1 Entscheidungsregeln für Ungewissheitssituationen

1.1 Ausgangspunkt und Fragestellung

In dem zweiten Kapitel der Kurseinheit 3 dieses Kurses haben Sie bereits die drei verschiedenen Grundtypen unsicherheitsbestimmter Entscheidungssituationen kennengelernt sowie die Ergebnismatrix als ein wichtiges Instrument zur formalen Darstellung derartiger Probleme. Sie wissen außerdem, was mit den Begriffen Präferenzfunktion, Optimierungskriterium, subsidiäre Zielvariable und Entscheidungsregel gemeint ist, und sind mit verschiedenen Formen sog. Dominanzprinzipien vertraut gemacht worden. Schließlich haben Sie eine Vielzahl möglicher Kennzahlen zur Charakterisierung von Ergebnisverteilungen kennengelernt.

Entscheidungsregel

Damit stehen alle Instrumente zur Verfügung, um die immer noch unbeantwortete Kernfrage dieses Kursteils, die Frage nach der sinnvollen Ausgestaltung von Entscheidungsregeln, auch für Entscheidungsprobleme zu untersuchen, bei denen der Entscheider keinerlei Kenntnisse über die Eintrittswahrscheinlichkeiten der möglichen Umweltzustände hat.

Wie Sie im Abschnitt 2.2.2 der Kurseinheit 3 gesehen haben, kann die Anwendung einer Entscheidungsregel im allgemeinen gedanklich in zwei Schritte zerlegt werden, nämlich

Kennzahlen

(1) Reduzierung der den einzelnen Alternativen a_i zugeordneten Ergebnisverteilungen E_i auf bestimmte Kennzahlen $y_h(E_i)$ $(h = 1, 2, \ldots, \overline{h})$.

Zielfunktion

(2) Formulierung der entscheidungsrelevanten Zielfunktion auf der Basis dieser „subsidiären Zielvariablen“ y_h. Die Möglichkeit, derartige Zielvariablen evtl. sogar trotz unterschiedlicher individueller Optimierungskriterien formal zu einem entscheidungsrelevanten Präferenzwert $\varphi(a_i)$ zusammenzufassen, haben Sie im Abschnitt 2.2.2.2 der Kurseinheit 3 bereits ebenfalls kennengelernt.

ein- und mehrdimensionale Entscheidungsregeln

Wird von vornherein nur eine Kennzahl gebildet (also $\overline{h}=1$), für die ein möglichst großer Wert angestrebt wird, so fallen beide Schritte praktisch zusammen, da in diesem Fall die einzige subsidiäre Zielvariable ja zugleich als Präferenzwert angesehen werden kann. Bei einer solchen Konstellation spricht man häufig auch von einer **eindimensionalen** Entscheidungsregel, bei der Verwendung von mehr als einer Kennzahl dementsprechend von einer **mehrdimensionalen** Entscheidungsregel. Mit ein- und mehrdimensionalen Entscheidungsregeln für den „Risikofall“ haben Sie sich bereits in Kapitel 1 der Kurseinheit 4 ausführlicher beschäftigt. In diesem 1. Kapitel der Kurseinheit 5 wollen wir uns nun mit der Analyse der bekanntesten Entscheidungsregeln für Ungewissheitssituationen beschäftigen, also für solche Situationen, in denen den alternativ möglichen Ergebnissen **keine Eintrittswahrscheinlichkeiten** zugeordnet werden können.

Dabei werden wir wieder auf die im Abschnitt 2.3.1 der Kurseinheit 3 vorgenommene Einteilung von Kennzahlen nach der **Informationsbasis** zurückgreifen und dementsprechend Präferenzwerte nach den dort definierten Typen I und II unterscheiden. Dementsprechend werden wir in den folgenden Abschnitten 1.2 und 1.3 zunächst die bekanntesten Entscheidungsregeln für Ungewissheitssituationen mit Präferenzwerten der Typen I und II inhaltlich darstellen und erläutern.

1.2 Entscheidungsregeln mit Präferenzwerten des Typs I

Um die Präsentation der verschiedenen Vorschläge zur Ausgestaltung von Entscheidungsregeln für Ungewissheitssituationen etwas anschaulicher zu gestalten, wollen wir stets von folgender Ergebnismatrix ausgehen:

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	100	0	0	0
a_2	20	10	20	30
a_3	85	3	3	4
a_4	110	10	–20	0
a_5	30	20	0	15

Tab. 1: Ergebnismatrix für eine Ungewissheitssituation

Die Ergebnisangaben im Inneren dieser Matrix sollen alternative Einkommensbeträge angeben. Für welche der fünf zur Auswahl stehenden Handlungsalternativen soll sich nun ein Entscheidungssubjekt entscheiden, dessen primäre Zielsetzung auf die Erzielung eines möglichst hohen Einkommens gerichtet ist? In der Literatur werden hierzu u.a. folgende Kriterien vorgeschlagen:

(1) **Mini-Max-Kriterium**[1]

Mini-Max-Kriterium

Diesem – wie wir sofort sehen werden – äußerst pessimistischen Vorschlag zufolge sollen die den einzelnen Alternativen zugeordneten Ergebnisverteilungen jeweils durch das **schlechtestmögliche** Ergebnis gekennzeichnet werden.

Maximales Zeilenminimum

Bei Ergebniswerten, von denen ein möglichst hoher Wert angestrebt wird,[2] ist in der Ergebnismatrix also jeweils das **Zeilenminimum** zu bestimmen, um so als subsidiäre Zielvariable die bereits aus Abschnitt 2.3.3 der Kurseinheit 3 bekannte Kennzahl des „schlechtestmöglichen Ergebniswertes" zu ermitteln.

Die optimale Alternative soll dann durch den **maximalen** Wert dieser subsidiären Zielvariablen bestimmt werden, also durch das **maximale** Zeilenminimum. Die Zielfunktion lautet somit (im Fall von positiv bewerteten Ergebnisgrößen):

$$\boxed{\max_i : \varphi(a_i) \quad = \quad \min_j (e_{ij})\,.} \tag{1}$$

Für unser Ausgangsbeispiel errechnen sich die in Tab. 2 angegebenen Zeilenminima so, dass sich als Optimallösung Alternative a_2 ergibt, die mit 10 den maximalen Minimalgewinn verspricht.

i	1	2	3	4	5
Minima	0	10←	3	–20	0

Tab. 2: Präferenzwerte bei Anwendung des Mini-Max-Kriteriums

Bei Anwendung des Mini-Max-Prinzips würde die gesamte Ergebnisverteilung also ausschließlich durch ihren schlechtesten Wert repräsentiert, während der gesamte Rest des Ergebnisspektrums völlig außer Acht bliebe. Die Anwendung des Mini-Max-Prinzips impliziert also eine äußerst pessimistische oder zumindest vorsichtige Einstellung.

---

1 Zu Ehren von A. WALD wird diese Entscheidungsregel auch als WALD-Kriterium bezeichnet. Vgl. WALD (1950).

2 Bei Ergebniswerten, von denen ein möglichst *niedriger* Wert angestrebt wird (z.B. Kostengrößen als Ergebniswerte), ist in der Ergebnismatrix hingegen zunächst das Zeilenmaximum zu bestimmen, um den „schlechtestmöglichen Ergebniswert" zu ermitteln.

Die optimistische Gegenposition zu der einseitig auf den schlechtestmöglichen Ausgang ausgerichteten Mini-Max-Regel bildet das

Maxi-Max-Kriterium

(2) **Maxi-Max-Kriterium,**
demzufolge die einzelnen Ergebnisverteilungen – nun gerade entgegengesetzt – jeweils ausschließlich durch das bestmögliche Ergebnis (also bei Ergebniswerten, von denen ein möglichst hoher Wert angestrebt wird, durch das **Zeilenmaximum**)[1] gekennzeichnet werden sollen.

Die Optimalalternative wird dann – im Fall positiv bewerteter Ergebnisgrößen – durch das maximale Zeilenmaximum bestimmt.

Die Zielfunktion lautet in diesem Fall:

$$\boxed{\max_i : \varphi(a_i) \;=\; \max_j (e_{ij})\,.} \tag{2}$$

Gemäß Tab. 3 stellt in unserem Beispiel somit a_4 mit dem maximalen Maximalgewinn von 110 das Optimum dar.

i	1	2	3	4	5
Maxima	100	30	85	110←	30

Tab. 3: Präferenzwerte bei Anwendung des Maxi-Max-Kriteriums

Das Maxi-Max-Kriterium ist natürlich in dem gleichen extremen Ausmaß einseitig orientiert wie das Mini-Max-Kriterium – nur mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die meisten Argumente für und wider das Mini-Max-Kriterium lassen sich daher in analoger Weise auch auf das Maxi-Max-Kriterium anwenden.

1 Bei Ergebniswerten, von denen ein möglichst *niedriger* Wert angestrebt wird, bildet hingegen gerade das Zeilenminimum den „bestmöglichen Ergebniswert“ ab.

Übungsaufgabe 1:

Einem Forschungsinstitut stehen drei verschiedene Alternativen $a_i (i = 1, 2, 3)$ zur Fortführung eines Auftragsprojektes zur Entwicklung zerstörungsfreier Prüfverfahren eines sehr teuren neuen Werkstoffes zur Auswahl. Zu welchen Kosten diese drei alternativen Forschungsvarianten führen, hängt von den im Einzelnen noch nicht bekannten Materialeigenschaften des neuen Werkstoffes ab. Dabei lassen sich fünf verschiedene Qualitätsstufen $s_j (j = 1, 2, \ldots, 5)$ für möglich halten. Die mit den einzelnen Forschungsvarianten verbundenen Kosten (in 10.000 GE) sind in folgender Tabelle ausgewiesen:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	10	10	15	25	20
a_2	5	20	10	25	30
a_3	20	15	15	20	20

Für welche Variante würde sich das Forschungsinstitut entscheiden, wenn

(a) das Mini-Max-Kriterium

(b) das Maxi-Max-Kriterium

in einer der vorliegenden Problemstellung entsprechenden Form angewendet würde?

Eine Zwischenstellung zwischen der sehr pessimistischen Mini-Max-Regel und dem optimistischen Maxi-Max-Kriterium nimmt das sog.

HURWICZ-Kriterium

(3) **HURWICZ-Kriterium**[1]
ein, dass gelegentlich auch als Optimismus-Pessimismus-Kriterium bezeichnet wird. Dieser Entscheidungsregel zufolge werden zur Kennzeichnung der einzelnen Ergebnisverteilungen zunächst zwei Kennzahlen, nämlich sowohl das best- als auch das schlechtestmögliche Ergebnis, also Zeilenmaximum und -minimum, herangezogen. Im Gegensatz zu den bislang erörterten Entscheidungsregeln handelt es sich hier also um eine zweidimensionale Entscheidungsregel.

zweidimensionale Entscheidungsregel

Die letztlich maßgeblichen Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ werden dann als gewichteter Durchschnitt dieser beiden subsidiären Zielvariablen ermittelt, wozu der Entscheidende nach seinem subjektiven Ermessen einen **Optimismusparameter** $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ festzulegen hat.

Optimismusparameter

1 Vgl. HURWICZ (1951).

Als Zielfunktion ergibt sich dann:

$$\max_i : \varphi(a_i) = \lambda \cdot \max_j(e_{ij}) + (1-\lambda) \cdot \min_j(e_{ij}) . \tag{3}$$

Durch die Möglichkeit zur autonomen Fixierung des Optimismusparameters λ kann diese Entscheidungsregel offenbar in flexiblerer Weise an die maßgeblichen Präferenzvorstellungen des Entscheidungssubjektes angepasst werden, als das bei den beiden zuvor erörterten Entscheidungsregeln möglich ist. Denn in Abhängigkeit von der Wahl des Parameters λ kann sich natürlich jeweils eine andere Alternative als optimal ergeben.

Unter Berücksichtigung der in Tab. 2 und 3 zusammengestellten Zeilenminima und -maxima ergeben sich so etwa für $\lambda = 0{,}2$ und $\lambda = 0{,}7$ die in Tab. 4 angeführten Präferenzwerte.[1)]

i	1	2	3	4	5
$\lambda = 0{,}2$	20←	14	19,4	6	6
$\lambda = 0{,}7$	70	24	60,4	71←	21

Tab. 4: Präferenzwerte bei Anwendung des HURWICZ-KRITERIUMS

Für $\lambda = 0{,}2$ ergibt sich also a_1 als Optimalalternative, während für $\lambda = 0{,}7$ Alternative a_4 den höchsten Präferenzwert aufweist.

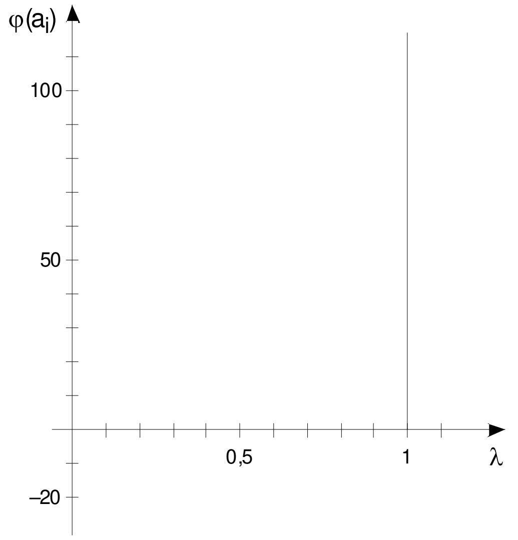
Übungsaufgabe 2:

(a) Erläutern Sie kurz, inwieweit sowohl das Mini-Max- als auch das Maxi-Max-Kriterium als Spezialfälle des HURWICZ-Kriteriums angesehen werden können!

(b) Stellen Sie für die in Tab. 1 dargestellten Handlungsalternativen die Abhängigkeit der Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ von der Höhe des Optimismusparameters λ grafisch dar.

(Lösungshinweis: Betrachten Sie λ als die unabhängige – auf der Abszisse abzutragende – Variable und die einzelnen $\varphi(a_i)$ als die davon abhängigen Variablen und zeichnen Sie so für jede Alternative a_i in diesem Diagramm eine Gerade $\varphi(a_i) = f_i(\lambda)$. Beachten Sie dabei den Definitionsbereich von λ!)

1 Erläuterung: Die Präferenzwerte für Alternative a_2 beispielsweise ergeben sich, indem wir das Zeilenmaximum (30 gem. Tab. 3) mit λ multiplizieren (also mit 0,2 oder 0,7), das Zeilenminimum (10 gem. Tab. 2) mit $(1-\lambda)$ multiplizieren (also mit 0,8 oder 0,3) und die Summe dieser beiden Produkte bilden.



c) Geben Sie anhand der Lösung zu b) an, für welche Wertbereiche von λ sich jeweils eindeutige Aussagen zur Optimalalternative ableiten lassen!

Im Gegensatz zu den bislang erörterten Regeln, die sich ausschließlich an den Extremwerten der Ergebnisverteilungen orientieren, erfasst das sogenannte

(4) **LAPLACE-Kriterium** LAPLACE-Kriterium
zunächst die gesamte Ergebnisverteilung.

Diesem Kriterium zufolge soll der entscheidungsrelevante Präferenzwert $\varphi(a_i)$ nämlich als Durchschnitt aller zu der entsprechenden Ergebnisverteilung E_i gehörenden e_{ij} ermittelt werden.

Die zugehörige Zielfunktion lautet also:

$$\boxed{\max_i : \varphi(a_i) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e_{ij} .} \qquad (4)$$

Für unser Beispiel ergeben sich die in Tab. 5 ausgewiesenen Präferenzwerte. Nach dem LAPLACE-Kriterium würden sich hier also gleich zwei Optimalalternativen ergeben, nämlich a_1 und a_4.

i	1	2	3	4	5
Durchschnitt	25←	20	23,75	25←	16,25

Tab. 5: Präferenzwerte bei Anwendung des LAPLACE-Kriteriums

Prinzip des mangelnden Grundes

Zur Begründung des LAPLACE-Kriteriums wird gelegentlich angeführt, da die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Umweltzustände s_j nicht bekannt seien, spreche eigentlich nichts dagegen, alle s_j als gleich wahrscheinlich anzusehen. Aus diesem sog. Prinzip des mangelnden Grundes (nämlich dafür, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit eines Zustandes größer sein sollte als die eines anderen) wird jedem Zustand somit eine Eintrittswahrscheinlichkeit von 1/n zugeordnet. Der Präferenzwert des LAPLACE-Kriteriums kann dann offensichtlich als der Erwartungswert der jeweiligen Ergebnisverteilung interpretiert werden. Selbst wenn man aus dem Prinzip des mangelnden Grundes die Fiktion einer Gleichverteilung der Eintrittswahrscheinlichkeiten akzeptiert und so eine primäre Entscheidung unter Ungewissheit in eine Entscheidung unter Risiko transformiert, kann – wie Sie bereits aus Kurseinheit 4 wissen – immer noch bezweifelt werden, ob der Erwartungswert der Ergebnisverteilung allein wirklich die relevante Kennzahl darstellt.

1.3 Entscheidungsregeln mit Präferenzwerten des Typs II

Den bislang erörterten vier Kriterien war es gemeinsam, dass die zur Charakterisierung einer Alternative a_i heranzuziehenden Kennzahlen jeweils ausschließlich aus der zugehörigen Ergebnisverteilung abgeleitet wurden. Wir hatten es also stets mit Kennzahlen des im Abschnitt 2.3.1 der Kurseinheit 3 definierten Typs I zu tun. Im Gegensatz dazu wird bei dem sog.

SAVAGE-NIEHANS-Kriterium

(5) **SAVAGE-NIEHANS-Kriterium**[1)]
zur Ermittlung der für eine Ergebnisverteilung E_i repräsentativen Kennzahlen auch auf die Werte anderer Ergebnisverteilungen zurückgegriffen. Die primären Ergebnisverteilungen werden diesem Ansatz zufolge nämlich zunächst durch entsprechende Verteilungen der jeweiligen „Bedauerns“-Beträge ersetzt. Dabei werden diese Bedauernswerte – Sie erinnern sich an das Glasperlenspiel des REGENMACHERS aus Kurseinheit 3 – als Differenz zwischen

– dem bei dem jeweiligen Umweltzustand s_j maximal möglichen Ergebnis und

– dem bei Wahl der zu beurteilenden Handlungsalternative und Eintreffen des Zustandes s_j erzielbaren Ergebnis e_{ij} ermittelt.

1 Diese Entscheidungsregel wurde – soweit ersichtlich – unabhängig voneinander zunächst von NIEHANS und später von SAVAGE und auch noch von BLECKWELL/GIRSHIK entwickelt. Vgl. NIEHANS (1948), insbes. S. 446–450; SAVAGE (1951); BLECKWELL/GIRSHIK (1954), S. 114–116.

An die Stelle der ursprünglichen e_{ij}-Werte treten also die Differenzbeträge zwischen dem jeweiligen **Spaltenmaximum** und den e_{ij}. Die Ergebnismatrix wird somit durch eine **Bedauerns-Matrix** ersetzt, für deren Werte $\hat{e}_{ij}$ jeweils die Beziehung

Bedauerns-Matrix

$$\hat{e}_{ij} = \max_k(e_{kj}) - e_{ij} \qquad \begin{array}{l} k, i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

gilt. Tab. 6 zeigt für unser Beispiel noch einmal die ursprüngliche Ergebnismatrix (mit gekennzeichneten Spaltenmaxima) und die daraus abgeleitete Bedauerns-Matrix.

	s_1	s_2	s_3	s_4	…	s_1	s_2	s_3	s_4	max $\hat{e}_{ij}$
a_1	100	0	0	0		10	20	20	30	30
a_2	20	10	**20**	**30**		90	10	0	0	90
a_3	85	3	3	4		25	17	17	26	26←
a_4	**110**	10	–20	0		0	10	40	30	40
a_5	30	**20**	0	15		80	0	20	15	80
	e_{ij}-Werte					$\hat{e}_{ij}$-Werte				

Tab. 6: Präferenzwerte bei Anwendung des SAVAGE-NIEHANS-Kriteriums

Die SAVAGE-NIEHANS-Regel sieht nun weiter vor,

– die Verteilungen der Bedauerns-Werte jeweils durch ihren Maximalbetrag, also das bei Wahl der betrachteten Alternative höchstens mögliche Bedauern, zu kennzeichnen

– und dann diejenige Alternative als optimal auszuwählen, deren maximaler Bedauernswert am kleinsten ist,

also das **maximale Bedauern** zu minimieren. Die entsprechende Zielfunktion lautet somit:

$$\boxed{\min_i : \varphi(a_i) = \max_j \left[\max_k(e_{kj}) - e_{ij} \right].} \qquad (5)$$

Für unser Beispiel wäre also a_3 mit einem maximalen Bedauernswert von 26 die beste Alternative.

Die Grundidee des SAVAGE-NIEHANS-Kriteriums kann durch zwei Merkmale gekennzeichnet werden, nämlich

(1) dadurch, dass der Entscheidung statt der ursprünglichen Ergebniswerte e_{ij} die daraus abgeleiteten Bedauerns-Werte $\hat{e}_{ij}$ zugrundegelegt werden, und

(2) dadurch, dass dann auf die so umgeformten Ergebnismatrizen, die dann negativ bewertete Ergebnisgrößen beinhalten, das Mini-Max-Kriterium angewendet wird.

Mini-Max-Regret-Kriterium

Die SAVAGE-NIEHANS-Regel wird deshalb auch gelegentlich als **„Mini-Max-Regret"-Kriterium** oder ähnlich bezeichnet.

relativer Misserfolg

Zur Untersuchung der Sinnhaftigkeit dieser Entscheidungsregel sind nun beide Merkmale einzeln zu analysieren. Durch den Übergang zu den Bedauernswerten gelangt man zu einer stark **relativierenden** Betrachtung der Handlungskonsequenzen. So führt in unserem Beispiel etwa Alternative a_2 zweimal, nämlich bei Eintritt von s_1 und s_3, zu einem Ergebnis von 20. In der Bedauerns-Matrix wird der gleiche Ausgang jedoch einmal mit einem „regret"-Wert von 90 bewertet, das andere mal mit 0. Beurteilungsgrundlage ist nicht mehr die absolute Ergebnishöhe, sondern das natürlich erst im nachhinein definitiv feststellbare Ausmaß **des relativen Misserfolges,** gemessen an dem bei dem nun tatsächlich eingetretenen Umweltzustand maximal möglich gewesenen Ergebnis. Eine solche Einstellung mag auf den ersten Blick etwas merkwürdig und wenig „ökonomisch" erscheinen; den vergangenen Erfolgschancen nachzutrauern, hilft im Allgemeinen auch nicht viel weiter.

Plausibilität des SAVAGE-NIEHANS-Kriteriums

Versetzen Sie sich jedoch einmal in die Situation eines Angestellten, eines Vermögensverwalters, eines Wirtschaftsberaters, kurz in die Situation einer Person, die letztlich über fremdes Vermögen zu entscheiden und Erfolg oder Misserfolg dieser Entscheidung auch hinterher zu verantworten hat.

Angenommen, er wählt – entgegen der SAVAGE-NIEHANS-Regel – in unserem Beispiel Alternative a_2. Glauben Sie nicht, dass er seinen Auftraggebern ein Ergebnis von 20 bei Eintritt von Zustand s_3 viel eher als „Erfolg" verkaufen kann, als wenn Zustand s_1 eingetreten wäre? Tritt s_3 ein, kann er mit Recht darauf verweisen, dass der – vielleicht als gering eingestufte – Erfolg von 20 eindeutig das Maximum dessen darstellt, was angesichts der allgemein schlechten Entwicklung (s_3!) überhaupt herauszuholen war. Bei Eintritt von s_1 hingegen wird er sich im Nachhinein vorhalten lassen müssen, dass – Erfolg von 20 hin oder her – ein ganzer Katalog noch erheblich lukrativerer Handlungsalternativen zur Auswahl gestanden hätte (so z.B. a_1,

a_3, a_4), dass er sich jedoch ausgerechnet für die gewinnschwächste Alternative entschieden hätte. Sie sehen also: Der Gedanke, bei der Ableitung einer Entscheidung statt an deren primären Ergebnissen e_{ij} an den relativen Misserfolgen $\hat{e}_{ij}$ anzuknüpfen, erscheint zumindest in bestimmten Situationen als gar nicht so unvernünftig.[1]

Eine andere Frage ist natürlich, ob man nun auf ein durch die Bedauerns-Werte dargestelltes Entscheidungsproblem auch die äußerst pessimistische Mini-Max-Regel anwendet. Auf diesen Punkt werden wir im folgenden Abschnitt bei der allgemeinen Rationalitätsanalyse der verschiedenen Entscheidungsregeln noch zurückkommen.

Neben diesen Verfahren, Entscheidungsregeln nicht auf den ursprünglichen Ergebniswerten e_{ij}, sondern auf den entsprechenden Bedauerns-Werten $\hat{e}_{ij}$ aufzubauen, wird gelegentlich auch noch die Möglichkeit erörtert,

(6) **Entscheidungsregeln auf der Basis von „Frohlockens"-Werten** Frohlockens-Werte

zu formulieren.[2] Dabei wird unter dem zu einem Ergebniswert e_{ij} korrespondierenden Frohlockens-Wert $\tilde{e}_{ij}$ die Differenz zwischen e_{ij} und dem bei dem jeweiligen Zustand schlechtestmöglichen Ergebnis verstanden, also

$$\tilde{e}_{ij} = e_{ij} - \min_k(e_{kj}) \qquad \begin{array}{l} k, i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \ . \end{array}$$

Im Gegensatz zu den Bedauerns-Werten $\hat{e}_{ij}$, die ja den Ärger über die verpassten Gewinnchancen reflektieren, drücken die $\tilde{e}_{ij}$ eher die Freude darüber aus, dass es nicht ganz so schlimm gekommen ist, wie es schlimmstenfalls möglich gewesen wäre.

---

1 Vgl. hierzu auch KRELLE (1968), S. 189; zur Kritik s. z.B. CHERNOFF (1954), insbesondere S. 424–427.

2 So z.B. JÖHR (1952), S. 407 f.; GÄFGEN (1974), S. 385 f.

In Tab. 7 ist noch einmal die ursprüngliche Ergebnismatrix unseres Beispiels sowie die daraus abgeleitete „Frohlockens"-Matrix dargestellt.

	s_1	s_2	s_3	s_4	...	s_1	s_2	s_3	s_4	max	min	$\lambda = 0{,}4$
a_1	100	**0**	0	**0**		80	0	20	0	80	0	32
a_2	**20**	10	20	30		0	10	40	30	40	0	16
a_3	85	3	3	4		65	3	23	4	65	3	27,8
a_4	110	10	**–20**	**0**		90	10	0	0	90←	0	36←
a_5	30	20	0	15		10	20	20	15	20	10←	14

e_{ij}-Werte (Spaltenminima hervorgehoben) — $\tilde{e}_{ij}$-Werte — Präferenzwerte (Maxima hervorgehoben)

Tab. 7: Präferenzwerte bei Anwendung von Frohlockens-Kriterien

Auf diese Frohlockens-Werte können dann wiederum

(6.1) die dem pessimistischen Mini-Max-Kriterium entsprechende Regel, das **minimale Frohlocken zu maximieren,**

(6.2) die dem HURWICZ-Kriterium entsprechende Regel, den nach dem individuellen Optimismus gewichteten **Durchschnitt aus minimalem und maximalem Frohlocken zu maximieren,**

(6.3) und in diesem Fall auch die dem optimistischen Maxi-Max-Kriterium entsprechende Regel, **das maximale Frohlocken zu maximieren,**

als mögliche Entscheidungsregeln angewendet werden.[1)]

Allgemein wird die Heranziehung der Frohlockens-Werte als Entscheidungsgrundlage jedoch als erheblich weniger plausibel angesehen als die Verwendung der Bedauernswerte, so dass derartige Entscheidungsregeln in der Literatur auch nur recht selten erörtert werden.[2)] Wir wollen es daher auch im Rahmen dieses Kurses mit diesem kurzen Hinweis auf die Möglichkeit zur Formulierung solcher Entscheidungskriterien bewenden lassen.

---

1 Die Werte dieser drei Kennzahlen sowie die jeweils optimalen Alternativen können aus den letzten Spalten der Tab. 7 entnommen werden. Versuchen Sie selbst herauszufinden, weshalb die Maximierung des maximalen Frohlockens – im Gegensatz zur Minimierung des minimalen Bedauerns – grundsätzlich eine sinnvolle Entscheidungsregel darstellen kann!

2 Siehe aber auch HAX (1965), S. 40 f., der auf Situationen hinweist, in denen das Maxi-Max-Kriterium evtl. sinnvoll sein kann.

Grundsätzlich ist es nun ohne weiteres möglich, in praktisch unbegrenzter Zahl, weitere Entscheidungsregeln für Ungewissheitssituationen zu „erfinden“. So könnten die bislang erörterten eindimensionalen Entscheidungsregeln – so wie etwa die HURWICZ-Regel Mini- und Maxi-Max-Regel kombiniert – auf unterschiedlichste Weise zu zwei- und mehrdimensionalen Regeln kombiniert werden. Dabei erschließt sich eine weitere Dimension zur Ausgestaltung von Entscheidungsregeln, wenn man auf die im Abschnitt 2.2.2.2 der Kurseinheit 3 erörterten Möglichkeiten zur gemischten Verwendung unterschiedlicher Optimierungskriterien zurückgreift.

Und schließlich kann der Katalog möglicher subsidiärer Zielvariablen ebenfalls noch um etliche weitere Kennzahlen bereichert werden. Aus den schon angedeuteten Gründen wollen wir uns hier jedoch auf die Betrachtung der zuvor dargestellten Auswahl der „gängigsten“ Entscheidungsregeln für Ungewissheitssituationen beschränken.

1.4 Rationalitätsanalyse

1.4.1 Zur Subjektivität des Rationalitätsbegriffes

Betrachtet man rückschauend die aus der Anwendung dieser insgesamt neun verschiedenen Entscheidungskriterien auf unser Ausgangsbeispiel (siehe Tab. 1) gewonnenen Ergebnisse, wie sie in Tab. 8 noch einmal zusammengestellt sind, so wird deutlich, dass je nach dem angewendeten Entscheidungskriterium unterschiedliche Handlungsalternativen als optimal ausgewiesen werden.

Entscheidungsregel	Optimalalternative
(1) Mini-Max	a_2
(2) Maxi-Max	a_4
(3) HURWICZ ($\lambda = 0{,}2$)	a_1
($\lambda = 0{,}7$)	a_4
(4) LAPLACE	a_1 und a_4
(5) SAVAGE-NIEHANS	a_3
(6.1) $\tilde{e}$ -Mini-Max	a_5
(6.2) $\tilde{e}$ -HURWICZ ($\lambda = 0{,}4$)	a_4
(6.3) $\tilde{e}$ -Maxi-Max	a_4

Tab. 8: Optimalalternativen bei unterschiedlichen Entscheidungsregeln

Frage nach der „richtigen" Entscheidungsregel

Insgesamt erscheint jede der fünf Alternativen mindestens einmal in der Liste der Optimalalternativen. Damit könnte es natürlich naheliegen, nach „der richtigen" Entscheidungsregel zu fragen.

Diese Frage ginge jedoch an den Intentionen einer *präskriptiv* orientierten Entscheidungstheorie vorbei. Wie bereits an anderen Stellen dieses Kurses betont wurde, besteht eine vorrangige Aufgabe dieser Wissenschaftsdisziplin nämlich darin,

Aufgaben präskriptiver Entscheidungstheorie

– einen möglichst breiten Katalog unterschiedlicher Entscheidungskriterien sowie alternativer Ausgestaltungsformen verschiedener Grundtypen von Entscheidungsmaximen zu entwickeln

– und diese möglichst umfassend im Hinblick auf die mit ihnen verbundenen Implikationen bezüglich der zugrundeliegenden Präferenz- und Risikovorstellungen zu untersuchen sowie ihre Konsequenzen für das Entscheidungsverhalten deutlich zu machen.

Dem Entscheidenden wird so gewissermaßen ein ganzes Sortiment verschiedener Entscheidungsregeln nebst einer Beschreibung ihrer wesentlichen Qualitätsmerkmale zur Verfügung gestellt. Welche Entscheidungsregel seinen eigenen Präferenzvorstellungen und der konkret vorliegenden Entscheidungssituation dann am ehesten gerecht wird, muss jedoch letztlich stets dem subjektiven Ermessen des Entscheidungssubjektes überlassen bleiben. Die präskriptive Entscheidungstheorie kann somit bei der Ableitung konkreter Entscheidungen immer nur eine beratende, nicht jedoch eine definitiv normierende Funktion haben – im Gegensatz etwa zu einer ethisch-normativ ausgerichteten Theorie, die ja letztlich darauf abzielt, Handlungsgebote oder zumindest -verbote abzuleiten.

Für uns bedeutet diese wissenschaftstheoretische Fixierung, dass wir im folgenden untersuchen müssen, welche Eigenschaften die zuvor präsentierten Entscheidungsregeln aufweisen, inwieweit sie überhaupt als vernünftig – oder, wie man im Fachjargon üblicherweise sagt, als rational – angesehen werden können. Eine solche Untersuchung wird daher auch als Rationalitätsanalyse bezeichnet.

Rationalität

Nun ist das, was als Kennzeichen rationalen Verhaltens gefordert werden soll, natürlich ebenfalls nur nach subjektivem Ermessen festzulegen. Was dem einen als eine sehr einsichtige, vernünftige, „quasi-logische" Maxime erscheint, mag der andere als keineswegs plausibles Postulat in den Bereich der Metaphysik verweisen. Die Entscheidungstheorie gerät an dieser Stelle stets in die Gefahr, den Boden unter den Füßen zu verlieren. Sie wird auch in der Tat so lange keinen finden, wie sie versucht, eine objektiv gültige Basis für die Definition von Rationalität zu erreichen.

Subjektivität des Rationalitätsbegriffes

Als einziger Ausweg verbleibt somit nur das offene Bekenntnis zur grundlegenden Subjektivität des Rationalitätsbegriffes. D.h., ein einzelner Autor oder ein Autorenteam kann letztlich nur von den eigenen subjektiven Vorstellungen davon ausgehen, durch welche Merkmale vernünftiges Entscheidungsverhalten geprägt sein sollte. Allgemeingültigkeit kann für derartige grundlegende Feststellungen jedoch nicht verlangt werden. Man ist allerdings bemüht, sich bei der Definition des Rationalitätsbegriffes möglichst nur auf solche Grundforderungen zu beschränken, von denen anzunehmen ist, dass sie einen möglichst breiten Konsens finden. Eine Konkretisierung dieses Bemühens haben Sie für Entscheidungsprobleme bei Risiko bereits im Zusammenhang mit der Darstellung und Diskussion der Kernaxiome des Bernoulliprinzips in Abschnitt 2.4 der Kurseinheit 4 kennengelernt.

In sehr ähnlicher Weise werden wir uns in den folgenden Unterabschnitten bemühen, Ihnen exemplarisch – Vollständigkeit würde den Rahmen dieses Kurses weit sprengen – für den hier relevanten Bereich der Ungewissheitssituationen zu verdeutlichen, inwieweit einzelne der erörterten Entscheidungskriterien solche Eigenschaften besitzen bzw. gerade nicht besitzen, die wohl von vielen Menschen als Merkmale rationalen Verhaltens akzeptiert werden dürften.

1.4.2 Zur Diskussion um das Mini-Max-Kriterium

Drei Argumente gegen das Mini-Max-Kriterium

Das Mini-Max-Kriterium zählt wohl zu den (im einschlägigen und verwandten Schrifttum) populärsten und am meisten diskutierten Entscheidungsregeln. Dabei werden gegen die Anwendung dieses Kriteriums vor allem drei Gruppen von Argumenten vorgebracht, die übrigens in analoger Weise auch gegen Übertragung der Mini-Maxi-Idee auf Bedauerns- oder Frohlockens-Werte sowie – jeweils mit entgegengesetztem Vorzeichen – auch gegen alle Varianten des Maxi-Max-Kriteriums geltend gemacht werden könnten.

1. Argument: Widerspruch zur Erfahrung

Zum einen wird gegen das Mini-Max-Kriterium eingewendet, die Erfahrung zeige eindeutig, dass sich die Menschen weder auf dem Gebiet der Ökonomie noch in sonstigen Lebensbereichen von derartig pessimistischen Handlungsmaximen leiten ließen. Andernfalls hätte sich beispielsweise ein gewisser Johannes GENSFLEISCH um die Mitte des 15. Jh. wohl kaum dazu entschlossen, volle 1.550 Gulden Schulden zu machen, um den ersten Druck einer Bibel mit beweglichen Lettern in Angriff nehmen zu können, noch hätte sich Henry FORD in den ersten Jahren des letzten Jahrhunderts für die seinerzeit als äußerst schwierig angesehene Massenproduktion billiger Serienautos entschieden. Wenn wirklich alle Welt dem

Mini-Max-Prinzip folgen würde, wären also derartige epochemachenden Entwicklungen wie die **Gutenberg-Bibel** oder Fords **„Tin Lizzy“** ebenso unterblieben wie auch solch alltägliche Ereignisse wie etwa die Geldanlage in Aktien oder auch nur die allwöchentlichen Lotto- und Totospiele. Oder wie HAX (1974), S. 56, formuliert: „Wer nach der Mini-Max-Regel handelt, wird nicht Unternehmer, sondern Rentier.“ Eng damit verknüpft ist der weitere Einwand gegen das Mini-Max-Prinzip, die Befolgung einer solchen übervorsichtigen Maxime würde jede echte unternehmerische Aktivität unterbinden und müsse über ein zwangsläufiges Erlahmen insbesondere innovativer und somit zumeist besonders riskanter Tätigkeiten sehr schnell zu wirtschaftlichem Stillstand und Rückschritt führen. Die Propagierung einer Verhaltensmaxime nach Art des Mini-Max-Kriteriums sei also nicht nur unrealistisch, sondern im Hinblick auf die gesamt- und einzelwirtschaftliche Entwicklung verantwortungslos.

2. Argument:
Lähmung ökonomischer
Aktivität

3. Argument:
unbegründeter
Pessimismus

Etwas anderer Art ist das dritte Argument, das gegen das Mini-Max-Prinzip vorgebracht wird. Es wird infrage gestellt, ob die pessimistische Grundhaltung, bei der Beurteilung von Handlungsmöglichkeiten immer nur mit dem Schlimmsten zu rechnen und die ja ebenfalls vorhandenen positiven Ergebnismöglichkeiten ganz außer acht zu lassen, als vernünftig anzusehen ist. Bei der Beurteilung von **Spielsituationen,** in denen die „Umweltzustände“ ja durch die Aktionen auf den eigenen Vorteil bedachter Gegenspieler zustande kommen, könnte eine solche vorsichtige Haltung durchaus sinnvoll sein. Zur Beurteilung von **Ungewissheitssituationen** jedoch, also „Spielen gegen die Natur“, müsse die Sinnhaftigkeit des Mini-Max-Kriteriums mit seiner impliziten Vorstellung von einer „bad Mrs. NATURE“ jedoch bezweifelt werden, vielmehr sei eine solche „an Aberglauben grenzende Identifizierung der indifferenten Welt mit einem rationalen Gegenspieler ... offenbar eine künstliche Konstruktion“ [1] und „im Falle einer indifferenten Umwelt, deren Zustand sich unabhängig von der Aktion des Entscheidenden realisiert, ... die WALD-Regel (d.h. das Mini-Max-Prinzip; d. Verf.), streng genommen, nicht vertretbar, der in ihm zum Ausdruck kommende Pessimismus unbegründet.“ [2]

Spiele gegen die Natur

präskriptive
versus deskriptive
Entscheidungstheorie

Wenn Sie den Unterabschnitt 1.4.1 aufmerksam gelesen haben, wird es Ihnen nicht schwerfallen, diese drei Argumente richtig einzuordnen und zu erkennen, dass die beiden ersten gar nicht den Gegenstand der **präskriptiv orientierten Entscheidungstheorie** treffen, insoweit also eigentlich irrelevant sind.

---

1 SCHNEEWEISS (1967), S. 24.

2 Ders., S. 23.

Der erste Einwand zielt auf die allgemeine empirische Gültigkeit des Mini-Max-Prinzips, gehört also in den Bereich der **deskriptiven Theorie.** Außerdem schließt der Hinweis, dass eine so vorsichtige Maxime wie das Mini-Max-Prinzip von bestimmten Personen oder in bestimmten Situationen offensichtlich nicht befolgt wird, keineswegs die Möglichkeit aus, dass sich andere Personen in anderen Situationen doch in derartig vorsichtiger Weise verhalten. Nicht jeder ist ein SCHUMPETERscher Pionierunternehmer und manch einer schließt – „safety first“ – mancherlei Versicherungen ab und trägt sein Geld aufs Sparkonto, statt es in Aktien oder sonstigen Wertpapieren anzulegen.

präskriptive versus ethisch-normative Entscheidungstheorie

Auch das zweite Argument trifft die präskriptive Entscheidungstheorie nicht; denn diese will ja gar keine kategorischen Imperative setzen und auch keinem Menschen vorschreiben, sich nach dem Mini-Max-Kriterium zu richten. Hier liegt also eine Verwechslung zwischen **präskriptiver** (oder auch **„praktisch-normativer“**) und ethisch-normativer Entscheidungstheorie vor.

Relevanz behält somit nur das dritte Argument; denn dieses zielt ja letztlich auf die Frage nach der Rationalität. Und hier geben die aus der Anwendung des Mini-Max-Kriteriums möglicherweise resultierenden Konsequenzen in der Tat nach Ansicht vieler Autoren (und auch der unseren) zu berechtigten Zweifeln Anlass. So etwa BORCH (1969), der auf S. 131 schreibt: „Diese Regel ... impliziert, dass die Zeile

a_1: 1, 1, 1, 1

einer Zeile

a_2: 100, 0, 50, 50

vorgezogen wird. Das mag vielen Leuten als unvernünftig erscheinen ...“. In der Tat erscheint es zweifelhaft, ob es sinnvoll ist, gebannt wie das Kaninchen auf die Schlange nur auf das schlechtestmögliche Ergebnis einer Alternative zu starren und alle sonstigen Informationen über andere mögliche Ergebnisse vollständig zu vernachlässigen. Man dürfte zumindest auf den ersten Blick wohl ziemlich allgemeine Zustimmung zu der Forderung erhalten, bei der Ableitung einer Entscheidung sollten sinnvollerweise möglichst **alle vorliegenden Informationen** ausgewertet werden. Genau dagegen wird bei der Anwendung des Mini-Max-Prinzips jedoch verstoßen – und zwar in sehr einseitiger Weise.

Vernachlässigung verfügbarer Information

Bevor wir das Mini-Max-Prinzip jedoch endgültig mit diesem Argument auf den Index der „unvernünftigen Entscheidungsregeln“ setzen, noch folgender Gedanke: Jede zur Ableitung einer Entscheidung notwendige Bewertung von Alternativen, also die Reduzierung ihrer Ergebnisverteilungen auf einen einzigen Präferenzwert, beinhaltet letztlich einen Informationsverlust. So ist es auch stets möglich, dass

Informationsverlust

sich für zwei Alternativen derselbe Präferenzwert ergibt, sie also als gleichwertig erscheinen, obwohl ihre Ergebnisverteilungen nicht identisch sind. Aufgrund der zunächst vorliegenden Informationen erkennbar unterschiedliche Ergebnisverteilungen werden so also durch denselben Präferenzwert repräsentiert – sicherlich ein Informationsverlust.

Die Reduzierung der Informationen über die möglichen Handlungskonsequenzen – sei es durch zusammenfassende „Amalgamation" wie etwa beim LAPLACE-Kriterium, sei es durch selektierende „Ausdünnung" wie etwa beim Mini- oder Maxi-Max-Kriterium, sei es durch eine Kombination beider Verfahren wie etwa beim HURWICZ-Kriterium – ist also in aller Regel eine unumgängliche Voraussetzung, um zu einer eindeutigen Rangordnung der zur Auswahl stehenden Handlungsalternativen zu gelangen.

Mithin kann auch im Hinblick auf das Mini-Max-Kriterium sinnvollerweise nicht kritisiert werden, **dass,** sondern nur **wie** die Reduzierung der primären Informationen vorgenommen wird. Als möglicher Einwand gegen das Mini-Max-Kriterium verbleibt somit zunächst nur die pessimistische Einseitigkeit, mit der die Alternativen beurteilt werden.

Wir wollen die Diskussion hier abbrechen, ohne Ihnen eine Lösung des Problems präsentiert zu haben – auch wenn das dem Schulmeister im Innern des Verfassers gar nicht passt. Aber wie wir im vorigen Unterabschnitt ja schon erörtert haben, geht es in diesem Teil der Entscheidungstheorie nur darum, dem Leser mögliche Konsequenzen der verschiedenen Entscheidungsregeln aufzuzeigen und ihre Qualitätsmerkmale darzustellen, um so sein Problembewusstsein zu schärfen und ihm zugleich eine möglichst umfassende Grundlage für seine letztlich subjektive Urteilsfindung zu liefern.

Übungsaufgabe 3:

Versuchen Sie noch einmal, die drei im Kapitel 1.4.2 vorgetragenen Argumente selbst danach einzuordnen, ob sie sich

– auf eine deskriptive Theorie,
– auf eine ethisch-normative Theorie oder
– auf eine präskriptive Theorie

beziehen!

Falls Sie nach fünfminütigen Lösungsversuchen noch kein Ergebnis erreicht haben, lesen Sie bitte weiter im Text!

1.4.3 Der Axiomen-Katalog MILNORs

Bislang haben wir – am Beispiel des Mini-Max-Prinzips – eine einzelne Entscheidungsregel betrachtet und mehr oder weniger systematisch einzelne Argumente für oder gegen deren Sinnhaftigkeit diskutiert. Diese Methode ließe sich nun auch auf andere Entscheidungsregeln anwenden. Wir könnten so für jede der erörterten Regeln einen Katalog ihrer individuellen Vor- und Nachteile erstellen. Die durchgängige Vergleichbarkeit der einzelnen Entscheidungsregeln würde dadurch jedoch auch nicht sonderlich erleichtert.

MILNOR (1954) hat daher einen etwas anderen Weg eingeschlagen. Er hat einen Katalog von zehn verschiedenen Axiomen aufgestellt, denen eine brauchbare Entscheidungsregel seiner Ansicht nach genügen sollte, und hat anschließend verschiedene Entscheidungsregeln daraufhin überprüft, welche der so festgelegten Eigenschaften bei ihnen erfüllt sind. Zur exemplarischen Verdeutlichung dieses Vorgehens wollen wir uns darauf beschränken, nur vier dieser Axiome darzustellen.

Bei der Auswahl dieser vier Axiome, die wir hier etwas näher erörtern wollen, sind wir vor allem von folgenden Gesichtspunkten ausgegangen:

– Zum einen wollten wir solche Axiome behandeln, von denen wir glauben, dass sie auch ohne tiefsinnige Grübeleien allgemein als recht plausible Forderungen akzeptiert werden.
– Zum zweiten wollten wir solche Axiome aussuchen, die formal einfach dargestellt werden können, deren Einhaltung sich dementsprechend auch ohne Schwierigkeiten prüfen lässt.
– Zum dritten schließlich wollten wir Ihnen für jede der vier zu analysierenden Entscheidungsregeln (Mini-Max; HURWICZ; LAPLACE; SAVAGE-NIEHANS) zumindest ein Axiom präsentieren, das von der betrachteten Entscheidungsregel verletzt wird.

Bei Anwendung dieser drei Kriterien ergibt sich fast zwangsläufig die Auswahl der im Folgenden dargestellten vier Axiome. Falls Sie sich für die übrigen Axiome interessieren, sei auf MILNOR (1954) oder BORCH (1969) verwiesen.

Zur Verdeutlichung der nach diesen Kriterien ausgewählten vier Axiome wollen wir jeweils die in Tab. 9.1 dargestellte Ergebnismatrix[1] betrachten.

1 MILNOR bezieht seinen Anforderungskatalog allerdings nicht auf Ergebniswerte e_{ij} direkt. Er geht vielmehr davon aus, dass den e_{ij} zunächst Nutzenwerte $u_{ij}=u(e_{ij})$ zugeordnet und die verschiedenen Entscheidungsregeln dann auf die so entwickelte Nutzenmatrix (= Entscheidungsmatrix) angewendet werden. Auf die damit verbundenen Implikationen können wir an dieser Stelle leider nicht näher eingehen – es würde den uns zur Verfügung stehenden Rahmen weit sprengen.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1	1	1	2	2
a_2	3	3	2	0
a_3	0	0	2	3
a_4	3	3	1	1

Tab. 9.1: Ergebnismatrix (zur Betrachtung der MILNOR-Axiome)

1. Axiom: Ergebnis-Linearität

(1) **Ergebnis-Linearität:**
Die Präferenzrelation zwischen zwei beliebigen Alternativen a_1 und a_2 soll unverändert bleiben, wenn sämtliche Ergebniswerte $e_{ij}(i=1, 2; j=1, 2, \ldots, n)$ der beiden Alternativen der gleichen beliebigen positiv-linearen Transformation unterzogen werden, d.h., wenn die e_{ij} durch e'_{ij} ersetzt werden, für die gilt:

$$e'_{ij} = \alpha + \beta \cdot e_{ij} \qquad \beta > 0 \ .$$

Nimmt man für unser Beispiel etwa $\alpha = -0{,}2$ und $\beta = 0{,}1$ an, so müsste sich aufgrund der dementsprechend abgeleiteten Ergebnismatrix der e'_{ij}-Werte (Tab. 9.2) genau die gleiche Präferenzstruktur in Bezug auf die vier Alternativen ergeben wie in der Ausgangsdarstellung der Tab. 9.1.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a'_1	–0,1	–0,1	0	0
a'_2	0,1	0,1	0	–0,2
a'_3	–0,2	–0,2	0	0,1
a'_4	0,1	0,1	–0,1	–0,1

Tab. 9.2: Modifizierte Ergebnismatrix (Ergebnis-Linearität)

2. Axiom: Zeilenhinzufügung

(2) **Zeilenhinzufügung:**
Die Präferenzrelation zwischen zwei beliebigen Alternativen a_1 und a_2 soll unverändert bleiben, wenn das bislang betrachtete Aktionsfeld um eine neue Alternative erweitert (= Hinzufügung einer neuen Zeile) oder um eine zunächst in die Betrachtung mit einbezogene Alternative reduziert wird. Die Präferenzrelation zwischen zwei Alternativen a_1 und a_2 soll also unab-

hängig von dem Aussehen des sonstigen Aktionsfeldes ausschließlich durch den individuellen Vergleich von a_1 und a_2 miteinander bestimmt werden.

Nehmen wir für unser Beispiel etwa an, entgegen der ursprünglichen Planung erweise sich a_3 als undurchführbar, so dass nur noch von der in Tab. 9.3 dargestellten reduzierten Ergebnismatrix auszugehen wäre.

	s_1	s_2	s_3	s_4
a_1'	1	1	2	2
a_2'	3	3	2	0
a_4'	3	3	1	1

Tab. 9.3: Modifizierte Ergebnismatrix (Zeilenreduktion)

Das genannte Axiom verlangt also, dass die Präferenzrelationen zwischen den verbleibenden Alternativen a_i' $(i=1, 2, 4)$ mit denen der Ausgangsmatrix übereinstimmen.

3. Axiom: Spaltenlinearität

(3) **Spaltenlinearität:**
Die Präferenzrelation zwischen zwei beliebigen Alternativen a_1 und a_2 soll sich nicht ändern, wenn für einen beliebigen Zustand j* die Ergebniswerte $e_{ij*}(i=1, 2)$ beider Alternativen um den gleichen konstanten Betrag α verändert werden.

Für unser Beispiel sei etwa angenommen, gegenüber der ursprünglichen Planung stelle sich heraus, dass bei Eintreten von Zustand s_4 für alle Alternativen in gleicher Weise ein um 2 besseres Ergebnis zu erwarten sei (also $j^*=4; \alpha=2$).

	s_1	s_2	s_3	s_4'
a_1'	1	1	2	4
a_2'	3	3	2	2
a_3'	0	0	2	5
a_4'	3	3	1	3

Tab. 9.4: Modifizierte Ergebnismatrix (Spaltenlinearität)

Die aufgrund der Ergebnismatrizen gem. Tab. 9.1 und Tab. 9.4 ermittelten Präferenzrelationen zwischen den vier Alternativen müssten diesem Axiom zufolge also übereinstimmen.

4. Axiom: Streichung einer identischen Spalte

(4) **Streichung einer identischen Spalte:**
Die Präferenzrelation zwischen zwei beliebigen Alternativen a_1 und a_2 soll unverändert bleiben, wenn zwei Umweltzustände, für die jede Alternative des Aktionsfeldes je einzeln zu übereinstimmenden Ergebnissen führt, in der modellmäßigen Darstellung zu einem einzigen Umweltzustand zusammengefasst werden (also von zwei identischen Spalten eine gestrichen wird).

	$s_{1/2}$	s_3	s_4
a'_1	1	2	2
a'_2	3	2	0
a'_3	0	2	3
a'_4	3	1	1

Tab. 9.5: Modifizierte Ergebnismatrix (Streichung einer identischen Spalte)

In unserem Beispiel sind die Zustände s_1 und s_2 im Hinblick auf die mit ihnen verbundenen Konsequenzen offenbar identisch (vgl. Tab. 9.1). Werden sie nun, so wie es Tab. 9.5 zeigt, zusammengefasst, so soll das dem hier in Rede stehenden Axiom nach nichts an der Rangfolge der vier betrachteten Alternativen ändern.

Übungsaufgabe 4:

a) Gehen Sie von dem in den Tabellen 9.1 bis 9.5 umschriebenen Beispiel aus und geben Sie jeweils die Rangfolge der relevanten Alternativen für den Fall an, dass das

– Mini-Max-Kriterium,
– HURWICZ-Kriterium (λ=0,3) oder das
– LAPLACE-Kriterium

verwendet wird!

Um Ihnen die Bearbeitung dieser Übungsaufgabe zu erleichtern, haben wir Ihnen hier nochmals die relevanten Daten des Beispiels abgedruckt. Benutzen Sie für Ihre Lösung die nachfolgenden Lösungsschemata.

Lösung:

(0) **Ausgangssituation**

	s_1	s_2	s_3	s_4	min	(λ = 0,3)	LAPLACE
a_1	1	1	2	2			
a_2	3	3	2	0			
a_3	0	0	2	3			
a_4	3	3	1	1			

Präferenzordnungen:

Mini-Max:

HURWICZ (λ=0,3):

LAPLACE:

(1) **Lineare Transformation nach Maßgabe der Funktion $e'_{ij} = -0{,}2 + 0{,}1 \cdot e_{ij}$**

Revidierte Ergebnismatrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	min	(λ=0,3)	LAPLACE
a'_1	–0,1	–0,1	0	0			
a'_2	0,1	0,1	0	–0,2			
a'_3	–0,2	–0,2	0	0,1			
a'_4	0,1	0,1	–0,1	–0,1			

Präferenzordnungen:

Mini-Max:

HURWICZ (λ=0,3):

LAPLACE:

(2) **Streichung der 3. Zeile der Ergebnismatrix der Ausgangssituation**
Revidierte Ergebnismatrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	min	(λ=0,3)	LAPLACE
a'_1	1	1	2	2			
a'_2	3	3	2	0			
a'_4	3	3	1	1			

Präferenzordnungen:

Mini-Max:

HURWICZ (λ=0,3):

LAPLACE:

(3) **Veränderung einer Spalte (Erhöhung der Ergebniswerte aller Alternativen in Zustand s_4 um 2)**
Revidierte Ergebnismatrix:

	s_1	s_2	s_3	s'_4	min	(λ=0,3)	LAPLACE
a'_1	1	1	2	4			
a'_2	3	3	2	2			
a'_3	0	0	2	5			
a'_4	3	3	1	3			

Präferenzordnungen:

Mini-Max:

HURWICZ (λ=0,3):

LAPLACE:

(4) **Streichung einer Spalte (Zusammenfassung der Ergebniswerte der Zustände s_1 und s_2 für alle Alternativen)**
Revidierte Ergebnismatrix:

	$s_{1/2}$	s_3	s_4	min	(λ=0,3)	LAPLACE
a'_1	1	2	2			
a'_2	3	2	0			
a'_3	0	2	3			
a'_4	3	1	1			

Präferenzordnungen:

Mini-Max:

HURWICZ (λ=0,3):

LAPLACE:

b) Erstellen Sie die den Abb. 9.1 bis 9.5 entsprechenden „Bedauerns"-Matrizen und geben Sie jeweils die Rangfolge der Alternativen für den Fall an, dass das SAVAGE-NIEHANS-Kriterium verwendet wird! Benutzen Sie zur Lösung wiederum die nachfolgenden Lösungsschemata.

(0) **Ausgangssituation gemäß (0) aus Aufgabenteil a)**
Bedauerns-Matrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	max
a'_1					
a'_2					
a'_3					
a'_4					

Präferenzordnung:

(1) **Lineare Transformation gemäß (1) aus Aufgabenteil a)**
Bedauerns-Matrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	max
a'_1					
a'_2					
a'_3					
a'_4					

Präferenzordnung:

(2) **Streichung einer Zeile gemäß (2) aus Aufgabenteil a)**
Bedauerns-Matrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	max
a'_1					
a'_2					
a'_4					

Präferenzordnung:

(3) **Veränderung einer Spalte gemäß (3) aus Aufgabenteil a)**
Bedauerns-Matrix:

	s_1	s_2	s_3	s'_4	max
a_1					
a_2					
a_3					
a_4					

Präferenzordnung:

(4) **Streichung einer Spalte gemäß (4) aus Aufgabenteil a)**
Bedauerns-Matrix:

	$s_{1/2}$	s_3	s_4	max
a'_1				
a'_2				
a'_3				
a'_4				

Präferenzordnung:

c) Kommentieren Sie die unter a) und b) gewonnenen Ergebnisse im Hinblick auf die Frage, inwieweit die untersuchten Entscheidungsregeln den vier genannten Axiomen gerecht werden!

Anhand unseres Beispiels wird, wie auch bei Übungsaufgabe 4, deutlich, dass

– die SAVAGE-NIEHANS-Regel Axiom (2) nicht erfüllt,
– die Mini-Max- und die HURWICZ-Regel gegen Axiom (3) verstoßen und
– die LAPLACE-Regel Axiom (4) verletzt.

Nun genügt es zum Nachweis dafür, dass eine Entscheidungsregel mit einem bestimmten Postulat nicht generell vereinbar ist, in der Tat, wenn es gelingt, ein entsprechendes Beispiel zu finden. Umgekehrt kann aber, selbst wenn eine Regel ein bestimmtes Postulat in einer beliebig großen Anzahl von Beispielen erfüllt, daraus immer noch nicht gefolgert werden, dass grundsätzliche Vereinbarkeit vorliegt. Denn es ist ja immer noch möglich, dass ein weiteres Beispiel gefunden wird, in dem das betrachtete Axiom doch verletzt wird. Um die generelle Vereinbarkeit einer Entscheidungsregel mit einem bestimmten Axiom zu demonstrieren, muss also allgemein nachgewiesen werden, dass es unmöglich ist, ein Beispiel zu finden, in dem keine Verträglichkeit vorliegt.

Im vorliegenden Fall können derartige Beweise durchweg geführt werden. In allen Fällen, die sich in unserem Beispiel aus Übungsaufgabe 4 als verträglich gezeigt haben, kann man stets zeigen, dass die aus den verschiedenen Umformungen der Ergebnismatrix resultierenden Präferenzwerte φ' und die ursprünglichen Präferenzwerte φ

– entweder völlig identisch sind
– oder aber auf jeden Fall durch positiv-lineare Transformation ineinander überführt werden können.

Zwischen modifizierten und ursprünglichen Präferenzwerten gilt also in den genannten Fällen stets die Relation

(6) $\varphi' = \alpha + \beta \cdot \varphi \quad \text{mit} \quad \beta > 0,$

wobei α eine beliebige und β eine beliebige positive Konstante bezeichnet. Das aber bedeutet, dass die φ'- und die φ-Werte stets zu den gleichen Präferenzrelationen führen, also als äquivalent angesehen werden können.

Übungsaufgabe 5:
Überlegen Sie selbst zunächst einmal, warum die angegebene Relation (6) ($\varphi'=\alpha+\beta\cdot\varphi$ mit $\beta>0$) der Präferenzwerte φ' und φ eine hinreichende Bedingung dafür ist, dass die auf der Basis der φ'- und der φ-Werte abgeleiteten Präferenzrelationen übereinstimmen. Falls Ihnen auch nach intensivem Nachdenken nichts einfällt, schauen Sie – spätestens nach 10 Minuten – in der Musterlösung nach.

Wir wollen die detaillierte Betrachtung des Axiomen-Kataloges MILNORs an dieser Stelle abbrechen und uns noch einmal das Grundsätzliche dieses Ansatzes vergegenwärtigen. Im Gegensatz zu der nicht sonderlich systematischen Einzelbeurteilung der verschiedenen Entscheidungsregeln, wie wir sie ansatzweise in den Abschnitten 1.2, 1.3 und 1.4.2 kennengelernt haben, ist axiomatisches Vorgehen, wie wir es am Beispiel des MILNOR-Ansatzes verdeutlicht haben, durch folgende Merkmale gekennzeichnet:

– Zunächst wird ein Katalog verschiedener Anforderungen (Axiome) formuliert, denen eine Entscheidungsregel genügen sollte. Solche a priori postulierten Anforderungen können natürlich nicht dem Anspruch auf objektive Gültigkeit gerecht werden; sie können immer nur nach subjektivem Ermessen als mehr oder weniger plausibel eingeschätzt werden. Allerdings glauben wir – in Übereinstimmung mit einer Vielzahl von anderen Autoren –, dass die Axiome MILNORs weithin als recht vernünftig eingeschätzt werden.[1)]

1 Ob dies auch Ihrer individuellen Einschätzung entspricht, wissen wir natürlich nicht; wir werden gleich jedoch noch einmal darauf zurückkommen.

– Im nächsten Schritt werden verschiedene Entscheidungsregeln dann daraufhin überprüft, welchen der festgelegten Axiome sie entsprechen.

Eine definitive Lösung der Frage nach der „richtigen“ Entscheidungsregel ist damit allerdings selbst dann noch nicht erreicht, wenn man den vorgelegten Axiomenkatalog akzeptiert. Im Falle des MILNOR-Ansatzes etwa gibt es nämlich keine Entscheidungsregel, die allen zehn Axiomen zugleich gerecht wird. Damit aber stellt sich die Frage, wie die Verletzungen verschiedener Axiome, durch die die einzelnen Entscheidungsregeln gekennzeichnet sind, gegeneinander abzuwägen sind – eine Frage, die letztlich auch wiederum nur nach subjektivem Ermessen beantwortet werden kann.

Sie sollten auf diese Einsicht in die Grenzen wissenschaftlicher Erkenntnis nicht mit Resignation reagieren. Nehmen Sie’s lieber positiv als Beleg dafür, dass die auf subjektives Ermessen und individuelle Verantwortung gegründete Entscheidung des einzelnen letztlich auch durch noch so scharfsinnige entscheidungstheoretische Ansätze nicht ersetzt werden kann.

2 Spieltheoretische Ansätze

2.1 Probleme und Grundbegriffe

2.1.1 Das Gefangenen-Dilemma und Oberst BLOTTO

Beispiel 1: Das Gefangenen-Dilemma

ESTRAGON und VLADIMIR haben, während sie auf GODOT warteten, „die kahle Sängerin" überfallen und sitzen deshalb in Untersuchungshaft – und zwar in getrennten Zellen. Sie stehen jeweils kurz vor einem Einzelverhör durch den Staatsanwalt. Beide wissen:

– Halten beide „dicht", so kann ihnen der Staatsanwalt nichts nachweisen; sie kommen dann beide mit einer dreimonatigen Gefängnisstrafe wegen illegalen Waffenbesitzes davon.

– Gestehen beide, so müssen sie mit einer Haftstrafe von drei Jahren rechnen.

– Gesteht schließlich nur einer und belastet dabei zugleich seinen nicht geständigen Komplizen, so kann er als „Zeuge der Anklage" sogar mit Haftverschonung rechnen, während seinem Mittäter eine Haftstrafe von fünf Jahren droht.

Wie soll sich ESTRAGON verhalten? Leugnen – auf die Gefahr hin, dass VLADIMIR „singt" und ESTRAGON fünf Jahre hinter Gitter gehen muss? Gestehen – auf die Gefahr hin, dass VLADIMIR ebenfalls gesteht und beide drei Jahre absitzen müssen?

Überlegen Sie selbst noch ein bisschen weiter – oder merken Sie sich vor, bei Gelegenheit einmal BECKETTs „Warten auf GODOT" und IONESCOS „Kahle Sängerin" zu lesen. Beide Theaterstücke haben allerdings mit unserem Gefangenen-Dilemma nichts weiter zu tun. Dieses Problem wird vielmehr – soweit erkennbar ohne genaue Quellenangabe – auf A.W. TUCKER zurückgeführt. Es stellt eines der bekanntesten spieltheoretischen Paradigmen dar.[1)]

Letzteres gilt auch für die Figur des Oberst BLOTTO, die von J.W. TUKEY in die spieltheoretische Diskussion eingeführt wurde[2)] und seitdem Hauptfigur vieler einschlägiger Beispiele aus dem militärischen Bereich geworden ist.

1 Vgl. z.B. LUCE/RAIFFA (1957), S. 94 f.

2 Vgl. MCDONALD/TUKEY (1965).

Zu den Problemen von Oberst BLOTTO folgendes Beispiel:[1)]

Beispiel 2: Oberst BLOTTO

Oberst BLOTTO hat mit drei Kampfverbänden an der Gebirgsfront zwei Gebirgspässe P_I und P_{II} zu verteidigen. Dem angreifenden Feind stehen zwei Verbände zur Verfügung. Bei den bevorstehenden Gefechten an den beiden Pässen wird jeweils solange gekämpft, bis eine der beiden Parteien die ihr gegenüberstehenden feindlichen Verbände völlig besiegt hat.

Bei Pass P_I ist davon auszugehen, dass das Verlustverhältnis zwischen Angreifern und Verteidigern gerade 1:1 ist. D.h., treffen etwa zwei Einheiten von Oberst BLOTTO auf eine feindliche Einheit, so wird BLOTTO zur völligen Besiegung des Gegners selbst Verluste in Höhe einer Einheit hinnehmen müssen (und umgekehrt). Stehen sich auf beiden Seiten Einheiten in gleicher Anzahl gegenüber, so werden sie sich wechselseitig völlig aufreiben.

Bei Pass P_{II} beträgt das Verlustverhältnis demgegenüber 1:2 zugunsten BLOTTOS. D.h., unter Verlust einer halben eigenen Einheit kann er eine ganze Einheit des Gegners besiegen; stehen hingegen zwei gegnerische Einheiten seiner eigenen gegenüber, so reiben sie sich wechselseitig völlig auf.

Oberst BLOTTO strebt als Ziel seiner Operationen einen möglichst hohen „Nettogewinn“ an, wobei er als Nettogewinn die Differenz zwischen den vernichteten gegnerischen Einheiten und den verlorenen eigenen Einheiten wertet. Außerdem wertet er den Fall, dass nach dem Abschluss der Gefechte ein Pass von gegnerischen Truppen besetzt ist, wie den Verlust von zwei eigenen Einheiten.

Wie soll BLOTTO seine drei Verbände auf die beiden Pässe verteilen, wenn er im Voraus nicht weiß, in welcher Stärke der Gegner die beiden Pässe angreifen wird?

Auf verschiedene Lösungsansätze der beiden angeführten Beispiele werden wir später noch etwas näher eingehen. Zunächst wollen wir die Art der dargestellten Entscheidungsprobleme jedoch näher betrachten. Offenbar ist beiden Fällen folgendes gemeinsam:

– Sowohl ESTRAGON als auch Oberst BLOTTO müssen sich zwischen mehreren einander ausschließenden Alternativen entscheiden. Es handelt sich also um *Entscheidungsprobleme*.

– Welche Konsequenz sich aus der Entscheidung für eine bestimmte Alternative ergibt, kann nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden; vielmehr sind alternativ verschiedene Ergebnisse möglich. Es handelt sich also um Entscheidungen bei *Unsicherheit*.

1 Zu dieser speziellen Form eines BLOTTO-Beispiels vgl. VOROBJOFF (1972), S. 33 f.

– Dabei wird das Ergebnis, das bei Wahl einer bestimmten Alternative tatsächlich eintritt, nicht durch sonstige Zufallsereignisse bestimmt, sondern durch die Aktionen eines (rationalen) Gegenspielers. Also handelt es sich um eine **Spielsituation,** wie Sie sie einleitend in Kurseinheit 3 im Glasperlenspiel des INDERS ja schon kennengelernt haben.

Gegenstand der Spieltheorie: Konfliktsituationen

Die Bezeichnung *Spiel*situation und dementsprechend auch *Spiel*theorie dürfte darauf zurückzuführen sein, dass sich bestimmte Formen von Gesellschaftsspielen sehr gut zur beispielhaften Verdeutlichung der Situation von zwei oder mehreren Konkurrenten heranziehen lassen. Die Spieltheorie beschäftigt sich aber insgesamt keineswegs nur mit Gesellschaftsspielen, sondern sehr viel allgemeiner mit einer Vielzahl von **Konfliktsituationen,** d.h. von Situationen, in denen sich die Aktionen von verschiedenen Entscheidungssubjekten in ihren Ergebnissen wechselseitig beeinflussen, und zwar zumeist negativ.

Die Analyse dieser speziellen Kategorie von Entscheidungsproblemen ist Gegenstand einer großen Anzahl einschlägiger Monografien und Aufsätze, in denen – vor allem auf der bahnbrechenden Arbeit von V. NEUMANN / MORGENSTERN (1944) aufbauend – ein äußerst weitreichendes und kompliziertes Theoriengebäude errichtet worden ist. In der Hauptorientierung sind diese Ansätze allerdings vorwiegend auf eine Art Gleichgewichtsanalyse ausgerichtet, d.h. auf die Ermittlung derjenigen Voraussetzungen, unter denen sich in unterschiedlich strukturierten Spielsituationen und bei ganz bestimmten Annahmen über das Verhalten der Spieler Ergebnisse mit ganz speziellen Eigenschaften einstellen. Der uns in diesem Kurs vor allem interessierende *präskriptive Aspekt,* dem einzelnen Spieler Hinweise für die optimale Entscheidung zu liefern, tritt demgegenüber häufig etwas in den Hintergrund.

Allein schon die Fülle des Schrifttums und außerdem auch die oftmals recht hohen Anforderungen an formale Vorkenntnisse machen es ganz und gar unmöglich, im Rahmen dieses Grundkurses einen auch nur annähernd umfassenden Überblick über diesen Themenkomplex zu vermitteln. Wir werden uns daher von vornherein auf die – zumindest beispielhafte – Verdeutlichung einiger wichtiger Grundbegriffe und -ansätze beschränken.

2.1.2 Charakteristische Elemente von Spielsituationen

Konfliktsituationen, wie sie von der Spieltheorie untersucht werden, können im Einzelnen durch folgende Elemente näher charakterisiert werden:

1. Die **Spieler,** d.h. die Personen, deren Handlungen für die Betrachtung von Bedeutung sind, die also an dem Spiel teilnehmen.

2. Die **Spielregeln,** d.h. die Gesamtheit der Bedingungen, die die Handlungsmöglichkeiten der Spieler und die damit verknüpften Konsequenzen festlegen. Dabei sind vor allem folgende drei Teilelemente zu unterscheiden:

2.1 Die **Strategien** der Spieler, d.h. die ihnen zur Auswahl stehenden Handlungsmöglichkeiten. Also etwa die vier Möglichkeiten des INDERS, im Glasperlenspiel auf ein Feld zu setzen, oder die Alternativen ESTRAGONS, zu leugnen oder zu gestehen. Sie sehen an diesem Beispiel schon, dass die Bezeichnung „Strategie“ in diesem Zusammenhang in einem weiteren Sinn verwendet wird als das im allgemeinen Sprachgebrauch der Fall ist. Strategien im Sinne der Spieltheorie können eben auch ganz einfache Handlungsweisen sein, genauso gut aber auch komplexe Aktionspläne, die man auch in der Alltagssprache als Strategien bezeichnen würde.

2.2 Die **Kooperationsform** der Spieler, d.h. die Frage, ob alle Spieler gegeneinander spielen oder ob sie sich – zumindest einzelne unter ihnen – untereinander absprechen können.

2.3 Die **Spielergebnisse,** d.h. die Konsequenzen, die sich für die einzelnen Spieler aus der Wahl ihrer Strategien und ggf. nach Erfüllung bestimmter Absprachen ergeben.

Typen von Spielsituationen

Alle vier der aufgezählten Grundelemente liefern nun zugleich verschiedene Ansatzpunkte zur Klassifikation unterschiedlicher Spieltypen.

(1) Nach der *Zahl der Spieler* unterscheidet man **Zwei-Personen-Spiele** und **n-Personen-Spiele,** wobei n eine beliebige ganze Zahl, die größer als 2 ist, bezeichnet.

(2.1) Nach der *Zahl der Strategien* unterscheidet man endliche und unendliche Spiele. **Endliche Spiele** sind dadurch gekennzeichnet, dass allen Spielern nur eine endliche Anzahl von Strategien zur Auswahl steht. Bei **unendlichen** Spielen verfügt demgegenüber mindestens ein Spieler – zumindest theoretisch – über eine unendliche Anzahl von Strategien. Dies ist beispielsweise immer dann der Fall, wenn ein Spieler über einzelne Aktionsparameter verfügt, die er kontinuierlich variieren kann.

Eine weitere Unterscheidung knüpft sich an die *Auswahl der Strategien* durch Spieler. Legen sich die Spieler definitiv auf eine der ihnen zur Auswahl stehenden Strategien fest, so spricht man von dem Einsatz **reiner Strategien.** Daneben wird gelegentlich die Möglichkeit betrachtet, dass ein Spieler seine Strategie durch einen Zufallsmechanismus festlegt – also ESTRAGON etwa eine Münze wirft, statt selbst definitiv zu entscheiden. Der Spieler entscheidet in einem solchen Fall also nicht mehr definitiv über die Wahl seiner Strategie selbst, sondern mit der Festlegung des Zufallsmechanismus nur noch über die Wahrscheinlichkeiten für die Auswahl der einzelnen Strategien. Bei einem solchen Verhalten spricht man allgemein von **gemischten Strategien,** die jedoch in diesem Kurs nicht behandelt werden sollen.

reine Strategien

Strategienwahl durch Zufallsmechanismen: gemischte Strategien

(2.2) Nach der *Art der Kooperation* unterscheidet man häufig **kooperative Spiele** und **nicht kooperative Spiele.** Die angesprochene Unterscheidung dürfte klar sein: Bei nicht kooperativen Spielen finden keinerlei Absprachen oder Vereinbarungen zwischen den Spielern statt, wohingegen bei kooperativen Spielen die unterschiedlichsten Möglichkeiten zu Übereinkünften, Koalitionen, Bestechungen oder Kompensationsleistungen bestehen.

(2.3) Nach den bei verschiedenen Strategienkombinationen auftretenden *Ergebnissummen* schließlich unterscheidet man zwischen **Spielen mit variabler Summe** und **Konstant-Summen-Spielen.** Im ersten Fall ergeben sich je nach der betrachteten Strategienkombination unterschiedliche Werte für die Summe der Ergebnisse der n Spieler. Bei Konstant-Summen-Spielen demgegenüber addieren sich die Ergebnisse der n Spieler für jede Strategienkombination zu dem gleichen Betrag. Diese Situation entspricht dem berühmten Kuchen, der nur genau einmal verteilt werden kann: wie auch immer die Verteilung der Kuchenstücke im Einzelnen aussieht – die Summe des insgesamt Verteilten entspricht genau dem ursprünglichen Kuchen. Einen wichtigen Spezialfall der Konstant-Summen-Spiele stellen die **Nullsummen-Spiele** dar, bei denen sich die Einzelergebnisse eben stets genau zu null addieren: Was ein Spieler oder eine Spielergruppe gewinnt, verlieren die anderen.

Konstant-Summen-Spiele

Nullsummen-Spiele

Im folgenden wollen wir uns nun zunächst mit einigen Eigenschaften endlicher Zwei-Personen-Spiele beschäftigen (Abschnitte 2.1.3 bis 2.3.2.2) und anschließend im Abschnitt 2.4 mit einigen kurzen Anmerkungen zum allgemeinen n-Personen-Spiel diesen Überblick über die Grundelemente spieltheoretischer Ansätze abschließen.

2.1.3 Darstellungsformen endlicher Zwei-Personen-Spiele

2.1.3.1 Spiele in extensiver Form

Wir wollen uns in diesem einleitenden Kapitel zunächst mit der Frage beschäftigen, auf welche Weise Zwei-Personen-Spiele mit jeweils einer endlichen Anzahl von Strategien dargestellt werden können. Zur beispielhaften Verdeutlichung verschiedener Darstellungsformen seien folgende beiden einfachen Glasperlenspiele betrachtet:

> **Beispiel 3: Glasperlenspiel bei vollkommener Information**
>
> Zwei Spieler A und B legen abwechselnd jeweils eine oder zwei Glasperlen in eine Schale, wobei A den ersten Zug macht. Sobald vier oder mehr Perlen in der Schale liegen, endet das Spiel und es wird abgerechnet, und zwar nach folgendem Modus:
>
> – Liegen am Ende vier Perlen in der Schale, so erhält B einen Gewinn von 4 GE, während A zunächst nichts erhält.
>
> – Liegen am Ende hingegen fünf Perlen in der Schale, so erhält A einen Gewinn von 5 GE und B geht insoweit leer aus.
>
> – Außerdem erhält der Spieler, der die letzte Perle in die Schale gelegt hat, auf jeden Fall zusätzlich so viele GE wie das Spiel insgesamt Züge gehabt hat.

Spielbaum

Zur Verdeutlichung eines Spieles bedient man sich häufig einer Baumdarstellung, wie sie im Anhang in Abb. 1 dargestellt ist (dabei wollen wir die fett gedruckten Markierungen an den einzelnen „Ästen“ zunächst außer Acht lassen!).

Anhang 1

– Die Knoten verdeutlichen jeweils Entscheidungssituationen für einen der Spieler; dabei markieren in Abb. 1 die runden (eckigen) Knoten Situationen, in denen A (B) am Zuge ist, also Perlen in die Schale legen muss.

– Die Zahlen innerhalb der Knoten bezeichnen den jeweiligen Zustand des Spiels, hier also die Anzahl der bereits in der Schale befindlichen Perlen.

– Die von den Knoten ausgehenden Kanten verdeutlichen jeweils die alternativen Handlungsmöglichkeiten des am Zug befindlichen Spielers.

– Die Zahlen in den Endknoten schließlich geben den jeweiligen Endzustand des Spiels an, hier also die Zahl der am Ende in der Schale befindlichen Perlen.

– Weiterhin erkennt man, dass eckige Endknoten solche Spielausgänge markieren, in denen A den letzten Zug getan hat, runde Endknoten entsprechend solche Ausgänge, in denen B zuletzt gezogen hat.

– Die Gewinne, die sich – je nachdem, welcher Endzustand erreicht wird – nach den oben angegebenen Regeln für die beiden Spieler ergeben, sind unter den jeweiligen Endknoten in Klammern vermerkt. Dabei bezeichnet die erste Zahl den Gewinn von A, die zweite den von B.

Dieser Spielbaum vermittelt also in allen Einzelheiten einen Überblick über sämtliche Ablauf- und Ergebnismöglichkeiten dieses Glasperlenspiels. Man bezeichnet diese Darstellungsweise daher auch als die **extensive Form** des betrachteten Spiels.

Übungsaufgabe 6:

Erstellen Sie den Spielbaum für folgende Variante des Beispiels 3:

- Die Spieler können jeweils ein, zwei oder drei Perlen setzen.
- Das Spiel endet, sobald sich nach einem Zug drei oder mehr Perlen in der Schale befinden.
- Ergibt sich als Endzustand ein Bestand von drei Perlen, erhält jeder Spieler 1 GE.
- Die übrigen Bedingungen (Zahlungen bei Endbeständen von vier oder fünf Perlen; Sonderzahlung an den Spieler, der zuletzt gezogen hat) sind wie im Beispiel 3 genannt.

Das zuletzt betrachtete Beispiel weist die Besonderheit auf, dass beide Spieler jederzeit voll über den jeweils erreichten Spielzustand informiert sind und sich bei ihren folgenden Zügen daran orientieren können. Man bezeichnet Spiele nach Art dieses Beispiels daher auch als **Spiele mit vollkommener Information.** Um Missverständnissen vorzubeugen, sei darauf hingewiesen, dass sich Vollkommenheit der Information immer nur auf den jeweils zurückliegenden Teil des Spiels bezieht, nicht jedoch auf die noch anstehenden Züge. Vollkommene Information in diesem Sinne bedeutet also nicht etwa, dass ein Spieler von Anfang an weiß, welche Strategie sein Spielpartner insgesamt verfolgt; es bedeutet nur, dass jeder Spieler jederzeit über die bisherige Zugfolge seines Spielpartners informiert ist.

Dass auch diese Voraussetzung keineswegs zwingend erfüllt zu sein braucht, zeigt die im folgenden Beispiel beschriebene Variante unseres Glasperlenspiels.

Beispiel 4: Glasperlenspiel bei unvollkommener Information

Die Rahmenbedingungen seien wie bei Beispiel 3, jedoch mit folgenden Modifikationen:

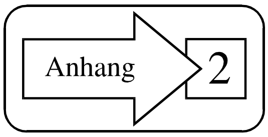
– Spieler A legt, wenn er am Zuge ist, seine Glasperlen jeweils verdeckt in die Schale. Anschließend muss Spieler B die von ihm gewählte Zahl der Perlen setzen, ohne dass er weiß, wie viele Perlen A zuvor gesetzt hat.

– Erst wenn beide Spieler gesetzt haben, wird die Schale abgedeckt und beide Spieler können sich über den dann erreichten Spielzustand informieren.

– Sofern die Anzahl von vier Perlen noch nicht erreicht ist, müssen A und B wiederum verdeckt setzen usw.

– Das Spiel endet wiederum, sobald beim Aufdecken der Schale vier oder mehr Perlen in der Schale liegen. Dabei gilt als Abrechnungsregel jetzt, dass A von B so viele GE erhält, wie sich Perlen in der Schale befinden, sofern sich eine gerade Anzahl von Perlen ergibt. Befindet sich hingegen eine ungerade Zahl von Perlen in der Schale, hat A einen entsprechenden GE-Betrag zu zahlen.

Spielbaum bei unvollkommener Information



Es handelt sich für B also um ein Spiel mit **unvollkommener Information.** Auch dieses Spiel kann allerdings durch einen Spielbaum verdeutlicht werden, so wie er im Anhang in Abb. 2 dargestellt ist. Die Interpretation dieser Darstellung ist ganz analog zu der des Spielbaums aus Abb. 1 im Anhang vorzunehmen, allerdings unter Beachtung folgendes grundlegenden Unterschieds: Wenn Spieler B am Zuge ist, ist er über den neuesten Zustand des Spiels nicht informiert, d.h., er kennt die Anzahl der in der Schale befindlichen Perlen nicht genau. Völlige Ungewissheit herrscht allerdings auch nicht, da B ja zum einen den Spielzustand *vor* dem zwischenzeitlich erfolgten Zug von A kennt, zum anderen weiß, innerhalb welcher Grenzen sich dieser Zustand inzwischen durch den Zug von A verändert haben kann – in unserem Beispiel also mindestens um eine, höchstens um zwei Perlen. In Abb. 2 sind daher jeweils die Mengen möglicher Spielzustände, die in einer bestimmten Situation, in der B am Zuge ist, herrschen können, eingerahmt. Die Gesamtheit der Spielzustände, die innerhalb eines solchen Rahmens liegen, bezeichnet man häufig auch als die in der betrachteten Spielsituation gegebene **Informationsmenge** des jeweiligen Spielers.

Die dargestellte Technik erlaubt es auch, solche Spiele, bei denen jeder Spieler nur genau einen einzigen Zug zu tun hat (und dabei den Zug seines Gegners natürlich nicht kennt), in Form eines – allerdings recht kurzen – Baumes darzustellen.

Übungsaufgabe 7:

Betrachten Sie noch einmal das Glasperlenspiel des INDERS mit dem MAGISTER LUDI aus dem Eingangskapitel der Kurseinheit 3. Angenommen, der INDER müsste zunächst – verdeckt natürlich – auf eines der Felder setzen, anschließend würde der MAGISTER LUDI – ohne Kenntnis des gesetzten Feldes – die Gewinnzahl bestimmen. Stellen Sie dieses Spiel in Form eines Spielbaumes einschließlich der Einrahmung von Informationsmengen dar!

2.1.3.2 Spiele in Normalform: Matrixdarstellung

Aus den beiden Baumdarstellungen der Beispiele 3 und 4 wird zugleich ein weiterer Unterschied zwischen den beiden zuletzt erörterten Glasperlenspielen und etwa dem eingangs behandelten Glasperlenspiel des INDERS oder auch dem Gefangenen-Dilemma deutlich: In den Spielen der Beispiele 3 und 4 werden den Spielern jeweils mehrere aufeinander folgende Teilentscheidungen abverlangt.

Die bei einer solchen Teilentscheidung jeweils zur Auswahl stehenden Zugmöglichkeiten stellen nun aber noch keine Strategie im Sinne der spieltheoretischen Terminologie dar.

x **Definition: Strategie**

Als Strategie bezeichnet man vielmehr einen umfassenden Aktionsplan, der für jede Entscheidungssituation, in die der Spieler im Zuge eines Spiels möglicherweise geraten kann, festlegt, welche Teilentscheidung in dieser Situation getroffen werden soll.

Anhang 1

Fortsetzung von Beispiel 3: Strategien

Im Beispiel 3 etwa kommt A einmal beim Zustand (0) zum Zuge; außerdem kann es nötig werden, dass er bei Zustand (2) oder Zustand (3) noch einmal zieht. Da A bei jedem Zug die beiden Möglichkeiten hat, entweder eine oder zwei Perlen zu setzen, bestehen für ihn offenbar die in der folgenden Tabelle verdeutlichten sechs Strategien $a_i (i = 1, 2, \ldots, 6)$. Die Zahlen im Inneren dieser Tabelle geben jeweils die Anzahl der je nach Spielzustand zu setzenden Perlen an:

Strategien	Spielzustände (0)	(2)	(3)
a_1	1	1	1
a_2	1	1	2
a_3	1	2	1
a_4	1	2	2
a_5	2	–	1
a_6	2	–	2

a_3 etwa sieht folgendes Reaktionsmuster vor:

- Als ersten Zug eine Perle setzen.
- Ergibt sich nach dem Gegenzug von B der Spielzustand (2), so werden im nächsten Zug zwei Perlen gesetzt.
- Ergibt sich nach dem Gegenzug von B hingegen der Spielzustand (3), so wird eine Perle gesetzt.

Die übrigen Strategien sind entsprechend zu interpretieren. Dabei ist im Hinblick auf a_5 und a_6 zu beachten, dass sich, wenn A sofort mit zwei Perlen eröffnet, nach dem Gegenzug von B nur noch die Spielzustände (3) oder (4) ergeben können. Da das Spiel beim Erreichen des Zustandes (4) beendet ist, muss A für die Strategien a_5 und a_6 also nur noch seine Reaktionsweise auf den Zustand (3) festlegen.

In analoger Weise sind auch die Strategien $b_h (h = 1, 2, \ldots, 6)$ von B zu definieren. Die folgende Tabelle gibt einen entsprechenden Überblick.

Strategien	Spielzustände (1)	(2)	(3)
b_1	1	1	1
b_2	1	1	2
b_3	1	2	1
b_4	1	2	2
b_5	2	1	–
b_6	2	2	–

In Abb. 1 im Anhang sind die Züge, die den verschiedenen Strategien nach für alternative Spielzustände vorgesehen sind, jeweils durch die Angabe der entsprechenden Strategie neben den einzelnen Kanten angegeben. Legen nun beide Spieler ihre Strategie fest, so werden dadurch ein eindeutiger Spielablauf und damit zugleich auch das Spielergebnis bestimmt.

Wählen A und B etwa die Strategien a_2 und b_4, so ist damit folgender Spielverlauf bestimmt (vgl. Abb. 1 im Anhang sowie Tab. 10 und 11):

Anhang 1

- A setzt zunächst eine Perle.
- In dem so entstandenen Spielzustand (1) setzt B der gewählten Strategie entsprechend ebenfalls eine Perle.
- Dies führt zu Zustand (2), in dem A erneut eine Perle setzt.

– In dem so entstandenen Zustand (3) setzt B dann zwei Perlen und beendet damit zugleich das Spiel mit dem Ergebnis 5/4, d.h. Gewinnen von 5 GE für A und 4 GE für B.

Übungsaufgabe 8:

Gehen Sie von Abb. 2 im Anhang aus und verdeutlichen Sie analog zu den Tabellen, die in der Fortsetzung des Beispiels 3 enthalten sind (vgl. S. 38 f.), die Strategien, die den Spielern A und B im Spiel des Beispiels 4 zur Auswahl stehen. (Beachten Sie dabei, dass die Strategien von Spieler B nicht im Hinblick auf eindeutig bekannte Spielzustände zu definieren sind, sondern im Hinblick auf die alternativ möglichen Informationsmengen, von denen B bei seinen Zügen je nach Spielentwicklung auszugehen hat!)

Strategien	Spielzustände		
a_1			
a_2			
a_3			
a_4			
a_5			
a_6			

Strategien	Informationsmengen		
b_1			
b_2			
b_3			
b_4			
b_5			
b_6			

Spielmatrix

Diese Definition des Strategiebegriffs ermöglicht es nun, endliche Zwei-Personen-Spiele, ähnlich wie Sie es aus der Darstellung von Ungewissheits- oder Risikosituationen bereits kennen, in Form einer Matrix darzustellen. Eine solche **Spielmatrix** wird in Tab. 10 exemplarisch für unser Beispiel 3 verdeutlicht. Dabei bezeichnet die erste Zahl jeweils den Gewinn von A, die zweite den von B.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	0/8	5/4	0/8	5/4	3/4	3/4
a_2	0/8	5/4	0/8	5/4	8/0	8/0
a_3	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4	3/4
a_4	3/4	3/4	3/4	3/4	8/0	8/0
a_5	3/4	3/4	0/6	0/6	3/4	0/6
a_6	8/0	8/0	0/6	0/6	8/0	0/6

Tab. 10: Beispiel für eine Spielmatrix

Darstellung in der Normalform

Wird ein Spiel allgemein nicht mehr durch einen Baum dargestellt, sondern zusammenfassender nur noch durch die Auflistung der Strategien und die Angabe der damit verbundenen Ergebnisse, so spricht man von einer **Darstellung in der Normalform.** In dem hier behandelten Fall endlicher Zwei-Personen-Spiele bietet sich zudem die soeben dargestellte Matrixschreibweise als besonders übersichtliche Darstellungsform an. Man bezeichnet in Normalform dargestellte Zwei-Personen-Spiele deshalb häufig auch als **Matrixspiele.** Bezeichnet man allgemein die beiden Teilnehmer eines Zwei-Personen-Spiels mit A und B, die ihnen zur Auswahl stehenden Strategien mit $a_i (i = 1, 2, \ldots, \overline{m})$ und $b_h (h = 1, 2, \ldots, \overline{h})$ sowie die bei alternativen Strategienkombinationen erzielbaren Ergebnisse mit e_{ih} und f_{ih}, so kann ein Zwei-Personen-Spiel in der Normalform allgemein stets durch eine Matrix folgenden Typs dargestellt werden:

Matrixspiele

	b_1	b_2	…	$b_{\overline{h}}$
a_1	e_{11}/f_{11}	e_{12}/f_{12}	…	$e_{1\overline{h}}/f_{1\overline{h}}$
a_2	e_{21}/f_{21}	e_{22}/f_{22}	…	$e_{2\overline{h}}/f_{2\overline{h}}$
A	A	A	A	A
$a_{\overline{m}}$	$e_{\overline{m}1}/f_{\overline{m}1}$	$e_{\overline{m}2}/f_{\overline{m}2}$	…	$e_{\overline{m}\overline{h}}/f_{\overline{m}\overline{h}}$

Tab. 11: Spielmatrix in der Normalform

Spielmatrix für Nullsummen-Spiele

Im Fall von Nullsummen-Spielen kann die Matrixschreibweise nun noch weiter dadurch vereinfacht werden, dass man in den einzelnen Feldern nur noch die Gewinne oder die Verluste des Spielers A aufführt. Da die Summe der Gewinne und Verluste von A und B stets null beträgt, geben diese Größen somit zugleich auch die Verluste (positives Vorzeichen) und Gewinne (negatives Vorzeichen) von B an.

Für unser Beispiel 4 etwa ergibt sich demnach folgende Matrix, wobei die Strategien entsprechend der Lösung zu Übungsaufgabe 8 definiert sind.

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6
a_1	4	4	–5	–5	–5	6
a_2	4	4	–5	–5	6	–7
a_3	–5	–5	6	6	–5	6
a_4	–5	–5	6	6	6	–7
a_5	–5	6	–5	6	4	4
a_6	6	–7	6	–7	4	4

Tab. 12: Beispiel für eine Spielmatrix bei Nullsummen-Spielen

Ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel kann formal also durch die Relation

(7) $e_{ih} = -f_{ih}$

gekennzeichnet werden. Die allgemeine Matrixdarstellung nach Tab. 11 vereinfacht sich demnach zu der in Tab. 13 dargestellten Matrix.

	b_1	b_2	…	$b_{\overline{h}}$
a_1	e_{11}	e_{12}	…	$e_{1\overline{h}}$
a_2	e_{21}	e_{22}	…	$e_{2\overline{h}}$
A	A	A	A	A
$a_{\overline{m}}$	$e_{\overline{m}1}$	$e_{\overline{m}2}$	…	$e_{\overline{m}\overline{h}}$

Tab. 13: Allgemeine Matrixdarstellung bei Nullsummenspielen

Dabei stellt diese Matrix für A eine Gewinn-, für B eine Verlustmatrix dar.

Mit einigen Besonderheiten der in dieser besonders einfachen Weise darstellbaren Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele werden wir uns im folgenden Abschnitt etwas näher beschäftigen.

2.2 Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele mit Sattelpunkt

2.2.1 Dominante Strategien und Lösungen

Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele sind durch extreme **Antinomie** zwischen den beiden Spielern gekennzeichnet: genau in dem Ausmaß, in dem es einem Spieler gelingt, für sich ein besseres Ergebnis zu erzielen, verschlechtert sich die Lage seines Gegenspielers und umgekehrt. Für kooperative Lösungen, wie sie etwa in unserem Glasperlenspiel aus Beispiel 3 oder, falls Kommunikationsmöglichkeiten bestehen, auch im Gefangenen-Dilemma denkbar sind, besteht von Anfang an gar kein Raum. Ein Beispiel für eine solche Situation haben wir zu Beginn dieses Kapitels mit dem Fall von Oberst Blotto bereits kennengelernt.[1] Wir wollen dieses Beispiel jetzt noch etwas genauer analysieren.

Fortsetzung von Beispiel 2: (Oberst Blotto) Dominante Strategien

Oberst Blotto hat in diesem Fall die Wahl zwischen den vier Strategien a_1, a_2, a_3, a_4, auf Pass P_I entweder keine, eine, zwei oder drei Einheiten einzusetzen (und auf Pass P_{II} dementsprechend drei, zwei, eine oder keine). Dem Gegner stehen in analoger Weise die drei Strategien b_1, b_2, b_3 zur Verfügung, d.h., er kann auf P_I keine, eine oder zwei Einheiten einsetzen und auf P_{II} dementsprechend zwei, eine oder keine Einheit.

Unter Berücksichtigung der angegebenen Verlustrelationen und Bewertungsfunktionen kann somit folgende Spielmatrix aufgestellt werden (vgl. Tab. 12):[2]

	b_1	b_2	b_3
a_1	1	–1,5	–2
a_2	1	0,5	–2
a_3	1	0,5	0
a_4	–2	–2	0

1 Um ein Zwei-Personen-Nullsummenspiel handelt es sich im Fall des Oberst Blotto (vgl. Beispiel 2) nur dann, wenn der „Feind“ von einer ganz speziellen Bewertung möglicher „Gewinne“ und „Verluste“ ausgeht. Nachfolgend wird durchgängig unterstellt, dass der Feind als Ziel einen möglichst hohen „Nettogewinn“ anstrebt und wie Blotto als Nettogewinn die Differenz zwischen der Anzahl der vernichteten gegnerischen Einheiten und den verlorenen eigenen Einheiten wertet. Den Fall, dass nach Abschluss der Gefechte ein Paß erobert würde, bewertet der Feind wie die Vernichtung zweier zusätzlicher Einheiten Blottos.

2 Vgl. auch Vorobjoff (1972), S. 34 f.

Zur beispielhaften Erläuterung der in der Matrix angegebenen „Gewinn"-Beträge mag die Strategienkombination a_2/b_3 dienen:

– Am Pass P_I stehen sich in diesem Fall eine Einheit BLOTTOS und zwei Einheiten des Gegners gegenüber. Das bedeutet, dass der Gegner unter Verlust einer eigenen Einheit (+1 aus BLOTTOS Sicht) die Einheit BLOTTOS aufreibt (–1) und mit der ihm verbleibenden Einheit den Pass besetzt (–2).

– Am Pass P_{II} hingegen stehen zwei Einheiten BLOTTOS, ohne dass ein Gegner erscheint. Hier passiert also gar nichts (±0).

Für BLOTTO tritt bei dieser Konstellation somit als Gesamtergebnis der angegebene Verlust von 2 ein.

dominante Strategien

Vergleichen wir nun beispielsweise die Strategien a_1 und a_2, so erkennen wir, dass BLOTTO bei der Wahl von a_2, unabhängig davon, welche Strategie der Gegner wählt, auf keinen Fall schlechter fährt als bei a_1. Die beiden Strategien bei a_1 und a_2 stehen offenbar in einem ganz ähnlichen Verhältnis zueinander, wie wir es für Unsicherheitssituationen als Zustandsdominanz kennengelernt haben.[1] An die Stelle der Umweltzustände s_j treten jetzt nur die alternativen Strategien des Gegenspielers. In Analogie zum Begriff der **Zustandsdominanz** können wir somit für ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel folgendes definieren:

Eine Strategie $a_i(b_h)$ dominiert eine Strategie $a_{i'}(b_{h'})$, wenn gilt

$$(8.1) \qquad \begin{aligned} e_{ih} &\geq e_{i'h} \quad &&\text{für alle} \quad h = 1, 2, \ldots, \bar{h} \\ e_{ih} &> e_{i'h} \quad &&\text{für mindestens ein} \quad h \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$(8.2) \qquad \begin{aligned} e_{ih} &\leq e_{ih'} \quad &&\text{für alle} \quad i = 1, 2, \ldots, \bar{m} \\ e_{ih} &< e_{ih'} \quad &&\text{für mindestens ein} \quad i\ . \end{aligned}$$

Es ist – zumindest für den hier erörterten Fall des Zwei-Personen-Nullsummen-Spiels – unmittelbar einleuchtend, dass dominierte Strategien auf keinen Fall als zu realisierende Alternative in Betracht kommen und somit aus der weiteren Betrachtung ausgeschlossen werden können. Der Umfang des Entscheidungsproblems kann dadurch auf jeden Fall reduziert werden.

1 Vgl. Abschnitt 2.2.1 in Kurseinheit 3.

Als Grenzfall besteht dabei die Möglichkeit, dass zumindest für einen Spieler eine Strategie alle übrigen dominiert, so dass ein eigentliches Entscheidungsproblem gar nicht mehr besteht.

Fortsetzung von Beispiel 2: (Oberst BLOTTO) Lösung

Betrachten wir das Beispiel von Oberst BLOTTO unter diesem Aspekt noch einmal, so erkennen wir zunächst, dass für den Gegner gem. (8.2) die Dominanzbeziehung

$$b_2 \succ b_1$$

gilt. Die entscheidungsrelevante Alternativenmenge des Gegners kann also auf b_2 und b_3 reduziert werden.

Gleichzeitig gelten für BLOTTO die Dominanzrelationen:

$$a_3 \succ a_2 \succ a_1 \qquad \text{und} \qquad a_3 \succ a_4 \,.$$

BLOTTOS Strategie a_3 dominiert also alle anderen. Er kommt auf jeden Fall am besten davon, wenn er Pass P_I mit zwei Einheiten und P_{II} mit einer Einheit besetzt. Mithin reduziert sich die relevante Spielmatrix von der Form der Tabelle, die in der Fortsetzung des Beispiels 2 auf S. 43 gezeigt wird, zu dem unten dargestellten Vektor.

	b_2	b_3
a_3	0,5	0

Kann der Gegner BLOTTOS davon ausgehen, dass BLOTTO seine Situation wie in der Tabelle auf S. 43 verdeutlicht einschätzt und sich in dem Sinne rational verhält, dass er das Dominanzprinzip beachtet, dann steht er quasi vor einer Entscheidung unter Sicherheit und wird dementsprechend eindeutig b_3 wählen, also beide Einheiten zum Pass P_I schicken.

In der in diesem Beispiel untersuchten Spielsituation ergibt sich somit im zweifachen Sinne eine Lösung: „Lösung“ eines Spiels

– Im Sinne einer deskriptiv-prognostischen Theorie, indem unter sehr allgemeinen und wenig einschränkenden Annahmen über das Verhalten der Spieler vorhergesagt werden kann, welche Strategien die beiden Spieler bei der unterstellten Problemstruktur wählen werden und mit welchem Ergebnis das Spiel demnach enden wird.

– Im Sinne einer präskriptiven Theorie, indem – ebenfalls unter sehr allgemeinen und wenig einschränkenden Annahmen über die individuellen Präferenzvorstellungen – präzise Handlungsempfehlungen abgeleitet werden können.

In vielen Fällen führt die Bereinigung der Spielmatrix um dominierte Strategien jedoch noch nicht zu einer solchen eindeutigen Lösung. Einen erweiterten Lösungsbegriff für diesen Fall wollen wir im folgenden Abschnitt untersuchen.

2.2.2 Gleichgewichtslösungen

Zur Verdeutlichung wollen wir folgende Spielmatrix betrachten:

	b_1	b_2	b_3	b_4	min
a_1	4	–4	–2	–3	–4
a_2	3	3	1	2	1
a_3	–2	1	0	3	–2
max	4	3	1	3	

Tab. 14: Beispiel für eine Spielmatrix (zur Ermittlung der Gleichgewichtslösung)

Dominante Strategien existieren für keine der beiden Parteien. Bei der Wahl ihrer Strategien ergibt sich für beide Spieler somit die Notwendigkeit, ähnlichen Gedankengängen nachzugehen, wie wir sie eingangs für das Glasperlenspiel des INDERS skizziert haben. Also etwa Überlegungen der Art:

– Wenn ich wüsste, dass mein Gegner b_1 wählt, dann würde ich mich für a_1 entscheiden und 4 gewinnen.

– wüsste mein Gegner nun aber, dass ich meine, er würde b_1 wählen, und mich dementsprechend für a_1 entscheide, so würde er tatsächlich b_2 wählen und ich würde somit 4 verlieren.

– Unterstelle ich aus dem soeben genannten Grund nun aber, dass der Gegner b_2 wählt, so sollte ich a_2 wählen, um so statt des vom Gegner erwarteten Verlustes von 4 einen Gewinn von 3 zu erzielen.

– Ahnt der Gegner nun aber, dass ich mich in der Erwartung, dass er b_2 wählt, für a_2 entscheide, so wird er b_3 wählen, um damit meinen Gewinn auf 1 zu drücken.

– Unterstelle ich somit, dass mein Gegner b_3 wählt, so wäre es für mich am günstigsten, a_2 zu wählen, also genau die Strategie, die mein Gegner erwartet.

Wir sehen, an dieser Stelle würde der gedankliche Wenn-und-Aber-Wechsel von einer Strategie zur anderen aufhören; die Gedanken würden stattdessen nur noch um a_2 und b_3 kreisen. Die Kombination der Strategien a_2 und b_3 weist also gewisse Eigenschaften auf, die sie gegenüber anderen Strategienpaaren auszeichnet.

> **Übungsaufgabe 9:**
> Skizzieren Sie einen ähnlichen Wenn-und-Aber-Gedankengang für die zu Beginn des Abschnitts 2.2.2 dargestellte Spielsituation aus der Sicht von B für den Fall, dass er zunächst annimmt, A würde vielleicht Strategie a_3 wählen!

Die vorgetragenen Überlegungen führen unmittelbar zur Unterscheidung folgender zwei Arten von Strategienkombinationen:

instabile Strategienkombinationen

(1) Die Kombination zweier Strategien $a_{i'}$ und $b_{h'}$ wollen wir dann als **instabil** bezeichnen, wenn es für mindestens einen der beiden Spieler unter der Annahme, dass sein Gegner die Strategie $b_{h'}$ (bzw. $a_{i'}$) realisiert, vorteilhaft ist, die Strategie $a_{i'}$ (bzw. $b_{h'}$) *nicht* zu realisieren. Instabilität in diesem Sinne ist offensichtlich immer genau dann gegeben, wenn

– entweder zumindest eine Strategie a_{i^*} existiert, für die gilt

(9.1) $e_{i^*h'} > e_{i'h'}$,

– bzw. zumindest eine Strategie b_{h^*} existiert, für die gilt

(9.2) $e_{i'h^*} < e_{i'h'}$.

stabile Strategienkombinationen

(2) Die Kombination zweier Strategien $a_{i'}$ und $b_{h'}$ wollen wir dann als **stabil** bezeichnen, wenn es für jeden der beiden Spieler unter der Annahme, dass sein Gegner die Strategie $b_{h'}$ (bzw. $a_{i'}$) wählt, vorteilhaft ist, seinerseits $a_{i'}$ (bzw. $b_{h'}$) auch *tatsächlich* zu wählen. Stabilität in diesem Sinne ist immer dann gegeben, wenn folgende Relationen gleichzeitig gelten:

(10.1) $e_{i'h'} \geq e_{ih'} \qquad i = 1, 2, \ldots, \overline{m}$

(10.2) $e_{i'h'} \leq e_{i'h} \qquad h = 1, 2, \ldots, \overline{h}$.

D.h., Spieler A erzielt – sofern B wirklich Strategie $b_{h'}$ realisiert – mit seiner Strategie $a_{i'}$ einen höheren (oder zumindest nicht niedrigeren) Gewinn als bei jeder anderen Strategie; der Wert $e_{i'h'}$ stellt also das **Spaltenmaximum** dar. Analog erzielt B – sofern A wirklich Strategie $a_{i'}$ realisiert – mit seiner Strategie $b_{h'}$ einen niedrigeren (oder zumindest nicht höheren) Verlust als bei jeder anderen Strategie; der Wert $e_{i'h'}$ stellt also zugleich das **Zeilenminimum** dar. Dementsprechend kann für die Bedingungen (10.1) und (10.2) zusammenfassend auch geschrieben werden:

Stabilitätsbedingung

$$(10.3) \qquad \max_i (e_{ih'}) = e_{i'h'} = \min_h (e_{i'h}) \ .$$

Wenn Sie sich noch einmal an die im 1. Kapitel behandelten Entscheidungskriterien für die Ungewissheitssituationen erinnern, werden Sie sofort eine gewisse Ähnlichkeit der Bedingung (10.3) mit dem Mini-Max-Prinzip erkennen (vgl. Abschnitt 1.2). In der Tat würden in unserem durch Tab. 14 verdeutlichten Beispiel die beiden Gegenspieler A und B genau dann die Strategien a_2 und b_3 wählen, wenn sie bei ihrer Entscheidung nach dem Mini-Max-Prinzip vorgingen: A würde nach diesem Prinzip die Strategie mit dem maximalen Minimalgewinn wählen, B die Strategie mit dem minimalen Maximalverlust. Statt (10.3) können wir dementsprechend auch schreiben:

$$(10.4) \qquad \max_i \left(\min_h (e_{ih}) \right) = e_{i'h'} = \min_h \left(\max_i (e_{ih}) \right) \ .$$

Mini-Max-Strategien

Die so definierten Strategien werden daher allgemein auch als **Mini-Max-Strategien** bezeichnet.

Sattelpunkt, Gleichgewichtsstrategien

Ein Strategienpaar, das der Bedingung (10.3) entspricht, wird nun häufig als **Sattelpunkt** bezeichnet, die zugehörigen Strategien als **Gleichgewichtsstrategien,** der entsprechende Ergebniswert ($e_{i'h'}$) als **Wert des Spiels.** Die Bezeichnung Sattelpunkt entspricht der räumlichen Veranschaulichung der Bedingung (10.3): bewegt man sich von dem Sattelpunkt aus fort, so geht es entlang der Spaltenachse nur abwärts, entlang der Zeilenachse nur aufwärts.

Die durch einen Sattelpunkt bestimmten Gleichgewichtsstrategien werden häufig als „Lösung" des betrachteten Spiels angesehen, und zwar mit folgender Begründung:

- Sofern ein Spieler glaubt, sein Gegner werde die Gleichgewichtsstrategie wählen, ist es für ihn selbst ebenfalls das Beste, seine Gleichgewichtsstrategie zu realisieren.
- Wählen beide Spieler ihre Gleichgewichtsstrategien, so stimmt das tatsächlich eintretende Ergebnis mit dem zuvor erwarteten überein; die Spieler erleben also weder positive noch negative Überraschungen.

– Sofern beide Spieler alternative Strategienkombinationen in einem Wenn-Aber-Gedankengang der oben beschriebenen Art analysieren, stellen die Gleichgewichtsstrategien ein stabiles Strategienpaar dar: jeder Gegner würde als Antwort auf die Strategie seines Gegenspielers genau die Strategie realisieren, von der der Gegenspieler bei der Wahl seiner Strategie ausgegangen ist.

Sie erkennen deutlich eine gewisse immanente Reflexivität in dieser Argumentation: Für jeden der Spieler ist es optimal, seine Gleichgewichtsstrategie zu wählen, *sofern* er davon ausgehen kann, dass der Gegner ebenfalls seine Gleichgewichtsstrategie wählt. Ist – aus welchen Gründen auch immer – zu vermuten, dass der Gegner eine andere als seine Gleichgewichtsstrategie realisieren wird, dann stimmt die dementsprechende eigene Optimalstrategie im Allgemeinen jedoch auch nicht mehr mit der Gleichgewichtsstrategie überein. Analysiert man dann weiter die Frage, welche Strategie der Gegner wohl wählen wird und wie man selbst darauf reagieren sollte, so gerät man wiederum in eine Wenn-Aber-Folge von Strategien, die erst dann endet, wenn doch wieder die Gleichgewichtsstrategien betrachtet werden. Es spricht insofern also durchaus einiges dafür, die Gleichgewichtsstrategien als „Lösung“ eines entsprechenden Zwei-Personen-Nullsummen-Spiels zu betrachten, und zwar

– zum einen im Sinne einer bedingten Handlungs*empfehlung* (präskriptiver Aspekt),

– zum anderen aber auch im Sinne einer Ergebnis*prognose*.

So einleuchtend der erörterte Lösungsbegriff auch sein mag – ein Makel haftet ihm an:

Es ist keineswegs so, dass eine solche Lösung überhaupt für jedes beliebige Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel gefunden werden könnte. Im Gegenteil lassen sich vielmehr recht einfach Beispiele finden, die keinen Sattelpunkt aufweisen.[1)]

Im Rahmen dieser einführenden Darstellung soll auf diesen Fall und die hierfür angebotenen Lösungskonzepte jedoch nicht eingegangen werden.

1 Andererseits besteht auch die Möglichkeit, dass ein Spiel gleichzeitig mehrere Sattelpunkte aufweist (vgl. hierzu z.B. HAX (1974), S. 198 f.). Diese weisen allerdings zwangsläufig alle denselben Wert auf.

Übungsaufgabe 10:

a) Überprüfen Sie das durch die Tabelle auf S. 43 dargestellte Beispiel von Oberst BLOTTO daraufhin, ob es eine Gleichgewichtslösung im Sinne $\max\limits_{i}(e_{ih'}) = e_{i'h'} = \min\limits_{h}(e_{i'h})$ enthält!

Vergleichen Sie Ihre Antwort stichwortartig mit dem aus der Dominanzuntersuchung in Abschnitt 2.2.1 gewonnenen Ergebnis!

b) Überprüfen Sie das durch Tab. 12 dargestellte Beispiel 4 ebenfalls daraufhin, ob es eine Gleichgewichtslösung in diesem Sinne enthält!

Übungshinweis

Zur vertiefenden Einübung der bislang behandelten Probleme sollten Sie in BITZ (2003) die Aufgabe 5.14 lösen und die zugehörige Musterlösung gründlich durcharbeiten.

2.3 Zwei-Personen-Spiele mit variabler Summe

2.3.1 Spiele ohne Kooperation

2.3.1.1 Spiele vom Typ des Gefangenen-Dilemmas

Aufhebung der Nullsummen-Annahme

Wir wollen nun die Nullsummen-Annahme aufgeben und solche Spiele betrachten, bei denen sich je nach der Strategiewahl der beiden Spieler A und B unterschiedliche Gewinn- oder Verlustsummen ergeben, Relation (7) ($e_{ih} = -f_{ih}$) also nicht mehr zutrifft. Dabei behandeln wir in diesem Abschnitt zunächst solche Spiele, bei denen keinerlei Kommunikations- oder Kooperationsmöglichkeiten zwischen den Spielern bestehen, beide also „blind" entscheiden müssen.

Muster für derartige Zwei-Personen-Spiele haben Sie bereits in unseren Beispielen 1 (Gefangenen-Dilemma) und 4 (Glasperlenspiel gem. Abb. 1 oder Tab. 12) kennengelernt. Zur Verdeutlichung der in diesem Fall auftretenden Probleme wollen wir das **Gefangenen-Dilemma** (Beispiel 1) nun etwas näher betrachten.

Beispiel 5: Gefangenen-Dilemma

Bezeichnen wir die beiden Gefangenen ESTRAGON und VLADIMIR der Kürze halber wieder mit A bzw. B und ihre Strategien „Nicht gestehen“ mit a_1 bzw. b_1 und „Gestehen“ mit a_2 bzw. b_2, so können wir folgende Spielmatrix aufstellen, deren negative Zahlen jeweils die zu erwartenden Haftmonate für A (erste Zahl) bzw. B (zweite Zahl) angeben.

	b_1	b_2
a_1	–3/–3	–60/0
a_2	0/–60	–36/–36

Betrachten wir diese Matrix mit unseren inzwischen nicht nur allgemein entscheidungs-, sondern auch speziell spieltheoretisch geschulten Augen, so erkennen wir, dass sich auch hier wiederum Dominanz-Beziehungen[1)] zwischen den einzelnen Strategien feststellen lassen:

dominante Strategien: Gestehen

– A stellt sich bei einem Geständnis (≡ Realisierung von a_2) unabhängig davon, wie B sich verhält, auf jeden Fall besser als bei a_1 (≡ Leugnen): Leugnet B nämlich (b_1), so geht A sogar ganz straffrei aus und spart sich somit auch noch die drei Monate Haft bei gemeinsamen Leugnen. Ist B hingegen geständig, so muss A für 3 Jahre ins Gefängnis, was aber immer noch besser ist als 5 Jahre Haft, wenn er allein geleugnet hätte.

– In analoger Weise stellt sich auch B bei Wahl der Strategie b_2 (= Geständnis) eindeutig besser als bei b_1 (= Leugnen).

Verhalten sich beide Gefangenen also zumindest insoweit rational, dass sie das Dominanz-Prinzip beachten, so ist unser Problem – zumindest zunächst – gar kein Problem mehr: Für beide Gefangenen gibt es überhaupt nur eine sinnvollerweise in Betracht zu ziehende Alternative, nämlich zu gestehen (also a_2 und b_2). Ein Abweichen von der so bestimmten Gleichgewichtsstrategie ist für keinen lohnend. Dementsprechend ist auch das „Spielergebnis“ eindeutig bestimmt: beide wandern für 3 Jahre hinter Gitter (–36/–36). Dass nebenbei auch noch die Gerechtigkeit – oder zumindest auch noch der Staatsanwalt – triumphiert, mag die Moralisten unter Ihnen zusätzlich freuen!

Um die Problematik des so gefundenen Gleichgewichts des Gefangenen-Dilemmas besonders deutlich zu machen, wollen wir nun einmal annehmen, die in der obigen Tabelle angegebenen Zahlen bezeichneten nicht Haftmonate, sondern jeweils den in 100 $ angegebenen Verlust, den zwei Fischer erleiden, je nachdem, in welcher Weise sie ihre Schutzvorkehrungen gegen einen heraufziehenden Sturm ergänzen oder nicht. Diese Uminterpretation ändert an den oben aufgezeigten Dominanzbeziehungen und dem daraus abgeleiteten Gleichgewicht offensicht-

Betrachtung der gemeinsamen Verlustsummen

1 Zur Definition der Dominanz kann für A unmittelbar auf (8.1) zurückgegriffen werden. Für B sind in (8.2) hingegen e_{ih} und $e_{ih'}$ durch $-f_{ih}$ und $-f_{ih'}$ zu ersetzen. Nach entsprechender Umformung gilt dann als Voraussetzung für die Dominanz einer Strategie b_h über $b_{h'}$:

(8.2′) $f_{ih} \geq f_{ih'}$ für alle $i = 1, 2, \dots, \overline{m}$

$f_{ih} > f_{ih'}$ für mindestens ein i .

lich nichts. Betrachten wir nun jedoch einmal die in der folgenden Tabelle aufgeführten **Summen** der auf A *und* B insgesamt entfallenden Verluste, so wird sofort deutlich,

	b_1	b_2
a_1	–6	–60
a_2	–60	–72

dass die Gleichgewichtsstrategien a_2/b_2 dazu führen würden, dass sich die beiden Spieler die eindeutig *höchste* Verlustsumme einhandeln. Oder anders ausgedrückt: Bei jeder anderen Strategiekombination stellen sich A und B *gemeinsam* besser als bei Realisierung von a_2/b_2. Insbesondere das entgegengesetzte Strategienpaar a_1/b_1 mit einem Gesamtverlust von nur 600 $ wäre besonders attraktiv und stellte beide „Spieler“ um einige tausend $ besser als bei Wahl der Gleichgewichtsstrategien.

Diese Einsicht nutzt unseren beiden Spielern jedoch wenig – insbesondere in dem hier betrachteten Fall, dass keinerlei Kommunikationsmöglichkeiten bestehen. Denn für jeden individuell drängt sich – altruistische Gefühle einmal ganz ausgeschlossen – doch folgender Gedankengang auf, den wir einmal für A verdeutlichen wollen.

– Für uns beide zusammen ist a_1/b_1 sicherlich das Beste. B wird das auch sehen und dementsprechend b_1 wählen, in der Annahme, dass ich a_1 wähle.
– In diesem Fall wäre es für mich jedoch noch besser, a_2 zu wählen (vgl. erste Tabelle in diesem Beispiel), um auch den 300 $ - Verlust noch zu vermeiden.
– Das gleiche wird sich B wohl auch denken und seinerseits ebenfalls b_2 wählen.
– Dann ist es für mich aber erst recht ratsam, a_2 zu realisieren, um so statt 6.000 $ nur 3.600 $ Verluste hinnehmen zu müssen.

Sehenden Auges und ausschließlich in Verfolgung des eigenen Vorteils würden sich beide Spieler also im Endeffekt von einem vergleichsweise geringen Verlust (300 $ pro Spieler) zu einem empfindlich höheren Verlust (3.600 $ pro Spieler) manövrieren.

individuelle und kollektive Rationalität

An diesem Beispiel erkennen wir recht deutlich, dass durchaus ein Widerspruch bestehen kann zwischen

– der **individuellen Rationalität,** wie sie etwa in Dominanzbeziehungen nach Art von (8.1) und (8.2′) und den daraus abgeleiteten Gleichgewichtsstrategien a_2/b_2 ihren Niederschlag findet,

– und einer Art **kollektiver Rationalität,** die auf der Basis der in der zweiten Tabelle des obigen Beispiels verdeutlichten Zahlenangaben gerade die Entscheidung für das entgegengesetzte Strategienpaar a_1/b_1 implizieren würde.

Das bedeutet, dass nicht nur die beiden Gefangenen oder Fischer unseres Beispiels, sondern auch die Ansätze der Spieltheorie in ein nicht lösbares Dilemma hineingeraten sind.

Denn die Befolgung eines der so gut wie nicht bestrittenen Grundaxiome rationalen Verhaltens, nämlich des Dominanzprinzips in der durch (8.1) und (8.2′) umschriebenen Ausprägung, führt zu einem Ergebnis, dessen „Rationalität“ mit Fug und Recht in Zweifel gezogen werden kann. Die Begriffe „rational“ und „irrational“ greifen offenbar gar nicht mehr richtig; dementsprechend ist es in der Spieltheorie auch nicht gelungen, für derartige Probleme ein Lösungskonzept zu entwickeln, das auch nur ansatzweise eine ähnliche Stringenz aufweist wie etwa das Sattelpunktkonzept bei Nullsummen-Spielen.

LUCE/RAIFFA (1957), S. 97, folgern daraus halb ironisch: *„There should be a law against such games!“* – eine Äußerung, die sehr viel tiefsinniger ist, als dies auf den ersten Blick erscheinen mag.

2.3.1.2 Der „Kampf der Geschlechter“ und weitere Konstellationen

Zum Abschluss dieses Abschnittes wollen wir kurz noch ein anders strukturiertes Problem betrachten, bei dem ebenfalls kein befriedigendes Konzept zur Definition einer Lösung gefunden werden konnte. Probleme dieses Typs werden allgemein – etwas melodramatisch – unter der Bezeichnung „Kampf der Geschlechter“ behandelt.[1)]

Beispiel 6: Der Kampf der Geschlechter

Ein Mann (A) und seine Frau (B) wollen sich je einzeln eine Eintrittskarte für eine Abendvorstellung besorgen. Für beide besteht die Auswahl zwischen einem Boxkampf (Strategie a_1 bzw. b_1) und einer Ballettvorführung (a_2 bzw. b_2). Der Mann zieht den Boxkampf, die Frau das Ballett vor. Übereinstimmend bewerten beide jedoch die Möglichkeit, jeweils getrennt voneinander die eine oder die andere Veranstaltung zu besuchen, ausgesprochen negativ.

Ordnet man den einzelnen Konstellationen geeignete Nutzenziffern zu, so könnte die skizzierte Spielsituation etwa durch folgende Matrix verdeutlicht werden:

1 Vgl. z.B. LUCE/RAIFFA (1957), S. 90 f.

	b_1	b_2
a_1	2/1	–1/–1
a_2	–1/–1	1/2

Dieses Spiel verfügt offenbar über zwei Paare von Gleichgewichtsstrategien a_1/b_1 sowie a_2/b_2. Denn in keinem Fall lohnt es für einen der beiden Spieler, von seiner Gleichgewichtsstrategie abzugehen, sofern er davon ausgeht, dass sein Partner seinerseits die entsprechende Gleichgewichtsstrategie realisieren wird.

Bestehen nun jedoch keine Kommunikationsmöglichkeiten, so besteht die Gefahr, dass etwa folgender Ablauf eintritt:

– Der Mann (A) nimmt an, dass seine Frau (B) unterstelle, er werde „Kavalier sein“ und sich letztlich ihren Präferenzen anschließen, sie werde deshalb für sich eine Theaterkarte kaufen (b_2). Unter dieser Annahme tut A für sich selbst das Beste, ebenfalls eine Theaterkarte zu kaufen, also die zu b_2 korrespondierende Gleichgewichtsstrategie a_2 zu realisieren.

– Die Frau (B) ihrerseits nimmt jedoch an, ihr Mann werde sich – rücksichtslos wie immer – natürlich eine Boxkampfkarte kaufen, also a_1 realisieren. Dementsprechend ist es für sie das Beste, ebenfalls eine Boxkampfkarte zu kaufen, also b_1 zu wählen.

Als Resultat dieses wechselseitigen Aufeinandereingehens ergibt sich dann jedoch mit a_2/b_1 eine Situation, die von beiden Spielern als ausgesprochen negativ eingeschätzt wird. Dabei besteht keinerlei Möglichkeit, diese Gefahr durch einseitige Vorüberlegungen etwa der Art, „wenn B meint, ich glaubte, sie dächte, ich rechnete damit, sie würde ...“ zu überwinden.

Zwei-Personen-Spiele ohne Probleme

Bislang haben wir zwei ausgesprochen problematische Typen von Zwei-Personen-Spielen mit variabler Summe kennengelernt. Auch in der Literatur genießen diese und ähnliche Spieltypen vorrangige Aufmerksamkeit. Um etwaigen Missverständnissen vorzubeugen, sei gegen Ende dieses Abschnittes jedoch noch kurz darauf hingewiesen, dass es natürlich auch Spielkonstellationen gibt, in denen ohne alle Probleme eine eindeutige Lösung gefunden werden kann.

Beispiel 7: Problemfreie Gleichgewichtslösung bei einem Zwei-Personen-Spiel mit variabler Summe ohne Kooperation

Zur exemplarischen Verdeutlichung sei folgende Spielmatrix betrachtet:

	b_1	b_2
a_1	10/8	3/1
a_2	1/4	2/2

In diesem Fall stellen a_1 und b_1 jeweils dominante Strategien dar. Wählen nun beide Spieler diese Strategie, so erreichen sie damit die Lösung, die wir ohne jede Einschränkung als Gleichgewichtslösung akzeptieren können:

- Sie stellt einen Sattelpunkt dar, so dass es für keinen der beiden Spieler lohnend ist, von seiner Strategie abzuweichen.
- Für beide Spieler tritt das bei der Strategiewahl erhoffte Ergebnis auch tatsächlich ein.
- Beide Spieler zusammen erreichen die höchstmögliche Gewinnsumme: kollektive und individuelle Rationalität widersprechen sich hier also nicht.

Zusammenfassung

Fassen wir die an drei Beispielen exemplarisch verdeutlichten Probleme, für nicht-kooperative Zwei-Personen-Spiele mit variabler Summe überhaupt nur eine „Lösung" zu definieren, zusammen, so ist festzuhalten:

- Es gibt Konstellationen, in denen ohne Probleme eine befriedigende Gleichgewichtslösung gefunden werden kann. Jedoch existieren auch andere Spieltypen.
- So bedingt bei Spielen vom Typ des „Gefangenen-Dilemmas" das einzig existierende Paar von Gleichgewichtsstrategien den insgesamt schlechtesten Spielausgang. Trotzdem ist dem Spiel eine starke Tendenz genau in Richtung auf dieses Ergebnis immanent.
- So existieren bei Spielen vom Typ des „Kampf der Geschlechter" gleich mehrere Paare von Gleichgewichtsstrategien. Jedes dieser Paare führt auch für beide Spieler zu einem besseren Ergebnis als jedes Nicht-Gleichgewichts-Paar. Trotzdem besteht eine große Gefahr, dass letztlich doch ein solches Nicht-Gleichgewichts-Paar realisiert wird.

2.3.2 Spiele mit Kooperation

2.3.2.1 Eingrenzung des Verhandlungsbereichs

Besteht die Möglichkeit, dass sich die Spieler *vor* der Wahl ihrer Strategien miteinander verständigen, so können einerseits etliche der bislang erörterten Schwierigkeiten vermieden werden, andererseits eröffnet sich eine zusätzliche Dimension neuer Probleme. Dies gilt insbesondere im Hinblick auf die Möglichkeit, die Verabredung bestimmter Strategien mit Vereinbarungen über **Ausgleichszahlungen** oder sonstige Kompensationsleistungen zu verknüpfen.

Annahmen:

- monetäre Ergebnisangaben
- Gewinnmaximierung
- keine Schadenfreude
- Einhalten von Zusagen

Um deren Darstellung im Rahmen dieses Kurses auf einige Grundfragen reduzieren zu können, wollen wir nur noch solche Spielsituationen betrachten, in denen die alternativen Spielergebnisse in monetären Größen definiert sind, die „Gewinne" der beiden Spieler insoweit also direkt verglichen werden können. Weiterhin wollen wir annehmen, dass es beiden Spielern ausschließlich darum geht, selbst einen möglichst *hohen Gewinn* (oder niedrigen Verlust) zu erzielen, sie jedoch keine Schadenfreude dabei empfinden, den anderen – evtl. unter eigenen Gewinneinbußen – hereinzulegen, dass sie aber andererseits auch kein *Mitleid* oder ähnliche soziale Regungen zeigen, so dass ihnen ein höherer Gewinn unter allen relevanten Umständen lieber ist als ein niedrigerer. Außerdem unterstellen wir – sofern nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist –, es sei gesichert, dass Absprachen sowohl über die Wahl bestimmter Strategien als auch etwaige Ausgleichszahlungen auch *tatsächlich eingehalten* werden.

Bei der Darstellung einer solchen Spielsituation gilt es nun, die Möglichkeit von Ausgleichszahlungen zumindest rein formal zu berücksichtigen. Zu diesem Zweck definieren wir folgendes Symbol:

Ausgleichszahlung

g: Die Ausgleichszahlung, die A von B erhält ($g > 0$) bzw. B von A empfängt ($g < 0$), falls A und B sich auf die Wahl eines bestimmten Strategienpaares einigen.

Für die Spielergebnisse nach Ausgleichszahlung $\hat{e}, \hat{f}$ ergeben sich daraus allgemein folgende Definitionen:

$$(11.1) \quad \hat{e} := e + g$$

$$(11.2) \quad \hat{f} := f - g \,.$$

Gedanklich kann das Entscheidungsproblem der beiden Spieler nun in zwei Teilentscheidungen zerlegt werden, nämlich

(E1) Vereinbarung der zu realisierenden Strategien a_i und b_h;

(E2) Festsetzung der Ausgleichszahlung g.

Faktisch sind beide Teilprobleme natürlich nicht unabhängig voneinander zu lösen.

Um das Problem schrittweise analysieren zu können, wollen wir jedoch zunächst einmal unterstellen, beide Spieler seien äußerst kooperationsfreudig und würden sich auf einen derartigen schrittweisen Einigungsprozess einlassen.

Bedingung kollektiver Rationalität

Bei Schritt (E1) wäre es dann im Sinne einer kollektiven Rationalität offenbar am besten, ein solches Strategienpaar zu vereinbaren, bei dem für beide Spieler zusammen die höchste Gewinnsumme erzielt werden kann, also die Strategien a_{i*} und b_{h*} zu bestimmen, für die

(12) $$(e_{i*h*} + f_{i*h*}) = \max_{i,h}(e_{ih} + f_{ih})$$

gilt.

Der Einfachheit halber wollen wir die durch den rechten Ausdruck definierte *maximale gemeinsame Gewinnsumme* im Folgenden einfach mit s* bezeichnen. Statt (12) kann dann einfach

(12′) $$e_{i*h*} + f_{i*h*} = s^*$$

geschrieben werden.

Existieren mehrere Strategienpaare, die (12) erfüllen, kann die weitere Auswahl nach einer beliebigen Zusatzregel erfolgen. Für die nach Ausgleichszahlungen resultierenden Gewinne $\hat{e}$ und $\hat{f}$ muss dann gem. (11.1) und (11.2) ebenfalls gelten:

(13) $$\hat{e} + \hat{f} = \max_{i,h}(e_{ih} + f_{ih})$$

(13’) $$\hat{e} + \hat{f} = s^* .$$

Unterstellen wir nun einmal, die Einigung auf ein Strategienpaar gem. (12) sei erfolgt, so stellt sich als zweites die Frage, ob und wenn ja, in welchem Umfang und in welcher Richtung Ausgleichszahlungen zu leisten sind, damit die Wahl a_{i*}/b_{h*} auch wirklich für beide Partner akzeptabel wird. Hierbei geht es also nur noch um die Aufteilung des fest vorgegebenen Gesamtbetrages s*, d.h., es liegt wiederum ein Aufteilungsproblem von der Struktur eines *Nullsummen-Spiels* vor:

– Die Ergebnisse dieses Spiels bestehen in alternativen Werten der Ausgleichszahlung; eine der Nullsummenrelation (7) entsprechende Bedingung ist also erfüllt.

– Die den Spielern zur Auswahl stehenden Handlungsmöglichkeiten bestehen in alternativen **Verhandlungsstrategien.**

Im einschlägigen Schrifttum wird dementsprechend vorwiegend die Frage erörtert, welche Verhandlungsergebnisse zu erwarten sind, je nachdem, welche Strategien die beiden Spieler anwenden. Dabei wird insbesondere auch die Frage untersucht, welche Bedeutung der Struktur der ursprünglichen Spielmatrix im Hinblick auf den Verhandlungsprozess zukommt. Darauf aufbauend werden dann verschiedene Lösungskonzepte vorgetragen. Dabei könnte man in diesem Zusammenhang eine „Lösung“ etwa als gedachten **Einigungsvorschlag** eines neutralen Vermittlers definieren, der eine reelle Chance besitzt, von beiden Seiten als fairer Kompromiss akzeptiert zu werden.

Lösung ≡ Akzeptabler Einigungsvorschlag

An Stelle einer notwendigerweise in einer solchen Einführung in spieltheoretische Fragestellungen sehr oberflächlich bleibenden Darstellung entsprechender Ansätze etwa von NASH (1950), RAIFFA (1953) oder SHAPLEY (1953)[1], wollen wir in einer davon etwas abweichenden Darstellung an einigen Beispielen einen exemplarischen Einblick in verschiedene Teilprobleme geben.

Beispiel 8: Kooperation bei einem Zwei-Personen-Spiel mit variabler Summe

Gegeben sei folgende Spielmatrix:

	b_1	b_2
a_1	16/2	4/6
a_2	0/4	2/10

Man erkennt schnell, dass – für den Fall ohne Kooperation – für jeden Spieler eine dominante Strategie besteht; es sind dies a_1 und b_2. Die bei Realisierung dieser beiden Strategien erzielbare Gewinnsumme von 10 liegt jedoch deutlich unter der bei kooperativer Durchführung von a_1 und b_1 erzielbaren Gewinnsumme 18. Insoweit könnte es für beide Spieler vorteilhaft sein, gemeinsam a_1 und b_1 zu realisieren und eine geeignete Ausgleichszahlung zu vereinbaren.

1 Wegen eines kurzen deutschsprachigen Überblickes über diese Ansätze vgl. SZYPERSKI/WINAND (1974), S. 132–141; ansonsten s. LUCE/RAIFFA (1957), S. 114–154.

Anhang 3

Zur näheren Veranschaulichung des damit entstehenden Verhandlungsproblems ist es dienlich, die Ergebniswerte aus der Tabelle zu Beispiel 8 in einem Gewinn-Diagramm darzustellen, wie es Abb. 3 im Anhang zeigt.

Die vier durch Zahlenangaben in eckigen Klammern [i/h] gekennzeichneten Punkte charakterisieren die bei unterschiedlichen Strategiekombinationen erzielbaren Ergebnisse. Punkt [1/2] kennzeichnet also etwa die für den nicht kooperativen Fall definierte Gleichgewichtslösung, [1/1] demgegenüber das bei Kooperation im Sinne von (12) optimale Strategienpaar.

Die durch [1/1] verlaufende 45°-Linie markiert nun die Gesamtheit aller denkmöglichen Verhandlungsergebnisse, die bei einer grundsätzlichen Einigung auf [1/1] überhaupt erreicht werden könnten. Wir wollen diese Gerade daher als **Verhandlungslinie** bezeichnen. Die Menge der unter den eingangs genannten Prämissen als reale Lösungsmöglichkeiten in Betracht zu ziehenden Verhandlungsergebnisse kann jedoch in folgender Weise noch weiter eingegrenzt werden:

Anhang 3

– A kann sich auch bei Verzicht auf jede Kooperation auf jeden Fall einen Gewinn von 4 sichern, indem er a_1 – also seine Mini-Max-Strategie[1] – realisiert. Für ihn sind also nur solche Verhandlungsergebnisse akzeptabel, bei denen er *nach* einer etwaigen Ausgleichszahlung mindestens einen Gewinn von 4 erzielt (vgl. Tabelle in Beispiel 8). In Abb. 3 entsprechen dem alle Punkte, die auf der durch [1/2] verlaufenden Senkrechten („Mindestgewinnlinie A“) oder rechts davon liegen.

– In ähnlicher Weise wird B nur Verhandlungsergebnisse akzeptieren, die ihm mindestens einen Gewinn von 6 erbringen; denn diesen Betrag kann er sich auch ohne Kooperation durch Realisierung seiner Mini-Max-Strategie b_2 sichern (vgl. Tabelle in Beispiel 8). In Abb. 3 wird der für B insoweit akzeptable Lösungsraum von der durch [1/2] verlaufenden Waagerechten („Mindestgewinnlinie B“) nach unten abgegrenzt. Mindestgewinn für B

– Von einer Einigung auf [1/1] ausgehend kommen somit nur noch solche Verhandlungsergebnisse in Betracht, die durch einen Punkt auf dem Teil der Verhandlungslinie gekennzeichnet werden, der rechts bzw. oberhalb der beiden *Mindestgewinnlinien* verläuft.

Numerisch ausgedrückt muss ein als Lösung akzeptabler Einigungsvorschlag somit neben der gem. (13) notwendigen Gleichung

$$\hat{e} + \hat{f} = 18$$

1 Vgl. Abschnitt 2.2.2.

Bedingungen individueller Rationalität

auf jeden Fall auch noch den Bedingungen einer **individuellen Rationalität**

$$\hat{e} \geq 4$$
$$\hat{f} \geq 6$$

genügen.

Allgemein müsste also gelten:

$$(14) \qquad \hat{e} \geq \max_i \left(\min_h (e_{ih}) \right)$$
$$\hat{f} \geq \max_h \left(\min_i (f_{ih}) \right) .$$

Die auf der rechten Seite angegebenen Ausdrücke für die bei Wahl der jeweiligen Mini-Max-Strategien schlechtestenfalls erzielbaren Ergebnisse wollen wir der einfacheren Schreibweise wegen im Folgenden kurz mit $\bar{e}$ und $\bar{f}$ bezeichnen. (14) lautet dann einfach:

$$(14') \qquad \hat{e} \geq \bar{e}$$
$$\hat{f} \geq \bar{f} .$$

2.3.2.2 Ein Lösungskonzept

Gleichverteilungsannahme

Offen ist nun natürlich immer noch, *wo* innerhalb des verbleibenden Verhandlungsspielraumes sich A und B treffen werden. In diesem Zusammenhang wird nun solchen Lösungsvorschlägen, die sich als *Gleichverteilungen* charakterisieren lassen, häufig am ehesten die Chance eingeräumt, als fairer Kompromiss akzeptiert zu werden.

Eine endgültige Lösung für unser Problem haben wir allerdings selbst dann noch nicht gefunden, wenn wir diese Gleichverteilungsannahme einmal als Einigungshypothese akzeptieren. Denn je nachdem, welche *Ausgangsgröße* man für eine gleiche Aufteilung vorsieht, existieren im vorliegenden Fall zumindest zwei Verhandlungsergebnisse, die man als Gleichverteilung bezeichnen könnte.

1. Aufteilung des Gesamtgewinns

absolute Gleichverteilung

Zum einen wäre es zumindest rein theoretisch denkbar, den erzielbaren Gesamtgewinn auf beide Spieler gleich aufzuteilen. Für die bei einem solchen Einigungsverhalten zustande kommende Aufteilung würde also allgemein gelten:[1]

$$(15.1) \quad \hat{e}_{(1)} = (0{,}5 \cdot s^*)$$

$$\hat{f}_{(1)} = (0{,}5 \cdot s^*) \ .$$

Anhang 3

Grafisch würden die entsprechenden $\hat{e}$-$\hat{f}$-Kombinationen allgemein durch eine 45°-Linie durch den Ursprung gekennzeichnet (vgl. **Einigungslinie 1** in Abb. 3). Der Schnittpunkt dieser Einigungslinie mit der Verhandlungslinie bestimmte dann das konkrete Verhandlungsergebnis (vgl. L_1 in Abb. 3). Im vorliegenden Fall erhielte jeder Spieler also einen Gewinn von 9; dazu hätte A von dem bei der Strategienkombination a_1/b_1 erzielten Einzelgewinn von 16 insgesamt 7 an B als Ausgleichszahlung zu leisten.

Im vorliegenden Beispiel könnte die nach (1) gefundene Lösung durchaus als akzeptabel angesehen werden; insbesondere ist auch die Bedingung (14) eingehalten. Allgemein ist jedoch keineswegs gesichert, dass eine (15.1) entsprechende Aufteilung auch tatsächlich mit (14) vereinbar ist. Beispiele für diese Konstellation lassen sich leicht finden. Konzept (1) kann somit allenfalls für speziell strukturierte Situationen, nicht jedoch allgemein als akzeptabler Lösungsansatz angesehen werden.

2. Aufteilung der Kooperationsrente

relative Gleichverteilung

Ein Ansatz, der die zuletzt aufgezeigte Schwäche vermeidet, bestünde darin, nicht den Gesamtgewinn gleichmäßig aufzuteilen, sondern nur den durch die Kooperation für beide Spieler gemeinsam zusätzlich erzielbaren Gewinn, die sogenannte **Kooperationsrente.**[2] Dabei sei die Kooperationsrente r definiert als Differenz

- zwischen dem maximal erzielbaren Gesamtgewinn s^* gem. (12)
- und der Summe der bei Kooperationsverzicht mindestens erzielbaren Individualgewinne $\bar{e}$ und $\bar{f}$ (vgl. (14′)!).

1 Der Index (1) soll verdeutlichen, dass es sich um die Lösungswerte nach dem hier mit (1) numerierten Konzept handelt.

2 Das im folgenden dargestellte Lösungskonzept kann als Spezialfall der sog. SHAPLEY-Lösung für kooperative n-Personen-Spiele angesehen werden, die hier nicht weiter behandelt wird. Vgl. LUCE/RAIFFA (1957), S. 137–140.

Formal gilt also:

$$r \;=\; s^* \;-\; (\bar{e}+\bar{f})\;.$$

Das hier behandelte Konzept sieht nun vor, dass jedem Spieler zunächst sein allein erzielbarer Mindestgewinn $\bar{e}$ bzw. $\bar{f}$ lt. (14) zugestanden wird und die darüber hinaus erzielbare Kooperationsrente r gleichmäßig auf beide Spieler aufgeteilt wird.

Für die nach diesem Konzept zustandekommende Aufteilung würde somit allgemein

$$\hat{e}_{(2)} \;=\; \bar{e} \;+\; 0{,}5\cdot\big(s^*-(\bar{e}+\bar{f})\big)$$

$$\hat{f}_{(2)} \;=\; \bar{f} \;+\; 0{,}5\cdot\big(s^*-(\bar{e}+\bar{f})\big)$$

gelten, woraus nach geeigneter Umformung folgt:

$$\text{(15.2)}\qquad \hat{e}_{(2)} \;=\; 0{,}5\cdot\big(s^*+(\bar{e}-\bar{f})\big)$$

$$\hat{f}_{(2)} \;=\; 0{,}5\cdot\big(s^*+(\bar{f}-\bar{e})\big)\;.$$

Anhang 3

In Abb. 3 werden die entsprechenden $\hat{e}$-$\hat{f}$-Kombinationen allgemein durch die den Punkt [1/2] durchlaufende 45°-Linie gekennzeichnet (**Einigungslinie 2**). Der Schnittpunkt mit der Verhandlungslinie bestimmt das diesem Konzept entsprechende konkrete Verhandlungsergebnis (vgl. L_2 in Abb. 3).

Im vorliegenden Fall gilt nun bekanntlich:

$$s^* \;=\; 18\,; \qquad \bar{e} \;=\; 4\,; \qquad \bar{f} \;=\; 6\;.$$

Daraus folgt für die Kooperationsrente

$$r \;=\; 18 \;-\; (4+6) \;=\; 8$$

und gem. (15.2) als Verhandlungsergebnis

$$\hat{e}_{(2)} \;=\; 0{,}5\cdot(18+4-6) \;=\; 8$$

$$\hat{f}_{(2)} \;=\; 0{,}5\cdot(18+6-4) \;=\; 10\;.$$

Im vorliegenden Beispiel dürfte die so gefundene Lösung allgemein als akzeptabel empfunden werden. Für andersgeartete Konstellationen weist das untersuchte Lösungskonzept jedoch ebenfalls gewisse Schwächen auf.[1)]

Übungsaufgabe 11:

a) Erstellen Sie das Gewinn-Diagramm für das Spiel vom Typ des „Gefangenen-Dilemmas“, das in der ersten Tabelle des Beispiels 5 verdeutlicht wird, und zeichnen Sie die „Verhandlungslinie“ ein!

b) Ermitteln Sie jeweils grafisch und rechnerisch die Lösungen, die sich nach beiden dargestellten Konzepten ergeben, und kommentieren Sie kurz die Ergebnisse!

offene Probleme:

Wir wollen es mit dieser exemplarischen Verdeutlichung kooperativer Zwei-Personen-Spiele bewenden lassen und zum Abschluss dieses Unterkapitels nur noch stichwortartig auf einige offene Probleme hinweisen:

– Drohpotential

– Neben den Gewinnbeträgen für die beiden Spieler könnte auch deren jeweiliges **Drohpotential** berücksichtigt werden, d.h. deren Möglichkeiten, – evtl. mit nur geringen eigenen Einbußen – dem Gegenspieler großen Schaden zuzufügen. Dieser Aspekt könnte sich einerseits in einer anderen Definition des Ausgangspunktes oder aber auch in einem anderen Aussehen der Einigungslinie niederschlagen.

– Unmöglichkeit von Ausgleichsleistungen

– Weiterhin wären auch solche Spielsituationen zu erörtern, in denen zwar Kooperation möglich ist, jedoch **keine Ausgleichsleistungen.** Es wäre dann zu untersuchen, auf welches (evtl. gemischte) Strategienpaar sich die Spieler einigen oder auch auf welchen Zufallsprozess zur Auswahl zwischen mehreren „bevorzugten“ Strategienpaaren.[2)]

– Nutzenvergleich

– Zusätzliche Probleme treten auf, wenn zwar Ausgleichsleistungen zugelassen sind, die Spielergebnisse jedoch nicht in Geldeinheiten, sondern etwa in **Nutzengrößen** angegeben werden. Dann ist es möglich, dass der mit einer bestimmten Ausgleichsleistung verbundene Nutzenzuwachs nicht mehr betragsgleich mit der korrespondierenden Nutzenminderung des anderen Spielers ist. Darüber hinaus besteht das grundlegende Problem, wie denn die

---

1 Vgl. hierzu etwa LUCE/RAIFFA (1957), S. 139 f.

2 So läge es beim „Kampf der Geschlechter“ (vgl. Tabelle in Beispiel 6) für den Fall einer kooperativen Lösung etwa nahe, dass sich beide Spieler darauf einigen, die Wahl zwischen den Strategienpaaren a_1/b_1 und a_2/b_2 einem Zufallsprozeß – beispielsweise einem Münzwurf – zu überlassen. Verhandlungsgegenstand wären dann also die Eintrittswahrscheinlichkeiten, mit denen die ausgewählten Strategienpaare zum Zuge kommen.

subjektiven Nutzenangaben verschiedener Spieler überhaupt miteinander verglichen werden können.

– Veränderungen von Nutzenschätzungen

– Außerdem ist es möglich, dass sich die **Nutzenschätzungen** der Spieler für alternative Strategienpaare im Zuge des Verhandlungsprozesses etwa in der Weise ändern, dass ein Spieler plötzlich bereit ist, selbst eine gewisse Gewinneinbuße in Kauf zu nehmen, nur um seinem Gegenspieler ebenfalls einen mehr oder weniger großen Schaden zuzufügen und ihn so zu „bestrafen“.

– Bluffstrategien

– Weitere Probleme ergeben sich, wenn man nicht mehr davon ausgeht, dass jeder Spieler auch die Ergebniswerte seines Gegenspielers genau kennt. Zusätzliche verhandlungstaktische Elemente wie **Bluffen** und Verheimlichen der eigenen Interessenlagen gewinnen dann an Bedeutung.

– Brechen von Vereinbarungen

– Als letztes sei schließlich auf die Möglichkeit hingewiesen, getroffene **Vereinbarungen nicht einzuhalten.** Hier ist es von Bedeutung, ob eine Spielsituation in einem Bereich wohl definierter Rechtspositionen angesiedelt ist, in dem getroffene Vereinbarungen notfalls unter Zuhilfenahme staatlicher Zwangsgewalt durchgesetzt werden können, oder im Bereich eher illegaler Abmachungen – wie etwa die Vereinbarung zur gemeinsamen Falschaussage im „Gefangenen-Dilemma“ oder auch verschiedene Formen von Kartellabsprachen. Jeder, der sich mit letztgenannten Fragen befasst, weiß, dass legale Kartellvereinbarungen in aller Regel leichter zustandekommen und stabiler sind als Abreden am „Rande der Legalität“, bei denen ein Vertragsbruch gar nicht oder zumindest nicht mittels gerichtlicher Hilfe bestraft werden kann. Das Streben, Kartellvereinbarungen oder ähnliche Absprachen möglichst in Formen zu kleiden, die von der Rechtsordnung gesichert sind, muss somit keineswegs nur Ausdruck gutstaatsbürgerlicher Gesinnung oder der Angst vor möglicher Bestrafung sein, sondern kann durchaus auch aus dem Versuch resultieren, entsprechende Verhandlungskonstellationen zum beiderseitigen Vorteil von einigungshemmenden Elementen zu befreien.

2.4 Allgemeine n-Personen-Spiele

2.4.1 Die charakteristische Funktion

n-Personen-Spiele

Koalitionen

Zum Abschluss unseres Überblicks über die wichtigsten Grundelemente der Spieltheorie wollen wir uns noch kurz mit einigen Fragen beschäftigen, die auftreten, wenn die Zahl der Spieler zwei übersteigt. Derartige Spielsituationen hatten wir eingangs bereits unter der Bezeichnung n-Personen-Spiele mit $n \geq 3$ eingeführt. Der wesentliche Unterschied solcher Spiele zu den Zwei-Personen-Spielen besteht darin, dass im Falle grundsätzlich vorhandener Kooperationsmöglichkeiten nun auch Kooperationsabsprachen getroffen werden können, an denen nicht mehr *alle* Spieler beteiligt sind. Sich dadurch bildende Teilgruppen von Spielern bezeichnet man naheliegenderweise als **Koalitionen.**

Von besonderem Interesse bei der Untersuchung derartiger Konfliktfälle ist dann die Frage, inwieweit sich gewisse allgemeine Anhaltspunkte dafür finden lassen,

– welche Arten von Koalitionen bei rationalem Verhalten der einzelnen Spieler überhaupt eine nennenswerte Chance haben, realisiert zu werden und sich auch als haltbar zu erweisen,

– und im Zusammenhang damit, welche Verteilungsschlüssel des insgesamt erzielbaren Gewinnbetrages sich dabei ergeben werden.

charakteristische Funktion

Bei der Untersuchung dieser Fragen bedient man sich allgemein einer gegenüber der bisher verwendeten Matrix-Schreibweise vereinfachenden und komprimierenden Darstellung der Spielsituation in Form der sogenannten **charakteristischen Funktion.** Zur näheren Erklärung dieser Darstellungsform seien zunächst folgende Symbole definiert:

j: Index für Spieler $(j=1, 2, \ldots, n)$;

J: Menge aller j, also $J=\{1, 2, \ldots, n\}$;

K: Teilmenge von J, durch die eine bestimmte Koalition beschrieben wird.

Beteiligen sich an einem Spiel etwa 5 Spieler und bilden die Spieler 1 und 3 sowie 2, 4 und 5 jeweils eine Koalition, so könnte das in der soeben eingeführten Symbolik durch folgende Zuweisungen verdeutlicht werden:

$$J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$K_1 = \{1, 3\} \qquad K_2 = \{2, 4, 5\},$$

wobei die bei K angefügten Indices lediglich einer Nummerierung möglicher Koalitionen dienen sollen. Formal können wir nun auch einen nicht kooperierenden Spieler – Marke „Einzelkämpfer“ – als Koalition bezeichnen und etwa durch $K=\{1\}$ oder $K=\{3\}$ zum Ausdruck bringen. Darüber hinaus ist es auch zweckmäßig, rein formal auch die leere Menge $\varnothing$ als eine mögliche Koalition $K=\varnothing$ zu definieren.

Eine für das Folgende grundlegende Annahme besteht nun darin, dass wir weiterhin unterstellen, jeder möglichen Koalition K könne eindeutig ein Funktionswert $v(K)$ zugeordnet werden, der den Gewinnbetrag bezeichnet, den sich die betrachtete Koalition durch eine geeignete Auswahl ihrer Strategien *auf jeden Fall* ggf. auch gegen den Widerstand der übrigen Spieler sichern kann. Die Mengenfunktion $v(K)$ charakterisiert somit die vorliegende Spielsituation; sie wird dementsprechend als charakteristische Funktion bezeichnet. Folgendes – bewusst einfach und problemfrei gehaltenes – Beispiel eines Drei-Personen-Spiels soll den Zusammenhang zwischen der bislang gewohnten Matrixdarstellung und der **charakteristischen Funktion** verdeutlichen.

Beispiel 9: Ermittlung der charakteristischen Funktion eines Drei-Personen-Spiels
Drei Spielern A, B und C stehen jeweils die beiden Strategien a_1, a_2 bzw. b_1, b_2 bzw. c_1, c_2 zur Auswahl. Je nachdem, welche Strategien sie realisieren, ergeben sich die in nachstehender Tabelle angegebenen Gewinne für A, B bzw. C:

Strategienkombination			Gewinn für Spieler		
			A	B	C
a_1	b_1	c_1	3	2	3
a_1	b_1	c_2	3	2	3
a_1	b_2	c_1	3	2	3
a_1	b_2	c_2	2	3	3
a_2	b_1	c_1	3	3	2
a_2	b_1	c_2	3	2	3
a_2	b_2	c_1	3	3	2
a_2	b_2	c_2	3	3	2

Aus dieser Gesamtdarstellung können wir nun in folgender Weise drei Spielmatrizen der bislang gewohnten Art ableiten:

1. Mindestgewinne der Einzelspieler

- Wir betrachten jeweils einen der drei Spieler als Einzelkämpfer mit zwei Strategien.
- Die beiden anderen Spieler werden als Koalition angesehen, der jeweils insgesamt vier Strategienkombinationen zur Auswahl stehen.

Für Spieler A ergibt sich so die in der folgenden Tabelle dargestellte Spielmatrix. (Beachten Sie die in den Randzeilen und -spalten bezeichneten Minimalbeträge zunächst nicht!):

		Koalition B & C				
		$b_1; c_1$	$b_1; c_2$	$b_2; c_1$	$b_2; c_2$	min
Spieler	a_1	3/5	3/5	3/5	2/6	2/...
A	a_2	3/5	3/5	3/5	3/5	3/...
	min	.../5	.../5	.../5	.../5	

Die Zahlenangaben in den Feldern bezeichnen dabei jeweils den Gewinn von A (erste Zahl) sowie die Gewinnsumme seiner beiden koalierenden Gegenspieler (zweite Zahl).

Spielt A also beispielsweise Strategie a_1 und einigen sich seine Gegenspieler auf die Kombination b_2/c_1, so ergibt sich gem. der ersten Tabelle in diesem Beispiel (dritte Zeile) für A ein Gewinn von 3, für B und C eine Gewinnsumme von 5.

In analoger Weise ergeben sich die Matrizen für B und C.

		Koalition A & C				
		$a_1; c_1$	$a_1; c_2$	$a_2; c_1$	$a_2; c_2$	min
Spieler	b_1	2/6	2/6	3/5	2/6	2/...
B	b_2	2/6	3/5	3/5	3/5	2/...
	min	.../6	.../5	.../5	.../5	

		Koalition A & B				
		$a_1; b_1$	$a_1; b_2$	$a_2; b_1$	$a_2; b_2$	min
Spieler	c_1	3/5	3/5	2/6	2/6	2/...
C	c_2	3/5	3/5	3/5	2/6	2/...
	min	.../6	.../5	.../5	.../6	

Betrachten wir die drei Matrizen und insbesondere die in den Randspalten und -zeilen angegebenen Minimalgewinne, so erkennen wir, dass A sich durch Wahl von a_2 auf jeden Fall einen Gewinn von 3 sichern kann. Für B und C beläuft sich der Mindestgewinn, den sie jeweils auch ohne jegliche Kooperation erlangen können, demgegenüber – unabhängig von der Wahl ihrer Strategie – nur auf 2. Für die charakteristische Funktion gilt somit zunächst, wenn wir die Spieler in alphabetischer Reihenfolge nummerieren:

$$v(1) = 3; \qquad v(2) = 2; \qquad v(3) = 2 .$$ [1]

2. Mindestgewinne der Zweier-Koalitionen

Weiterhin können wir aus den Matrizen auch jeweils ableiten, welche Mindestgewinne sich die drei denkbaren Koalitionspaare jeweils sichern könnten. Die Koalition B&C kann sich offenbar auch ohne Kooperation mit A einen Gewinn von 5 sichern (vgl. Tabelle für die Koalition B&C, Randzeile), während die Koalitionen A&C und A&B durch Wahl der Strategienkombinationen a_1; c_1 bzw. a_2; b_2 jeweils einen Gewinn von 6 sichern können (vgl. Randzeilen der Tabellen für die Koalitionen A&C bzw. A&B). Somit gilt für die charakteristische Funktion weiter:

$$v(1;2) = 6; \qquad v(1;3) = 6; \qquad v(2;3) = 5 .$$

Bilden schließlich alle Spieler eine große Koalition, so erreichen sie insgesamt mit Sicherheit einen Gewinn von 8; also gilt:

$$v(1;2;3) = 8 .$$

Zusammenfassend können wir für die der Ausgangstabelle in diesem Beispiel entsprechende charakteristische Funktion also schreiben:

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & v(\emptyset) = 0; & \\ v(1) = 3; & v(2) = 2; & v(3) = 2; \\ v(1;2) = 6 & v(1;3) = 6; & v(2;3) = 5 \\ & v(1;2;3) = 8 & \end{array}}$$

Häufig ist die Ermittlung der charakteristischen Funktion allerdings nicht so einfach wie in dem vorliegenden Beispielfall. Wir müssen an dieser Stelle jedoch auf eine Erörterung der entsprechenden Probleme verzichten und wollen im folgenden jeweils davon ausgehen, dass die charakteristische Funktion des betrachteten Spieles vorgegeben ist.

1 Da es sich bei den Klammerausdrücken jeweils um Mengen handelt, wäre die korrekte Schreibweise v({1}), v({2}), …, und später v({1,2}), v({1,2,3}) etc. Aus Gründen der schreibtechnischen Einfachheit werden wir im folgenden jedoch auf die geschweiften Klammern verzichten.

Allerdings wollen wir dabei für das Aussehen der charakteristischen Funktion $v(K)$ folgende Einschränkung machen:

Annahmen über die charakteristische Funktion

– Zum einen soll

$$(16.1) \quad v(\varnothing) = 0$$

gelten. D.h., der leeren Menge von Spielern, also einer nicht existenten Koalition wird der Gewinn 0 zugeordnet.

Gewinn der leeren Menge

– Weiterhin wird verlangt, dass für zwei beliebige gleichzeitig realisierbare Koalitionen K_1 und K_2 grundsätzlich[1]

$$(16.2) \quad v(K_1) + v(K_2) \leq v(K_1 \cup K_2) \quad \text{mit} \quad K_1, K_2 \subset J \quad \text{und} \quad (K_1 \cap K_2) = \varnothing \ ^{2)}$$

gilt. Diese als **Superadditivität** bezeichnete Eigenschaft bedeutet anschaulich interpretiert, dass der Gewinnbetrag, den sich zwei Koalitionen durch Zusammenschluss zu einer größeren Koalition sichern können, mindestens so groß ist wie die Summe der einzelnen Koalitionsgewinne. Diese Annahme erscheint einleuchtend; denn auch nach einer gemeinsamen Absprache könnten die Koalitionen K_1 und K_2 notfalls ja genau die gleichen Einzelstrategien realisieren wie ohne Zusammenschluss. Es ist also nicht einzusehen, warum der gemeinsame Gewinn kleiner sein sollte als die Summe der Einzelgewinne. Andererseits eröffnet der Zusammenschluss jedoch evtl. die Möglichkeit, zusätzliche Kooperationsrenten zu erzielen. Das ≤ - Zeichen in (16.2) erscheint somit als einzig sinnvolle Relation.

Superadditivität

1 Die Zeichen $\cup$, $\cap$, $\subset$, $\varnothing$ entstammen der Mengenlehre und bedeuten (in der gewählten Reihenfolge) „Vereinigungsmenge“, „Schnittmenge“, „Teilmenge“ und „leere Menge“.

2 Zwei Koalitionen K_1 und K_2 können nur dann gleichzeitig verwirklicht werden, wenn kein Spieler beiden Koalitionen angehört. Formal bedeutet dies, dass K_1 und K_2 kein gemeinsames Element haben dürfen, also disjunkte Mengen darstellen und ihr Durchschnitt dementsprechend leer ist.

Fortsetzung von Beispiel 9: Superadditivität

Dass die Bedingung (16.2) in unserem Beispiel erfüllt ist, kann verdeutlicht werden, indem wir für alle denkbaren Koalitionen K_1 und K_2, die gleichzeitig realisierbar sind, die Summe aus $v(K_1)$ und $v(K_2)$ mit $v(K_1 \cup K_2)$ vergleichen. Aus der charakteristischen Funktion für Beispiel 9 können dementsprechend folgende Relationen abgeleitet werden.

K_1	K_2	$v(K_1)$	+	$v(K_2)$		$v(K_1 \cup K_2)$
[1]	[2]	3	+	2 =	5 <	6
[1]	[3]	3	+	2 =	5 <	6
[1]	[2,3]	3	+	5 =	8 =	8
[2]	[3]	2	+	2 =	4 <	5
[2]	[1,3]	2	+	6 =	8 =	8
[3]	[1,2]	2	+	6 =	8 =	8

wesentliche und unwesentliche Spiele

Relation (16.2) liefert zugleich auch den Anknüpfungspunkt für die Definition zweier unterschiedlicher Kategorien von Spielen:

Gilt für sämtliche möglichen Paare von Koalitionen K_1, K_2 grundsätzlich die Relation

$$(16.2.1) \qquad v(K_1) + v(K_2) = v(K_1 \cup K_2) ,$$

so spricht man von einem **unwesentlichen Spiel.**

Gibt es hingegen mindestens ein Paar möglicher Koalitionen, für das

$$(16.2.2) \qquad v(K_1) + v(K_2) < v(K_1 \cup K_2)$$

gilt, so spricht man von einem **wesentlichen Spiel.**

Unwesentliche Spiele sind also dadurch gekennzeichnet, dass die Frage der Koalitionsbildung ohne Bedeutung ist. Denn es bestehen keinerlei Möglichkeiten, durch gemeinsames Vorgehen mehr zu erreichen als die Summe der auch ohne Kooperation möglichen Gewinne. Alle Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele sind somit unwesentlich in diesem Sinne. Wir erkennen daran, dass sich die angegebene Definition der „Wesentlichkeit“ ausschließlich auf das Problem der Koalitionsbildung bezieht, nicht jedoch auf die in früheren Abschnitten erörterten Fragen der Strategiewahl, der Gleichgewichtslösungen etc.

Übungsaufgabe 12:

Gehen Sie von der in der ersten Tabelle des Beispiels 5 dargestellten Spielmatrix des Gefangenen-Dilemmas aus und ermitteln Sie die charakteristische Funktion für dieses Zwei-Personen-Spiel! Ist die Bedingung der Superadditivität erfüllt?

2.4.2 Imputationen

Im Folgenden wollen wir uns auf die Betrachtung *wesentlicher* Spiele beschränken und folgende weitere Symbole definieren:

e_j: Gewinn, den der Spieler j unter Berücksichtigung etwaiger Ausgleichszahlungen in einer bestimmten Koalitionskonstellation tatsächlich erzielt;

$E=(e_1, e_2, \ldots, e_n)$: Vektor der Gewinne aller n Spieler.

Der Ausgang eines Spiels kann somit durch einen entsprechenden **Gewinnvektor** gekennzeichnet werden. Als mögliche Lösungen werden allerdings üblicherweise nur solche Vektoren betrachtet, die bestimmte Bedingungen erfüllen:

Rationalitätsanforderungen an mögliche Lösungen

(1) **Individuelle Rationalität**

Jedem Spieler muss mindestens soviel zugestanden werden, wie er sich als Einzelkämpfer aus eigener Kraft sichern könnte. D.h., es muss für alle Spieler

(17.1) $$e_j \geq v(j) \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

gelten. Die Analogie dieser Bedingung zu der für kooperative Zwei-Personen-Spiele formulierten Relation (14) oder (14′) ist offensichtlich.

(2) **Kollektive Rationalität**

Weiterhin wird verlangt, dass die Summe der von allen n Spielern insgesamt erzielten Gewinne dem im Falle einer umfassenden Koalition sämtlicher Spieler erzielbaren maximalen Koalitionsgewinn v(J) entspricht; also

(17.2) $$\sum_{j=1}^{n} e_j = v(J) \; .$$

> Bei einer Lösung, die (17.2) nicht erfüllt, bestünde immer die Möglichkeit, zu einer umfassenden Koalition überzugehen und den dabei erzielbaren Mehrgewinn etwa gleichmäßig auf alle n Spieler zu verteilen. Jeder einzelne Spieler stünde nach einer solchen Vereinbarung dann besser da als vorher, ohne das die Lage auch nur eines anderen Spielers dadurch verschlechtert worden wäre. Auch hier ist die Analogie zu der für das kooperative Zwei-Personen-Spiel formulierten Bedingung (12) evident.

Imputation

Ein Gewinnvektor, der den Bedingungen (17.1) und (17.2) genügt, wird allgemein als **Imputation** bezeichnet. Es lässt sich zeigen, dass für jedes wesentliche Spiel stets mehrere Gewinnvektoren, die (17.1) und (17.2) entsprechen, existieren, dass es also *mehrere* Imputationen gibt. Es stellt sich daher als weiteres die Frage, ob alle Imputationen in gleicher Weise als plausible Lösungen anzusehen sind, oder ob sich zusätzliche Kriterien finden lassen, um die Menge möglicher Lösungen weiter zu reduzieren. Bevor wir auf diese Frage eingehen, wollen wir den Begriff der Imputation zunächst jedoch an unserem *Beispiel 9* verdeutlichen.

Fortsetzung von Beispiel 9: Ermittlung der Imputationen

Entsprechend der in Beispiel 9 dargestellten charakteristischen Funktion dieses Spiels muss eine Imputation gem. (17.1) und (17.2) den Bedingungen

$$(*) \quad e_1 \geq 3; \quad e_2 \geq 2; \quad e_3 \geq 2$$

$$(**) \quad e_1 + e_2 + e_3 = 8$$

genügen.

Zur grafischen Verdeutlichung lösen wir die letzte Gleichung nach e_3 auf, also

$$e_3 = 8 - e_1 - e_2,$$

und setzen diesen Ausdruck in die für e_3 geltende Ungleichung ein, so dass gilt:

$$8 - e_1 - e_2 \geq 2; \qquad \text{d.h.} \quad e_1 + e_2 \leq 6 .$$

Bezüglich der Gewinne der Spieler e_1 und e_2 muss eine Imputation also den drei Bedingungen

$$e_1 \geq 3; \quad e_2 \geq 2 \quad \text{und} \quad e_1 + e_2 \leq 6$$

genügen. Diese Bedingungen lassen sich in einem e_1-e_2-Koordinatensystem (Abb. 4) in Form von drei Geraden verdeutlichen.[1)]

Anhang 4

1 Die an den Geraden eingezeichneten Pfeile weisen in die Richtung solcher e_1-e_2-Kombinationen, die im Hinblick auf die betrachtete Bedingung als zulässig anzusehen sind.

Die drei genannten Bedingungen sind offenbar genau bei all den e_1-e_2-Kombinationen erfüllt, die durch einen Punkt innerhalb oder am Rande der gerastert umrahmten Dreiecksfläche gekennzeichnet werden. Dieses Dreieck verdeutlicht also die Gesamtheit aller möglichen Imputationen, wobei für den mit einer bestimmten e_1-e_2-Kombination korrespondierenden e_3-Wert jeweils $e_3 = 8 - e_1 - e_2$ gilt.

Beschränken wir uns der Einfachheit halber nur auf ganzzahlige Lösungen, so sind in dem betrachteten Beispiel also folgende Gewinnvektoren als Imputationen in Betracht zu ziehen (vgl. Abb. 4):

$$E_I: \quad e_1 = 3; \quad e_2 = 3; \quad e_3 = 2$$
$$E_{II}: \quad e_1 = 3; \quad e_2 = 2; \quad e_3 = 3$$
$$E_{III}: \quad e_1 = 4; \quad e_2 = 2; \quad e_3 = 2.$$

Außerdem stellen auch noch alle Linearkombinationen dieser drei Ecklösungen weitere (nicht ganzzahlige) Imputationen dar.

Übungsaufgabe 13:

Die charakteristische Funktion eines Drei-Personen-Spiels laute:

$$v(1) = 0; \qquad v(2) = 2; \qquad v(3) = 3$$
$$v(1,2) = 5; \qquad v(1,3) = 7; \qquad v(2,3) = 8$$
$$v(1,2,3) = 10.$$

Stellen Sie die der individuellen und der kollektiven Rationalität entsprechenden Relationen auf und verdeutlichen Sie die Gesamtheit aller Imputationen in einem e_1-e_2-Diagramm nach Art von Abb. 4!

2.4.3 Der „Kern" eines Spiels

Wenden wir uns nun der Frage zu, ob alle Imputationen in gleicher Weise als plausible Lösung angesehen werden können. Dazu wollen wir zunächst noch einmal auf Beispiel 9 zurückgreifen und die Stabilität der drei ganzzahligen Imputationen analysieren.

Fortsetzung von Beispiel 9: Stabilität der Imputationen

Betrachten wir die oben angegebenen Imputationen E_I, E_{II}, E_{III} und beachten wir außerdem die in Beispiel 9 dargestellte charakteristische Funktion, so wird sofort folgende Instabilität deutlich:

– Die Spieler 1 und 2 erreichen bei $E_{II}=(3;\ 2;\ 3)$ gemeinsam einen Gewinn von 5. Verzichten sie jedoch auf jede Kooperation mit Spieler 3, so können sie sich einen gemeinsamen Gewinn von $v(1,2)=6$ sichern. Also wäre es für diese beiden lohnend, von E_{II} abzuweichen und beispielsweise die Imputation $E_{II'}=(3{,}5;\ 2{,}5;\ 2)$ durchzusetzen.

– Bei $E_{II'}$, genauso wie bei $E_{III}=(4;\ 2;\ 2)$ erzielen die Spieler 2 und 3 zusammen mit 4,5 bzw. 4 jedoch weniger als sie sich ebenfalls durch eine reine Zweierkoalition sichern könnten, nämlich $v(2,3)=5$. Also wäre es für diese beiden lohnend, sich weder auf $E_{II'}$ noch E_{III} einzulassen, sondern stattdessen etwa $E_{III'}=(3;\ 2{,}75;\ 2{,}25)$ zu realisieren.

– Jedoch auch $E_{III'}$ und ebenso $E_I=(3;\ 3;\ 2)$ stellen ebenfalls keine stabilen Lösungen dar. Denn in diesen Fällen wäre es für die Spieler 1 und 3 von Vorteil, einem derartigen Arrangement nicht zuzustimmen und stattdessen den gemeinsam erzielbaren Gewinn $v(1,3)=6$ etwa in der Art $E_{I'}=(3{,}5;\ 2;\ 2{,}5)$ aufzuteilen.

Die zuletzt genannte Imputation $E_{I'}$ macht es nun wiederum für die Spieler 2 und 3 vorteilhaft, auszubrechen usw.

Die an unserem Beispiel verdeutlichte Kette einander folgender instabiler Imputationen könnte offenbar nur dann durchbrochen werden, wenn es gelänge, einen solchen Verteilungsschlüssel zu finden, dass jede beliebige Teilmenge von K Spielern durch die betrachtete Imputation mindestens soviel gewinnt, wie sie sich auch ohne Kooperation mit den übrigen Spielern sichern könnte, also $v(K)$.

Stabilitätsbedingung

Als weitere Stabilitätsbedingung können wir somit über (17.1) und (17.2) hinaus die Relation

$$(17.3) \qquad \sum_{j \varepsilon K} e_j \geq v(K) \qquad \text{für alle} \quad K \subset J$$

formulieren.

Diese Bedingung verlangt offenbar nichts anderes, als dass die durch (17.1) zunächst nur für jeden Einzelspieler verlangte **individuelle Rationalität** auch im Hinblick auf jede denkbare Spielgruppe zutrifft. Wir könnten (17.3) daher auch als Bedingung der **Gruppenrationalität** bezeichnen.

Gruppenrationalität

Die Gesamtheit aller Gewinnvektoren, die jeweils allen drei Rationalitätsbedingungen (17.1), (17.2) und (17.3) genügen, wird nun als der **Kern** eines Spieles bezeichnet. Eine derartige Kern-Lösung weist insofern eine gewisse Stabilität auf, als es für keine Teilgruppe von Spielern die Möglichkeit gibt, mit der Aussicht auf einen höheren Gruppengewinn aus dem Koalitionsgefüge auszubrechen, das der betrachteten Kern-Lösung zugrundeliegt.

Kern eines Spiels

Ein allgemeines Lösungskonzept für n-Personen-Spiele ist mit dem Begriff des Kerns jedoch noch *nicht* gefunden; denn in vielen Fällen stellt der Kern eine leere Menge dar, d.h., es gibt überhaupt keine Imputation, für die auch noch (17.3) erfüllt ist. Ein solcher Fall ist bei unserem Beispiel 9 in der ersten Tabelle gegeben, das wir zur Verdeutlichung des Kern-Konzepts noch einmal betrachten wollen.

Fortsetzung von Beispiel 9: Kern eines Drei-Personen-Spiels

Entsprechend der in Beispiel 9 dargestellten charakteristischen Funktion dieses Spiels müsste eine Kern-Lösung gleichzeitig folgenden drei Gruppen von Bedingungen gem. (17.1), (17.2) und (17.3) genügen:

$$(*)\qquad e_1 \geq 3; \qquad e_2 \geq 2; \qquad e_3 \geq 2$$

$$(**)\qquad (e_1 + e_2 + e_3) = 8$$

$$(***)\qquad (e_1 + e_2) \geq 6; \qquad (e_1 + e_3) \geq 6; \qquad (e_2 + e_3) \geq 5 .$$

Die Bedingungen (*) und (**) sind in Abb. 4 bereits verdeutlicht worden; sie konstituieren das „Imputationsdreieck" E_I, E_{II}, E_{III}. Substituieren wir nun wieder

Anhang 4

$$e_3 = 8 - e_1 - e_2 ,$$

so können die Bedingungen (***) umgeschrieben werden zu

$$e_1 + e_2 \geq 6$$

$$(e_1 + 8 - e_1 - e_2) \geq 6 \quad \rightarrow \quad e_2 \leq 2$$

$$(e_2 + 8 - e_1 - e_2) \geq 5 \quad \rightarrow \quad e_1 \leq 3 .$$

Aus (*) und (**) folgte aber, wie wir bereits gesehen haben, dass gleichzeitig gelten muss:

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &\leq 6 \\ e_2 &\geq 2 \\ e_1 &\geq 3 . \end{aligned}$$

Die drei Relationen sind den drei zuvor abgeleiteten Ungleichungen offenbar gerade entgegengesetzt, so dass die miteinander korrespondierenden Ungleichungen jeweils nur dann gleichzeitig erfüllt sein können, wenn jeweils das Gleichheitszeichen gilt. Dann sind die drei Relationen untereinander jedoch nicht mehr vereinbar; denn $e_1 + e_2 = 6$ widerspricht offensichtlich $e_1 = 3$ und $e_2 = 2$.

Anhang 5

In Abb. 5 wird dieser Sachverhalt auch grafisch verdeutlicht. In dieser Abbildung sind zusätzlich zu den in Abb. 4 dargestellten Linien auch die aus (***) abgeleiteten Relationen in Form von drei weiteren Linien eingezeichnet worden. Wir erkennen sofort, dass es keinen Punkt geben kann, der gleichzeitig

- auf der Senkrechten $(e_1 = 3)$,
- auf der Waagerechten $(e_2 = 2)$ und
- auf der Diagonalen $(e_1 + e_2 = 6)$

liegt.

In unserem Beispiel 9 stellt der Kern also eine leere Menge dar.

Übungshinweis

Daneben gibt es natürlich auch Spiele, in denen der Kern nicht leer ist, sondern einen oder auch mehrere verschiedene Gewinnvektoren umfasst. Die folgende Aufgabe dient zur Verdeutlichung dieser Möglichkeiten. Außer der Bearbeitung dieser Aufgabe empfehlen wir Ihnen zudem zu versuchen, die Aufgabe 5.16 in BITZ (2003) zu lösen und die zugehörige Lösung gründlich durchzuarbeiten.

Übungsaufgabe 14:

a) Gehen Sie von dem in Übungsaufgabe 13 dargestellten Drei-Personen-Spiel aus und formulieren Sie die der individuellen und kollektiven Rationalität sowie der Gruppenrationalität entsprechenden Bedingungen. Stellen Sie mittels einer grafischen Darstellung nach Art von Abb. 5 fest, ob für dieses Spiel ein Kern existiert, und geben Sie ggf. den entsprechenden Gewinnvektor an!

b) Lösen Sie die unter a) genannte Aufgabe erneut für den Fall, dass – bei ansonsten unveränderter charakteristischer Funktion – nun $v(1, 2) = 4$ (statt bislang $v(1, 2) = 5$) gilt!

2.5 Zur Relevanz spieltheoretischer Ansätze

Die zurückliegenden Abschnitte sollten ausgereicht haben, um Ihnen einen gewissen Eindruck von Gegenständen und Methoden der Spieltheorie zu vermitteln. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass wir uns bezüglich der *formalen* Seite bewusst auf vergleichsweise einfache Darstellungsformen beschränkt haben und weitgehend darauf verzichtet haben, die mathematische Feinstruktur verschiedener Probleme und Lösungsansätze zu vermitteln. Vermutlich werden die trotz dieser Abstinenz verbliebenen formalen Anforderungen etlichen von Ihnen schon als schwierig genug erschienen sein – wir hoffen, nicht als *zu* schwierig. Ohne ein solches Minimum an formalen Darstellungsformen ist die Erörterung einer mathematisch orientierten Theorie – und als solche ist die Spieltheorie ohne Zweifel zu verstehen – jedoch nicht möglich.

Wir haben bei der Erörterung der verschiedenen spieltheoretischen Ansätze im Einzelnen schon auf die jeweils maßgeblichen Prämissen und die daraus resultierende Begrenzung der Aussagefähigkeit der abgeleiteten Ergebnisse hingewiesen. Insofern dürfte die naive Vorstellung, die Spieltheorie könne den Patentschlüssel zur Lösung aller Konfliktsituationen bereitstellen, bei Ihnen erst gar nicht aufgekommen sein.

Bedeutung für die Wirtschaftswissenschaft

In der Tat ist die ökonomische Relevanz spieltheoretischer Ansätze auch nicht so sehr in den entwickelten Lösungskonzepten zu sehen, zumal schon der Begriff der Lösung selbst – wie wir gesehen haben – keineswegs eindeutig definiert ist. Die Bedeutung der Spieltheorie für die Wirtschaftswissenschaft – wie auch für die Sozialwissenschaften – liegt in erster Linie darin, dass ein formalisierter und klar definierter Begriffsapparat zur Verfügung gestellt wird, der es erlaubt,

- Konfliktsituationen der unterschiedlichsten Art in bestimmten einheitlichen Grundkategorien zu beschreiben;
- die typischen Problemstrukturen verschiedener Konfliktsituationen herauszuarbeiten und so zu einer Typologie von Konfliktarten zu kommen;
- Voraussetzungen für das Zustandekommen verschiedener Arten von Konfliktlösungen exakt zu formulieren;
- und vertiefte Einblicke in die Macht-, Droh- und Abhängigkeitspositionen bei unterschiedlichen Konfliktsituationen zu gewinnen.

Dabei sind diese Erkenntnismöglichkeiten zunächst natürlich stets durch die jeweiligen Prämissenkränze der verschiedenen Ansätze begrenzt. Der Inhalt dieser Prämissen selbst steht zunächst jedoch weder bezüglich seiner deskriptiven noch hinsichtlich seiner präskriptiven Relevanz zur Diskussion. Insoweit ist die Spieltheorie eine reine Formaltheorie.

Andererseits lassen sich auch hinlänglich viele Beispiele finden, in denen spieltheoretische Instrumente mit großem Gewinn herangezogen werden können, und zwar sowohl unter deskriptiven wie auch unter präskriptiven Aspekten.

So lassen sich etwa Erkenntnisse, die aus der Analyse des Gefangenen-Dilemmas gewonnen wurden, häufig auf die Situation konkurrierender Unternehmen übertragen (vgl. z.B. HAX (1974); BAMBERG/COENENBERG (2002)). Gleiches gilt auch für Spiele vom Typ des „Kampfes der Geschlechter“ (vgl. z.B. BAMBERG/COENENBERG (2002)).

Auf eine spieltheoretische Deutung von Versuchen, sich in Verhandlungen im Interesse einer für alle Verhandlungsteilnehmer vorteilhaften Stabilisierung vereinbarter Kooperationsformen möglichst im Bereich notfalls mittels staatlicher Zwangsgewalt durchsetzbarer Verträge zu bewegen, haben wir am Ende des Abschnittes 2.3.2.2 bereits hingewiesen. Weitere interessante Einsichten lassen sich gewinnen, wenn man etwa Tarifverhandlungen mit Hilfe spieltheoretischer Instrumente analysiert oder die Machtstrukturen in Entscheidungsgremien wie z.B. Vorständen, Aufsichtsräten, Parlamenten etc. unter Einbeziehung verschiedener Besonderheiten wie Vetorechte, Vorschriften über qualifizierte Mehrheiten, Regelungen über Stichentscheide durch den Vorsitzenden und ähnliches analysiert. Eine anregende Zusammenstellung verschiedener Untersuchungen, insbesondere zu den zuletzt angesprochenen Problemen, findet der interessierte Leser in dem Sammelband von SHUBIK (1965), insbesondere S. 143–215.

Als letztes – und das gilt zugleich auch für die in den vorangegangenen Kapiteln erörterten sonstigen entscheidungstheoretischen Ansätze in gleicher Weise – ist schließlich darauf hinzuweisen, dass es äußerst töricht wäre, den Wert theoretischer Analysen ausschließlich an ihrer aktuellen praktischen Verwertbarkeit zu messen. So können wir in der sehr viel älteren Geschichte der Naturwissenschaften beobachten, dass theoretische Entwicklungen – hier vor allem auf dem Gebiet der Mathematik – der praktischen Anwendbarkeit ihrer Ergebnisse oft Jahrzehnte oder gar Jahrhunderte vorauseilten. Ähnliches gilt übrigens auch – wenn auch in sehr viel bescheidenerem Rahmen – auf dem Gebiet der Wirtschaftswissenschaft, wo verschiedene quantitative Ansätze inzwischen weite Verbreitung in der Wirtschaftspraxis gefunden haben, die vor wenigen Jahrzehnten noch vielfach als „rein theoretische“ Entwicklungen angesehen wurden.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Im Gegensatz zum Text der Kurseinheit stellen die e_{ij}-Werte der angegebenen Ergebnismatrix Kostenbeträge dar; d.h., es wird ein möglichst kleiner Wert der Ergebnisvariablen angestrebt. Zur analogen Anwendung der beiden genannten Kriterien sind somit die Extremierungsrichtungen jeweils zu verkehren.

Dem pessimistischen **Mini-Max-Kriterium** zufolge sind nun also zunächst die Zeilenmaxima zu ermitteln und dann die Alternative mit dem **minimalen Ergebnismaximum** zu bestimmen. Umgekehrt ist bei dem optimistischen **Maxi-Max-Kriterium** die Alternative mit dem **minimalen Ergebnisminimum** zu bestimmen.

In dem vorliegenden Entscheidungsproblem würde – entsprechend der angegebenen Tabelle –

i	1	2	3
max	25	30	20←
min	10	5←	15

die analoge Anwendung

a) des Mini-Max Kriteriums zur Wahl der Alternative a_3 führen,

b) des Maxi-Max-Kriteriums zur Wahl der Alternative a_2 führen.

Übungsaufgabe 2

a) Für $\lambda = 0$ ($\lambda = 1$) läuft die Zielfunktion des HURWICZ-Kriteriums offenbar allein auf die Maximierung der Zeilenminima (Zeilenmaxima) hinaus, stimmt in diesem Grenzfall, der ja durch das Fehlen von jeglichem Optimismus (jeglichem Pessimismus) gekennzeichnet ist, also mit dem pessimistischen Mini-Max-Kriterium (optimistischen Maxi-Max-Kriterium) überein.

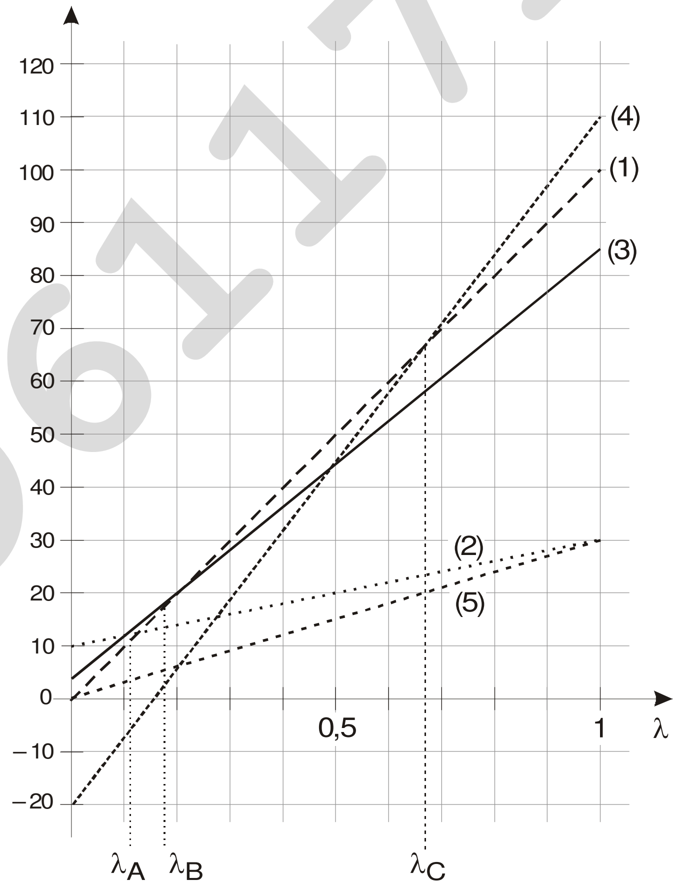
b) Bezeichnet man der Einfachheit halber den größten und den kleinsten Wert einer Ergebnisverteilung E_i mit g_i bzw. k_i, so kann die Abhängigkeit der Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ von dem Optimismusparameter λ gemäß der durch das HURWICZ-Kriterium festgelegten Zielfunktion durch die linear steigende Funktion

$$\varphi(a_i) = \lambda \cdot g_i + (1-\lambda) \cdot k_i$$
$$= k_i + (g_i - k_i) \cdot \lambda$$

zum Ausdruck gebracht werden, wobei $0 \leq \lambda \leq 1$. Für die fünf Alternativen unseres Beispieles ergeben sich also die folgenden Funktionen

$$\begin{array}{llrcrl}
(1) & \Phi(a_1) = & 0 & + & 100\lambda, \\
(2) & \Phi(a_2) = & 10 & + & 20\lambda, \\
(3) & \Phi(a_3) = & 3 & + & 82\lambda, \\
(4) & \Phi(a_4) = & -20 & + & 130\lambda, \\
(5) & \Phi(a_5) = & 0 & + & 30\lambda,
\end{array}$$

die grafisch durch die in folgender Abbildung dargestellten Geraden verdeutlicht werden können.



c) Wie aus der vorstehenden Abbildung deutlich wird, gilt für die Optimalalternative a_i^*

$$i^* = \begin{cases} 2 & \text{für } 0 \le \lambda \le \lambda_A \\ 3 & \text{für } \lambda_A \le \lambda \le \lambda_B \\ 1 & \text{für } \lambda_B \le \lambda \le \lambda_C \\ 4 & \text{für } \lambda_C \le \lambda \le 1. \end{cases}$$

Zur numerischen Bestimmung der kritischen λ-Werte sind jeweils die Schnittpunkte der den Alternativen a_2/a_3, a_3/a_1 und a_1/a_4 entsprechenden Geraden zu berechnen. Dabei ergibt sich:

$$\lambda_A\text{:}\quad 10 + 20\,\lambda_A = 3 + 82\,\lambda_A$$
$$\lambda_A = 7/62 \approx 0{,}113\ ;$$

$$\lambda_B\text{:}\quad 3 + 82\,\lambda_B = 0 + 100\,\lambda_B$$
$$\lambda_B = 3/18 \approx 0{,}167\ ;$$

$$\lambda_C\text{:}\quad 0 + 100\,\lambda_C = -20 + 130\,\lambda_C$$
$$\lambda_C = 2/3 \approx 0{,}667\ .$$

Übungsaufgabe 3

Die gesuchten Antworten können Sie unmittelbar dem letzten Teil des Abschnitts 1.4.2 entnehmen.

Übungsaufgabe 4

a) Für die drei angegebenen Entscheidungsregeln ergeben sich im Einzelnen folgende Lösungen:

(0) **Ausgangssituation:**
Für die ursprüngliche Ergebnismatrix

	s_1	s_2	s_3	s_4	min	$(\lambda = 0{,}3)$	LAPLACE
a_1	1	1	2	2	1	1,3	6/4
a_2	3	3	2	0	0	0,9	8/4
a_3	0	0	2	3	0	0,9	5/4
a_4	3	3	1	1	1	1,6	8/4

Ergebnismatrix 0

ergeben sich entsprechend der angeführten Tabelle nach den verschiedenen Entscheidungsregeln folgende Präferenzordnungen:

Mini-Max:	$a_1 \sim a_4 \succ a_2 \sim a_3$
HURWICZ $(\lambda = 0{,}3)$:	$a_4 \succ a_1 \succ a_2 \sim a_3$
LAPLACE:	$a_2 \sim a_4 \succ a_1 \succ a_3$

Präferenzordnung 0

(1) **Lineare Transformation**:
Werden alle Ergebnisse nach Maßgabe der Funktion

$$e'_{ij} = -0{,}2 + 0{,}1 \cdot e_{ij}$$

linear transformiert, so ergeben sich die in folgender Tabelle angegebenen Präferenzwerte.

	s_1	s_2	s_3	s_4	min	$(\lambda = 0{,}3)$	LAPLACE
a'_1	–0,1	–0,1	0	0	–0,1	–0,07	–0,05
a'_2	0,1	0,1	0	–0,2	–0,2	–0,11	0
a'_3	–0,2	–0,2	0	0,1	–0,2	–0,11	–0,075
a'_4	0,1	0,1	–0,1	–0,1	–0,1	–0,04	0

Ergebnismatrix 1

Wie man sich leicht überzeugt, stimmen die Präferenzordnungen, die sich auf der Basis dieser Präferenzwerte ergeben, genau mit den ursprünglichen Präferenzordnungen überein.

(2) **Streichung einer Zeile:**
Entfällt gegenüber der Ausgangssituation die Alternative a_3, so ergibt sich folgende Ergebnismatrix.

	s_1	s_2	s_3	s_4	min	$(\lambda=0{,}3)$	LAPLACE
a'_1	1	1	2	2	1	1,3	6/4
a'_2	3	3	2	0	0	0,9	8/4
a'_4	3	3	1	1	1	1,6	8/4

Ergebnismatrix 2

Wie man sofort erkennt, stimmen die Präferenzwerte der verbleibenden Alternativen nach allen drei Kriterien mit den entsprechenden Werten in der Ausgangssituation überein. Mithin bleiben auch die Präferenzordnungen zwischen den verbleibenden Alternativen unverändert.

(3) **Veränderung einer Spalte:**
Werden die Ergebniswerte der vierten Spalte durchgängig um 2 erhöht, so ergibt sich folgende revidierte Ergebnismatrix:

	s_1	s_2	s_3	s'_4	min	$(\lambda=0{,}3)$	LAPLACE
a'_1	1	1	2	4	1	1,9	8/4
a'_2	3	3	2	2	2	2,3	10/4
a'_3	0	0	2	5	0	1,5	7/4
a'_4	3	3	1	3	1	1,6	10/4

Ergebnismatrix 3

Dementsprechend lauten die Präferenzordnungen:

Mini-Max:	$a'_2 \succ a'_1 \sim a'_4 \succ a'_3$
HURWICZ $(\lambda=0{,}3)$:	$a'_2 \succ a'_1 \succ a'_4 \succ a'_3$
LAPLACE:	$a'_2 \sim a'_4 \succ a'_1 \succ a'_3$

Präferenzordnung 3

(4) **Streichung einer Spalte:**
Werden die für alle Alternativen zu jeweils übereinstimmenden Ergebnissen führenden Umweltzustände s_1 und s_2 zu einem Zustandsaggregat zusammengefasst, wird also eine von zwei identischen Spalten gestrichen, so ergibt sich folgende revidierte Ergebnismatrix:

	$s_{1/2}$	s_3	s_4	min	$(\lambda = 0{,}3)$	LAPLACE
a'_1	1	2	2	1	1,3	5/3
a'_2	3	2	0	0	0,9	5/3
a'_3	0	2	3	0	0,9	5/3
a'_4	3	1	1	1	1,6	5/3

Ergebnismatrix 4

Dementsprechend lauten die Präferenzordnungen:

Mini-Max:	$a'_1 \sim a'_4 \succ a'_2 \sim a'_3$
HURWICZ $(\lambda = 0{,}3)$:	$a'_4 \succ a'_1 \succ a'_2 \sim a'_3$
LAPLACE:	$a'_1 \sim a'_2 \sim a'_4 \sim a'_3$

Präferenzordnung 4

b) Bei Anwendung des SAVAGE-NIEHANS-Kriteriums ergeben sich folgende Bedauerns-Matrizen und dementsprechende Präferenzordnungen:

(0) **Ausgangssituation**
Bedauerns-Matrix:

	s_1	s_2	s_3	s_4	max
a_1	2	2	0	1	2
a_2	0	0	0	3	3
a_3	3	3	0	0	3
a_4	0	0	1	2	2

Präferenzordnung:

$$\boxed{a_1 \sim a_4 \succ a_2 \sim a_3}$$

(1) **Lineare Transformation**
Hierbei ist zu beachten, dass die Modifikationen nicht direkt bei obiger Bedauerns-Matrix vorgenommen werden. Vielmehr erfolgen die Modifikationen bei der ursprünglichen Ergebnismatrix, aus der dann jeweils die Bedauerns-Matrix abgeleitet wird. Es werden hier und im folgenden dieselben Modifikationen vorgenommen wie in Übungsaufgabenteil a), von daher können die Bedauerns-Matrizen direkt aus den dort abgeleiteten modifizierten Ergebnismatrizen ermittelt werden.

Bedauerns-Matrix

	s_1	s_2	s_3	s_4	max
a'_1	0,2	0,2	0	0,1	0,2
a'_2	0	0	0	0,3	0,3
a'_3	0,3	0,3	0	0	0,3
a'_4	0	0	0,1	0,2	0,2

Präferenzordnung:

$$\boxed{a'_1 \sim a'_4 \succ a'_2 \sim a'_3}$$

(2) **Streichung einer Zeile**
Bedauerns-Matrix

	s_1	s_2	s_3	s_4	max
a'_1	2	2	0	0	2
a'_2	0	0	0	2	2
a'_4	0	0	1	1	1

Präferenzordnung:

$a'_4 \succ a'_1 \sim a'_2$

(3) **Veränderung einer Spalte**
Bedauerns-Matrix

	s_1	s_2	s_3	s'_4	max
a'_1	2	2	0	1	2
a'_2	0	0	0	3	3
a'_3	3	3	0	0	3
a'_4	0	0	1	2	2

Präferenzordnung:

$a'_1 \sim a'_4 \succ a'_2 \sim a'_3$

(4) **Streichung einer Spalte**
Bedauerns-Matrix

	$s_{1/2}$	s_3	s_4	max
a'_1	2	0	1	2
a'_2	0	0	3	3
a'_3	3	0	0	3
a'_4	0	1	2	2

Präferenzordnung:

$a'_1 \sim a'_4 \succ a'_2 \sim a'_3$

c) **Auswertung**

(1) Da die Präferenzordnungen 0 und 1 in allen Fällen übereinstimmen, erfüllen – in unserem Beispiel – alle vier Entscheidungsregeln das **Axiom (1).**

(2) **Axiom (2)** wird in unserem Beispiel von Mini-Max-, HURWICZ- und LAPLACE-Regel ebenfalls erfüllt, da die Indifferenz- bzw. Präferenzbeziehungen zwischen den drei verbliebenen Alternativen a_1', a_2' und a_4' gegenüber der Ausgangssituation unverändert bleiben. Nach dem SAVAGE-NIEHANS-Kriterium hingegen resultiert aus der Streichung von a_3 eine deutlich erkennbare Änderung der Präferenzordnung: In der Ausgangssituation waren a_1 und a_4 gleichwertig, beide jedoch besser als a_2. Nach der Streichung von a_3 hingegen wird a_4 zum alleinigen Spitzenreiter, während a_1 nun mit a_2 auf einer Präferenzstufe steht. **Die SAVAGE-NIEHANS-Regel verstößt also gegen Axiom (2).**

(3) **Axiom (3) hingegen wird offensichtlich von der Mini-Max- und der HURWICZ-Regel verletzt**, da sich die Präferenzordnungen durch die gleichartige Erhöhung aller bei s_4 zu erwartenden Ergebnisse deutlich ändern. Die anderen Entscheidungsregeln hingegen sind – zumindest in unserem Beispiel – mit Axiom (3) vereinbar.

(4) **Axiom (4) wird** von Mini-Max-, HURWICZ- und SAVAGE-NIEHANS-Regel erfüllt, **vom LAPLACE-Kriterium jedoch eindeutig verletzt:** Während in der Ausgangssituation a_2 und a_4 gemeinsame Spitzenreiter darstellen, gefolgt von Alternative a_1, die ihrerseits noch vor a_3 eingestuft wird, werden nach der Zusammenfassung von s_1 und s_2 alle vier Alternativen als gleichwertig eingestuft.

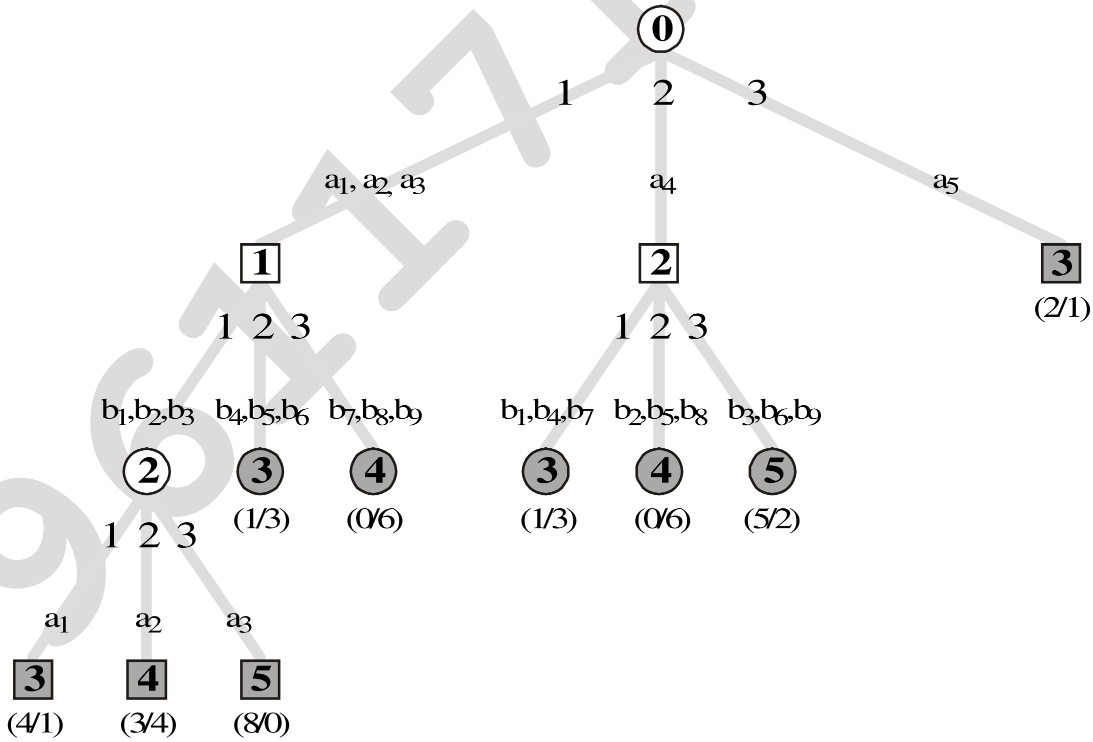
Aus unserem Beispiel wird zunächst deutlich, dass jede der vier Entscheidungsregeln jeweils genau eines der Axiome (2) bis (4) verletzt, und zwar die SAVAGE-NIEHANS-Regel Axiom (2), Mini-Max- und HURWICZ-Regel Axiom (3) und die LAPLACE-Regel Axiom (4). Mit den jeweils drei übrigen Axiomen hingegen sind die Entscheidungsregeln vereinbar – allerdings zunächst nur in dem untersuchten Beispielfall. Ob die sich hier ergebenden Vereinbarkeiten allgemein gültig sind, kann anhand eines Beispiels allerdings noch nicht definitiv festgestellt werden. Hierzu bedürfte es vielmehr allgemeiner Nachweise, was jedoch über den Rahmen der hier vorgegebenen Aufgabenstellung hinausgeht.

Übungsaufgabe 5

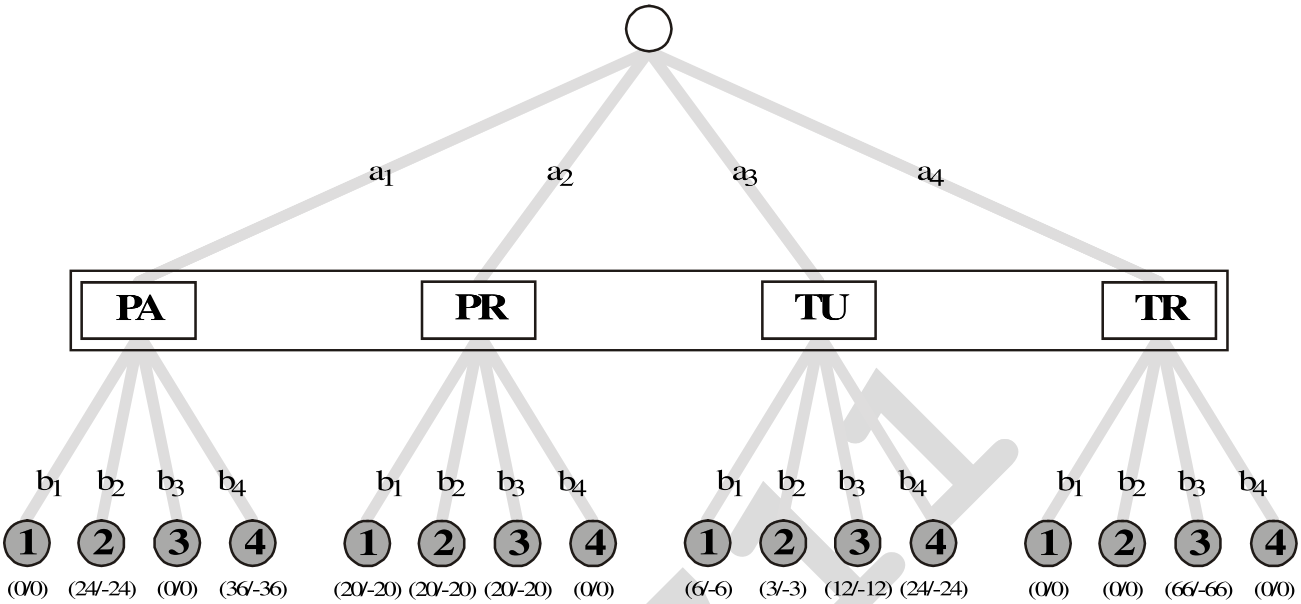
Durch Relation (6) kann sich die Reihenfolge der Präferenzwerte nicht ändern, d.h., wenn $\varphi_1 > \varphi_2$, wird auch $\varphi'_1 > \varphi'_2$ sein. Dies kann man leicht nachprüfen, indem man für φ' den in Relation (6) angegebenen Ausdruck $\alpha + \beta \cdot \varphi$ einsetzt. Man erhält dann $\alpha + \beta \cdot \varphi_1 > \alpha + \beta \cdot \varphi$, woraus bei $\beta > 0$ folgt $\varphi'_1 > \varphi'_2$.

Da die Reihenfolge der φ- bzw. φ'-Werte die Vorziehungswürdigkeit der Alternativen ausdrückt, ändert sich die Rangfolge der Alternativen nicht dadurch, dass die φ-Werte bei der Konstruktion der verwendeten Präferenzrelation durch φ'-Werte ausgetauscht werden, wenn gilt $\varphi' = \alpha + \beta \cdot \varphi$ mit $\beta > 0$.

Übungsaufgabe 6



Übungsaufgabe 7



Übungsaufgabe 8

Wie Abb. 2 verdeutlicht, kann Spieler A nur bei den Spielständen (0), (2) oder (3) zum Zuge kommen. Eine jede seiner Strategien ist mithin durch die Angabe der bei Erreichen dieser Spielzustände erfolgenden Züge – ausgedrückt durch die Zahl der zu setzenden Perlen – charakterisiert. Dabei ist außerdem zu berücksichtigen, dass der Zustand (2) nur erreicht werden kann, wenn A im ersten Zug nur *eine Perle* gesetzt hat. Somit ergeben sich folgende Strategien:

Strategien	Spielzustände		
	(0)	(2)	(3)
a_1	1	1	1
a_2	1	1	2
a_3	1	2	1
a_4	1	2	2
a_5	2	–	1
a_6	2	–	2

Strategien	Informationsmengen (1 oder 2)	(3 oder 4)	(4 oder 5)
b_1	1	1	1
b_2	1	1	2
b_3	1	2	1
b_4	1	2	2
b_5	2	–	1
b_6	2	–	2

Übungsaufgabe 9

– Wenn B wüsste, dass A a_3 wählt, dann würde er b_1 wählen und 2 gewinnen.

– Ahnte nun A aber, dass B sich für b_1 entscheiden wird, dann würde A a_1 wählen und somit B einen Verlust von 4 zufügen.

– Vermutet nun B, dass A sich für a_1 entscheidet, so wird er selbst Strategie b_2 wählen, um so statt des ihm von A zugedachten Verlustes von 4 einen Gewinn von 4 zu erzielen.

– In Erwartung, dass B Strategie b_2 wählt, wird A sich für a_2 entscheiden, wobei B einen Verlust von 3 erleidet.

– Unterstellt B nun, A entscheide sich in der Erwartung, dass er selbst b_2 wählt, für a_2, so wird B die Strategie b_3 wählen, um seinen Verlust auf 1 herabzusenken.

– Antizipiert A nun, dass B b_3 wählt, so wird er bei seiner Entscheidung für Strategie a_2 bleiben.

Übungsaufgabe 10

a)

	b_1	b_2	b_3	min
a_1	1	–1,5	–2	–2
a_2	1	0,5	–2	–2
a_3	1	0,5	0	0
a_4	–2	–2	0	–2
max	1	0,5	0	

Die Gleichgewichtslösung besteht aus der Strategienkombination a_3/b_3, denn es gilt:

$$\min_h (e_{3h}) = 0 = \max_i (e_{i3}) \ .$$

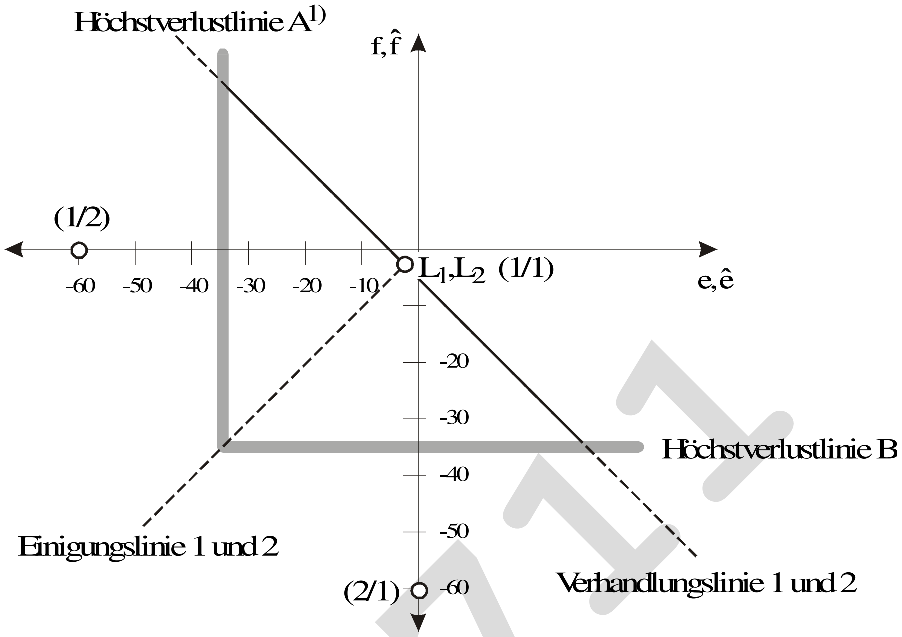
Ein Vergleich mit der aus der Dominanzuntersuchung gewonnenen Lösung zeigt, dass beide Ergebnisse übereinstimmen.

b)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	min
a_1	4	4	–5	–5	–5	6	–5
a_2	4	4	–5	–5	6	–7	–7
a_3	–5	–5	6	6	–5	6	–5
a_4	–5	–5	6	6	6	–7	–7
a_5	–5	6	–5	6	4	4	–5
a_6	6	–7	6	–7	4	4	–7
max	6	6	6	6	6	6	

In diesem Falle existiert keine Gleichgewichtslösung, da sich kein Ergebniswert finden lässt, der zugleich Zeilenminimum und Spaltenmaximum darstellt.

Übungsaufgabe 11



b) Um den Gesamtverlust gleichmäßig auf die beiden Spieler aufzuteilen, wird eine 45°–Linie durch den Ursprung gezeichnet. Diese Linie durchläuft Punkt [1/1] – das zu vereinbarende Strategienpaar – und stellt somit auch die zu Konzept 2 gehörende Einigungslinie dar.

Weiterhin stellt der Schnittpunkt der Einigungslinie mit der Verhandlungslinie in Punkt [1/1] das in diesem Fall den Konzepten 1 und 2 in gleicher Weise entsprechende Verhandlungsergebnis dar, das darin besteht, die Strategien a_1/b_1 zu vereinbaren, ohne dass Ausgleichszahlungen geleistet werden, wie auch rechnerisch bewiesen werden kann. Es gilt

$$\hat{e} = -3; \quad \bar{e} = -36; \quad \hat{f} = -3; \quad \bar{f} = -36, \quad s^* = -6.$$

Es ergeben sich folgende Aufteilungen:

$$\hat{e}_{(1)} = 0{,}5 \cdot s^* = 0{,}5 \cdot (-6) = -3$$

$$\hat{f}_{(1)} = 0{,}5 \cdot s^* = 0{,}5 \cdot (-6) = -3$$

$$\hat{e}_{(2)} = 0{,}5 \cdot (s^* + \bar{e} - \bar{f}) = 0{,}5 \cdot (-6 - 36 + 36) = -3$$

$$\hat{f}_{(2)} = 0{,}5 \cdot (s^* + \bar{f} - \bar{e}) = 0{,}5 \cdot (-6 - 36 + 36) = -3 \; .$$

Maßgeblich für diese Ergebnisse ist, dass beide Spieler vor und nach Kooperation Individualverluste in gleicher Höhe erleiden.

Übungsaufgabe 12

Die charakteristische Funktion lautet gem. der ersten Tabelle in Beispiel 5:

$$v(\emptyset) \; = \; 0$$

$$v(1) \; = \; -36\,; \qquad v(2) \; = \; -36$$

$$v(1,2) \; = \; -6\;.$$

Die Bedingung der Superadditivität ist erfüllt, denn es gilt:

(1) $$v(\emptyset) + v(1) = v(1)$$
$$0 - 36 = -36$$

(2) $$v(\emptyset) + v(2) = v(2)$$
$$0 - 36 = -36$$

(3) $$v(\emptyset) + v(1,2) = v(1,2)$$
$$0 - 6 = -6\,.$$

(4) $$v(1) + v(2) < v(1,2)$$
$$-36 - 36 < -6$$

Übungsaufgabe 13

Gemäß der individuellen und der kollektiven Rationalität muss eine Imputation folgende Bedingungen erfüllen:

$$e_1 \geq 0\,; \qquad e_2 \geq 2\,; \qquad e_3 \geq 3$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 10\;.$$

Es gilt also

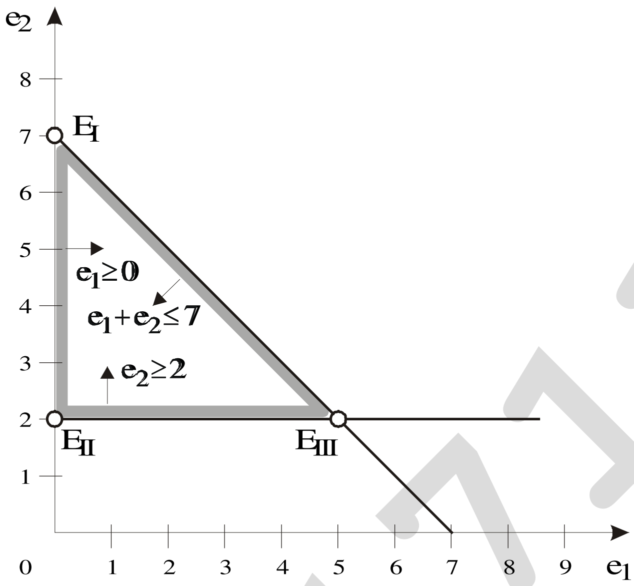
$$e_3 = 10 - (e_1 + e_2)$$

und weiter

$$10 - (e_1 + e_2) \geq 3\,,$$

also

$$e_1 + e_2 \le 7 .$$



Übungsaufgabe 14

a) Die der individuellen, kollektiven und Gruppenrationalität entsprechenden Bedingungen für eine Kern-Lösung lauten:

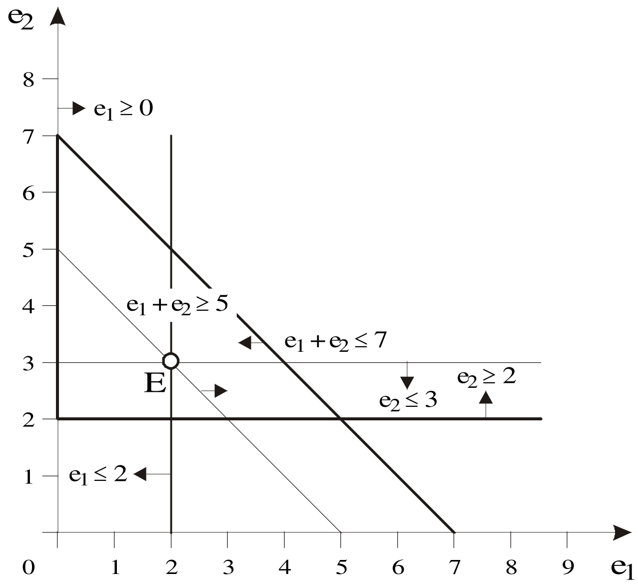
(*) $e_1 \ge 0 ; \quad e_2 \ge 2 ; \quad e_3 \ge 3$

(**) $e_1 + e_2 + e_3 = 10$

(***) $e_1 + e_2 \ge 5 ; \quad e_1 + e_3 \ge 7 ; \quad e_2 + e_3 \ge 8 .$

Nach Substitution von $e_3 = 10 - e_1 - e_2$ erhalten wir die Relationen:

$$e_1 \ge 0 ; \quad e_2 \ge 2$$
$$e_1 + e_2 \le 7$$
$$e_1 + e_2 \ge 5$$
$$e_1 \le 2 ; \quad e_2 \le 3$$



Wie aus dem Diagramm ersichtlich ist, existiert genau eine Kern-Lösung, nämlich $E = (2, 3)$. In Punkt E sind die oben angegebenen Bedingungen $e_1 \leq 2$; $e_1 + e_2 \geq 5$ und $e_2 \leq 3$ genau erfüllt und keine der übrigen Relationen ist verletzt. Somit erhält jeder Spieler mindestens soviel, wie er auch ohne Kooperation mit den übrigen Spielern erzielen könnte. Außerdem ist der Versuch, eine Zweier-Koalition zu bilden, für keinen Spieler von Vorteil.

b) Gemäß den Rationalitätsanforderungen gilt:

(*) $\quad e_1 \geq 0; \quad e_2 \geq 2; \quad e_3 \geq 3$

(**) $\quad e_1 + e_2 + e_3 = 10$

(***) $\quad e_1 + e_2 \geq 4; \quad e_1 + e_3 \geq 7; \quad e_2 + e_3 \geq 8 .$

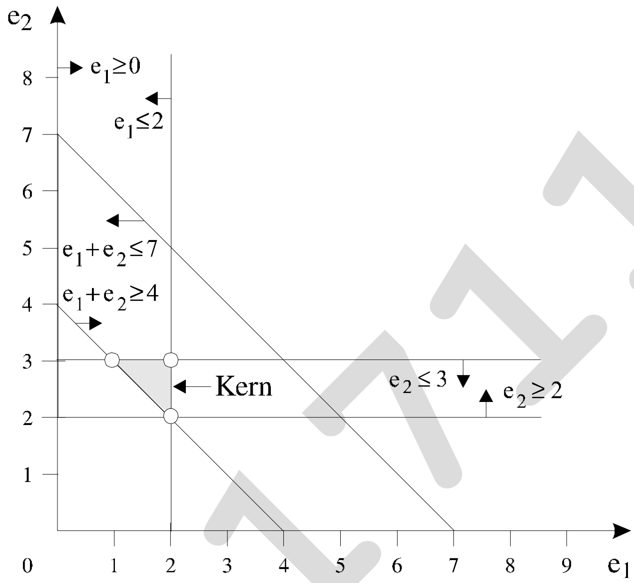
Nach Substitution von $e_3 = 10 - e_1 - e_2$ erhalten wir nun

$$e_1 \geq 0; \quad e_2 \geq 2$$
$$e_1 + e_2 \leq 7$$
$$e_1 + e_2 \geq 4; \quad e_1 \leq 2; \quad e_2 \leq 3 .$$

In diesem Falle existieren unendlich viele Imputationen, die zugleich Kernpunkte darstellen, nämlich zunächst

$$E_I = (1, 3, 6), \quad E_{II} = (2, 2, 6) \quad \text{und} \quad E_{III} = (2, 3, 5)$$

als ganzzahlige Lösungen sowie alle Linearkombinationen dieser drei Eckpunkte als nichtganzzahlige Werte. Somit bilden alle e_1-e_2-Kombinationen, die durch einen Punkt innerhalb oder auf den Begrenzungslinien des von E_I, E_{II} und E_{III} gebildeten Dreiecks gekennzeichnet sind, die Menge aller stabilen Imputationen.



Anhang: Abbildungen 1 bis 5

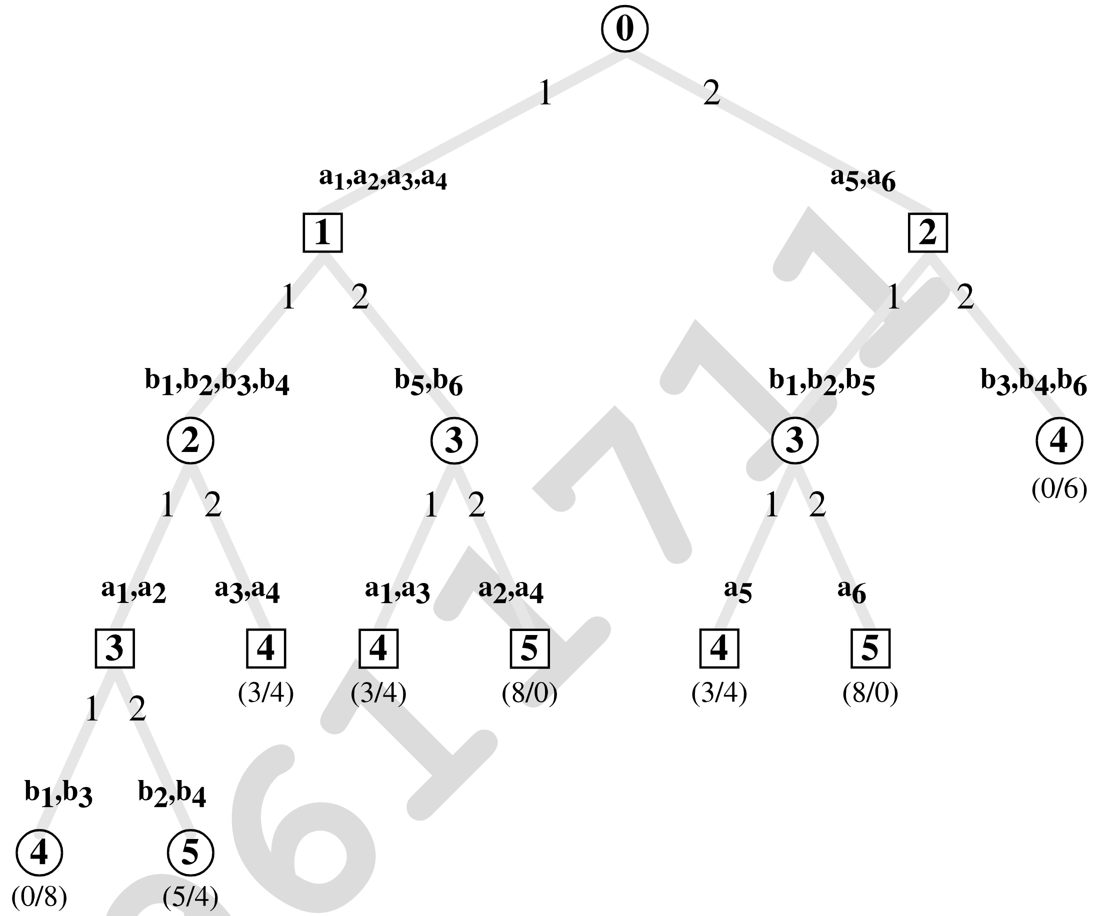


Abb. 1: Spielbaum bei vollkommener Information (Beispiel 3)

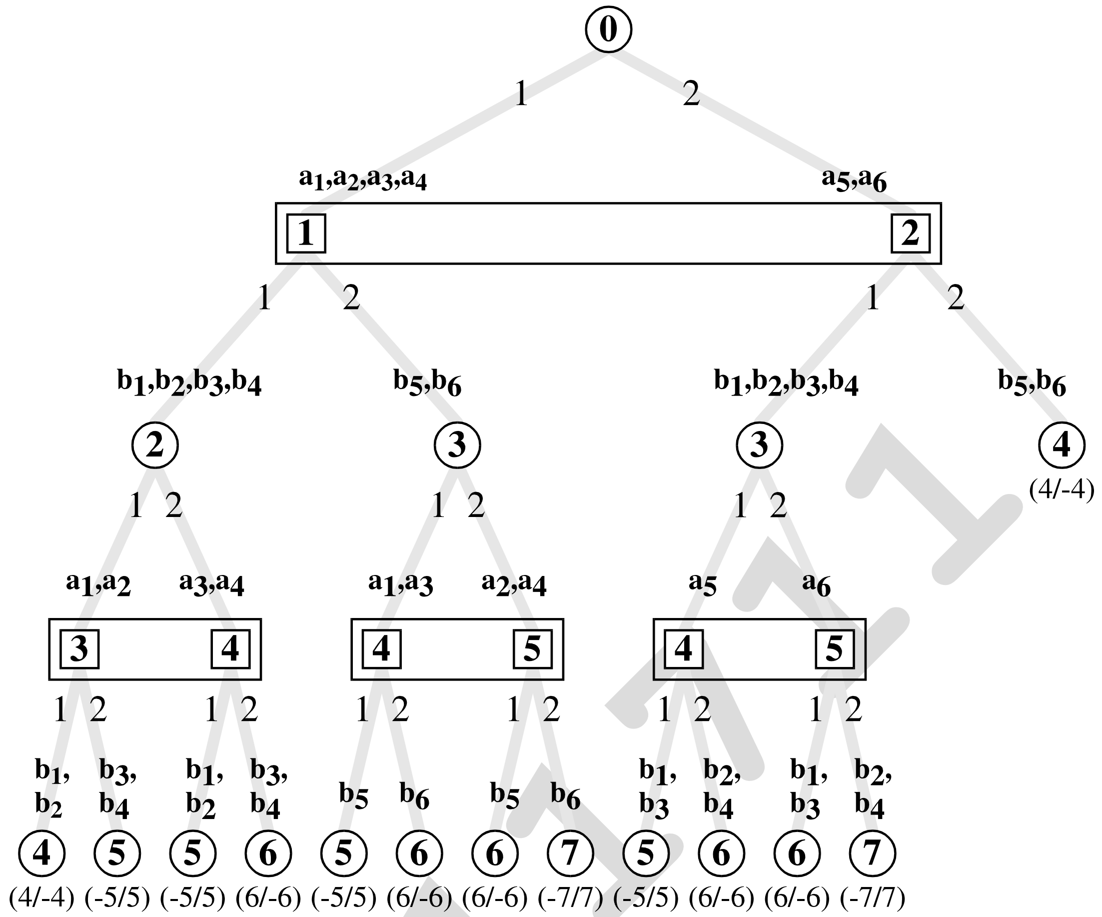


Abb. 2: Spielbaum bei unvollkommener Information (Beispiel 4)

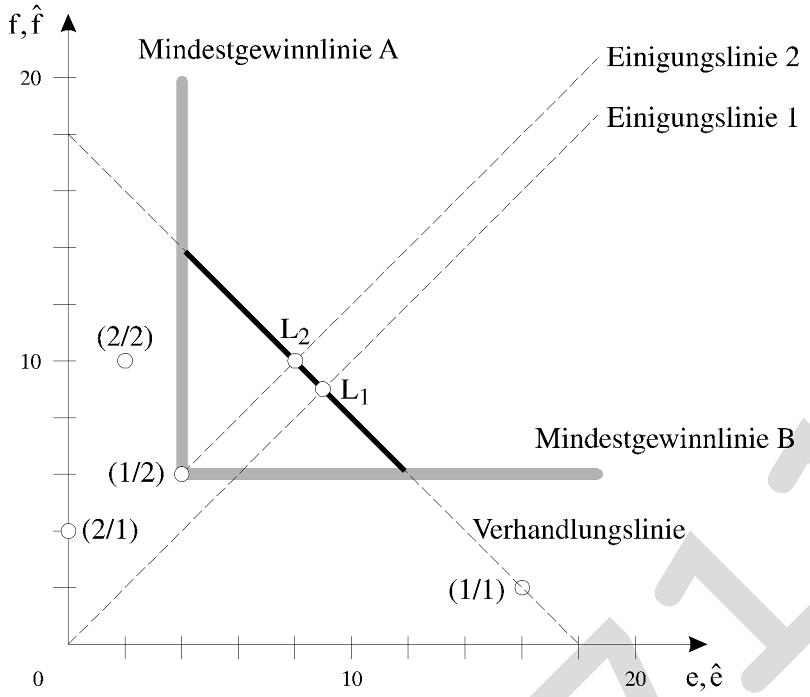


Abb. 3: Kooperatives Zwei-Personen-Spiel (Beispiel 8)

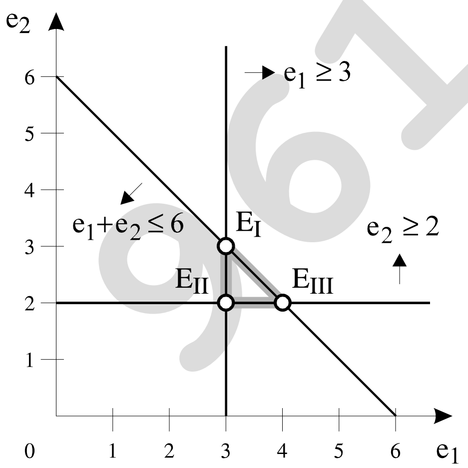


Abb. 4: Imputation für Beispiel 9

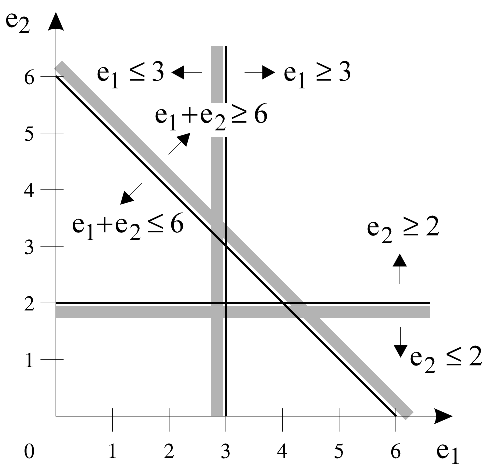


Abb. 5: Imputation und Kern für Beispiel 9