1 Grundlagen der Produktionstheorie

1.1 Produkte und Produktionsfaktoren

Die Produktionstheorie beschäftigt sich mit der Umwandlung von Gütern; sie untersucht die Zusammenhänge zwischen den eingesetzten Gütern, Produktionsfaktoren genannt, und den daraus erstellten Gütern, den Produkten.

Die Verschiedenartigkeit innerhalb der Produkte einerseits und innerhalb der Produktionsfaktoren andererseits legt es nahe, die Produkte nach ihrer Verwendbarkeit und die Produktionsfaktoren nach ihrer Wirkungsweise im Produktionsprozess zu klassifizieren.

Klassifikation von Produkten

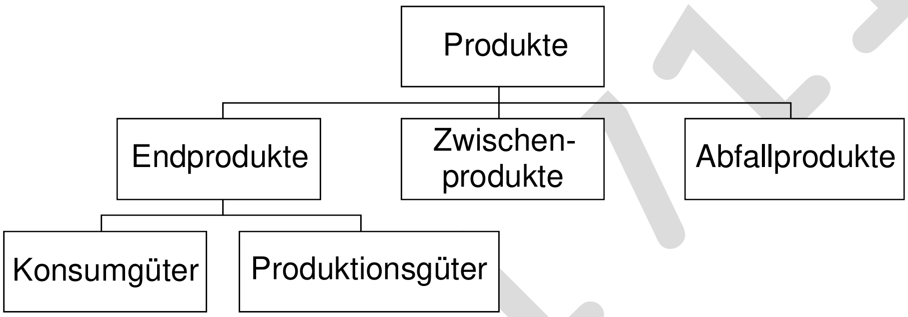


Abb. 1: *Einteilung der Produkte*

Endprodukte, erwünschte Güter

Mit **Endprodukten** oder erwünschten Gütern bezeichnet man jene Produkte, die vom Unternehmen an andere Wirtschaftssubjekte abgegeben werden. Hierbei kann es sich um Konsumgüter (Speiseeis, Zigaretten, Kämme, Möbel etc.) handeln, die unmittelbar zum Ge- oder Verbrauch verwendet werden. Produktionsgüter (Maschinen, Werkzeuge, Schmieröl etc.) dienen dagegen dazu, um mit ihrer Hilfe andere Produkte herzustellen. Der Verwendungszweck entscheidet also für ein bestimmtes Endprodukt darüber, ob es als Konsum- oder Produktionsgut anzusehen ist. Für den Friseurmeister, der einen Haarschnitt produziert, ist der Kamm ein Produktionsgut, für den Studenten ein Konsumgut.

Zwischenprodukte

Zwischenprodukte sind Produkte, die in einem Unternehmen mit mehrstufiger Fertigung als Produktionsfaktoren weiterverwendet werden. Stuhlbeine und Tischplatten sind in einer Möbelfabrik als derartige Zwischenprodukte aufzufassen. Die Kennzeichnung von Zwischenprodukten zeigt, dass gelegentlich die Trennung zwischen Produkten und Produktionsfaktoren schwer fällt und nur die Stellung im Produktionsablauf über ihre Klassifizierung entscheidet.

Abfallprodukte

Abfallprodukte sind solche Produkte, die bei der Gütererstellung oder -verwertung anfallen und nicht mehr als Konsum- oder Produktionsgüter dienen. Beispiele dafür sind leere Streichholzschachteln oder Stoffreste bei der Kleiderproduktion.

Intermediäre Güter

Zwischenprodukte und Abfallprodukte gehören zu den **intermediären Gütern**. Außerdem zählen Güter, von denen im Voraus festgelegte Quantitäten produziert werden müssen, um z.B. Lieferverpflichtungen einzuhalten, zu den intermediären Gütern.

Bei der Einteilung der Produktionsfaktoren, auch **primäre Güter** genannt, geht man heute in der Betriebswirtschaftslehre üblicherweise von dem folgenden Schema aus:

Klassifikation von Produktionsfaktoren

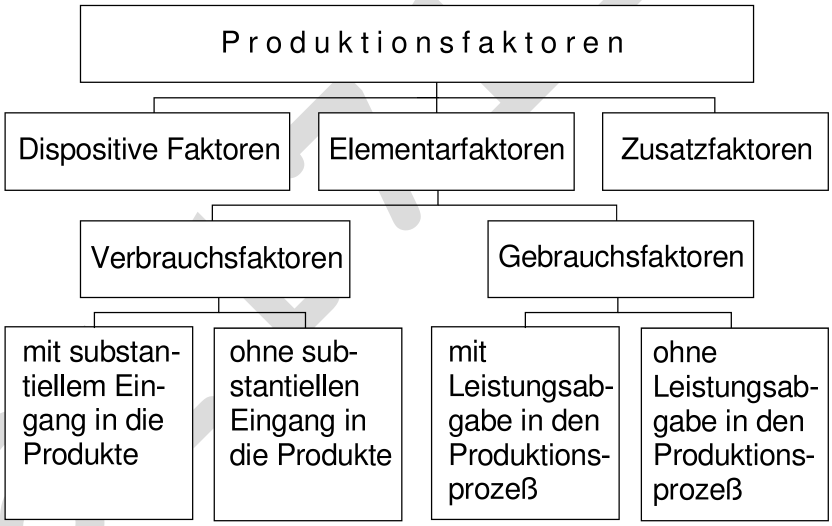


Abb. 2: *Einteilungsschema der Produktionsfaktoren*

Dispositiver Faktor

Als **dispositiven Faktor** bezeichnet man nach GUTENBERG denjenigen Teil des Produktionsfaktors „menschliche Arbeitsleistung", der auf die leitende Tätigkeit im Unternehmen verwendet wird. Die leitende Tätigkeit erstreckt sich auf alle Unternehmensbereiche. Im Allgemeinen drückt sie sich durch die dispositiven Aufgaben der Planung, Organisation und Kontrolle aus; im Besonderen obliegt ihr damit auch die Beschaffung und Kombination aller übrigen Produktionsfaktoren sowie der Absatz der hergestellten Produkte. Wegen dieser besonderen Merkmale ist der dispositive Faktor den übrigen Faktoren und den Produkten übergeordnet und seine Leistung lässt sich nicht den einzelnen Produkten oder Produktionsprozessen zuordnen.

Zusatzfaktoren

Unter dem Begriff **Zusatzfaktoren** werden eine Reihe von kostenverursachenden Faktoren zusammengefasst, die für die Leistungserstellung und -verwertung benötigt werden, denen aber im Rahmen des Produktionsprozesses meistens keine

Mengengrößen zugeordnet werden können. Hierunter fallen bspw. Steuern, Abgaben oder Zinsen, sofern sie in Verbindung mit der Produktion als dem Betriebszweck industrieller Unternehmen anfallen.

Elementarfaktoren

Die **Elementarfaktoren** sind im Verhältnis zu dem dispositiven Faktor und den Zusatzfaktoren für die Formulierung von Produktionsfunktionen insofern von größerer Bedeutung, als sich ihr Zusammenwirken im Produktionsprozess und die dadurch bedingten Verbräuche am ehesten mengenmäßig quantifizieren lassen und sie so am leichtesten das Aufstellen funktionaler Beziehungen zum Output gestatten. Allgemein lassen sich **drei Arten von Elementarfaktoren** unterscheiden: menschliche Arbeitsleistung, die produktionsbezogen, aber nicht dispositiv ist, Betriebsmittel und Werkstoffe. Eine feinere Untergliederung der Elementarfaktoren erhält man dadurch, dass man diese entsprechend den Merkmalen ihres Beitrages zur Leistungserstellung einteilt in Verbrauchsfaktoren und Potentialfaktoren, wobei man letztere auch als Gebrauchs- oder Bestandsfaktoren bezeichnet.

Verbrauchsfaktoren

- **Verbrauchsfaktoren** sind dadurch charakterisiert, dass sie bei einmaligem Einsatz als selbständige Güter entweder in der Produktion untergehen (Schmierstoffe, schnell verschleißende Werkzeuge, Antriebsenergie) oder ihre Eigenschaften im Produktionsprozess dadurch ändern, dass sie zu Gütern anderer Art oder Bestandteil eines neuen Gutes werden. Z.B. werden Stoffe nach Muster geschnitten, die einzelnen Stoffteile maschinell zusammengenäht und aus ihnen zusammen mit Knöpfen und Reißverschlüssen Kleider und Röcke hergestellt. Bei den Verbrauchsfaktoren unterscheidet man nun weiter zwischen

  Verbrauchsfaktoren, die substantiell in die Produkte eingehen

  - **Verbrauchsfaktoren, die substantiell in die Produkte eingehen**; das sind vor allem Werkstoffe, wie Roh- und Hilfsstoffe, Halbfabrikate, Klein- und Hilfsmaterial. Zu ihnen zählen in unserem Kleiderbeispiel der Stoff, die Knöpfe und Reißverschlüsse sowie Nähgarn; und

  Verbrauchsfaktoren, die nicht substantiell in die Produkte eingehen

  - **Verbrauchsfaktoren, die nicht substantiell in die Produkte eingehen**; sie dienen dem Produktionsablauf, ohne selbst Bestandteil der Produkte zu werden. Hierzu zählen bspw. Betriebsstoffe, schnell verschleißende Werkzeuge und Reparaturmaterial. So benötigt man bei der Kleiderherstellung die Betriebsstoffe Strom zum Antrieb der Nähmaschinen und Öle und Fette zum Schmieren ihrer Laufteile, um deren Funktionsfähigkeit zu erhalten.

Gebrauchsfaktoren

- **Gebrauchsfaktoren** (auch **Bestands- oder Potentialfaktoren** genannt) stellen Nutzungspotentiale dar, die Leistungen in den Produktionsprozess abgeben

(Maschinen, menschliche Arbeitskraft, längerlebige Werkzeuge etc.). In der Kleiderfabrikation sind bspw. die Schneide- und Nähmaschinen sowie Schraubschlüssel und Nadeln solche Potentialfaktoren und werden in ihrer Eigenschaft als betriebliche Gebrauchsgegenstände auch als Betriebsmittel bezeichnet. Je nachdem, ob die Potentialfaktoren durch Leistungsabgaben an der Produktion mitwirken oder nur deren Aufrechterhaltung gewährleisten, unterscheidet man zwischen

Potentialfaktoren mit Leistungsabgabe in den Produktionsprozess

- **Potentialfaktoren mit Leistungsabgabe in den Produktionsprozess**; dazu zählen die geistig und körperlich arbeitenden Menschen, deren ausführende Tätigkeiten sich auf die Herstellung bestimmter Produkte oder die Bewältigung von Produktionsvorgängen beziehen, sowie die Maschinen, Werkzeuge und Hilfsmittel, die zur Güterherstellung benutzt werden und dabei einem allmählichen Verbrauch oder Verzehr unterliegen; und

Potentialfaktoren ohne Leistungsabgabe in den Produktionsprozess

- **Potentialfaktoren ohne Leistungsabgabe in den Produktionsprozess**; dazu gehören geistig und körperlich arbeitende Menschen, deren ausführende Tätigkeiten nicht unmittelbar bestimmten Produkten oder Herstellungsprozessen zurechenbar sind (z.B. Verwaltungspersonal), Grundstücke und Gebäude, allgemeine Einrichtungsgegenstände, die nicht in Beziehung zur Produktion stehen, sowie Apparate und Vorrichtungen, die dem Unternehmen als Ganzem oder Teilbereichen zur Verfügung stehen.

1.2 Anforderungen an die Güter

Ein Gut wird durch seine **physischen Eigenschaften** und durch **Ort und Zeitpunkt seiner Verfügbarkeit** eindeutig beschrieben. Ist bei einem Vergleich in einem der drei Kriterien ein Unterschied festzustellen, so liegen streng genommen verschiedene Güter vor. Im konkreten Fall ist aber meistens eine derart exakte Unterscheidung der Güter nicht erforderlich; bspw. ist es für einen Butterproduzenten, der verschiedene Sorten Butter herstellt, notwendig, jede dieser Sorten als ein gesondertes Gut anzusehen; ein Unternehmen, das Kühlhäuser betreibt und Butter lagert, braucht diese Unterscheidung nicht vorzunehmen, wenn für alle Sorten Butter die gleichen Lagerbedingungen gelten sollen; es betrachtet nur das „Gut“ Butter. Die Festlegung der im Produktionsprozess auftretenden Güter hängt also vom Einzelfall ab.

Allgemein kann für die Festlegung der Güter gefordert werden: gleiche Qualitäten eines Gutes sind in jedem für das Unternehmen relevanten Gebrauch austauschbar, d.h. steht dem Unternehmen eine bestimmte Menge eines Gutes zur Verfügung, so sind alle gleich großen Teilmengen dem Unternehmen gleich wertvoll. Trifft für ein Gut diese Bedingung zu, so heißt das Gut **homogen**.

homogenes Gut

Dann lässt sich die Forderung an die Beschreibung der in das Produktionsmodell eingehenden Güter aufstellen; alle **Güter,** die im Produktionsmodell vorkommen, **sind homogen**.

Die Produktionstheorie benutzt mathematische Methoden zur Lösung ihrer Probleme. Um einige dieser Methoden überhaupt anwenden zu können, ist es erforderlich, dass jede positive reelle Zahl die Quantität eines jeden Gutes darstellen kann, **d.h. jedes Gut ist beliebig teilbar**. Für einige Güter, z.B. Schüttgut, ist diese Forderung nicht restriktiv, so kann das Gut „Sand" in beliebigen Mengen auftreten; andere Güter aber, z.B. Maschinen und Schrauben, treten in der Praxis nur in ganzzahligen Mengen auf. Es gibt zwei Möglichkeiten, auch solche Güter als beliebig teilbar anzusehen:

Teilbarkeit

a) die Stückzahl des in das Modell eingehenden Gutes ist sehr groß; dann ist die Ungenauigkeit, die sich ergibt, wenn man das Gut als beliebig teilbar ansieht, sehr klein. Ergibt z.B. die optimale Produktionsplanung einer Lampenfabrik die Produktionsmenge 5.325,5 Lampen, so produziert man 5.326 Lampen; der Unterschied zur theoretisch optimalen Menge ist unwesentlich.

b) das ursprünglich in Stückzahl gemessene Gut wird durch die Nutzungsdauer (verfügbare Leistung) dieses Gutes ersetzt.

In der Praxis spielen für die Produktion eines Unternehmens nur endlich viele Güter eine Rolle. Deshalb gehen in ein Produktionsmodell nur endlich viele Güter ein, deren Anzahl l sei. Von den l Gütern seien n erwünscht, r primär und s intermediär; jedes Gut gehört genau zu einer dieser Kategorien, so dass gilt:

$$l = n + r + s.$$

1.3 Aktivität und Technologie

Aktivität

Eine **Aktivität** beschreibt einen Teil des technischen Wissens, das dem Unternehmen zur Verfügung steht; die technischen Einzelheiten werden dabei nicht dargestellt, sondern nur die Quantitäten der Güter, die durch das Verfahren, das die Aktivität repräsentiert, benutzt werden. Eine Aktivität kann bspw. lauten: mit Hilfe von 5 Einheiten von Gut 1 und 3 Einheiten von Gut 2 lassen sich 2,5 Einheiten (E) von Gut 3 herstellen. Gibt es darüber hinaus noch die Güter 4 und 5, so lässt sich dieselbe Aktivität auch so schreiben: mit 5 E von Gut 1, 3 E von Gut 2, 0 E von Gut 4, 0 E von Gut 5 erzielt man 2,5 E von Gut 3. Diese Aktivität soll nun formal dargestellt werden, indem die Vektorschreibweise benutzt wird:

$$(-5; -3; 2; 5; 0; 0)$$

Die erste Komponente gibt die Quantität des ersten Gutes an; das Minuszeichen bedeutet, dass dieses Gut bei dieser Aktivität als Input verwandt wird; die zweite Komponente besagt, dass 3 E des zweiten Gutes als Input eingehen; das positive Vorzeichen der dritten Komponente gibt an, dass von dem dritten Gut 2,5 E als Output anfallen; die vierte und die fünfte Komponente sind Null, d.h. die Güter 4 und 5 spielen bei der Aktivität keine Rolle. Es gilt:

$$(-5; -3; 2; 5; 0; 0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^5.$$

Güterraum

Jede Mengenkombination der fünf Güter lässt sich ebenso als Vektor oder Punkt des Raumes $\mathbb{R}^5$ darstellen; deshalb wird $\mathbb{R}^5$ auch **Güterraum** genannt. Da jede Aktivität eine Mengenkombination darstellt, kann sie als Vektor des Güterraumes angesehen werden.

Im allgemeinen Fall mit l Gütern lässt sich jede Aktivität v darstellen als:

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_l) \in \mathbb{R}^l$$

mit der Interpretation:

a) wenn $v_i < 0, i \in \{1, \dots, l\}$, so werden v_i Einheiten von Gut i als Input benötigt;

b) wenn $v_i > 0$, so werden v_i Einheiten von Gut i erzeugt;

c) wenn $v_i = 0$, so spielt das Gut i für die Aktivität keine Rolle.

Gehen in das Produktionsmodell nur 2 oder 3 Güter ein, lassen sich Güterraum und Aktivitäten graphisch darstellen.

Beispiel:

Es existieren zwei Güter, Gut 1 und Gut 2. Dem Unternehmen stehen zwei Aktivitäten zur Verfügung:

$$v^1 = (-5; 3); v^2 = (-6; 5).$$

$\mathbb{R}^2$ ist der Güterraum, in dem sich die Aktivitäten v^1 und v^2 als Punkte darstellen lassen.

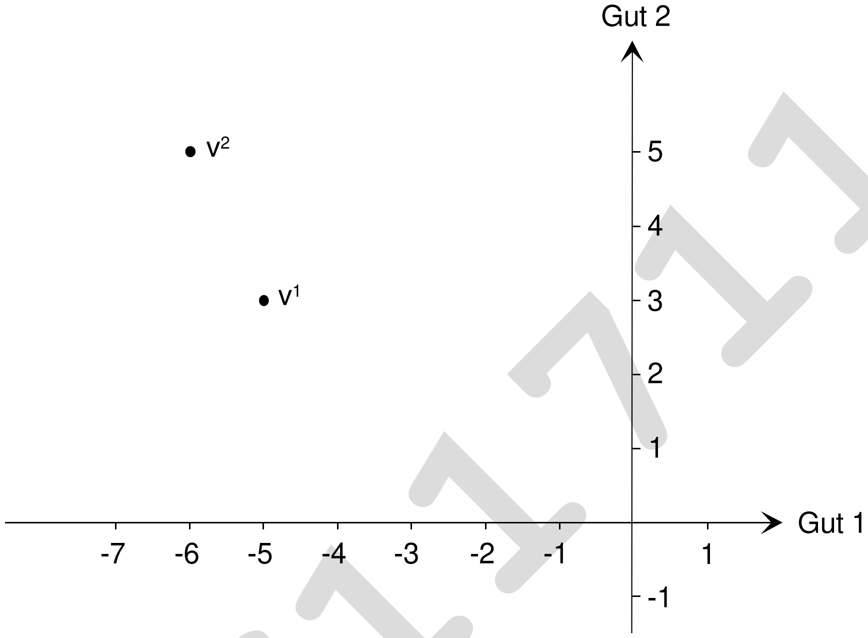


Abb. 3: *Güterraum für zwei Güter*

Die Menge aller Aktivitäten, die dem Unternehmen zur Verfügung stehen, beschreibt alle bekannten technischen Möglichkeiten des Unternehmens, auch **Technologie** genannt.

Technologie

Stehen im obigen Beispiel dem Unternehmen nur die Aktivitäten v^1 und v^2 zur Verfügung, so lässt sich die Technologie T ohne zusätzliche Annahmen schreiben als:

$$T = \{v^1, v^2\}.$$

1.4 Anforderungen an die Technologie

Einige Überlegungen führen zu Annahmen, die allgemein für Technologien gelten sollen und damit Anforderungen an Technologien darstellen. Abb. 4 am Ende dieses Unterkapitels zeigt eine Technologie, die alle aufgeführten Annahmen erfüllt.

Faktoreneinsatz ohne Output

1. Es ist durchaus möglich, **Faktoren einzusetzen, ohne einen Output zu erzielen**. Da die Technologie alle technisch möglichen Verfahren darstellen soll, müssen Gütervektoren, bei denen alle Komponenten kleiner oder gleich Null sind, als Aktivitäten zugelassen werden (ob die Benutzung solcher Aktivitäten sinnvoll ist, ist eine andere Frage, die hier nicht geklärt werden soll).

   Formal lässt sich die Forderung darstellen als:

   $$\mathbb{R}^l_- \subset T$$

   $(\mathbb{R}^l_- = \{x \in \mathbb{R}^l | x_i \leq 0 \; \forall i \in \{1, \dots, l\}\})$.

   Produktionsstillstand zugelassen

   Die Forderung $\mathbb{R}^l_- \subset T$ ist in Abb. 4 mit $\mathbb{R}^2_- \subset T$ erfüllt.

   Da gilt $0 \in \mathbb{R}^l_-$ ist insbesondere der Nullvektor Element aus T, d.h. **Produktionsstillstand** (kein Input, kein Output) ist möglich.

   Diese Annahme der „Verschwendung“ von Gütern muss außerdem bei jeder Produktion mit positivem Ergebnis gelten. Grafisch veranschaulicht bedeutet dies, dass für jeden Punkt (jede Produktion) einer Technologie alle Punkte, die links, die unterhalb und die links unterhalb von ihm liegen, ebenfalls Element der Technologie sein müssen.

Produktionen mit positivem Ergebnis

2. Weiter soll für jede Technologie gelten: **es gibt Produktionen mit positivem Ergebnis**, d.h. es gibt mindestens eine Aktivität $v \in T$ mit $v_i > 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \dots, l\}$.

   In Abb. 4 gibt es viele Produktionen mit positivem Ergebnis; alle Punkte zwischen der gekrümmten Linie und der negativen Achse von Gut 1 sind - außer den Punkten auf der negativen Achse selbst - Produktionen mit positivem Ergebnis.

Keine Umkehrbarkeit der Produktion

3. **Produktionen sind nicht umkehrbar**. Als Beispiel diene die Aktivität

   $$v = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \dots \quad Arbeit \\ \dots \quad Produkt\ z \end{array}$$

   $$(-1) \cdot v = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \dots \quad Arbeit \\ \dots \quad Produkt\ z \end{array}$$

   d.h. falls der Vektor *-v* als Aktivität zugelassen würde, wäre es möglich, durch Einsatz von 1 *E* von Produkt *z* 5 *E* Arbeit als Output zu erzielen. Dies ist aber in der Praxis nicht möglich; um diese Möglichkeit auszuschließen, wird angenommen:

> Produktionen sind nicht umkehrbar, d.h.
> $T \cap (-T) = \{0\}$.

Diese Annahme macht auch die **Existenz eines Schlaraffenlandes unmöglich**. Wegen der ersten Annahme gilt: wenn $v < 0$, dann gilt: $v \in T$. Aus $v < 0$ folgt $(-1) \cdot v > 0$, d.h. die Umkehrung von *v* ist in allen Komponenten größer als 0; würde diese Umkehrung als Aktivität zugelassen, wäre Output ohne Input möglich.

Kein Schlaraffenland

Kein Output ohne Input

4. Die nächste Annahme wird vor allem aus mathematischen Gründen aufgestellt: die **Technologie *T* ist abgeschlossen**, d.h. die Randpunkte von *T* gehören zu *T*.

   Diese Annahme ist vom ökonomischen Standpunkt aus nicht restriktiv, eine eventuell offene Technologie lässt sich durch eine infinitesimale Änderung der Faktor- und Produktquantitäten, die in der Praxis keine Bedeutung haben, abschließen.

Abschluss der Technologie

Die folgende Abb. 4 mit $\mathbb{R}^2$ als Güterraum und Gut 1 nur als Input verwendbar erfüllt alle getroffenen Annahmen an eine Technologie:

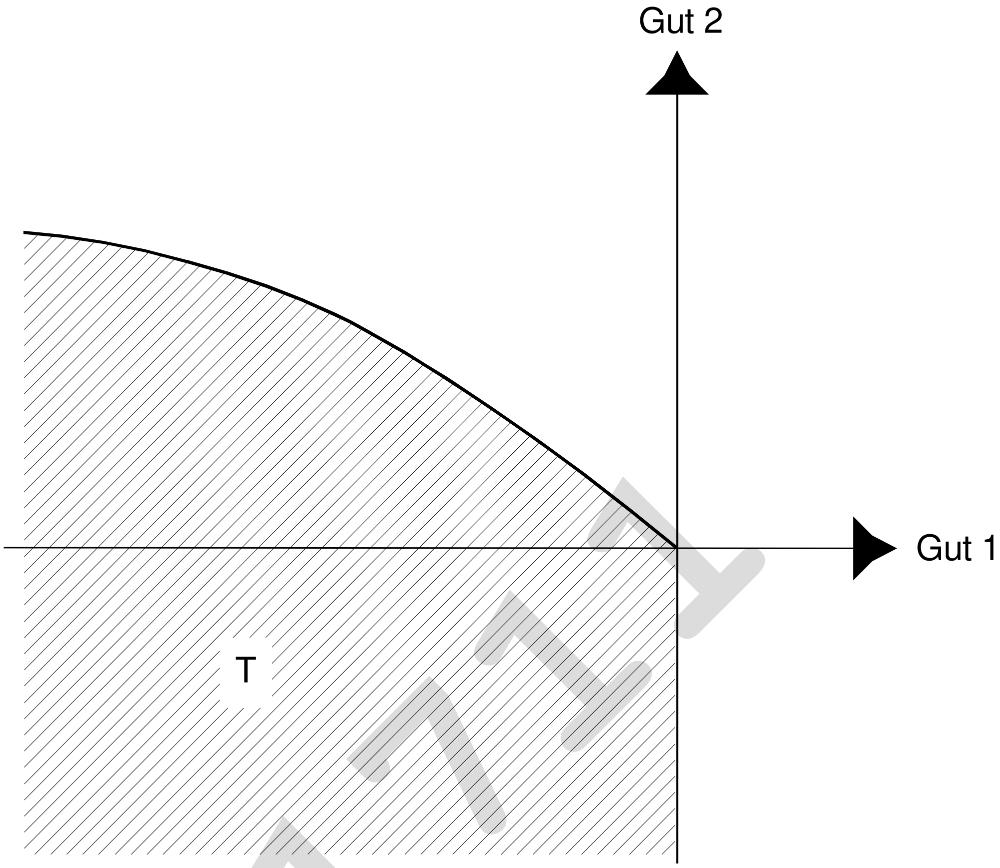


Abb. 4: *Beispiel einer den Annahmen entsprechenden Technologie*

1.5 Der Effizienzbegriff

Die Wahlmöglichkeiten des Unternehmens sind durch die Elemente der Technologie T vollständig dargestellt. Für das Unternehmen stellt sich jetzt die Frage, welche Aktivitäten nun tatsächlich ausgeführt werden sollen; es muss also ein Auswahlkriterium geschaffen werden, mit dem es möglich ist, aus der Menge aller Aktivitäten die geeignetsten Produktionen zu bestimmen.

Mit Hilfe eines Beispiels soll ein Auswahlkriterium hergeleitet werden, indem Vergleiche zwischen den Aktivitäten durchgeführt werden.

Beispiel:

2 Güter, Aktivitäten $v^1 = (-5; 3)$

$v^2 = (-7; 4)$

$v^3 = (-6; 3)$

$v^4 = (-5; 2)$

$\{v | v \in \mathbb{R}^2_-\}$

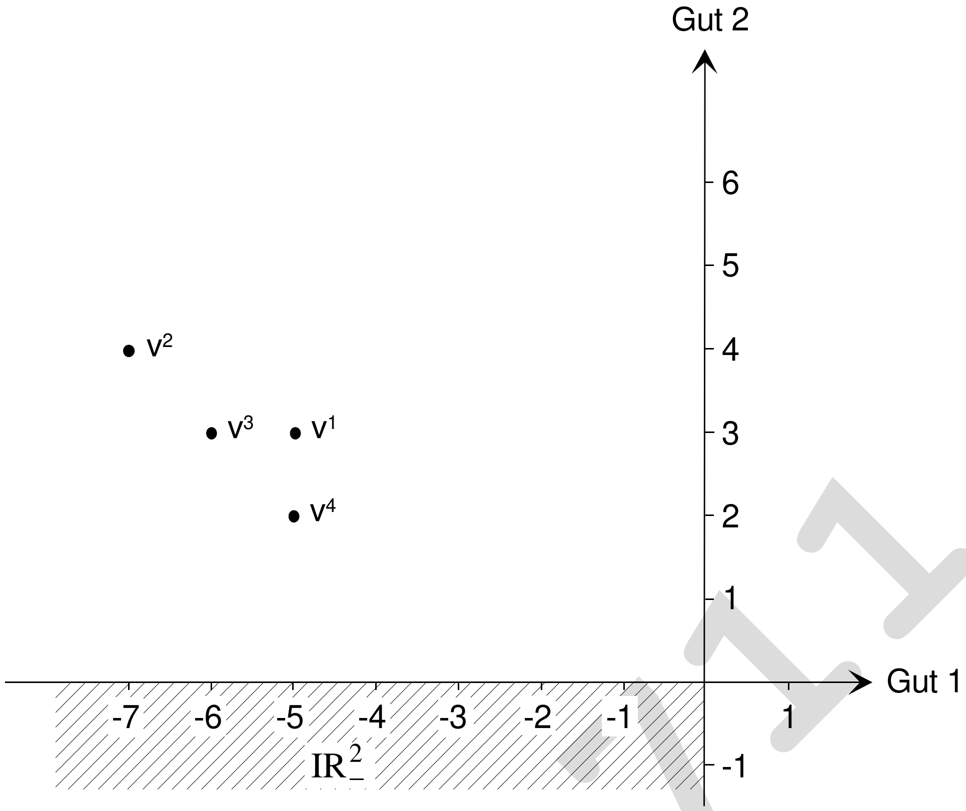


Abb. 5: *Effiziente und dominierte Aktivitäten*

In dem Beispiel gilt:

$$T = \{v^1, v^2, v^3, v^4, \{v | v \in \mathbb{R}^2_-\}\}$$

Es werden jetzt die Aktivitäten paarweise miteinander verglichen. Der Vergleich zwischen v^1 und v^4 ergibt, dass in beiden Fällen 5 *E* von Gut 1 als Input verwandt werden, bei v^1 wird aber ein Output von 3 *E* von Gut 2 erzielt, während bei v^4 nur 2 *E* von Gut 2 produziert werden; d.h. bei gleichem Input ergibt v^1 einen höheren Output. Der Unternehmer wird also die Aktivität v^1 der Aktivität v^4 vorziehen. Man sagt, v^1 **dominiert** v^4.

Dominanz

Durch die Aktivität v^1 wird ein Output von 3 *E* von Gut 2 erzielt; den gleichen Output erhält man mit der Aktivität v^3. Aktivität v^3 benötigt aber für diesen Output 6 *E* von Gut 1, während v^1 nur 5 *E* von Gut 1 benötigt. Obwohl also v^3 den gleichen Output erbringt wie v^1, wird das Unternehmen v^1 wählen, da in v^1 weniger Input erforderlich ist; v^1 dominiert also v^3. Damit scheiden die Aktivitäten v^3 und v^4 aus der Wahl aus, beide werden von v^1 dominiert.

Ein Vergleich zwischen v^1 und v^2 zeigt, dass zwar durch die Aktivität v^2 ein größerer Output erzielt wird, dafür muss aber auch eine größere Menge von Gut 1 eingesetzt werden als bei Aktivität v^1. Welche Aktivität besser ist, lässt sich also nicht beurteilen.

Eine Aktivität $v \in \mathbb{R}^2_-, v \neq 0$ wird jetzt mit der Aktivität 0 verglichen (das Zeichen 0 wird sowohl für die Zahl 0 als auch für den Nullvektor benutzt; die jeweilige Bedeutung ergibt sich aus dem Text). Es ergibt sich sofort, dass die Nullproduktion wirtschaftlicher ist als jedes $v \in \mathbb{R}^2_-$. Ein $v \in \mathbb{R}^2_-, v \neq 0$ kann bestenfalls den Output 0 erbringen, erfordert aber Gut 1 als Input; der Nullvektor erreicht aber die Nullproduktion ohne Input. Somit dominiert die Nullproduktion jedes $v \in \mathbb{R}^2_-, v \neq 0$.

Ein Vergleich zwischen v^1 und 0 lässt keinen Vorteil einer der beiden Aktivitäten erkennen. Bei v^1 fällt zwar mehr Output an als bei 0, dafür muss aber auch eine größere Menge von Gut 1 eingesetzt werden, um diesen Output zu erzielen. Es lässt sich also nicht beurteilen, ob 0 oder v^1 wirtschaftlicher ist.

Effizienzkriterium

Das hier dargestellte Auswahlkriterium bezeichnet man als **Effizienzkriterium**; es lässt sich allgemein folgendermaßen formulieren:

$v \in T$ heißt **effizient**, wenn es kein $w \in T$ gibt, so dass $w \geq v$ bzw. $w - v \geq 0$ gilt ($w \geq v$ bedeutet, dass $w_i \geq v_i$ für alle i und $w_j \geq v_j$ für mindestens ein *j*); d.h. *v* wird nicht dominiert.

Die **Menge aller effizienten Aktivitäten** wird mit T_{eff} bezeichnet; will das Unternehmen wirtschaftlich handeln, so kommen für die Auswahl einer durchzuführenden Aktivität nur Elemente aus T_{eff} in Frage.

In dem Beispiel 3 gilt: $T_{eff} = \{v^1, v^2, 0\}$

v^3 und v^4 gehören nicht zu T_{eff}, da gilt:

$v^1 \geq v^3$ bzw. $v^1 \geq v^4$

Ein $v \in \mathbb{R}^2_-, v \neq 0$ kann ebenfalls nicht zu T_{eff} gehören, denn es gilt:

$$0 \geq v, v \in \mathbb{R}^2_- \; für \; v \neq 0$$

Da v^1, v^2 und 0 nicht dominiert werden, gehören sie zu T_{eff}

Auch im allgemeinen Fall $v \in \mathbb{R}^l_-, v \neq 0$ gilt immer $0 \geq v$, d.h. $v \in \mathbb{R}^l_-, v \neq 0$, kann nie effizient sein. Ebenso gilt für den allgemeinen Fall, dass der Nullvektor immer effizient ist; denn aus den Annahmen über Technologien folgt, dass Aktivitäten, bei denen ein positiver Output erzielt wird, stets Input erfordern; d.h. eine Aktivität *v* mit positiven Komponenten besitzt auch negative Komponenten. Dann kann aber nie gelten: $v \geq 0, v \in T$, d.h. die Nullaktivität ist stets effizient.

1.6 Spezielle Technologien

1.6.1 Grundformen von Technologien

Durch die Annahmen, die allgemein an Technologien gestellt werden, sind die Ausprägungsformen von Technologien, die sich im Zwei-Güterfall graphisch darstellen lassen, eingeschränkt. Dennoch sind viele verschiedenartige Technologien, die alle die Annahmen an Technologien erfüllen, möglich.

Um eine systematische Untersuchung von Technologien zu ermöglichen, werden drei Grundformen von Technologien unterschieden, die für den Zwei-Güterfall in der folgenden Abbildung dargestellt werden.

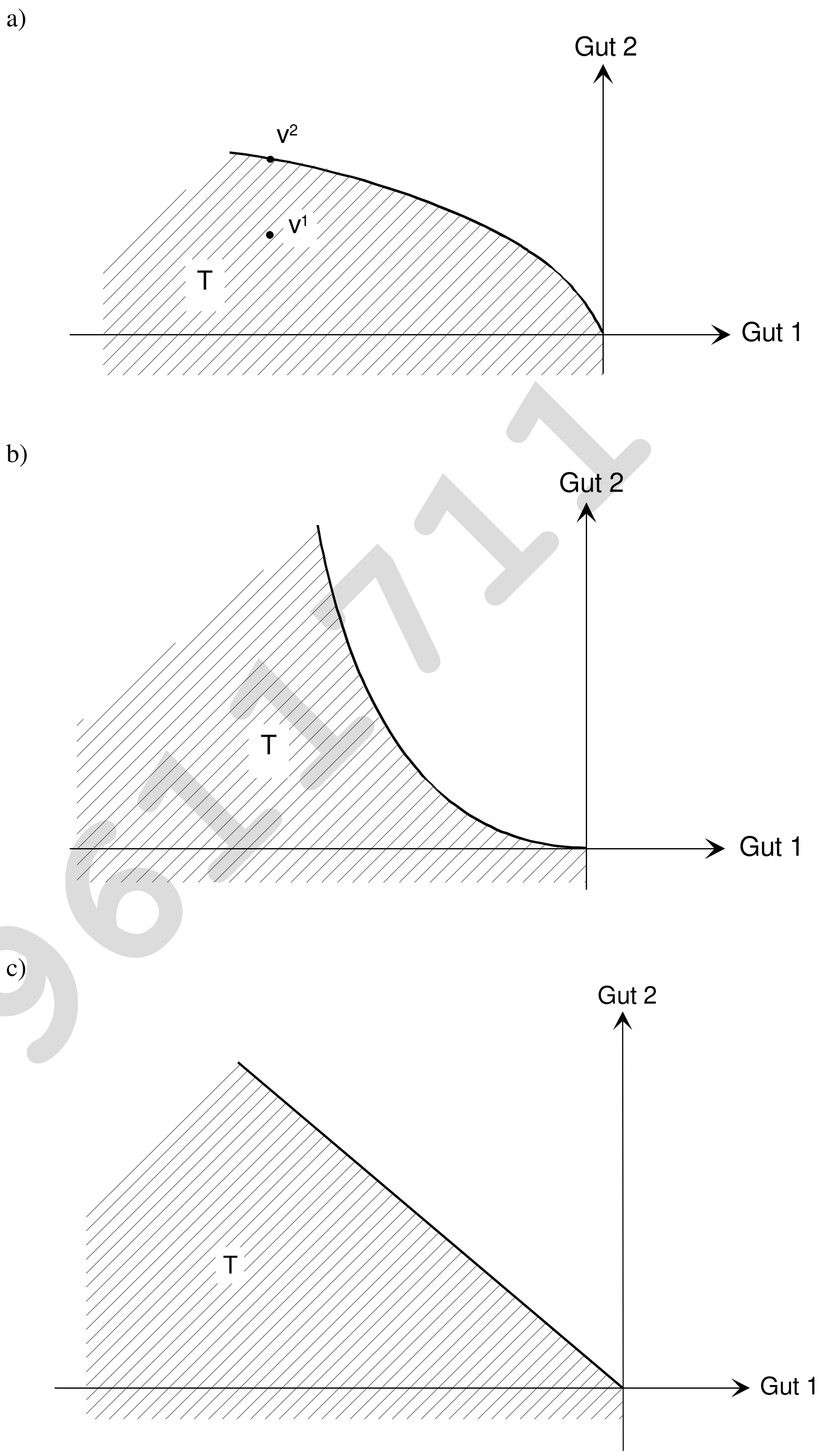


Abb. 6: *Drei Grundformen von Technologien*

Um die Unterschiede zwischen den drei Formen herauszuarbeiten, sollen zunächst die effizienten Punkte dieser Technologien bestimmt werden.

Die effizienten Punkte jeder der drei Technologien liegen auf dem Rand der Technologie, denn für jeden Punkt aus dem Inneren von T gibt es einen Punkt, der bei gleichem Input einen höheren Output erzielt, z.B. für den inneren Punkt v^1 in a) den Punkt v^2; das bedeutet, dass jeder innere Punkt von T dominiert wird und somit nicht effizient ist. Kein Punkt auf dem Rand von T (ohne die negative Achse von Gut 2) wird aber dominiert; d.h., die Menge der effizienten Punkte jeder der drei Technologien besteht aus der Menge der Randpunkte außer den Punkten auf der negativen Achse von Gut 2. Die Menge der effizienten Punkte wird deshalb auch als der **effiziente Rand** der Technologie bezeichnet.

effizienter Rand

Beim Vergleich der drei Grundformen der Technologien fällt nun sofort der unterschiedliche Verlauf des effizienten Randes auf. Die in a) dargestellte Technologie ist durch **abnehmende Ertragszuwächse** auf dem effizienten Rand gekennzeichnet, d.h. von einem effizienten Randpunkt aus, z.B. von v^2, ist bei Erhöhung des Inputs nur eine unterproportionale Zunahme des Outputs erreichbar.

abnehmende Ertragszuwächse

Bei der in b) dargestellten Technologie verhält es sich gerade umgekehrt: von einem effizienten Randpunkt aus ist bei Erhöhung des Inputs eine überproportionale Zunahme des Outputs möglich; diese Form wird deshalb als Technologie mit **zunehmenden Ertragszuwächsen** auf dem effizienten Rand bezeichnet.

zunehmende Ertragszuwächse

Schließlich ist bei der in c) dargestellten Technologie - wenn nur effiziente Randpunkte betrachtet werden - der Zuwachs des Outputs proportional dem Zuwachs des Inputs; es liegt eine Technologie mit **konstanten Ertragszuwächsen** auf dem effizienten Rand vor.

konstante Ertragszuwächse

Viele Technologien können nun als Kombinationen der drei Grundformen angesehen werden. Als Beispiel diene die in Abb. 7 dargestellte Technologie.

Beispiel:

Eine Technologie mit Gut 1 als Input und Gut 2 als Output.

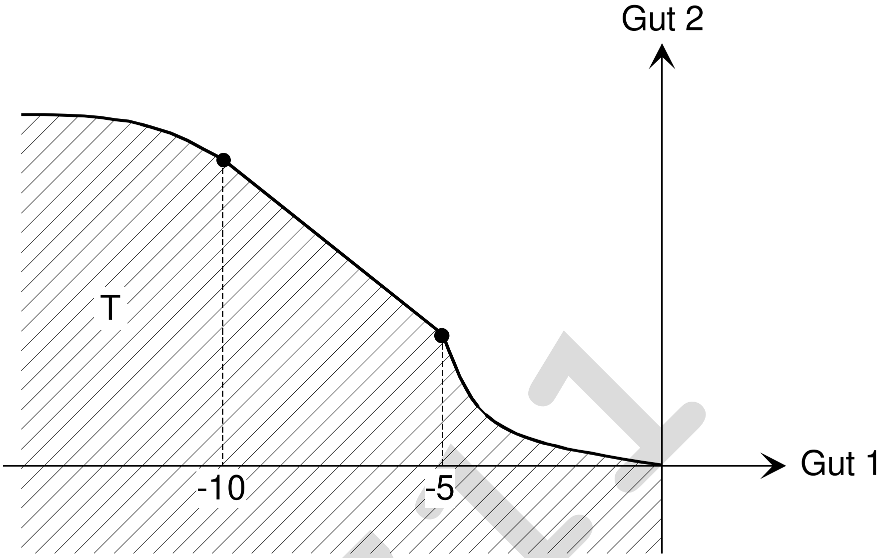


Abb. 7: *Aus den drei Grundformen kombinierte Technologie*

Die in Abb. 7 dargestellte Technologie kann in drei Bereiche unterteilt werden, in denen jeweils eine der drei Grundformen gültig ist. Wird von Gut 1 eine Menge zwischen 0 und 5 Mengeneinheiten (ME) eingesetzt, so ist der effiziente Rand der Technologie durch zunehmende Ertragszuwächse gekennzeichnet; in dem Intervall zwischen 5 ME und 10 ME des Einsatzes von Gut 1 liegen proportionale Ertragszuwächse vor; diesem Bereich folgt ein Bereich mit abnehmenden Ertragszuwächsen, der für Einsätze von über 10 ME von Gut 1 gültig ist.

1.6.2 Einführung der Additivität

Für ein statisches Produktionsmodell ist es unerheblich, ob zwei Aktivitäten in der Realität gleichzeitig oder nacheinander durchgeführt werden; im statischen Modell werden alle Aktivitäten des betrachteten Produktionszeitraumes als im selben Zeitpunkt ausgeführt angesehen. Deshalb können im statischen Modell zwei beliebige Aktivitäten zu einer Aktivität zusammengefasst werden, indem man die beiden Vektoren addiert. Technologien, für die eine solche Zusammenfassung möglich ist, heißen **additiv**; mathematisch lässt sich die Additivität so formulieren: Eine Technologie T heißt additiv, wenn für alle $v, w \in T$ gilt: $v + w \in T$, d.h. $T + T \subseteq T$. Die in b) und c) in Abb. 6 dargestellten Technologien sind additiv, die Technologie mit abnehmenden Grenzerträgen in a) jedoch nicht.

Additivität

1.6.3 Proportionalität und lineare Technologie

Es ist oft sinnvoll anzunehmen, dass eine Aktivität, die auf „hohem“ Niveau durchgeführt wird, auch in kleinerem Umfang ausgeübt werden kann, ohne dass sich das Input-Output-Verhältnis ändert. Beispiel: Werden aus 10 m^2 Leder und 20 Stunden Arbeit 30 Paar Schuhe hergestellt, so können aus 1 m^2 Leder und 2 Stunden Arbeit 3 Paar Schuhe produziert werden.

Formal lautet diese Annahme: Für jede Aktivität $v \in T$ und für alle $\lambda, \lambda \geq 0$ gilt: $\lambda v \in T$. Diese Eigenschaft wird als **Proportionalität** bezeichnet. Da bei Technologie a) für jeden Punkt $v \in T$ gilt: $\lambda v \in T$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$, spricht man hier von Größendegression. Hingegen gilt für Technologie b) für jeden Punkt $v \in T$: $\lambda v \in T$ mit $\lambda \geq 1$; daher spricht man hier von Größenprogression.

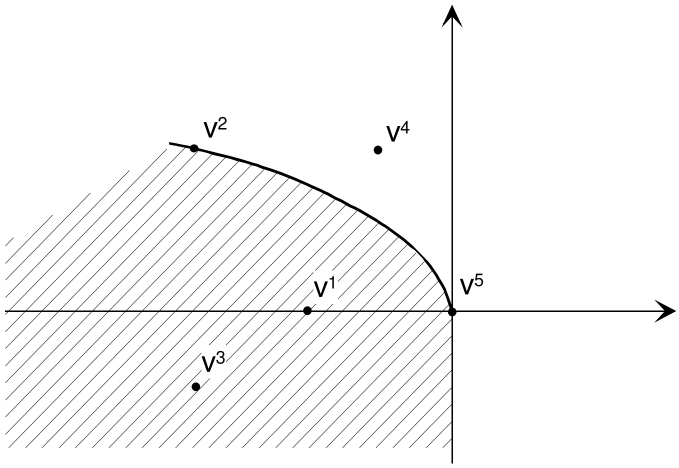
Mit der Erweiterung der Annahme der Proportionalität an die Technologie scheidet auch die in b) dargestellte Technologie aus der folgenden Betrachtung aus. Von den drei Grundformen ist nur die Technologie c) mit den gemachten Annahmen vereinbar. Sie ist die einzige, die sowohl die Additivität als auch die Proportionalität erfüllt. c) wird gemeinhin als **lineare Technologie** bezeichnet.

lineare Technologie

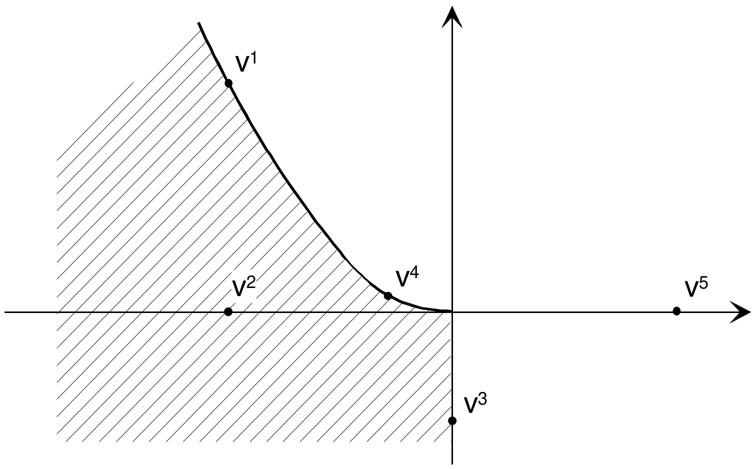
Übungsaufgabe 1

Die schraffierte(n) Fläche(n) stellen jeweils eine Produktionsmöglichkeitenmenge dar.

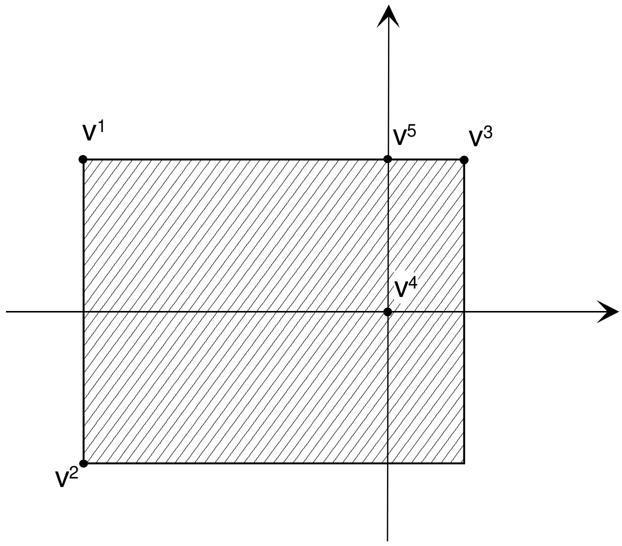
a)



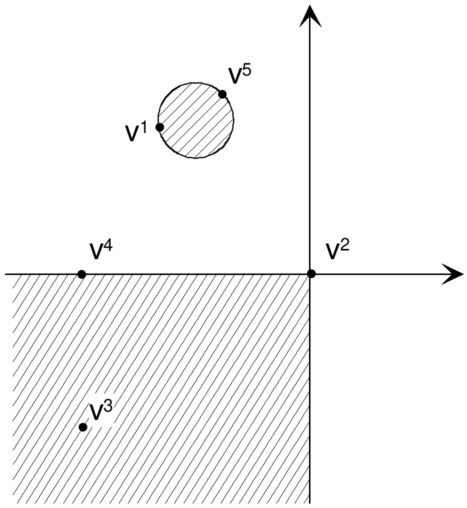
b)



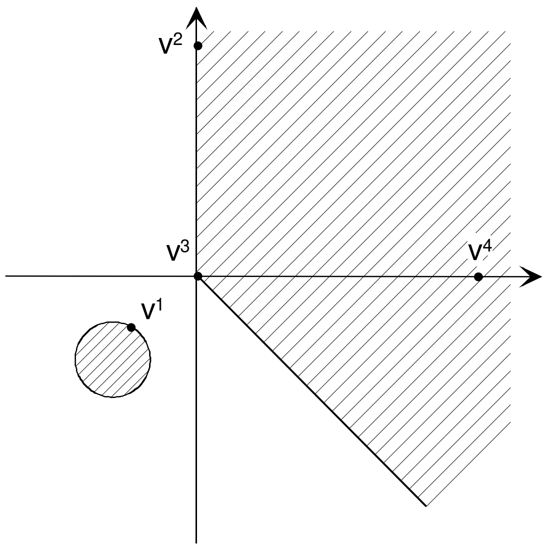
c)



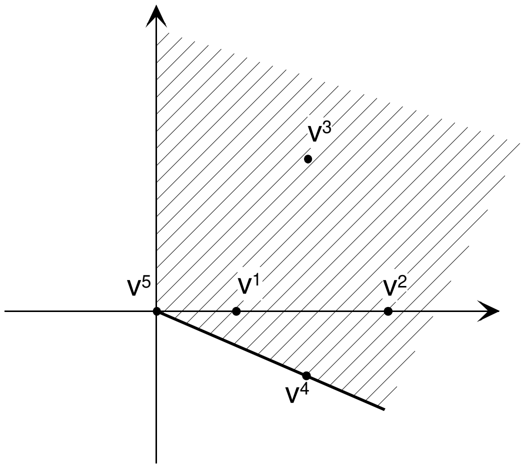
d)



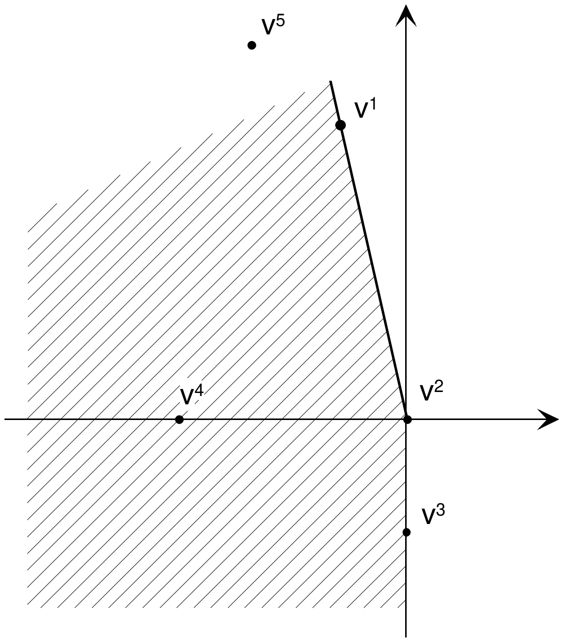
e)



f)



g)



1) Welche allgemeinen Annahmen über Technologien sind für die Abbildungen a) - g) erfüllt?
2) Ist T additiv? Ist T linear?

Überlegen Sie sich, welche der eingezeichneten Vektoren effizient sind. Bitte beachten Sie dabei, dass die Aussagen in Kapitel 1.5 „Der Effizienzbegriff" nur für Technologien gelten, für die alle allgemeinen Annahmen über Technologien zutreffen.

2 Die produktionstheoretische Beschreibung von Dienstleistungen

Dienstleistungsproduktion

In entwickelten Ökonomien ist die **Dienstleistungsproduktion** ein bedeutsamer Sektor. Von diesem – auch als tertiärem Sektor bezeichneten – Wirtschaftsbereich ist oft behauptet worden, er werde die Landwirtschaft und die industrielle Sachgüterproduktion ablösen, was den Beitrag zum Volkseinkommen, zur Belebung des Arbeitsmarktes und zum wirtschaftlichen Wachstum insgesamt betrifft. Andere warnten davor, die Gesellschaft werde in Zukunft nicht alleine davon leben können, dass die Wirtschaftssubjekte sich gegenseitig mit Dienstleistungen versorgen.

Die Notwendigkeit zur Kostendämpfung im Gesundheitswesen, die eingeforderten Überlegungen zur Effizienz und Sparsamkeit von Hochschulen, Massenentlassungen bei Finanzdienstleistern, Einbrüche in der Telekommunikation und die dramatischen Insolvenzen von Unternehmungen am Neuen Markt haben zu Ernüchterungen geführt, denen die Euphorie über die Rolle der Dienstleistungsproduktion allmählich gewichen ist. Geblieben ist die Erkenntnis, dass jede betriebliche Produktion auf ihre Wirtschaftlichkeit hin überprüft werden muss. Das gilt für die Erstellung von Dienstleistungen ebenso wie für die Erzeugung von Sachgütern. Die hieraus resultierende Notwendigkeit der Entwicklung einer Theorie der Dienstleistungsproduktion wird neuerlich auch von DYCKHOFF betont.

2.1 Verbindung von Dienstleistungs- und Sachgüterproduktion

Verspätung der Betriebswirtschaftslehre

Zur Untersuchung und Gestaltung effizienter Produktionen ist mit der Aktivitätsanalyse ein leistungsfähiges Instrument entwickelt worden [KOOPMANNS 1951]. Bei der Beurteilung von Aktivitäten und Technologien bzw. der Beschreibung von effizienten Produktionen durch Produktionsfunktionen hat sie sich in Fällen der Sachgüterproduktion bestens bewährt. Ansätze, sie auch auf die Dienstleistungsproduktion anzuwenden, sind dagegen spärlich, wenn auch keineswegs erfolglos geblieben. Jedoch hat die eher stiefmütterliche Behandlung der Erzeugung von Dienstleistungen durch die Produktionstheorie dazu geführt, dass sich manche Autoren dazu haben verleiten lassen, in diesem Zusammenhang von einer **Verspätung der Betriebswirtschaftslehre** zu sprechen. Sie haben einen Paradigmenwechsel gefordert, bei dem man sich von der Outputorientierung bzw. der Input-Output-Analyse der Dienstleistungsproduktion abkehren und stattdessen mehr einer prozessorientierten bzw. vertragstheoretischen Sichtweise zuwenden solle. Abgesehen davon, dass man angesichts des schon länger existierenden Konzepts der Aktivitätsanalyse statt einer Verspätung auch ein Versäumnis der betriebswirtschaftlichen Forschung zum Gebiet der Erstellung von Dienstleistungen konstatieren könnte, werden Effizienz- bzw. Produktivitätsbetrachtungen auch bei der Dienstleistungsproduktion nicht von Input-Output-Relationen loskommen.

Die einzelnen Sichtweisen

Wie schwer sich die betriebswirtschaftliche Forschung zur Dienstleistungsproduktion tut, wenn sie sich von der strikten Input-Output-Analyse der Produktionstheorie abwendet, sieht man daran, dass zusätzlich zu oder anstelle einer Ergebnisorientierung eine potential-, prozess- oder phasenorientierte Sichtweise vorgeschlagen wird. **Die einzelnen Sichtweisen** sind dabei folgendermaßen gekennzeichnet:

- Ergebnisorientierte Sichtweise nach MALERI 1973 oder GERHARDT 1987: Dienstleistungen werden als immaterielle Wirtschaftsgüter durch die Kombination produktiver Faktoren erzeugt (Haarschnitt).
- Potentialorientierte Sichtweise nach MEYER 1987: Dienstleistungen sind Leistungsfähigkeiten (Friseurbereitschaft).
- Prozessorientierte Sichtweise nach BEREKOVEN 1974 oder ROSADA 1990: Dienstleistungen entstehen durch Prozesse, in denen das Leistungspotential des Produzenten mit dem Nachfrager oder von diesem eingebrachten Objekten als externe Faktoren kombiniert wird und der externe Faktor eine Veränderung erfährt (Haare schneiden). Die Kombinationsprozesse erfordern eine sachliche, räumliche und zeitliche Koordination zwischen Leistungsersteller und Leistungsnehmer.
- Phasenorientierte Sichtweise nach HILKE 1989, CORSTEN 1990 oder MEYER 1991: Sie betrachtet zur Charakterisierung von Dienstleistungen die zuvor dargelegten Sichtweisen isoliert oder integriert.

Aktivitätsanalyse

Output, Inputkombinationen, Aktivitäten bzw. Produktionsprozesse und Modellierungen der ein- oder mehrstufigen Fertigung sind aber gebräuchliche Elemente bzw. Prozeduren der Aktivitätsanalyse. So bietet es sich an, die **Aktivitätsanalyse** daraufhin zu prüfen, ob sie als leistungsfähiges Integrationsinstrument in Betracht kommen kann. Die Beziehungen zwischen den in der Literatur gegenteilig formulierten Sichtweisen einer Dienstleistungsproduktion und den Konstruktionselementen der Aktivitätsanalyse verdeutlicht Tab. 1. Dadurch könnten die gegensätzlichen Positionen in den Sichtweisen einander angenähert werden, ja sogar der Widerstreit zwischen einer ergebnisorientierten und einer prozessorientierten Analyse der Dienstleistungsproduktion aufgehoben werden. Diese Zusammenhänge werden Gegenstand der Erörterungen in den nächsten Abschnitten sein. Dabei wird dann auch zu klären sein, inwieweit sich Begriffe der Aktivitätsanalyse inhaltlich sinnvoll für eine Produktionstheorie der Dienstleistungen ausfüllen lassen.

Tab. 1: *Beziehungen zwischen Sichtweisen der Dienstleistungsproduktion und Elementen der Aktivitätsanalyse*

Sichtweisen der Dienstleistungsproduktion	**Elemente der Aktivitätsanalyse**
ergebnisorientiert	Output
potentialorientiert	Inputkombinationen
prozessorientiert	Aktivität / Technologie
phasenorientiert	Stufigkeit der Fertigung
- eindimensional	- einstufig
- mehrdimensional	- mehrstufig

Auch die Ausweitung der Dienstleistungsproduktion um Personal-, Marketing-, Management- und Prinzipal-Agency-theoretische Aspekte stellt gegenüber der Einbettung der Sachgüterproduktion in die vielfältigen Unternehmungsfunktionen keine grundsätzlich innovative Entwicklung dar. So greift das zum Dienstleistungsmanagement eingesetzte Blueprinting auf Verfahren der Netzplantechnik zurück, die geradezu ergänzend in die Aktivitätsanalyse und die Untersuchung von Korrespondenzen zur Erfassung von ablauforganisatorischen Vorgängen eingebaut werden können. Daher kann man kaum behaupten, produktionstheoretische Ansätze zur Modellierung der Sachgüterproduktion wären nur wenig geeignet, Zusammenhänge der Dienstleistungsproduktion zu beschreiben und zu untersuchen. Produktionsmodelle für spezielle Dienstleistungen widerlegen diese These. Zudem bleibt bei Veröffentlichungen von Autoren, die dieser Meinung anhängen, unklar, welche einheitlichen Analyseinstrumente genau an die Stelle der bewährten produktionstheoretischen Konzepte treten sollen.

Sachgüterproduktion vs. Dienstleistungserstellung

Gegen eine Polarisierung von Sachgütererzeugung und Dienstleistungsproduktion sprechen ganz praktische Erwägungen. Sachgüterproduktionen weisen in der Regel auch Elemente der Dienstleistungserstellung auf, wenn man allgemein an die betrieblichen Funktionen der Verwaltung und der Materialwirtschaft und speziell an die logistischen Teilprozesse des Transports und der Lagerhaltung von Teilen, Baugruppen, Zwischen- und Endprodukten denkt. Diese Elemente werden bei der expliziten Modellierung der Sachgüterproduktion mit Hilfe der traditionellen produktionstheoretischen Ansätze oft ungerechtfertigterweise übergangen, da von ihnen unterstellt wird, dass sie implizit in den betrachteten Input-Output-Kombinationen der Aktivitäten enthalten sind. Nur wenn sie ablauforganisatorisch relevant werden, treten sie als eigenständige Aktivitäten in entsprechenden Netzplänen auf. Andererseits kommen bei der Erzeugung von Dienstleistungen mitunter Aktivitäten der Sachgütererstellung vor, wenn es beispielsweise um die Leistungserstellung von Handwerksbetrieben oder Kliniken der medizinischen Orthopädie geht. Manche Autoren weisen sogar auf die enge Analogie hin, dass ein und derselbe Fertigungsvorgang in Industriebetrieben bei Eigenfertigung Sachgüterproduktion darstellt, bei Auftragsfertigung aber als Dienstleistung aufgefasst werden kann. Dass die Übergänge in der Charakterisierung von Sachgütern gegenüber Dienstleistungen tatsächlich fließend sind, das hat SHOSTACK 1982 sehr überzeugend anhand einer Grafik vorgetragen, in der Güter danach geordnet werden, inwieweit bei ihnen die Anteile materieller oder immaterieller Elemente dominieren.

Aufgrund der voraufgegangen Überlegungen ist es wenig sinnvoll, die Ansicht zu vertreten, die Analyseinstrumente für die Sachgüterproduktion seien auf die Dienstleistungsproduktion nicht anwendbar, man brauche vielmehr völlig neue Untersuchungsmethoden der Dienstleistungserstellung. Wegen der vielfältigen Verbindungen liegt der Reiz vielmehr darin zu versuchen, Dienstleistungs- und Sachgüterproduktion zu integrieren und auf eine gemeinsame methodische Basis zu stellen.

2.2 Diskussion von Elementen einer Theorie der Dienstleistungsproduktion

2.2.1 Spezifizierung des Outputs

Ziel jeder Produktion ist es, erwünschte Güter herzustellen, die als Output bezeichnet werden. Dabei sind es die Eigenschaften dieser Güter, durch die die Güter definiert werden und die die menschlichen Bedürfnisse befriedigen. Deswegen werden die Güter nachgefragt. Die Güter können physische Objekte sein; dann nennt man sie Sachgüter. Sind sie immaterielle Objekte, dann heißen sie Dienstleistungen. Damit ist die ergebnisorientierte Definition der Dienstleistungen durch ihren Charakter als immaterielle Wirtschaftsgüter markiert, die im Weiteren maßgeblich sein soll.

Für diesen Standpunkt gibt es genügend Gründe. Ohne Orientierung am Ergebnis kann die Wirtschaftlichkeit einer Dienstleistungsproduktion nicht überprüft werden. Schließlich geht es darum, eine Dienstleistung oder bestimmte Mengen davon mit möglichst wenig Input zu erzeugen. Das macht es erforderlich, den Output Dienstleistung in jedem Einzelfall genau zu spezifizieren und ihn nicht durch andere Sichtweisen ersatzweise zu umschreiben. Noch zwingender scheint jedoch ein weiteres Argument zu sein, das **keine Abkehr von einer ergebnisorientierten Sicht auf Dienstleistungen** zulässt. Dienstleistungsunternehmen stellen wie alle anderen Unternehmungen Güter bzw. Produkte her, die sie am Markt verkaufen wollen. Das setzt voraus, dass die Dienstleistung derart als Output erfasst werden kann, dass sich für diesen ein Preis bestimmen lässt. Denn das erwerbswirtschaftliche Prinzip macht es auch für Dienstleistungsunternehmen erforderlich, bei den Erlösen die Output- bzw. Absatzmengen anzugeben.

keine Abkehr von einer ergebnisorientierten Sicht auf Dienstleistungen

Aus der ergebnisgerichteten Charakterisierung von Dienstleistungen als immaterielle Wirtschaftsgüter erwächst zugleich eine Fülle von Schwierigkeiten, die Zweifel daran aufkommen ließen, ob die mikroökonomische Produktionstheorie, die sich vornehmlich mit der Sachgüterherstellung beschäftigt, überhaupt zur Untersuchung der Dienstleistungsproduktion verwendbar ist. Gewisse Unzufriedenheiten rührten zunächst einmal aus dem vermeintlichen Defizit, der Begriff der Dienstleistung müsse detaillierter gefasst und schärfer gegen den der Sachgüter abgegrenzt werden. Das hat zahlreiche Versuche ausgelöst, den **Begriff der Dienstleistung zu definieren**, die sich teilweise sogar von der ergebnisorientierten Begriffsbestimmung abgewendet haben. Diese Versuche lassen sich wie folgt klassifizieren.

Begriffsdefinition der Dienstleistungen

- Enumerative Definitionen nach SCHÄR 1923, RÖSSLE 1954, WÖHE 1973 oder SCHIERENBECK 1974): Dienstleistungen werden durch das Aufzählen von Beispielen charakterisiert. Hieraus lassen sich keine allgemein gültigen Anhaltspunkte für eine Theorie der Dienstleistungsproduktion entwickeln, weil die Untersuchung zugrunde liegender gemeinsamer Merkmale von Dienstleistungen vernachlässigt wird.
- Negativdefinitionen nach CORSTEN 1988: Sie fassen alle Unternehmensleistungen, die nicht eindeutig dem primären oder sekundären Sektor der traditionellen volkswirtschaftlichen Leistungssystematik zugeordnet werden können, unter Dienstleistungen als tertiärem Sektor zusammen. Diese Verlegenheitslösung unterliegt derselben kritischen Bewertung wie die enumerativen Definitionen.

- Auf konstruktiven Merkmalen der Dienstleistungen basierende Definitionen nach GERHARDT 1987, CORSTEN 1988 oder RÜCK 2000: Sie beschreiben Dienstleistungen durch ihre Immaterialität und den dadurch bedingten Tatbestand, sie nicht lagern zu können, sowie die Notwendigkeit, einen externen Faktor einzubeziehen, über den der Nachfrager und nicht der Produzent die Dispositionsgewalt besitzt. Beschreibungselemente sind zudem die Vorhaltung einer Leistungsbereitschaft, die Parallelität von Produktion und Absatz und die Synchronisation von Leistungsangebot und Leistungsnachfrage. Hier wird deutlich, dass sich diese Definitionen zunehmend vom Outputbegriff entfernen und Aspekte des Inputsystems, der Inputkombination und des Produktionsprozesses aufnehmen, die in dieser Weise aber auch für die Sachgüterproduktion gelten können. Die graduelle Abkehr vom Outputbegriff im engeren Sinne offenbart die Betonung spezieller Sichtweisen.

Outputdefinition der Dienstleistungen

Die weiteren Überlegungen konzentrieren sich auf die **Outputdefinition der Dienstleistung** und damit verbundene Besonderheiten.

Unter Dienstleistungen sollen hier immaterielle Güter verstanden werden, die als Ergebnisse von Produktionsprozessen hervorgebracht werden. Ergebnis solcher Produktionsvorgänge ist also die erstellte Dienstleistung – nicht die Erstellung der Dienstleistung, die analog der Erzeugung von Sachgütern einem prozessorientierten Verständnis folgen würde. Aus der Immaterialität ist hergeleitet worden, die Produktion von Dienstleistungen müsse dem uno-actu-Prinzip gehorchen, d. h. Leistungserstellung und Leistungsabnahme müssten gleichzeitig vonstattengehen. Vor allem ergebe sich aus der Immaterialität, dass Dienstleistungen standortgebunden seien und nicht gelagert, transportiert und gehandelt werden könnten. Bezieht man in die Dienstleistungserzeugung aber auch die Erstellung von Informationen ein, wofür es sowohl aus der innerbetrieblichen Sicht der Disposition als auch aus der außerbetrieblichen Sicht der nachgefragten Güter zwingende Argumente gibt, so lassen sich diese vollbrachten Erstellungen von Informationen sehr wohl speichern, also lagern. Das gilt für Informationen in Produktionsplanungs- und -steuerungssystemen ebenso wie für erstellte Lehrunterlagen, die von Studierenden online nachgefragt werden können. Das uno-actu-Prinzip ist demnach aufgehoben. Gegenüber der Sachgüterproduktion besteht eine Besonderheit des Dienstleistungsoutputs in diesem speziellen Fall sogar darin, dass er beliebig oft genutzt und vervielfältigt werden kann, ohne dass es dazu noch eines weiteren aufwändigen Prozesses der Ressourcenkombination bedürfte, aus dem der Output ursprünglich hervorgegangen ist.

mangelnde Operationalisierbarkeit des Outputs Dienstleistung

Ein anderes Problemfeld, das eng mit der Eigenschaft der Immaterialität zusammenhängt, wird in der **mangelnden Operationalisierbarkeit des Outputs Dienstleistung** gesehen. Sie differenziert sich in die Teilaspekte der unzureichenden Konkretisierbarkeit, Qualitätsmessung, Determiniertheit und Messbarkeit.

Zur Begründung der mangelnden Konkretisierbarkeit der Dienstleistung wird oft die Informationsarmut über das Produkt im Gegensatz zum Sachgut angeführt. Dadurch werde dem Abnehmer die Qualitätsbeurteilung erschwert. Diesen Einwänden kann dadurch begegnet werden, dass man sich darauf besinnt, dass Güter gerade durch ihre Eigenschaften als Ausdruck von objektiven Qualitäten definiert werden und man insofern zur Spezifizierung von Dienstleistungen genaue Leistungsbeschreibungen fordert, die Art, Umfang und Qualität der Dienstleistung weitgehend zweifelsfrei festlegen. Bei Bauleistungen sowie Dienstleistungen von Arzt-, Rechtsanwalts- und Steuerberatungspraxen geschieht dies anhand von Formularen und Spezifizierungen nach Gebührenordnungen. Soweit jedoch die Qualität der Erstellung der Dienstleistung gemeint ist, unterscheidet sich dieser Problemaspekt nicht von dem der Sachgüterproduktion. Dort wird die Qualitätskontrolle zur Vermeidung von Ausschuss eingesetzt, die auch für eine Dienstleistungsproduktion installiert werden müsste. Die in der Industrie geforderten Zertifizierungen von Geschäftsprozessen nach ISO-Normen gehen in diese Richtung. Die Analogie zur Dienstleistungsproduktion ist offenkundig. In der Fokussierung auf Gütereigenschaften anstatt auf die Güter selbst kommt gerade der Unterschied zwischen entwickelten und einfachen Konsumwirtschaften zum Ausdruck, weil dadurch die Vielfalt der Güter im Hinblick auf die Bedürfnisbefriedigung größer wird.

Unbekanntheit der Qualität des externen Faktors

Die Ursachen für die mitunter auftretende Indeterminiertheit einer Dienstleistung werden darin gesehen, dass der Nachfrager selbst (Haare schneiden) oder von ihm eingebrachte Objekte (reparaturbedürftiges Auto) **als externe Faktoren** in den Kombinationsprozess der Dienstleistungserstellung einbezogen werden müssen, **deren Qualität oder Zustand aber zu Beginn des Erstellungsprozesses nicht hinreichend bekannt sind**. Ist die Indeterminiertheit auf objektiv ermittelbare Qualitätsdefizite des externen Faktors zurück zu führen (z. B. Studenten unterschiedlichen Schulausbildungsniveaus an den Universitäten), so ist die Überraschung über die schwierige Spezifizierung des Outputs nicht anders zu werten als die eines Sachgutproduzenten, der sich in der Qualität seines Materials geirrt hat. Liegt die Indeterminiertheit des Outputs dagegen in Unsicherheiten über die Art und Qualität des Inputs „externer Faktor“ oder des Herstellungs-prozesses, so handelt es sich bei der Modellierung um ein klassisches Problem der stochastischen Produktionstheorie. Rührt die Indeterminiertheit der Dienstleistung aber daher, dass man wegen des Zustands des externen Faktors erst im Laufe ihrer Erstellung zunehmende Klarheit darüber gewinnt, welche Art und Umfänge sie schließlich annehmen wird (z. B. klinische Diagnostik), so lassen sich bei entsprechender Detailliertheit auch für Teilprozesse der Dienstleistungsproduktion weniger mächtige Outputgrößen definieren.

Konzeptionelle Schwierigkeiten bei der Messbarkeit des Outputs der Dienstleistungsproduktion resultieren daraus, dass man ihn wegen der fehlenden Materialität nicht wie bei Sachgütern wiegen, messen und zählen kann. Hat man allerdings eine Dienstleistung einmal hinreichend genau als Gut beschrieben – wie vorhin erörtert –, dann kann man sie als Output sehr wohl in ganzzahligen Einheiten messen. Hier gibt es unmittelbare Gemeinsamkeiten zur Erfassung von Outputmengen der Sachgüterproduktion wie Automobilen oder Maschinen. Beispiele sind in der Literatur für BMÄ-bezifferte Arztleistungen sowie für Leistungen in der Universitätslehre zu finden.

keine homogenen Güter

Als besonderes Merkmal von Dienstleistungen wird gelegentlich die Auftragsindividualität angesprochen, die es bedingt, dass es wegen mangelnder Standardisierbarkeit der Outputs **nur heterogene bzw. keine homogenen Güter** gibt, die in größeren Einheiten als Eins gemessen werden können. Dieses Phänomen tritt bei der Herstellung von Spezialmaschinen, die sich in die besondere Produktionstechnologie des investierenden Unternehmens einfügen sollen, ebenso auf. Automobilhersteller weisen in ihrem Marketing sogar darauf hin, dass sich jeder Kunde aufgrund der Variantenvielfalt sein ganz unverwechselbares individuelles Fahrzeug zusammenbauen lassen kann. Hier wird die Heterogenität des Gutes als Kundenvorteil propagiert, was dem Charakteristikum entwickelter Konsumwirtschaften entspricht, den eigentlichen Konsumnutzen eines Gutes darin zu sehen, dass seine Eigenschaften bestmöglich zum Bedürfnisprofil des Nachfragers passen. Was für die Vielfalt bzw. Heterogenität von Sachgütern spricht, kann der Ergebnisdefinition von Dienstleistungen aber nicht als Gegenargument entgegen gehalten werden. Im Übrigen ist schon darauf hingewiesen worden, woraus sich für Dienstleistungen Standardisierungsmöglichkeiten und damit Homogenitäten ergeben können.

Eine Abgrenzung der Dienstleistung gegenüber der Haushaltsleistung scheint kaum erforderlich, da Güter ohnehin nur als Outputs bezeichnet werden, wenn sie aus einer Produktion entstehen. Insoweit Haushalte also produzieren und ihre Güter vermarkten, treten sie wie Unternehmen auf. So kann auch der Überlegung nicht gefolgt werden, unternehmensinterne Dienstleistungen nicht als Dienstleistungen zu begreifen. Generell würde dies mit dem Umstand übereinstimmen, Zwischenprodukte nicht als Outputs aufzufassen, was der üblichen Vorgehensweise der Produktionstheorie widerspricht. Zudem – würde man sich dieser Meinung anschließen, stünden unternehmerische Planungsabteilungen und innerbetriebliche EDV-Zentren ohne Output da, und man könnte die Leistungen der innerbetrieblichen Logistik nicht darauf überprüfen, ob sie günstiger sind, als den innerbetrieblichen Transport durch ein Fremdunternehmen vornehmen zu lassen. Den aktuellen Erörterungen eines Outsourcings innerbetrieblicher Dienstleistungen würde jede Basis einer wirtschaftlich rationalen Ausrichtung entzogen.

Vor dem Hintergrund der bisherigen Ausführungen wird vielmehr der Standpunkt eingenommen, dass Dienstleistungen als Outputs aktivitätsanalytisch ähnlich behandelt werden können wie Sachgüterprodukte. Aus diesem Blickwinkel scheint es nicht notwendig, vom ökonomisch bewährten Einteilungsschema für Produkte abzurücken. Outputorientierte Dienstleistungstypologien ließen sich darin als fruchtbare Erweiterungen integrieren.

Ein letztes Argument gegen die ergebnisorientierte Definition von Dienstleistungen soll hier noch angesprochen und entkräftet werden. Es besteht darin, bestimmte Dienstleistungen wie ein Konzert, eine Tiershow oder ähnliche Veranstaltungen könnten nicht durch ein Ergebnis, sondern vielmehr nur durch ihren Herstellungsprozess selbst definiert werden. Dem wird hier widersprochen. Man stelle sich vor, der Prozess einer Theaterveranstaltung würde nur zur Hälfte dargeboten und koste den Besucher auch entsprechend weniger. Die Proteste dagegen sind greifbar. So haben Theaterbetreiber den Schauspielern und Opernsängern früher traditionell in der Pause der Veranstaltung die Gagen bezahlt, damit sie zu Ende spielen bzw. singen. Das möglichst fehlerfrei erstellte Schauspiel, Konzert oder Sportereignis ist der Output Dienstleistung, den der Nachfrager verlangt. Sogar für einen Zoobesuch lässt sich die outputbezogene Sichtweise geltend machen: Es ist die durchgeführte Zurschaustellung der Tiere während bestimmter Öffnungszeiten, für die die Besucher zahlen, unabhängig davon, wie viel sie zeitlich davon in Anspruch nehmen wollen. Naheliegend ist es auch hier, den Vergleich zum Prozess der Sachgüterproduktion zu ziehen. Der Käufer würde nicht für den Herstellungsprozess des Autos, sondern für das hergestellte Auto zahlen. haben SHEPARD ET AL. 1977 für den Schiffbau den kontinuierlichen Produktionsprozess durch Input- und Outputintensitäten beschrieben und darauf ihre Effizienzanalyse mit Hilfe des Konzepts der Korrespondenzen – eine der Aktivitätsanalyse analoge Vorgehensweise – angewandt. Die tatsächlichen Input- und Outputmengen werden schließlich über die zeitlichen Integrale der Intensitäten berechnet. Diese Prozedur kann unmittelbar auch auf die Erstellung von Dienstleistungen als Prozess übertragen werden und würde den Gegensatz zwischen prozess- und ergebnisorientierter Sicht der Dienstleistungsproduktion aufheben.

2.2.2 Erweiterungen des Inputsystems

Ausgestaltung eines Faktorsystems bei Dienstleistungsproduktionen

Die Meinungen über die **Ausgestaltung eines Faktorsystems bei Dienstleistungsproduktionen** gehen weit auseinander. Einige Autoren glauben, dass die Faktoreinteilung der Sachgüterproduktion keinesfalls geeignet ist, sich daran auch bei der Erzeugung von Dienstleistungen zu orientieren. Manche vertreten sogar die extreme Auffassung, gerade Gutenbergs Faktoreinteilung sei nur für die industrielle Sachgüterproduktion konzipiert und das Weiterdenken in diesen Kategorien sei eher hinderlich für einen unbefangenen Neubeginn, eine Faktoreinteilung für die Dienstleistungsproduktion vorzunehmen. Diese Überlegungen gipfeln in der Forderung, für Dienstleistungsproduktionen müssten arteigene Faktorsysteme entwickelt werden. Eher randständig ist in diesem Zusammenhang die Ansicht, in die Sachgüterproduktion gingen nur Sachgüter ein und bei der Erstellung von Dienstleistungen als immaterielle Wirtschaftsgüter dürften folglich keine materiellen Güter verzehrt werden. Sachgüter kämen also in diesen Fällen als Inputs nicht in Betracht, da sie die Abgrenzungsprobleme zwischen den materiellen und immateriellen Bestandteilen einer Dienstleistung verursachten und damit einer exakten Fassung des Dienstleistungsbegriffs im Wege stünden. Diederich nimmt dagegen die Position ein, das Faktorsystem von Gutenberg könne sehr wohl bei einigen Modifikationen auch grundlegend für die Dienstleistungsproduktion sein.

Bei näherer Betrachtung spricht mehr für die Harmonisierungstendenz als für die Polarisierung. Es ist zwar richtig, dass der externe Faktor als arteigener Input der Dienstleistung im Faktorsystem von Gutenberg nicht vorkommt und auch Dienstleistungen als Inputs nicht explizit aufgeführt sind, allerdings impliziert der dispositive Faktor in seinem Schema und die damit verbundenen Erledigungen der Geschäftsführungsfunktionen, dass Dienstleistungen sehr wohl Bestandteile seiner Faktoreinteilung sein können! Zudem müssen sie integriert werden, da sie – wie schon dargelegt – auch bei der Sachgüterproduktion als Inputs auftreten. Andererseits ist der Blick auf Gutenbergs Inputsystem unzulässig verengt, wenn man meint, bei der von ihm in seinen Büchern schwerpunktmäßig behandelten Sachgüterproduktion gingen als Inputs nur Sachgüter ein. Potentialfaktoren sind nicht an sich die Inputs der Produktion, sondern die von ihnen abgegebenen Leistungen. Das gilt für die operative (wie auch für die dispositive) Arbeitsleistung ebenso wie für die Leistungsabgabe der Maschinen als Elementarfaktoren. Wenn Gutenberg von den subjektiven Fähigkeiten von Arbeitskräften und in Erweiterung seines Konzepts der Verbrauchsfunktionen von der z-Situation technischer Eigenheiten von Aggregaten spricht, durch die die Produktivität der Faktorkombination maßgeblich bestimmt wird, dann erkennt man, wie die Guteigenschaften der Inputs denen der Outputs moderner Konsumwirtschaften entsprechen. So ließe sich über GUTENBERG eine vertikale Linie von den Engineering Production Functions mit ihrer Fokussierung auf die Auswirkungen ingenieurwissenschaftlicher Variablen des Inputs und Outputs auf die Produktion hin zu den für Sachgüter und Dienstleistungen gleichermaßen relevanten Gütereigenschaften ziehen.

Erweitertes Faktorsystem

Das im Folgenden dargestellte **erweiterte Faktorsystem** baut auf den Ideen von GUTENBERG auf. Es ist gleichermaßen für die Dienstleistungs- wie für die Sachgüterproduktion anwendbar, greift aber insbesondere die bislang vernachlässigten Eigenheiten der Dienstleistungsproduktion mit auf. Ausgangspunkt ist das in Abb. 8 dargestellte Einteilungsschema. Der Schwerpunkt der Erläuterung liegt auf der Dienstleistungsproduktion; Beziehungen zur Sachgüterproduktion werden nur dort gesondert in die Beschreibungen aufgenommen, wo sie im Vergleich zur traditionellen Sichtweise neue Aspekte aufwerfen.

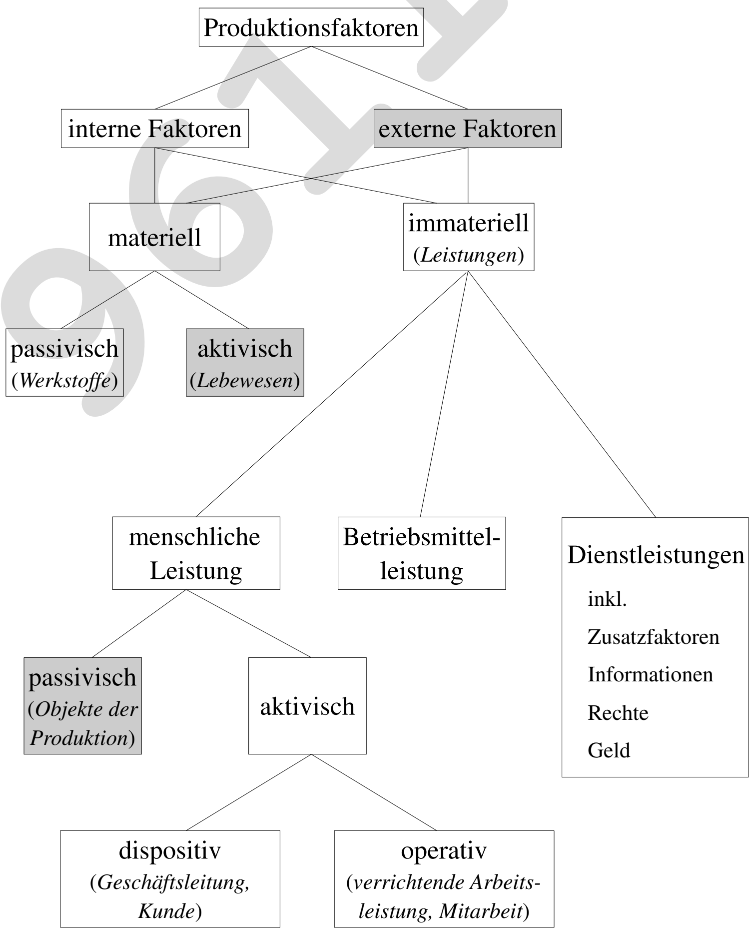


Abb. 8: *Erweiterung des GUTENBERGschen Schemas zur Einteilung von Produktionsfaktoren für die Sachgüter- und Dienstleistungsproduktionen*

Einbeziehung externer Faktoren in das System der Ressourcen

Die **Einbeziehung externer Faktoren in das System der Ressourcen** bei der Erzeugung von Dienstleistungen gegenüber der Sachgüterproduktion ist sehr plausibel. Unter den externen Faktoren versteht man dabei im Gegensatz zum Begriff der internen Faktoren solche Inputarten, deren Auftreten und Mitwirken im Kombinationsprozess der Dienstleistungserzeugung in zeitlicher, artmäßiger, mengenmäßiger und örtlicher Hinsicht nicht der Dispositionsgewalt des Dienstleistungsproduzenten unterliegen, vielmehr durch den Nachfrager der Dienstleistung festgelegt werden. Externe Faktoren sind Personen (der Kunde selbst als Weiterbildungswilliger, vom Kinderarzt zu untersuchende Kinder) oder Objekte (ein zu pflegendes Tier oder zu galvanisierende Werkstücke), die vom Nachfrager der Dienstleistung in ihren Erstellungsprozess eingebracht werden. Personen, deren Produktionsbeitrag als immaterieller Faktor durch Leistungseinheiten (z. B. Verrichtungen oder Zeiteinheiten) erfasst werden, können am Kombinationsprozess der Dienstleistungsherstellung **passivisch** (Operation eines Patienten, Haare schneiden) oder aktivisch (Student, Rehabilitationsmaßnahme) beteiligt sein. Bei **aktivischer Beteiligung** einer Person als externer Faktor lässt sich weiterhin unterscheiden, ob diese aktivische Teilnahme operativ (Inhalieren, Selbstbedienung) oder dispositiv (Entwicklung einer bestimmten Bauausführung zusammen mit dem Architekten) in Erscheinung tritt. An dieser Stelle erkennt man, dass der Übergang zu Dienstleistungen, die vom Nachfrager als externe Faktoren in die Dienstleistungsproduktion eingebracht werden können, fließend ist. Wenn unter der ergebnisorientierten Sicht geklärt ist, wie man einen Output Dienstleistung misst, dann ist damit die für das Ressourcensystem erforderliche Lösung des Problems, wie Dienstleistungen als Inputs gemessen werden sollen, ebenfalls mit erarbeitet. Sofern durch den Nachfrager Betriebsmittelleistungen (Zurverfügungsstellung der eigenen Bohrmaschine an Handwerker) beigesteuert werden, sind sie ebenso wie die menschliche Leistung und die Dienstleistungen unter der Kategorie der immateriellen Ressourcen einzuordnen.

Aktivische oder passivische Beteiligung des externen Faktors

Externe Faktoren sind Objekte

Sind die externen Faktoren **Objekte**, dann weisen sie Ähnlichkeiten zu materiellen Inputs der Sachgüterproduktion auf. In Fremdarbeit zu galvanisierende Werkstücke, ein zu reparierendes Auto oder ein beim Tierarzt zu operierender Hund sind, da sie passivisch dem Herstellungsprozess unterworfen sind, wie Werkstoffe der Sachgüterproduktion aufzufassen. Als Lebewesen können nicht-menschliche externe (aber auch interne) Faktoren aktivisch zur Produktion beitragen (Rehabilitationsmaßnahme für eine Katze, Hefepilze beim

Backen oder Mikroorganismen in der Biotechnologie). Hier ist die Unterscheidung zwischen passivischem und aktivischem Beitrag schon eher etwas künstlich, weil die Bestimmung des Inputs und seiner Einheiten keine prinzipiellen Probleme aufwirft. Der Meinung, dass bei der Dienstleistungsproduktion keine Rohstoffe eingesetzt werden, kann man wohl kaum folgen, wenn man Haarfärbungsmittel beim Friseur, Zink bei der Eindeckung eines Garagendachs durch den Klempner oder Gips bei der Schienung eines gebrochenen Beins in Betracht zieht.

Bevor auf einige Besonderheiten des Wirkungsbeitrags externer Faktoren bei der Dienstleistungsherstellung eingegangen wird, soll hier zunächst noch kurz die Frage erörtert werden, ob jede Dienstleistung der Einbeziehung eines externen Faktors bedarf. Keineswegs soll hier so weit gegangen werden, dass jeder Nachfrager durch kooperatives Handeln im Sinne einer Kunden-Organisations-Beziehung schon zum Teil der Ressourcenkombination des Unternehmens wird. Das mag bei der Individualausstattung eines Autos oder einer Yacht zutreffen, beim Kauf eines PKWs mit Standardausstattung oder eines Kilos Salz aber schon nicht mehr. Doch selbst bei einem engeren Blick auf die Dienstleistungserstellung scheint es genügend Fälle zu geben, bei denen die Integration eines externen Faktors nicht zwingend ist. Dazu gehören beispielsweise die Distributionsleistung eines Handelsunternehmens, Güter in bestimmten Stellagen für Kunden zum Kauf verfügbar zu machen. Ähnlich verhält es sich mit dem verpflichtenden Leistungsangebot öffentlicher Verkehrsbetriebe, ohne dass konkret eine Person befördert wird. Die Transportdienstleistung ist erstellt, aber nicht nachgefragt worden. Und schließlich ist die Dienstleistungserstellung einer maschinellen Telefonnummernauskunft bei einem Telekommunikationsunternehmen kaum anders einzustufen als die Produktion von Sachgütern auf Lager, ohne uno-actu den Nachfrager als externen Faktor einzubeziehen.

Von den in der Literatur aufgezählten Besonderheiten externer Faktoren muss nach der Darlegung seiner Arten und Erscheinungsformen sowie der Messung des Verzehrs seiner Inputquantitäten im Wesentlichen nur noch ein Aspekt beleuchtet werden, der seine Qualität und damit zusammenhängende Leistungsprofile betrifft. Im Hinblick auf die Qualität und der dadurch bedingten Wirkungsweise im Kombinationsprozess kann prinzipiell auf entsprechende Überlegung verwiesen werden, die über die Leistungsfähigkeit von Mitarbeitern, die Produktivität der Betriebsmittel und die Ergiebigkeit der Werkstoffe in der Sachgüterproduktion angestellt werden. Allerdings tut sich bezüglich der Möglichkeit, Qualitäten des externen Faktors Mensch zu erklären bzw. unzureichende Qualitäten in der Dienstleistungsproduktion durch den zusätzlichen

Isoleistungsprofile bzw. Isoqualitätsprofile

Einsatz interner Faktoren zu kompensieren, eine neue Perspektive der Substitutionalität auf, die auf die Untersuchung von **Isoleistungsprofilen bzw. Isoqualitätsprofilen** abzielt. Diese Profilarten sollen in Ansehung unterschiedlicher Erklärungsversuche durchaus abweichend von in der Literatur vorzufindenden Begriffsbestimmungen im Folgenden so definiert sein: Ein Isoleistungsprofil erklärt für einen externen menschlichen Faktor gegebener Qualität, welche Outputs erreicht werden können, wenn Leistungsinputs des externen Faktors durch andere Leistungsinputs des externen Faktors oder interner Faktoren im Rahmen desselben Leistungsbudgets ersetzt werden. Es handelt sich hierbei also um eine Inputeigenschaft. Das Isoqualitätsprofil erfasst dagegen, in welchen Mengen Leistungen interner Faktoren und externer Faktoren aufgebracht werden müssen, um eine bestimmte Qualität zu erreichen. Hierbei geht es um eine Outputeigenschaft. Der Sachverhalt möge durch die Abb. 9 für einen Studenten als externen Faktor der Dienstleistung „durchgeführte Lehrveranstaltung“ an der Universität veranschaulicht sein. Die internen Faktoren sind die Vorlesungsleistungen des Professors und begleitende Tutorien. Die Vorlesungs-(V) und Tutorienleistungen (T) werden für den externen und die internen Faktoren gleichermaßen in Stunden gemessen; dasselbe gilt für die Selbststudiumsleistungen (S) des Studenten. Das Isoleistungsprofil gibt alle Zeitaufteilungen in Vorlesungs-, Selbststudiums- und Tutorienzeiten an, die dasselbe Zeitbudget ergeben. Reicht dieses Budget zum Bestehen der Lehrveranstaltung nicht aus und/oder möchte der Student ein höheres Qualitätsprofil $Q^2 > Q^1$ zur Erzielung eines besseren Ergebnisses verwirklichen, bliebe ihm nur die Möglichkeit, sein Zeitbudget für Vorlesung, Selbststudium und Tutorium zu erhöhen, so dass er auf das höhere Qualitätsniveau Q^2 käme, das er mit seinem alten Zeitbudget nicht erreichen könnte.

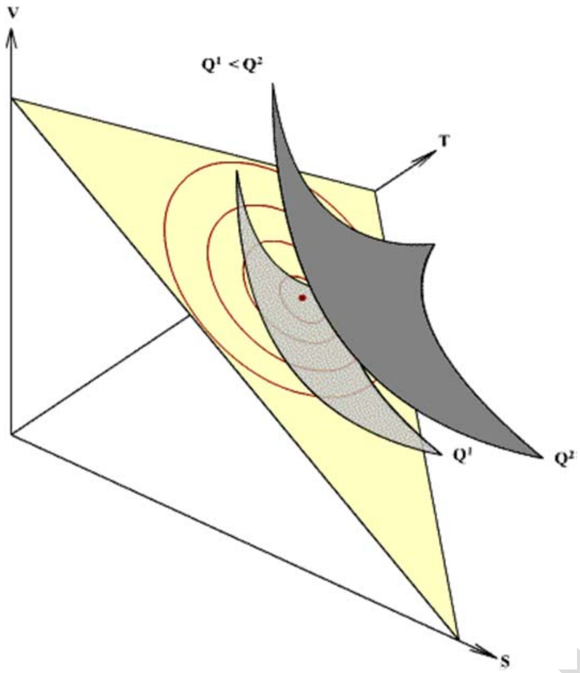


Abb. 9: *Isoleistungs- und Isoqualitätsprofile des externen Faktors Student im Universitätsstudium*

Beispiel der Substitution der Leistungsabgabe

Ein **Beispiel der Substitution der Leistungsabgabe** der internen Faktoren durch die des externen Faktors wäre die Mischung von Bedienung und Selbstbedienung in Restaurants. Weitere Beispiele sind offenkundig und bedürfen keiner Erwähnung mehr.

Schaut man nun nach den vorangegangenen Ausführungen aus neuer Position auf die Einteilung des Faktorsystems in Abb. 8, so fällt auf, dass die grau hinterlegten Kategorien bei GUTENBERG fehlen, da seine Betrachtungen produktiver Gesetzmäßigkeiten nicht so sehr auf die Dienstleistungserzeugung als Endprodukt unternehmerischer Tätigkeit konzentriert waren. Wie sehr sich sein Ressourcenschema aber in ein solches einbauen lässt, das sowohl der Sachgüter- wie der Dienstleistungsproduktion genügen mag, überrascht doch angesichts der oft wiederholten Auffassung, man könne seine Faktoreinteilung im Fall der Dienstleistungsproduktion kaum verwenden. Allerdings – und das muss man freimütig zugestehen – sind es die beharrlichen Kritiken derer, die sich mit der Dienstleistungsproduktion schwerpunktmäßig auseinander gesetzt haben, gewesen, die die Uminterpretation des GUTENBERGschen Schemas in Gang gesetzt und beschleunigt haben. Dabei sieht man, dass die Potentialfaktoren (Arbeitskräfte, Betriebsmittel) nun nicht mehr in ihren ursprünglichen Begriffen, sondern in den für die Produktion relevanten Leistungsabgaben erfasst werden.

Charakterisierung durch Leistungspotentiale

Zum Schluss dieses Abschnitts soll noch auf einen Gedanken eingegangen werden, der im Rahmen des Inputsystems der Dienstleistungsproduktion angesprochen werden muss, nämlich **Dienstleistungen durch Leistungspotentiale zu charakterisieren**. Wie sehr gerade diese Leistungspotentiale auch die Sachgüterproduktion kennzeichnen bzw. bedrücken, erfährt man, wenn die vorgehaltenen Kapazitäten in den Unternehmungen – ihre so genannten Leistungsbereitschaften – nicht ausgelastet sind. Die Montagestraßen eines Automobilherstellers werden dann zu einer größeren Bedrückung als das Leistungspotential einer Pommes-Bude. So ist dieser Aspekt des Auftretens und Vorhaltens von Leistungspotentialen nicht geeignet, Dienstleistungserzeugung gegenüber Sachgüterproduktion abzugrenzen. Gleichwohl aber können diese Leistungspotentiale im Kontext des Inputsystems als eine Kombination von Potentialfaktorarten bzw. ihrer möglichen Leistungsabgaben beschrieben werden.

2.2.3 Aktivität, Technologie, Effizienz und Produktionsfunktion

Darstellung durch Aktivitäten

Die bisherigen Erörterungen hatten zum Ziel darzulegen, dass die Outputs und Inputs der Dienstleistungsproduktion mengenmäßig beschrieben werden können und dafür, wie bei der Sachgüterproduktion, reelle Zahlen – wenn auch beim Output vornehmlich ganze Zahlen als Teilmenge – in Frage kommen. Dann aber lässt sich die Input-Output-Kombination einer Dienstleistungsproduktion nach der Aktivitätsanalyse von KOOPMANS 1951 **durch eine Aktivität darstellen**; und die Menge aller Aktivitäten, die ein Dienstleistungsunternehmen auf der Grundlage seines Wissens und Könnens durchführen kann, kann entsprechend als Technologie bezeichnet werden – vorbehaltlich der Tatsache, dass diese Menge von Produktionspunkten bestimmte Annahmen erfüllt. Solche Aktivitäten werden in der Produktionstheorie mitunter auch als Produktionsprozesse bezeichnet. Hier wird deutlich, dass die Vertreter einer prozessorientierten Sicht von Dienstleistungserzeugungen unmittelbar in der Produktionstechnologie ihre inhaltliche Verortung finden und aus produktionstheoretischer Perspektive keine Widersprüche zu anderen Sichtweisen existieren müssen.

Auch die Diskussion, ob die Dienstleistungsproduktion als zeitpunktueller Vorgang (Aktivität) beschrieben werden kann oder nicht vielmehr als Zeitraum bezogener Prozess modelliert werden muss, führt nicht aus dem gewohnten Gebiet produktionstheoretischer Analyseinstrumente heraus. Entweder definiert man die Prozessdauer als Produktionsperiode, dann lassen sich die kontinuierlichen Input- und Outputintensitäten durch ihre Zeitintegrale zu Mengen berechnen, von denen dann im Rahmen der statischen Produktionstheorie unterstellt wird, sie seien zum

Ende der Periode als Produktionspunkt verwirklicht worden. Oder man bildet die Dienstleistungserzeugung als im Zeitablauf stattfindenden Prozess in Form eines Ansatzes der dynamischen Produktionstheorie durch Chroniken bzw. dynamische Korrespondenzen ab.

Gewisse Eigengesetzlichkeiten der Dienstleistungen

Der Behauptung, Dienstleistungsproduktionen seien durch **gewisse Eigengesetzlichkeiten** gegenüber der Sachgüterproduktion gekennzeichnet, muss insoweit stattgegeben werden, als mit dem externen Faktor als arteigenem Input eine Ressourcenkategorie auftritt, die bislang nicht so im Gesichtsfeld der traditionellen Produktionstheorie lag. Eine darüber hinaus gehende Eigengesetzlichkeit kann dagegen nicht zugestanden werden. Auf Möglichkeiten der Modellierung einer zeitraumbezogenen Produktion ist schon eingegangen worden. Dienstleistungsproduktionen werden möglicherweise personalintensiver als Sachgüterproduktionen sein; doch das ist für die Bildung von Aktivitäten kein Hinderungsgrund. Der Aspekt der Verrichtungsqualität tritt bei der Sachgütererzeugung ebenso auf. Dem Problem der Indeterminiertheit, wenn es in den noch unklaren Vorstellungen des Nachfragers über die von ihm nachgefragte Dienstleistung und nicht generell in stochastischen Elementen der Produktion begründet liegt, kann man dadurch beikommen, dass man eine Dienstleistung in Teileinheiten zerlegt, die dann erst nacheinander erstellt werden (beispielsweise ein Stufenkonzept bei der Beratung der Einführung eines PPS-Systems). Anderenfalls muss man eine stochastische Produktionsanalyse vornehmen mit den bekannten Komplexitätsproblemen. Lernprozesse, die durch den externen Faktor Mensch zustande kommen, können durch Ansätze der dynamischen Produktionstheorie ebenso behandelt werden wie Lernprozesse des internen Faktors „menschliche Arbeitsleistung" bei der Sachgüterproduktion. Die unter Umständen erforderliche Synchronisation von Produktion und Absatz bzw. die Koordination von Leistungsgeber und Leistungsnehmer stellt für eine Theorie der Produktion der Dienstleistung, wie sie hier befürwortet wird, methodisch keine Schwierigkeit dar; sie kann organisatorisch bewältigt werden. Und dass gelegentlich sogar der Absatz vor der Produktion liegen mag, kommt auch bei der Auftragsproduktion der Sachgütererzeugung vor. Mehrstufige Fertigungsprozesse, wie sie wegen des externen Faktors und aufgrund von Leistungspotentialen auftreten können, sind reale empirische Phänomene der Aktivitätsanalyse.

Meint man dagegen, die Eigengesetzlichkeit sei dadurch begründet, dass man für Dienstleistungsproduktionen keine Produktionsfunktionen der traditionellen Typologie ansetzen könne, dann liegt ein methodisches Missverständnis vor. Die Stärke der KOOPMANSschen Aktivitätsanalyse und ihre Eignung, zugleich eine formale Fundierung für alle Arten von Produktionsfunktionen zu sein, besteht darin, dass sie als Produktionsfunktion eine Abbildung definiert, die gerade den effizienten Produktionspunkten die Null zuordnet. Dies ist ebenso für diskrete (und nur endlich viele) effiziente Produktionen möglich; dazu bedarf es keiner expliziten Produktionsfunktion.

Begriff der Effizienz

Der **Begriff der Effizienz** kann unmittelbar auf Aktivitäten der Dienstleistungsproduktion angewendet werden, wenn Input- und Outputgrößen – wie vorhin aufgezeigt – reelle Zahlen sind. Die Möglichkeit der expliziten Modellierung von dispositiven Aktivitäten als unternehmensintern produzierte Dienstleistungen und ihrer Aufnahme als Zwischenprodukte in das erweiterte Inputschema eröffnen jedoch neue Perspektiven, beim Effizienzbegriff zwischen der üblichen Allokationseffizienz und einer Planungseffizienz bzw. (verallgemeinert) einer Managementeffizienz zu unterscheiden.

Viele Ansätze sind formuliert worden, um spezielle Dienstleistungsproduktionen durch Produktionsfunktionen empirisch zu beschreiben. Sie alle beweisen, dass der Reiz, auf Pfaden einer erfolgreichen Anwendung mikroökonomischer Produktionstheorie weiterzugehen, größer ist als die Zögerlichkeit, die aus den Bedenken resultiert, Input- und Output-Kombinationen in solchen Fällen nicht genau so zufrieden stellend operationalisieren zu können wie bei der Sachgüterproduktion. Allerdings muss man sich vor Fehlspezifikationen hüten, wenn man die Irritation durch die Gesetzlichkeit vermeiden will, den Zusammenhang zwischen der Kredithöhe und dem Vergabeaufwand durch eine klassische Produktionsfunktion zu beschreiben. Denn die Höhe des Kredits ist nicht selbst der Output sondern eine Eigenschaft der Dienstleistung „durchgeführte Kreditgewährung“. Dabei könnten Kredite derselben Eigenschaften als homogene Güter betrachtet werden. Dies geschieht regelmäßig bei Kreditentscheidungen der Banken, bei denen die Kredite in Größen- und Risikoklassen eingeteilt werden.

Frage der Produktionsfunktion

Ein Aspekt, der durchaus zeitweise in der Literatur zur Handelsbetriebslehre erörtert worden ist, ob **Produktionsfunktionen** der Dienstleistungsproduktion substitutional oder limitational (siehe Kapitel 3, besonders Kapitel 3.2) sind, ist in den nachfolgenden Jahren bei der Behandlung der Dienstleistungsproduktion leider wieder vernachlässigt worden. Der mögliche Ausgleich unbefriedigender Aktivitätsniveaus des externen Faktors bei Dienstleistungserstellungen, bei denen es auf seine Interaktion ankommt, durch den Mehreinsatz der Mengen interner Faktoren legt die Vermutung substitutionaler Gesetzmäßigkeiten nahe. Hinzu kommt die Überlegung, dass Dienstleistungsproduktionen gegenüber Sachgüterproduktionen wohl sehr viel personalintensiver sind. Das würde im Gegensatz zu limitationalen Gesetzmäßigkeiten der industriellen Sachgüterproduktion, die durch die feste Zuordnung von Menschen, Maschinen und Materialfluss gekennzeichnet sind, eher für Substitutionalität der Inputs sprechen. Diese kann freilich aufgrund erforderlicher Qualifikation – wie bei der Behandlung in Krankenhäusern – von den unteren Niveaus her zu den höheren eingeschränkt sein. So könnten Ärzte wohl die Verrichtungen von Pflegern übernehmen, aber nicht umgekehrt. Es läge also unter Umständen nur eine sehr begrenzte periphere Substitutionalität vor. Allerdings würden in solchen Beschreibungsfällen die klassische und die neoklassischen Produktionsfunktionen eine Renaissance betriebswirtschaftlicher Attraktivität erleben, die sie als Erklärungsmodelle zugunsten der limitationalen Produktionsmodelle bei stärkerer Betonung der industriellen Sachgüterproduktion eingebüßt hatten – ja sogar unwiederbringlich verloren zu haben schienen.

3 Produktionsfunktionen

Produktionsfunktion

Der Prozess der Leistungserstellung ist durch den Einsatz von Produktionsfaktoren und durch die Ausbringung von Produkten und Leistungen gekennzeichnet. Eine betriebswirtschaftliche **Produktionsfunktion** beschreibt die bestehenden Verknüpfungen zwischen den Einsatz- und Ausbringungsmengen.

3.1 Produktionsfunktionen und Technologie

Während die Technologie T alle einem Unternehmen bekannten Produktionsmöglichkeiten oder Aktivitäten beschreibt, erfasst die Produktionsfunktion nur noch die effizienten Produktionsmöglichkeiten. Dabei werden aber sowohl die Produkt- als auch die Faktorquantitäten in positiven Einheiten gerechnet. Es lässt sich folgende einfache formale Beziehung zwischen Technologie und Produktionsfunktion aufstellen:

Sei $f\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ eine Abbildung vom Güterraum in die Menge der reellen Zahlen, dann heißt f Produktionsfunktion zur Technologie T, wenn sie genau die effizienten Aktivitäten in die Null abbildet, d.h. also, wenn gilt:

$$f(v) = 0 \text{ genau dann, wenn } v \in T_{eff}, v = (v_1, \dots, v_k)'.$$

Die Produktionsfunktion beschreibt also den effizienten Rand der ihr zugrundeliegenden Technologie.

Implizite, explizite Produktionsfunktion

Neben dieser **impliziten Form** der Produktionsfunktion existiert auch die Möglichkeit, die Produktionsfunktion **explizit** darzustellen, falls man die Funktion $f(v) = 0$ nach einer Komponente $v_k, k \in \{1, \dots, K\}$, des Vektors v auflösen kann. Die Produktionsfunktion nimmt dann folgende Gestalt an:

$$v_k = f_k(v_1, \dots, v_{k-1}, v_{k+1}, \dots, v_K)\ .$$

Oft wird in der Produktionstheorie der Fall betrachtet, dass in einem einstufigen Produktionsprozess durch die einmalige Kombination von Faktoreinsatzmengen $(r_1, \dots, r_I)$ ohne Zwischenschaltung von Zwischenprodukten nur ein Endprodukt (x) erzeugt wird. Dann lässt sich die Produktionsfunktion in der einfachen Form schreiben:

$$x = f(r_1, \dots, r_I).$$

3.2 Einteilung der Produktionsfunktionen

Produktionsfunktionen können je nachdem, ob die Mengen der eingesetzten Faktoren bei der Produktion gegeneinander austauschbar sind oder in festen Verhältnissen zueinander stehen müssen, zunächst ganz allgemein in **substitutionale** und **limitationale** Produktionsfunktionen unterteilt werden.

Substitutionale und limitationale Produktionsfunktionen

Kann ein bestimmtes Produktionsergebnis aus technischen Gründen nur durch eine einzige effiziente Kombination von Faktormengen verwirklicht werden, d.h. stehen zur Herstellung einer Produktion die effizienten Faktoreinsatzmengen in einem technisch bindenden Verhältnis zueinander und zur Produktmenge, so spricht man von limitationalen Produktionsfaktoren oder auch von der Limitationalität der Produktionsfunktion. Montageprozesse stellen häufig derartige limitationale Produktionsvorgänge dar.

Beispiel:

Zur Herstellung eines Fahrrads (x) werden zwei Räder (r_1) und ein Sattel (r_2) benötigt. Diese Einsatzbeziehungen werden folgendermaßen dargestellt:

$$r_1 = 2x \text{ und } r_2 = x.$$

Das Verhältnis des jeweiligen Produktionsfaktors zu dem Output wird als **Produktionskoeffizient** bezeichnet. Die Produktionskoeffizienten der Faktoren geben an, welche Menge des Faktors i erforderlich ist, um eine Einheit des Endprodukts in effizienter Weise herzustellen. Formal werden die Produktionskoeffizienten durch $a_i = \frac{r_i}{x}$ für die entsprechenden Inputs i definiert. In unserem Beispiel erhalten wir also $a_1 = \frac{r_1}{x} = 2$ und $a_2 = \frac{r_2}{x} = 1$

Produktionskoeffizient

Das Verhältnis der erforderlichen Faktoreinsatzmengen r_1 bzw. r_2 zur Produktionsmenge x ist in diesem Beispiel konstant. Die Limitationalität bedingt aber nicht notwendigerweise konstante Produktionskoeffizienten. So gibt es limitationale Produktionsfunktionen mit variablen Produktionskoeffizienten. Limitationalität ist dadurch gekennzeichnet, dass ohne den vermehrten Einsatz aller Faktoren keine höhere Produktionsmenge erzielt werden kann. Hat man beispielsweise nur 2 Räder zur Verfügung, so kann nur ein Fahrrad produziert werden, auch wenn man 5 Sättel einsetzt. Die auf den Einsatzbeziehungen basierende Produktionsfunktion ist in der Form der **Isoquantendarstellung** in Abb. 10 veranschaulicht.

Isoquantendarstellung

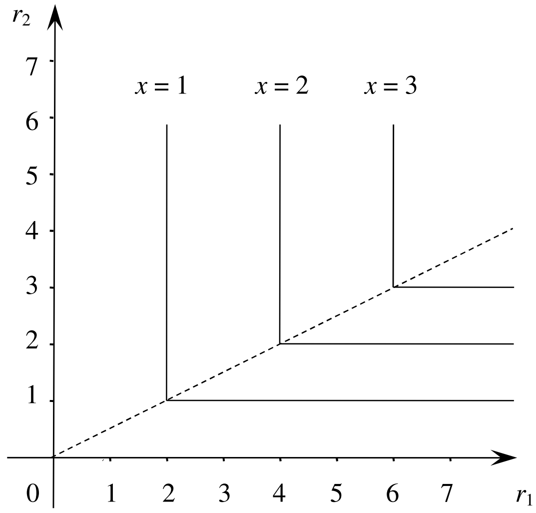


Abb. 10: *Limitationalität der Produktionsfaktoren*

Die effizienten Produktionen entsprechen den Eckpunkten der Isoquanten und liegen auf der Geraden durch den Ursprung, deren Steigung durch den Quotienten $\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2}$ der Produktionskoeffizienten gegeben ist.

Lässt sich ein bestimmter Output im Rahmen einer Produktionsfunktion durch unterschiedliche effiziente Kombinationsmöglichkeiten von Inputs herstellen, so handelt es sich um substitutionale Produktionsfaktoren oder auch um **Substitutionalität** der Produktionsfunktion (siehe Abb. 11).

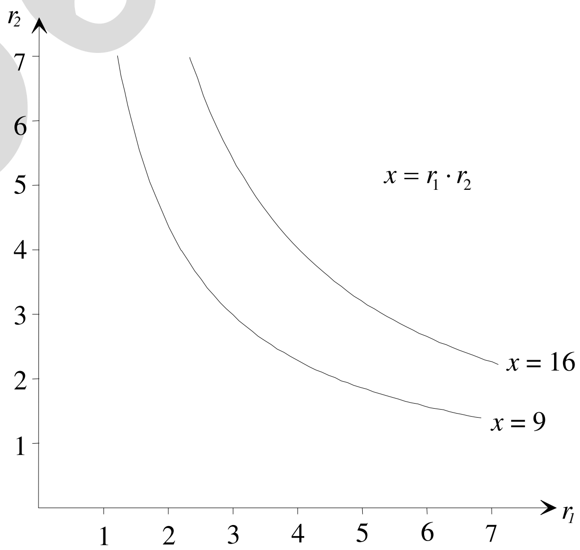


Abb. 11: *Substitutionalität der Produktionsfaktoren*

Beispiel:

Zum Teeren eines Straßenstücks mit einer Länge von 200 m können entweder 4 Arbeiter und zwei Teermaschinen oder 20 Arbeiter und nur eine Teermaschine eingesetzt werden.

Klassische und neoklassische Produktionsfunktionen

Im Gegensatz zu limitationalen Produktionsfunktionen kann in substitutionalen Produktionsfunktionen möglicherweise durch die Erhöhung der Einsatzmenge nur eines Faktors bei Konstanz der Einsatzmengen aller übrigen Faktoren die Ausbringungsmenge erhöht werden. Bei den substitutionalen Produktionsfunktionen unterscheidet man zwischen den **klassischen** und den **neoklassischen Produktionsfunktionen**. Während klassische Produktionsfunktionen durch einen ertragsgesetzlichen Verlauf charakterisiert sind, also bei der Variation einer Faktoreinsatzmenge einen Bereich zunehmender Grenzerträge besitzen, sind neoklassische Produktionsfunktionen dadurch gekennzeichnet, dass sie bei partieller Faktorvariation von Anfang an abnehmende Grenzerträge aufweisen.

Aufgrund der dargelegten Beziehungen zwischen den Faktoren lassen sich die Produktionsfunktionen gemäß Abb. 12 einteilen. Erweiterungen bauen auf diesen Grundformen auf.

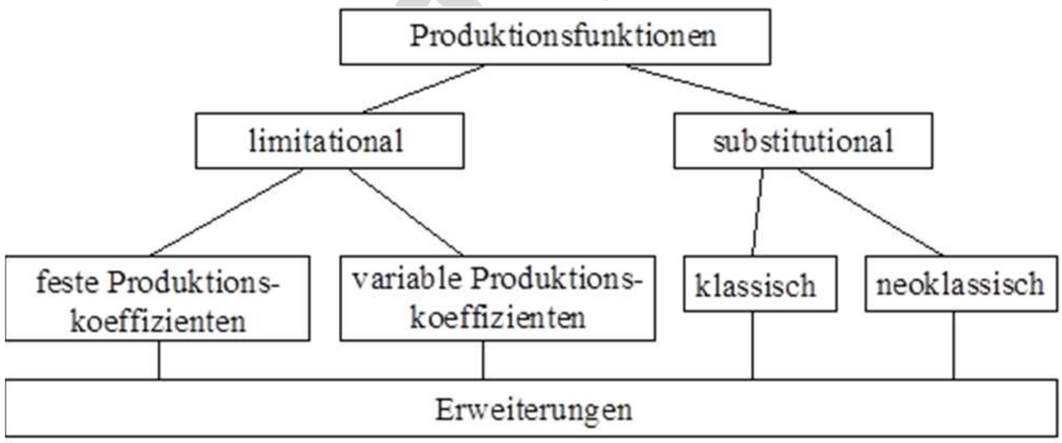


Abb. 12: *Einteilung der Produktionsfunktionen*

3.3 Produktionstheoretische Grundbegriffe zur Charakterisierung von Produktionsfunktionen

Zur formalen Charakterisierung der produktiven Zusammenhänge zwischen der Ausbringungsmenge x und den Faktoreinsätzen $r_1, \dots, r_m$ sind die nachfolgenden Grundbegriffe zusammengestellt. Hierbei interessieren die beiden folgenden Aspekte:

Partialanalyse

- Wie ändert sich die Ausbringungsmenge x, wenn die Einsatzmenge nur eines Faktors r_i $(i = 1, \dots, m)$ verändert wird und die Einsatzmengen der übrigen Produktionsfaktoren unverändert bleiben (**Partialanalyse**)?

Totalanalyse

- Wie verändert sich die Produktionsmenge x, wenn die Einsatzmengen aller Produktionsfaktoren variiert werden (**Totalanalyse**)?

Die produktionstheoretischen Grundbegriffe werden nun nach diesen Analysezwecken geordnet vorgestellt und erläutert:

Partialanalyse

Produktivität

a) Die **Produktivität** (oder das **Durchschnittsprodukt**) eines Faktors i*i* ist definiert als

$$\frac{x}{r_i},$$

also das Verhältnis von Ausbringungsmenge zur Einsatzmenge dieses Faktors. Der Kehrwert

$$\frac{r_i}{x} = a_i ,$$

Produktionskoeffizient

wird als **Produktionskoeffizient** a_i des Faktors i bezeichnet. Bei fester Ausbringungsmenge $\bar{x}$ ändern sich mit der Substitution (Veränderung der Einsatzmengen) die Produktivitäten und Produktionskoeffizienten der Faktoren.

Grenzproduktivität

b) Die (**partielle**) **Grenzproduktivität**

$$\frac{\partial x}{\partial r_i}$$

zwischen dem Output und dem Input i zeigt an, wie sich eine Veränderung der Einsatzmengen des Produktionsfaktors r_i auf die Produktionsmenge x auswirkt. Man unterscheidet die drei Fälle (bei zunehmendem Faktoreinsatz r_i):

1. $\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0$ Ertragszunahme (positiver Grenzertrag),

2. $\frac{\partial x}{\partial r_i} = 0$ Ertragskonstanz (Grenzertrag = Null),

3. $\frac{\partial x}{\partial r_i} < 0$ Ertragsabnahme (negative Grenzerträge).

Änderung des Grenzertrags

Die **Änderung des Grenzertrags** ergibt sich aus der Ableitung des Grenzertrags der jeweilig betrachteten Einsatzmenge r_i, d.h.

$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2}$; man spricht bei $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2}\begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 0 \; von \begin{Bmatrix} zunehmenden \\ konstanten \\ abnehmenden \end{Bmatrix}$ Grenzerträgen.

Grenzprodukt

Das **partielle Grenzprodukt** zwischen Faktor *i* und dem Output ist gegeben durch

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot dr_i.$$

Es zeigt für hinreichend kleine Mengenänderungen an, wie sich die Produktmenge verändert, wenn die Einsatzmenge des Faktors *i* eine tatsächliche Veränderung um dr_i erfährt. Das partielle Grenzprodukt bezüglich Faktor *i* erhält man also, indem man die Grenzproduktivität des Faktors *i* mit dieser tatsächlichen Mengenveränderung dr_i multipliziert.

Produktionselastizität

c) Die **Produktionselastizität**

$$\varepsilon_i = \frac{\frac{\partial x}{x}}{\frac{\partial r_i}{r_i}} = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot \frac{r_i}{x}$$

von x bezüglich r_i drückt aus, um wie viel Prozent sich die Outputmenge ändert, wenn die Einsatzmenge um einen bestimmten marginalen Prozentsatz variiert wird. Die Produktionselastizität ist – wie die vorstehende Beziehung verdeutlicht – gleich dem Produkt aus Grenzproduktivität und Produktionskoeffizient.

Totalanalyse

Totales Grenzprodukt

d) Das **totale Grenzprodukt** gibt an, um wie viel Einheiten sich die Ausbringungsmenge verändert, wenn die Einsatzmengen aller Produktionsfaktoren um bestimmte marginale Beträge vergrößert oder verkleinert werden. Formal lässt sich das totale Grenzprodukt schreiben als:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} dr_1 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial r_I} dr_I = \sum_{i=1}^{I} \frac{\partial x}{\partial r_i} dr_i.$$

Das totale Grenzprodukt ist also gleich der Summe der partiellen Grenzprodukte.

Niveauvariation

e) Bei der **Niveauvariation** interessiert die Frage, wie sich die Ausbringungsmenge x verhält, wenn alle Faktoreinsatzmengen in demselben Verhältnis, z.B. mit dem Faktor λ, proportional variiert werden. Dabei bleibt das Einsatzverhältnis der Faktoren zueinander konstant.

Homogenität

Spezialfälle der Niveauvariation werden durch den Begriff der **Homogenität** von Produktionsfunktionen erfasst. Allgemein heißt eine Produktionsfunktion, die durch $x = x(r_1, \ldots, r_m)$ beschrieben sei, **homogen vom Grade t**, wenn es eine Zahl $t \geq 0$ gibt, so dass für jeden Proportionalitätsfaktor $\lambda > 0$ gilt:

$$\lambda^t x = x(\lambda r_1, \ldots, \lambda r_m),$$

d.h. werden alle Faktoreinsatzmengen mit der Zahl λ multipliziert, so erhöht sich die Ausbringungsmenge um den Faktor λ^t. Bei

$t = 1$ verändert sich die Produktmenge proportional (linear) zur Niveauvariation; Produktionsfunktionen mit dieser Eigenschaft heißen **linearhomogen** (homogen vom Grade 1).

$t > 1$ verändert sich die Produktmenge überproportional (progressiv) zur Niveauvariation; die Produktionsfunktion ist überlinearhomogen.

$t < 1$ verändert sich die Produktmenge unterproportional (degressiv) zur Niveauvariation; die Produktionsfunktion ist dann **unterlinearhomogen**

Skalenelastizität

f) Die verschiedenen (relativen) Auswirkungen von Niveauvariationen innerhalb von Produktionsfaktoren lassen sich auch durch die **Skalenelastizität**

$$t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{dx}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{x}$$

zum Ausdruck bringen. Bei homogenen Produktionsfunktionen stimmt Sie mit dem Homogenitätsgrad der Produktionsfunktion überein und gibt an, um wie viel Prozent sich die Produktion erhöht, wenn die Einsatzmengen aller Produktionsfaktoren um einen bestimmten (gleichen) Prozentsatz erhöht werden. Entsprechend den verschiedenen Homogenitätsformen unterscheidet man

$$t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 1, \mathit{und\ spricht\ dann\ von} \begin{Bmatrix} \mathit{zunehmenden} \\ \mathit{konstanten} \\ \mathit{abnehmenden} \end{Bmatrix} \mathit{Skalenerträgen.}$$

Auf den Zusammenhang zwischen der Skalenelastizität *t* und den Produktionselastizitäten ε_i der Faktoren sei hier noch eingegangen. Das totale Grenzprodukt der Funktion $x = x(r_1, \dots, r_m)$ lautet

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} dr_1 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial r_m} dr_m.$$

Geht man nun von einer proportionalen Veränderung aller Faktoreinsatzmengen aus, so stehen die Änderungen in den Faktoreinsatzmengen aufgrund der Niveauvariation in demselben Verhältnis zueinander wie die Ausgangsmengen, d.h.

$$\frac{dr_i}{dr_j} = \frac{r_i}{r_j} \text{ bzw. } dr_i = r_i \cdot \frac{dr_j}{r_j} = r_i \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}$$

Setzt man diese Beziehung in das totale Grenzprodukt ein, so erhält man

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot r_1 \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial r_m} \cdot r_m \cdot \frac{d\lambda}{\lambda}$$

bzw. nach Division durch $(x \cdot \frac{d\lambda}{\lambda})$

$$t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot \frac{r_1}{x} + \ldots + \frac{\partial x}{\partial r_m} \cdot \frac{r_m}{x} = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_m.$$

Diese auch als **Wicksel-Johnson-Theorem** bezeichnete Skalenelastizitätsgleichung zeigt, dass die Skalenelastizität gleich der Summe aller Produktionselastizitäten ist.

Wicksel-Johnson-Theorem

Übungsaufgabe 2

Bestimmen Sie für die im Folgenden genannten Produktionsfunktionen

- die Produktivität
- die Grenzproduktivität
- die Produktionselastizität
- den Homogenitätsgrad

a) $x = 2r_1r_2$.

b) $x = 3r_1 + 2r_2$.

3.4 Grenzrate der Substitution

Substitutionalität

Produktionsfaktoren, bei denen die eingesetzten Faktoren gegeneinander ausgetauscht werden können, besitzen die Eigenschaft der **Substitutionalität**. Ein weiteres Kennzeichen der Substitution ist, dass durch die Erhöhung der Einsatzmenge eines Faktors und bei konstantem Einsatz der übrigen Faktoren die Produktionsmenge vermehrt werden kann. Die substitutionale Beziehung zwischen den Faktoren ist je nach der zugrundeliegenden Produktionsfunktion recht unterschiedlich. Es liegt daher sehr nahe, sich auf eine Konvention zur Messung der Substitutionalität zwischen den Faktoren festzulegen. Dies geschieht auf den Vorschlag von STACKELBERG mit Hilfe der **Grenzrate der Substitution**. Die Grenzrate der Substitution s_{ij} ist stets für eine konstante Ausbringungsmenge zwischen je zwei Faktoren definiert; sie gibt ausgehend von einem festen Produktionspunkt an, um wie viel Einheiten die Einsatzmenge des Faktors i erhöht werden muss (bzw. erniedrigt werden kann), wenn der Einsatz des Faktors j um eine – infinitesimal kleine – Einheit reduziert (bzw. vermehrt) wird und bei Konstanz aller übrigen Faktoreinsatzmengen dieselbe Produktionsmenge erzielt werden soll. Geht man von der differenzierbaren Produktionsfunktion

$$x = x(r_1, \dots, r_i, \dots, r_j, \dots, r_m)$$

aus, so lautet die – positiv definierte – Grenzrate der Substitution s_{ij} zwischen den Faktoren i und j am Produktionspunkt $\bar{x} = x(\overline{r_1}, \dots, \overline{r_m})$ also formal:

$$s_{ij} = -\frac{dr_i}{dr_j}|\bar{x} > 0.$$

Grenzrate der Substitution

Die Grenzrate der Substitution kann konstant oder variabel sein. Für den letzten Fall kann hieraus das **Gesetz von der abnehmenden Grenzrate der Substitution** abgeleitet werden. Erhöht man ausgehend von einem gewissen Niveau des Gütereinsatzes sukzessiv den Einsatz eines Gutes, so lassen sich dadurch bei fester Produktion stets weniger Einheiten der anderen Faktoren ersetzen. Reduziert man umgekehrt schrittweise den Einsatz eines Faktors, so benötigt man zur Kompensation durch andere Faktoren immer mehr Einheiten.

Demnach ergibt sich das Gesetz der abnehmenden Grenzrate der Substitution in Abhängigkeit der Variation der Einsatzmenge r_j zu:

$$\frac{ds_{ij}}{dr_j} = -\frac{d^2 r_i}{dr_j^2} < 0,$$

d.h. die Grenzrate der Substitution nimmt mit zunehmendem Einsatz von j ab.

Auf den Zusammenhang zwischen der Grenzrate der Substitution s_{ij} zwischen den beiden Faktoren i und j und deren Grenzproduktivitäten $\frac{\partial x}{\partial r_i}$ bzw. $\frac{\partial x}{\partial r_j}$ sei noch kurz eingegangen.

Allgemein gilt:

$$-\frac{dr_i}{dr_j} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_j}}{\frac{\partial x}{\partial r_i}} = s_{ij}$$

Das heißt, die Grenzrate der Substitution zwischen den Faktoren i und j entspricht dem Quotienten aus den Grenzproduktivitäten der Faktoren j und i.

Übungsaufgabe 3

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$x = 3r_1 + 1r_2 + 9r_3.$$

Leiten Sie die Grenzrate der Substitution zwischen Faktor 1 und 3 ab, wenn das Produktionsniveau $x = 7$ beträgt und der Faktoreinsatz $r_2 = 1$ konstant ist!

3.5 Die klassische Produktionsfunktion des Ertragsgesetzes

Diese Produktionsfunktion wurde zunächst nur für die landwirtschaftliche Produktion im 18. Jahrhundert von TURGOT postuliert. Die **klassische Produktionsfunktion auf der Grundlage des Ertragsgesetzes** ist dadurch charakterisiert, dass

Annahmen über den ertragsgesetzlichen Verlauf von Produktionsfunktionen

- die für die Herstellung einer bestimmten Ausbringungsmenge erforderlichen **Produktionsfaktoren substituierbar** sind und
- bei **vermehrtem Einsatz eines Faktors** und konstanten Einsatzmengen aller übrigen Faktoren **zunächst steigende und dann fallende**, aber immer noch positive **Grenzerträge** (Ertragszuwächse) auftreten, d.h. an einen Bereich zunehmender Grenzproduktivitäten schließt sich ein Bereich abnehmender Grenzproduktivitäten an (Ertragsgesetz).

Geht man von der Produktionsfunktion $x = x(r_1, \ldots, r_m)$ aus und nimmt man an, dass nur die Einsatzmenge r_i des Faktors i stetig vermehrt wird und die Einsatzmengen r_j der übrigen Faktoren j konstant bleiben, so veranschaulicht Abb. 13 den Verlauf einer ertragsgesetzlichen Produktionsfunktion graphisch. Gleichzeitig sind die Kurven des Durchschnittsprodukts $\frac{x}{r_i}$ und der Grenzproduktivität $\frac{\partial x}{\partial r_i}$ eingezeichnet.

Entsprechend der Einteilung in die Phasen I bis IV lassen sich dann über die einzelnen ökonomischen Größen folgende Aussagen machen bzw. aus ihnen die nachstehenden Schlussfolgerungen ziehen.

Sättigungspunkt

Die **Produktion** x steigt zunächst mit vermehrtem Einsatz des Faktors *i* und erreicht am Punkt C ihr Maximum; ein weiterer Einsatz dieses Faktors wäre ökonomisch unsinnig, da er zur Reduktion der Endproduktmenge führt. Der Punkt C wird daher als **Sättigungspunkt** bezeichnet.

Durchschnittsprodukt

Das **Durchschnittsprodukt** (bzw. die Produktivität) $\frac{x}{r_i}$ des Faktors i – formal ausgedrückt durch die Steigung des Fahrstrahls vom Nullpunkt an den entsprechenden Produktionspunkt – ist solange positiv, wie der vermehrte Faktoreinsatz von *i* zu einer positiven Endproduktmenge *x* führt; dies ist in allen vier Phasen von Abb. 13 der Fall. Zunächst allerdings steigt das Durchschnittsprodukt mit zunehmendem Faktoreinsatz bis zum Punkt B. Dort erreicht es sein Maximum und stimmt mit der Grenzproduktivität des Faktors *i* überein. Bei weiterem Faktoreinsatz nimmt das Durchschnittsprodukt kontinuierlich ab.

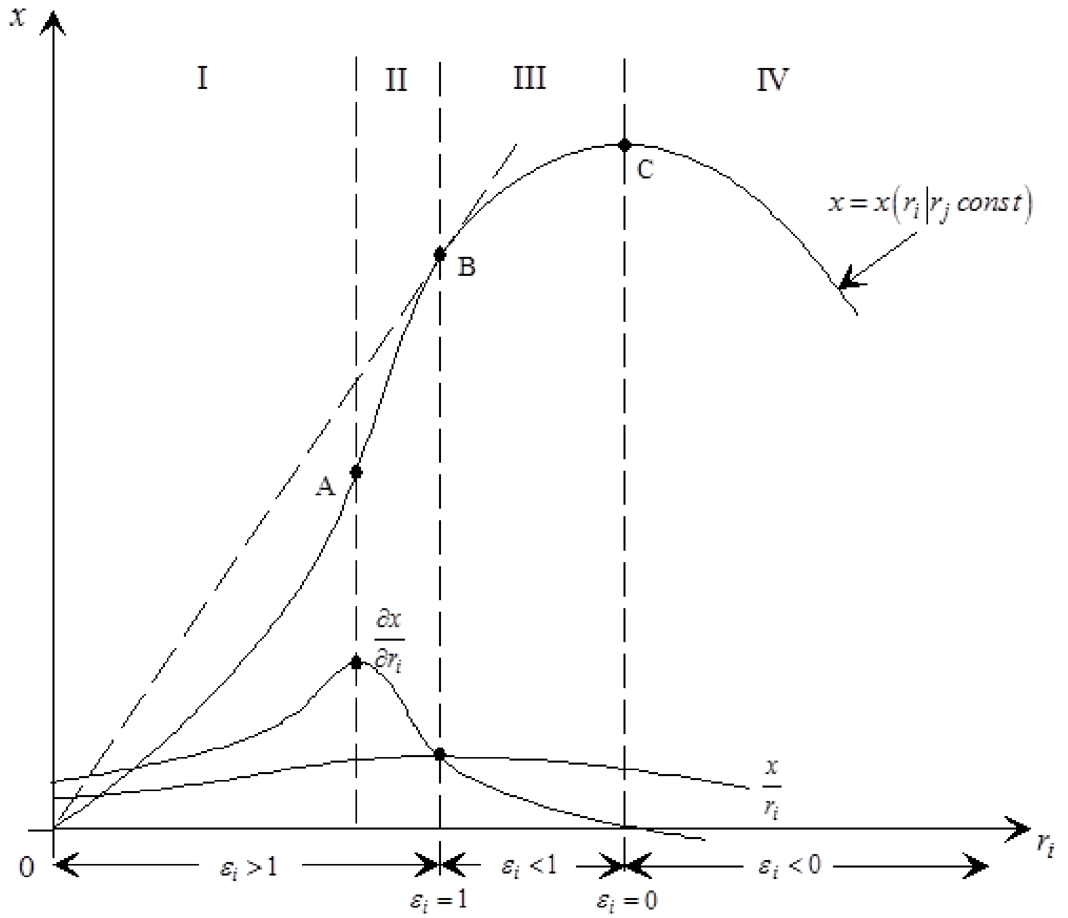


Abb. 13: *Ertragsgesetzliche Produktionsfunktion*

Grenzproduktivität

Die **Grenzproduktivität** $\frac{\partial x}{\partial r_i}$ des Faktors i – sie entspricht der Steigung der Produktionsfunktion für den jeweils gewählten Faktoreinsatz – ist in den Phasen I bis III, also im Bereich 0 bis C, größer als Null. Folglich ist in diesem Bereich auch das partielle Grenzprodukt $dx = \frac{\partial x}{\partial r_i} dr_i$ positiv, sofern der Einsatz des Faktors i erhöht wird; d.h. eine Vermehrung des Faktoreinsatzes r_i führt hier stets zu einer Erhöhung der Endproduktmenge x. Am Punkt C des Produktionsmaximums ist die Grenzproduktivität des Faktors i gleich Null; für größere Einsatzmengen wird sie negativ. Im Bereich positiver Grenzproduktivitäten, d.h. in den Phasen I bis III, fallen jedoch nicht stets dieselben Ertragszuwächse an, wenn der Faktoreinsatz r_i sukzessive je um eine weitere Einheit erhöht wird. Wie der Verlauf der Grenzproduktivitätskurve in Abb. 13 zeigt, nehmen die Grenzproduktivitäten in der Phase I bis zum Wendepunkt A der Produktionsfunktion zu, d.h. in diesem Bereich treten wegen $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} > 0$ zunehmende Ertragszuwächse auf. Im Punkt A ist diese Grenzproduktivität des Faktors i am höchsten; bis dorthin steigt die Produktionsfunktion überproportional bei vermehrtem Faktoreinsatz bzw. ihre Steigung nimmt bis zu diesem Punkt A zu. Wird nun der Faktoreinsatz über Punkt A hinaus vergrößert, so nehmen die Grenzproduktivitäten wieder ab. D.h. die Phasen II –

IV sind wegen $\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0$ durch abnehmende Ertragszuwächse charakterisiert. In den Bereichen II und III wächst die Produktion unterproportional bei erhöhtem Faktoreinsatz.

Schwelle des Ertragsgesetzes

Der Punkt A, an dem der Übergang von dem zunehmenden zu den abnehmenden Ertragszuwächsen erfolgt $\left(\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = 0\right)$, wird als **Schwelle des Ertragsgesetzes** bezeichnet.

Produktionselastizität

Solange Faktoreinsätze r_i im Bereich 0 bis B realisiert werden, liegt die Grenzproduktivität des Faktors i über seinem Durchschnittsprodukt. Die **Produktionselastizität** ε_i – sie entspricht dem Quotienten aus Grenzproduktivität und Durchschnittsprodukt, also

$\varepsilon_i = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{\frac{x}{r_i}}$ – ist in diesem Bereich daher größer als 1.

Man spricht dann auch davon, dass der Faktor i in diesem Bereich technisch suboptimal eingesetzt ist. Am Punkt B stimmen Grenzproduktivität und Durchschnittsproduktivität überein; die Produktionselastizität ε_i ist gleich Eins, der Faktor i wird technisch optimal eingesetzt. Ab Punkt B verläuft die Grenzproduktivität unterhalb des Durchschnittsprodukts. Die Produktionselastizität ist kleiner Eins; der Faktor i wird technisch suboptimal eingesetzt. Am Punkt C wird die Produktionselastizität gleich Null und danach schließlich kleiner Null, da die Grenzproduktivität im Punkt C Null bzw. anschließend negativ wird.

Zum Schluss sei hier noch kurz auf die Frage eingegangen, inwieweit ertragsgesetzliche (klassische) Produktionsfunktionen überhaupt Gültigkeit für die industrielle Produktion besitzen.

Die Diskussion, ob dem Ertragsgesetz überhaupt eine angemessene Beschreibung realer Produktionsvorgänge zuzubilligen ist und, wenn ja, in welchen wirtschaftlichen Bereichen, dauert bis in die heutige Zeit an. Zu dieser Diskussion und der Richtigkeit der einen oder anderen Position soll und kann hier nicht abschließend Stellung genommen werden. Wohl aber wird man die Möglichkeit substitutionaler Faktorbeziehungen für die Industrie nicht rundweg leugnen können, da z.B. gerade in der Klein- oder Mittelindustrie gewisse Tätigkeiten häufig sowohl durch Arbeitskräfte als auch durch eine Maschine ausgeführt werden können (z.B. Hobeln, Schleifen, Lackieren usw.). Hier trifft das Unternehmen nach dem Vergleich der Lohn- und Anschaffungskosten die Entscheidung, welche Faktoren mit welcher Menge im Rahmen der Produktion eingesetzt werden sollen, damit kostengünstig produziert wird. Die Gültigkeit dieser Entscheidung über einen gewissen Zeitraum mag dann feste Faktorbeziehungen bzw. Limitationalität der Faktoren vortäuschen. Darüber hinaus ist der bislang fehlende Nachweis von Bereichen zunehmender Ertragszuwächse in der Industrie noch kein Beweis dafür, dass es ihn nicht doch gelegentlich geben kann, wo der Einsatz des Faktors Arbeit noch gegenüber den Betriebsmitteln überwiegt (lohnintensive Industriezweige wie z.B. Bekleidungs- und Schuhwarenindustrie bzw. Feinmechanik und Optik). Zudem legt die Problemstellung der Bestimmung der optimalen Betriebsgröße, welche in der Betriebswirtschaft eine gewisse Rolle spielt, die Vermutung von eventuell möglichen Bereichen zunehmender Ertragszuwächse nahe.

Übungsaufgabe 4

Zeichnen Sie eine ertragsgesetzliche Produktionsfunktion und kennzeichnen Sie die effizienten Punkte!

3.6 Die Neoklassische Produktionsfunktion nach COBB und DOUGLAS

Neoklassische Produktionsfunktionen zeichnen sich (neben der Substituierbarkeit der Faktoren) dadurch aus, dass sie positive Grenzerträge über den ganzen Variationsbereich besitzen. Die Ertragszuwächse nehmen jedoch über den ganzen Bereich ab, d.h. neoklassische Produktionsfunktionen sind formal gekennzeichnet durch:

Gesetz der abnehmenden Ertragszuwächse für neoklassische Produktionsfunktionen

$x = x(r_1, \dots, r_m)$ (Produktionsfunktion)

$\frac{\partial x}{\partial r_i} > 0$ für $0 \leq r_i < \infty$

(positive Grenzerträge)

$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} < 0$ für $0 \leq r_i < \infty$

(abnehmende Ertragszuwächse)

Mit $x \geq 0, r_i \geq 0, i \in \{1, \dots, m\}$.

Ende der zwanziger Jahre haben COBB und DOUGLAS eine neoklassische Produktionsfunktion – im Folgenden C/D-Funktion genannt – formuliert. Diese Produktionsfunktion wurde oft mit positivem Ergebnis empirisch überprüft. Formal lautet sie:

Formale Darstellung der C/D-Funktion

$$x = a_0 \cdot r_1^{a_1} \cdot r_2^{a_2} \cdot \dots \cdot r_m^{a_m}$$

$$0 < a_0 = const., 0 \leq a_i = const. < 1, i \in \{1, \dots, m\}, ,$$

d.h. das Endprodukt x ergibt sich aus dem Produkt der potenzierten Faktoreinsätze, wobei die Exponenten a_i nicht negativ und kleiner Eins sind, multipliziert mit einer positiven Konstanten a_0. Die C/D-Produktionsfunktion ist also für eine Produktmenge x definiert und setzt beliebige Teilbarkeit der Faktoreinsatzmengen r_i voraus.

Im Folgenden sollen ökonomische Eigenschaften dieser Funktion näher untersucht werden. Wird allein die Einsatzmenge r_i des Faktors i variiert, d.h. bleiben die Einsatzmengen $r_j = \bar{r}_j$ der übrigen Faktoren j, j =1,…,m, $j \neq i$, , konstant, so lässt sich nach Ersetzen von

$$a_0 \bar{r}_1^{\ a_1} \ldots \bar{r}_{i-1}^{\ a_{i-1}} \cdot \bar{r}_{i+1}^{\ a_{i+1}} \ldots \bar{r}_m^{\ a_m}$$

Partielle Produktions-funktion

durch die Konstante c die **partielle Produktionsfunktion** in Abhängigkeit der Faktormenge r_i wie folgt schreiben:

$$x = c r_i^{a_i}$$

Wegen $0 \leq a_i < 1$ verläuft diese Ertragsfunktion unterproportional bei vermehrtem Faktoreinsatz r_i; sie ist in Abb. 14 grafisch veranschaulicht. Für $r_i = 0$ beginnt die partielle Ertragsfunktion im Ursprung des Koordinatensystems, also bei Null, und steigt mit zunehmendem Faktoreinsatz r_i.

Durchschnittsprodukt

Das **Durchschnittsprodukt** ergibt sich mit

$$\frac{x}{r_i} = \frac{c r_i^{a_i}}{r_i} = c r_i^{a_i - 1} = \frac{c}{r_i^{1-a_i}}\,.$$

Da c=*const.* und $0 < 1 - a_i < 1$, folgt aus den positiven Exponenten $1 - a_i$ des Faktoreinsatzes r_i im Nenner des Bruches, dass das (positive) Durchschnittsprodukt bei erhöhtem Faktoreinsatz r_i gegen Null fällt und gegen Unendlich geht, wenn der Faktoreinsatz r_i kontinuierlich auf Null zurückgeführt wird (siehe Abb. 14).

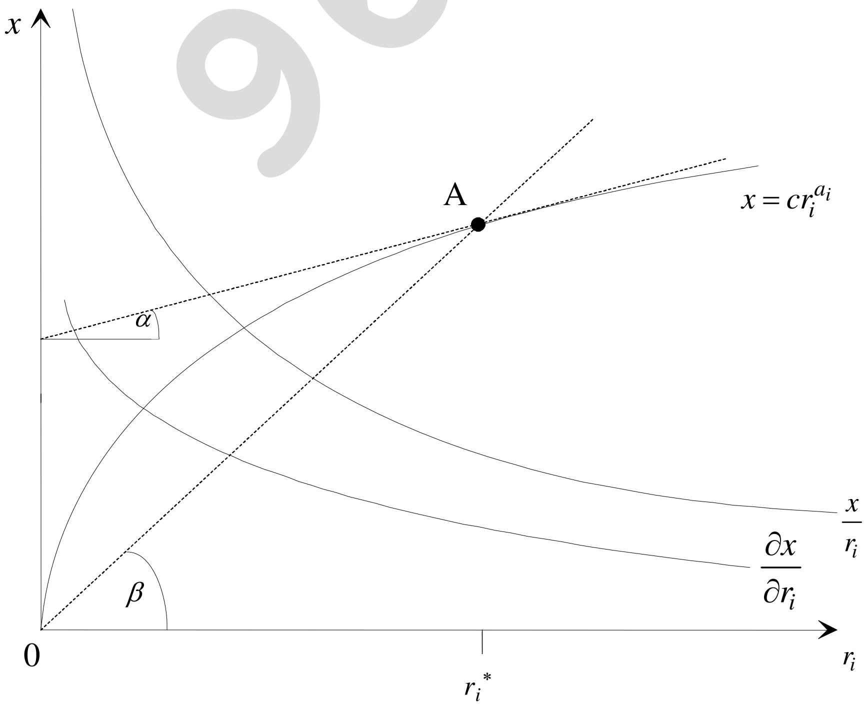


Abb. 14: *C/D – Produktionsfunktion bei partieller Faktorvariation*

Grenzproduktivität

Die **Grenzproduktivität** des Faktors i, die mit der Steigung der partiellen Ertragsfunktion für den jeweiligen Faktoreinsatz r_i übereinstimmt, lässt sich formal ausdrücken durch

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = a_i c r_i^{a_i - 1} = a_i \frac{c}{r_i^{1-a_i}} = a_i \frac{x}{r_i}.$$

Betrachtet man die beiden letzten Ausdrücke in dieser Gleichungsfolge, so erkennt man, dass bei der C/D-Produktionsfunktion die Grenzproduktivität eines Faktors i proportional zu seinem Durchschnittsprodukt ist, wobei der Exponent a_i als Proportionalitätsfaktor auftritt. Wegen $0 \leq a_i < 1$ liegt die Grenzproduktivität (bzw. der Grenzertrag) $\frac{\partial x}{\partial r_i}$ des Faktors i jedoch stets unterhalb des Durchschnittprodukts $\frac{x}{r_i}$ dieses Faktors. In Abb. 14 ist dies für den Faktoreinsatz r_i^* einmal verdeutlicht. Das Durchschnittsprodukt $\frac{x}{r_i^*}$ kann durch die Steigung des Fahrstrahls vom Nullpunkt an den Punkt A der Ertragskurve veranschaulicht werden; die Grenzproduktivität entspricht der Steigung $\frac{\partial x}{\partial r_i}$ der Ertragsfunktion im Punkt r_i^*. Wegen $\tan \beta > \tan \alpha$ hat man die behauptete Eigenschaft.

Da Grenzproduktivität und Durchschnittsprodukt bis auf den multiplikativen Faktor a_i übereinstimmen, gilt für den Verlauf der Grenzproduktivitäts-Kurve dasselbe, was bereits für den Verlauf der Durchschnittsprodukt-Kurve ausgeführt worden ist. Die Grenzproduktivitäts-Kurve fällt bei fortlaufender Erhöhung von r_i gegen Null und geht für r_i gegen Null nach Unendlich (vergleiche Abb. 14). Das besagt insbesondere, dass die Ertragskurve x mit der Steigung Unendlich im Nullpunkt beginnt und dann immer mehr abflacht. Diese Eigenschaft der Ertragskurve, die mit der **abnehmender Ertragszuwächse** identisch ist (fallende Grenzproduktivitäten bei Erhöhung des Faktoreinsatzes), lässt sich durch die zweite Ableitung der Ertragskurve oder – was dasselbe ist – durch die erste Ableitung der Grenzproduktivitäts-Kurve nach r_i belegen.

Man hat dann

$$\frac{\partial^2 x}{\partial r_i^2} = \frac{\partial(\frac{\partial x}{\partial r_i})}{\partial r_i} = \frac{\partial(a_i c r_i^{a_i - 1})}{\partial r_i} = (a_i - 1) a_i c r_i^{a_i - 2} < 0, ,$$

da der letzte Ausdruck der Gleichungsfolge wegen $(a_i - 1) < 0$ negativ ist, d.h. die C/D-Produktionsfunktion ist bei partieller Faktorvariation dadurch gekennzeichnet, dass sie dem in neoklassischen Produktionsfunktionen als Bedingung geforderten Gesetz abnehmender Grenzerträge folgt.

Aus der Beziehung zwischen Grenzproduktivität und Durchschnittsprodukt des Faktors *i*

$$\frac{\partial x}{\partial r_i} = a_i \frac{x}{r_i}$$

folgt für die Produktionselastizität des Faktors *i*

$$\varepsilon_i = \frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot \frac{r_i}{x} = a_i$$

Produktions-elastizität

d. h. der Exponent a_i des Faktors *i* in der C/D- Produktionsfunktion ist in der Weise ökonomisch zu interpretieren, dass er die **Produktionselastizität** des Faktors *i* angibt: diese ist dann wegen der Bedingung für a_i konstant, nicht negativ und kleiner Eins.

Skalenelastizität

Dass die C/D-Produktionsfunktion homogen ist, lässt sich aus ihrer Formulierung unschwer erkennen. Ihr Homogenitätsgrad und damit auch ihre **Skalenelastizität** entspricht wegen

$$x(\lambda r_1, \dots, \lambda r_m) = a_0(\lambda r_1)^{a_1} \dots (\lambda r_m)^{a_m} = \lambda^{a_1+\dots+a_m} a_0 r_1^{a_1} \dots r_m^{a_m}$$
$$= \lambda^{(\sum_{i=1}^m a_i)} x(r_1, \dots, r_m)$$

der Summe der Exponenten a_i, die zugleich – wie bereits abgeleitet – die Summe der Produktionselastizitäten ist, d.h. es gilt

$$t = \frac{\frac{dx}{x}}{\frac{d\lambda}{\lambda}} = \sum_{i=1}^m a_i.$$

Die C/D-Produktionsfunktion ist also für

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \begin{Bmatrix} > \\ = \\ < \end{Bmatrix} 1 \; durch \begin{Bmatrix} zunehmende \\ konstante \\ abnehmende \end{Bmatrix} Skalenerträge$$

gekennzeichnet.

Übungsaufgabe 5

a) Kreuzen Sie an, welche der nachstehenden Produktionsfunktionen vom C/D-Typ sind!

1. $x = 6 + r_1 \cdot r_2^3$ ☐
2. $x = 6r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{\frac{1}{2}}$ ☐
3. $x = 4r_1^{\frac{1}{2}} r_2^{-\frac{1}{4}}$ ☐
4. $x = \sum_{i=1}^{n} r_i$ ☐

b) Gegeben sei die C/D-Produktionsfunktion $x = 2r_1^{\frac{1}{2}} \cdot r_2^{\frac{1}{2}}$. Bestimmen Sie für $r_1 = 4$ das Durchschnittsprodukt, die Grenzproduktivität sowie die Produktionselastizität für den Faktor r_2!

3.7 Die Limitationale Produktionsfunktion nach LEONTIEF

Ähnlich wie die Cobb/Douglas-Produktionsfunktion verdankt die Leontief-Produktionsfunktion ihren Ursprung empirischen und makroökonomischen Untersuchungen durch W. LEONTIEF.

Die Leontief-Produktionsfunktion besitzt allerdings konstante Produktionskoeffizienten und schließt somit Substituierbarkeit von Faktoren aus. Am besten wird die Leontief-Produktionsfunktion durch das System der Einsatzfaktoren beschrieben:

$$r_1 = a_1 x$$

$$\vdots$$

$$r_m = a_m x$$

$$\text{mit } a_i = const. > 0, i = 1, \dots, m.$$

Hierbei sind die a_i die konstanten Produktionskoeffizienten. Die Produktion bestimmt sich mittels

$$x = \min_i \left\{ \frac{r_i}{a_i} \middle| i = 1, \dots, m \right\}.$$

Der erzielbare Output richtet sich also nach dem jeweiligen Engpassfaktor; das ist der Faktor i, für den obiges Minimum erreicht wird. Es ist auch denkbar, dass mehrere Faktoren gleichzeitig Engpassfaktoren sind.

Beispiel:

Bei der Herstellung von Textilien stehen $r_1 = 40m^2$ Stoff, $r_2 = 8$ Nähmaschinenstunden und $r_3 = 15$ Reißverschlüsse zur Verfügung. Man erhält mit Hilfe der Produktionskoeffizienten $a_1 = 1{,}8$; $a_2 = 0{,}4$; $a_3 = 1$; folgende Produktion:

$$x = \min\left\{\frac{40}{1{,}8}, \frac{8}{0{,}4}, \frac{15}{1}\right\} = 15.$$

Die Reißverschlüsse sind zunächst der einzige Engpassfaktor. Die Produktionsmenge kann nur durch Erhöhung des Einsatzes dieses Faktors vermehrt werden. Werden 20 Reißverschlüsse eingesetzt, so erhält man $x = 20$, wobei die Nähmaschinenstunden und die Reißverschlüsse Engpassfaktoren sind.

Die obige Darstellung der maximal möglichen Produktmenge anhand der Minimum-Funktion ist strenggenommen keine Produktionsfunktion, da sie auch ineffiziente Faktorkombinationen zulässt. Eine Darstellung als Produktionsfunktion der Form $x = f(r_1, \ldots, r_m)$ ist bei der Leontief-Produktionsfunktion nicht möglich, da die Faktormengen bei effizienter Produktion nicht unabhängig voneinander sind. Dementsprechend sind Begriffe wie Grenzproduktivität, Produktivität und Produktionselastizität, die auf einer partiellen Faktorvariation beruhen, nicht definiert.

Dagegen lässt sich anhand der Faktorfunktion $r_i = a_i x, i = 1, \ldots, m$, , der Grenzaufwand

$$\frac{\partial r_i}{\partial x} = a_i, i = 1, \ldots, m,$$

bestimmen, der hier dem jeweiligen Produktionskoeffizienten entspricht. Der Kehrwert $\frac{1}{a_i}$ lässt sich nur dann als eine Grenzproduktivität des Faktors i interpretieren, wenn i der alleinige Engpassfaktor in der gegebenen Situation ist. Sobald ein anderer Faktor zum Engpass wird, ist das Grenzprodukt des Faktors i gleich Null. In dem Beispiel der Textilfabrikation lautet eine so verstandene Grenzproduktivität für Nähmaschinenstunden

$$\frac{\partial x}{\partial r_2} = \frac{1}{a_2} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5$$

Jede zusätzliche Nähmaschinenstunde erlaubt die Fertigung weiterer 2,5 Textilstücke, vorausgesetzt, die anderen Ressourcen sind in entsprechendem Maße vorhanden.

Wie man sieht, entspricht der Kehrwert des Grenzaufwandes für den Faktor i der Produktivität bzw. dem Durchschnittsertrag dieses Faktors, d.h. man hat also

$$\frac{1}{\frac{\partial r_i}{\partial x}} = \frac{r_i}{x} = \frac{1}{a_i}, i = 1, \ldots, m.$$

Aufgrund der Linearitätseigenschaft zeichnet sich die Leontief-Produktionsfunktion bei totaler Faktorvariation durch Linearhomogenität aus:

$\lambda x = \frac{\lambda r_i}{a_i}$ für alle i=1,…,m

Die formale Grundstruktur der Leontief-Produktionsfunktion wird in Abb. 15 veranschaulicht. Mit Hilfe einer Isoquantendarstellung werden mögliche Inputkombinationen der beiden Inputs r_1 und r_2, mit denen ein bestimmtes Outputniveau x_i $(i = 1, \ldots, 5)$ produziert werden kann, aufgezeichnet. Die effizienten Produktionspunkte liegen auf den Eckpunkten der Isoquanten. Die Punkte rechts vom Eckpunkt bzw. über dem Eckpunkt sind ineffizient, da entweder der Faktor r_1 oder r_2 verschwendet wird. Verbindet man den Ursprung mit den effizienten

Eckpunkten, so erhält man alle effizienten Faktorkombinationen für die unterschiedlichen Outputniveaus.

In dem betrachteten Beispiel kann so nämlich mit der doppelten Menge an Stoff, Nähmaschinenstunden und Reißverschlüssen auch die doppelte Anzahl von Kleidungsstücken hergestellt werden.

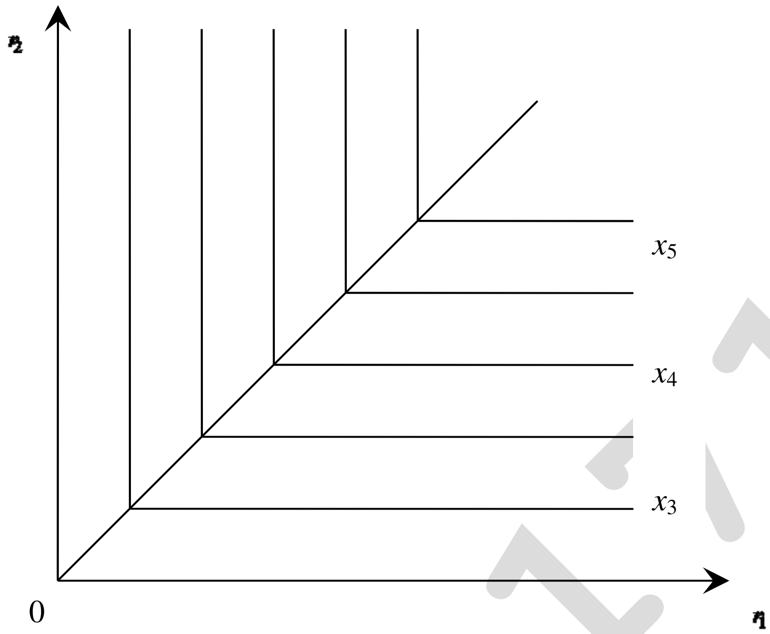


Abb. 15: *Leontief-Produktionsfunktion*

3.8 Die Produktionsfunktion von GUTENBERG

Ähnlich wie die Leontief-Produktionsfunktion geht die Gutenberg-Produktionsfunktion ebenfalls grundsätzlich von der Limitationalität der Produktionsfaktoren aus; es können sich aber auch in einem bestimmten Umfang Substitutionsmöglichkeiten zwischen Faktoren ergeben.

Zur Ermittlung der Faktorverbräuche, die durch Produktion verursacht werden, nimmt GUTENBERG zunächst eine Aufteilung der Inputs in Gebrauchs- und Verbrauchsfaktoren vor. Die **Gebrauchsfaktoren** – vornehmlich Maschinen und Betriebsmittel – können jeweils für sich oder zu Gruppen zusammengefasst als Aggregate oder andere betriebliche Teileinheiten aufgefasst werden. Sie dienen als die betrieblichen Orte, an denen jeweils getrennt die Faktorverbräuche im Sinne von Faktorfunktionen erhoben werden. Dabei beziehen sich diese Verbrauchserhebungen sowohl auf die Leistungsabgaben der Gebrauchsfaktoren im Sinne des produktionsbedingten Potentialgüterverzehrs als auch auf die Mengen der

Gebrauchsfaktoren

Verbrauchsfaktoren

Verbrauchsfaktoren – hier hauptsächlich Werkstoffe – , die bei der Produktion an den verschiedenen Aggregaten des Betriebes zum Einsatz gelangen.

Der Bedarf an Verbrauchsfaktoren hängt bei GUTENBERG nicht direkt von der Outputmenge ab, sondern wird auch von den technischen Eigenschaften der Potentialfaktoren beeinflusst. Der Energieverbrauch einer Produktion ist zum Beispiel auch von den technischen Eigenschaften der Produktionsanlagen abhängig. Man bezeichnet die technischen Eigenschaften eines Aggregats mit $z_1, \dots, z_p$ und nennt dies **z-Situation** eines Aggregats.

z-Situation

Eine weitere wesentliche Einflussgröße des Verbrauchs ist die Leistungsintensität eines Aggregats, mit der die für die Produktion erforderlichen maschinellen Arbeitsoperationen erbracht werden; sie möge mit λ bezeichnet werden und zeigt an, wie viele Arbeitseinheiten pro Zeiteinheit von dem Aggregat vollzogen werden. Diese Leistungsintensität – sie könnte auch als Komponente der z-Situation eines Aggregats aufgefasst werden – wird von GUTENBERG als Verbrauchsdeterminante besonders hervorgehoben.

Transformationsfunktion

Unter Berücksichtigung der Leistungsintensität und der z-Situation eines Aggregats kann dann folgende **Transformationsfunktion** für den Einsatz des i-ten Verbrauchsfaktors pro Arbeitseinheit an einem Potentialpunkt aufgestellt werden:

$$\rho_i = \rho_i(z_1, \dots, z_\rho, \lambda)..$$

Ist die z-Situation eines Aggregats gegeben und konstant, so kann man den Transformationsprozess allein in Abhängigkeit von der gewählten Leistungsintensität darstellen, d.h.

$$\rho_i = \rho_i(\lambda)$$

Von dieser einschränkenden Annahme der Formulierung von Transformationsfunktionen soll bei den weiteren Betrachtungen ausgegangen werden.

Beispiel:

Der Verbrauch an elektrischer Energie pro 1.000 Auf- und Abwärtsbewegungen (= 1 Arbeitseinheit) bei einer Nähmaschine hängt von der Geschwindigkeit der Nadel ab. Bei geringen Geschwindigkeiten ist der Stromverbrauch (Faktor 1) relativ hoch, weil der Elektromotor für eine höhere Drehzahl konstruiert wurde. In λ^0 ist die Optimalleistung in Bezug auf den Stromverbrauch erreicht. Für höhere Beanspruchung steigt der Verbrauch pro Arbeitseinheit wieder an. Die Leistung einer Maschine kann meist nicht beliebig variiert werden, sondern es existiert ein

Leistungsbereich $\underline{\lambda} \leq \lambda \leq \overline{\lambda}$, wobei $\underline{\lambda}$ die Minimal- bzw. $\overline{\lambda}$ die Maximalintensität des Aggregats darstellen.

Die eingesetzte Stoffmenge (Faktor 2) pro 1.000 Auf- und Abwärtsbewegungen der Nadel steigt mit zunehmender Leistung kontinuierlich, weil der Ausschussanteil (Verschnittmenge) bei erhöhter Produktionsgeschwindigkeit zunimmt. Die Verbrauchsfunktion ρ_1 ist demnach eine u-förmige Kurve, ρ_2 wird durch eine ansteigende Gerade dargestellt (siehe Abb. 16).

Die gesamte Einsatzmenge r_i vom i- ten Faktor entspricht dem Input pro Arbeitseinheit ρ_i am Aggregat multipliziert mit der Zahl der **Arbeitseinheiten** b, die vom Gebrauchsfaktor in der Produktionsperiode ausgeführt werden.

$$r_i = \rho_i \cdot b.$$

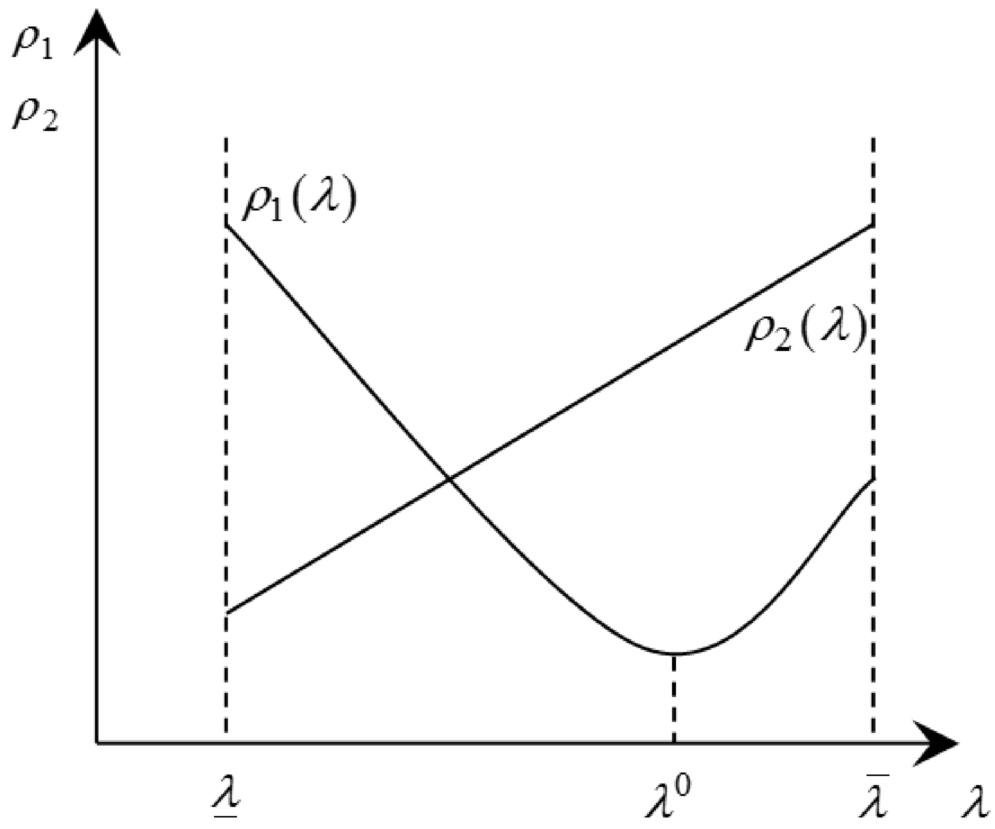


Abb. 16: *Verbrauchsfunktion für zwei Faktoren*

Die Zahl der Arbeitseinheiten b eines Aggregats ergibt sich wiederum aus der Intensität λ (Zahl der pro Zeiteinheit ausgeführten Arbeitseinheiten) multipliziert mit der Dauer der Produktionsperiode *t*:

$$b = \lambda \cdot t \text{ oder } \lambda = \frac{b}{t}.$$

Daraus folgt

$$r_i = \rho_i b = \rho_i(\lambda)\lambda \cdot t.$$

Im Beispiel kann man die Geschwindigkeit der Nadelbewegungen λ (zum Beispiel 20 mal Heben und Senken der Nadel pro Sekunde.) mit der Zeit *t* multiplizieren, in der diese Geschwindigkeit eingehalten wird (zum Beispiel 1 min) und erhält dann die Anzahl der Arbeitseinheiten b (b = 20 · 60 = 1.200 Auf- und Abbewegungen der Nadel).

Man sieht auch, dass für gegebene Produktionsperioden t – in statischen Modellen betrachten wir die Zeit nicht als Variable, sondern nehmen sie als gegeben und konstant an – die Einsatzmengen r_i des Faktors *i* eindeutig durch die Intensität λ bestimmt ist. Die Produktionszeit t werden wir im Folgenden zunächst stets als konstant voraussetzen. Wird außerdem eine proportionale Beziehung zwischen der erzeugten Endproduktzahl *x* und den eingesetzten Arbeitseinheiten *b* unterstellt, d.h.

$$b = cx, c = const.,$$

dann ergibt sich

$$r_i = \rho_i(\lambda)b = \rho_i(\lambda)cx.$$

Beziehung zu Leontief-Produktionsfunktionen

Als Sonderfall der **Gutenberg-Produktionsfunktionen** erhält man die **Leontief-Produktionsfunktionen, wenn** man die **Intensität** λ des Potentialgutes **konstant** hält. Es wird dann nur die Zahl der Arbeitseinheiten b und damit gleichzeitig die Produktionszeit *t* proportional variiert. In diesem Fall liegen also bei $\lambda = const.$ konstante Produktionskoeffizienten a_i^λ vor.

Zusammenfassend: Die eingesetzten Faktormengen r_i werden zunächst in die **technische Leistung** λ (technische Arbeit pro Zeit) der Potentialgüter transformiert. Mit Hilfe der technischen Leistung stellt das Aggregat Produktmengen *x* her, welche die **ökonomische Leistung** des Aggregats verkörpern. Damit ist der Faktorverbrauch r_i nicht nur von der Ausbringungsmenge *x*, sondern auch von der Intensität λ des eingesetzten Potentialguts (der abgegebenen technischen Leistung) abhängig.

Dieser letztere Zusammenhang wird durch die Faktorverbrauchsfunktion dargestellt. Jede Verbrauchsfunktion gilt dabei nur für ein Aggregat und eine Verbrauchsfaktorart *i*.

Übungsaufgabe 6

Es seien folgende Faktorfunktionen gegeben:

$$r_1 = 0{,}1\,x, r_2 = 5\,x, r_3 = 0{,}8\,x, r_4 = 2{,}1\,x.$$

a) Wie groß ist die Produktivität des ersten Faktors?

b) Von den vier Faktoren stehen die Höchstmengen $\overline{r}_1 = 1, \overline{r}_2 = 60, \overline{r}_3 = 10, \overline{r}_4 = 26$ zur Verfügung. Kann damit effizient produziert werden?

c) Wie groß ist die Grenzproduktivität des vierten Faktors?

Übungsaufgabe 7

a) Nennen Sie Beispiele für Potential- und Verbrauchsfaktoren!

b) Nennen Sie Beispiele für „Aggregate“!

Übungsaufgabe 8

Zeigen Sie die Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen Produktionsfunktionen vom Leontief-Typ und Gutenberg-Typ auf!

4 Kostentheorie

In der **Kostentheorie** sollen die in der Produktionstheorie hergeleiteten technischen Relationen für weitergehende ökonomische Zwecke genutzt werden. Das produktionstheoretische Mengengerüst wird deshalb über die Einführung von Faktorpreisen durch ein Wertgerüst ergänzt, damit mit Hilfe der aus der Bewertung des Faktorverbrauchs abgeleiteten Kosten ein stärkeres Wirtschaftlichkeitskriterium zur Beurteilung alternativer Produktionen angewendet werden kann.

Die Kostentheorie selbst hat eine Erklärungsaufgabe und eine Gestaltungsaufgabe zu bewältigen.

Ziel der Erklärungsaufgabe ist es, die Kosteneinflussgrößen systematisch zu erfassen und ihre Auswirkungen auf die Höhe der Kosten aufzuzeigen. Die Untersuchung der Abhängigkeit der Kostenhöhe von verschiedenen Einflussgrößen geschieht auf der Grundlage von Kostenfunktionen. Die Formulierung und Analyse dieser Kostenfunktionen sind der Hauptbestandteil der Kostentheorie.

Die Gestaltungsaufgabe der Kostentheorie liegt darin, die Kosteneinflussgrößen so festzulegen, dass die Produktionsentscheidung bei gegebenem Output kostenminimal ausfällt. Das Auswahlproblem verdeutlicht, dass die Produktionstheorie erst durch die Kostentheorie erweitert und allgemein für wirtschaftliche Überlegungen des Unternehmens interessant wird. Sowohl Kosten- als auch Produktionstheorie bedürfen so dringend der gegenseitigen Ergänzung.

4.1 Der allgemeine Kostenbegriff

Bei der Kostendefinition lassen sich im Wesentlichen zwei Kostenbegriffe voneinander unterscheiden, denen verschiedene Bewertungsauffassungen zugrunde liegen: der **wertmäßige** und **der pagatorische** Kostenbegriff.

Bewertung nach dem Grenznutzen der Produktionsfaktoren

- **Wertmäßiger Kostenbegriff**
  Unter **Kosten versteht man den mit Preisen bewerteten Verzehr** der zum Zwecke der Erhaltung der Leistungsbereitschaft, Leistungserstellung und Leistungsverwertung benötigten Sachgüter und Dienstleistungen zuzüglich eines weiteren (z.B. durch Steuern verursachten) betrieblichen Wertabgangs während der Periode. Die Kosten (K) setzen sich also zusammen aus dem

während einer Periode verursachten Werteverzehr, der durch den Verbrauch der entsprechenden Produktionsfaktoren entsteht. Formal gilt

$$K = q_1 r_1 + \dots + q_m r_m + w,$$

mit q_i = Preis je Mengeneinheit des Faktors i,

r_i = Einsatzmenge des Faktors i, i=1,…,m,

w = aufgrund von Zusatzfaktoren bedingter weiterer betrieblicher Wertabgang.

Der dieser Definition zugrundeliegende wertmäßige Kostenbegriff hebt auf den in Geldeinheiten bewerteten Güterverzehr ab, nicht auf die damit verbundenen Zahlungsströme.

- **Pagatorischer Kostenbegriff**
  Im Gegensatz zum wertmäßigen Kostenbegriff knüpft der pagatorische Kostenbegriff an die **mit dem Güterverzehr verbundenen Zahlungsströme** an.

Bewertung nach den tatsächlichen Zahlungen für Produktionsfaktoren

Beide Kostendefinitionen sind gleichermaßen monetär orientiert. Der vornehmlich auf SCHMALENBACH zurückgehende wertmäßige Kostenbegriff bemüht sich jedoch, den Güterverzehr **im Rahmen des allgemeinen betrieblichen Entscheidungsfeldes** zu betrachten und die alternativen Verwendungsmöglichkeiten der eingesetzten Güter (Opportunitätskosten) im Bewertungsansatz mit einzufangen. Dies gelingt, wenn man die verbrauchten Güter mit ihrem Grenznutzen bewertet, d.h. also zu den Beschaffungspreisen der Faktoren die ihrem jeweiligen innerbetrieblichen Knappheitsgrad entsprechenden Wertdifferenzen hinzurechnet. Der Ansatzpunkt des wertmäßigen Kostenbegriffes liegt damit prinzipiell innerhalb der innerbetrieblichen Faktorbewegung. Gelegentlich ist der Grenznutzen allerdings nur schwer festzustellen, und häufig verzichtet man aus Gründen der Arbeitsersparnis sogar auf seine Berechnung. Unter Annahme vollständiger Konkurrenz auf den Beschaffungsmärkten geht man dann vielmehr der Einfachheit halber davon aus, dass die dort zu beobachtenden Preise in etwa den Grenznutzen der betreffenden eingesetzten Faktoren widerspiegeln. Daher werden beim wertmäßigen Kostenbegriff in der Regel **Wiederbeschaffungspreise** als Bewertungsmaßstäbe verwendet.

wertmäßige Kosten im Rahmen des betrieblichen Entscheidungsfeldes

Der hauptsächlich von KOCH in die Kostendiskussion eingebrachte pagatorische Kostenbegriff vernachlässigt dagegen beim Wertansatz bewusst die Einbeziehung des betrieblichen Entscheidungsfeldes. Somit ist der methodische Ausgangspunkt für diesen Kostenbegriff in außerbetrieblichen Faktorbewertungen zu suchen, wobei die benötigte Information an den in

Verbindung mit der Beschaffung der Faktoren getätigten Ausgaben des Unternehmens anknüpft und diese zur Kostenerklärung benutzt. Folglich dienen beim pagatorischen Kostenbegriff grundsätzlich die **Anschaffungspreise** als Bewertungsmaßstab.

Annahme: Bewertung mit Wiederbeschaffungs -preisen

Die Verwendung des einen oder anderen Kostenbegriffes orientiert sich vornehmlich an dem Zweck, der im Rahmen der jeweiligen Unternehmensrechnung beabsichtigt wird, so dass man sich nicht notwendigerweise schon von vornherein auf eine der beiden Begriffsdefinitionen festlegen muss. Bei produktions- und kostentheoretischen Überlegungen unterstellt man allerdings meist, dass die für eine bestimmte Produktion erforderlichen Faktoreinsatzmengen erst im Anschluss an die kostenoptimale Entscheidung beschafft oder – soweit sie bereits vorhanden sind – ohne Einengen des zukünftigen Entscheidungsspielraumes im Produktionsbereich zur Verfügung gestellt bzw. ersetzt werden. Gerade unter dem letzten Aspekt empfiehlt sich dann die Rechnung mit Wiederbeschaffungspreisen, so dass wir den folgenden Ausführungen den wertmäßigen Kostenbegriff zugrunde legen.

1. Wirtschaftlichkeitskriterium der Produktion: Kosten

Die Faktoreinsatzmengen beschreiben das Mengengerüst und die Faktorpreise das Wertgerüst der Kosten. Auf dieser Grundlage lassen sich die qualitativ unterschiedlichen Faktoreinsatzmengen über die Preise mit Hilfe der durch sie verursachten Kosten in Geldeinheiten miteinander vergleichen. Damit ist der erste Schritt zur Beurteilung der Wirtschaftlichkeit der Produktion vollzogen. Zur Herstellung einer bestimmten Produktmenge wird die kostenminimale Faktoreinsatzmengenkombination gewählt. Dieses Wirtschaftlichkeitskriterium versagt im Mehrproduktfall, da hier die qualitativ verschiedenen Outputs ebenfalls erst über die Bewertung in Geldeinheiten miteinander vergleichbar gemacht werden müssen. Das geschieht mit Hilfe des Erlösbegriffes, der dem der Betriebsebene (Leistungsebene) zuzurechnenden Kostenbegriff gegenübersteht.

Erlös

Unter Erlösen (E) versteht man die mit ihren Verkaufspreisen bewerteten Produktmengen einer Rechnungsperiode, die aus dem Unternehmen hinausgegangen und am Markt verkauft worden sind:

$$E = p_1 x_1 + \cdots + p_m x_m,$$

mit p_j = Verkaufspreis je Mengeneinheit des Produktes j,

x_j = Verkaufsmenge des Produktes j,

$j=1,...,n.$

Die Differenz zwischen Erlösen und Kosten bezeichnet man als **Gewinn** (Q), genauer als **Betriebsgewinn** oder auch **Betriebserfolg**:

$$Q = E - K.$$

Unter Wirtschaftlichkeitsgesichtspunkten strebt das Unternehmen nun danach, die gewinnmaximale Produktion der Planungsperiode zu realisieren.

2. Wirtschaftslichkeitskriterium der Produktion: Gewinn

Wesentlich für das Verständnis der Begriffe Erlös und Kosten ist die Tatsache, dass sie hinsichtlich des **Betriebszweckes** (Leistungserstellung bzw. Leistungsverwertung) in einer **Periode** definiert sind.

Beispiel:

- Die Arbeitsleistung eines Fabrikarbeiters, die dadurch verbraucht wird, dass er während der Arbeitszeit Getränke besorgt, verursacht keine Kosten.
- Werden in einer Periode Rohstoffe im Wert von 1000 € eingekauft, aber nur ein Teil davon im Wert von 400 € in dieser Periode zur Produktion benötigt, so belaufen sich die durch den Rohstoffverbrauch verursachten Kosten dieser Periode lediglich auf 400 €.
- Stellt ein Unternehmen 100 Mengeneinheiten eines Produktes in einer Periode her, von denen es aber nur 40 Stück zum Preis von 5 €/Stück in dieser Periode absetzen kann, so beträgt der Erlös in dieser Periode 200 €.

Übungsaufgabe 9

Wodurch unterscheidet sich der wertmäßige vom pagatorischen Kostenbegriff?

4.2 Spezielle Kostenbegriffe

Im Rahmen von Kostenmodellen zeigen die Kostenfunktionen die Gesetzmäßigkeiten auf, die zwischen den Produktionskosten einer Periode und den Kosteneinflussgrößen bestehen. Wir werden uns im Folgenden bei der Betrachtung von Kostenabhängigkeiten auf die Kosteneinflussgröße Ausbringungsmenge (Beschäftigung) beschränken. Für die Analyse von Kostenverläufen stellt sich dann die Frage, wie sich Veränderungen in den Ausbringungsmengen der Produkte auf das Kostenniveau des Betriebes auswirken. Die Untersuchung dieser Frage wird oft durch die Annahme vereinfacht, dass das Unternehmen nur eine Produktart mit der Menge x in einem einstufigen Produktionsprozess herstellt. Von dieser Annahme wollen wir zur Vermittlung kostentheoretischer Gedankengänge ausgehen. Infolgedessen können wir die Abhängigkeiten der Produktionskosten K von den Mengenveränderungen x eines Produktes durch die funktionelle Beziehung $K(x)$ darstellen.

Analyse von Kostenverläufen mit Hilfe spezieller Begriffe

Zur Charakterisierung von Kostenverläufen bedient man sich ebenso wie bei den Produktionsfunktionen verschiedener mathematischer Begriffe, welche die Eigenschaften von Kostenfunktionen unter bestimmten Aspekten in einzelnen Kostenbeziehungen zum Ausdruck bringen sollen. Die dazu üblicherweise verwendeten speziellen Kostenbegriffe und die ihnen entsprechenden funktionalen Beziehungen sollen im Folgenden besprochen werden.

Gesamtkosten

- **Gesamtkosten**
  Unter Gesamtkosten versteht man den gesamten Kostenbetrag, der für die Herstellung einer bestimmten Produktmenge anfällt. Wir wollen die Gesamtkosten mit $K = K(x)$ bezeichnen. Die Gesamtkosten setzen sich zusammen aus variablen und fixen (konstanten) Kosten.

Variable Kosten

- **Variable Kosten**
  Variable Kosten sind diejenigen Kosten, die mit einer Änderung in der Ausbringungsmenge x variieren. Wir bezeichnen die variablen Kosten mit $K_v = K_v(x)$. Ein Beispiel für variable Kosten ist der bewertete Verbrauch eines Rohstoffs, der von der hergestellten Produktmenge abhängt.

Fixe Kosten

- **Fixe Kosten**
  Kosten, die auf Produktmengenänderungen nicht reagieren, bezeichnet man als fixe oder auch konstante Kosten. Wir verwenden für sie das Symbol $K_f = c$, wobei c eine Konstante ist. Ein Beispiel für fixe Kosten sind die

Gehälter für Angestellte im Produktionsbereich, da diese in einer Produktionsperiode nicht von der ausgebrachten Produktmenge abhängen.

Die Gesamtkosten für verschiedene Ausbringungsmengen x einer Produktionsperiode ergeben sich nun aus der Addition der variablen und fixen Kosten, d.h.

$$K(x) = K_v(x) + K_f.$$

Bezieht man die bisher dargestellten Kostengrößen auf die jeweils ausgebrachte Produktionsmenge, so erhält man die folgenden Stückkostenbegriffe, die der Kostenumlegung auf die produzierten Mengeneinheiten dienen:

- **Gesamtkosten pro Stück**

  Gesamtkosten pro Stück

  Die Gesamtkosten pro Stück (auch Stückgesamtkosten, Durchschnittsgesamtkosten oder Stückkosten genannt) erhält man, wenn man die Gesamtkosten *K(x)* für eine Ausbringungsmenge *x* durch diese Mengeneinheiten dividiert, d.h. die Gesamtkosten pro Stück *k(x)* sind

  $$k(x) = \frac{K(x)}{x}.$$

  Die Gesamtkosten pro Stück zeigen also an, was die Erzeugung der einzelnen Produktionseinheit gekostet hat, unter der Voraussetzung, dass die Gesamtkosten der Produktion auf alle hergestellten Produktionseinheiten gleichmäßig verteilt werden.

  Entsprechend der Zerlegung der Gesamtkosten in variable und fixe Kosten kann man ebenso eine Aufteilung der Gesamtkosten pro Stück vornehmen. Man erhält dann die folgenden Größen.

- **Variable Kosten pro Stück**

  Variable Kosten pro Stück

  Die variablen Kosten pro Stück (auch als variable Stückkosten bezeichnet) lauten:

  $$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}.$$

  Sie ergeben sich aus der Division der variablen Kosten $K_v(x)$ durch die Ausbringungsmenge x.

- **Fixe Kosten pro Stück**

  Fixe Kosten pro Stück

  Die fixen Kosten pro Stück (auch fixe bzw. konstante Stückkosten genannt) ergeben sich aus der Division der fixen Kosten K_f durch die jeweils hergestellte Produktmenge *x* und lauten demnach:

$$k_f(x) = \frac{K_f}{x}$$

Bei den fixen Kosten pro Stück ist genau zu beachten, dass der Ausdruck $k_f(x)$ $k_f(x)$ sehr wohl von der Ausbringungsmenge *x* abhängig ist, obgleich die fixen Kosten K_f davon unabhängig sind. Da die fixen Kosten konstant sind, fallen die fixen Kosten pro Stück mit größer werdenden Ausbringungsmengen.
Aus der Beziehung für die Gesamtkosten

$$K(x) = K_v(x) + K_f$$

folgt, dass sich die Gesamtkosten pro Stück aus der Addition der variablen Kosten pro Stück und der fixen Kosten pro Stück zusammensetzen, d.h.

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{K_v(x)}{x} + \frac{K_f}{x} = k_v(x) + k_f(x).$$

Grenzkosten

- **Grenzkosten**

Mit den Grenzkosten soll ein letzter spezieller Kostenbegriff vorgestellt werden, welcher der Charakterisierung des Verlaufs von Kostenfunktionen dient. Unter der Annahme differenzierbarer Gesamtkostenfunktionen versteht man unter den Grenzkosten $K'(x)$ die Ableitung der Gesamtkosten nach der Produktmenge, d.h.

$$K'(x) = \frac{dK(x)}{dx} = \frac{dK_v(x)}{dx} + \frac{dK_f}{dx} = \frac{dK_v(x)}{dx} = K_v{}'(x).$$

Die Grenzkosten zeigen also an, wie sich die Gesamtkosten ändern, wenn die Ausbringungsmenge *x* variiert wird. Geometrisch geben die Grenzkosten die Steigung der Gesamtkostenfunktion an dem Punkt einer bestimmten Ausbringungsmenge *x* an. Diese stimmt an allen Produktionspunkten *x* mit der Steigung $K_v(x)$ für die variablen Kosten überein, da die Ableitung der fixen Kosten K_f nach der Ausbringungsmenge *x* – wegen ihrer Unabhängigkeit von dieser – stets Null ist, d.h.

$$\frac{dK_f}{dx} = K_f{}' = 0 \; \forall x$$

Dies bedingt die oben aufgezeichnete Beziehung $K'(x) = K_v{}'(x)$ für alle Produktionsmengen *x*.

Beispiel:

Die in diesem Abschnitt behandelten Kostenbegriffe und die ihnen in Abhängigkeit der Ausbringungsmenge x entsprechenden Funktionen sollen für den allgemeineren Fall einer Kostenfunktion $K(x) = ax^2 + b$ (a und b Konstante) im Folgenden nochmals übersichtlich aufgezeigt werden.

Tab. 2: *Klassifikation spezieller Kostenbegriffe*

Kostenbegriff	Symbol	Kostenfunktion
Gesamtkosten	K	$K(x) = ax^2 + b$
variable Kosten	K_v	$K_v(x) = ax^2$
fixe Kosten	K_f	$K_f = b$
Gesamtkosten pro Stück	$k = \frac{K}{x}$	$k(x) = ax + \frac{b}{x}$
variable Kosten pro Stück	$k_v = \frac{K_v}{x}$	$k_v(x) = ax$
fixe Kosten pro Stück	$k_f = \frac{K_f}{x}$	$k_f(x) = \frac{b}{x}$
Grenzkosten	$K'(x) = \frac{dK}{dx}$	$K'(x) = 2ax$

Übungsaufgabe 10

Bestimmen Sie für die Gesamtkostenfunktion $K(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$ die Funktion der

- variablen Kosten,
- fixen Kosten,
- Grenzkosten,
- Gesamtkosten pro Stück,
- variablen Kosten pro Stück,
- fixen Kosten pro Stück.

4.3 Minimalkostenkombination bei substitutionaler Produktion

Substitutionale Produktionsprozesse

Mit der Behandlung der Minimalkostenkombination wenden wir uns der Gestaltungsaufgabe der Kostentheorie zu. Hierbei geht es um die Lösung des Problems, welche Kombination von Faktoreinsatzmengen gewählt werden soll, um eine bestimmte Produktionsmenge mit den für sie minimalen Kosten herzustellen. Durch die Minimalkostenkombination werden also jeder Produktmenge die zu ihrer Erzeugung erforderlichen kostenminimalen Faktoreinsatzmengen zugeordnet. Über diese Zuordnung leitet sich dann die Kostenfunktion in Abhängigkeit der Produktionsmenge her, sofern man sich auf diese als alleineige Kosteneinflussgröße beschränkt. Die Bestimmung von Minimalkostenkombinationen wird im Folgenden aus Gründen einer besseren Übersichtlichkeit gesondert nach limitationalen und substitutionalen Produktionsfunktionen untersucht.
Bei substitutionalen Produktionsbeziehungen kann eine bestimmte Produktmenge $x = x^1$ alternativ durch mehrere technisch effiziente Faktorkombinationen hergestellt werden; sie liegen im effizienten Bereich der entsprechenden Produktionsisoquante. Abb. 17 veranschaulicht dies für die Erzeugung einer Produktart mit zwei Faktorarten. Unter den effizienten Einsatzmengen für das gegebene Produktionsniveau ist die kostenminimale Faktorkombination – also die Minimalkostenkombination – nun dadurch aufzufinden, dass die Kostenisoquante $K = K^1$, die durch ein festes Verhältnis der Faktorpreise q_1 und q_2 determiniert wird, die Produktionsisoquante $x = x^1$ berührt; dies erfolgt im Punkt A. Allgemein ausgedrückt ist die Minimalkostenkombination substitutionaler Produktionsfunktionen durch die Punkte bestimmt, an denen die Kostenisoquanten zu Tangenten an den Produktionsisoquanten werden. Der geometrische Ort dieser Tangentialpunkte ist die Expansions- bzw. Minimalkostenlinie.
So kann mit dem Kostenniveau $K = K^4$ maximal die Produktmenge $x = x^4$ erzeugt werden, wobei der Punkt D die dafür erforderliche Einsatzmengenkombination der Faktoren 1 und 2 anzeigt; umgekehrt macht die Gütermenge $x = x^3$ die Kostenhöhe $K = K^3$ notwendig, um mit der durch Punkt C markierten Faktoreinsatzmengenkombination kostenminimal produziert werden zu können. Durch die Kosten der Minimalkostenkombinationen, die den alternativen Produktionsniveaus zugeordnet sind, erhält man die für die jeweilige substitutionale Produktionsfunktion geltende Kostenfunktion $K(x)$. Die aus Abb. 17 aus den Punkten A-D erkennbaren Werte $K^l(x^l), l = 1,\ldots,4,$, sind Funktionswerte dieser Kostenfunktion.

Die Tatsache, dass die Minimalkostenkombinationen mit den Tangentialpunkten der Kosten- und Produktionsisoquanten identisch sind, lässt sich bei substitutionalen Produktionsfunktionen mit stetig differenzierbaren Produktionsisoquanten –

also solchen, die keine Knicke aufweisen und daher als „glatt" bezeichnet werden können – auch in der Form geometrisch beschreiben, dass an diesen Stellen die Steigung der Kostenisoquante mit der der Produktionsisoquante übereinstimmt. Die Steigung der Kostenisoquante ist, wie im vorherigen Abschnitt erörtert, durch das Preisverhältnis der Faktoren festgelegt, also gilt:

$$\left.\frac{dr_1}{dr_2}\right|_{K_1} = -\tan\alpha = -\frac{q_2}{q_1}.$$

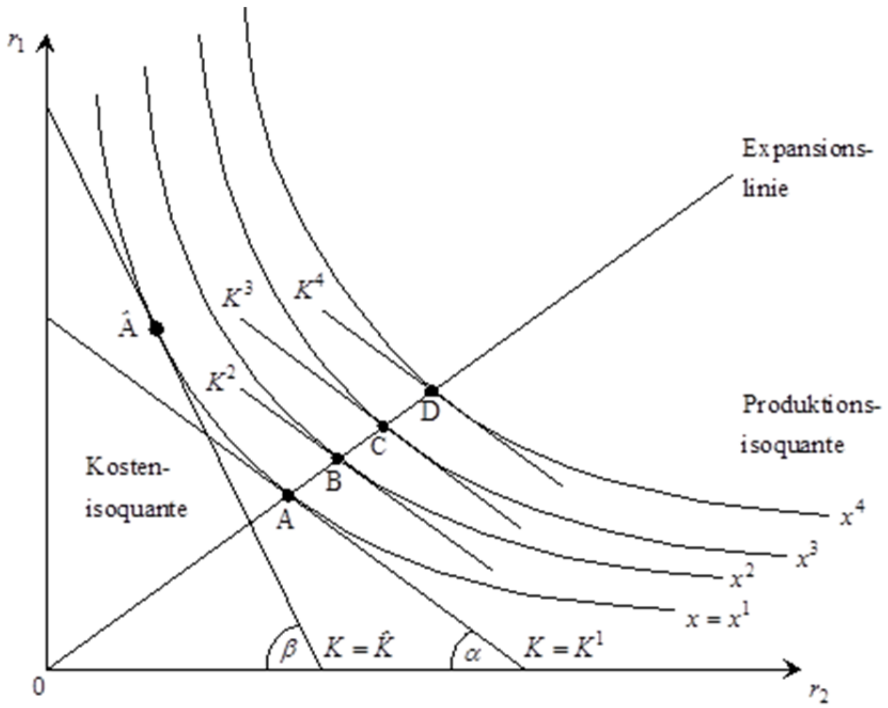


Abb. 17: *Darstellung der Minimalkostenkombination bei substitutionalen Produktionsbeziehungen*

Grenzrate der Substitution

Die Steigung der Produktionsisoquante in einem beliebigen Punkt entspricht dagegen bis auf das negative Vorzeichen der dort geltenden **Grenzrate der Substitution** s_{12} zwischen den Faktoren, so dass man hieraus die Beziehung

$$\left.\frac{dr_1}{dr_2}\right|_{\bar{x}} = -s_{12}$$

ableitet. Aus der Identität beider Steigungen in den kostenminimalen Punkten folgt dann, dass man an den Tangentialpunkten der Produktions- und Kostenisoquanten die Bedingung hat:

$$\frac{q_2}{q_1} = s_{12}$$

d.h. für die Minimalkostenkombinationen substitutionaler Produktionsfunktionen gilt die Bedingung, dass dort die Grenzrate der Substitution zwischen den Faktoren umgekehrt proportional zum Faktorpreisverhältnis ist. Variiert dieses Faktorpreisverhältnis, so ändern sich entsprechend die Minimalkostenkombinationen für betrachtete Produktionsniveaus und damit auch die Expansionslinie. Geht man beispielsweise in Abb. 17 vom Preisverhältnis $\frac{q_2}{q_1} = -\tan\alpha$ zum Preisverhältnis $\frac{\hat{q}_2}{\hat{q}_1} = -\tan\beta$ über, so wird für das Produktionsniveau $x = x^1$ die Einsatzmengenkombination $\hat{A}$ anstatt A kostenoptimal.

Der wegen $-\frac{\hat{q}_2}{\hat{q}_1} < \frac{q_2}{q_1}$ bzw. $\tan\beta < \tan\alpha$ relativ teurer gewordene Faktor 2 wird teilweise durch Faktor 1 ersetzt. Das mit der Realisierung von $\hat{A}$ verbundene Kostenniveau beträgt $K = \widehat{K}$.

Sind die Produktionsisoquanten wie in Abb. 17 streng konvex, dann kann bei den jeweils geltenden Faktorpreisverhältnissen sogar für jedes Produktionsniveau eine eindeutige Minimalkostenkombination bestimmt werden.

Die bisher mehr anschaulich besprochenen Bedingungen für die Minimalkostenkombinationen substitutionaler Produktionsfunktionen sollen im Folgenden für den allgemeinen Fall analytisch abgeleitet werden. Die Forderung, eine bestimmte Produktmenge $\overline{x}$ auf der Grundlage der geltenden Produktionsfunktion $\overline{x} = x(r_1, \dots, r_I)$ bei gegebenen Faktorpreisen $q_1, \dots, q_I$ mit minimalen Kosten zu erzeugen, lässt sich durch den mathematischen Ansatz formalisieren:

$$\min K = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i$$

unter der Nebenbedingung

$$\overline{x} = x(r_1, \dots, r_I) \text{ bzw. } \overline{x} - x(r_1, \dots, r_I) = 0.$$

Dieses Kostenminimierungsproblem mit einer Gleichung als Restriktion – $\overline{x}$ muss die Produktionsfunktion erfüllen – kann durch die Minimierung der Lagrange-Funktion

$$\min \Phi = (r_1, \dots, r_I, \lambda) = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i + \lambda[\overline{x} - x(r_1, \dots, r_I)]$$

ersetzt werden. Hieraus erhält man bei Differenzierbarkeit der Produktionsfunktion die notwendigen Bedingungen für die bezüglich $\overline{x}$ kostenminimalen Faktoreinsätze, indem man die Lagrange-Funktion nach den Variablen $r_1, \dots, r_I, \lambda$ partiell differenziert und diese partiellen Ableitungen gleich Null setzt, d.h.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = q_i - \lambda \frac{\partial x}{\partial r_i} = 0, i = 1, \dots, I,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r_i} = \overline{x} - x(r_1, \dots, r_I) = 0.$$

Mit diesen $I + 1$ Gleichungen für $I + 1$ Variablen lassen sich bei konkaver Produktionsfunktion die kostenminimalen Faktoreinsätze errechnen. Aus den ersten I partiellen Ableitungen ergeben sich für zwei beliebige Faktoren i und $\hat{\imath}, i \neq \hat{\imath}$ und $i, \hat{\imath} \in \{1, \ldots, I\}$, die Beziehungen

$$q_i = \lambda \frac{\partial x}{\partial r_i} \text{bzw.} \, \widehat{q_\imath} = \lambda \frac{\partial x}{\partial r_{\hat{\imath}}}$$

und daraus

$$\frac{q_i}{q_{\hat{\imath}}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{\frac{\partial x}{\partial r_{\hat{\imath}}}}.$$

In den Kostenminima verhalten sich also die Faktorpreise zueinander wie die Grenzproduktivitäten der Faktoren.

Andererseits ist auf jeder Produktionsisoquante das totale Grenzprodukt gleich Null, d.h. es gilt

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_1} dr_1 + \cdots + \frac{\partial x}{\partial r_I} dr_I = 0$$

bzw. bei alleiniger Mengenvariation der Faktoren i und $\hat{\imath}$ und Konstanz aller übrigen Faktormengen

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r_i} dr_i + \cdots + \frac{\partial x}{\partial r_{\hat{\imath}}} dr_{\hat{\imath}} = 0$$

und daher

$$s_{i\hat{\imath}} = -\frac{dr_i}{dr_{\hat{\imath}}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_{\hat{\imath}}}}{\frac{\partial x}{\partial r_i}}.$$

Die Grenzrate der Substitution $s_{i\hat{\imath}}$ zwischen den Faktoren i und $\hat{\imath}$ ist damit umgekehrt proportional zu den Grenzproduktivitäten dieser beiden Faktoren.

Setzt man die abgeleiteten Beziehungen zusammen, so hat man zusammenfassend als Bedingungen für die Minimalkostenkombinationen substitutionaler Produktionsfunktionen

$$\frac{q_i}{q_{\hat{\imath}}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{\frac{\partial x}{\partial r_{\hat{\imath}}}} = \frac{1}{s_{i\hat{\imath}}}, i \neq \hat{\imath}, \quad i, \hat{\imath} \in \{1, \ldots, I\},$$

d.h. bei kostenminimalem Mengeneinsatz aller Produktionsfaktoren müssen deren Preise im selben Verhältnis wie die Grenzproduktivitäten und im umgekehrten Verhältnis zur Grenzrate der Substitution stehen. Diese Bedingungen sind für alle Punkte auf der Expansionslinie erfüllt. Multipliziert man die für die jeweiligen

Produktionsniveaus x kostenminimalen Faktoreinsatzmengen $r_i^*(x)$ mit ihren Preisen q_i, so erhält man nach Summation die Kosten in Abhängigkeit der Produktion, d. h. die Kostenfunktion

$$K(x) = \sum_{i=1}^{I} r_i^*(x)\, q_i..$$

Beispiel:

Für die substitutionale Produktionsfunktion

$$x = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

sollen bei Geltung der Faktorpreise

$$q_1 = 3€/ME,$$

$$q_2 = 1€/ME,$$

$$q_3 = 2€/ME$$

- die Minimalkostenlinie (Expansionslinie),
- die Kostenfunktion $K(x)$ und
- die kostenminimalen Faktoreinsatzmengen r_1^*, r_2^*, r_3^* für das Produktionsniveau $\bar{x} = 8ME$

bestimmt werden.

Schritt 1: Bestimmung der Minimalkostenlinie

Die Minimalkostenkombination für jedes beliebige Produktionsniveau x muss die Bedingungen erfüllen

$$\frac{q_i}{q_{\hat{\imath}}} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_i}}{\frac{\partial x}{\partial r_{\hat{\imath}}}}, i \neq \hat{\imath}, \quad i, \hat{\imath} \in \{1,2,3\}$$

bzw.

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_1}}{\frac{\partial x}{\partial r_2}} => \frac{3}{1} = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_3} = \frac{r_2}{r_1} => 3r_1 = r_2,$$

$$\frac{q_2}{q_3} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_2}}{\frac{\partial x}{\partial r_3}} => \frac{1}{2} = \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_2} = \frac{r_3}{r_2} => r_2 = 2r_3,$$

$$\frac{q_1}{q_3} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r_1}}{\frac{\partial x}{\partial r_3}} => \frac{3}{2} = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_2} = \frac{r_3}{r_1} => 3r_1 = 2r_3.$$

Hieraus folgt die funktionale Charakterisierung der Minimalkostenlinie im Faktorraum durch

$$3r_1 = r_2 = 2\, r_3.$$

Schritt 2: Ableitung der Kostenfunktion K(x)

Setzt man die unter Schritt 1 berechneten kostenminimalen Relationen zwischen den Faktoreinsatzmengen r_1, r_2, r_3 in die Produktionsfunktion ein, so erhält man für die jeweiligen Faktorverbräuche in Abhängigkeit der Produktmenge

$$x = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = r_1 \cdot 3r_1 \cdot \frac{3}{2} r_1 = \frac{9}{2} r_1^3 => r_1^*(x) = \sqrt[3]{\frac{2x}{9}},$$

$$x = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{1}{3} r_2 \cdot r_2 \cdot \frac{1}{2} r_2 = \frac{1}{6} r_2^3 => r_2^*(x) = \sqrt[3]{6x},$$

$$x = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 = \frac{2}{3} r_3 \cdot 2r_3 \cdot r_3 = \frac{4}{3} r_3^3 => r_3^*(x) = \sqrt[3]{\frac{3x}{4}}.$$

Die Kostenfunktion $K(x)$ lautet dann (gemessen in €):

$$K(x) = r_1^*(x) \cdot q_1 + r_2^*(x) \cdot q_2 + r_3^*(x) \cdot q_3 = 3\sqrt[3]{\frac{2x}{9}} + \sqrt[3]{6x} + 2\sqrt[3]{\frac{3x}{4}} =$$

$$\left(3\sqrt[3]{\frac{2}{9}} + \sqrt[3]{6} + 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\right)\sqrt[3]{x} = 5{,}46 \cdot x^{\frac{1}{3}}.$$

Schritt 3: Kostenoptimale Faktoreinsatzmengen für das Produktionsniveau

$\boldsymbol{\bar{x} = 8ME}$

Aus den Bestimmungsgleichungen für r_1^*, r_2^* und r_3^* in Schritt 2 ergeben sich die folgenden optimalen Faktoreinsatzmengen für $\bar{x} = 8ME$:

$$r_1^* = \sqrt[3]{\frac{2}{9} \cdot 8} = 2\sqrt[3]{\frac{2}{9}} = 1{,}21ME$$

$$r_2^* = \sqrt[3]{6 \cdot 8} = 2\sqrt[3]{6} = 3{,}631ME$$

$$r_3^* = \sqrt[3]{\frac{3}{4} \cdot 8} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = 1{,}82ME$$

Aus diesen Ergebnissen sieht man sehr plastisch, wie die substitutionalen Produktionsbeziehungen die Preisvor- und -nachteile der Ressourcen ausgleichen. Gemäß der zugrunde gelegten Produktionsfunktion hat jede Ressource dieselbe Produktivität. Da Faktor 1 bzw. 3 aber dreimal bzw. viermal so teuer ist wie Faktor 2, wird von Faktor 2 dreimal bzw. zweimal so viel wie von Faktor 1 bzw. 3 eingesetzt. Wegen der peripheren Substitutionalität müssen zudem alle Faktoren an der Produktion beteiligt sein.

4.4 Minimalkostenkombination bei linear-limitationaler Produktion

Ein linear-limitationaler Prozess

Limitationale Produktionsprozesse besitzen die Eigenschaft, dass die erforderlichen effizienten Faktoreinsatzmengen $r_1, \ldots, r_I$ jeweils in einem eindeutig bestimmten Verhältnis zur herzustellenden Erzeugnismenge x stehen. Geht man zunächst von der Existenz nur eines linear-limitationalen Prozesses aus, der mit Hilfe der Produktionskoeffizienten $a_1, \ldots, a_I$ gekennzeichnet sein möge, so sind die für die Fertigung einer Menge $x = x^1$ benötigten Einsatzmengen der Faktoren $1, \ldots, I$ nach dem System der Inputfunktion einer linear-limitationalen Produktionsfunktion gegeben durch:

$$r_1^1 = a_1 x^1, \ldots, r_I^1 = a_I x^1$$

Diese Faktoreinsatzmengenkombination $(r_1^1, \dots, r_I^1)$ ist eindeutig und effizient und stimmt daher gleichzeitig mit der Minimalkostenkombination für diese Produktmenge x^1 überein. Hieraus ergeben sich unmittelbar die Kosten

$$K^1 = K(x^1) = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i^*(x^1) = \sum_{i=1}^{I} q_i r_i^1 = (\sum_{i=1}^{I} q_i a_i) x^1 = cx^1, ,$$

oder allgemein für ein beliebiges Produktionsniveau x

$$K(x) = (\sum_{i=1}^{I} q_i a_i) x = cx, ,$$

mit $q_i, i = 1, \dots, I$, als Preis des Faktors *i*. Damit hat man zugleich schon die auf dem linear-limitationalen Produktionsprozess basierende Kostenfunktion. Bei gegebenen Faktorpreisen und Produktionskoeffizienten sind die Kosten also stets linear abhängig von der Produktmenge *x*. Wegen der Identität der effizienten mit den kostenminimalen Faktoreinsatzmengen liegen die Minimalkostenkombinationen für alle alternativen Produktionsniveaus *x* auf dem Prozessstrahl der technisch effizienten Produktionspunkte. Der Prozessstrahl entspricht somit zugleich der Minimalkostenlinie, die auch als **Expansionslinie** bezeichnet wird, da auf ihr die kostenminimale Variation von *x* erfolgt.

Expansionslinie

Abb. 18 veranschaulicht den soeben beschriebenen ökonomischen Sachverhalt anhand eines linear-limitationalen Prozesses mit zwei Faktoren, deren Mengen stetig veränderbar sind. Grafisch ist die Minimalkostenkombination für ein bestimmtes Produktionsniveau x^1 dadurch zu ermitteln, dass man denjenigen Punkt ausfindig macht, an dem die Kostenisoquante

$$K = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

die Produktionsisoquante x^1 erstmals berührt. Da die Steigung der Kostenisoquanten bei gegebenen Faktorpreisen jedoch stets negativ ist und zwischen den Steigungen liegt, die an den verschiedenen (ineffizienten) Isoquantenästen der limitationalen Produktionsfunktion gelten, berühren die Kostenisoquanten die Produktionsisoquanten genau in ihren effizienten Eckpunkten auf dem Prozessstrahl. Diese Eckpunkte entsprechen damit zugleich den Minimalkostenkombinationen. Zu den Produktionsniveaus x^1, x^2, x^3 in Abb. 18 gehören so die Kostenisoquanten K^1, K^2, K^3 und die durch die Punkte A, B und C markierten Minimalkostenkombinationen.

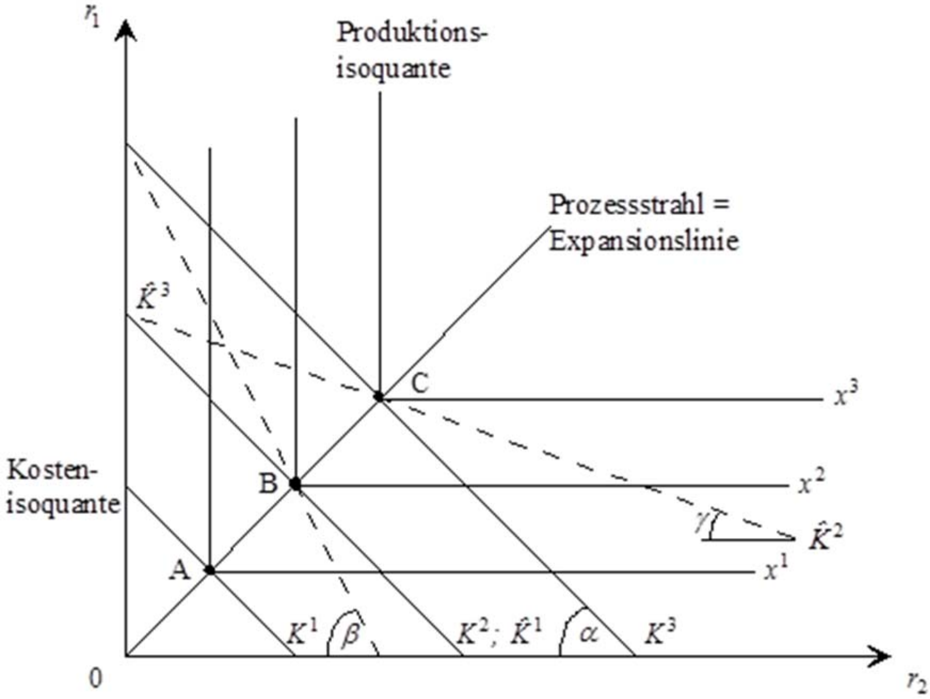


Abb. 18: *Darstellung der Minimalkostenkombination bei einem linear-limitationalen Produktionsprozess*

Veränderung des Kostenniveaus bei Variation der Faktorpreise

Sofern nur ein linear-limitationaler Produktionsprozess für die Erzeugung von x zur Verfügung steht, ändern sich die Minimalkostenkombinationen für die verschiedenen Produktionsniveaus bei einer Variation der Faktorpreise nicht. Sie stimmen nach wie vor mit den effizienten Prozesspunkten überein. Wohl aber ergibt sich über die Faktorpreisveränderungen ein Einfluss auf die mit den einzelnen Produktionsniveaus verbundenen Kostenniveaus. Hierzu sind in Abb. 18 drei unterschiedliche Grundfälle dargestellt.

Fall 1:

Alle Faktorpreise ändern sich im selben Verhältnis, so dass deren Relationen zueinander konstant bleiben. Dann bleibt auch die Lage der Kostenisoquanten im Faktorraum erhalten; lediglich die Kostenindizes an den Isoquanten steigen bzw. fallen mit einer Erhöhung bzw. Senkung der Preise. Fallen so in Abb. 18 die Faktorpreise q_1 und q_2 je um die Hälfte, dann erhält die Kostenisoquante K^2 den neuen Niveauindex $\widehat{K}^1 = K^1$. Mit denselben Kosten kann nun nach den Preissenkungen anstatt $x = x^1$ (Punkt A) die höhere Menge $x = x^2$ (Punkt B) hergestellt werden.

Fall 2:

Ein Faktorpreis steigt im Verhältnis zu den übrigen Faktorpreisen; hier verändert sich über das Verhältnis der Faktorpreise ebenfalls die Steigung der Kostenisoquante. In Abb. 18 geht die Kostenisoquante K^3 bei einer Erhöhung von q_2 beispielsweise in die Kostenisoquante $\widehat{K}^3$ über, die bei demselben Kostenniveau ($K^3 = \widehat{K}^3$) eine stärkere negative Steigung $-\tan\beta < -\tan\alpha$ aufweist. Die Preiserhöhung des Faktors 2 hat den Effekt, dass bei gleichen Kosten anstatt $x = x^3$ (Punkt C) nur noch die kleinere Menge $x = x^2$ (Punkt B) hergestellt werden kann.

Fall 3:

Ein Faktorpreis fällt im Verhältnis zu den übrigen Faktorpreisen; daraus resultiert ebenso eine veränderte Lage der Kostenisoquanten im Faktorraum. Die Senkung des Faktorpreises q_2 kann so dazu führen, dass die Kostenisoquante K^2 in die Kostenisoquante $\widehat{K}^2$ mit einer geringeren negativen Steigung $-\tan\gamma > -\tan\alpha$ übergeht. Bei gleichem Kostenbudget $K^2 = \widehat{K}^2$ lässt sich dann nach der Preissenkung für Faktor 2 anstatt $x = x^2$ (Punkt B) die größere Menge $x = x^3$ (Punkt C) produzieren.

Andere Möglichkeiten von Faktorpreisvariationen können auf die besprochenen drei Fälle zurückgeführt werden. Stets bleiben jedoch die Minimalkostenkombinationen dieselben. Insofern lässt deren Ermittlung bei nur einem limitationalen Produktionsprozess keine Wahlmöglichkeiten hinsichtlich der Relationen der einzusetzenden Faktormengen offen. Dies ändert sich, wenn mehrere **effiziente, linear-limitationale Produktionsprozesse** zur Herstellung einer Produktmenge x zur Verfügung stehen.

Mehrere linear-limitationale Prozesse

4.5 Kostenverläufe

Typische Grunderscheinungsformen von Kostenverläufen

Ohne bereits hier näher auf die Ableitung expliziter Kostenfunktionen aus entsprechenden Produktionsfunktionen einzugehen, sollen im Folgenden einige allgemeine Kostenverläufe mit Hilfe der speziellen Kostenbegriffe charakterisiert werden. Dabei kann man sich hinsichtlich der Gesamtkosten K bzw. variablen Kosten K_v – sofern man die stets als gleich unterstellen Fixkosten K_f zunächst einmal außer acht lässt – auf vier typische Grunderscheinungsformen beschränken:

- **Lineare Kosten** (Fall 1); die Gesamtkosten K steigen linear mit zunehmender Ausbringungsmenge x. Beispiel für einen derartigen Kostenverlauf sind die Materialkosten, die bei der Herstellung eines Produktes aufgrund des Rohstoffverbrauchs oder des Einsatzes von Einzel- und Fertigteilen (zum Beispiel Karosseriebleche, Räder, Sitze beim PKW) anfallen.
- **Progressive Kosten** (Fall 2); die Gesamtkosten steigen überproportional mit der Erhöhung der Produktion. Solche Kostenverläufe lassen sich bei den Lohnkosten beobachten, wenn eine Vermehrung des Outputs nur durch Überstunden erfolgen kann, für die Überstundenzuschläge gezahlt werden müssen.
- **Degressive Kosten** (Fall 3); die Gesamtkosten nehmen bei steigender Ausbringungsmenge unterproportional zu. Dieser Kostenverlauf tritt beispielsweise auf, wenn steigende Produktionsstückzahlen mit einer wachsenden Arbeitsroutine der eingesetzten Arbeitskräfte einhergehen und diese zeitabhängig entlohnt werden. Sie sind ebenfalls bei den Kosten für Hilfs- und Betriebsstoffe (zum Beispiel Schmieröl) anzutreffen.
- **Regressive Kosten** (Fall 4); die Gesamtkosten fallen mit zunehmender Ausbringungsmenge. Hierfür werden oft die Heizungskosten im Kino oder die Nachtwächterkosten angeführt. Diese ausgefallenen Beispiele lassen jedoch bereits erkennen, dass man in der betrieblichen Praxis normalerweise keine regressiven Kosten vorfinden wird.

Interessiert man sich für die Zuordnung der diskutierten typischen Grunderscheinungsformen von Gesamtkostenverläufen zu verschiedenen Produktionsfunktionen, so lässt sich hier bereits folgendes sagen: Während lineare Gesamtkostenverläufe ein charakteristisches Merkmal für Leontief-Produktionsmodelle sind, treten progressive Gesamtkosten regelmäßig bei partieller Faktorvariation in neoklassischen Produktionsmodellen auf (siehe Abb. 19). Dagegen sind bei Kostenverläufen, die bei partieller Faktorvariation auf dem Ertragsgesetz basieren, zunächst degressive und dann progressive Gesamtkosten festzustellen (Abb. 19).

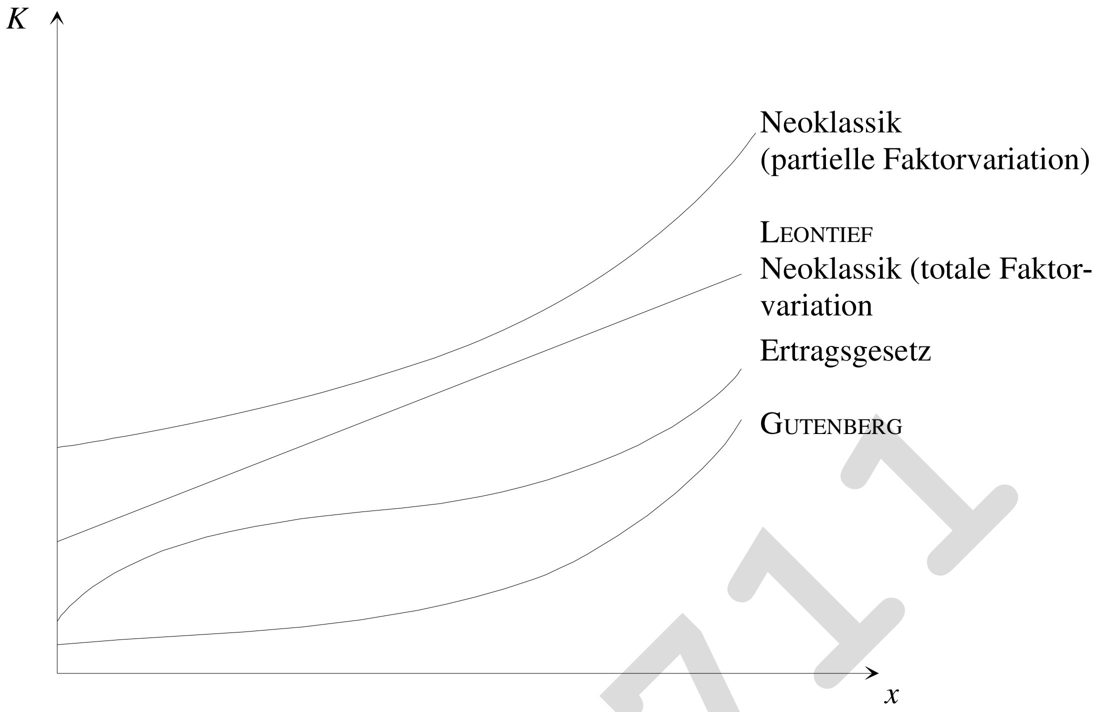


Abb. 19: *Kostenfunktionsverläufe*

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

1)

	a	b	c	d	e	f	g
beliebiger Faktoreinsatz (Verschwendung) ohne Output ist möglich	x	x					x
Es gibt Produktionen mit positivem Ergebnis	x	x	x	x	x	x	x
Produktionen sind nicht umkehrbar	x	x		x		x	x
Abgeschlossenheit	x	x	x	x	x	x	x

Bei den Abbildungen a), b) und g) handelt es sich um Technologien.

2)

	a	b	c	d	e	f	g
additiv		x				(x)	x
linear						(x)	x

Übungsaufgabe 2

a)

Produktivität = $\frac{x}{r_i}$

$\frac{x}{r_1} = 2r_2; \frac{x}{r_2} = 2r_1$

Grenzproduktivität=$\frac{\partial x}{\partial r_i}$

$\frac{\partial x}{\partial r_1} = 2r_2; \frac{\partial x}{\partial r_2} = 2r_1$

Produktionselastizität=$\frac{\partial x}{\partial r_i} \cdot \frac{r_i}{x}$

$\frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot \frac{r_1}{x} = 1; \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot \frac{r_2}{x} = 1$

Homogenitätsgrad $\lambda^t x = x(\lambda r_1, \lambda r_2)$

$2\lambda r_1 \cdot \lambda r_2 = \lambda^2 2 r_1 r_2 = \lambda^2 x$=> t = 2

b) Produktivität

$\frac{x}{r_1} = \frac{3r_1+2r_2}{r_1}; \frac{x}{r_2} = \frac{3r_1+2r_2}{r_2}$

Grenzproduktivität

$\frac{\partial x}{\partial r_1} = 3; \frac{\partial x}{\partial r_2} = 2$

Produktionselastizität

$\frac{\partial x}{\partial r_1} \cdot \frac{r_1}{x} = \frac{3r_1}{3r_1+2r_2}; \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot \frac{r_2}{x} = \frac{2r_2}{3r_1+2r_2}$

Homogenitätsgrad

$3\lambda r_1 + 2\lambda r_2 = \lambda(3r_1 + 2r_2) = \lambda x$ => t = 1

Übungsaufgabe 3:

Grenzrate der Substitution zwischen Faktor 1 und Faktor 3

$$s_{13} = -\frac{dr_1}{dr_3}$$

Produktionsfunktion:

$$x = 3r_1 + r_2 + 9r_3$$

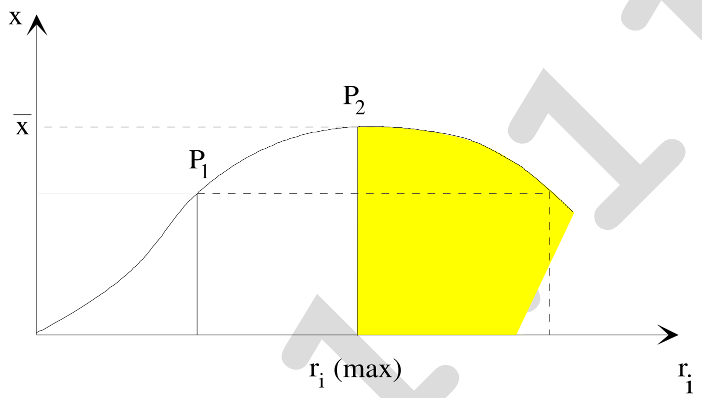
$$x = 7;\ r_2 = 1$$

$$7 = 3r_1 + 1 + 9r_3$$

$$r_1 = \frac{6 - 9r_3}{3} = 2 - 3r_3$$

$$s_{13} = -\frac{dr_1}{dr_3} = 3$$

Übungsaufgabe 4:



Produktionsfunktionen bilden nur effiziente Produktionen mit ihren Input- und Outputmengen ab. Demnach sind alle unterhalb des Funktionsverlaufes liegenden Produktionen ineffizient. Diese wurden auch implizit schon bei der Darstellung des Ertragsgesetzes ausgeschlossen, trotzdem enthält die ertragsgesetzliche Produktionsfunktion noch ineffiziente Produktionen. So kann der gleiche Ertrag $\overline{x}$ mit unterschiedlich großen Inputmengen r_i des Faktors *i* erzielt werden, wobei P_1 nur ein effizienter Produktionspunkt ist. Insbesondere bedeutet dies, dass alle Produktionen mit einem größeren Faktoreinsatz als r_i (max) ineffizient sind (technische Minimierung).

Übungsaufgabe 5:

a) Nur 2): $x = 6r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{1}{2}}$ ist eine Produktionsfunktion vom C/D-Typ.

b) Für $x = 2r_1^{\frac{1}{2}}r_2^{\frac{1}{2}}$ und $r_1 = 4$ ist

$\frac{x}{r_2} = 4r_2^{-\frac{1}{2}}$ das Durchschnittsprodukt,

$\frac{\partial x}{\partial r_2} = 2r_2^{-\frac{1}{2}}$ die Grenzproduktivität,

$\varepsilon_2 = \frac{\partial x}{\partial r_2} \cdot \frac{x}{r_2} = \frac{1}{2}$ die Produktionselastizität des Faktors r_2.

Übungsaufgabe 6:

a) $\frac{x}{r_1} = 10$
b) Nein, denn der erste Faktor stellt einen Engpass dar.
c) $\frac{\partial x}{\partial r_4} = 0$, denn Faktor 4 ist kein Engpassfaktor.

Übungsaufgabe7:

a) Potentialfaktoren:

Drehbank, Bohrmaschine, Schreibmaschine

Verbrauchsfaktoren:

Rohstoffe, Energie

b) Aggregate:

Fließband, Walzstraße, Transferstraße, kompletter Arbeitsplatz

(einschließlich Arbeitskraft)

Übungsaufgabe 8:

1. Zu den Produktionskoeffizienten:

   Leontief-Typ konstant, Gutenberg-Typ variabel.

2. Zur Art der Faktorbeziehung:

   Leontief-Typ limitational, Gutenberg-Typ sowohl limitationale als auch substitutionale Beziehungen möglich.

3. Die Leontief-Produktionsfunktion kann als Sonderfall der Gutenberg-Produktionsfunktion dargestellt werden.

Übungsaufgabe 9:

Während die **pagatorischen Kosten** den tatsächlich beobachtbaren Auszahlungen entsprechen (Anschaffungskosten) und damit außerbetriebliche Faktorbewertungen sind, beruhen die **wertmäßigen Kosten** auf dem innerbetrieblichen Knappheitsgrad der im Produktionsprozess einzusetzenden Faktoren.

Die wertmäßigen Kosten und die Anschaffungskosten werden in der Regel voneinander differieren, sobald zum Beispiel die innerbetrieblichen Knappheitseigenschaften der Faktoren mit deren Verfügbarkeitsgrad auf den Beschaffungsmärkten zum Zeitpunkt des Erwerbs nicht identisch sind.

Übungsaufgabe 10:

Kostenbegriff	**Symbol**	**Kostenfunktion**
Gesamtkosten	K	$K(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$
variable Kosten	K_v	$K_v(x) = \frac{1}{2}x^2$
fixe Kosten	K_f	$K_f = 2$
Gesamtkosten pro Stück	$k = \frac{K}{x}$	$k(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{x}$
variable Kosten pro Stück	$k_v = \frac{K_v}{x}$	$k_v(x) = \frac{1}{2}x$
fixe Kosten pro Stück	$k_f = \frac{K_f}{x}$	$k_f(x) = \frac{2}{x}$
Grenzkosten	$K' = \frac{dK}{dx}$	$K'(x) = x$