Vereinbarung unterjährlicher Zahlungen und Zinsbelastungen außer acht, so stellt sich die Frage, wie hoch die jährlich gleichbleibenden Zahlungen eines Kreditnehmers sein müssen, damit sie ausreichen, eine vorgegebene Darlehenssumme (c_0) in einer vorgegebenen Anzahl von Jahren (T) zu tilgen und die jeweilige Restschuld zu dem ebenfalls vorgegebenen Zinssatz (r) zu verzinsen. Gilt etwa c_0 = 100.000 GE; T = 20 Jahre und r = 0,08, so berechnet sich die gesuchte Höhe der (gerundeten) jährlichen Zahlungen des Darlehensnehmers, die sogenannte Annuität, gem. (FM_9) wie folgt:

$$\begin{aligned} a &= 100.000 \cdot 0,1019 \\ &= 10.190\,[GE]\ . \end{aligned}$$

Die erste Annuitätenzahlung setzt sich dann zu 8.000 GE, d.h. 8% auf 100.000 GE Anfangsschuld, aus dem Zins- und zu den restlichen 2.190 GE, d.h. 2,19% auf 100.000 GE Anfangsschuld, aus dem Tilgungsanteil zusammen. Durch die erste Zahlung sinkt die Restschuld somit auf 97.810 GE und der Zinsanteil im zweiten Jahr auf 7.824,80 GE; mithin erhöht sich der Tilgungsanteil um die „ersparten Zinsen“ auf 2.365,20 GE. Während der Laufzeit des Darlehens geht so der Zinsanteil immer weiter zurück, während der Tilgungsanteil (progressiv) zunimmt.

Übungsaufgabe 12:

Eine Hypothekenbank bietet ein Darlehen über 100.000 GE mit einer Laufzeit von 20 Jahren zu einem Zinssatz von 7% an.

a) Wie hoch ist die jährlich zu zahlende Annuität? (Gehen Sie zur Beantwortung dieser Frage von den in Tabelle IV angegebenen Faktoren aus!)

b) Wie hoch sind im ersten Jahr der Zins- und Tilgungsanteil?

c) Wie hoch sind Zins- und Tilgungsanteil im zweiten Jahr, wenn die Zinsen jeweils auf die zu Jahresbeginn verbliebene Restschuld (= 100.000 GE abzüglich geleisteter Tilgungen) berechnet werden?

d) Wie hoch sind Zins- und Tilgungsanteil im letzten Jahr der Darlehenslaufzeit? (Gehen Sie auch hier von dem unter a) ermittelten Annuitätsbetrag aus!)

e) Wie groß ist über den gesamten Zwanzig-Jahreszeitraum hinweg die Summe der insgesamt zu zahlenden Zinsen?

f) Wie hoch ist die Restschuld zu einem beliebigen Zeitpunkt $t \leq T$?

Will man bei der Berechnung der Annuität – z.B. eines Darlehens – „Freijahre“ (die erste Annuitätenzahlung erfolgt nicht in t = 1, sondern erst zu einem späteren Zeitpunkt) oder wechselnde Periodenzinsen berücksichtigen, dann ist dies analog zu den im Fall der Rentenrechnung in den Beispielen 9 (Fortsetzung I) bzw. 9 (Fortsetzung II) aufgezeigten Vorgehensweisen möglich.

2.5 Zusammenfassung

- Unter der Annahme vorgegebener Periodenzinssätze stehen mit den finanzmathematischen Techniken Möglichkeiten zur Verfügung, Zahlungen mit gegebener zeitlicher Verteilung in „gleichwertige" Zahlungen anderer zeitlicher Verteilung zu übertragen. Damit bieten finanzmathematische Techniken gleichzeitig einen Ansatz, auf Anhieb wegen ihrer unterschiedlichen zeitlichen Struktur nicht vergleichbare Zahlungsreihen verschiedener Investitionsprojekte, also solche Zahlungsreihen ohne „unmittelbare" Dominanzbeziehung,[1] vergleichbar zu machen:[2]

  i) Durch Aufzinsung wird ein gegenwärtiger Betrag wertmäßig in einen (höheren) zukünftigen Betrag umgerechnet.

  ii) Durch Abzinsung wird ein zukünftiger Betrag wertmäßig in einen (niedrigeren) gegenwärtigen Betrag umgerechnet.

- Beide Techniken sind bei zeitlich konstantem Zinsfuß formal einfach handhabbar, bleiben aber prinzipiell auch bei wechselndem Periodenzinsfuß anwendbar.

- Neben den Grundtechniken der Auf- und Abzinsung existieren zur Transformation von Zahlungen auch aggregierte finanzmathematische Techniken für den Fall, dass die Ausgangszahlungsreihe aus konstanten zukünftigen Zahlungen und die transformierte Zahlungsreihe nur aus einer einzigen Zahlung in der Gegenwart besteht (Rentenbarwertrechnung), bzw. für den Fall, dass die Ausgangszahlungsreihe aus einer einzigen Zahlung in der Gegenwart und die transformierte Zahlungsreihe aus einer konstanten Reihe zukünftiger Zahlungen besteht (Annuitätenrechnung).

- Die folgende Zusammenstellung vermittelt abschließend einen durch geeignete Grafiken verdeutlichten Überblick über die bislang behandelten finanzmathematischen Methoden. Die in den Grafiken verwendeten Achsen verdeutlichen dabei die Zeit, die einzelnen Zeitpunkte $t = 0, 1, 2, \ldots$, jeweils den Beginn des ersten, zweiten, dritten Jahres etc. und die senkrechten Pfeile die jeweils maßgeblichen Zahlungsgrößen. In diesem Zusammenhang empfehlen wir Ihnen ganz allgemein, sich die Struktur finanzmathematischer Probleme zunächst an Hand eines entsprechenden Zeitstrahls zu verdeutlichen.

---

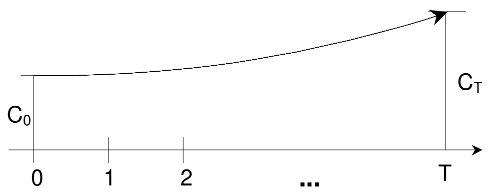
1 Vgl. dazu Abschnitt 1.4.

2 Mittels der finanzmathematischen Operationen der Auf- und Abzinsung können Beträge wertmäßig auf beliebige Zeitpunkte bezogen werden. Durch Abzinsung lässt sich also auch der Wert einer im Zeitpunkt $t = 7$ fälligen Auszahlung bezogen auf den Zeitpunkt $t = 3$ errechnen.

1. Problem: Aufzinsung

Eine im Zeitpunkt t = 0 fällige Zahlung wird in eine höhere, äquivalente Zahlung im Zeitpunkt t = T umgerechnet.

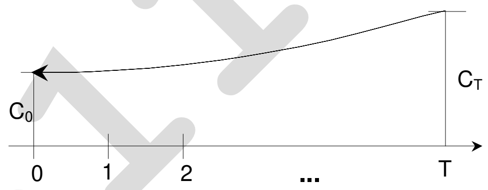
$$(FM_1) \quad c_T \quad = \quad c_0 \cdot (1+r)^T$$



2. Problem: Abzinsung

Eine im Zeitpunkt t = T fällige Zahlung wird in eine niedrigere, äquivalente Zahlung im Zeitpunkt t = 0 umgerechnet.

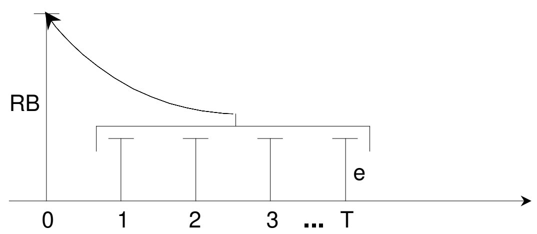
$$(FM_2) \quad c_0 \quad = \quad c_T \cdot (1+r)^{-T}$$



3. Problem: Rentenbarwert (nachschüssig)

Eine Folge von T gleichbleibenden nachschüssigen Zahlungen wird in eine äquivalente Zahlung im Zeitpunkt t = 0 umgerechnet.

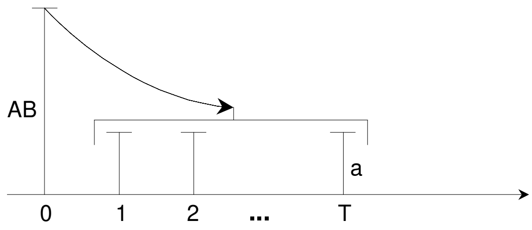
$$(FM_7) \quad RB \quad = \quad e \cdot RBF\,(T, r)$$



4. Problem: Annuitätenrechnung

Eine gegebene Zahlung im Zeitpunkt t = 0 (AB) wird äquivalent in T gleichbleibende, nachschüssige Zahlungen in den Zeitpunkten t = 1, 2, …, T umgerechnet.

$(FM_{10}) \quad a \quad = \quad AB \cdot ANF\,(T, r)$



3 Übungshinweise

Wir möchten als weitere und besonders zu empfehlende Übungsmöglichkeit in Bezug auf alle relevanten Inhalte dieser Kurseinheit auch hier nochmals explizit auf die speziell auf die Inhalte der KE 1 und 2 abgestimmte Übungssoftware auf der mitgelieferten CD „Investition“ hinweisen. Bitte beachten Sie, dass die organisatorischen Informationen auf der CD auf dem Stand des Jahres 2006 sind und nicht mehr zutreffen. An der Relevanz der fachlichen Inhalte hat sich jedoch nichts geändert.

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Investitionsprojekt	Input	Output
Gründung eines Zweigwerkes	Bereitstellung eines Grundstücks, Errichtung eines Gebäudes, Beschaffung und Aufstellung von Maschinen etc.	Produktionsergebnisse in den Jahren nach der Gründung
Kauf einer neuen Produktionsanlage	Für die Lieferung der Anlage zu erbringende Gegenleistung	Die durch die Anlage in der Folgezeit erstellten Produkte oder deren Erlöse
Rationalisierungsmaßnahmen am vorhandenen Maschinenpark	Materialeinsatz, Arbeitseinsatz etc.	Mehrleistung und/oder Minderverbrauch in der Zukunft, die durch die Rationalisierung bewirkt werden
Einleitung eines Werbefeldzuges	Arbeitseinsatz für die Planung und Marktforschung, Einsatz von Kommunikationsmitteln etc.	Einzahlungsüberschuss aus den infolge der Werbemaßnahmen zusätzlich verkauften Produkten
Ausbildung von Mitarbeitern	Arbeitseinsatz der Ausbilder, Bereitstellung von Schulungsräumen, Freistellung der Mitarbeiter etc.	Mehrleistung der besser ausgebildeten Mitarbeiter
Durchführung eines Forschungsprojektes	Räumlichkeiten, Apparaturen, Arbeitsleistung, Verbrauchsmaterialien, Literatur etc.	Wenn es gut geht: Neue Erkenntnisse, z.B. verbesserte oder neuartige Produkte. Wenn es schlecht geht: Gar nichts

Übungsaufgabe 2

Gebildet wird zuerst die Zahlungsreihe für den Fall, dass nicht investiert wird (Jahresproduktion 30.000):

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Löhne		– 90.000	– 99.000	–108.900
Vorprodukt A		– 90.000	– 90.000	– 90.000
Vorprodukt B		– 30.000	– 34.500	– 39.000
variable HK		– 60.000	– 60.000	– 60.000
sonstige Löhne		–100.000	–110.000	–121.000
∑ Auszahlungen		–370.000	–393.500	–418.900
∑ Einzahlungen		+450.000	+480.000	+510.000
Zahlungsreihe ohne Investition		+ 80.000	+ 86.500	+ 91.100

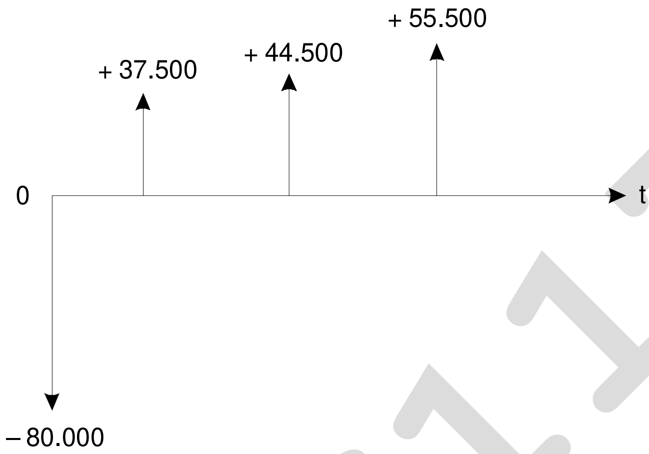
Sodann errechnen wir die Zahlungsreihe für den Investitionsfall (Jahresproduktion 50.000):

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Löhne		–150.000	–165.000	–181.500
Vorprodukt A		–142.500	–142.500	–142.500
Vorprodukt B		– 50.000	– 57.500	– 65.000
variable HK		–100.000	–100.000	–100.000
sonstige Löhne		–140.000	–154.000	–169.400
Anschaffung	– 80.000			+ 5.000
∑ Auszahlungen	– 80.000	–582.500	–619.000	–653.400
∑ Einzahlungen		+700.000	+750.000	+800.000
Zahlungsreihe mit Investition	– 80.000	+117.500	+131.000	+146.600

Sowohl in der Zahlungsreihe ohne Investition als auch in der Zahlungsreihe mit Investition bleiben Zahlungen aus einer Mittelaufnahme und einer zwischenzeitlichen Mittelanlage unberücksichtigt. Die Zahlungsreihe, die aus investitionstheoretischer Sicht über die Vorteilhaftigkeit der Investition informiert, ist genau die Differenz zwischen der Zahlungsreihe ohne Investition und der Zahlungsreihe mit Investition; diese Beträge werden im Fall der Investition zusätzlich gezahlt:

	t = 0	t = 1	t = 2	t = 3
Zahlungsreihe der Investition	– 80.000	+37.500	+44.500	+55.500

Auch in dieser entscheidungsrelevanten Zahlungsreihe der Investition bleiben Zahlungen aus einer Mittelaufnahme und einer zwischenzeitlichen Mittelanlage noch unberücksichtigt. Die mit einem Investitionsprojekt verbundenen Zahlungen lassen sich anschaulich mittels eines Zeitstrahls wie folgt darstellen:



Übungsaufgabe 3

a) Es ergeben sich folgende Handlungsmöglichkeiten

a_1 ≡ Unterlassensalternative
a_2 ≡ A
a_3 ≡ A & C
a_4 ≡ A & D
a_5 ≡ A & C & D
a_6 ≡ B
a_7 ≡ B & C
a_8 ≡ B & D
a_9 ≡ B & C & D
a_{10} ≡ C
a_{11} ≡ C & D
a_{12} ≡ D

b) Durch die Addition der Zahlungsreihen der einzelnen Investitionsprojekte ergeben sich für die oben aufgeführten Handlungsmöglichkeiten a_2 bis a_{12} folgende Zahlungsreihen:

	t = 0	t = 1	t = 2
a_2	− 100	+ 20	+ 102
a_3	− 250	+ 100	+ 157
a_4	− 220	+ 105	+ 162
a_5	− 370	+ 185	+ 217
a_6	− 100	+ 60	+ 80
a_7	− 250	+ 140	+ 135
a_8	− 220	+ 140	+ 135
a_9	− 370	+ 220	+ 190
a_{10}	− 150	+ 80	+ 55
a_{11}	− 270	+ 165	+ 115
a_{12}	− 120	+ 85	+ 60

Dabei wird für Projekt D bei den Alternativen a_4, a_5, a_{11} und a_{12} die untere, bei den Alternativen a_8 und a_9 die obere Zahlungsreihe angesetzt.

c) Wie man leicht sieht, unterscheiden sich die Alternativen a_2 und a_3, a_4 und a_5, a_6 und a_7, a_8 und a_9, sowie a_{11} und a_{12} jeweils nur dadurch, dass Projekt C einmal in dem jeweiligen Programm enthalten ist, das andere Mal nicht. Es gelten also die Bezeichnungen:

$a_3 \equiv a_2$ & C
$a_5 \equiv a_4$ & C
$a_7 \equiv a_6$ & C
$a_9 \equiv a_8$ & C
$a_{11} \equiv a_{12}$ & C .

Dementsprechend unterscheiden sich die Zahlungsreihen der jeweils einander entsprechenden Alternativen (also a_2 und a_3, a_4 und a_5 etc.) nur jeweils genau um die Zahlungsreihe von Projekt C.

Unter der Prämisse eines vollkommenen Finanzmarkts (vgl. dazu Abschnitt 1.3.3) kann das Entscheidungsproblem folglich dadurch vereinfacht werden, dass nicht mehr alle 12 genannten Alternativen explizit analysiert werden müssen, sondern nur noch 7 dieser 12 Alternativen. Führt z.B. die Auswahl aus dem verbliebenen Alternativenkatalog a_1, a_2, a_4, a_6, a_8 und a_{12} zu dem Ergebnis, dass a_6 die Optimalalternative darstellt, und ergibt sich bei der isolierten Betrachtung von Projekt C (Alternative a_{10}) außerdem, dass Projekt C der Unterlassensalternative vorzuziehen ist, so bedeutet dies, dass insgesamt a_6 und C, d.h. also im Endeffekt Alternative a_7 durchgeführt werden soll. Wie Sie später in den einschlägigen Teilen weiterführender Module noch sehen werden, ist das hier geschilderte Vorgehen im Fall eines unvollkommenen Finanzmarkts (z.B. im Fall begrenzter Finanzierungsmöglichkeiten) nicht mehr ohne weiteres anwendbar.

Übungsaufgabe 4

a) – Projekt a_4 dominiert Projekt a_3 im Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz.

– Projekt a_1 dominiert Projekt a_2 im Sinne kumulativer zeitlicher Dominanz.

– Zwischen den Projekten a_1 und a_4 besteht unmittelbar keine Dominanzbeziehung.

⇒ Die Investitionsentscheidung ist zwischen den Projekten a_1 und a_4 mit Hilfe zusätzlicher Informationen über die intertemporalen Präferenzen des Investors und/oder die intertemporalen Transformationsmöglichkeiten des Finanzmarktes zu treffen.

Hinweis: Bei ähnlichen Fragestellungen werden recht häufig und soweit erkennbar auch systematisch fehlerhafte Antworten gegeben. So wird häufig angegeben, dass Projekt a_4 das Projekt a_2 im Sinne kumulativer zeitlicher Dominanz dominiert. Dies wird dann wie folgt begründet: „Unter der Voraussetzung 100-prozentiger Kassenhaltung kann der Investor im Falle der Wahl der Alternative a_2 im Zeitpunkt $t = 3$ nur über 130 GE (80 + 25 + 25) verfügen, während er bei der Wahl von a_4 im Zeitpunkt $t = 3$ über 135 GE verfügen kann. Daher dominiert Projekt a_4 das Projekt a_2 eindeutig im Sinne kumulativer zeitlicher Dominanz.“

Diese Argumentation geht fehl. Dass das Projekt a_4 das Projekt a_2 auch unter Einbeziehung von Kassenhaltungsmöglichkeiten **nicht** dominieren kann, ergibt sich schon daraus, dass das Projekt a_2 in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ Einzahlungsüberschüsse aufweist, während das Projekt a_4 in diesen Zeitpunkten keine Überschüsse aufweist und auch mittels Kassenhaltung keine Überschüsse in diesen Zeitpunkten erzeugt werden können. Projekt a_4 ist demnach dem Projekt a_2 keineswegs „generell" überlegen. Entscheider, die besonderen Wert auf Einzahlungsüberschüsse in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ legen, könnten sich sehr wohl bei rationalem Verhalten für das Projekt a_2 und gegen das Projekt a_4 entscheiden.

Wenn eine Dominanzbeziehung durch Modifikation der Zahlungsreihe eines Investitionsprojekts abgeleitet werden soll, so darf nur die Zahlungsreihe des Projekts modifiziert werden, das letztlich als das dominante Projekt herausgearbeitet werden soll. Bei Modifikation der Zahlungsreihe des Projekts a_2 würde man ja gerade vernachlässigen, dass es durchaus Entscheider geben könnte, die – aus welchen Gründen auch immer – Zahlungen in den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$ ein höheres Gewicht beimessen als Zahlungen (egal welcher Höhe) im Zeitpunkt $t = 3$.

b) Projekt a_1 kann z.B. mit den Finanztransaktionen a_1' und a_2' mit den Zahlungsreihen (0; –44; +48,4; 0) und (0; 0; –92,4; +101,64) zu einem neuen Projekt $A_{1,1+2}$ mit der Zahlungsreihe (–100; 0; 0; 145,64) kombiniert werden.

Das neue Projekt $A_{1,1+2}$ dominiert das ursprüngliche Projekt a_4 im Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz. Die Investitionsentscheidung ist daher bei Existenz des beschriebenen Finanzmarktes unabhängig von den speziellen Präferenzen des Investors zugunsten von Projekt a_1 zu treffen.

c) Bei ungewichteter Summation aller Zahlungen liefert Projekt a_1 einen Wert von +32, Projekt a_2 von +30, Projekt a_3 von +25 und Projekt a_4 einen Wert von +35. Nach dem unter c) vorgeschlagenen Entscheidungsverfahren wäre die Investitionsentscheidung also zu Gunsten des in b) als suboptimal erkannten Projektes a_4 zu fällen. Dass das unter c) vorgeschlagene Entscheidungsverfahren im Allgemeinen keine sachgerechte Investitionsentscheidung liefern kann, ist im Lichte der unter b) abgeleiteten Ergebnisse damit evident.

Das unter c) vorgeschlagene Entscheidungsverfahren unterstellt einen Finanzmarkt, an dem liquide Mittel *nur* unverzinslich aufgenommen und angelegt werden können. Es lässt damit, anders betrachtet, die in Investitionsentscheidungen zu berücksichtigende unterschiedliche zeitliche Struktur von Zahlungsströmen gerade unberücksichtigt. Damit wird der Wert späterer

Zahlungen im Vergleich zum Wert früherer Zahlungen, gemessen an einem Finanzmarkt mit einem positiven Anlage- und Aufnahmezins, überschätzt.

Übungsaufgabe 5

a) $2.000 \cdot (1 + 0{,}06) \cdot (1 + 0{,}06) \cdot (1 + 0{,}06) \cdot (1 + 0{,}06) \cdot (1 + 0{,}06)$

$= \; 2.000 \cdot (1 + 0{,}06)^5 \; = \; 2.000 \cdot 1{,}3382 \; = \; 2.676{,}40$ [GE].

b) Gesucht wird der Aufzinsungsfaktor$(1 + 0{,}06)^t = 2$; dieser liegt zwischen $t = 11$ und $t = 12$, wie aus Tabelle I ersichtlich ist. Dies bedeutet, dass sein Guthaben exakt nach 12 Jahren den gesuchten Betrag von GE 4.000 übersteigt.

c) Nach genau 3 Jahren, am 31.12.2008, beträgt sein Guthaben:

$$2.000 \cdot 1{,}06^3 \; = \; 2.000 \cdot 1{,}1910 \; = \; 2.382 \,[\text{GE}].$$

Er hebt am 31.12.2008 500 GE ab. Es verbleiben 1.882 GE, die sich noch 6 Jahre lang bis zum 31.12.2014 mit 6% verzinsen, so dass am 31.12.2014 das Guthaben

$$1.882 \cdot 1{,}06^6 \; = \; 1.882 \cdot 1{,}4185 \; = \; 2.669{,}62 \,[\text{GE}]$$

beträgt.

Übungsaufgabe 6

a) $500.000 \cdot (1 + 0{,}1)^5 = 500.000 \cdot 1{,}6105 = 805.250$ [GE] .

Dem Gesellschafter müßten am 31.12.2011 gerundet GE 805.250 gezahlt werden.

b) Ursprünglicher Abfindungsbetrag: 500.000 GE

Einfacher Zins für 5 Jahre: $500.000 \cdot 0{,}1 \cdot 5 = 250.000$ [GE]

Zinseszins: $805.250 - (500.000 + 250.000)$
$= 55.250$ [GE] .

Oder ausführlich:

	$[50.000 \cdot 1{,}1^4 - 50.000]$	(Zinsen und Zinseszinsen auf die Zinszahlung des ersten Jahres)
+	$[50.000 \cdot 1{,}1^3 - 50.000]$	(… des zweiten Jahres)
+	$[50.000 \cdot 1{,}1^2 - 50.000]$	(… des dritten Jahres)
+	$[50.000 \cdot 1{,}1 \quad - 50.000]$	(… des vierten Jahres)
=	55.250 [GE] .	

Übungsaufgabe 7

a) Gesucht ist der Betrag c_0, der nach 10jähriger Verzinsung mit 4% einen Wert von 10.000 GE besitzt, also

$$\begin{aligned} c_0 \cdot 1{,}04^{10} &= 10.000 \\ c_0 &= 10.000 \cdot 1{,}04^{-10}. \end{aligned}$$

Für $1{,}04^{-10}$ lesen Sie aus Tabelle II ab: 0,6756.

Der Sparer muss also heute 6.756 GE anlegen.

b) Gefragt ist nach dem Produkt aus $1{,}075^9$ und $1{,}075^{-9}$. Da die Basis beider Potenzen dieselbe ist, können die Exponenten addiert werden, so dass sich als Produkt ergibt $1{,}075^{9-9} = 1{,}075^0 = 1$.

Übungsaufgabe 8

a) $$\begin{aligned} & 100 \cdot (1 + 0{,}05) \cdot (1 + 0{,}20) \cdot (1 + 0{,}10) \\ = \; & 100 \cdot (1{,}05 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1) \\ = \; & 100 \cdot 1{,}386 \\ = \; & 138{,}60\,[\text{GE}] \;. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} & 6.930 \cdot (1 + 0{,}05)^{-1} \cdot (1 + 0{,}20)^{-1} \cdot (1 + 0{,}10)^{-1} \\ = \; & 6.930 \cdot \frac{1}{1{,}05 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}1} \\ = \; & \frac{6.930}{1{,}386} \\ = \; & 5.000\,[\mathbf{GE}]. \end{aligned}$$

c) Es ändert sich nichts, da gilt: $(1+0{,}05)\cdot(1+0{,}20) = (1+0{,}20)\cdot(1+0{,}05)$ etc. D.h., die Reihenfolge der Zinssätze spielt immer dann keine Rolle, wenn es nur um die Frage geht, welchen Wert eine auf den Zeitpunkt $t = t'$ bezogene konkrete Zahlung bezogen auf einen anderen Zeitpunkt $t \neq t'$ hat. Bei der Aggregation ganzer Zahlungsreihen zu einem einzigen entscheidungsrelevanten Wert kann die Reihenfolge der Zinssätze hingegen durchaus relevant sein (vgl. dazu Übungsaufgabe 12 in Kurseinheit 2 dieses Kurses).

Übungsaufgabe 9

a)
$$\begin{aligned} \text{RB} &= 20.000\cdot \text{RBF}(5\text{ J.},\ 5\%) \\ &= 20.000\cdot 4{,}3295 \\ &= 86.590\ [\text{GE}]\ . \end{aligned}$$

Er müßte somit 86.590 GE in Zeitpunkt $t = 0$ anlegen.

b)
$$\begin{aligned} \text{RB} &= 1.000\cdot \text{RBF}(12\text{ J.},\ 4\%) \\ &= 1.000\cdot 9{,}3851 \\ &= 9.385{,}10\ [\text{GE}]\ . \end{aligned}$$

Der Barwert der Rente beträgt somit 9.385,10 GE.

Übungsaufgabe 10

Gemäß (FM_8) wird der Barwert approximativ ermittelt durch $RB^{\infty} = e\cdot\frac{1}{r}$, während der exakte Barwert gemäß (FM_7) als $RB = e\cdot RBF(T,r)$ ermittelt wird. Da der approximativ ermittelte Rentenbarwert den exakt ermittelten Rentenbarwert für alle endlichen Laufzeiten übersteigt, ist der approximativ ermittelte Wert um die Differenz zwischen $e\cdot\frac{1}{r}$ und $e\cdot RBF(T,r)$ zu vermindern. Für diese Differenz ergibt sich:

$$\begin{aligned} e\cdot\frac{1}{r} - e\cdot RBF(T,r) &= e\cdot\left[\frac{1}{r} - \frac{1-q^{-T}}{r}\right] \\ &= \frac{e}{r}\cdot q^{-T} = RB^{\infty}\cdot q^{-T}\ . \end{aligned}$$

Der approximativ ermittelte Rentenbarwert von 10.000 GE übersteigt den exakt ermittelten Wert folglich um:

i) $10.000 \cdot 1{,}05^{-50} = 10.000 \cdot 0{,}0872 = 872\ [\mathbf{GE}]$ bzw.

ii) $10.000 \cdot 1{,}07^{-40} = 10.000 \cdot 0{,}0668 = 668\ [\mathbf{GE}]$ bzw.

iii) $10.000 \cdot 1{,}08^{-30} = 10.000 \cdot 0{,}0994 = 994\ [\mathbf{GE}]$.

Der approximativ ermittelte Rentenbarwert ist also um 872 GE bzw. 668 GE bzw. 994 GE zu vermindern, um den exakten Rentenbarwert zu erhalten.

Übungsaufgabe 11

Für den Kontostand C_t in Zeitpunkt t gilt unter der Annahme einer nachschüssigen jährlichen Entnahme von e und einem Anfangskontostand im Zeitpunkt $t = 0$ in Höhe von C_0 bei einem als konstant unterstellten Zinssatz in Höhe von r:

$$C_t = C_{t-1} \cdot (1+r) - e\ .$$

Für $C_0 = 40.000$ [GE], $r = 5\%$ und $e = 7.880{,}69$ [GE] ergibt sich folglich:

$$\begin{aligned} \mathbf{C_1} &= \mathbf{C_0} \cdot 1{,}05 - 7.880{,}69 \\ &= 40.000 \cdot 1{,}05 - 7.880{,}69 \\ &= 34.119{,}31\ [\mathbf{GE}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C_2} &= \mathbf{C_1} \cdot 1{,}05 - 7.880{,}69 \\ &= 34.119{,}31 \cdot 1{,}05 - 7.880{,}69 \\ &= 27.944{,}59\ [\mathbf{GE}] \end{aligned}$$

$$\mathbf{C_3} = 21.461{,}13\ [\mathbf{GE}]$$

$$\mathbf{C_4} = 14.653{,}50\ [\mathbf{GE}]$$

$$\mathbf{C_5} = 7.505{,}49\ [\mathbf{GE}]$$

$$\mathbf{C_6} = 0{,}07\ [\mathbf{GE}]\ .$$

Wie in Beispiel 11 „behauptet", kann bei der Anlage eines Betrages von 40.000 GE zu 5% p. a. sechs Jahre lang an jedem Jahresende ein Betrag von 7.880,69 GE von dem Anlagenkonto abgehoben werden, wenn das Endguthaben in Zeitpunkt t = 6 gerade den Stand 0 GE aufweisen soll. Der „Restbetrag" von 0,07 GE resultiert aus Rundungsfehlern.

Übungsaufgabe 12

a) Geht man von den in Tabelle IV angegebenen Faktoren aus, so ergibt sich:

$$100.000 \cdot \text{ANF}(20\text{ J.}, 7\%) \;=\; 100.000 \cdot 0{,}0944 \;=\; 9.440\ [\text{GE}]\ .$$

b) Da pro Jahr 7% Zinsen zu zahlen sind, setzen sich die 9.440 [GE] im ersten Jahr aus 7.000 GE (100.000 · 0,07) Zinsen und 2.440 GE Tilgung zusammen.

c) Im zweiten Jahr beträgt die Restschuld 100.000 – 2.440 = 97.560 [GE], so dass die Annuität aus 6.829,20 GE (97.560 · 0,07) Zinsen und 2.610,80 GE Tilgung besteht.

d) Am Ende des letzten Jahres der Darlehenslaufzeit beträgt die Restschuld einschließlich der Zinsen für das letzte Jahr genau 9.440 GE, da ja mit der letzten Annuität das Darlehen getilgt wird.

Somit gilt (0,07 · TA + TA) = 9.440 [GE], wobei TA den Tilgungsanteil des letzten Jahres kennzeichnet.

$$\mathbf{TA} \;=\; 9.440 \cdot 1{,}07^{-1} = 8.822{,}43[\mathbf{GE}].$$

Der Zinsanteil beträgt im letzten Jahr 8.822,43 · 0,07 = 617,57 [GE].

e) $9.440 \cdot 20 - 100.000 \;=\; 188.800 - 100.000 \;=\; 88.800\ [\text{GE}]\ .$

f) Bezeichnet man die Anfangsschuld in Zeitpunkt t = 0 mit A_0, die Höhe der jährlich nachschüssig im Zeitpunkt t = 1, 2, …, T zu leistenden Tilgungszahlungen mit T_t und die Höhe der Restschuld (nach Verrechnung der zeitgleich eingehenden Tilgungszahlung) im Zeitpunkt t = 1, 2, …, T mit R_t, so gilt zunächst:

$$R_t \;=\; A_0 - T_1 - T_2 - \ldots - T_t\ , \qquad \text{für} \quad t = 1, 2, \ldots, T\ .$$

Berücksichtigt man weiter, dass die Höhe der ersten Tilgungszahlung eindeutig durch den Annuitätendarlehensvertrag fixiert ist ($T_1 = a - A_0 \cdot r = 9.440 - 7.000 = 2.440$ [GE]) und die Höhe der nachfolgenden Tilgungszahlungen rekursiv aus der jeweils vorhergehenden Tilgungszahlung ermittelt werden kann ($T_t = T_{t-1} \cdot (1+r)$, für $t = 2, 3, \ldots, T$), so kann obige Gleichung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} R_t &= A_0 - T_1 - T_1 \cdot (1+r) - T_1 \cdot (1+r)^2 - \ldots - T_1 \cdot (1+r)^{t-1} \\ &= A_0 - T_1 \cdot (q^0 + q^1 + q^2 + \ldots + q^{t-1}) \ . \end{aligned}$$

Der in Klammern angegebene Ausdruck entspricht nun wieder einer geometrischen Reihe, deren Summe entsprechend der Ableitung des Rentenbarwertfaktors ermittelt werden kann. Es ergibt sich dann zunächst allgemein:

$$\begin{aligned} R_t &= A_0 - T_1 \cdot \frac{q^t - 1}{r} \\ &= A_0 - T_1 \cdot \mathrm{RBF}(t, r) \cdot q^t \end{aligned}$$

und für den konkreten Fall (z.B. für t = 10):

$$R_{10} = 100.000 - 2.440 \cdot 7{,}0236 \cdot 1{,}9672 = 66.286{,}94 \,[\mathrm{GE}] \ .$$