Univ.-Prof. Dr. Michael Bitz

Investition und Finanzierung

Investition

Kurseinheit: 2
Investitionsentscheidungen bei Sicherheit

wirtschafts
wissenschaft

FernUniversität in Hagen

Kurs 40520: Investition

Kurseinheit 1:	Grundlagen der Investitionstheorie (Workload: 40 Stunden)*
Kurseinheit 2:	**Investitionsentscheidungen bei Sicherheit (Workload: 70 Stunden)***
Kurseinheit 3:	Entscheidungen unter Unsicherheit: Modelltheoretische Grundlagen (Workload: 20 Stunden)*
Kurseinheit 4:	Entscheidungen in Risikosituationen (Workload: 20 Stunden)*
Kurseinheit 5:	Entscheidungen bei Ungewissheit und spieltheoretische Ansätze (Workload: 0 Stunden)**
*:	Die zum Modul angebotene Einsendearbeit bezieht sich inhaltlich auf die Kurseinheiten 1, 2, 3 und 4.
**:	Die Kurseinheit 5 ist nicht prüfungsrelevant.

Zusätzliche Informationen im Internet

Weitere und u.U. auch aktuellere Informationen über den Lehrstuhl für Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Investitionstheorie und Unternehmensbewertung und das A-Modul (31021) „Investition und Finanzierung“ sind über das Internet unter

http://www.fernuni-hagen.de/hering

abrufbar. Dort finden Sie u.a. Informationen zum Lehrangebot, ein umfassendes Schriftenverzeichnis, alte Klausuren und Einsendearbeiten zum Herunterladen, Hinweise auf kursbezogene Betreuungen und vieles mehr. Nutzen Sie diese Angebote und Ihr Studium wird nicht nur interessanter, sondern auch in vielerlei Hinsicht inhaltsreicher und erfolgreicher!

Inhaltsverzeichnis

Lehrziele

Nach dem Durcharbeiten der **Kapitel 2 – 4** sollen Sie die investitionstheoretischen Kennzahlen Kapitalwert, Endwert, äquivalente Annuität und interner Zinsfuß

- formal und verbal definieren können,
- für konkrete Beispielfälle berechnen können,
- im Hinblick auf ihre ökonomische Aussagefähigkeit interpretieren und vergleichen können,
- erläutern können, warum nicht auf allen o.g. investitionstheoretischen Kennziffern derivative Enscheidungskriterien aufgebaut werden können, die stets zu mit der originären Zielsetzung Endvermögensmaximierung kompatiblen Entscheidungen führen, und
- außerdem erläutern und begründen können, welche der behandelten Kennzahlen für projektindividuelle Entscheidungen bzw. die Auswahl zwischen mehreren einander ausschließenden Investitionsalternativen geeignet oder ungeeignet sind.

Nach Bearbeitung der **Kapitel 5** und **6** sollen Sie erläutern und begründen können,

- warum Kapitalwert und Endwert eines Investitionsprojekts unter der Voraussetzung eines vollkommenen Finanzmarkts auch im Fall wechselnder Periodenzinsfüße zieladäquate Investitionsentscheidungen ermöglichen,
- welche Voraussetzungen im Fall eines unvollkommenen Finanzmarkts, also bei divergierenden Soll- und Habenzinssätzen, vorliegen müssen, damit mittels der investitionstheoretischen Kennzahlen Kapitalwert und Endwert zieladäquate Investitionsentscheidungen abgeleitet werden können,
- warum im Fall vollkommener (unvollkommener) Finanzmärkte die finanzielle Ausgangssituation des Entscheiders für die Projektbeurteilung irrelevant (relevant) ist, und
- für konkrete Beispielfälle Kapitalwert und Endwert eines Investitionsprojekts bei divergierenden Soll- und Habenzinsen oder bei projektbezogenen Finanzierungsmöglichkeiten berechnen und inhaltlich interpretieren können.

Schließlich sollen Sie nach Bearbeitung des **7. Kapitels** einem Dritten zumindest ansatzweise und beispielhaft verdeutlichen können, dass den behandelten investitionstheoretischen Ansätzen neben ihrer theoretischen Relevanz durchaus auch praktische Relevanz zukommt.

Hinweis: Literaturhinweise zu wichtigen im Kurstext verwendeten Begriffen finden Sie in Kurseinheit 5.

Symbolverzeichnis

a_0	Absolutbetrag der Anfangsauszahlung e_0 ($a_0 = -e_0$)
a_i	einander ausschließende Handlungs- bzw. Investitionsalternativen (Projektbündel)
ANF(T, r)	Annuitätenfaktor (Kehrwert des Rentenbarwertfaktors)
C_t	Stand eines Guthabenkontos (+) oder Kreditkontos (–) im Zeitpunkt t
c_t	Saldogröße ($c_t = e_t + f_t$)
$d_t^{i,k}$	Differenz der Zahlungen der Investitionsprojekte i und k im Zeitpunkt t
$D^{i,k}$	Differenzzahlungsreihe der Investitionsprojekte i und k
e_t^i	Zahlungssaldo des Projekts i im Zeitpunkt t
e_i^*	äquivalente Annuität der Zahlungsreihe des Investitionsprojekts a_i
EV_I	Endvermögen des Investors bei Durchführung des Investitionsprojekts (Bezugszeitpunkt: Ende der individuellen Projektlaufzeit des betrachteten Projekts)
$EV_{I,T}^j$	Endvermögen des Investors bei Durchführung des Investitionsprojekts a_j (Bezugszeitpunkt: Ein beliebiger Zeitpunkt T)
EV_U	Endvermögen des Investors bei Wahl der Unterlassensalternative
EW_i	Endwert des Investitionsprojekts a_i
f_t	aus projektbezogenen Finanzierungen resultierender Zahlungssaldo im Zeitpunkt t

GE	Geldeinheiten
K_i	Kapitalwert des Investitionsprojekts a_i
$K^{i,k}$	Kapitalwert der Differenzzahlungsreihe $D^{i,k}$
$K(r)$	Kapitalwertfunktion
$\lim\limits_{r \to \infty}$	Grenzwertbetrachtung für r gegen „Unendlich“
$\lim\limits_{T \to \infty}$	Grenzwertbetrachtung für T gegen „Unendlich“
q	$(:= 1 + r)$ Zinsfaktor
q_t	$(:= 1 + r_t)$ Zinsfaktor, der in Periode t gilt
q^t	Aufzinsungsfaktor für die Aufzinsung vom Zeitpunkt 0 auf den Zeitpunkt t
q^{-t}	Abzinsungsfaktor für die Abzinsung vom Zeitpunkt t auf den Zeitpunkt 0
$Q(t,t')$	Produkt aller Aufzinsungsfaktoren der Perioden t bis t' $\left(\prod_{\tau=t}^{t'} q_\tau\right)$
r	als Dezimalzahl geschriebener Zinssatz
r_t	als Dezimalzahl geschriebener Zinssatz, der in Periode t gilt
r_t^H, r_t^S	als Dezimalzahl geschriebener „Haben“- bzw. „Soll“-Zinssatz der Periode t
r^*	interner Zinsfuß eines Investitionsprojektes; effektive Finanzierungskosten eines Finanzierungsprojektes
$r_{1,2}^*$	interner Zinsfuß mit zwei numerischen Lösungen

r_i^*	interner Zinsfuß des Projektes i
$r_{i/j}^*$	interner Zinsfuß der Differenzzahlungsreihe der Projekte i und j
RBF(T, r)	Rentenbarwertfaktor (entspricht der Summe aller Abzinsungsfaktoren vom Zeitpunkt 1 bis zum Zeitpunkt T)
t	Index für unterschiedliche Zeitpunkte
t*	Amortisationszeitpunkt bzw. Amortisationsdauer
T	Laufzeit eines Investitionsprojekts bzw. letzter noch in die Betrachtung einbezogener Zeitpunkt
τ	Index für unterschiedliche Zeitpunkte
z_t	Zinsgutschrift (+) oder -belastung (–) auf einem Guthaben- bzw. Kreditkonto im Zeitpunkt t

Diese Seite bleibt frei!

1 Problemstellung

In der Kurseinheit 1 dieses Kurses haben wir uns zunächst mit der Frage beschäftigt, in welcher Weise man überhaupt Investitionsalternativen definiert und wie man die zu ihrer Kennzeichnung heranzuziehenden Zahlungsströme ableitet. Auf diese Überlegungen aufbauend haben wir eine Investitionsentscheidung dann formal als Wahl zwischen mehreren Zahlungsreihen definiert.

Außerdem haben wir dort bereits

Zielvorstellung

– die Maximierung des Endvermögens des Investors als Zielvorstellung unserer Entscheidungsmodelle festgelegt,[1)]

Grundtypen von Entscheidungssituationen

– „projektindividuelle Entscheidungen“ und „Auswahlentscheidungen aus mehreren Alternativen“ als zwei Grundtypen von Entscheidungssituationen herausgearbeitet[2)] und

– darauf hingewiesen, dass das „Finanzierungsumfeld“ eines Investitionsprojektes durch strengere und schwächere Finanzmarktprämissen modellmäßig abgebildet werden kann.[3)]

Notwendigkeit intertemporaler Vergleiche

Anschließend haben wir

– herausgearbeitet, dass die Ableitung einer zieladäquaten Investitionsentscheidung – außer im Falle von Dominanzbeziehungen zwischen allen zur Auswahl stehenden Investitionsprojekten – zwangsläufig mit dem Problem verknüpft ist, zu verschiedenen Zeitpunkten in unterschiedlicher Höhe anfallende Zahlungen vergleichbar zu machen,[4)]

– festgestellt, dass in Abhängigkeit von dem Finanzierungsumfeld des Unternehmens intertemporale Transformationsmöglichkeiten bestehen können, die es ermöglichen, die Zahlungsreihen der ursprünglichen Investitionsprojekte in solcher Weise mit Finanztransaktionen zu kombinieren, dass die Investitionsentscheidung letztlich auf reine Dominanzüberlegungen zurückgeführt werden kann,[5)] und

1 Vgl. Abschnitt 1.2.1 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

2 Vgl. Abschnitt 1.2.3 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

3 Vgl. Abschnitt 1.3.3 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

4 Vgl. Abschnitt 1.4 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

5 Vgl. dazu insb. Beispiel 5 (Fortsetzung III) in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

– schließlich grundlegende finanzmathematische Techniken kennengelernt, mittels derer Zahlungsgrößen, die auf unterschiedliche Zeitpunkte bezogen sind, unter Berücksichtigung von Zins- und Zinseszinseffekten vergleichbar gemacht werden können.

In dieser Kurseinheit werden Sie mit dem Endwert, dem Kapitalwert, der Annuität und dem internen Zinsfuß jetzt einige Kennzahlen kennenlernen, die in der Literatur zur Investitionstheorie im Zusammenhang mit der Ableitung von Investitionsentscheidungen diskutiert werden. Dabei werden wir in den Kapiteln 2 bis 4 durchgängig von der Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes in ihrer strengen Form ausgehen,[1] also insbesondere unterstellen, dass der Investor zu einem im Zeitablauf konstanten und für Geldanlage und Geldaufnahme identischen Zinssatz in beliebiger Höhe Kredite aufnehmen und liquide Mittel anlegen kann. Zu jeder Kennzahl werden wir dann

– zunächst die Kennziffer formal definieren und ggf. formal analysieren,

– dann die Kennziffer hinsichtlich ihres ökonomischen Gehalts untersuchen und

– anschließend, getrennt nach den beiden Grundtypen von Entscheidungssituationen, die tatsächliche Eignung der Kennziffer als Entscheidungsgrundlage untersuchen.

Ausgangspunkt für eine Beurteilung der Eignung einer investitionstheoretischen Kennziffer wird dabei jeweils die originäre Zielsetzung der Endvermögensmaximierung sein. Im Kern wird es im folgenden damit um die Frage gehen, ob auf den hier diskutierten investitionstheoretischen Kennzahlen derivative Entscheidungskriterien aufgebaut werden können, die stets zu Entscheidungen führen, die mit der originären Zielsetzung des Investors kompatibel sind. Anders ausgedrückt, geht es also um die Frage, ob auf der Grundlage der diskutierten investi-tionstheoretischen Kennzahlen Investitionsentscheidungen abgeleitet werden können, die stets dazu führen, dass der Investor genau diejenige Alternative realisiert, die zu einem maximalen Endvermögen führt.

Im Kapitel 5 wird exemplarisch für das Endwert- und das Kapitalwertkriterium gezeigt, dass die Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes in ihrer strengen Form übermäßig eng ist und es selbst bei im Zeitablauf divergierenden Soll- und Habenzinssätzen – also bei deutlich schwächeren Finanzmarktprämissen – möglich ist, investitionstheoretische Kennzahlen so zu definieren, dass die auf diesen Kennziffern aufbauenden Entscheidungskriterien zu mit der originären Zielsetzung der Endvermögensmaximierung äquivalenten Bewertungsergebnissen führen.

---

1 Zu den unterschiedenen Finanzmarktprämissen vgl. Abschnitt 1.3.3 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

In Kapitel 6 werden wir noch kurz auf Situationen eingehen, in denen die für die Investition benötigten Mittel zumindest zu einem gewissen Teil aus ganz spezifischen, eindeutig projektbezogenen Finanzierungsmaßnahmen resultieren, und beispielhaft verdeutlichen, dass auch solche Entscheidungsprobleme grundsätzlich mit Hilfe der Kapitalwertmethode gelöst werden können.

In Kapitel 7 wird – diesen Einführungskurs zum Themenbereich Investitionstheorie abschließend – der Versuch unternommen, beispielhaft zu verdeutlichen, dass den dargestellten Verfahren bzw. Methoden der Investitionsrechnung neben ihrer hohen theoretischen Relevanz auch durchaus praktische Bedeutung zukommt.

2 Endwert und Kapitalwert

2.1 Definition und formale Analyse

Endwert

Als Endwert EW eines Investitionsprojektes bezeichnet man die Summe aller mit dem Kalkulationszins r auf den Endzeitpunkt der Projektlaufzeit T **aufgezinsten** Zahlungen e_t des Projektes, also:

$$(EW_1) \quad EW = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r)^{T-t} = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{T-t} \quad .$$

Kapitalwert

Als Kapitalwert K eines Investitionsprojektes bezeichnet man die Summe aller mit dem Kalkulationszins r auf den Zeitpunkt $t = 0$ **abgezinsten** Zahlungen e_t des Projektes, also:

$$(K_1) \quad K = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r)^{-t} = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{-t} \quad .$$

Zwischen Kapitalwert und Endwert besteht damit die Beziehung:

$$(EW_2) \quad EW = K \cdot q^T \quad .$$

Beispiel 1:
Beträgt etwa die Zahlungsreihe eines Investitionsprojektes $e_0 = -100$, $e_1 = +10$, $e_2 = +10$ und $e_3 = +100$, so ergibt sich bei einem Zinssatz von 5% für den Endwert EW:

$$\begin{aligned} EW &= -100 \cdot 1{,}05^3 + 10 \cdot 1{,}05^2 + 10 \cdot 1{,}05^1 + 100 \\ &= -100 \cdot 1{,}1576 + 10 \cdot 1{,}1025 + 10 \cdot 1{,}0500 + 100 \\ &= 5{,}765 \end{aligned}$$

und für den Kapitalwert K:

$$\begin{aligned} K &= -100 + 10 \cdot 1{,}05^{-1} + 10 \cdot 1{,}05^{-2} + 100 \cdot 1{,}05^{-3} \\ &= -100 + 10 \cdot 0{,}9524 + 10 \cdot 0{,}9070 + 100 \cdot 0{,}8638 \\ &= 4{,}974 \quad . \end{aligned}$$

Für den auf das Ende der Projektlaufzeit aufgezinsten Kapitalwert gilt: 4,974 · 1,1576 = 5,758. Bis auf Rundungsdifferenzen, die daraus resultieren, dass die verwendeten Auf- und Abzinsungsfaktoren gerundete Werte sind, entspricht dies dem errechneten Endwert der Investition.

Kapitalwert und Endwert einer Rente

Handelt es sich bei der Zahlungsreihe ab $t = 1$ um eine nachschüssige Rente, gilt also $e_1 = e_2 = \ldots = e_T = e$, so ist es zur Berechnung von Kapitalwert und Endwert nicht nötig, alle e einzeln auf- bzw. abzuzinsen. In diesem Fall kann der Kapitalwert vereinfacht mit Hilfe des Rentenbarwertfaktors ermittelt werden:

$$(K_2) \qquad K = e_0 + e \cdot RBF(T, r) \ .$$

Der Endwert einer Rente kann dann vereinfacht aus den Relationen (K_2) und (EW_2) bestimmt werden.

Liegt außerdem T in einer solchen Größenordnung, dass die Zahlungsreihe approximativ als „ewige Rente“ angesehen werden kann, so vereinfacht sich (K_2) zu:

$$(K_3) \qquad K = e_0 + \frac{e}{r} \ .$$

Übungsaufgabe 1:

Gegeben seien drei Investitionsprojekte, mit denen folgende Zahlungsreihen verknüpft sind:

a_1: $e_0^1 = -400$; $e_1^1 = +400$; $e_2^1 = -300$; $e_3^1 = +400$;

a_2: $e_0^2 = -160$; $e_t^2 = +20$; für $t = 1, \ldots, 30$

a_3: $e_0^3 = -460$; $e_1^3 = +130$; $e_2^3 = +141$; $e_t^3 = +20$; für $t = 3, \ldots, 30$.

Berechnen Sie Endwert und Kapitalwert der drei Projekte für einen Zinssatz von 10% p. a.

Kapitalwert und Endwert stellen – zumindest für die Investitionstheorie – die wichtigsten Kennziffern zur komprimierten Beschreibung ganzer Zahlungsreihen dar. Ein Verständnis von Begriff, Interpretation und Eignung als Entscheidungskriterium dieser beiden Kennzahlen bildet eine unabdingbare Voraussetzung für das Verständnis von Investitionsentscheidungen mit Hilfe finanzmathematischer Kennzahlen insgesamt. Bevor wir uns der ökonomischen Interpretation dieser Kennzahlen widmen, werden wir daher zunächst die investitionstheoretische Kennziffer Kapitalwert in formaler Hinsicht analysieren.[1)]

1 Da die investitionstheoretischen Kennziffern Endwert und Kapitalwert gemäß (EW_2) eindeutig funktional verknüpft sind und damit auch immer eindeutig ineinander überführt werden können, erübrigt sich die explizite formale Analyse der Kennziffer Endwert.

Kapitalwertfunktion

Ausgangspunkt der Analyse soll dazu eine gegebene Zahlungsreihe und dementsprechend auch ein gegebenes Laufzeitende T sein. Wie aus (K_1), (K_2) und (K_3) unmittelbar erkennbar, hängt der Wert des Kapitalwertes unter diesen Bedingungen eindeutig von der Höhe des Kalkulationszinsfußes ab. Man kann auch sagen: K stellt eine Funktion von r dar, deren Koeffizienten durch die e_t gegeben sind. Die Darstellung dieses Zusammenhanges bezeichnet man mithin allgemein als **Kapitalwertfunktion:**

$$K = K(r) = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{-t} \quad .$$

Der Verlauf dieser Funktion kann grafisch durch eine entsprechende Kurve in einem r-K-Koordinatensystem veranschaulicht werden.

Beispiel 2:

Die Zahlungsreihe laute:

$$e_0 = -165; \quad e_t = 10 \quad \text{für} \quad t = 1, \ldots, 40 \quad .$$

Also gilt:

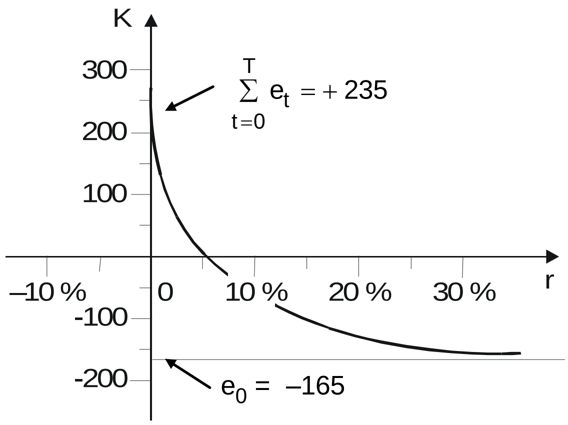
$$K = K(r) = -165 + 10 \cdot RBF(40, r) \quad .$$

Wir rechnen nun für verschiedene Werte von r (mit Hilfe von Tabelle III aus KE 1 bzw. für die dort nicht ausgewiesenen Zinssätze von 3% und 25% mittels eines Taschenrechners) jeweils K aus und stellen die entsprechenden Wertekombinationen in einer Wertetafel zusammen:

r	0%	3%	4%	5%	6%	7%	8%	10%	20%	25%
K	+ 235	+ 66		+ 7	– 15	– 32	– 46		– 115	– 125

(Füllen Sie die freigebliebenen Felder selbst aus!)

Grafisch kann der durch diese Wertetafel dargestellte Verlauf etwa so wie in nachfolgender Abbildung verdeutlicht werden.



Wie man aus Formel (K_1) erkennt, gilt für einen Kalkulationszins von 0%

$$K(r=0) \;=\; \sum_{t=0}^{T} e_t \,;$$

Nominalwert

der Ordinatenschnittpunkt der Kapitalwertfunktion ergibt sich also als einfache (d.h. nicht abgezinste) Summe aller Ein- und Auszahlungen. Man bezeichnet diesen Betrag auch als den **Nominalwert** einer Zahlungsreihe. Wird r hingegen hinlänglich groß, so gilt:

$$\lim_{r \to \infty} K(r) \;=\; e_0 \,;$$

d.h. mit wachsendem Kalkulationszins nähert sich der Kapitalwert schließlich asymptotisch dem (definitionsgemäß negativen) Wert e_0.

Relevante Zinssätze

Eine Kapitalwertfunktion kann *formal* für beliebige Werte von r definiert sein. Unter ökonomischen Aspekten – und darum geht es hier ja – interessiert uns in erster Linie jedoch nur der Bereich *positiver* Zinssätze. Darüber hinaus kann es im Hinblick auf verschiedene Fragestellungen, auf die wir in diesem einführenden Kurs nicht weiter eingehen können, von Interesse sein, den Verlauf der Kapitalwertfunktion auch im Bereich negativer Zinssätze zu untersuchen. Dabei kann man sich jedoch grundsätzlich auf den Bereich von Zinssätzen über –100% beschränken, also $r > -1$ verlangen. Ökonomisch interpretiert bedeutete ein Zinssatz von –100%, dass man

– ein Darlehen weder verzinsen noch tilgen müsste (den betrachteten Betrag also praktisch geschenkt erhielte) oder

– aus einem Investitionsprojekt keinerlei Rückzahlung erhielte, der eingesetzte Betrag also zu 100% verloren wäre.

Da derartige Extremfälle in der ökonomischen Realität nicht die Regel sind, ist es für die im folgenden zu behandelnden Probleme sinnvoll, die Betrachtung von vornherein auf den Bereich $r > -1$ zu beschränken. Darüber hinaus werden wir uns im folgenden vorrangig nur auf den Wertebereich positiver Zinssätze beschränken.

monoton fallende Kapitalwertfunktion

In Beispiel 2 verlief $K(r)$ im relevanten Bereich ($r > -1$) **streng monoton fallend;** d.h., je größer r wurde, desto kleiner wurde K. Ein solcher Verlauf der Kapitalwertfunktion ist jedoch keineswegs zwingend, wie folgendes Beispiel zeigt:

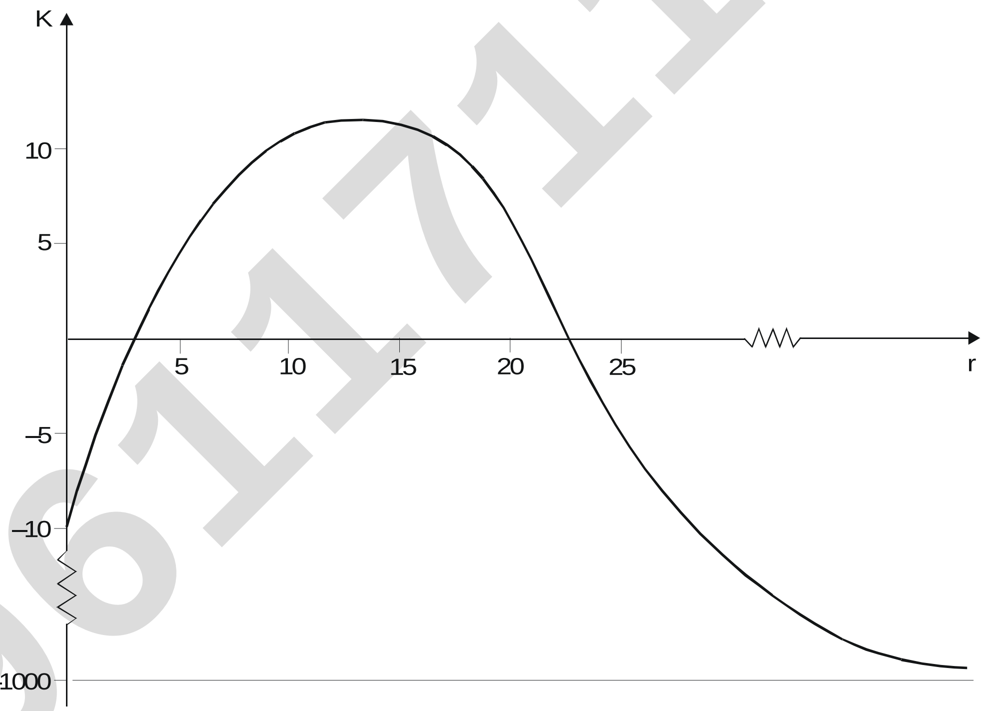
Beispiel 3:

Gegeben sei die Zahlungsreihe

$$e_0 = -1.000\,; \quad e_1 = 1.600\,; \quad e_2 = 200\,; \quad e_3 = -810\,.$$

Für diese Zahlungsreihe ergibt sich folgende Wertetabelle, woraus in Umrissen der in nachfolgender Abbildung dargestellte Verlauf abgeleitet werden kann.

r	0%	2%	4%	8%	12%	16%	20%	24%
K = K(r)	–10	–2,42	+3,23	+9,92	+11,52	+9,01	+3,41	–4,44



In Beispiel 3 verläuft die Kapitalwertfunktion also bis zu einem Zinssatz von ca. 11,5% **steigend** und geht erst dann in einen **fallenden** Verlauf über, wobei sich K(r) für $r \to \infty$ wiederum asymptotisch dem Wert der Anfangsauszahlung $e_0 = -1.000$ nähert. Auf die **ökonomische Interpretation** solcher Verlaufsformen sowie die daraus resultierenden Probleme werden wir in Kapitel 4 bei der formalen und inhaltlichen Auseinandersetzung mit der Kennzahl interner Zinsfuß noch näher eingehen.

An dieser Stelle ist zunächst nur die Erkenntnis festzuhalten, dass je nach Struktur der Zahlungsreihe die Kapitalwertfunktion einen so unterschiedlichen Verlauf annehmen kann, dass allgemeingültige Charakterisierungen der Kapitalwertfunk-tion kaum möglich sind. Häufig dürften die Zahlungsreihen von Investitionsprojekten allerdings dadurch gekennzeichnet sein, dass auf genau eine Anfangsauszahlung ($e_0 < 0$) nur noch Einzahlungsüberschüsse ($e_t \geq 0$; t = 1, 2, …, T) folgen. Für derartige Investitionen lässt sich dann aber tatsächlich eine recht weitreichende Charakterisierung der Kapitalwertfunktion geben. Dann gilt der Satz:

Für Investitionen, bei denen auf *eine* Anfangsauszahlung nur noch Einzahlungsüberschüsse folgen, ist der Kapitalwert im Bereich $r > -1$ eine stetige, streng monoton fallende Funktion des Kalkulationszinsfußes.[1)] Eine solche Funktion hat also stets den in Beispiel 2 charakterisierten Verlauf. Diese Aussage ist für den Fall etwas zu modifizieren, wenn das Investitionsprojekt in der Anfangsphase über *mehrere* Zeitpunkte zunächst nur Auszahlungen aufweist und danach nur noch Einzahlungen folgen. Allgemein werden Investitionen, deren Zahlungsreihen einen *einmaligen* Vorzeichenwechsel von – nach + aufweisen, als **Normalinvestitionen** bezeichnet.

Kapitalwertfunktion einer Normalinvestition

Für derartige Investitionen weist die Kapitalwertfunktion folgende Merkmale auf:

– Im Bereich *positiver* Kapitalwerte verläuft die Funktion streng monoton fallend.

– Nach Übergang in den Bereich *negativer* Kapitalwerte verläuft die Funktion zunächst weiter monoton fallend.

– Je nach der näheren Struktur der Zahlungsreihe kann die Funktion auch weiter unbegrenzt monoton fallend verlaufen. Ebenso gut ist es aber auch möglich, dass die Funktion wieder in einen steigenden Verlauf übergeht. Für $r \rightarrow \infty$ nähert sich K auf jeden Fall dem Wert der Anfangsauszahlung e_0 an.

1 Zum Nachweis vgl. HAX (1998), S. 17 [vgl. Literaturverzeichnis in KE 5]. Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass als hinreichende Bedingung für die Gültigkeit dieses Satzes vorausgesetzt wird, dass nur **genau eine** Anfangsauszahlung geleistet wird. Nur dann besteht die 1. Ableitung der Kapitalwertfunktion nur noch aus negativen Summanden. Das Vorliegen einer sogenannten **Normalinvestition** reicht demgegenüber als hinreichende Bedingung für den in Beispiel 2 charakterisierten Verlauf nicht aus.

2.2 Ökonomische Interpretation

Beziehung zwischen Endwert, Kapitalwert und Endvermögen

Zur Berechnung des Endwertes werden alle Zahlungen durch Aufzinsung wertmäßig auf den zukünftigen Zeitpunkt $t = T$ bezogen und somit vergleichbar gemacht. Zur Berechnung des Kapitalwertes werden alle zukünftigen Zahlungen durch Abzinsung wertmäßig auf den Planungszeitpunkt $t = 0$ bezogen und dadurch ebenfalls vergleichbar gemacht. Insoweit stellen Endwert und Kapitalwert Größen dar, die zu verschiedenen Zeitpunkten anfallende Zahlungen auf einen gegebenen Zeitpunkt beziehen und so rein rechnerisch vergleichbar machen. Wir wollen nun der bisher offenen Frage nachgehen, welchen ökonomischen Gehalt diese Größen haben und in welcher Relation sie zu unserer angenommenen Zielgröße Endvermögen stehen.

a) Interpretation des Endwertes

Um den Aussagegehalt dieser Kennzahl beispielhaft zu verdeutlichen, sei eine Investition mit einer Anfangsauszahlung a_0 ($a_0 = -e_0$) und darauf folgenden positiven (bzw. präziser „nicht negativen") Einzahlungsüberschüssen ($e_t \geq 0$, $t = 1, 2, \ldots, T$) betrachtet und zunächst unterstellt, die benötigte Investitionssumme a_0 stünde in Form eigener, alternativ zum Kalkulationszinsfuß anlegbarer Mittel zur Verfügung. Für das bei Investitionsverzicht (= Unterlassensalternative) im Zeitpunkt T erzielbare Vermögen EV_U gilt dann im hier betrachteten **Fall 1:**[1]

Fall 1: Finanzierung aus vorhandenen Mitteln

$$EV_U = a_0 \cdot q^T .$$

Würden im Fall der Investitionsdurchführung die aus dem Investitionsprojekt resultierenden Einzahlungsüberschüsse hingegen jeweils bis zum Endzeitpunkt verzinslich angelegt, so gilt für das durch die Investition erzielbare Endvermögen im Fall 1:

$$EV_I = \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t} .$$

1 Das Endvermögen bei Wahl der Unterlassensalternative ergibt sich im hier betrachteten Fall aus der verzinslichen Anlage eines Betrages in Höhe von a_0 bis zum Zeitpunkt $t = T$; vgl. dazu Abschnitt 1.3.3 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

Unterstellt man nun andererseits, die Investition werde vollständig durch die Aufnahme eines Kredites finanziert, so gilt für das Endvermögen der Unterlassensalternative in diesem **Fall 2:**[1)]

Fall 2: Kreditfinanzierung

$$EV_U = 0 .$$

Würde das Projekt hingegen durchgeführt und könnten Gelder zum Kalkulationszins aufgenommen und angelegt werden, so betrüge das nach Tilgung und Verzinsung des aufgenommenen Kredites verbleibende Endvermögen im Fall 2:

$$EV_I = \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t} - a_0 \cdot q^T .$$

Vergleicht man nun die für EV_U und EV_I abgeleiteten Relationen, so erkennt man, dass – unabhängig von der unterstellten Art der Finanzierung – stets gilt:[2)]

$$(EW_3) \quad EW = EV_I - EV_U .$$

Der Endwert eines Investitionsprojektes gibt also an, um welchen Betrag das Vermögen des Investors nach vollständiger Abwicklung des Projektes höher ($EW > 0$) oder niedriger ($EW < 0$) ist als bei Realisierung der Unterlassensalternative.

Interpretation des Endwertes

Dabei gilt diese Aussage in verallgemeinerter Form auch für beliebige Strukturen der Zahlungsreihe, beliebige Finanzierungskombinationen und selbst bei wechselnden Periodenzinsfüßen, sofern nur die Voraussetzung erfüllt ist, dass die für die einzelnen Perioden maßgeblichen Soll- oder Habenzinsfüße bestimmt werden können.[3)]

Verallgemeinerung der Interpretation

1 Das Endvermögen bei Wahl der Unterlassensalternative ergibt sich in diesem Fall aus dem schlichten „Nichtstun“ und beträgt folglich null; vgl. dazu Abschnitt 1.3.3 in Kurseinheit 1 dieses Kurses.

2 Im Fall 1 gilt:

$$\begin{aligned} EV_I - EV_U &= \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t} - a_0 \cdot q^T \\ &= \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t} + e_0 \cdot q^T \\ &= \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{T-t} = EW . \end{aligned}$$

Im Fall 2 gilt:

$$\begin{aligned} EV_I - EV_U &= \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t} - a_0 \cdot q^T - 0 \\ &= \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot q^{T-t} + e_0 \cdot q^T \\ &= \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{T-t} = EW . \end{aligned}$$

3 In Kapitel 5 werden wir auf diese Verallgemeinerungsmöglichkeit der Interpretation des Endwertes für den Fall wechselnder Periodenzinsfüße noch ausführlich eingehen.

Zu beachten ist, dass im Falle der ausschließlichen Fremdfinanzierung eines Investitionsprojektes der Wert des Endvermögens am Ende der Projektlaufzeit und der Wert der investitionstheoretischen Kennzahl Endwert betraglich zusammenfallen, während im Falle der partiellen oder vollständigen Finanzierung aus liquiden Mitteln Endvermögen des Investors und Endwert des Investitionsprojektes nicht übereinstimmen.

Die zuvor angestellten Überlegungen zur ökonomischen Interpretation der Kennziffer Endwert und zum Zusammenhang zwischen der Kennziffer Endwert und der Zielgröße Endvermögen verdeutlicht zusammenfassend das nachfolgende Beispiel.

Beispiel 4:

Fall 1:

Es sei von folgender Zahlungsreihe ausgegangen: $e_0 = -100$; $e_1 = +10$; $e_2 = +10$ und $e_3 = +100$. Die benötigte Investitionssumme von 100 stehe wie im eingangs betrachteten Fall 1 in Form liquider Mittel zur Verfügung. Liquide Mittel können alternativ zu 5% angelegt werden. In diesem Beispiel beträgt das Vermögen in $t = T = 3$ bei Unterlassen der Investition:

$$EV_U = 100 \cdot 1{,}05^3 = 115{,}7625 \; .$$

Bei Durchführung der Investition beträgt das Vermögen in $t = T$:

$$EV_I = 10 \cdot 1{,}05^2 + 10 \cdot 1{,}05 + 100 = 121{,}525 \; .$$

Die Vermögensentwicklung bei Ergreifen der Unterlassensalternative und bei Durchführung des Investitionsprojektes kann jeweils durch einen Tilgungs- und Anlageplan (TAP) verdeutlicht werden. Dazu stellen wir uns vor, der gesamte Zahlungsverkehr würde über ein laufendes Konto abgerechnet:

TAP bei Unterlassen im Fall 1

t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	0	0	0	+100
1	0	5	5	+105
2	0	5,25	5,25	+110,25
3	0	5,5125	5,5125	$+115{,}7625 = EV_U$

Erläuterung: $C_t \equiv$ Kontostand im Zeitpunkt t, wobei $C_t > 0$ ein Guthaben und $C_t < 0$ einen Schuldbestand angibt; in $t = -1$ beträgt $C_{-1} = 0$; in $t = 0$ werden die liquiden Mittel von 100 auf das Konto eingezahlt: $C_0 = +100$; $z_t \equiv$ im Zeitpunkt t auf den Kontostand zu Periodenbeginn (d.h. im Zeitpunkt $t-1$) berechneter Zinsbetrag; $e_t \equiv$ Einzahlung ($e_t > 0$) oder Auszahlung ($e_t < 0$) aus dem Investitionsprojekt (bei Unterlassen gilt $e_t = 0$ für alle

$t = 0, \ldots, T$); $(e_t + z_t) \equiv$ Veränderung des Kontostandes durch die Summe von Zinsen und Zahlungen des Investitionsprojektes.

TAP bei Investitionsdurchführung im Fall 1				
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	–100	0	–100	0 (= +100 – 100)
1	10	0	10	+10
2	10	0,50	10,5	+20,5
3	100	1,025	101,025	$+121{,}525 = EV_I$

Erläuterung: Bedeutung der Symbole wie in vorstehender Tabelle; in $t = 0$ werden auf das Konto liquide Mittel von 100 eingezahlt und für den Start des Investitionsprojektes sofort wieder ausgezahlt ($C_0 = +100 - 100$).

Die aus der Investitionsdurchführung resultierende Endvermögensdifferenz beträgt mithin:

$$EV_I - EV_U = 121{,}525 - 115{,}7625 = 5{,}7625 \ .$$

Der Endwert des Investitionsprojektes (EW) beträgt:

$$EW = -100 \cdot 1{,}05^3 + 10 \cdot 1{,}05^2 + 10 \cdot 1{,}05 + 100 = 5{,}7625 \ .$$

Der Endwert entspricht damit im hier betrachteten Fall der Finanzierung aus vorhandenen liquiden Mitteln exakt der Endvermögensdifferenz. Der Endwert entspricht jedoch nicht dem bei Investitionsdurchführung erzielbaren Endvermögen des Investors.

Fall 2:

Stehen zur Durchführung der Investition keinerlei liquide Mittel zur Verfügung und müsste ein Kredit über die gesamte Investitionssumme zu 5% p. a. aufgenommen werden, so beträgt das Vermögen in $t = T$ bei Unterlassen der Investition:

$$EV_U = 0 \ .$$

Bei Durchführung der Investition beträgt das Vermögen in $t = T$

$$EV_I = -100 \cdot 1{,}05^3 + 10 \cdot 1{,}05^2 + 10 \cdot 1{,}05 + 100 = 5{,}7625 \ .$$

Auch bei Fremdfinanzierung kann die Vermögensentwicklung bei Projektdurchführung durch einen vollständigen TAP dargestellt werden:

TAP bei Investitionsdurchführung im Fall 2				
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	–100	0	–100	–100
1	10	–5	5	–95
2	10	–4,75	5,25	–89,75
3	100	–4,4875	95,5125	$5{,}7625 = EV_I$

Erläuterung: Bedeutung der Symbole wie in vorstehenden Tabellen; in $t = 0$ werden auf das Konto keine Einzahlungen geleistet, für den Kauf des Investitionsprojektes werden aber Mittel in Höhe von 100 ausgezahlt.

Die aus der Investitionsdurchführung resultierende Endvermögensdifferenz beträgt mithin:

$$EV_I - EV_U = 5{,}7625 - 0 = 5{,}7625 \;.$$

Der Endwert entspricht damit auch bei vollständiger Fremdfinanzierung der Endvermögensdifferenz. Nur in diesem Fall entspricht der Endwert zugleich auch dem bei Investitionsdurchführung erzielbaren Endvermögen des Investors.

Interpretation des Endwertes

Unabhängig von der Art der Finanzierung kann der Endwert eines Investitionsprojektes damit interpretiert werden als

– der Betrag, um den das Vermögen des Investors nach vollständiger Abwicklung des Projektes höher ($EW > 0$) oder niedriger ($EW < 0$) ist als bei Realisierung der Unterlassensalternative, oder als

– der Betrag, der dem Investor zum Projektende mindestens geboten werden müsste ($EW < 0$), um ihn zur Projektdurchführung im Vergleich zur Unterlassensalternative zu bewegen, oder als

– der Betrag, der vom Investor zum Projektende mindestens verlangt werden müsste ($EW > 0$), um ihn zum Unterlassen der Investition zu bewegen.

Übungsaufgabe 2:

Gehen Sie von einem Investitionsprojekt mit der Zahlungsreihe $e_0 = -100$, $e_1 = +60$, $e_2 = +60$ aus. Geldmittel können zu 10% angelegt bzw. aufgenommen werden.

a) Die benötigte Investitionssumme muss vollständig kreditfinanziert werden. Zeigen Sie in einem vollständigen Tilgungs- und Anlageplan die Vermögensentwicklung für den Fall der Investitionsdurchführung!

b) In $t = 0$ stehen liquide Mittel in Höhe von 80 ohnehin zur Verfügung. Zeigen Sie in einem vollständigen Tilgungs- und Anlageplan die Vermögensentwicklung für den Fall der Investitionsdurchführung und für den Fall des Unterlassens!

c) Wie verhalten sich die aus a) und b) ermittelten Endwerte zueinander?

d) Um wie viel dürfte die für $t = 2$ bei Investitionsdurchführung ursprünglich erwartete Zahlung von 60 höchstens niedriger ausfallen, ohne dass der Investor deshalb auf die Durchführung des Investitionsprojektes verzichtet?

b) Interpretation des Kapitalwertes

Gemäß Relation (EW_2) stellt der Kapitalwert den über die Projektlaufzeit abgezinsten Endwert dar bzw. der Endwert den über die Projektlaufzeit aufgezinsten Kapitalwert. Gemäß Relation (EW_3) entspricht der Endwert der Differenz zwischen EV_I und EV_U. Substituiert man nun in (EW_2) EW durch $EV_I - EV_U$ gemäß (EW_3), so ergibt sich:

$$(K_4) \qquad K = (EV_I - EV_U) \cdot (1+r)^{-T} \quad .$$

Interpretation des Kapitalwertes

Unabhängig von der Art der Finanzierung kann der Kapitalwert eines Investitionsprojektes damit analog zur ökonomischen Interpretation des Endwertes wie folgt interpretiert werden:

– Der Kapitalwert gibt die Vermögenserhöhung ($K > 0$) bzw. die Vermögensminderung ($K < 0$) an, die der Investor im Planungszeitpunkt durch den Übergang von der Unterlassensalternative zu dem betrachteten Investitionsprojekt erfährt.

– Ein *positiver* Kapitalwert gibt den Betrag an, der dem Investor im Zeitpunkt 0 mindestens geboten werden müsste, um ihn zu bewegen, statt des Investitionsprojektes die Unterlassensalternative zu realisieren.

– Ein *negativer* Kapitalwert kennzeichnet dementsprechend den Betrag, der dem Investor im Zeitpunkt 0 (absolut) mindestens geboten werden müsste, um ihn zur Durchführung des Projektes zu bewegen.

Außerdem gibt der Kapitalwert (im Sinne eines kritischen Wertes) den Betrag an, um den die anfängliche Investitionsauszahlung gesteigert werden dürfte ($K > 0$) bzw. vermindert werden müsste ($K < 0$), damit sich der Investor bei Durchführung der Investition vermögensmäßig gerade so gut stellt wie bei Wahl der Unterlassensalternative.

Beispiel 5:

In Beispiel 1 ergab sich bei der Zahlungsreihe eines Investitionsprojektes von $e_0 = -100$, $e_1 = +10$; $e_2 = +10$ und $e_3 = +100$ für einen Zinssatz von 5% p. a. für den Kapitalwert ein Wert von 4,974. Dieser Wert wurde auf der Grundlage der in Tabelle II der KE 1 zusammengestellten Abzinsungsfaktoren, die auf die vierte Stelle nach dem Komma gerundet sind, berechnet. Berechnet man den Kapitalwert für das betrachtete Investitionsprojekt gemäß (K_1) mit dem Taschenrechner (dieser rundet die Abzinsungsfaktoren i.d.R. erst nach der zehnten Nachkommastelle), so ergibt sich für den Kapitalwert des betrachteten Investitionsprojekts ein

etwas genauerer Wert von 4,9779. Von diesem – etwas genaueren – Wert wird nachfolgend ausgegangen.

Der Kapitalwert entspricht dem auf den Zeitpunkt des Projektbeginns bezogenen Wert der Vermögensdifferenz, die bei Projektende aus der Projektrealisierung im Vergleich zur Unterlassensalternative resultiert. Aus dieser Interpretation lässt sich folgender Schluss ziehen: Läge die Anfangsauszahlung des Projektes gerade um die Höhe des Kapitalwertes über der ursprünglich erwarteten Auszahlung von $e_0 = -100$, würde also $e_0 = -104{,}9779$ gelten, so dürfte die Investitionsdurchführung zu keinem anderen Endvermögen als die Unterlassensalternative führen. Bei Gültigkeit dieser modifizierten Zahlungsreihe würde etwa bei Kreditfinanzierung folgender TAP gelten:

t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	–104,9779	0	–104,9779	–104,9779
1	10	–5,2489	+4,7511	–100,2268
2	10	–5,0113	+4,9887	–95,2381
3	100	–4,7619	+95,2381	0

Erläuterung: Bedeutung der Symbole wie in Beispiel 4.

Eine Überprüfung für den Fall der Investitionsdurchführung aus liquiden Mitteln liefert ein identisches Ergebnis.

Übungsaufgabe 3:

Gehen Sie von der Situation der Übungsaufgabe 2b) aus:

- Zahlungsreihe $e_0 = -100$; $e_1 = +60$, $e_2 = +60$,
- Kalkulationszins $r = 10\%$,
- liquide Mittel in Höhe von 80 sind in $t = 0$ vorhanden.

Welchen Betrag müssten Sie dem Investor in $t = 0$ mindestens bieten, wenn Sie ihn zum Verzicht auf die Durchführung des Investitionsprojektes bewegen wollten?

Zeigen Sie für den errechneten Betrag anhand eines Tilgungs- und Anlageplans, dass die Unterlassensalternative für den Investor bei Erhalt dieses Abstandsbetrages tatsächlich ein genauso hohes Vermögen in $t = 2$ wie die Investitionsdurchführung liefert.

2.3 Entscheidungsregeln

Wie Sie bereits wissen, geht es bei sogenannten projektindividuellen Entscheidungen nur um die Entscheidung darüber, ob ein bestimmtes Investitionsprojekt oder an seiner Stelle die Unterlassensalternative durchgeführt werden soll. Im Abschnitt 2.2 haben wir bereits gesehen, dass zwischen dem Endwert bzw. Kapitalwert eines Investitionsprojekts und den bei Durchführung dieses Projekts bzw. bei Durchführung der Unterlassensalternative erzielbaren Endvermögensbeträgen die Relationen

$$(EW_3) \quad EW = EV_I - EV_U \quad \text{bzw.}$$

$$(K_4) \quad K = (EV_I - EV_U) \cdot (1+r)^{-T}$$

bestehen.

Endvermögensmaximierung

Wir wollen unsere Zielprämisse der Endvermögensmaximierung nun dahingehend präzisieren, dass die Durchführung der Investition bei projektindividueller Betrachtung immer genau dann als vorteilhaft angesehen wird, wenn folgende Vorteilhaftigkeitsbedingung

$$(V_1) \quad EV_I > EV_U$$

gilt.[1] Da wir für den Kalkulationszins grundsätzlich $r > -1$ verlangen, ist die Vorteilhaftigkeitsbedingung (V_1) gem. (EW_3) bzw. (K_4) genau dann erfüllt, wenn

1 Stimmen das Endvermögen bei Investition und Unterlassensalternative überein ($EV_I = EV_U$), so erlaubt das Prinzip der Endvermögensmaximierung zunächst keine Entscheidung, da beide Alternativen als äquivalent erscheinen. Im Folgenden wollen wir jedoch unterstellen, dass in diesem Fall die Unterlassensalternative realisiert werden soll.

$(V_2) \qquad EW > 0 \qquad$ bzw.

$(V_3) \qquad K > 0$

gilt.

Dabei sind diese beiden Bedingungen absolut äquivalent, wie aus Relation (EW_2) hervorgeht. Es macht also keinen Unterschied, ob man sich bei projektindividuellen Entscheidungen am Kapitalwert oder am Endwert orientiert.

Entscheidungsregeln bei projektindividuellen Entscheidungen

Bei projektindividuellen Entscheidungen sind die drei Kriterien,

– nur Projekte durchzuführen, die ein höheres Endvermögen als die Unterlassensalternative liefern,
– nur Projekte mit positivem Endwert durchzuführen und
– nur Projekte mit positivem Kapitalwert durchzuführen,

also äquivalente Entscheidungskriterien.

Diese Äquivalenz ist demgegenüber bei **Auswahlentscheidungen** nicht immer zwangsläufig gegeben.

Will man nämlich Investitionsentscheidungen zwischen mehreren zur Auswahl stehenden Projekten treffen, so sind die für unterschiedliche Projekte ermittelten Kennziffern Endwert und Kapitalwert, die ja nichts anderes darstellen als die Summe aller jeweils auf einen bestimmten Zeitpunkt bezogenen Projektzahlungen, nur dann untereinander sinnvoll vergleichbar, wenn sie sich auf *denselben* Zeitpunkt beziehen.

Dies ist bei dem Kapitalwert definitionsgemäß der Fall. Zur Berechnung des Kapitalwertes werden gem. (K_1) ja alle mit dem jeweils betrachteten Projekt verbundenen Zahlungen durch Abzinsung wertmäßig auf den Zeitpunkt $t = 0$ bezogen. Haben die zur Auswahl stehenden Projekte aber *unterschiedliche* Laufzeiten, so beziehen sich die gem. (EW_1) bzw. (EW_2) berechneten Endwerte auf unterschiedliche Zeitpunkte in der Zukunft und sind damit nicht mehr unmittelbar vergleichbar.

Investitionsentscheidungen zwischen mehreren zur Auswahl stehenden Investitionsprojekten auf Basis des Kapitalwertes lassen sich damit auf einem vollkommenen Finanzmarkt ohne weitere Annahmen als Entscheidungen auf Basis spezieller Dominanzüberlegungen interpretieren, während diese Interpretation für die Kennziffer Endwert uneingeschränkt nur unter der zusätzlichen Annahme gilt, dass alle zur Auswahl stehenden Projekte die gleiche Laufzeit aufweisen.

Beispiel 6:

Neben der Investition a_1 mit der Zahlungsreihe (–80; +10; +100) steht eine Investition a_2 mit der Zahlungsreihe (–80; +10; +90; +10) zur Auswahl. Investition a_2 unterscheidet sich von a_1 nur dadurch, dass die letzten 10 Geldeinheiten (GE) eine Periode später fällig werden, nämlich in $t = 3$ und nicht schon in $t = 2$. Für jeden positiven Zins ist somit Projekt a_1 zwangsläufig Projekt a_2 vorzuziehen.

Berechnet man jedoch die Endwerte der beiden Projekte, z.B. auf Basis eines Zinssatzes von 10% p. a., so ergibt sich mit

$$\begin{aligned} EW_1 &= -80 \cdot 1{,}1^2 + 10 \cdot 1{,}1 + 100 \\ &= 14{,}2\,[GE] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EW_2 &= -80 \cdot 1{,}1^3 + 10 \cdot 1{,}1^2 + 90 \cdot 1{,}1 + 10 \\ &= 14{,}62\,[GE] \end{aligned}$$

für Investition a_2 der höhere Endwert. Eine unmittelbare Orientierung an den Endwerten führt also im konkreten Beispielfall zu einer Fehlentscheidung, da die Endwerte gem. (EW_1) bezogen auf divergierende projektindividuelle Laufzeiten berechnet werden.

Für die Kapitalwerte hingegen errechnet sich mit

$$\begin{aligned} K_1 &= -80 + 10 \cdot 1{,}1^{-1} + 100 \cdot 1{,}1^{-2} \\ &= 11{,}74\,[GE] \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= -80 + 10 \cdot 1{,}1^{-1} + 90 \cdot 1{,}1^{-2} + 10 \cdot 1{,}1^{-3} \\ &= 10{,}98\,[GE] \end{aligned}$$

das mit der Zielsetzung der Endvermögensmaximierung kompatible Ergebnis, nämlich dass das Projekt a_1 vorzuziehen ist.

Von zwei Alternativen a_j und a_k – mit den projektindividuellen Laufzeiten T_j und T_k – ist a_j genau dann vorzuziehen, wenn bezogen auf einen einheitlichen Bewertungszeitpunkt T

$$(V_4) \qquad EV^j_{I,T} > EV^k_{I,T}$$

gilt. Wählt man als einen möglichen Bewertungszeitpunkt T den Zeitpunkt $T = 0$, so ist (V_4) genau dann erfüllt, wenn

$$(V_5) \qquad \left(EV^j_I - EV^j_U\right) \cdot q^{-T_j} > \left(EV^k_I - EV^k_U\right) \cdot q^{-T_k}$$

ist. Gemäß (K_4) enthält diese Ungleichung jedoch die Kapitalwerte K_j und K_k, so dass die Bedingung (V_5) äquivalent durch

$$(V_6) \qquad K_j > K_k$$

Äquivalenz von Endvermögens- und Kapitalwertmaximierung

ersetzt werden kann. D.h., von zwei Investitionsalternativen führt diejenige mit dem höheren Kapitalwert für jeden vorgegebenen zukünftigen Zeitpunkt zwangsläufig zu dem höheren Endvermögen und umgekehrt. Mithin kann die Zielsetzung Endvermögensmaximierung äquivalent durch die Zielsetzung der Kapitalwertmaximierung ersetzt werden.

Keine Äquivalenz von Endvermögens- und Endwertmaximierung

Explizit sei nochmals darauf hingewiesen, dass die Alternative mit dem höheren *projektindividuellen* Endwert nicht zwangsläufig auch zum – auf einen einheitlichen Bewertungszeitpunkt bezogenen – höheren Endvermögen führt. Gilt in (V_5) $T_j > T_k$, so kann (wie Beispiel 6 verdeutlicht) aus $EW_j > EW_k$ nicht zwingend geschlossen werden, dass die Wahl von Alternative j auch zum höheren Endvermögen führt als die Wahl von Alternative k. Mithin kann die Zielsetzung Endvermögensmaximierung nicht mehr uneingeschränkt äquivalent durch die Zielsetzung der Endwertmaximierung ersetzt werden.

Stehen neben der Unterlassensalternative mehrere einander ausschließende Alternativen zur Auswahl, so empfiehlt es sich daher, bei Anwendung der Endwertmethode zwei Fälle zu unterscheiden:

1. Fall: Alle Projekte haben die gleiche Laufzeit

In diesem Fall können die (projektindividuellen) Endwerte EW_i (i = 1, 2, …) der zur Auswahl stehenden Alternativen durch Multiplikation des entsprechenden Kapitalwertes K_i mit dem für alle Alternativen gleichen positiven Aufzinsungsfaktor q^T ermittelt werden. Mithin weist die Alternative mit dem höchsten Kapitalwert zwingend auch den höchsten Endwert auf und führt somit auch zum höchsten Endvermögen. Die Zielsetzung der Endvermögensmaximierung kann im Fall identischer Projektlaufzeiten also äquivalent durch die Zielsetzung der Endwertmaximierung ersetzt werden.

2. Fall: Die projektindividuellen Laufzeiten sind unterschiedlich

Probleme der Endwertmethode

Sind die Projektlaufzeiten hingegen unterschiedlich, so ist diese Übereinstimmung nicht mehr generell gesichert; denn ein Vergleich von Vermögensdifferenzen ($EW = EV_I - EV_U$), wie sie die Endwerte ja verdeutlichen, erlaubt im Allgemeinen nur dann sinnvolle Schlussfolgerungen, wenn sich diese Vermögensdifferenzen auf denselben Zeitpunkt beziehen.

Die bei Anwendung der Endwertmethode im Fall unterschiedlicher Projektlaufzeiten auftretenden Probleme können jedoch einfach dadurch vermieden werden, dass man die Endwerte der zur Auswahl stehenden Projekte in gleicher Weise auf einen einheitlichen Zeitpunkt (z.B. das Laufzeitende des Projekts mit der längsten individuellen Laufzeit) bezieht. Unter dieser Voraussetzung führen Kapitalwertkriterium und Endwertkriterium auch bei Auswahlentscheidungen zwingend zu übereinstimmenden Ergebnissen. Dies ist auch keineswegs überraschend. Unter der Voraussetzung gleicher Projektlaufzeiten bzw. der Berechnung der Endwerte auf einen einheitlichen Bezugszeitpunkt lassen sich Investitionsentscheidungen auf Basis der Kennziffer Endwert ja wiederum als Entscheidungen auf Basis spezieller Dominanzüberlegungen interpretieren. Alternative j dominiert Alternative k ja genau dann, wenn sie in keinem Zeitpunkt zu einer niedrigeren (zusätzlichen) Entnahmemöglichkeit und in mindestens einem Zeitpunkt (hier: der einheitliche Betrachtungszeitpunkt) zu einer höheren (zusätzlichen) Entnahmemöglichkeit für den Investor führt als Alternative k. Zusammenfassend können wir also festhalten:

Zusammenfassung

Sowohl für den Fall der projektindividuellen Entscheidung als auch für den Fall der Auswahl aus mehreren einander ausschließenden Investitionsalternativen ist es zu der primären Zielsetzung der Endvermögensmaximierung absolut konform, wenn stets die Alternative realisiert wird, für die sich der größte Kapitalwert ergibt.

Bei der Auswahl der besten Investitionsalternative ist im allgemeinen also in zwei Schritten zu verfahren:

1. Es wird diejenige Investitionsalternative ermittelt, für die sich der maximale Kapitalwert ergibt.

2. Ist der so ermittelte maximale Kapitalwert größer als 0, so ist die beste Investitionsalternative auch der Unterlassensalternative vorzuziehen, sollte also realisiert werden. Ist der maximale Kapitalwert hingegen nicht größer als 0, so ist die Unterlassensalternative der besten der explizit erfassten Investitionsalternativen vorzuziehen.

Dabei gilt diese „Verfahrensweise“ unabhängig von der Art, in der die Investitionsalternativen ggf. finanziert würden; allein ausschlaggebend ist vielmehr nur der anzusetzende Kalkulationszins. Selbst unter der Voraussetzung eines für alle betrachteten Alternativen jeweils in identischer Höhe anzusetzenden Kalkulationszinsfußes[1] ist es jedoch durchaus möglich, dass sich bei der Auswahl zwischen mehreren Investitionsalternativen je nach der Höhe des Kalkulationszinsfußes eine unterschiedliche Rangfolge in der Vorteilhaftigkeit ergibt.

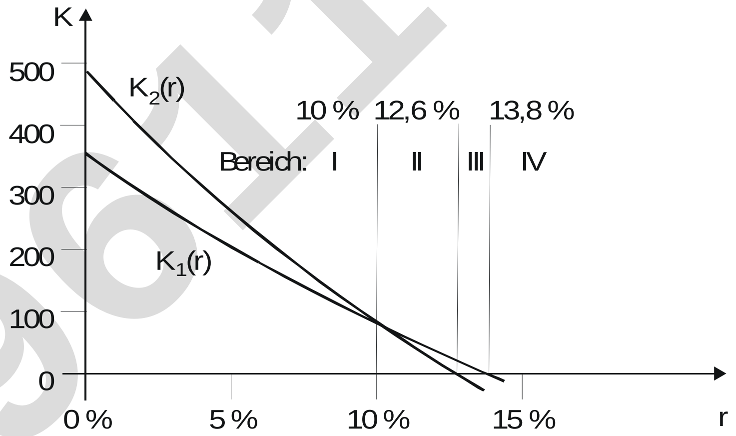
Beispiel 7:

Betrachtet seien zwei Investitionsprojekte a_1 und a_2, deren Zahlungskonsequenzen in folgender Tabelle zusammengestellt sind.

	e_0	e_1	e_2
a_1	**–1.650**	**+1.000**	**+1.000**
a_2	**–1.850**	**+ 110**	**+2.221**

Einfluss des Kalkulationszinsfußes

Die Abhängigkeit des Kapitalwertes dieser beiden Investitionen von der Höhe des Kalkulationszinsfußes kann nun bekanntlich durch eine grafische Darstellung der Kapitalwertfunktionen veranschaulicht werden. In unserem Fall haben diese Funktionen den in nachfolgender Abbildung dargestellten Verlauf.



Solange also der relevante Kalkulationszinsfuß unter 10% liegt, hat die Alternative a_2 den höheren Kapitalwert, ist also vorzuziehen. Liegt der Kalkulationszins hingegen höher als 10%, so hat a_1 den höheren Kapitalwert, ist in diesem Fall also der Alternative a_2 vorzuziehen. Auf weitere notwendige Fallunterscheidungen für $r > 10\%$ wird nachfolgend noch explizit eingegangen.

1 In Kapitel 6 wird noch auf Konstellationen eingegangen, bei denen die Höhe des anzusetzenden Kalkulationszinsfußes auch von dem jeweils gewählten Projekt abhängt.

Sensitivität des Kapitalwertes

Die Erklärung für einen derartigen Wechsel in der Rangfolge der Vorteilhaftigkeit ist darin zu sehen, dass die Kapitalwerte unterschiedlich strukturierter Zahlungsreihen auch in unterschiedlicher Weise auf Variationen des Kalkulationszinsfußes reagieren, oder wie man auch sagt, dass ihre **Sensitivität gegenüber Änderungen des Kalkulationszinsfußes** unterschiedlich ist.

Für unser Beispiel 7 erkennt man aus der dazugehörigen Abbildung, dass die Investitionsalternative a_2 die größere Sensitivität aufweist; d.h., a_2 vermindert sich bei einer vorgegebenen Erhöhung des Kalkulationszinsfußes stärker in ihrem Kapitalwert als Alternative a_1.

Der Grund für derartige Sensitivitätsunterschiede liegt vornehmlich darin, dass Investitionsprojekte mit hohen Anfangsauszahlungen und tendenziell späten Rückzahlungen im Allgemeinen zinsempfindlicher sind als Investitionsprojekte mit niedrigeren Anfangsauszahlungen und tendenziell schnellerem Mittelrückfluss.

In welcher Weise sich derartige Unterschiede in der Sensitivität bezüglich des Zinssatzes auf die Investitionsentscheidung auswirken können – und zwar sowohl im Fall einer projektindividuellen Entscheidung als auch bei der Auswahl zwischen mehreren Alternativen –, verdeutlicht die Fortsetzung von Beispiel 7.

Beispiel 7 (Fortsetzung I):

In der nachfolgenden Tabelle sind jeweils in Abhängigkeit davon, innerhalb welchen Wertbereiches der Kalkulationszins liegt, die optimalen Handlungsalternativen angegeben (vgl. dazu die Abb. in Beispiel 7). Wären also a_1 und a_2 unabhängig voneinander realisierbare Projekte und könnte dementsprechend jeweils projektindividuell über ihre Durchführung entschieden werden, so würde sich bei einem Zinssatz unter 12,6% (Bereich I und II) jeweils die Durchführung beider Projekte lohnen. Bei einem Zinssatz zwischen 12,6 und 13,8% (Bereich III) wäre nur noch Projekt a_1 lohnend und bei einem Zinssatz über 13,8% (Bereich IV) wäre keine der beiden Investitionen mehr lohnend.

Schließen sich a_1 und a_2 hingegen aus, so ist bis zu einem Zinssatz von 10% (Bereich I) a_2 das bessere Projekt. Für Zinssätze zwischen 10 und 13,8% (Bereiche II und III) wäre a_1 zu wählen, während bei noch höherem Kalkulationszinsfuß (Bereich IV) auf die Durchführung der Investition überhaupt zu verzichten wäre.

Bereich	I	II	III	IV
Projektindividuell	a_1, a_2	a_1, a_2	a_1	–
Auswahl aus Alternativen	a_2	a_1	a_1	–

Übungsaufgabe 4:

Zwei Investitionsprojekte a_1 und a_2 sind durch die Zahlungsreihen (–100; +10; +10; +10; +110) bzw. (–100; +32; +32; +32; +32) gekennzeichnet. Der Kalkulationszins beträgt 6%.

a) Berechnen Sie jeweils Kapital- und Endwert!

b) Welches Projekt wäre im Sinne einer Endvermögensmaximierung zu realisieren?

c) Ändert sich die Entscheidung unter b), wenn der Kalkulationszins 12% beträgt?

2.4 Die Differenzzahlungsreihe

Definition

Zum unmittelbaren Vergleich zweier Investitionsalternativen a_i und a_k mit den projektindividuellen Laufzeiten T_i und T_k bedient man sich häufig der Differenzzahlungsreihe $D^{i,k}$ (oder $D^{k,i}$), die häufig auch äußerst missverständlich als Differenzinvestition bezeichnet wird. Als **Differenzzahlungsreihe** $D^{i,k}$ bezeichnen wir die Zahlungsreihe ($d_t^{i,k}$; t = 0,1 …, T; mit T = max (T_i, T_k)), die sich ergibt, wenn wir von der Zahlungsreihe der Investition a_i (e_t^i; t = 0, 1 …, T_i) die Zahlungsreihe der Investition a_k (e_t^k; t = 0, 1 …, T_k) abziehen. Für die Differenzzahlungsreihe $D^{i,k}$ gilt also:

$$(D_1) \qquad d_t^{i,k} = e_t^i - e_t^k \qquad (t = 0, 1, \ldots, T)\ .$$

Bildung der Differenzzahlungsreihe

Bei der Bildung der Differenzzahlungsreihe wird in einem ersten Schritt die Zahlungsreihe der Investition mit der kürzeren projektindividuellen Laufzeit (gedanklich) für alle nachfolgenden Zeitpunkte bis zum Laufzeitende der längerlaufenden Investition mit Nullen aufgefüllt. Da grundsätzlich zwei Möglichkeiten existieren, eine der beiden Zahlungsreihen von der jeweils anderen zu subtrahieren, wollen wir für den zweiten Schritt die Konvention vereinbaren, bei der Bildung der Differenzzahlungsreihe stets so vorzugehen, dass der erste von Null verschiedene Wert der Differenzzahlungsreihe ein negatives Vorzeichen erhält. Bei zwei Investitionen mit unterschiedlichen Anfangsauszahlungen folgt daraus insbesondere, dass

– die Zahlungsreihe mit dem niedrigeren Absolutbetrag der Anfangsauszahlung
– von der Zahlungsreihe mit dem höheren Absolutbetrag der Anfangsauszahlung

abgezogen wird.

Beispiel 7 (Fortsetzung II):

So ergibt sich etwa für das im letzten Abschnitt behandelte Beispiel 7 als Differenzzahlungsreihe der Alternativen a_1 und a_2 die in Zeile 3 der nachfolgenden Tabelle angegebene Zahlungsreihe.

	e_0, d_0	e_1, d_1	e_2, d_2
a_2	–1.850	+ 110	+2.221
(./.) a_1	–1.650	+1.000	+1.000
(=) $D^{2,1}$	– 200	– 890	+1.221

Würde Investition a_1 hingegen mit einer Investition a_3 (–1650; +1.100 ; +880) verglichen, so wäre die Differenzzahlungsreihe nach der soeben getroffenen Konvention durch Subtraktion der Zahlungsreihe a_3 von der Zahlungsreihe a_1 zu bilden, so wie es nachfolgende Tabelle verdeutlicht.

	e_0, d_0	e_1, d_1	e_2, d_2
a_1	–1.650	+1.000	+1.000
(./.) a_3	–1.650	+1.100	+ 880
(=) $D^{1,3}$	0	– 100	+ 120

Um möglichen Missverständnissen vorzubeugen, wird explizit darauf hingewiesen, dass es sich beim nachfolgend vorgestellten Investitionsvergleich mittels Analyse der Differenzzahlungsreihe um ein ausschließlich formal definiertes „Kunstkonstrukt" handelt. Während Realinvestitionen zwecks Beurteilung auf der Modellebene durch Zahlungsreihen dargestellt werden, wird die Differenzzahlungsreihe demgegenüber erst durch mathematische Operationen auf der Modellebene gebildet. Der Differenzzahlungsreihe entspricht daher i.d.R. kein in der Realwelt tatsächlich realisierbares Investitionsprojekt. Aus diesem Grunde halten wir es auch nicht für sinnvoll, die Differenzzahlungsreihe – wie es vielfach im Schrifttum geschieht – als Zahlungsreihe der Differenzinvestition oder noch missverständlicher einfach als Differenzinvestition zu bezeichnen.

Differenzzahlungsreihe ist formal definiertes „Kunstkonstrukt"

Für den Kapitalwert $K^{i,k}$ einer solchen Differenzzahlungsreihe gilt nun:

$$
(D_2) \qquad
\begin{aligned}
K^{i,k} &= \sum_{t=0}^{T} d_t^{i,k} \cdot q^{-t} \\
&= \sum_{t=0}^{T} (e_t^i - e_t^k) \cdot q^{-t} \\
&= \sum_{t=0}^{T} e_t^i \cdot q^{-t} - \sum_{t=0}^{T} e_t^k \cdot q^{-t} \\
&= K_i - K_k \ .
\end{aligned}
$$

Der Kapitalwert einer **Differenzzahlungsreihe** $K^{i,k}$ ist also gleich der **Differenz der Kapitalwerte** der zugrundeliegenden Investitionen a_i und a_k. Dementsprechend ist die Vorteilhaftigkeitsbedingung

$$(V_6) \qquad K_i > K_k$$

ersetzbar durch

$$(V_7) \qquad K^{i,k} > 0 \ .$$

Zur Beantwortung der Frage, welche von zwei einander ausschließenden Investitionsalternativen zu dem höheren Kapitalwert und damit auch zu dem höheren Endvermögen führt, ist es also ausreichend festzustellen, ob der Kapitalwert der Differenzzahlungsreihe positiv oder negativ ist.

Beispiel 7 (Fortsetzung III):

So errechnet sich für die im letzten Beispiel ermittelte Differenzzahlungsreihe $D^{2,1}$ ($e_0^{2,1} = -200$, $e_1^{2,1} = -890$ und $e_2^{2,1} = +1.221$) für einen Kalkulationszinsfuß von 5% ein Kapitalwert in Höhe von

$$
\begin{aligned}
K^{2,1} &= -200 - 890 \cdot 1{,}05^{-1} + 1.221 \cdot 1{,}05^{-2} \\
&= 59{,}811 \ .
\end{aligned}
$$

Ermittelt man für die der Differenzzahlungsreihe $D^{2,1}$ zugrundeliegenden Investitionen a_1 und a_2 für r = 5% die zugehörigen Kapitalwerte und bildet die Differenz, so ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
K_2 - K_1 &= 269{,}211 - 209{,}4 \\
&= 59{,}811 \ .
\end{aligned}
$$

Wie man unmittelbar erkennt, entspricht der Kapitalwert der Differenzzahlungsreihe $K^{2,1}$ der Differenz der Kapitalwerte K_2 und K_1. Da $K^{2,1}$ positiv ist, führt a_2 im Vergleich zu a_1 zu einem höheren Endvermögen.

Beschränkter Aussagegehalt der Differenzzahlungsreihe

Zu beachten ist allerdings, dass die Analyse der Differenzzahlungsreihe nur Aussagen darüber erlaubt, welche der beiden betrachteten Investitionsalternativen die bessere ist, jedoch noch gar nichts darüber aussagt, ob es *überhaupt* lohnt, eine der beiden Alternativen durchzuführen, oder ob nicht besser insgesamt die Unterlassensalternative realisiert werden sollte.

Beispiel 7 (Fortsetzung IV):

Die letztgenannte Überlegung lässt sich unmittelbar durch eine geringfügige Modifikation der Zahlungsreihen der Investitionen a_1 und a_2 aus Beispiel 7 verdeutlichen. Ginge man davon aus, dass sich die Anschaffungsauszahlung der Projekte a_1 bzw. a_2 um jeweils 1.000 GE – also um einen identischen Betrag – erhöhen würde, so ergäben sich für die beiden Projekte a'_1 und a'_2 zunächst folgende Zahlungsreihen:

	e_0	e_1	e_2
$\mathbf{a'_1}$	–2.650	+1.000	+1.000
$\mathbf{a'_2}$	–2.850	+ 110	+2.221

Ohne weitere Berechnung erkennt man sofort, dass für jeden positiven Zinssatz r gilt: $K'_1 < 0$ und $K'_2 < 0$, so dass insbesondere auch für r = 5% die Unterlassensalternative die Optimalalternative darstellt. Bildet man nun die Differenzzahlungsreihe $D^{2',1'}$, so ergibt sich exakt die gleiche Zahlungsreihe ($e_0^{2',1'} = -200$, $e_1^{2',1'} = -890$ und $e_2^{2',1'} = +1.221$) wie für die Differenzzahlungsreihe $D^{2,1}$ und damit zwingend für r = 5% ein identischer Kapitalwert von $K^{2',1'} = K^{2,1} = 59{,}811$.

Bei einem Zinsfuß von 5% ist a'_2 gegenüber a'_1 nach wie vor die günstigere Alternative. Für den Kapitalwert dieser günstigen Alternative ergibt sich jedoch mit $K'_2 = -730{,}789$ ein negativer Wert. D.h., a'_2 ist zwar besser als a'_1, aber (deutlich) schlechter als die Unterlassensalternative.

Relative und absolute Vorteilhaftigkeit

Aus dem vorstehenden Beispiel erkennt man, dass

– das Konzept der Differenzzahlungsreihe ausschließlich darauf abstellt, zwei konkrete Investitionsalternativen in Bezug auf ihre **relative Vorteilhaftigkeit** zu bewerten, und

– nicht darauf abstellt, Aussagen über die **absolute Vorteilhaftigkeit** der Durchführung einer konkreten Alternative zu treffen.

Entscheidungsrelevanz von Projektzahlungen

Diese Aussage ergibt sich bereits zwingend aus der Grundkonzeption dieses Ansatzes, da in die Differenzzahlungsreihe ja für jeden Zeitpunkt – unabhängig von den konkreten Höhen der einzelnen Zahlungen – nur die Zahlungsdifferenzen der zu vergleichenden Projekte einfließen. Für die Beurteilung der **relativen Vorteilhaftigkeit** ist diese Beschränkung allein auf Zahlungsdifferenzen sinnvoll, denn für die Ranglozierung zweier Investitionsalternativen können in der von uns betrachteten Modellwelt ausschließlich Zahlungsdifferenzen und keineswegs Zahlungen in gleicher Höhe entscheidungsrelevant sein. Um hingegen Aussagen über die **absolute Vorteilhaftigkeit** abzuleiten, ist es zwingend notwendig, die konkreten Höhen aller einzelnen Projektzahlungen zu berücksichtigen, da diesen im Vergleich mit der Unterlassensalternative durchaus Entscheidungsrelevanz zukommt.

Die endgültige Bestimmung der optimalen Investitionsalternative kann somit im Allgemeinen nicht ausschließlich über die Betrachtung der Differenzzahlungsreihe erfolgen. Vielmehr muss für die bessere der beiden Investitionsalternativen zusätzlich noch der individuelle Kapitalwert berechnet werden, umso auch den Vergleich mit der Unterlassensalternative durchzuführen.

Einsatzmöglichkeiten

Es existieren jedoch durchaus auch in der Praxis Entscheidungssituationen, in denen die endgültige Bestimmung der optimalen Investitionsalternative ausschließlich auf Basis der Analyse der Differenzzahlungsreihe erfolgen kann. Ist z.B. die Rahmenentscheidung zur Investitionsdurchführung bereits getroffen und lediglich noch offen, welches konkrete Projekt von zwei zur Auswahl stehenden Projekten letztlich realisiert werden soll, steht also die Unterlassensalternative nicht mehr zur Disposition, so ist nur noch die relative Vorteilhaftigkeit zwischen den Projekten für die zu treffende Auswahlentscheidung maßgeblich. In einem solchen Fall kann der Investor aus dem Kapitalwert der Differenzzahlungsreihe eindeutig ableiten, welche der betrachteten Alternativen zum maximal erreichbaren Endvermögen führt. Gerade in solchen Fällen kann es sich – insbesondere auch zur Vermeidung unnötig vieler Diskontierungsrechnungen (vgl. Übungsaufgabe 5) – anbieten, Investitionsalternativen mittels Analyse der zugehörigen Differenzzahlungsreihen zu vergleichen.

Die nachfolgende Übungsaufgabe verdeutlicht nochmals den eingeschränkten Aussagegehalt der Investitionsbeurteilung mittels alleiniger Analyse der Differenzzahlungsreihe. Gleichzeitig werden Sie aber bei der Bearbeitung auch erkennen, dass die Verwendung der Differenzzahlungsreihe oftmals weniger aufwendig ist als die Berechnung der Kapitalwerte der einzelnen Projekte, insbesondere wenn sich zwischen den betrachteten Investitionsalternativen konstante Zahlungsdifferenzen ergeben, die Differenzzahlungsreihe also dem Typ einer Rente entspricht, oder in einigen Zeitpunkten keine Zahlungsdifferenzen auftreten.

Übungsaufgabe 5:

Gegeben seien folgende Alternativen a_1 und a_2:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
a_1	–550	+200	+160	+120	+100	+100
a_2	–495	+180	+140	+100	+100	+100

a) Bestimmen Sie die Differenzzahlungsreihe $D^{1,2}$!

b) Ermitteln Sie anhand der Differenzzahlungsreihe, welche der beiden Alternativen bei einem Zinsfuß von 10% den höheren Kapitalwert hat!

c) Welchen Schluss erlaubt das unter b) ermittelte Ergebnis im Hinblick auf die optimale Investitionsentscheidung?

3 Die äquivalente Annuität

3.1 Definition und formale Analyse

Kapitalwert und Endwert stellen *zeitpunktbezogene* Kennzahlen dar, die etwas über den bei Durchführung einer Investition zu erwartenden Vermögensvorteil aussagen. Dem Denken in der betrieblichen Praxis liegt es allerdings näher, die Vorteilhaftigkeit von Maßnahmen durch *zeitraumbezogene* Kennzahlen, also etwa jährliche „Erfolgs"-Größen, auszudrücken. Es liegt daher nahe, darüber nachzudenken, ob es die eingangs verdeutlichten finanzmathematischen Zusammenhänge nicht erlauben, auch die Vorteilhaftigkeit von Investitionsprojekten statt durch den Kapitalwert durch eine dazu äquivalente Jahresgröße auszudrücken. Das Ergebnis dieses „Denkprozesses" ist die sogenannte äquivalente Annuität, die wir mit dem Symbol e^* bezeichnen wollen.

Definition

Als äquivalente Annuität e^* einer Zahlungsreihe $e_0, e_1, e_2, \ldots, e_T$ bezeichnet man den Betrag von T gleichbleibenden Zahlungen in den Zeitpunkten $t = 1, 2, \ldots, T$, deren Kapitalwert gleich dem der Zahlungsreihe des Investitionsprojektes ist. Formal muss der Betrag der äquivalenten Annuität e^* also der Bedingung

$$\sum_{t=1}^{T} e^* \cdot q^{-t} = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{-t}$$

genügen.

Nun gibt der links (rechts) stehende Summenausdruck nichts anderes an als den Rentenbarwert (Kapitalwert), so dass

$$e^* \cdot RBF(T,r) = K(r)$$

gilt. Die einem Investitionsprojekt mit der Zahlungsreihe $e_0, e_1, \ldots, e_T$ zuzuordnende äquivalente Annuität ist mithin zu bestimmen als

Allgemeingültige Annuitätenformel

$$(AN_1) \quad e^* = \frac{1}{RBF(T,r)} \cdot K$$

oder

$$e^* = ANF(T,r) \cdot K .$$

Die äquivalente Annuität eines Investitionsprojektes kann also ermittelt werden, indem dessen Kapitalwert durch den Rentenbarwertfaktor dividiert oder mit dem Annuitätenfaktor multipliziert wird. Kapitalwert und äquivalente Annuität eines Investitionsprojektes weisen damit immer das gleiche Vorzeichen auf.

Beispiel 8:

Für das Investitionsprojekt aus Beispiel 1 ($e_0 = -100$, $e_1 = +10$, $e_2 = +10$, $e_3 = +100$) gilt also bei einem Zinssatz von 5% gemäß (AN_1) bei Verwendung der entsprechenden Werte aus den finanzmathematischen Tabellen:

$$K = -100 + 10 \cdot 0{,}9524 + 10 \cdot 0{,}9070 + 100 \cdot 0{,}8638 = 4{,}974$$

und

$$e* = 4{,}974 \cdot \frac{1}{2{,}7232} = 4{,}974 \cdot 0{,}3672 = 1{,}826 .$$

Übungsaufgabe 6:

Gemäß vorstehenden Überlegungen sind die Zahlungsreihen aus Beispiel 8 (−100; +10; +10; +100) und (±0; +1,826; +1,826; +1,826) vermögensmäßig äquivalent. Überprüfen Sie, ob der Kapitalwert der Zahlungsreihe (±0; +1,826; +1,826; +1,826) tatsächlich mit dem des ursprünglichen Investitionsprojektes (bis auf etwaige Rundungsungenauigkeiten) übereinstimmt!

Eine vereinfachte Definition der äquivalenten Annuität ergibt sich für den Fall, dass die Zahlungsreihe des zu beurteilenden Projekts (ab dem Zeitpunkt $t = 1$) vom Typ einer Rente ist. Weist das betrachtete Investitionsprojekt in allen zukünftigen Zeitpunkten $t = 1, 2, \ldots, T$ einen konstanten Überschuss e auf, so gilt für den Kapitalwert bekanntlich gemäß (K_2):

$$K = e_0 + e \cdot RBF\left(T, r\right) .$$

Setzen wir nun diesen Wert für K in (AN_1) ein und ersetzen e_0 durch $-a_0$, so ergibt sich nach geeigneter Umordnung:[1)]

$$(AN_2) \quad e* = e - a_0 \cdot ANF\left(T, r\right) .$$

Die äquivalente Annuität dieser speziellen Zahlungsreihe kann also einfach ermittelt werden, indem man von der gleichbleibenden Investitionseinzahlung e die der An-

Kapitaldienst einer Investition

1 e_0 ist bekanntlich negativ ($e_0 < 0$). Mithin gibt a_0 den absoluten Betrag der Anfangsauszahlung an.

fangsauszahlung entsprechende Annuität abzieht. Dieser zweite Ausdruck wird häufig auch als der **Kapitaldienst** einer Investition bezeichnet.[1]

Kann der Rentenbarwertfaktor bzw. Annuitätenfaktor bei hinlänglich hohem Wert von T schließlich durch 1/r bzw. r approximiert werden, vereinfacht sich (AN_2) weiter zu:

$$(AN_3) \quad e^* = e - a_0 \cdot r\,.$$

> **Übungsaufgabe 7:**
>
> Gehen Sie wie in Übungsaufgabe 2 von einem Investitionsprojekt mit der Zahlungsreihe $e_0 = -100$, $e_1 = +60$ und $e_2 = +60$ aus. Geldmittel können zu 10% angelegt bzw. aufgenommen werden.
>
> a) Berechnen Sie die äquivalente Annuität e*!
>
> b) Gehen Sie von dem zu a) gewonnenen Ergebnis e* aus und betrachten Sie die Zahlungsreihe (–100; 60 – e*; 60 – e*)! Welche Werte müssten K und EW dieser Zahlungsreihe aufweisen? Überprüfen Sie das Ergebnis Ihrer Überlegungen rechnerisch!

3.2 Ökonomische Interpretation

Während Endwert und Kapitalwert die Zahlungsreihe einer Investition durch eine auf einen Stichtag bezogene Vermögensgröße repräsentieren, charakterisiert die äquivalente Annuität die Zahlungsreihe durch eine (rechnerische) auf den Investitions**zeitraum** bezogene Zahlungsgröße. Da – wie wir oben gesehen haben – der Kapitalwert der Investition und der Kapitalwert der Zahlungsreihe aus T Annuitätszahlungen gleich hoch sind, bedeutet dies, dass der Investor bei Durchführung der Investition das gleiche Endvermögen erreicht, das er erreichen würde, wenn er die Unterlassensalternative wählte und ihm zusätzlich – als Geschenk aus heiterem Himmel oder aus sonstiger Quelle – in allen Zeitpunkten t = 1, 2,…, T zusätzlich ein Betrag in Höhe der äquivalenten Annuität e* zur Verfügung gestellt würde. Zur Veranschaulichung dieser Konstellation gehen wir nochmals zu der in Beispiel 4 geschilderten Situation zurück.

1 Unterstellt man, dass die Investition zu 100% mittels eines Annuitätendarlehens fremdfinanziert wird, so hat der Investor pro betrachteter Periode eine konstante Auszahlung an den Darlehensgeber zu leisten. Dementsprechend wird die Summe aus periodisch zu leistender Zins- und Tilgungszahlung (die Annuität) auch als „Kapitaldienst einer (fremdfinanzierten) Investition“ bezeichnet.

Beispiel 9:

In Beispiel 4 wurde von der Zahlungsreihe $e_0 = -100$, $e_1 = +10$, $e_2 = +10$ und $e_3 = +100$ ausgegangen und in Fall 1 unterstellt, der Investor könne das Projekt aus verfügbaren liquiden Mitteln finanzieren, die alternativ zu 5% p. a. angelegt werden könnten. In Beispiel 8 ergab sich für die äquivalente Annuität dieses Projektes bei einem Zinssatz von 5% (auf zwei Stellen gerundet): $e^* = 1{,}83$. Im folgenden wollen wir uns mit Hilfe eines Tilgungs- und Anlageplans verdeutlichen, wie sich das Vermögen des Investors bei Wahl der Unterlassensalternative unter der Voraussetzung entwickeln würde, dass ihm jeweils am Jahresende (also in den Zeitpunkten $t = 1, 2$ und 3) eine „zusätzliche" Prämie in Höhe des Annuitätsbetrages von 1,83 gutgeschrieben würde. Es ergibt sich dann folgender (hypothetischer) Tilgungs- und Anlageplan:

t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	**0**	**0**	**0**	**+ 100**
1	**1,83**	**5**	**6,83**	**+ 106,83**
2	**1,83**	**5,34**	**7,17**	**+ 114,00**
3	**1,83**	**5,70**	**7,53**	**+ 121,53 = EV'_U**

Wie der Vergleich mit der korrespondierenden Tabelle aus Beispiel 4 zeigt, würde bei dieser hypothetischen Unterlassensalternative (von einer Rundungsungenauigkeit abgesehen) also genau das gleiche Endvermögen erzielt wie bei Realisierung der Investition.

Übungsaufgabe 8:

Gehen Sie von den Daten des Beispiels 9 bzw. 4 aus! Berechnen Sie in einem Tilgungs- und Anlageplan, wie sich das Vermögen des Investors bei Wahl der Unterlassensalternative unter der Voraussetzung entwickeln würde, dass dem Investor im Zeitpunkt $t = 0$ keine liquiden Mittel zur Projektdurchführung zur Verfügung stehen, er folglich (im Falle der Investitionsdurchführung) auf eine Kreditaufnahme zu $r = 5\%$ p. a. angewiesen wäre, und ihm jeweils am Jahresende (im Falle des Investitionsverzichts) eine zusätzliche „staatliche" Prämie von 1,83 Geldeinheiten gutgeschrieben würde.

(Lösungshinweis: Überlegen Sie zunächst, wie der Tilgungs- und Anlageplan der nicht modifizierten Unterlassensalternative im Fall der Fremdfinanzierung aussieht!)

Aus den beispielhaft verdeutlichten und aus ähnlichen Überlegungen lassen sich folgende Interpretationsmöglichkeiten der äquivalenten Annuität ableiten:

Interpretationsmöglichkeiten

– Die positive (negative) Annuität einer Investition gibt den Betrag an, den der Investor bei Durchführung der Investition in jedem Jahr zusätzlich entnehmen könnte (zusätzlich einlegen müsste), ohne deshalb ein anderes Endvermögen zu erreichen als bei Realisierung der Unterlassensalternative.

– Die positive (negative) Annuität einer Investition gibt den Betrag an, um den die Einzahlungsüberschüsse in jedem Jahr geringer (höher) sein dürften (müssten), ohne deshalb ein anderes Endvermögen zu erreichen als bei Realisierung der Unterlassensalternative.

– Ökonomisch kann die (positive) Annuität folglich als der „durchschnittliche Nettoüberschuss“ interpretiert werden, der durch ein projektindividuell vorteilhaftes Investitionsprojekt im Vergleich zur Unterlassensalternative pro Periode erzielt werden kann.

Besonders sinnfällig wird die letzte Interpretation für den Spezialfall einer Zahlungsreihe, bei der auf die Anfangsauszahlung a_0 nur Einzahlungen in gleicher Höhe folgen ($e_1 = e_2 = \ldots = e_T = e$). In diesem Fall gilt – wie Sie wissen – (AN_2):

$$e^* \;=\; e \;-\; a_0 \cdot ANF(T, r) \;.$$

Interpretation der Annuität als periodischer Nettoüberschuss

Wird die Anfangsauszahlung a_0 etwa vollständig durch einen Kredit finanziert, der in T Perioden so zurückzuzahlen ist, dass die jährliche Belastung aus Zins- und Tilgung gerade konstant bleibt (Annuitätendarlehen), so stellt der zweite Term in (AN_2) diesen gesamten „Kapitaldienst“ dar, und e* gibt den nach Abführung des Kapitaldienstes verbleibenden periodischen Nettoüberschuss ($e^* > 0$) bzw. Nettofehlbetrag ($e^* < 0$) des Projektes wieder.

3.3 Entscheidungsregeln

In Abschnitt 3.1 sind wir bereits darauf eingegangen, dass Kapitalwert und äquivalente Annuität eines Investitionsprojektes gemäß (AN_1) zwingend das gleiche Vorzeichen aufweisen. Da einerseits die primäre Vorteilhaftigkeitsbedingung $EV_I > EV_U$ gem. (V_1) äquivalent durch die Bedingung $K > 0$ gem. (V_3) ersetzt werden kann, andererseits e* und K immer das gleiche Vorzeichen aufweisen, ist (V_1) auch genau dann erfüllt, wenn gilt:

$$(V_8) \qquad e^* \;>\; 0 \;.$$

Vorteilhaftigkeitskriterium

Das heißt, bei **projektindividueller Betrachtung** ist ein Projekt immer genau dann vorteilhaft, wenn die äquivalente Annuität positiv ist. Diese Entscheidungsregel wird im übrigen auch aus den angegebenen Möglichkeiten der ökonomischen Interpretation unmittelbar plausibel.

Stehen neben der Unterlassensalternative mehrere einander ausschließende Investitionsalternativen zur Auswahl, so empfiehlt es sich – ebenso wie bei der Betrachtung der Kennziffer Endwert –, bei der Anwendung der Annuitätenmethode zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Fall: Alle Projekte haben die gleiche Laufzeit

In diesem Fall können die Annuitäten e_i^* durch Multiplikation des entsprechenden Kapitalwertes K_i mit dem für alle Alternativen gleichen positiven Faktor ANF(T, r) ermittelt werden. Mithin ergibt sich bei der Alternative mit der höchsten Annuität auch der höchste Kapitalwert und somit auch das höchste Endvermögen. Die Zielsetzung der Endvermögensmaximierung kann in diesem Fall also äquivalent durch die Zielsetzung der Annuitätenmaximierung ersetzt werden.

2. Fall: Die projektindividuellen Laufzeiten sind unterschiedlich

Sind die Projektlaufzeiten hingegen unterschiedlich, so ist diese Übereinstimmung nicht mehr gesichert. Die Zielsetzung der Endvermögensmaximierung kann in diesem Fall also **nicht** mehr äquivalent durch die Zielsetzung der Annuitätenmaximierung ersetzt werden.

Beispiel 10:
Ausgegangen sei von zwei einander ausschließenden Projekten a_1 und a_2 mit den Laufzeiten $T_1 = 3$ und $T_2 = 5$, die folgende Zahlungsreihen aufweisen:

	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
a_1	– 100	+ 45	+ 50	+ 55		
a_2	– 100	+ 35	+ 35	+ 35	+ 35	+ 35

Berechnet man für beide Projekte bei einem Kalkulationszins von 8% die Kapitalwerte und die laufzeitindividuellen äquivalenten Annuitäten, so ergeben sich folgende Werte:

$$K_1 = 28{,}19 < K_2 = 39{,}74$$
$$e_1^* = 10{,}94 > e_2^* = 9{,}95 .$$

Kapitalwert- und Annuitätenmethode führen im Beispiel also zu einander widersprechenden Ergebnissen. Da aber das Kapitalwertkriterium mit der Zielsetzung der Endvermögensmaximierung voll kompatibel ist, führt die Annuitätenmethode im vorliegenden Fall zu einer nicht zielgerechten Entscheidung.

Unzulänglichkeit der Annuitätenmethode bei
- Auswahlentscheidungen und
- divergierenden Projektlaufzeiten

Der Grund für die im Beispiel 10 aufgezeigte Unzulänglichkeit der Annuitätenmethode bei Auswahlentscheidungen liegt in der **Unterschiedlichkeit der Projektlaufzeiten.** Denn wie bereits ausführlich dargelegt, kann die Annuität eines Projektes vergröbernd als die während der Projektlaufzeit *im Durchschnitt* pro Periode erzielbare Einkommenssteigerung im Vergleich zur Unterlassensalternative interpretiert werden. Der Vergleich derartiger Durchschnittsbeträge erlaubt im Allgemeinen jedoch nur dann sinnvolle Schlussfolgerungen, wenn sich die zu vergleichenden Durchschnittszahlen auf die gleiche **Größe** beziehen, hier also auf die gleiche Laufzeit.

So zeigt in unserem Beispiel e_1^* an, dass a_1 während der Projektlaufzeit von 3 Jahren zu einem (zusätzlichen) Durchschnittseinkommen von 10,94 führt; a_2 demgegenüber erbringt zwar ein niedrigeres Durchschnittseinkommen (e_2^* = 9,95), dies jedoch 5 Jahre lang.

Ein Vergleich der laufzeitindividuellen Annuitäten führt somit im allgemeinen in die Irre. Und zwar werden bei diesem Verfahren Projekte mit längerer Laufzeit tendenziell zu ungünstig dargestellt, Projekte mit kürzerer Laufzeit hingegen tendenziell zu günstig. Formal kann dieser Sachverhalt sehr einfach verdeutlicht werden. Bekanntlich gilt für die laufzeitindividuelle Annuität eines Investitionsprojektes a_i:

$$e_i^* \quad = \quad K_i \cdot ANF\left(T_i, r\right).$$

Wie Sie mit einem Blick in Tabelle IV der finanzmathematischen Tabellen (vgl. KE 1) erkennen, wird der Annuitätenfaktor ANF(T_i, r) jedoch mit wachsendem T_i immer kleiner. Das heißt, je länger die Laufzeit eines Projektes ist, umso geringer ist der Faktor, mit dem der Kapitalwert zu multiplizieren ist, um die Annuität zu bestimmen. Bei gegebenem Kapitalwert ist die Annuität folglich umso kleiner, je länger die Laufzeit des Projektes ist.

Übungsaufgabe 9:
Für zwei einander ausschließende Projekte a_1 und a_2 mit den Laufzeiten $T_1 = 10$ und $T_2 = 6$ betragen die laufzeitindividuellen Annuitäten $e_1^* = 85$ und $e_2^* = 77$. Welche Schlüsse über die Vorziehenswürdigkeit von a_1 oder a_2 erlauben diese Angaben?

Modifiziertes Annuitätenkriterium

Die – von Ausnahmefällen wie in Übungsaufgabe 9 abgesehen – unvermeidliche Schwäche der Annuitätenmethode kann jedoch einfach dadurch vermieden werden, dass man für die einzelnen Projekte nicht die *laufzeitindividuellen* Annuitäten berechnet, sondern alle Annuitäten in gleicher Weise auf eine einheitliche Zeitdauer von T Perioden bezieht. Dabei ist die Länge dieser Basisperiode beliebig wählbar.

Beispiel 11:
Wählt man ausgehend von den Daten des Beispiels 10 etwa als Basisperiode $T = T_1 = 3$, so ergibt sich:

$$e_1^* = 28{,}19 \cdot 0{,}388 = 10{,}94$$
$$e_2^* = 39{,}74 \cdot 0{,}388 = 15{,}42\ .$$

Für $T = T_2 = 5$ hingegen gilt:

$$e_1^* = 28{,}19 \cdot 0{,}2505 = 7{,}06$$
$$e_2^* = 39{,}74 \cdot 0{,}2505 = 9{,}95\ .$$

In beiden Fällen ergibt sich jetzt also eindeutig die mit dem Kapitalwertkriterium und damit mit der Zielsetzung der Endvermögensmaximierung übereinstimmende Relation $e_2^* > e_1^*$.

Investitionsentscheidungen zwischen mehreren zur Auswahl stehenden Investitionsprojekten auf Basis der Annuität lassen sich damit unter der Voraussetzung gleicher Projektlaufzeiten bzw. der Berechnung der Annuitäten für eine einheitliche Basisperiode T auch wieder als Entscheidungen auf Basis spezieller Dominanzüberlegungen interpretieren. In obigem Beispiel dominiert Alternative 2 die Alternative 1, da Alternative 2 in jedem Zeitpunkt $t = 1, 2, \ldots, T$ zu einer höheren Entnahmemöglichkeit für den Investor führt als Alternative 1.

Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich damit für die Kennzahl Annuität festhalten, dass bei projektindividueller Betrachtung Kapitalwert- und Annuitätenmethode zwingend zu übereinstimmenden und mit der Zielsetzung Endvermögensmaximierung kompatiblen Entscheidungen führen, während bei Auswahlentscheidungen immer dann, wenn das Projekt mit der niedrigeren laufzeitindividuellen Annuität die längere individuelle Projektlaufzeit hat, die Auswahl des Projekts mit der höheren laufzeitindividuellen Annuität zu einer Entscheidung führen kann, die mit der originären Zielsetzung der Endvermögensmaximierung nicht kompatibel ist.

4 Interner Zinsfuß

4.1 Einführung

Mit dem **internen Zinsfuß** wird nachfolgend eine weitere finanzwirtschaftliche Kennzahl zur Beurteilung von Investitionsprojekten betrachtet, die anders als die bereits behandelten Kennzahlen Kapitalwert, Endwert und Annuität aber nicht auf Dominanzüberlegungen zurückgeführt werden kann. Die bisher behandelten Kennzahlen beziehen sich auf absolute Vermögensänderungen, die rechnerisch bestimmten Zeitpunkten (vgl. Kapitalwert und Endwert) bzw. bestimmten Zeiträumen (vgl. äquivalente Annuität) zugeordnet werden; der interne Zinsfuß hingegen stellt als Renditekennzahl eine Meßgröße für relative Vermögensänderungen, d.h. Vermögensänderungen bezogen auf einen bestimmten Vermögenseinsatz, dar.

Die Verwendung von Renditegrößen wie dem internen Zinsfuß ist in der Praxis aufgrund ihrer (vordergründigen) Anschaulichkeit weit verbreitet,[1)] wenngleich dessen Ermittlung zuweilen aufwendig und seine pauschale Anwendung problembehaftet ist, wie nachfolgend aufgezeigt werden soll.

4.2 Grundkonzeption

4.2.1 Definition und formale Analyse

Als internen Zinsfuß r^* einer Zahlungsreihe $e_0, \ldots, e_T$ bezeichnet man den Wert des Kalkulationszinsfußes r, auf dessen Basis sich für den Kapitalwert gerade der Wert Null ergibt.

Formale Definition

Formal ist der interne Zinsfuß r^* also als der Wert von r zu bestimmen, für den gilt:

$$(IZ_1) \qquad K(r^*) \;=\; \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r^*)^{-t} \;=\; 0 \;.$$

Grafisch kann der gesuchte Wert r^* als der Abszissenwert der Nullstelle der Kapitalwertfunktion interpretiert werden, wie es Abb. 1 beispielhaft für die Zahlungs-

1 Empirische Untersuchungen zur Vorgehensweise bei der Investitionsbeurteilung in der Unternehmenspraxis berichten durchgängig von hohen Verwendungsquoten. Auffällig ist auch, dass häufig mehrere Kennzahlen parallel zur Investitionsbeurteilung eingesetzt werden. Vgl. für die USA bspw. PETRY/SPROW (1993), S. 362 – 365; für europäische Tochtergesellschaften von U.S.-Unternehmen SHAO/SHAO (1993), S. 103; für Deutschland WEHRLE-STREIF (1989), S. 20.

reihe der Normalinvestition[1] a_1 (e_0 = –80; e_1 = –12; e_2 = +50; e_3 = +66) verdeutlicht:

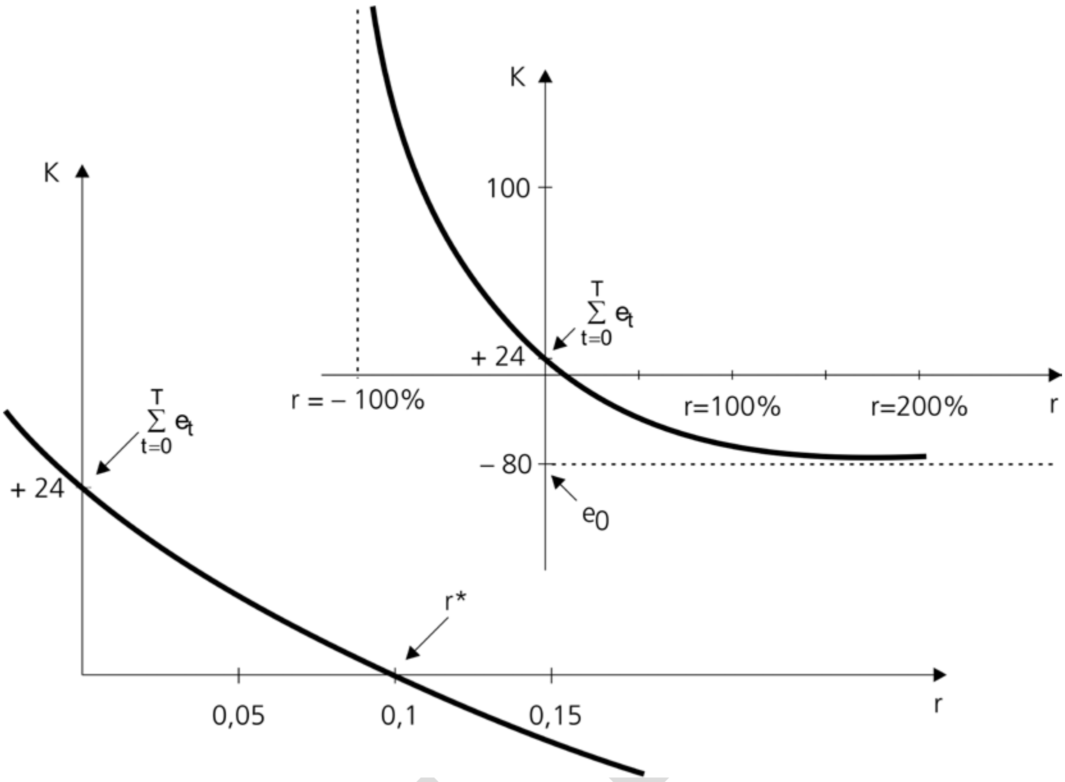


Abb. 1: Formale Analyse des internen Zinsfußes

In dem durch Abb. 1 verdeutlichten Beispiel gilt also r* = 0,1, d.h. der interne Zinsfuß der Zahlungsreihe der Investition a_1 beläuft sich auf 10%.

Für Verlauf und Interpretation der Kapitalwertkurve einer Normalinvestition sind neben der Interpretation des Abszissenwerts der Nullstelle als interner Zinsfuß noch folgende, ebenfalls in Abb. 1 hervorgehobene, Sachverhalte von Bedeutung:

- Der Kapitalwert bei einem Kalkulationszinsfuß von Null (der Ordinatenwert bei r = 0) gibt die Summe der nicht abgezinsten Zahlungssalden einer Investition, ihren Nominalwert, wieder.
- Der Kapitalwert einer Normalinvestition konvergiert für $r \to \infty$ gegen e_0, da die nachfolgenden Zahlungsüberschüsse durch die Diskontierung immer weniger „ins Gewicht fallen".
- Im ökonomisch schwer interpretierbaren Bereich negativer Kalkulationszinsfüße hingegen strebt der Kapitalwert für $r \to -1$ gegen unendlich.

1 Eine Normalinvestition ist eine Investition, bei der auf eine Reihe von Auszahlungsüberschüssen nur noch Einzahlungsüberschüsse folgen, vgl. auch Kapitel 2.1 dieser Kurseinheit.

- Weist die Normalinvestition nur genau eine Anfangsauszahlung auf, so verläuft die Kapitalwertfunktion zudem streng konvex, d.h. hier streng monoton fallend, aber mit abnehmender Rate des Gefälles.[1)]

> **Übungsaufgabe 10:**
> Berechnen Sie den Kapitalwert der Investition a_1 für $r = 9\%$, $r = 10\%$ und $r = 11\%$!

4.2.2 Ermittlung

Allgemein kann der interne Zinsfuß nur implizit bestimmt werden, da die Relation (IZ_1) als Polynom T-ten Grades nur in Sonderfällen explizit nach r aufgelöst werden kann. In der Literatur sind verschiedene Näherungsverfahren vorgestellt worden, die teils auf der Anwendung in der Mathematik allgemein bekannter Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung von Funktionen beruhen, teils spezielle Methoden darstellen. Bevor wir Ihnen eine vergleichsweise einfache Approximationsmethode als universell einsetzbare Methode zur impliziten Bestimmung von r* vorstellen, wollen wir noch kurz auf einige Sonderfälle eingehen, bei denen die Struktur der Zahlungsreihe des Investitionsprojektes entweder die explizite Bestimmung von r* zulässt (Sonderfälle 1, 2 und 3) oder aber eine sehr einfache näherungsweise Ermittlung von r* ermöglicht (Sonderfall 4).

- **Sonderfall 1**

Interner Zinsfuß bei exakt zwei Projektzahlungen

Betrachtet sei eine Investition, bei der auf eine einzige Auszahlung in $t = 0$ nur eine einzige Einzahlung im Zeitpunkt $t = T$ folgt. Eine solche Struktur der Zahlungsreihe ist insbesondere charakteristisch für Zero-Bond-Anleihen, also für Anleihen, bei denen sämtliche Zahlungen des Emittenten für Zins und Tilgung in einer Summe am Ende der Anleihelaufzeit erfolgen.

Für eine solche Investition ergibt sich r* gemäß (IZ_1) aus $e_0 + e_T\,(1 + r^*)^{-T} = 0$. Formt man diese Gleichung nun nach r* um, so ergibt sich:

$$(IZ_2) \qquad r^* = \sqrt[T]{\frac{e_T}{-e_0}} - 1\ .$$

---

1 Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, dass als hinreichende Bedingung für die Gültigkeit dieses Satzes vorausgesetzt wird, dass nur **genau eine** Anfangsauszahlung geleistet wird. Nur dann besteht die 1. Ableitung der Kapitalwertfunktion nur noch aus negativen Summanden. Das Vorliegen einer sogenannten **Normalinvestition** reicht demgegenüber als hinreichende Bedingung nicht aus (vgl. Abschnitt 2.1).

Beispiel 12:

Eine Investition bedingt eine Anfangsauszahlung von $e_0 = -1.000$ GE und führt zu einem einzigen Einzahlungsüberschuss im Zeitpunkt t = 3 in Höhe von $e_3 = +1.728$ GE.

Gemäß (IZ_2) ergibt sich für den gesuchten internen Zinsfuß dieses Investitionsprojektes:

$r^* \;=\; \sqrt[3]{\frac{1.728}{-(-1.000)}} - 1 \;=\; 0,2$. Der interne Zinsfuß beträgt also 20%.

- **Sonderfall 2**

Interner Zinsfuß bei Zahlungsreihen vom „Typ einer Kuponanleihe“

Betrachtet sei eine Investition, bei der auf eine einzige Auszahlung in Höhe von e_0 bis zum Zeitpunkt T – 1 Einzahlungen in konstanter Höhe von $e_1 = e_2 = \ldots = e_{T-1} = z \cdot (-e_0)$ und im Zeitpunkt T eine Schlusseinzahlung in Höhe von $e_T = (1+z) \cdot (-e_0)$ erfolgen.[1] Eine solche Struktur der Zahlungsreihe ist insbesondere charakteristisch für Kuponanleihen mit jährlich nachschüssiger Zinsauszahlung und endfälliger Rückzahlung zum Emissionskurs. Für diese Investition ergibt sich r^* gemäß (IZ_1) aus

$$e_0 \;-\; e_0 \cdot z \cdot \text{RBF}(T, r^*) \;-\; e_0 \cdot (1 + r^*)^{-T} \;=\; 0 \;.$$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu einem eindeutigen internen Zinsfuß in Höhe von:[2]

$$(IZ_3) \qquad r^* \;=\; z \;.$$

Beispiel 13:

Ein Anleger erwirbt im Zeitpunkt $t = 0$ für 100 GE eine Kuponanleihe, die folgende Rechte verbrieft:

– Jährlich nachschüssige Zinszahlung in Höhe von 8 GE
– Laufzeit 10 Jahre
– Endfällige Tilgung in Höhe von 100 GE.

---

1 Beachten Sie, dass e_0 als Auszahlung definiert ist und folglich ein negatives Vorzeichen aufweist. $z \cdot (-e_0)$ und $(1+z) \cdot (-e_0)$ sind für $z > 0$ daher zwingend positiv und somit als Einzahlungen zu interpretieren.

2 Die Umformung der Gleichung führt unter Beachtung von $q := (1+r^*)$ und r*°0 zu:

$$e_0 \;-\; e_0 \cdot z \cdot \frac{1 - q^{-T}}{r^*} \;-\; e_0 \cdot q^{-T} \;=\; 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \;=\; z \cdot \frac{1 - q^{-T}}{r^*} \;+\; q^{-T}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^* \;=\; z \cdot (1 - q^{-T}) \;+\; r^* \cdot q^{-T}$$

$$\Leftrightarrow \quad r^* \cdot (1 - q^{-T}) \;=\; z \cdot (1 - q^{-T})$$

$$\Leftrightarrow \quad r^* \;=\; z \qquad \text{q.e.d.}$$

Aus Sicht des Anlegers kann seine Investition in die Kuponanleihe durch folgende Zahlungsreihe verdeutlicht werden:

t = 0	t = 1,2, …, 9	t = 10
–100	+8	+108

Gemäß (IZ_3) ergibt sich für diese Zahlungsreihe: $r^* = z = 0{,}08$. Der interne Zinsfuß beträgt also 8%.

- **Sonderfall 3**

Interner Zinsfuß bei drei unmittelbar aufeinander folgenden Projektzahlungen

Betrachtet sei eine Investition, die nur in den Zeitpunkten t = 0, t = 1 und t = 2 Zahlungen aufweist. Für diese Investition ergibt sich r^* gemäß (IZ_1) aus

$$e_0 + e_1 \cdot (1+r^*)^{-1} + e_2 \cdot (1+r^*)^{-2} = 0 .$$

Die Lösung dieser quadratischen Gleichung führt zu:

$$(IZ_4) \qquad r^*_{1,2} = \frac{-e_1}{2e_0} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \frac{e_2}{e_0}} - 1 .$$

Beispiel 14:

Eine Investition bedingt eine Anfangsauszahlung in Höhe von $e_0 = -1.000$ GE, erbringt im Zeitpunkt t = 1 einen Einzahlungsüberschuss von $e_1 = +2.300$ GE und führt im Zeitpunkt t = 2 zu einem Auszahlungsüberschuss von $e_2 = -1.320$ GE.

Gemäß (IZ_4) ergibt sich:

$$r^*_{1,2} = \frac{-2.300}{2 \cdot (-1.000)} \pm \sqrt{\left(\frac{2.300}{2 \cdot (-1.000)}\right)^2 - \frac{-1.320}{(-1.000)}} - 1 = 0{,}15 \pm 0{,}05 .$$

Der interne Zinsfuß beträgt also entweder $r_1^* = 10\%$ oder $r_2^* = 20\%$.[1]

Übungsaufgabe 11:

Versuchen Sie selbständig, die Formel (IZ_4) herzuleiten!

1 Zum „Problembereich“ mehrerer interner Zinsfüße vgl. Abschnitt 4.2.3.

- **Sonderfall 4**

Interner Zinsfuß bei gleichbleibenden Projekteinzahlungen

Betrachtet sei eine Investition, bei der auf eine einzige Auszahlung im Zeitpunkt $t = 0$ in allen zukünftigen Zeitpunkten $t = 1, 2, \ldots, T$ konstante Einzahlungen in Höhe von e folgen. Für diese Investition ergibt sich r^* gemäß (IZ_1) aus: $e_0 + e \cdot RBF(T, r^*) = 0$. Nach einfacher Umformung ergibt sich:

$$(IZ_5) \qquad RBF(T, r^*) = \frac{1-(1+r^*)^{-T}}{r^*} = \frac{-e_0}{e} .$$

Die Relation (IZ_5) lässt sich für $T \geq 3$ nicht mehr explizit nach r^* auflösen. Der interne Zinsfuß kann jedoch aus einer Tabelle der Rentenbarwertfaktoren annähernd in der Weise bestimmt werden, dass man bei gegebener Laufzeit T, also z.B. in Tabelle III der finanzmathematischen Tabellen bei gegebener Zeile feststellt, für welchen Zinssatz der Rentenbarwertfaktor mit der Laufzeit T gerade möglichst nahe an dem Quotienten aus $-e_0$ und e liegt. Anders als in den Sonderfällen 1 bis 3 ist im Sonderfall 4 damit zwar keine explizite Bestimmung des internen Zinsfußes möglich, aber es ist ein besonders leicht anzuwendendes Näherungsverfahren zu dessen impliziter Bestimmung verfügbar.

Beispiel 15:

Eine Investition bedingt eine Anfangsauszahlung von 1.500 GE und erbringt dafür 10 Jahre lang einen gleich bleibenden Einzahlungsüberschuss von jährlich 200 GE.

Es gilt also:

$$e_0 = -1.500; \qquad e = +200; \qquad T = 10 .$$

Mithin muss der interne Zinsfuß r^* der Bedingung

$$RBF(10\ J.; r^*) = \frac{-(-1.500)}{200} = 7{,}5$$

genügen. D.h., wir müssen den Zinssatz bestimmen, bei dem der Rentenbarwertfaktor für 10 Jahre dem Wert 7,5 möglichst nahe kommt. Durch einen Blick in die Tabelle der Rentenbarwertfaktoren erkennt man, dass der gesuchte Zinssatz r^* zwischen

5% (RBF (10 J., 5%) = 7,7217) und
6% (RBF (10 J., 6%) = 7,3601) liegt.

Steht eine Tabelle der Rentenbarwertfaktoren zur Verfügung, bei der Zinssätze mit weiteren Nachkommastellen ausgewiesen werden, so kann durch analoges Ablesen das Intervall für den internen Zinsfuß verkleinert werden. Aus RBF (10 J., 5,6%) = 7,5016 und RBF (10 J., 5,7%) = 7,4658 folgt z.B., dass der gesuchte interne Zinsfuß im Intervall von 5,6% und 5,7% liegt.

Interner Zinsfuß bei ewigen Renten

Berücksichtigt man weiterhin, dass für hinlänglich große Laufzeiten T der Ausdruck RBF (T, r*) durch 1/r* approximiert werden kann, so vereinfacht sich die Bestimmungsgleichung für r^* gemäß (IZ_5) zu:

$$(IZ_6) \qquad r^* = \frac{e}{-e_0} .$$

Beispiel 16:

Eine Investition bedingt eine Anfangsauszahlung von 1.000 GE und erbringt in den nächsten Jahren bis zum Zeitpunkt T einen gleich bleibenden Einzahlungsüberschuss von jährlich 140 GE. Unabhängig von dem konkreten Wert von T ergibt sich für r* gemäß (IZ_6):

$$r^* = \frac{140}{-(-1.000)} = 0{,}14 \ .$$

Das Ausmaß, in dem bei Anwendung der Approximationsformel (IZ_6) der z.B. auf zwei Nachkommastellen exakt ermittelte Wert von r* verfehlt wird, hängt maßgeblich von der Laufzeit des betrachteten Investitionsprojektes und damit von T ab. So beträgt der „exakte“ Wert bei einer Laufzeit von 10 Jahren r*(T = 10) = 6,64%, bei einer Laufzeit von 30 Jahren r*(T = 30) = 13,70% und bei einer Laufzeit von 50 Jahren r*(T = 50) = 13,98%. Der gemäß (IZ_6) ermittelte Wert weicht also umso stärker von dem „exakten“ Wert ab, je kleiner T ist.

Ermittlung des internen Zinsfußes abseits der Sonderfälle: Approximationsmethode

Wie bereits ausgeführt, lässt sich Gleichung (IZ_1) allgemein nicht explizit nach r* auflösen. Daher wollen wir Ihnen im folgenden eine vergleichsweise einfache, formal wenig anspruchsvolle und inhaltlich leicht nachvollziehbare **Approximationsmethode** vorstellen, mit deren Hilfe der interne Zinsfuß **aller Arten** von **Zahlungsreihen** mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden kann. Zur Erläuterung dieses Verfahrens wollen wir nochmals auf die Zahlungsreihe der Normalinvestition a_1 (e_0 = –80; e_1 = –12; e_2 = +50; e_3 = +66) eingehen, für die sich bekanntlich (vgl. dazu Abb. 1) ein interner Zinsfuß von 10% ergibt.

Lösungsidee

Wie Abb. 2 verdeutlicht, verläuft die Kapitalwertfunktion von a_1, deren Nullstelle wir suchen, zwischen beliebigen Zinssätzen mehr oder weniger stark „bauchig“. Die Lösungsidee bei der vorzustellenden Approximationsmethode besteht nun darin, für alternative Zinssätze r jeweils den zugehörigen Kapitalwert zu bestimmen und dabei die gesuchte Nullstelle zunächst „einzukreisen“, d.h., zwei Zinssätze r_P und r_N mit $K(r_P) > 0$ und $K(r_N) < 0$ zu finden, die möglichst nahe neben der gesuchten Nullstelle liegen. Verbindet man die beiden Punkte (K_P, r_P) und (K_N, r_N) durch eine Gerade, so kann deren Abszissenschnittpunkt $\tilde{r}_1$ als erste Näherung für den gesuchten Wert r* angesehen werden. Der so gefundene Näherungswert $\tilde{r}_1$ liegt bei der hier betrachteten Normalinvestition umso näher an dem exakten Wert r*, je enger die Nullstelle im Vorfeld schon eingekreist worden ist.

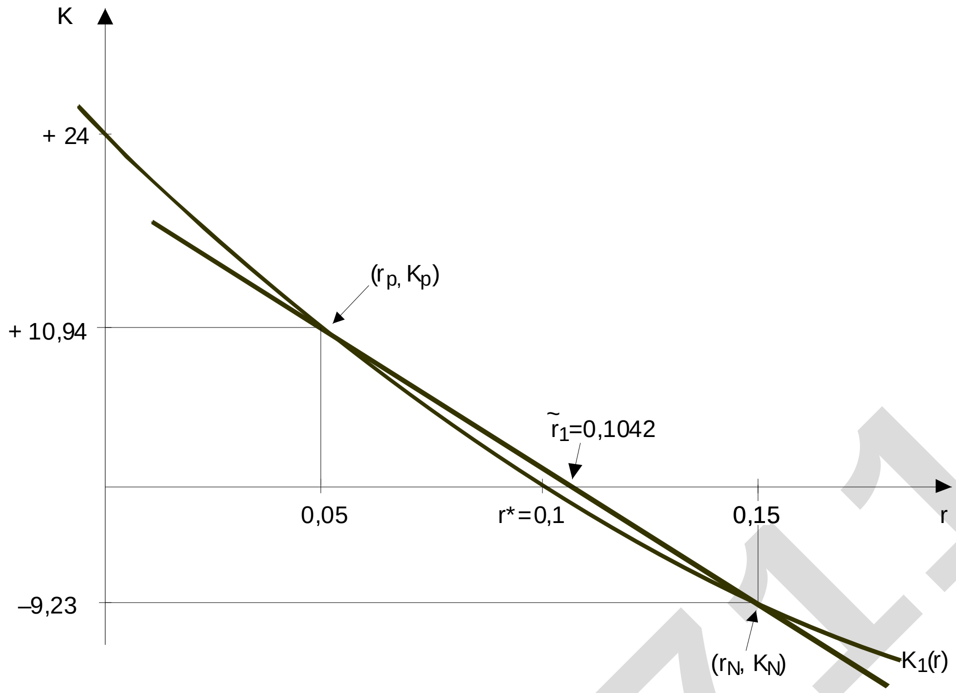


Abb. 2: Approximation des internen Zinsfußes durch grafische Interpolation

Lösungsalgorithmus

Die Bestimmung von $\tilde{r}_1$ bereitet keine größeren formalen Probleme, da letztlich nur die Nullstelle einer Geraden (Funktion ersten Grades), von der zwei Punkte bekannt sind und die damit eindeutig festgelegt ist, zu bestimmen ist. Für $\tilde{r}_1$ ergibt sich:

$$(IZ_7) \qquad \tilde{r}_1 = \frac{r_N \cdot K_P - r_P \cdot K_N}{K_P - K_N} .$$

Übungsaufgabe 12:

Versuchen Sie selbständig, die Formel (IZ_7) herzuleiten!

Beispiel 17:

Für unsere Beispielinvestition a_1 könnten z.B. auf Basis der Ausgangszinssätze r = 5% und r = 15% die Kapitalwerte K = 10,94 und K = –9,23 ermittelt worden sein. Gemäß (IZ_7) ergibt sich damit als erste Näherung für r* (Beachte: $5\% = r_P$; $15\% = r_N$; $10{,}94 = K_P$; $-9{,}23 = K_N$):

$$\tilde{r}_1 = \frac{0{,}15 \cdot 10{,}94 - 0{,}05 \cdot (-9{,}23)}{10{,}94 - (-9{,}23)} = 0{,}1042 .$$

Als erste Näherung für den internen Zinsfuß erhalten wir also den Wert 10,42% (vgl. Abb. 2).

Häufig ist die gemäß (IZ_7) bestimmte erste Näherung schon eine hinlängliche Approximation für r^*. Will man hingegen zu einem genaueren Wert (einer besseren Approximation) gelangen, so kann z.B. wie folgt fortgefahren werden:

– Es wird der $\tilde{r}_1$ entsprechende Kapitalwert $K(\tilde{r}_1)$ errechnet.

– Je nachdem, ob $K(\tilde{r}_1)$ positiv oder negativ ist,[1] werden der bisherige Zinssatz r_P bzw. r_N durch $\tilde{r}_1$ sowie K_P bzw. K_N durch $K(\tilde{r}_1)$ ersetzt und erneut ein Approximationswert $\tilde{r}_2$ nach (IZ_7) bestimmt.

– Dieser Zyklus kann beliebig oft wiederholt werden, so dass der interne Zinsfuß r^* stets in der gewünschten Genauigkeit approximiert werden kann.

Übungsaufgabe 13:

Führen Sie für unsere Beispielinvestition a_1 die nächsten beiden Approximationszyklen durch und bestimmen Sie $\tilde{r}_2$ und $\tilde{r}_3$!

Das skizzierte Verfahren erlaubt es im Allgemeinen, recht schnell den internen Zinsfuß mit der gewünschten Genauigkeit zu bestimmen, wobei sich in aller Regel schon im ersten Approximationsschritt ein brauchbarer Näherungswert ergibt, sofern r_P und r_N möglichst dicht beieinander liegen.

4.2.3 Existenz und Eindeutigkeit

In dem im vorigen Abschnitt untersuchten Beispiel hatten wir es mit der Investition a_1 zu tun, deren Kapitalwertfunktion im gesamten relevanten Bereich streng monoton fallend verlief und dementsprechend auch genau eine Nullstelle, also einen eindeutigen internen Zinsfuß aufwies.

Investitionen mit mehreren internen Zinsfüßen

Betrachtet man nun die Investition a_2 (e_0 = –1.000; e_1 = +2.300; e_2 = –1.320), so ergeben sich gemäß (IZ_4) die beiden internen Zinsfüße $r_1^* = 10\%$ und $r_2^* = 20\%$ (vgl. Beispiel 14). Der obere Kurvenzug in Abb. 3 verdeutlicht den Verlauf der Kapitalwertfunktion von a_2.

1 Für den hier betrachteten Fall einer Normalinvestition ergibt sich aufgrund der Konvexität der Kapitalwertfunktion stets ein negativer Wert für $K(\tilde{r}_1)$.

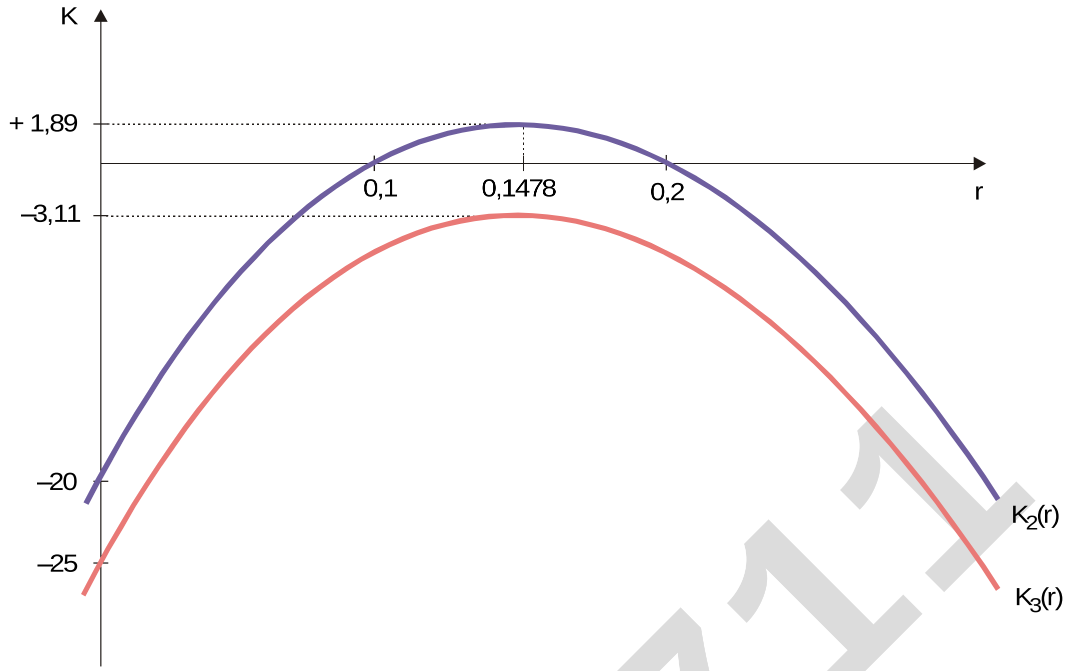


Abb. 3: Kapitalwertfunktion mit zwei internen Zinsfüßen bzw. keinem internen Zinsfuß

Investitionen ohne internen Zinsfuß

Andererseits gibt es auch Zahlungsreihen, für die sich überhaupt kein interner Zinsfuß bestimmen lässt. Um diese Möglichkeit aufzuzeigen, brauchen wir nur anzunehmen, dass in dem genannten Beispiel statt $e_0 = -1.000$ nun $e_0 = -1.005$ gilt. Bei unveränderter Geltung der übrigen Zahlenwerte bedeutet dies eine Verschiebung der Kapitalwertkurve um 5 Einheiten nach unten, so dass auch das bei $r = 0{,}1478$ liegende Maximum der Kapitalwertfunktion im negativen Bereich liegt und dementsprechend überhaupt keine Nullstelle existiert (vgl. die untere Kurve in Abb. 3). Ohne auf nähere Beweise einzugehen, wollen wir zu diesem Problem die folgenden Sätze angeben:[1)]

- Die Zahl der internen Zinsfüße, die größer als –1 sind, ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel in der Zahlungsreihe oder um eine gerade Zahl kleiner („kartesische Zeichenregel").[2)]

1 Vgl. HAX (1985), S. 18-19; WITTEN/ZIMMERMANN (1977), S. 101-109.

2 Betrachtet man Abb. 3, so scheint ein Widerspruch zu diesem Satz möglich. Verschiebt man die Kurve $K_2(r)$ um 1,89 Einheiten nach unten, d.h. gilt statt $e_0 = -1.000$ nun $e_0 = -1.001{,}89$, so berührt die sich daraus ergebende Kapitalwertkurve die Abszisse bei $r = 0{,}1478$. Sie hat dann offensichtlich nur eine Nullstelle bzw. einen internen Zinsfuß. Da das betrachtete Investitionsprojekt zwei Vorzeichenwechsel aufweist, dürfte es nach der angeführten Regel entweder keinen internen Zinsfuß oder zwei interne Zinsfüße haben. Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man berücksichtigt, dass hier im mathematischen Sinne (formal) zwei Nullstellen bzw. interne Zinsfüße vorliegen, die aber in einem Punkt zusammenfallen. Derartige Sonderfälle werden, nicht zuletzt wegen der damit verbundenen Interpretationsprobleme, im Weiteren nicht betrachtet.

Ein Projekt mit der Zahlungsreihe $e_0 = -100$; $e_1 = +20$; $e_2 = +20$; $e_3 = -10$; $e_4 = +50$; $e_5 = +50$; $e_6 = -30$; $e_7 = +40$, in der offenbar fünfmal das Vorzeichen wechselt, hätte dementsprechend entweder fünf oder drei oder nur genau einen internen Zinsfuß.

Ökonomisch sind nun allerdings vor allem solche Zahlungsreihen relevant, bei denen auf einen anfänglichen Auszahlungsüberschuss oder eine Reihe anfänglicher Auszahlungsüberschüsse anschließend nur noch Einzahlungsüberschüsse folgen. Derartige Investitionen werden – wie Ihnen bereits bekannt ist – als Normalinvestitionen bezeichnet. Aus der kartesischen Zeichenregel folgt für derartige Investitionen sofort:

- Für Investitionen, bei denen zuerst nur Auszahlungen und anschließend nur noch Einzahlungen folgen (Normalinvestitionen), ergibt sich im Bereich $(r > -1)$ stets genau ein eindeutiger interner Zinsfuß.

Beachtet man zusätzlich das Vorzeichen des Nominalwertes, so gilt schließlich auch noch:

- Ist der Nominalwert einer Normalinvestition positiv (negativ), so ist auch der interne Zinsfuß positiv (negativ). Dementsprechend weist eine Normalinvestition, deren Nominalwert kleiner oder gleich Null ist, auch für jeden positiven Kalkulationszins einen negativen Kapitalwert auf.

4.3 Ökonomische Interpretation der Kennzahl „interner Zinsfuß"

Bei den folgenden Ausführungen wollen wir analog zur bisherigen Untersuchung investitionstheoretischer Kennzahlen so vorgehen, dass zunächst eine ökonomische Interpretation der **originären Kennzahl** „interner Zinsfuß" vorgenommen wird und dann eine auf ihr basierende derivative **Entscheidungsregel** auf ihre Tauglichkeit als Vorteilhaftigkeitskriterium untersucht wird (Abschnitt 4.4).

Beschränkung auf Normalinvestition

Weiterhin beschränken wir uns von vornherein nur noch auf die Betrachtung des internen Zinsfußes von **Normalinvestitionen,** da diese ökonomisch vorrangig von Bedeutung sind. Die im Folgenden angegebenen Sätze zur ökonomischen Interpretation des internen Zinsfußes beziehen sich also nur auf diesen speziellen, aber wichtigen Fall.

Ökonomische Interpretation bei Fremdfinanzierung

Zur Verdeutlichung des ökonomischen Gehaltes des internen Zinsfußes einer solchen Normalinvestition sei weiter zunächst unterstellt, das betrachtete Projekt werde fremdfinanziert und alle Ein- und Auszahlungen würden nach Art eines Kontokorrentkredits abgerechnet. Würden die jeweiligen Salden dabei jeweils zum

Kalkulationszins verzinst, so erhält man als Schlusssaldo dieses Kontos den Endwert. Rechnet man das Konto hingegen auf der Basis von r^* ab, so muss sich für den Schlusssaldo ± 0 ergeben.

Beispiel 18:

Zur Verdeutlichung sei erneut die Zahlungsreihe der Investition a_1 ($e_0 = -80$; $e_1 = -12$; $e_2 = +50$; $e_3 = +66$) betrachtet, für die $r^* = 0{,}1$ gilt. Für das entsprechende „Konto“ ergibt sich somit die nachfolgend dargestellte Entwicklung.

t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r^*$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + (e_t + z_t)$
0	–80	0	–80	–80
1	–12	–8	–20	–100
2	+50	–10	+40	–60
3	+66	–6	+60	0
Σ	+24	–24	±0	–240

Tab. 1: Kontodarstellung bei Fremdfinanzierung mit $r = r^*$

C_t bezeichnet dabei den Kontostand im Zeitpunkt t (mit $C_{-1} := 0$) und z_t die im Zeitpunkt t erfolgende Zinsbelastung. Würde das betrachtete Projekt durch einen zu 10% verzinslichen Kredit finanziert, so könnte dieser durch die nachfolgenden Einzahlungen bis zum Ende der Projektlaufzeit gerade vollständig abgetragen werden. Wäre der zugrundegelegte Zinssatz höher als der interne Zinsfuß von 10%, so verbliebe am Ende noch ein Negativsaldo; bei einem niedrigeren Satz hingegen würde sich ein positives Endguthaben errechnen.

Verallgemeinern wir diesen Sachverhalt, so ergibt sich:

Interpretation als „maximale Kapitalkostenbelastung“

- Würden alle Auszahlungen einer Normalinvestition durch Kreditaufnahme gedeckt, so gibt der interne Zinsfuß den Kreditzins an, bei dem die nachfolgenden Einzahlungen gerade ausreichen, um die anfangs aufgenommenen Kreditbeträge zu tilgen und zu verzinsen. Der interne Zinsfuß gibt also an, welche „Kapitalkostenbelastung“ das betrachtete Investitionsprojekt gerade noch verkraften könnte. In diesem Sinne kann der interne Zinsfuß auch als die „Rendite“ einer Investition angesehen werden.

Beispiel 18: (Fortsetzung)

Weiterhin geben die C_t gemäß Tab. 1 den Betrag der bis zum Zeitpunkt t noch nicht abgetragenen Verbindlichkeiten an, den man auch als das in der Periode (t + 1) „gebundene Kapital" bezeichnen kann. Die durchschnittliche Kapitalbindung während der Projektlaufzeit ergibt sich dann als einfacher Durchschnitt dieser C_t-Werte, beträgt also 240/3. In analoger Weise ergibt sich die durchschnittliche Zinsbelastung während der Projektlaufzeit als Durchschnitt der z_t-Werte, beträgt im vorliegenden Fall also 24/3. Der Quotient dieser beiden Größen beträgt im vorliegenden Fall 10%, stimmt also genau mit dem internen Zinsfuß überein.

Interpretation als „Verzinsung des durchschnittlich gebundenen Kapitals"

Auch dieser Sachverhalt kann für Normalinvestitionen verallgemeinert werden:

- Der interne Zinsfuß einer Normalinvestition kann als die Verzinsung des „durchschnittlich gebundenen Kapitals" des betrachteten Investitionsprojektes interpretiert werden.

Analoge ökonomische Interpretation bei Eigenfinanzierung

Bislang wurde bei der ökonomischen Interpretation der Kennzahl „interner Zinsfuß" von einer Fremdfinanzierung ausgegangen. Mit Hilfe von Übungsaufgabe 14 können Sie selbst erarbeiten, dass die aufgezeigten Zusammenhänge auch für den Fall der Finanzierung aus freien Liquiditätsreserven gelten; die Finanzierungskosten stellen dann die Opportunitätskosten des Verzichts auf eine anderweitige Verwendung der liquiden Mittel dar.

Übungsaufgabe 14:

In Abweichung zur bisher explizit betrachteten Situation der 100%-igen Fremdfinanzierung einer Normalinvestition sei angenommen, der Investor verfüge im Zeitpunkt t = 0 über liquide Mittel in einer Höhe, die es ihm erlaubt, das Projekt ohne zwischenzeitliche Aufnahme von Fremdmitteln zu realisieren. Überlegen Sie, ob auch unter dieser Voraussetzung der interne Zinsfuß der Investition a_1 in Höhe von $r^* = 10\%$ als Verzinsung des „durchschnittlich durch die Investition a_1 gebundenen Kapitals" bzw. als „maximale Kapitalkostenbelastung" interpretiert werden kann!

4.4 Tauglichkeit als Vorteilhaftigkeitskriterium

Auch auf Grundlage der finanzwirtschaftlichen Kennzahl „interner Zinsfuß“ lassen sich **Entscheidungsregeln** zur Beurteilung der Vorteilhaftigkeit einer Investition ableiten.

Entscheidungsregel

Die erste Interpretation des internen Zinsfußes als „maximal verkraftbare Kapitalkostenbelastung“ des betrachteten Investitionsprojekts legt die Vermutung nahe, dass ein Investitionsprojekt dann vorteilhaft ist, wenn seine Rendite den Kalkulationszins übersteigt, d.h. wenn die maximal verkraftbaren Finanzierungskosten höher sind als die tatsächlich in Rechnung zu stellenden. Formal lässt sich dies also in folgender Entscheidungsregel für projektindividuelle Betrachtungen ausdrücken:

$$(V_9) \qquad r^* > r \; .$$

Analyse der Tauglichkeit der Entscheidungsregel als Vorteilhaftigkeitskriterium:

Zur Analyse der Tauglichkeit dieser Entscheidungsregel als Kriterium für die projektindividuelle Beurteilung der Vorteilhaftigkeit ist daran zu erinnern, dass es sich bei dem internen Zinsfuß r* wie auch bei den Finanzierungskosten r um relative Größen handelt. Ein Vergleich derartiger Relativgrößen führt nur immer dann zu allgemein sinnvollen Ergebnissen, wenn die Bezugsbasen der Relativzahlen, also die jeweiligen „Kapitalbindungen“, übereinstimmen. Diese Identität der Bezugsbasen von internem Zinsfuß und Kalkulationszins ist bei projektindividuellen Betrachtungen quasi automatisch erfüllt.

– Projektindividuelle Entscheidungen

Bei projektindividuellen Entscheidungen, also einem Vergleich zwischen der Durchführung eines Investitionsprojektes und seinem Unterlassen, ergibt sich unter der in den Kurseinheiten 1 und 2 dieses Kurses durchgängig verwendeten Annahme, dass die Finanzierung den Charakter einer finanzwirtschaftlichen Komplementärmaßnahme aufweist,[1] stets eine gleiche „Kapitalbindung“ der Investition und der ihr gegenübergestellten Finanzierung aus Kreditaufnahme oder der Verwendung von liquiden Mitteln. Dass die Entscheidungsregel (V_9) für Normalinvestitionen in diesem Fall mit dem Kapitalwertkriterium übereinstimmt, wird grafisch auch aus Abb. 1 deutlich: Da K(r) mit steigendem Kalkulationszins fällt und $K(r^*) = 0$ gilt, muss K(r) für kleinere Werte des Kalkulationszinses positiv, für größere negativ sein.[2]

1 Vgl. dazu Abschnitt 1.3 der KE 1 dieses Kurses.

2 Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass hier nur Normalinvestitionen betrachtet werden. Bei Nicht-Normalinvestitionen ergibt sich keine allgemeine Kompatibilität der Entscheidungsregel (V_9) mit der Zielsetzung der Kapitalwertmaximierung.

Anhand der grafischen Verdeutlichung von Kapitalwertfunktionen lässt sich weitergehend auch leicht erkennen, dass sich aus $r^* > r$ ($r^* < r$) im allgemeinen nur dann eindeutig auf $K(r) > 0$ ($K(r) < 0$) schließen lässt, wenn die Kapitalwertfunktion genau einen internen Zinsfuß aufweist. Da diese Bedingung für Normalinvestitionen erfüllt ist, sind für Normalinvestitionen projektindividuelle Entscheidungen, die nach Kriterium (V_9) getroffen werden, zwingend mit der originären Zielvorstellung kompatibel. Für andere Investitionen als Normalinvestitionen ist diese Bedingung hingegen nicht zwingend erfüllt und es können daher Widersprüche zwischen (V_9) und dem Ziel der Endvermögensmaximierung auftreten, wie z.B. die Kapitalwertfunktion $K_2(r)$ in Abb. 3 deutlich macht. Beide dort zu Projekt a_2 abgetragenen internen Zinsfüße $r_1^* = 10\%$ und $r_2^* = 20\%$ liegen oberhalb eines Kalkulationszinses von $r = 5\%$. Trotzdem würde Projekt a_2 bei Gültigkeit dieses Kalkulationszinssatzes einen negativen Kapitalwert liefern, im Sinne der originären Zielsetzung Endvermögensmaximierung also unvorteilhaft sein.

Bei sehr vordergründiger Betrachtung könnte man irrtümlicher Weise versucht sein, auf der Kennzahl des internen Zinsfußes auch eine Entscheidungsregel für Auswahlentscheidungen aufzubauen. Unter einer Auswahlentscheidung soll die Entscheidung zwischen mehreren sich einander ausschließenden Investitionsprojekten mit oder ohne Vorhandensein einer expliziten Unterlassensalternative verstanden werden. Man könnte dazu etwa formulieren, dass das Investitionsprojekt mit dem höchsten internen Zinsfuß auszuwählen sei. Solche Entscheidungsregeln sind in der Praxis relativ weit verbreitet und finden sich bedauerlicher Weise vereinzelt sogar in Lehrbüchern zur Investitionstheorie. Sie sind trotz ihrer Verbreitung aber im Allgemeinen nicht kompatibel mit der Zielsetzung der Endvermögensmaximierung. Für Auswahlentscheidungen können sich dabei Widersprüche, anders als bei projektindividuellen Entscheidungen, nicht erst für Investitionsprojekte mit beliebigen Zahlungsreihen ergeben, sondern auch bereits bei einer Auswahl aus verschiedenen Normalinvestitionen.

– Auswahlentscheidungen

Bei Auswahlentscheidungen stimmen nämlich die „Kapitalbindungen" der zur Auswahl stehenden Investitionen im Allgemeinen nicht überein.[1)] Daher haben die internen Zinsfüße als Relativzahlen häufig unterschiedliche Bezugsbasen und sind damit untereinander nicht mehr sinnvoll vergleichbar. Formal kann die Möglichkeit einer Inkompatibilität an dem Bild zweier sich schneidender Kapitalwertkurven verdeutlicht werden, wie es Abb. 4 in Beispiel 19 zeigt:

---

1 Dies ist im übrigen in aller Regel selbst dann der Fall, wenn die Laufzeiten und die Anschaffungsauszahlungen der zur Auswahl stehenden Investitionen übereinstimmen.

Beispiel 19:

Den Zahlungsreihen zweier Projekte a_3 (–200; +210; +23) und a_4 (–200; 0; +250) entsprechen die in Abb. 4 dargestellten Kapitalwertfunktionen. Projekt a_4 weist zwar mit 11,8% gegenüber 15% bei Projekt a_3 den niedrigeren internen Zinsfuß auf, führt bei Kalkulationszinssätzen unterhalb von ca. 8% aber dennoch zu dem höheren Kapitalwert. So gilt etwa bei einem Kalkulationszinssatz von 6%: $K_4 = 22{,}5 > K_3 = 18{,}6$.

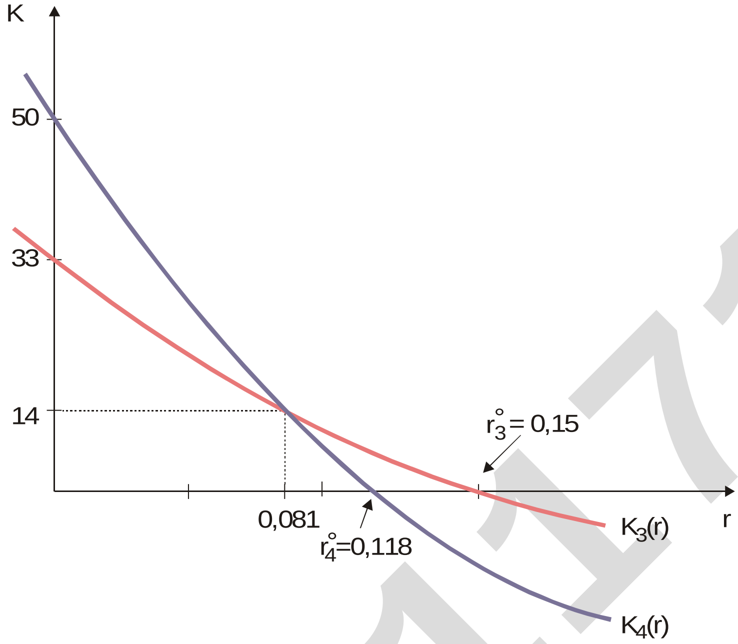


Abb. 4: Kapitalwertfunktionen zweier Projekte a_3 und a_4

Damit sagen Vergleiche der durch den internen Zinsfuß ja ebenfalls verdeutlichten maximalen Belastbarkeit mit Finanzierungskosten noch gar nichts darüber aus, welches Projekt auf der Basis der tatsächlich maßgeblichen Finanzierungskosten am günstigsten ist.

Systematische Verzerrungen bei Auswahlentscheidungen

Zusammenfassend ist somit festzuhalten, dass der **interne Zinsfuß keine geeignete Kennzahl für Auswahlentscheidungen** darstellt. Derartige Entscheidungen würden vielmehr systematisch verzerrt, und zwar

– zuungunsten von Projekten mit hohem Kapitaleinsatz, langer Anlaufphase und dementsprechend spätem Mittelrückfluß,

– zugunsten von Projekten mit geringem Kapitaleinsatz und schnellem Mittelrückfluß.

Im ersten Fall ist die Bezugsbasis für einen eventuell relativ niedrigen internen Zinsfuß eine vergleichsweise hohe Kapitalbindung (so in unserem Beispiel 19 bei

Projekt a_4), während sich ein hoher interner Zinsfuß im zweiten Fall nur auf eine deutlich geringere Basis bezieht (so bei Projekt a_3).

Die fehlende Eignung des internen Zinsfußes für Auswahlentscheidungen wird noch deutlicher, wenn man sich vor Augen führt, dass sich Kapitalwertfunktionen zweier Investitionsprojekte, selbst bei Normalinvestitionen, im Extremfall beliebig oft schneiden können. Sie können maximal so viele Schnittpunkte aufweisen, wie ihre Differenzzahlungsreihe Nullstellen hat. Genauso oft kann dann aber auch ihre Vorteilhaftigkeit in Abhängigkeit vom Kalkulationszinssatz wechseln. Dass der einfache Vergleich zweier interner Zinsfüße über solche mehrfachen Vorteilhaftigkeitswechsel keine sinnvolle Aussage machen kann, dürfte offensichtlich sein. Genauso wenig kann er es aber letztlich bei einem einzigen Schnittpunkt von Kapitalwertfunktionen.

Die nachfolgende Übungsaufgabe 15 ermöglicht Ihnen, sich die Problematik von Auswahlentscheidungen auf Basis des internen Zinsfußes noch einmal selbst zu verdeutlichen.

Übungsaufgabe 15:

Einem Investor stehen im Entscheidungszeitpunkt $t = 0$ zwei konkrete Investitionsprojekte a_1 und a_2 sowie die Unterlassensalternative zur Auswahl. Die beiden Investitionsprojekte sind mit folgenden Zahlungssalden verbunden:

$$a_1: \quad e_0 = -10.000; \quad e_1 = 0; \quad e_2 = +13.200$$
$$a_2: \quad e_0 = -10.000; \quad e_1 = +12.000.$$

a) Geben Sie an, in welchem Bereich jeweils der Zinssatz, zu dem auf dem vollkommenen Finanzmarkt Gelder angelegt und aufgenommen werden können, liegen muss, damit

(1) die Investitionsalternative a_1

(2) die Investitionsalternative a_2

(3) die Unterlassensalternative U

die Optimalalternative für einen endvermögensmaximierenden Investor darstellt!

b) Stellen Sie fest, unter welchen Voraussetzungen eine auf den internen Zinsfuß gestützte Auswahlentscheidung im vorliegenden Fall zu einem mit dem Kapitalwertkriterium übereinstimmenden bzw. zu einem davon abweichenden Ergebnis führen würde!

5 Zur Berücksichtigung periodenindividueller Kalkulationszinsfüße

5.1 Problemstellung

Bislang haben wir ausschließlich die aus einem Investitionsprojekt unmittelbar resultierenden Ein- und Auszahlungen betrachtet und bei der Beurteilung der Vorteilhaftigkeit eines Investitionsprojektes unterstellt, dass der Investor zu einem im Zeitablauf konstanten und für Geldanlage und Geldaufnahme identischen Zinssatz in beliebiger Höhe Kredite aufnehmen und liquide Mittel anlegen kann. Unter dieser Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes in ihrer strengen Form ist es – wie insbesondere in den Kapiteln 2 und 3 gezeigt – möglich, Investitionsentscheidungen auf der Basis finanzmathematischer Kennzahlen, d.h. ohne explizite Berücksichtigung der finanziellen Ausgangssituation des Investors und dessen verfügbarer Finanzierungsmöglichkeiten zu treffen; die implizite Berücksichtigung der Finanzierungskosten durch den Kalkulationszinsfuß reicht völlig aus, um die in Hinblick auf die Zielsetzung Endvermögensmaximierung optimale Investitionspolitik zu ermitteln.

Übungsaufgabe 16:

In Abschnitt 1.3.3 der Kurseinheit 1 dieses Kurses wurden neben der Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes in ihrer strengen Form schwächere Finanzmarktprämissen formuliert. Verdeutlichen Sie sich nochmals, worin die wesentlichen Unterschiede der dort unterschiedenen Finanzmarktprämissen bestehen!

Die Ableitung zieladäquater Investitionsentscheidungen mittels finanzmathematischer Kennzahlen setzt nun keineswegs zwingend die Existenz eines vollkommenen Finanzmarktes im strengen Sinne voraus. Im Folgenden soll daher exemplarisch für das Endwert- und Kapitalwertkriterium gezeigt werden, dass es mittels finanzmathematischer Kennzahlen möglich ist, auch unter schwächeren Finanzmarktprämissen zieladäquate Investitionsentscheidungen abzuleiten.

Im Zeitablauf wechselnder einheitlicher Marktzins

In Abschnitt 5.2 wird zunächst unter Beibehaltung der Prämisse übereinstimmender Soll- und Habenzinssätze gezeigt, dass die in Kapitel 2 für den Fall eines vollkommenen Finanzmarktes im strengen Sinne abgeleiteten Formeln zur Bestimmung des Endwertes bzw. Kapitalwertes nur geringfügig modifiziert werden müssen, um im Zeitablauf wechselnde Periodenzinsen berücksichtigen zu können. Dabei zeigt sich, dass der Endwert bzw. Kapitalwert eines Investitionsprojektes auch im Fall wechselnder Periodenzinsfüße eine verlässliche Kennzahl für die durch die betrachtete Investition im Vergleich zur Unterlassensalternative erzielbare Endvermögensänderung darstellt und Investitionsentscheidungen weiterhin unabhängig von der finanziellen Ausgangssituation des Investors und ohne explizite Berücksichtigung verfügbarer Finanzierungsmöglichkeiten getroffen werden können.

Unterschiedliche Soll- und Habenzinssätze

In Abschnitt 5.3 wird schließlich nachgewiesen, dass es selbst bei divergierenden Soll- und Habenzinssätzen, die zudem im Zeitablauf variieren können, also unter einer Finanzmarktprämisse, die realen Finanzierungsgegebenheiten deutlich näher kommen dürfte als die Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes in ihrer strengen Form, möglich ist, unter bestimmten Voraussetzungen zieladäquate Investitionsentscheidungen mittels Kapitalwertkriterium bzw. Endwertkriterium abzuleiten. Die finanzielle Ausgangssituation des Investors wird jetzt jedoch entscheidungsrelevant.

Darauf aufbauend werden wir dann in Abschnitt 5.4 noch kurz auf zwei Problemfelder eingehen, die Anlass dazu geben, für Investitionsentscheidungsprobleme nach Lösungsansätzen zu suchen, die über die in diesem A-Modul vorgestellten Kalküle hinausgehen und auf die dann in vertiefenden Modulen des Hauptstudium noch näher eingegangen wird.

5.2 Wechselnde Periodenzinsfüße bei vollkommenem Finanzmarkt

In der bisher behandelten Grundform sehen die Endwert- und die Kapitalwertmethode die Verwendung eines einheitlichen Kalkulationszinsfußes vor. Behält man zunächst die Prämisse eines einheitlichen Soll- und Habenzinsfußes bei, so ist es jedoch immer noch möglich, dass für diesen einheitlichen Zinsfuß im Zeitablauf wechselnde Werte erwartet werden.

In einem solchen Fall würde der (vielleicht naheliegende) Versuch, die Endwert- oder Kapitalwertberechnung in der bisher behandelten Grundform auf der Basis eines – wie auch immer im Detail ermittelten – Durchschnittszinsfußes vorzunehmen, zu mehr oder weniger großen Unschärfen führen. Um dies zu vermeiden, liegt es nahe, Endwert und Kapitalwert gar nicht mehr auf der Basis eines für alle Perioden einheitlichen Zinsfußes zu berechnen, sondern mit periodenindividuellen (also möglicherweise unterschiedlichen) Zinsfüßen zu arbeiten.

Beispiel 20:

Eine Investition sei durch die Zahlungsreihe $e_0 = -100$, $e_1 = e_2 = +60$ gekennzeichnet. Der Investor geht im Entscheidungszeitpunkt $t = 0$ davon aus, dass er in der ersten (zweiten) Periode finanzielle Mittel in beliebiger Höhe für jeweils ein Jahr zu 12% (8%) p. a. anlegen und aufnehmen kann, rechnet also mit sinkenden Zinsen.

Fall A:

Die benötigte Investitionssumme von 100 steht in Form liquider Mittel zur Verfügung. Im Beispiel beträgt das Vermögen in $t = 2$ bei Unterlassen der Investition, d.h. bei Anlage der liquiden Mittel zum jeweiligen Marktzins:

$$EV_U^A = 100 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}08 = 120{,}96 .$$

Bei Durchführung der Investition und verzinslicher „Zwischenanlage“ der nach einem Jahr zufließenden Mittel beträgt das Vermögen in $t = 2$:

$$EV_I^A = 60 \cdot 1{,}08 + 60 = 124{,}80 .$$

Die aus der Investitionsdurchführung resultierende Endvermögensdifferenz beträgt im Fall A mithin:

$$EV_I^A - EV_U^A = 124{,}80 - 120{,}96 = 3{,}84 .$$

Fall B:

Zur Durchführung der Investition stehen keinerlei liquide Mittel zur Verfügung, so dass das Projekt zu 100% durch Kreditaufnahme finanziert werden müsste. Geht man davon aus, dass alle gegenwärtigen und zukünftigen Zahlungen sich in Gutschriften oder Belastungen auf dem Kontokorrentkonto niederschlagen und dieses Konto im Falle des Verzichts auf das Investitionsprojekt folgende (willkürlich gewählten) Kontostände C_t aufwiese:

$$C_0 = -600, \quad C_1 = -690, \quad C_2 = -670 ,$$

so ergeben sich statt der angegebenen C_t–Werte im Falle der Durchführung der Investition folgende Beträge C'_t für den jeweiligen Kontostand:

$C'_0 = -600 - 100 = -700$ (Mehrbelastung durch die Investitionssumme)

$C'_1 = -690 - 100 \cdot 1{,}12 + 60 = -742$ (Mehrbelastung durch die Investitionssumme und die daraus resultierende zusätzliche Zinsbelastung; Entlastung durch die aus dem Projekt resultierende Gutschrift)

$C'_2 = -670 - (100 \cdot 1{,}12 - 60) \cdot 1{,}08 + 60 = -666{,}16$ (Erläuterung siehe oben).

Im Vergleich zur Unterlassensalternative (also dem Verzicht auf die zusätzliche Kreditaufnahme mit $EV_U = C_2 = -670$) bewirkt die Durchführung der Investition also, dass das Kontokorrentkonto im Zeitpunkt $t = 2$ um 3,84 [GE] weniger belastet wäre. Es gilt folglich im Fall B:

$$EV_I^B - EV_U^B = -666{,}16 - (-670) = 3{,}84\,.$$

Unabhängig von der in den Fällen A und B als unterschiedlich unterstellten Finanzlage des Unternehmens ergibt sich also auch im Falle wechselnder Periodenzinssätze ein identischer Wert für die interessierende Endvermögensdifferenz.

Würde man nun den Endwert oder Kapitalwert des Projektes gemäß (EW_1) bzw. (K_1) auf Basis eines (naheliegenden) Durchschnittszinssatzes von 10% ermitteln, so ergäben sich mit

$$EW\,(r = 10\,\%) = -100 \cdot 1{,}1^2 + 60 \cdot 1{,}1 + 60 = 5$$

bzw.

$$K\ (r = 10\%) = -100 + 60 \cdot 1{,}1^{-1} + 60 \cdot 1{,}1^{-2} = 4{,}13$$

Werte, die nicht mehr der Endvermögensdifferenz bzw. der abgezinsten Endvermögensdifferenz entsprächen.

Ermittelt man aber den Endwert oder Kapitalwert des Projekts auf Basis der relevanten Periodenzinsen, so ergibt sich mit

$$EW(r_1 = 12\%;\ r_2 = 8\%) = -100 \cdot 1{,}12 \cdot 1{,}08 + 60 \cdot 1{,}08 + 60 = 3{,}84$$

bzw.

$$K\ \ (r_1 = 12\%;\ r_2 = 8\%) = -100 + 60 \cdot 1{,}12^{-1} + 60 \cdot 1{,}12^{-1} \cdot 1{,}08^{-1} = 3{,}18$$

$$(= 3{,}84 \cdot 1{,}08^{-1} \cdot 1{,}12^{-1})$$

jeweils ein Wert, der formal der Relation (EW_3) bzw. (K_4) exakt entspricht und inhaltlich unverändert als die aus der Durchführung des Investitionsprojektes resultierende Vermögensdifferenz bezogen auf den Zeitpunkt $t = T$ bzw. $t = 0$ interpretiert werden kann.

Wie unser Beispiel schon vermuten lässt, kann allgemein gesagt werden, dass der Endwert bzw. der Kapitalwert auch im Fall wechselnder Periodenzinsfüße einen verlässlichen Indikator für die durch die betrachtete Investition im Vergleich zum Unterlassen erzielbare Endvermögensänderung darstellt, sofern es nur gelingt, die maßgeblichen Periodenzinsfüße korrekt abzuschätzen.

Die Formeln (EW_1) bzw. (K_1) lassen sich für den Fall wechselnder Periodenzinsen verallgemeinern. Bezeichnet man zunächst den für die τ-te Periode, also den Zeitraum zwischen den Zeitpunkten $t = \tau - 1$ und $t = \tau$ maßgeblichen Periodenzins mit r_τ bzw. den korrespondierenden Zinsfaktor mit q_τ, so gilt in diesem Fall für das Produkt aller Zinsfaktoren der Perioden t bis t′ ($t' \geq t$), das nachfolgend als $Q(t, t')$ bezeichnet wird:

$$(FM_{11})\quad Q(t, t') = q_t \cdot q_{t+1} \cdot \ldots \cdot q_{t'} = \prod_{\tau=t}^{t'} q_\tau\ .$$

Unter Beachtung von (FM_{11}) kann (EW_1) bzw. (K_1) vereinfacht werden zu:

$$(EW_4) \quad EW = \sum_{t=0}^{T-1} e_t \cdot Q(t+1,T) + e_T \quad \text{und}$$

$$(K_5) \quad K = e_0 + \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot \left[Q(1,t)\right]^{-1} \quad .$$

Beachtet man, dass definitionsgemäß für t = 1, 2, …, T – 1

$$(FM_{12}) \quad Q(t+1,T) \cdot \left[Q(1,T)\right]^{-1} = \left[Q(1,t)\right]^{-1}$$

gilt, so kann statt (K_5) auch

$$(K_6) \quad K = e_0 + \sum_{t=1}^{T-1} e_t \cdot Q(t+1,T) \cdot \left[Q(1,T)\right]^{-1} + e_T \cdot \left[Q(1,T)\right]^{-1}$$

geschrieben werden, woraus folgt:

$$(K_7) \quad K = EW \cdot \left[Q(1,T)\right]^{-1} .$$

Kapitalwert und Endwert stellen im Falle projektindividueller Entscheidungen (vgl. dazu Abschnitt 2.3) also auch bei differierenden Periodenzinsfüßen vollständig äquivalente Kennzahlen dar.

Übungsaufgabe 17:

Ein Investor geht im Entscheidungszeitpunkt t = 0 davon aus, dass er in den nachfolgenden Perioden finanzielle Mittel in beliebiger Höhe für jeweils ein Jahr zu folgenden Zinssätzen (Zinssituation 1) anlegen und aufnehmen kann:

Periode 1:	5%
Periode 2:	7%
Periode 3:	9% .

Er rechnet also mit steigenden Zinsen und überlegt nun, ob es unter der von ihm verfolgten Zielsetzung der Endvermögensmaximierung sinnvoll ist, das aus Beispiel 4 bekannte Investitionsprojekt a_1 (e_0 = –100, e_1 = +10, e_2 = +10, e_3 = +100) durchzuführen.

a) Berechnen Sie den Barwert der Einzahlung von 100 GE in t = 3!

b) Berechnen Sie den Kapitalwert des Investitionsprojektes a_1!

c) Angenommen, der Investor ginge davon aus, dass für die nachfolgenden Perioden folgende Zinssätze (Zinssituation 2) gelten werden:

Periode 1:	9%
Periode 2:	7%
Periode 3:	5% .

1) Berechnen Sie erneut den Barwert der Einzahlung von 100 GE in $t = 3$!

2) Wenn Sie richtig gerechnet haben, so stimmen die Ergebnisse der Teilaufgaben a) und c1) exakt überein, der Gegenwartswert einer zukünftigen Zahlung ist also unabhängig von der Reihenfolge der Zinssätze. Kann daraus geschlossen werden, dass die Reihenfolge der Zinssätze auch für die Höhe des Kapitalwertes und damit für die Investitionsbeurteilung irrelevant ist?

3) Überprüfen Sie Ihre Überlegungen zu c2) durch die Berechnung des Kapitalwertes des Projektes a_1 für Zinssituation 2!

5.3 Wechselnde Periodenzinsfüße bei unvollkommenem Finanzmarkt

Als Spezialfall wechselnder Periodenzinsfüße sei im folgenden der Fall eines unvollkommenen Finanzmarktes betrachtet, der hier durch im Zeitablauf variierende und zudem differierende Soll- und Habenzinssätze gekennzeichnet werden soll.

In diesem Fall könnte nun zum Zwecke der Vorteilhaftigkeitsbeurteilung mittels finanzmathematischer Kennzahlen versucht werden, die Höhe der ins Kalkül einzubeziehenden Kalkulationszinsfüße von der konkreten „Finanzlage" des betrachteten Unternehmens abhängig zu machen, d.h. davon, ob die mit dem Investitionsprojekt verbundenen Zahlungen in den einzelnen Perioden vermutlich eher zu einer Erhöhung (oder Verminderung) der anzulegenden Mittel oder zu einer entsprechenden Verminderung der – etwa durch Kredite – aufzunehmenden Mittel führen. Je nachdem, welche dieser beiden grundlegenden Kategorien von „Finanzlagen" zu erwarten ist, könnte versucht werden, den Kalkulationszins entweder aus dem Habenzins der Alternativanlage oder dem Sollzins der Kreditbeschaffung herzuleiten.

Beispiel 20 (Fortsetzung I):

Wir betrachten die bereits bekannte Investition (–100; + 60; + 60) und nehmen weiterhin an, dass sich alle gegenwärtigen und zukünftigen Zahlungen des Unternehmens in Gutschriften oder Belastungen auf dem Kontokorrentkonto niederschlagen und dieses Konto im Falle des Verzichts auf das Investitionsprojekt alternativ folgende Kontostände aufweise:

Fall 1: $C_0 = -600$, $C_1 = -690$, $C_2 = -670$

Fall 2: $C_0 = +200$, $C_1 = -200$, $C_2 = -400$.

Für den Sollzins (r^S) bzw. Habenzins (r^H) der relevanten Perioden soll gelten:

$$r_1^S = 15\%,\ r_2^S = 20\%,\ r_1^H = 4\%,\ r_2^H = 6\%\ .$$

Fall 1:

Wird die Investition in Fall 1 durchgeführt, so ergeben sich statt der angegebenen C_t–Werte folgende Beträge für den jeweiligen Kontostand:

$$C'_0 = -600 - 100 = -700$$

$$C'_1 = -690 - 100 \cdot 1{,}15 + 60 = -745$$

$$C'_2 = -670 - (100 \cdot 1{,}15 - 60) \cdot 1{,}20 + 60 = -676\ .$$

Im Vergleich zur Unterlassensalternative bewirkte die Investition also, dass das Kontokorrentkonto im Zeitpunkt $t = 2$ um 6,00 [GE] mehr belastet wäre. Auf den Zeitpunkt $t = 0$ bezogen entspricht das auf der Basis der relevanten Periodenzinsen von 15% und 20% einem Betrag von $-6 \cdot 1{,}20^{-1} \cdot 1{,}15^{-1} = -4{,}35$ [GE]; die Durchführung der Investition wäre also unvorteilhaft. Bestimmt man statt der umständlichen Berechnung der verschiedenen Kontostände unmittelbar den Endwert oder den Kapitalwert der Investition, so erhält man gemäß (EW_4) bzw. (K_5) mit

$$EW\ (r_1^S = 15\%;\ r_2^S = 20\%) = -100 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}20 + 60 \cdot 1{,}20 + 60 = -6 \quad \text{bzw.}$$

$$K\ (r_1^S = 15\%;\ r_2^S = 20\%) = -100 + 60 \cdot 1{,}15^{-1} + 60 \cdot 1{,}20^{-1} \cdot 1{,}15^{-1} = -4{,}35$$

die angegebenen Werte (abgesehen von möglicherweise auftretenden geringen Rundungsdifferenzen) sehr viel schneller.

Fall 2:

Im Fall 2 ergeben sich bei Durchführung der Investition hingegen folgende Kontostände:

$$C'_0 = 200 - 100 = +100$$

$$C'_1 = -200 - 100 \cdot 1{,}04 + 60 = -244$$

$$C'_2 = -400 - (100 \cdot 1{,}04 - 60) \cdot 1{,}20 + 60 = -392{,}80\ .$$

Im Vergleich zur Unterlassensalternative bewirkte die Investition also, dass das Kontokorrentkonto im Zeitpunkt $t = 2$ um 7,20 [GE] geringer belastet wäre. Auf den Zeitpunkt $t = 0$ bezogen entspricht dies auf Basis der hier relevanten Periodenzinsen von 4% und 20% einem Betrag von 5,77 [GE]; die Durchführung der Investition wäre also vorteilhaft. Auch hier kann diese Entscheidung über die Bestimmung des Endwertes oder Kapitalwertes mit deutlich geringerem Aufwand erfolgen; es gilt nämlich:

$$EW\ (r_1^H = 4\%;\ r_2^S = 20\%) = -100 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}20 + 60 \cdot 1{,}20 + 60 = 7{,}20$$

$$K\ (r_1^H = 4\%;\ r_2^S = 20\%) = -100 + 60 \cdot 1{,}04^{-1} + 60 \cdot 1{,}20^{-1} \cdot 1{,}04^{-1} = 5{,}76\ .$$

Wie aus dem Beispiel erkennbar wird, können Endwert und Kapitalwert auch im Falle eines unvollkommenen Finanzmarktes als verlässliche Kennzahlen für die durch die betrachtete Investition im Vergleich zum Unterlassen erzielbare Endvermögensänderung herangezogen werden. Voraussetzung dafür ist jedoch, dass jeder einzelnen Periode eine eindeutige „Finanzlage“ zugeordnet werden kann, das betrachtete Unternehmen also unabhängig davon, ob das zu beurteilende Projekt durchgeführt wird oder nicht, einen *vom Vorzeichen her* gleichen Kontostand aufweist. Nur unter dieser Voraussetzung kann im Falle eines unvollkommenen Finanzmarktes auf die Aufstellung eines Tilgungs- und Anlageplans verzichtet und die zielkonforme Entscheidung mittels der Kennzahlen Endwert oder Kapitalwert abgeleitet werden.

Beispiel 20 (Fortsetzung II):

Ausgehend von Beispiel 20 (Fortsetzung I) sei ohne Veränderung aller bisherigen Annahmen ein dritter Fall betrachtet:

Fall 3: $C_0 = +50 \qquad C_1 = +52 \qquad C_2 = 55{,}16$.

Wird die Investition im Fall 3 durchgeführt, so ergeben sich bedingt durch die notwendige Kreditaufnahme in Höhe von 50 statt der angegebenen C_t-Werte folgende Beträge für den jeweiligen Kontostand:

$$C'_0 = +50 - 100 = -50$$

$$C'_1 = +52 - 50 \cdot 1{,}04 - 50 \cdot 1{,}15 + 60 = +2{,}5$$

$$C'_2 = +55{,}16 - (50 \cdot 1{,}04 + 50 \cdot 1{,}15 - 60) \cdot 1{,}06 + 60 = 62{,}69\ .$$

Im Vergleich zum Unterlassen träte also bei Durchführung der Investition eine Kontostandserhöhung von 7,53 [GE] ein. Würde man nun den Endwert gemäß (EW_4) bestimmen, so ergäbe sich unabhängig von der gewählten Kombination der Jahreszinssätze mit

$$EW\left(r_1^H = 4\%;\ r_2^H = 6\%\right) = -100 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}06 + 60 \cdot 1{,}06 + 60 = 13{,}36$$

$$EW\left(r_1^H = 4\%;\ r_2^S = 20\%\right) = -100 \cdot 1{,}04 \cdot 1{,}20 + 60 \cdot 1{,}20 + 60 = 7{,}20$$

$$EW\left(r_1^S = 15\%;\ r_2^H = 6\%\right) = -100 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}06 + 60 \cdot 1{,}06 + 60 = 1{,}70$$

$$EW\left(r_1^S = 15\%;\ r_2^S = 20\%\right) = -100 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}20 + 60 \cdot 1{,}20 + 60 = -6$$

jeweils ein Betrag, der keineswegs mehr als die aus der Durchführung der Investition resultierende Endvermögenserhöhung im Vergleich zur Unterlassensalternative interpretiert und somit auch nicht mehr als Kennzahl für eine zielkonforme Entscheidung angesehen werden kann.

Gelegentlich findet sich im Schrifttum auch der Vorschlag,[1)] im Falle eines unvollkommenen Finanzmarktes mit differierenden Soll- und Habenzinssätzen

– bis zu dem Zeitpunkt den jeweils *periodenspezifischen Sollzinssatz* als Kalkulationszinsfuß zu verwenden, solange die betrachtete Investition sich (berechnet auf Basis des i. d. R. höheren Sollzinssatzes) noch nicht amortisiert hat, und

– nach dem Amortisationszeitpunkt[2)] den jeweils periodenspezifischen Habenzinssatz zu verwenden.

Dieser Vorschlag impliziert jedoch, dass die Finanzlage des Unternehmens *insgesamt* immer genau der *projektindividuellen* „Zahlungsentwicklung" entspricht. D.h.,

– solange das Projekt die Amortisationsdauer noch nicht erreicht hat, liegt auch das Unternehmen selbst „auf der Kreditseite", d.h., zusätzliche Zahlungen be- oder entlasten das Fremdfinanzierungsvolumen,

– sobald jedoch die projektindividuelle Amortisationsdauer erreicht ist, „kippt" auch die Finanzlage des Unternehmens insgesamt, so dass zusätzliche Zahlungen ab diesem Zeitpunkt das Ausmaß der zum Habenzinssatz anzulegenden Mittel beeinflussen.

Dass es sich dabei *nicht* um eine allgemein sinnvolle Vorgehensweise handeln kann, lässt sich für den Fall der projektindividuellen Vorteilhaftigkeitsbetrachtung wie folgt verdeutlichen:

---

1 vgl. z.B. EISENFÜHR, F.: Beurteilung einzelner Investitionsprojekte bei unterschiedlichem Soll- und Habenzins, in: OR Spektrum, 1979, S. 92.

2 Als Amortisationszeitpunkt (bzw. Amortisationsdauer) t* einer Investition bezeichnet man (ausgehend vom Entscheidungszeitpunkt t = 0) den Zeitraum bis zu dem Zeitpunkt, in dem die Summe der Barwerte aller bis dahin angefallenen Einzahlungen größer ist als die Summe der Barwerte aller bis dahin angefallenen Auszahlungen. Formal ergibt sich t* aus:

$$\sum_{t=0}^{t^*-1} e_t \cdot q^{-t} \leq 0 < \sum_{t=0}^{t^*} e_t \cdot q^{-t} .$$

Die Amortisationsdauer bezeichnet also den Zeitraum bis zu dem ersten Zeitpunkt, zu dem der Kapitalwert des Investitionsprojekts erstmals positiv wird.

Beispiel 20 (Fortsetzung III):

Würde man unter Beibehaltung der Daten aus Beispiel 20 obigem Vorschlag entsprechend den Endwert des Investitionsprojektes mit der Zahlungsreihe ($e_0 = -100$; $e_1 = e_2 = +60$) berechnen, so ergäbe sich mit $EW = -100 \cdot 1{,}15 \cdot 1{,}20 + 60 \cdot 1{,}20 + 60 = -6$ zunächst ein eindeutig negativer Endwert und damit eine generelle Empfehlung gegen die Durchführung der betrachteten Investition.

Wie unsere Überlegungen zu den Fällen 2 und 3 des Beispiels jedoch gezeigt haben, kann die Durchführung des Projektes unter bestimmten Annahmen bezüglich der finanziellen Ausgangssituation des Investors durchaus vorteilhaft sein. Die Befolgung des o. g. Vorschlags kann damit zu Entscheidungen führen, die mit der Zielsetzung Endvermögensmaximierung nicht mehr kompatibel sind.

Betrachtet man den Fall der Auswahlentscheidung, so wird die Unsinnigkeit dieses Verfahrens insbesondere bei der Entscheidung über die Auswahl von Investitionsprojekten mit unterschiedlichen Amortisationsdauern deutlich. Geht man nämlich davon aus, dass zwei Investitionsprojekte I und II mit den Amortisationsdauern t_I^* und t_{II}^* in einem Zeitpunkt t' $(t_I^* < t' < t_{II}^*)$ einen identischen Einzahlungsüberschuss aufweisen, so würde bei dem oben bezeichneten Verfahren

– unabhängig von der Finanzlage des Unternehmens, also unabhängig davon, ob die Finanzlage des Unternehmens von der Projektwahl beeinflusst wird, und unabhängig davon, ob das Unternehmen im Falle der Projektdurchführung einen positiven oder negativen Gesamtzahlungsmittelsaldo aufweist,

– der aus Projekt I resultierende Zahlungsüberschuss im Falle der Endwertermittlung mit dem Habenzinssatz aufgezinst, also als Erhöhung des Bestandes an Finanzanlagen erfasst,

– der aus Projekt II in exakt gleicher Höhe erfolgende Zahlungsüberschuss hingegen mit dem (i. d. R. höheren) Sollzins aufgezinst, also als Verminderung des Bestandes an Krediten erfasst.

Zusammenfassung

Zusammenfassend lässt sich für den Fall eines unvollkommenen Finanzmarktes festhalten: Durch die Verwendung wechselnder Periodenzinsfüße, die sich an der jeweils erwarteten „Finanzlage“ des Unternehmens orientieren, ist es unter bestimmten Umständen möglich, Kapitalwertkalküle und Endwertkalküle auch in Fällen anzuwenden, in denen die Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes nicht einmal mehr annähernd erfüllt ist. Sofern es nur möglich ist, die für die zukünftigen Perioden maßgeblichen Zinsfüße eindeutig und korrekt abzuschätzen, liefern diese Kalküle auch in einer Welt unvollkommener Finanzmärkte durchaus brauchbare Entscheidungshilfen.

5.4 Interdependenz- und Unsicherheitsprobleme

Die Umsetzung des in Bezug auf unvollkommene Finanzmärkte erweiterten Kapitalwert- bzw. Endwertkonzeptes kann jedoch zu weiteren Problemen führen, nämlich zu Interdependenz- und Unsicherheitsproblemen.

Interdependenzprobleme

Welche „Finanzlagen“ in den kommenden Perioden gegeben sein werden, kann u.a. von den im Betrachtungszeitpunkt getroffenen Investitions- und Finanzierungsmaßnahmen selbst abhängen. Zwischen den augenblicklich zur Entscheidung anstehenden und den zukünftig möglichen Investitions- und Finanzierungsprojekten besteht de facto also in der Regel ein sehr komplexes Gefüge *wechselseitiger Interdependenzen*.

Angesichts dieser Tatsache sind im einschlägigen Schrifttum verschiedene Ansätze für eine simultane *Investitions- und Finanzplanung* entwickelt worden. Da in diesen Modellen sämtliche Investitions- und Finanzierungsmöglichkeiten *explizit* erfasst werden, entfällt die bei dem Kapitalwert- oder Endwertverfahren bestehende Notwendigkeit, die Finanzierungskosten *implizit* durch den Ansatz von Kalkulationszinsfüßen auszudrücken. Derartige Modelle wurden in ihren Grundzügen bereits in Abschnitt 1.3.2 der Kurseinheit 1 dieses Kurses kurz skizziert. In weiterführenden Modulen des Hauptstudiums wird noch ausführlich auf derartige Modellansätze eingegangen.

Unsicherheitsprobleme

Ein noch gravierenderes Problem resultiert aus dem Umstand, dass die in entsprechende Kalküle eingehenden Angaben über zukünftige Zahlungsströme, Zinssätze etc. de facto immer nur mit mehr oder weniger großer Unsicherheit vorhergesehen werden können. Jedes noch so akribisch aufgebaute Partialkalkül oder Simultanprogramm ist somit stets der Gefahr ausgesetzt, dass sich die daraus gewonnenen Erkenntnisse rückblickend als wertlos erweisen, weil sich die relevanten Größen ganz anders entwickelt haben, als bei der Planung unterstellt wurde.

Nun liegt dieser Schleier der Unsicherheit über allem menschlichen Handeln und kann auch mit noch so ausgeklügelten Methoden nicht beseitigt werden. Zwar mag es möglich sein, durch geeignete Maßnahmen des **Risikomanagements** das eine oder andere Unsicherheitsmoment zu vermindern. Eine vollständige Überwindung der Unsicherheit liegt jedoch gänzlich außerhalb des Menschenmöglichen.

Im Zusammenhang mit der Investitionsplanung kann daher nur versucht werden,

– Art und Ausmaß der bestehenden Unsicherheit so gut wie möglich sichtbar zu machen und

– in systematischer, objektiv überprüfbarer Weise in die Beurteilung von Investitionsprojekten einzubeziehen.

Mit einigen der dazu entwickelten Verfahren werden wir uns in weiterführenden Modulen des Hauptstudiums noch eingehender beschäftigen.

6 Projektbezogene Finanzierungsmaßnahmen

Projektbezogenheit

Bezüglich der Finanzierung der Investitionsprojekte haben wir auch in den unter 5.2 und 5.3 erörterten Erweiterungen unseres Grundansatzes immer noch unterstellt, dass sie „aus dem allgemeinen Topf“ erfolge, d.h. aus der Gesamtheit der Finanzierungsmittel, die dem Unternehmen jeweils – woher auch immer – zur Verfügung stehen. Dies mag in vielen praktischen Fällen auch durchaus so sein. Andererseits sind aber auch Situationen denkbar, in denen die für die Investition benötigten Mittel zumindest zu einem gewissen Teil aus ganz spezifischen, eindeutig projektbezogenen Finanzierungsmaßnahmen resultieren, die bei Verzicht auf das Investitionsprojekt ebenfalls unterbleiben würden. Eine solche Konstellation ist etwa in folgenden Fällen vorstellbar:

– Ein Teil der Investitionssumme kann im Rahmen öffentlicher Förderprogramme durch einen zinsvergünstigten Kredit aufgebracht werden, der ohne das betrachtete Objekt nicht in Anspruch genommen werden könnte.

– Das vorgesehene Projekt bildet zugleich die Besicherungsbasis für ein auf die Zahlungsstruktur des Projektes abgestimmtes Bank- oder Versicherungsdarlehen, das ohne das Projekt in dieser Form nicht vergeben würde.

– Das Projekt soll durch den Abschluss eines Leasingvertrages finanziert werden.

In derartigen Fällen bietet es sich an, die bislang erörterte Vorgehensweise in der Weise zu modifizieren, dass die maßgebliche Zahlungsreihe

– nicht nur aus den unmittelbar projektbezogenen Zahlungsgrößen $e_0, e_1, \dots, e_t$ des betrachteten Investitionsprojekts,

– sondern in Ergänzung auch aus den Zahlungsströmen $f_0, f_1, \dots, f_t$ der spezifisch auf das Projekt bezogenen Finanzierungsmaßnahmen

hergeleitet wird. Die jeweils interessierenden investitionstheoretischen Kennzahlen können dann prinzipiell unverändert nach den bislang bekannten Formeln ermittelt werden. Maßgeblich sind dann allerdings die Zahlungsgrößen $c_0, c_1, \dots, c_t$, die sich aus der Saldierung der projektbezogenen Zahlungen um die aus der projektbezogenen Finanzierung resultierenden Zahlungen ergeben, also

$$c_t = e_t + f_t \qquad (t = 0, 1, \dots, t) \ .$$

Bündelung projektbezogener Finanzierungsmaßnahmen

Dabei müssen die f_t-Werte keineswegs nur die aus *einem* Finanzierungsprojekt resultierenden Zahlungen verdeutlichen, sondern können ebenso gut den Gesamteffekt eines ganzen Bündels *mehrerer* projektbezogener Finanzierungsmaßnahmen darstellen. Das folgende Beispiel verdeutlicht diese Vorgehensweise.

Beispiel 21:

Ein Speditionskaufmann plant zur Ausweitung seiner Geschäftstätigkeit die Neuanschaffung mehrerer Lastwagen (Kaufpreis 800.000 GE) und die Errichtung einer neuen Lager- und Garagenhalle einschließlich der notwendigen Ausstattung (Investitionsauszahlungen 700.000 GE). Aus dem damit möglich werdenden Speditionsgeschäft erwartet man sechs Jahre lang einen Zahlungsüberschuss von 300.000 GE; außerdem wird unterstellt, dass sowohl die Lastwagen als auch die Halle nebst Einrichtung nach 6 Jahren zu 20% des Anschaffungspreises veräußert werden können.

Die für diese Investition maßgebliche Zahlungsreihe (in 1000 GE) lautet also:

$$e_0 = -1.500\,; \quad e_1 = e_2 = \ldots = e_5 = +300\,; \quad e_6 = +600 \;.$$

Zur Finanzierung dieses Vorhabens steht ein „kommunales Förderdarlehen“ über 400.000 GE bereit, das über 4 Jahre (einschließlich Verzinsung) einen Kapitaldienst von 115.000 GE jährlich bedingt. Die Lastwagen sollen im Wege des Leasings beschafft werden, wobei von folgenden Konditionen ausgegangen wird:

– Sofort fällige Sonderzahlung: 160.000 GE
– Jährliche Leasingrate über 5 Jahre: 120.000 GE
– Übernahmepreis bei Anschlusskauf am Ende des 5. Jahres: 300.000 GE.

Die für dieses Finanzierungsbündel maßgebliche Zahlungsreihe hat dann folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}
f_0 &= (+400 + 800 - 160) = 1.040\\
f_1 &= f_2 = f_3 = f_4 = -115 - 120 = -235\\
f_5 &= -120 - 300 = -420\\
f_6 &= 0 \;.
\end{aligned}$$

Die für die Beurteilung des gesamten Investitionsprojektes einschließlich der projektbezogenen Finanzierungsmaßnahmen maßgebliche Zahlungsreihe lautet somit:

$$\begin{aligned}
c_0 &= -1.500 + 1.040 = -460\\
c_1 &= c_2 = c_3 = c_4 = 300 - 235 = +65\\
c_5 &= 300 - 420 = -120\\
c_6 &= +600 \;.
\end{aligned}$$

Nebenbei bemerkt, erkennt man an diesem einfachen Beispiel, dass die sich per Saldo ergebende Zahlungsreihe keineswegs mehr dem Typ der Normalinvestition (nur ein Vorzeichenwechsel) entsprechen muss, selbst wenn jedes einzelne der dafür zu erfassenden Investitions- und Finanzierungsprojekte nur einen Vorzeichenwechsel aufweist.

Formulierung von Handlungsalternativen

Ist es fraglich, ob eine projektbezogene Finanzierungsmöglichkeit überhaupt in Anspruch genommen werden soll, oder stehen mehrere projektbezogene Finanzierungsmöglichkeiten alternativ zur Auswahl (z.B. Leasing- oder Kreditfinanzierung), so können auch diese Entscheidungsprobleme grundsätzlich mit Hilfe der Kapitalwertmethode gelöst werden. Dazu ist es nur notwendig, die anhand ihrer Zahlungsreihen zu beurteilenden Handlungsalternativen in geeigneter Weise zu formulieren, also etwa wie folgt:

Alternative I: Projektdurchführung ohne eine speziell projektbezogene Finanzierungsmaßnahme (Finanzierung „aus dem allgemeinen Topf")

Alternative II: Projektdurchführung und Leasingfinanzierung

Alternative III: Projektdurchführung und (zumindest teilweise) Finanzierung durch einen projektbezogenen Kredit.

Übungsaufgabe 18:

Eine Investition ist durch die Zahlungsreihe $e_0 = -330$; $e_1 = 20$; $e_2 = 90$; $e_3 = 120$; $e_4 = 216$ gekennzeichnet. Zur projektbezogenen Finanzierung steht ein vierjähriges Darlehen über 240 GE bereit, das in 4 Raten von jeweils 60 GE zu tilgen ist, wobei auf die jeweilige Restschuld ein Zins von 10% anfällt.

Bestimmen Sie die relevante Zahlungsreihe $c_0, c_1, \ldots, c_4$ und den Kapitalwert für den Fall, dass sich die aus dem Gesamtprojekt resultierenden Zahlungen jeweils zu Lasten bzw. zu Gunsten eines mit 12% p. a. verzinslichen Kontokorrentkredits niederschlagen!

7 Zur praktischen Relevanz investitionstheoretischer Kennziffern

7.1 Rückblick und Problemstellung

In den vorangegangenen Kapiteln haben wir zunächst einige wichtige investitionstheoretische Kennzahlen sowie die grundlegenden Ansätze zu ihrer Ermittlung kennengelernt. Wir haben weiterhin untersucht, inwieweit die Orientierung von Investitionsentscheidungen an den einzelnen Kennziffern zu Ergebnissen führt, die mit der Zielsetzung der Endvermögensmaximierung übereinstimmen. Dabei sind wir fast durchgängig von einer Reihe mehr oder weniger strenger Prämissen ausgegangen, die in der Realität in dieser Form wohl überwiegend nicht erfüllt sind. Wir wollen uns daher zum Abschluss dieses einführenden Kurses zur Investitionstheorie noch kurz mit der Frage beschäftigen, welche Bedeutung investitionstheoretischen Kennziffern überhaupt zukommt.

Prämissen

Dabei gilt es, folgende Gesichtspunkte zu beachten. Zum einen haben wir eingangs schon darauf hingewiesen, dass ökonomische Entscheidungsmodelle niemals die Realität in ihrer gesamten Vielschichtigkeit und Komplexität abbilden können. Vielmehr ist es gerade Aufgabe eines Modells, nur die vorrangig bedeutsamen Sachverhalte eines abgegrenzten Realitätsauschnitts in vereinfachender Form darzustellen; denn erst so wird es möglich, sich „ein Bild“ von der Realität zu machen. Insofern müssen ökonomische Entscheidungsmodelle also zwangsläufig vergröbernde und selektierende Abbildungen der Realität sein. Zum zweiten ist zu berücksichtigen, dass es einer wissenschaftlichen Theorie nicht nur darum geht, unmittelbar praktisch verwertbare Erkenntnisse oder Verfahrenshinweise zu liefern. Vielmehr ist es auch Aufgabe der Theorie, die gedanklichen Grundstrukturen der hier zu untersuchenden Entscheidungsprobleme herauszuarbeiten, verschiedene Problemtypen voneinander abzugrenzen, verschiedene Entscheidungskonzepte auf ihre Konsistenz hin zu untersuchen und die mit ihnen verbundenen Implikationen aufzuzeigen.

isolierende Abstraktion

theoretische Ziele

Die grundlegende theoretische Bedeutung der dargestellten Ansätze, insbesondere der Kapitalwertmethode, wird Ihnen im weiteren Verlauf Ihres Studiums noch hinlänglich deutlich werden. Wir wollen uns zum Abschluss dieses Studienbriefes daher darauf beschränken, beispielhaft anhand einiger Überlegungen zum Kapitalwertkriterium zu veranschaulichen, dass die dargestellten Verfahren neben ihrer hohen theoretischen Relevanz auch von durchaus praktischer Bedeutung sind.

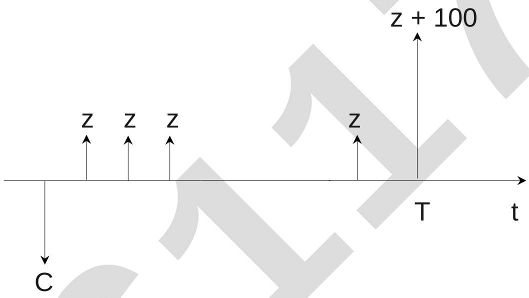
7.2 Deskriptive und prognostische Relevanz

Prognose von Wertpapierkursen

Das Kapitalwertprinzip liefert für etliche empirisch beobachtbare Phänomene sehr stringente Erklärungsgrundlagen und stellt damit zugleich auch eine Basis für die Prognose entsprechender Abläufe dar. Als ein Beispiel sei die Analyse und Prognose von Wertpapierkursen herangezogen.

festverzinsliche Wertpapiere als Normalinvestition

Die **Anlage in festverzinslichen Wertpapieren** kann als eine typische Normalinvestition angesehen werden: Bei einer endfälligen Anleihe mit jährlich nachschüssiger Zinszahlung wird im Zeitpunkt $t = 0$ die Anschaffungsauszahlung fällig; über einen gewissen Zeitraum hinweg fallen jährliche Zinszahlungen an; und am Ende der Laufzeit erfolgt neben dem Zins noch die Rückzahlung. Bezeichnet man den Anschaffungspreis für die Anleihe mit C, die jährlichen Zinszahlungen mit z und setzt man den Rückzahlungskurs gleich 100, so kann eine derartige Wertpapierinvestition grafisch etwa so wie in nachfolgender Abbildung dargestellt werden.



Interpretation des Börsenkurses als Kapitalwert

Der aktuelle Börsenkurs (C) einer derartigen Anleihe kann nun als der Kapitalwert aller zukünftigen Zins- und Tilgungszahlungen dieser Anleihe interpretiert werden. Dieser Interpretation zufolge könnten wir also schreiben:

$$(K_6) \qquad C \;=\; z \cdot \mathrm{RBF}(T, r) \;+\; 100 \cdot (1 + r)^{-T}\,.$$

Kapitalwertfunktion

Zinsempfindlichkeit

Entsprechend unseren Untersuchungen über den Verlauf der Kapitalwertfunktion von Normalinvestitionen wissen wir nun, dass der Barwert einer solchen Zahlungsreihe umso geringer wird, je höher der zugrundegelegte Kalkulationszins ist; weiterhin wissen wir, dass die Zinsempfindlichkeit, d.h. das Ausmaß, in dem der Barwert auf Änderungen des Zinsfußes reagiert, tendenziell umso größer ist, je später der Einzahlungsschwerpunkt einer solchen Zahlungsreihe liegt. Zur Veranschaulichung mag folgendes Beispiel dienen:

Beispiel 22:

Betrachtet werden zwei Anleihen A_1, A_2, die beide je 100 GE Nominalwert pro Jahr 6 GE Zinsen erbringen und nach $T_1 = 3$ Jahren bzw. $T_2 = 7$ Jahren zu 100% rückzahlbar sind.

(1) Der Marktzins belaufe sich auf r = 6%. Der Nominalzins beider Anleihen stimme mit dem Marktzins überein (also $z_1 = z_2 = 6\%$); mithin beläuft sich ihr Kurs auch genau auf 100. Dies wird auch sofort deutlich, wenn man den Barwert der Zins- und Tilgungszahlungen beider Alternativen berechnet.

$$\begin{aligned} C_1 &= 6 \cdot \text{RBF}(3\text{J.}, 6\,\%) + 100 \cdot 1{,}06^{-3} & C_2 &= 6 \cdot \text{RBF}(7\text{J.}, 6\,\%) + 100 \cdot 1{,}06^{-7} \\ &= 6 \cdot 2{,}673 + 100 \cdot 0{,}8396 & &= 6 \cdot 5{,}5823 + 100 \cdot 0{,}6651 \\ &= 16{,}04 + 83{,}96 & &= 33{,}49 + 66{,}51 \\ &= 100 & &= 100\,. \end{aligned}$$

(2) Steigt nun der Marktzins schlagartig auf 8%, so errechnen sich folgende neue Kurswerte:

$$\begin{aligned} C_1' &= 6 \cdot \text{RBF}(3\text{J.}, 8\,\%) + 100 \cdot 1{,}08^{-3} & C_2' &= 6 \cdot \text{RBF}(7\text{J.}, 8\,\%) + 100 \cdot 1{,}08^{-7} \\ &= 6 \cdot 2{,}5771 + 100 \cdot 0{,}7938 & &= 6 \cdot 5{,}2063 + 100 \cdot 0{,}5835 \\ &= 15{,}46 + 79{,}38 & &= 31{,}24 + 58{,}35 \\ &= 94{,}84 & &= 89{,}59\,. \end{aligned}$$

Die Anleihe mit der längeren Restlaufzeit (= mit späterem Einzahlungsschwerpunkt) sinkt also stärker im Kurs als die mit kurzer Restlaufzeit (= mit früherem Einzahlungsschwerpunkt), wenn der Marktzins steigt; fällt dagegen der Marktzins, so steigen die Kurse der langfristigen Anleihen stärker als die der kurzfristigen.

Übungsaufgabe 19:

Überprüfen Sie die im letzten Halbsatz enthaltene Behauptung für unser Beispiel, indem Sie die Barwerte der beiden Anleihen für einen Zinssatz von 4% bestimmen!

Der in Beispiel 22 und Übungsaufgabe 19 verdeutlichte Sachverhalt kann nun (zumindest in Ansätzen) alltäglich an den Wertpapierbörsen überprüft werden.

Empirische Überprüfung der praktischen Relevanz des Kapitalwertkriteriums

So wurden im August 1986 genau 11 Anleihen von Bund, Bundespost oder Bundesbahn mit fester Laufzeit und 8%-igem Nominalzins notiert.[1] Dabei wurden etwa am 5. August an der Düsseldorfer Wertpapierbörse folgende Kurse notiert:

1 Die zu zeigenden Zusammenhänge lassen sich auch auf Basis neuerer Daten verdeutlichen. Im gewählten Beobachtungszeitpunkt muss die Anzahl der Anleihen mit identischem Nominalzins und unterschiedlicher Restlaufzeit nur hinreichend groß sein.

Kurse 8%-iger Anleihen am 05.08.1986				
	Emittent	Ausgabe von …	Fällig am …	Kurs am 05.08.1986
a	Post	1972	01.09.87	103,50
b	Bahn	1979	01.07.89	107,60
c	Bund	1979 I	01.07.89	107,85
d	Bund	1979 II	01.08.89	108,05
e	Post	1980	01.03.90	108,05
f	Bahn	1980 II	01.07.90	109,20
g	Bahn	1980 I	01.02.92	110,45
h	Bahn	1982	01.11.92	111,00
i	Bund	1983	01.07.93	111,30
j	Bund	1984	18.03.94	112,00
k	Post	1984	01.09.94	111,80

Zunächst erkennt man, dass alle 8%-igen Anleihen über 100% notieren; dies kann so interpretiert werden, dass die noch ausstehenden Zins- und Tilgungszahlungen der Anleihen „vom Markt“ gem. (K_6) mit einem niedrigeren Zinsfuß als 8% diskontiert werden. In der Tat lag der Zins für Darlehen mit Restlaufzeiten zwischen 2 und 5 Jahren zu dem angegebenen Zeitpunkt knapp unter 6%. Gem. (K_6) müsste der Kurs der verschiedenen Anleihen demnach umso höher sein, je länger die jeweilige Restlaufzeit ist. Genau diese These wird auch durch einen Blick auf die letzte Spalte der obigen Abbildung im Wesentlichen bestätigt.[1)]

Maßgebliche Prämissen weitgehend erfüllt

Die Kursanalyse festverzinslicher Wertpapiere stellt allerdings einen besonders prägnanten Beispielsfall dar, weil hier etliche der für die unmittelbare Anwendbarkeit des Kapitalwertkriteriums maßgeblichen Prämissen weitgehend erfüllt sind: So können zum einen die einzelnen Investitionsobjekte klar abgegrenzt und definiert werden; ihnen können eindeutige Zahlungsreihen, die klar auf ganz bestimmte Einzelzeitpunkte bezogen sind, zugerechnet werden; Risikoerwägungen sind nur von nachrangiger Bedeutung. In dem Ausmaß, in dem die für das Kapitalwertverfahren maßgeblichen Prämissen in der Realität nicht gegeben sind, wird die Aussagekraft des Kapitalwertkriteriums reduziert.

1 Abweichungen können (wie beim Vergleich der Anleihen j und k) dann auftreten, wenn Anleihen unterschiedlicher Emittenten verglichen werden, da auch unterschiedliche Bonitätseinschätzungen Einfluß auf den Kurs festverzinslicher Wertpapiere haben.

Prognose der Aktienkurse

So wird beispielsweise auch bei der Aktienkursanalyse und -prognose versucht, die Aktienkurse als Barwert aller zukünftigen Dividendenausschüttungen zu ermitteln. Die dabei bislang erzielten Ergebnisse sind jedoch erheblich bescheidener und umstrittener als im Hinblick auf festverzinsliche Wertpapiere. Der Grund ist ziemlich einleuchtend: Zum einen sind die mit einer bestimmten Aktie verbundenen zukünftigen Dividenden sehr viel schlechter vorauszusehen; eine zeitliche Begrenzung des zu erwartenden Zahlungsstromes kann nicht ohne weiteres angegeben werden; da Risikoaspekte eine erheblich wichtigere Rolle spielen als bei der Betrachtung festverzinslicher Wertpapiere, ist auch die Höhe des anzusetzenden Zinsfußes viel weniger eindeutig zu klären; schließlich spielen beim Erwerb von Aktien oder zumindest von Aktienpaketen häufig auch Zielvorstellungen eine Rolle, die allenfalls indirekt auf Einkommens- und Vermögensgrößen umgerechnet werden können.

Viele Prämissen nicht erfüllt

Trotz derartiger Einschränkungen, die der direkten Übertragung der Kapitalwertmethode auch auf andere Bereiche erschwerend im Wege stehen, soll hier festgehalten werden, dass der Grundgedanke der Kapitalwertmethode, nämlich den Preis oder den Marktwert bestimmter Vermögensobjekte als Barwert der daraus in Zukunft erzielbaren Nutzungen zu erklären, in sehr vielen Bereichen von hohem Erklärungs- und Prognosewert ist. Insbesondere kann mit Hilfe dieses Ansatzes verdeutlicht werden, dass sich Be- oder Entlastungen, die mit der Nutzung bestimmter Vermögensobjekte in Zukunft verbunden sind, unmittelbar auf deren aktuellen Marktwert niederschlagen, sich insoweit also auf die Vermögenssituation des derzeitigen Eigentümers auswirken.

8 Übungshinweise

Wir möchten als weitere und besonders zu empfehlende Übungsmöglichkeit in Bezug auf alle relevanten Inhalte dieser Kurseinheit auch hier nochmals explizit auf die speziell auf die Inhalte der KE 1 und 2 abgestimmte Übungssoftware auf der mitgelieferten CD „Investition“ hinweisen. Bitte beachten Sie, dass die organisatorischen Informationen auf der CD auf dem Stand des Jahres 2006 sind und nicht mehr zutreffen. An der Relevanz der fachlichen Inhalte hat sich jedoch nichts geändert.

Anhang: Finanzmathematische Tabellen

Tabelle I: Aufzinsungsfaktoren $q^t = (1 + r)^t$

	Zinssatz									
Periode	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,15	0,20
1	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000	1,1200	1,1500	1,2000
2	1,0816	1,1025	1,1236	1,1449	1,1664	1,1881	1,2100	1,2544	1,3225	1,4400
3	1,1249	1,1576	1,1910	1,2250	1,2597	1,2950	1,3310	1,4049	1,5209	1,7280
4	1,1699	1,2155	1,2625	1,3108	1,3605	1,4116	1,4641	1,5735	1,7490	2,0736
5	1,2167	1,2763	1,3382	1,4026	1,4693	1,5386	1,6105	1,7623	2,0114	2,4883
6	1,2653	1,3401	1,4185	1,5007	1,5869	1,6771	1,7716	1,9738	2,3131	2,9860
7	1,3159	1,4071	1,5036	1,6058	1,7138	1,8280	1,9487	2,2107	2,6600	3,5832
8	1,3686	1,4775	1,5938	1,7182	1,8509	1,9926	2,1436	2,4760	3,0590	4,2998
9	1,4233	1,5513	1,6895	1,8385	1,9990	2,1719	2,3579	2,7731	3,5179	5,1598
10	1,4802	1,6289	1,7908	1,9672	2,1589	2,3674	2,5937	3,1058	4,0456	6,1917
11	1,5395	1,7103	1,8983	2,1049	2,3316	2,5804	2,8531	3,4785	4,6524	7,4301
12	1,6010	1,7959	2,0122	2,2522	2,5182	2,8127	3,1384	3,8960	5,3503	8,9161
13	1,6651	1,8856	2,1329	2,4098	2,7196	3,0658	3,4523	4,3635	6,1528	10,6993
14	1,7317	1,9799	2,2609	2,5785	2,9372	3,3417	3,7975	4,8871	7,0757	12,8392
15	1,8009	2,0789	2,3966	2,7590	3,1722	3,6425	4,1772	5,4736	8,1371	15,4070
16	1,8730	2,1829	2,5404	2,9522	3,4259	3,9703	4,5950	6,1304	9,3576	18,4884
17	1,9479	2,2920	2,6928	3,1588	3,7000	4,3276	5,0545	6,8660	10,7613	22,1861
18	2,0258	2,4066	2,8543	3,3799	3,9960	4,7171	5,5599	7,6900	12,3755	26,6233
19	2,1068	2,5270	3,0256	3,6165	4,3157	5,1417	6,1159	8,6128	14,2318	31,9480
20	2,1911	2,6533	3,2071	3,8697	4,6610	5,6044	6,7275	9,6463	16,3665	38,3376
30	3,2434	4,3219	5,7435	7,6123	10,0627	13,2677	17,4494	29,9599	66,2118	237,3763
40	4,8010	7,0400	10,2857	14,9745	21,7245	31,4094	45,2593	93,0510	267,8635	1469,7716
50	7,1067	11,4674	18,4202	29,4570	46,9016	74,3575	117,3909	289,0022	1083,6574	9100,4382

Tabelle II: Abzinsungsfaktoren $q^{-t} = (1 + r)^{-t}$

	Zinssatz									
Periode	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,15	0,20
1	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,8929	0,8696	0,8333
2	0,9246	0,9070	0,8900	0,8734	0,8573	0,8417	0,8264	0,7972	0,7561	0,6944
3	0,8890	0,8638	0,8396	0,8163	0,7938	0,7722	0,7513	0,7118	0,6575	0,5787
4	0,8548	0,8227	0,7921	0,7629	0,7350	0,7084	0,6830	0,6355	0,5718	0,4823
5	0,8219	0,7835	0,7473	0,7130	0,6806	0,6499	0,6209	0,5674	0,4972	0,4019
6	0,7903	0,7462	0,7050	0,6663	0,6302	0,5963	0,5645	0,5066	0,4323	0,3349
7	0,7599	0,7107	0,6651	0,6227	0,5835	0,5470	0,5132	0,4523	0,3759	0,2791
8	0,7307	0,6768	0,6274	0,5820	0,5403	0,5019	0,4665	0,4039	0,3269	0,2326
9	0,7026	0,6446	0,5919	0,5439	0,5002	0,4604	0,4241	0,3606	0,2843	0,1938
10	0,6756	0,6139	0,5584	0,5083	0,4632	0,4224	0,3855	0,3220	0,2472	0,1615
11	0,6496	0,5847	0,5268	0,4751	0,4289	0,3875	0,3505	0,2875	0,2149	0,1346
12	0,6246	0,5568	0,4970	0,4440	0,3971	0,3555	0,3186	0,2567	0,1869	0,1122
13	0,6006	0,5303	0,4688	0,4150	0,3677	0,3262	0,2897	0,2292	0,1625	0,0935
14	0,5775	0,5051	0,4423	0,3878	0,3405	0,2992	0,2633	0,2046	0,1413	0,0779
15	0,5553	0,4810	0,4173	0,3624	0,3152	0,2745	0,2394	0,1827	0,1229	0,0649
16	0,5339	0,4581	0,3936	0,3387	0,2919	0,2519	0,2176	0,1631	0,1069	0,0541
17	0,5134	0,4363	0,3714	0,3166	0,2703	0,2311	0,1978	0,1456	0,0929	0,0451
18	0,4936	0,4155	0,3503	0,2959	0,2502	0,2120	0,1799	0,1300	0,0808	0,0376
19	0,4746	0,3957	0,3305	0,2765	0,2317	0,1945	0,1635	0,1161	0,0703	0,0313
20	0,4564	0,3769	0,3118	0,2584	0,2145	0,1784	0,1486	0,1037	0,0611	0,0261
30	0,3083	0,2314	0,1741	0,1314	0,0994	0,0754	0,0573	0,0334	0,0151	0,0042
40	0,2083	0,1420	0,0972	0,0668	0,0460	0,0318	0,0221	0,0107	0,0037	0,0007
50	0,1407	0,0872	0,0543	0,0339	0,0213	0,0134	0,0084	0,0035	0,0009	0,0001

Tabelle III: Rentenbarwertfaktoren $RBF(T,r) = \dfrac{1 - q^{-T}}{r}$

Periode	Zinssatz 0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,15	0,20
1	0,9615	0,9524	0,9434	0,9346	0,9259	0,9174	0,9091	0,8929	0,8696	0,8333
2	1,8861	1,8594	1,8334	1,8080	1,7833	1,7591	1,7355	1,6901	1,6257	1,5278
3	2,7751	2,7232	2,6730	2,6243	2,5771	2,5313	2,4869	2,4018	2,2832	2,1065
4	3,6299	3,5460	3,4651	3,3872	3,3121	3,2397	3,1699	3,0373	2,8550	2,5887
5	4,4518	4,3295	4,2124	4,1002	3,9927	3,8897	3,7908	3,6048	3,3522	2,9906
6	5,2421	5,0757	4,9173	4,7665	4,6229	4,4859	4,3553	4,1114	3,7845	3,3255
7	6,0021	5,7864	5,5824	5,3893	5,2064	5,0330	4,8684	4,5638	4,1604	3,6046
8	6,7327	6,4632	6,2098	5,9713	5,7466	5,5348	5,3349	4,9676	4,4873	3,8372
9	7,4353	7,1078	6,8017	6,5152	6,2469	5,9952	5,7590	5,3282	4,7716	4,0310
10	8,1109	7,7217	7,3601	7,0236	6,7101	6,4177	6,1446	5,6502	5,0188	4,1925
11	8,7605	8,3064	7,8869	7,4987	7,1390	6,8052	6,4951	5,9377	5,2337	4,3271
12	9,3851	8,8633	8,3838	7,9427	7,5361	7,1607	6,8137	6,1944	5,4206	4,4392
13	9,9856	9,3936	8,8527	8,3577	7,9038	7,4869	7,1034	6,4235	5,5831	4,5327
14	10,5631	9,8986	9,2950	8,7455	8,2442	7,7862	7,3667	6,6282	5,7245	4,6106
15	11,1184	10,3797	9,7122	9,1079	8,5595	8,0607	7,6061	6,8109	5,8474	4,6755
16	11,6523	10,8378	10,1059	9,4466	8,8514	8,3126	7,8237	6,9740	5,9542	4,7296
17	12,1657	11,2741	10,4773	9,7632	9,1216	8,5436	8,0216	7,1196	6,0472	4,7746
18	12,6593	11,6896	10,8276	10,0591	9,3719	8,7556	8,2014	7,2497	6,1280	4,8122
19	13,1339	12,0853	11,1581	10,3356	9,6036	8,9501	8,3649	7,3658	6,1982	4,8435
20	13,5903	12,4622	11,4699	10,5940	9,8181	9,1285	8,5136	7,4694	6,2593	4,8696
30	17,2920	15,3725	13,7648	12,4090	11,2578	10,2737	9,4269	8,0552	6,5660	4,9789
40	19,7928	17,1591	15,0463	13,3317	11,9246	10,7574	9,7791	8,2438	6,6418	4,9966
50	21,4822	18,2559	15,7619	13,8007	12,2335	10,9617	9,9148	8,3045	6,6605	4,9995

Tabelle IV: Annuitätenfaktoren $ANF(T,r) = \dfrac{r}{1 - q^{-T}}$

Periode	Zinssatz 0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,12	0,15	0,20
1	1,0400	1,0500	1,0600	1,0700	1,0800	1,0900	1,1000	1,1200	1,1500	1,2000
2	0,5302	0,5378	0,5454	0,5531	0,5608	0,5685	0,5762	0,5917	0,6151	0,6545
3	0,3603	0,3672	0,3741	0,3811	0,3880	0,3951	0,4021	0,4163	0,4380	0,4747
4	0,2755	0,2820	0,2886	0,2952	0,3019	0,3087	0,3155	0,3292	0,3503	0,3863
5	0,2246	0,2310	0,2374	0,2439	0,2505	0,2571	0,2638	0,2774	0,2983	0,3344
6	0,1908	0,1970	0,2034	0,2098	0,2163	0,2229	0,2296	0,2432	0,2642	0,3007
7	0,1666	0,1728	0,1791	0,1856	0,1921	0,1987	0,2054	0,2191	0,2404	0,2774
8	0,1485	0,1547	0,1610	0,1675	0,1740	0,1807	0,1874	0,2013	0,2229	0,2606
9	0,1345	0,1407	0,1470	0,1535	0,1601	0,1668	0,1736	0,1877	0,2096	0,2481
10	0,1233	0,1295	0,1359	0,1424	0,1490	0,1558	0,1627	0,1770	0,1993	0,2385
11	0,1141	0,1204	0,1268	0,1334	0,1401	0,1469	0,1540	0,1684	0,1911	0,2311
12	0,1066	0,1128	0,1193	0,1259	0,1327	0,1397	0,1468	0,1614	0,1845	0,2253
13	0,1001	0,1065	0,1130	0,1197	0,1265	0,1336	0,1408	0,1557	0,1791	0,2206
14	0,0947	0,1010	0,1076	0,1143	0,1213	0,1284	0,1357	0,1509	0,1747	0,2169
15	0,0899	0,0963	0,1030	0,1098	0,1168	0,1241	0,1315	0,1468	0,1710	0,2139
16	0,0858	0,0923	0,0990	0,1059	0,1130	0,1203	0,1278	0,1434	0,1679	0,2114
17	0,0822	0,0887	0,0954	0,1024	0,1096	0,1170	0,1247	0,1405	0,1654	0,2094
18	0,0790	0,0855	0,0924	0,0994	0,1067	0,1142	0,1219	0,1379	0,1632	0,2078
19	0,0761	0,0827	0,0896	0,0968	0,1041	0,1117	0,1195	0,1358	0,1613	0,2065
20	0,0736	0,0802	0,0872	0,0944	0,1019	0,1095	0,1175	0,1339	0,1598	0,2054
30	0,0578	0,0651	0,0726	0,0806	0,0888	0,0973	0,1061	0,1241	0,1523	0,2008
40	0,0505	0,0583	0,0665	0,0750	0,0839	0,0930	0,1023	0,1213	0,1506	0,2001
50	0,0466	0,0548	0,0634	0,0725	0,0817	0,0912	0,1009	0,1204	0,1501	0,2000

Verzeichnis der in Kurseinheit 1 und 2 verwendeten Formeln

(AN$_1$) $$e* = \frac{1}{RBF(T,r)} \cdot K = ANF(T,r) \cdot K$$

(AN$_2$) $$e* = e - a_0 \cdot ANF(T,r)$$

(AN$_3$) $$e* = e - a_0 \cdot r$$

(D$_1$) $$d_t^{i,k} = e_t^i - e_t^k$$

(D$_2$) $$K^{i,k} = K_i - K_k$$

(EW$_1$) $$EW = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r)^{T-t} = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{T-t}$$

(EW$_2$) $$EW = K \cdot q^T$$

(EW$_3$) $$EW = EV_I - EV_U$$

(EW$_4$) $$EW = \sum_{t=0}^{T-1} e_t \cdot Q(t+1,T) + e_T$$

(FM$_1$) $$c_t = c_0 \cdot (1+r)^t = c_0 \cdot q^t$$

(FM$_2$) $$c_0 = c_t \cdot (1+r)^{-t} = c_t \cdot q^{-t}$$

(FM$_3$) $$c_t = c_0 \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (1+r_\tau)$$

(FM$_4$) $$c_0 = c_t \cdot \prod_{\tau=1}^{t} (1+r_\tau)^{-1}$$

(FM$_5$) $$RB = e \cdot \sum_{t=1}^{T} (1+r)^{-t}$$

(FM$_6$) $$\mathrm{RBF}(T,r) = \frac{1 - q^{-T}}{r}$$

(FM$_7$) $$\mathrm{RB} = e \cdot \mathrm{RBF}(T,r)$$

(FM$_8$) $$\mathrm{RB}^{\infty} = e \cdot \frac{1}{r}$$

(FM$_9$) $$a = \mathrm{AB} \cdot \frac{r}{1 - q^{-T}}$$

(FM$_{10}$) $$a = \mathrm{AB} \cdot \mathrm{ANF}(T,r)$$

(FM$_{11}$) $$Q(t,t') = q_t \cdot q_{t+1} \cdot \ldots \cdot q_{t'} = \prod_{\tau=t}^{t'} q_\tau$$

(FM$_{12}$) $$Q(t+1,T) \cdot [Q(1,T)]^{-1} = [Q(1,t)]^{-1}$$

(IZ$_1$) $$K(r^*) = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r^{\circ})^{-t} = 0 \ .$$

(IZ$_2$) $$r^* = \sqrt[T]{\frac{e_T}{-e_0}} - 1 \ .$$

(IZ$_3$) $$r^* = z \ .$$

(IZ$_4$) $$r^*_{1,2} = \frac{-e_1}{2e_0} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \frac{e_2}{e_0}} - 1 \ .$$

(IZ$_5$) $$\mathrm{RBF}(T, r^*) = \frac{1-(1+r^*)^{-T}}{r^*} = \frac{-e_0}{e} \ .$$

(IZ$_6$) $$r^* = \frac{e}{-e_0} \ .$$

(IZ$_7$) $$\tilde{r}_1 = \frac{r_N \cdot K_P - r_P \cdot K_N}{K_P - K_N} \ .$$

(K$_1$) $$K = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r)^{-t} = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot q^{-t}$$

(K_2) $$K = e_0 + e \cdot RBF(T, r)$$

(K_3) $$K = e_0 + \frac{e}{r}$$

(K_4) $$K = (EV_I - EV_U) \cdot (1 + r)^{-T}$$

(K_5) $$K = e_0 + \sum_{t=1}^{T} e_t \cdot \left[Q(1, t)\right]^{-1}$$

(K_6) $$K = e_0 + \sum_{t=1}^{T-1} e_t \cdot Q(t+1, T) \cdot \left[Q(1, T)\right]^{-1} + e_T \cdot \left[Q(1, T)\right]^{-1}$$

(K_7) $$K = EW \cdot \left[Q(1, T)\right]^{-1}$$

(V_1) $$EV_I > EV_U$$

(V_2) $$EW > 0$$

(V_3) $$K > 0$$

(V_4) $$EV_{I,T}^{j} > EV_{I,T}^{k}$$

(V_5) $$\left(EV_I^j - EV_U^j\right) \cdot q^{-T_j} > \left(EV_I^k - EV_U^k\right) \cdot q^{-T_k}$$

(V_6) $$K_j > K_k$$

(V_7) $$K^{i,k} > 0$$

(V_8) $$e^* > 0$$

(V_9) $$r^* > r \, .$$

Diese Seite bleibt frei!

Lösungshinweise zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

Der Kapitalwert eines Investitionsprojekts ergibt sich gemäß (K_1) aus:

$$K = \sum_{t=0}^{T} e_t \cdot (1+r)^{-t} \ .$$

Für die drei Investitionsprojekte a_1, a_2 und a_3 ergeben sich durch Einsetzen der jeweils angegebenen Projektzahlungen e_t^i folgende Kapitalwerte K_i (i = 1, 2, 3):

$$\begin{aligned} K_1 &= -400 + 400 \cdot 1{,}1^{-1} - 300 \cdot 1{,}1^{-2} + 400 \cdot 1{,}1^{-3} \\ &= -400 + 400 \cdot 0{,}9091 - 300 \cdot 0{,}8264 + 400 \cdot 0{,}7513 \\ &= 16{,}24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2 &= -160 + 20 \cdot \text{RBF}(30\,\text{J.}, 10\,\%) \\ &= -160 + 20 \cdot 9{,}4269 \\ &= 28{,}54 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_3 &= -460 + 130 \cdot 1{,}1^{-1} + 141 \cdot 1{,}1^{-2} + 20 \cdot \text{RBF}(30\,\text{J.}, 10\,\%) - 20 \cdot \text{RBF}(2\,\text{J.}, 10\,\%) \\ &= -460 + 130 \cdot 0{,}9091 + 141 \cdot 0{,}8264 + 20 \cdot 9{,}4269 - 20 \cdot 1{,}7355 \\ &= -71{,}47 \end{aligned}$$

Die Endwerte EW_i der Projekte a_i (i = 1, 2, 3) lassen sich nun einfach (unter Berücksichtigung der angegebenen Projektlaufzeiten) durch Einsetzen der ermittelten Kapitalwerte K_i in Formel (EW_2) ermitteln, nach der gilt:

$$EW = K \cdot (1+r)^T \ .$$

Nach Einsetzen ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} EW_1 &= K_1 \cdot 1{,}1^3 \\ &= 16{,}24 \cdot 1{,}3310 \\ &= 21{,}62 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
EW_2 &= K_2 \cdot 1{,}1^{30} \\
&= 28{,}54 \cdot 17{,}4494 \\
&= 498{,}01
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EW_3 &= K_3 \cdot 1{,}1^{30} \\
&= -71{,}47 \cdot 17{,}4494 \\
&= -1.247{,}11
\end{aligned}
$$

Übungsaufgabe 2

a)

TAP im Fall der 100%-igen Kreditfinanzierung des Investitionsprojekts				
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	– 100	± 0	– 100	– 100
1	+ 60	– 10	+ 50	– 50
2	+ 60	– 5	+ 55	+ 5

Das Endvermögen des Investors beträgt im Falle der 100%-igen Fremdfinanzierung des Investitionsprojekts (also bei einem Anfangsvermögen von 0 GE) 5 GE.

b)

TAP im Fall der partiellen Kreditfinanzierung des Investitionsprojekts				
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	– 100	± 0	– 100	– 20 (+80 – 100)
1	+ 60	– 2	+ 58	+ 38
2	+ 60	+ 3,8	+ 63,8	+ 101,8

TAP im Fall des Verzichts auf die Investitionsdurchführung (Unterlassensalternative)				
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	± 0	± 0	± 0	+ 80
1	± 0	+ 8	+ 8	+ 88
2	± 0	+ 8,8	+ 8,8	+ 96,8

Für das Endvermögen des Investors im Falle der 20%-igen Kreditfinanzierung des Investitionsprojekts (also bei einem Anfangsvermögen von 80 GE) gilt: $EV_I = 101{,}8$ GE. Im Falle des Verzichts auf die Investitionsdurchführung beträgt das Endvermögen des Investors EV_U hingegen nur 96,8 GE.

c) Gemäß (EW_3) gilt allgemein: $EW = EV_I - EV_U$. Setzt man die gemäß Teilaufgabe b) ermittelten Endvermögenswerte in obige Gleichung ein, so ergibt sich mit $EW = 101{,}8 - 96{,}8 = 5$ exakt der gleiche Wert, der sich gemäß Teilaufgabe a) für das Endvermögen im Falle der 100%-igen Kreditfinanzierung ergibt. Diese Übereinstimmung ist nun keineswegs zufällig. Da die Unterlassensalternative im Fall der ausschließlichen Fremdfinanzierung eines Investitionsprojekts definitionsgemäß zu einem Endvermögen von 0 GE führt, entspricht in diesem Fall der Endwert der Investition zwingend dem bei Investitionsdurchführung erreichbaren Endvermögen des Investors.

d) Sobald die ursprünglich für $t = 2$ erwartete Zahlung von 60 GE auf 55 oder weniger GE absinkt, gilt nicht mehr $EV_I > EV_U$, der EW wäre also nicht mehr positiv. Folglich dürfte die Zahlung um maximal 4,99 GE niedriger ausfallen als ursprünglich erwartet.

Übungsaufgabe 3

Dem Investor müsste in Zeitpunkt $t = 0$ mindestens ein Betrag in Höhe des Kapitalwertes des Investitionsprojekts geboten werden. Für den Kapitalwert ergibt sich gemäß (EW_2): $K = EW \cdot q^{-T} = 5 \cdot 1{,}1^{-2} = 5 \cdot 0{,}8264 = 4{,}13$ [GE]. Dem Investor müssten folglich 4,13 GE in $t = 0$ geboten werden, um ihn zum Verzicht auf die Projektdurchführung zu bewegen. Erhält der Investor in $t = 0$ diesen Betrag, so kann er insgesamt 84,13 GE zum herrschenden Marktzins für 2 Jahre am Finanzmarkt anlegen. Er würde folglich ein Endvermögen in Höhe von 101,80 GE ($84{,}13 \cdot 1{,}1^2$) erzielen, also das gleiche Endvermögen, das er im Falle der Projektdurchführung erzielt hätte (vgl. Aufgabe 2b). Der folgende Tilgungs- und Anlageplan verdeutlicht nochmals die Vermögensentwicklung im Falle des „gesponserten" Projektverzichts.

TAP	**bei Projektverzicht und Ausgleichszahlung**			
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	+ 4,13	± 0	+ 4,13	+ 84,13
1	± 0	+ 8,41	+ 8,41	+ 92,54
2	± 0	+ 9,25	+ 9,25	+ 101,79

Übungsaufgabe 4

a) Die Kapitalwerte der Investitionsprojekte a_1 und a_2 lassen sich wie folgt berechnen:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= -100 + 10 \cdot \text{RBF}(3\,\text{J.}, 6\,\%) + 110 \cdot 1{,}06^{-4} \\
&= -100 + 10 \cdot 2{,}6730 + 110 \cdot 0{,}7921 \\
&= -100 + 26{,}73 + 87{,}13 \\
&= 13{,}86
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
K_2 &= -100 + 32 \cdot \text{RBF}(4\,\text{J.}, 6\,\%) \\
&= -100 + 32 \cdot 3{,}4651 \\
&= -100 + 110{,}88 \\
&= 10{,}88\;.
\end{aligned}
$$

Für die Endwerte der Investitionsprojekte a_1 und a_2 ergibt sich gemäß Formel (EW_1):

$$
\begin{aligned}
EW_1 &= -100 \cdot 1{,}06^4 + 10 \cdot \text{RBF}(3\,\text{J.}, 6\,\%) \cdot 1{,}06^4 + 110 \\
&= -100 \cdot 1{,}2625 + 10 \cdot 2{,}6730 \cdot 1{,}2625 + 110 \\
&= -126{,}25 + 33{,}75 + 110 \\
&= 17{,}50
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
EW_2 &= -100 \cdot 1{,}06^4 + 32 \cdot \text{RBF}(4\,\text{J.}, 6\,\%) \cdot 1{,}06^4 \\
&= -100 \cdot 1{,}2625 + 32 \cdot 3{,}4651 \cdot 1{,}2625 \\
&= -126{,}25 + 139{,}99 \\
&= 13{,}74
\end{aligned}
$$

oder alternativ gemäß Formel (EW_2):

$$EW_1 = K_1 \cdot 1{,}06^4 = 13{,}86 \cdot 1{,}06^4 = 17{,}50$$

$$EW_2 = K_2 \cdot 1{,}06^4 = 10{,}88 \cdot 1{,}06^4 = 13{,}74\;.$$

b) Da gilt: $K_1 > K_2 > 0$, ist Projekt a_1 sowohl dem Projekt a_2 als auch der Unterlassensalternative vorzuziehen. Projekt a_1 führt für den Investor zum maximal erreichbaren Endvermögen.

c) Die Änderung des Kalkulationszinsfußes von 6% auf 12% bewirkt im hier betrachteten Fall eine Veränderung der Vorteilhaftigkeit. Da es sich bei den Projekten a_1 und a_2 um Projekte handelt, deren Zahlungsreihen dem Typ einer Normalinvestition entsprechen, führt die Erhöhung des Kalkulationszinsfußes zunächst für beide Alternativen gleichermaßen dazu, dass die individuellen Kapitalwerte sinken. Für die Kapitalwerte K_1 und K_2 ergibt sich für r = 12%:

$$\begin{aligned} K_1(r=12\%) &= -100 + 10 \cdot RBF(3J.,12\%) + 110 \cdot 1{,}12^{-4} \\ &= -100 + 10 \cdot 2{,}4018 + 110 \cdot 0{,}6355 \\ &= -6{,}08 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2(r=12\%) &= -100 + 32 \cdot RBF(4J.,12\%) \\ &= -100 + 32 \cdot 3{,}0373 \\ &= -2{,}81\,. \end{aligned}$$

Der Kapitalwert von Projekt a_1 sinkt jedoch stärker als der Kapitalwert von Projekt a_2, da Projekt a_1 mit der hohen Schlusseinzahlung im Zeitpunkt t = 4 eine höhere Sensitivität gegenüber Änderungen des Kalkulationszinsfußes aufweist als Alternative a_2 mit über die gesamte Projektlaufzeit gleichmäßig verteilten Rückflüssen. Da gilt: K_2 (r = 12%) > K_1 (r = 12%), ist bei einem Vergleich von a_1 und a_2 nun Projekt a_2 eindeutig gegenüber a_1 vorzuziehen. Zu beachten ist jedoch, dass das Investitionsprojekt a_2 mit K_2 (r = 12%) = –2,8 immer noch schlechter ist als die Unterlassensalternative. Die Änderung des Kalkulationszinsfußes hat im Beispielfall mithin nicht nur Auswirkungen auf die *relative* Vorteilhaftigkeit der Alternativen, sondern auch auf die *absolute* Vorteilhaftigkeit.

Übungsaufgabe 5

a) Als Differenzzahlungsreihe $D^{i,k}$ wird die Zahlungsreihe bezeichnet, die sich ergibt, wenn von der Zahlungsreihe der Investition a_i die Zahlungsreihe der Investition a_k abgezogen wird. Für die einzelnen Zahlungen $d_t^{i,k}$ der Differenzzahlungsreihe $D^{i,k}$ gilt also: $d_t^{i,k} = e_t^i - e_t^k$ (t = 0, 1, …, T).

Demnach ergibt sich für die gesuchte Differenzzahlungsreihe:

	$d_0^{1,2}$	$d_1^{1,2}$	$d_2^{1,2}$	$d_3^{1,2}$	$d_4^{1,2}$	$d_5^{1,2}$
$D^{1,2}$	– 55	+ 20	+ 20	+ 20	± 0	± 0

b) Bezeichnet man den Kapitalwert der Differenzzahlungsreihe $D^{1,2}$ mit $K^{1,2}$, so ergibt sich bei einem Zinssatz von 10%:

$$\begin{aligned} K^{1,2} &= -55 + 20 \cdot RBF(3J., 10\,\%) \\ &= -55 + 20 \cdot 2{,}4869 \\ &= -5{,}26. \end{aligned}$$

Gemäß Formel (D_2) gilt, dass der Kapitalwert $K^{i,k}$ der Differenzzahlungsreihe $D^{i,k}$ gerade gleich der Differenz der Kapitalwerte der zugrundeliegenden Investitionen a_i und a_k ist. Daraus folgt im Beispielfall, dass der Kapitalwert der Alternative a_2 den Kapitalwert der Alternative a_1 um 5,26 übersteigt.

c) Das Konzept der Differenzzahlungsreihe stellt ausschließlich darauf ab, zwei konkrete Investitionsalternativen in Bezug auf ihre **relative Vorteilhaftigkeit** zu bewerten. Im Beispiel ist a_2 im direkten Vergleich zu a_1 eindeutig besser.

Zu beachten ist jedoch, dass das Konzept der Differenzzahlungsreihe gerade nicht darauf abstellt, Aussagen über die **absolute Vorteilhaftigkeit** eines konkreten Investitionsprojekts zu treffen. Ob die im Vergleich zu a_1 vorteilhafte Alternative a_2 auch besser ist als der Verzicht auf die Durchführung von a_2 (also besser ist als die Unterlassensalternative), kann mittels alleiniger Analyse der Differenzzahlungsreihe nicht abgeleitet werden.

Übungsaufgabe 6

Um den Kapitalwert der (Zahlungsreihe der) äquivalenten Annuität zu bestimmen, wird die Annuität e* gemäß Formel (AN_1) mit dem Rentenbarwertfaktor RBF(T, r) multipliziert, wobei T der Laufzeit des Projekts entspricht, für das die Annuität ermittelt wurde. Im Beispielfall ergibt sich:

$$\begin{aligned} K &= e^* \cdot RBF(3J., 5\,\%) \\ &= 1{,}826 \cdot 2{,}7232 \\ &= 4{,}973. \end{aligned}$$

Somit stimmt beim Kalkulationszins von 5% der Kapitalwert der Zahlungsreihe (±0; +1,826; +1,826; +1,826) – abgesehen von kleinen Rundungsdifferenzen – mit dem Kapitalwert der Zahlungsreihe des ursprünglichen Investitionsprojekts (–100; + 10; + 10; + 100) überein.

Übungsaufgabe 7

a) Gemäß Formel (AN_1) gilt: e* = K · ANF(T, r). Im ersten Schritt ist also zunächst der Kapitalwert der Investition zu ermitteln. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} K &= -100 + 60 \cdot 1{,}1^{-1} + 60 \cdot 1{,}1^{-2} \\ &= -100 + 60 \cdot 0{,}9091 + 60 \cdot 0{,}8264 \\ &= -100 + 54{,}55 + 49{,}48 \\ &= 4{,}13. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen von K in Formel (AN_1) ergibt sich für die äquivalente Annuität e*:

$$\begin{aligned} e^* &= 4{,}13 \cdot \mathrm{ANF}(2\,\mathrm{J.}, 10\%) \\ &= 4{,}13 \cdot 0{,}5762 \\ &= 2{,}38. \end{aligned}$$

b) Die neue Zahlungsreihe lautet: $e_0 = -100$; $e_1 = e_2 = +57{,}62$. Aus der Definition der äquivalenten Annuität ergibt sich, dass bei einem Zinssatz von 10% sowohl der Kapitalwert als auch der Endwert der Zahlungsreihe den Wert 0 aufweisen „müssten“! Die rechnerische Überprüfung bestätigt diese „Vermutung“. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} K &= -100 + 57{,}62 \cdot 1{,}1^{-1} + 57{,}62 \cdot 1{,}1^{-2} \\ &= -100 + 57{,}62 \cdot 0{,}9091 + 57{,}62 \cdot 0{,}8264 \\ &= -100 + 52{,}38 + 47{,}62 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} EW &= K \cdot 1{,}1^2 \\ &= 0 \cdot 1{,}1^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 8

Erstellt man den TAP für die nicht modifizierte Unterlassensalternative im Falle der 100%-igen Fremdfinanzierung, so sind in den Zeitpunkten t = 1, 2, …, T alle Einzahlungen e_t, alle Zinszahlungen z_t und alle Kontostände C_t immer gleich 0, da nichts unternommen wird und auch keine eigenen Mittel angelegt werden können. Bei der Erstellung des TAP für die modifizierte Unterlassensalternative ist im Vergleich zur nicht modifizierten Unterlassensalternative nur zu berücksichtigen, dass die Einzahlungen e_1, e_2 und e_3 nun nicht mehr 0, sondern aufgrund der staatlichen Prämie 1,83 GE betragen und daraus Folgewirkungen in Bezug auf Zinszahlungen in den Zeitpunkten t = 2 und t = 3 sowie auf Kontostände in den Zeitpunkten t = 1, t = 2 und t = 3 resultieren. Für die modifizierte Unterlassensalternative ergibt sich folgender TAP:

TAP	**der modifizierten Unterlassensalternative**			
t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + e_t + z_t$
0	± 0	± 0	± 0	± 0
1	+ 1,83	± 0	+ 1,83	+ 1,83
2	+ 1,83	+ 0,09	+ 1,92	+ 3,75
3	+ 1,83	+ 0,19	+ 2,02	+ 5,77

Das Endvermögen beläuft sich in diesem Fall auf 5,77 GE und entspricht damit (abgesehen von geringfügigen Rundungsdifferenzen) dem Endwert des in Beispiel 4 bzw. 9 betrachteten Investitionsprojekts.

Übungsaufgabe 9

Da beide Alternativen eine positive äquivalente Annuität aufweisen, kann zunächst festgestellt werden, dass sie im Vergleich zur Unterlassensalternative (also bei projektindividueller Betrachtung) vorteilhaft sind.

Da das Projekt a_1, also das Projekt mit der höheren äquivalenten Annuität, auch gleichzeitig die längere individuelle Projektlaufzeit aufweist, kann in diesem Sonderfall eindeutig geschlossen werden, dass Projekt a_1 unter der Zielsetzung Endvermögensmaximierung die Optimalalternative ist.

Dies lässt sich auch unter Rückgriff auf die ökonomischen Interpretationen der äquivalenten Annuität sehr einfach veranschaulichen. Da die (positive) Annuität ökonomisch als der „durchschnittliche Nettoüberschuss“ interpretiert werden kann, den ein Investitionsprojekt im Vergleich zur Unterlassensalternative in jedem Jahr der Projektlaufzeit erzielt, muss Projekt a_1 eindeutig Optimalalternative sein, da dieses Projekt über den „längeren Zeitraum" den „höheren Nettoüberschuss" erwirtschaftet und damit das Projekt a_2 und die Unterlassensalternative (im Sinne allgemeiner zeitlicher Dominanz) dominiert.

Übungsaufgabe 10

$$K_1\,(r=9\%) = -80 - \frac{12}{1{,}09} + \frac{50}{1{,}09^2} + \frac{66}{1{,}09^3} = 2{,}04 > 0$$

$$K_1\,(r=10\%) = -80 - \frac{12}{1{,}1} + \frac{50}{1{,}1^2} + \frac{66}{1{,}1^3} = 0$$

$$K_1\,(r=11\%) = -80 - \frac{12}{1{,}11} + \frac{50}{1{,}11^2} + \frac{66}{1{,}11^3} = -1{,}97 < 0$$

Übungsaufgabe 11

Substitution von (1 + r) durch q: q : = (1 + r)

$$e_0 + \frac{e_1}{q} + \frac{e_2}{q^2} = 0 \qquad \Big|\cdot q^2$$

$$\Leftrightarrow \quad e_0 \cdot q^2 + e_1 \cdot q + e_2 = 0 \qquad \Big| : e_0$$

$$\Leftrightarrow \quad q^2 + \frac{e_1}{e_0} \cdot q + \frac{e_2}{e_0} = 0$$

Mittels quadratischer Ergänzung lässt sich diese Gleichung umformen zu

$$\left(q + \frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 + \frac{e_2}{e_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\left(q + \frac{e_1}{2e_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 + \frac{e_2}{e_0}}\right] \cdot \left[\left(q + \frac{e_1}{2e_0}\right) - \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 + \frac{e_2}{e_0}}\right] = 0$$

$$q_{1,2} = \frac{-e_1}{2e_0} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \frac{e_2}{e_0}}$$

$$r^*_{1,2} = \frac{-e_1}{2e_0} \pm \sqrt{\left(\frac{e_1}{2e_0}\right)^2 - \frac{e_2}{e_0}} - 1$$

Alternativ lässt sich diese Lösung ermitteln, indem in die für quadratische Gleichungen des Typs

$$a \cdot q^2 + b \cdot q + c = 0$$

bekannte Lösung

$$q_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$

eingesetzt wird.

Übungsaufgabe 12

Die Formel (IZ_7) lässt sich auf unterschiedlichen Wegen herleiten. Wir stellen Ihnen nachfolgend zwei alternative Möglichkeiten vor.

1. Möglichkeit

Bestimmung der Gleichung ersten Grades über die sogenannte „Zwei-Punkte-Methode“ und Bestimmung der Nullstelle.

a) Die beiden Punkte (K_P, r_P) und (K_N, r_N) liegen annahmegemäß auf einer Geraden, für die allgemein gilt:

$$K = b_1 \cdot r + b_2 \ .$$

b) Nach Einsetzen von (K_P, r_P) bzw. (K_N, r_N) in die allgemeine Bestimmungsgleichung gemäß a) ergibt sich:

$$K_P = b_1 \cdot r_P + b_2 \quad \text{bzw.} \quad K_N = b_1 \cdot r_N + b_2 \ .$$

c) Formt man nun die beiden Gleichungen gemäß b) nach dem Parameter b_2 um, so ergibt sich nach Gleichsetzen:

$$K_P - b_1 \cdot r_P = K_N - b_1 \cdot r_N \ ,$$

woraus für den Parameter b_1 nach einfacher Umformung folgt:

$$b_1 = \frac{K_P - K_N}{r_P - r_N} \ .$$

d) Setzt man den in c) für den Parameter b_1 erhaltenen Ausdruck in eine der beiden Gleichungen gemäß b) ein, so ergibt sich für den Parameter b_2:

$$b_2 = \frac{K_N \cdot r_P - K_P \cdot r_N}{r_P - r_N} \ .$$

e) Durch Einsetzen der für die Parameter b_1 und b_2 ermittelten Werte in die allgemeine Gleichung ersten Grades gemäß a) ergibt sich mit

$$K = \left(\frac{K_P - K_N}{r_P - r_N} \right) \cdot r + \left(\frac{K_N \cdot r_P - K_P \cdot r_N}{r_P - r_N} \right)$$

die gesuchte Gleichung ersten Grades, deren Nullstelle ($\tilde{r}_1$) zu bestimmen ist.

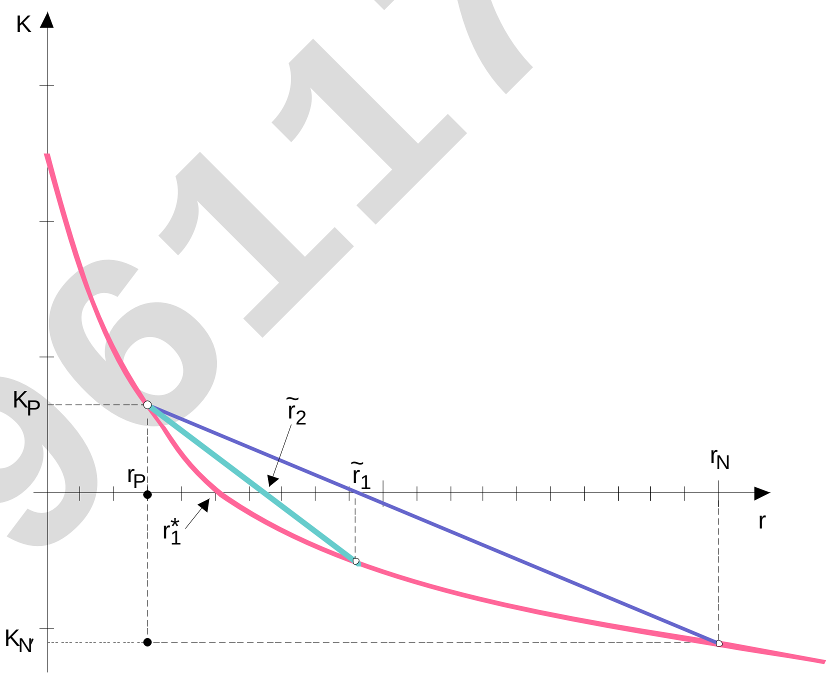
f) Setzt man in der Gleichung aus e) den Kapitalwert K gleich Null und löst nach r auf, so ergibt sich für $\tilde{r}_1$:

$$\tilde{r}_1 = \frac{K_P \cdot r_N - K_N \cdot r_P}{K_P - K_N} .$$

2. Möglichkeit

Herleitung über das Verhältnis der Katheten zweier ähnlicher rechtwinkliger Dreiecke

Zur Bestimmung von $\tilde{r}_1$ betrachten wir nachfolgende Abbildung:



Die rechtwinkligen Dreiecke $(r_P, 0)$, (r_P, K_P), $(\tilde{r}_1, 0)$ und (r_P, K_N), (r_P, K_P), (r_N, K_N) sind offenbar ähnlich, mithin gilt für ihre Katheten

$$\frac{\tilde{r}_1 - r_P}{K_P - 0} = \frac{r_N - r_P}{K_P - K_N} .$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{r}_1 = \frac{r_N - r_P}{K_P - K_N} \cdot K_P + r_P$$

oder

$$\tilde{r}_1 = \frac{r_N \cdot K_P - r_P \cdot K_N}{K_P - K_N} \; .$$

Übungsaufgabe 13

Bestimmung von $\tilde{r}_2$:

1. Schritt: Bestimmung von $K(\tilde{r}_1)$

$$K(\tilde{r}_1) = K(r = 0{,}1042) = -0{,}8359 \; .$$

2. Schritt: Bestimmung von $\tilde{r}_2$:

Zunächst ist zu beachten, dass in (IZ_7) nun für K_N statt $K_2 = -9{,}23$ der Wert $K(\tilde{r}_1) = -0{,}8359$ und für r_N statt $r_2 = 15\%$ der Wert $\tilde{r}_1 = 10{,}42\%$ einzusetzen ist. Die Werte für r_P und K_P bleiben unverändert. Damit ergibt sich als zweite Näherung für r^*:

$$\tilde{r}_2 = \frac{0{,}1042 \cdot 10{,}94 \; - \; 0{,}05 \cdot (-0{,}8359)}{10{,}94 \; - \; (-0{,}8359)} = 0{,}1004 \; (= 10{,}04\%) \; .$$

Bestimmung von $\tilde{r}_3$:

1. Schritt: Bestimmung von $K(\tilde{r}_2)$

$$K(\tilde{r}_2) = K(r = 0{,}1004) = -0{,}0801 \; .$$

2. Schritt: Bestimmung von $\tilde{r}_3$:

Erneut ist zu beachten, dass in (IZ_7) nun für K_N der Wert $K(\tilde{r}_2) = -0{,}0801$ und für r_N der Wert $\tilde{r}_2 = 10{,}04\%$ einzusetzen ist. Die Werte für r_P und K_P bleiben weiterhin unverändert. Damit ergibt sich als dritte Näherung für r^*:

$$\tilde{r}_3 = \frac{0{,}1004 \cdot 10{,}94 - 0{,}05 \cdot (-0{,}0801)}{10{,}94 - (-0{,}0801)} = 0{,}10003\,(=10{,}003\%)\ .$$

Ergebnis:

Bei einer auf vier Stellen hinter dem Komma beschränkten Genauigkeit stimmt der approximativ ermittelte Zinssatz $\tilde{r}_3$ (= 0,1000) mit dem internen Zinssatz r* (= 0,1000) überein.

Übungsaufgabe 14

Setzt der Investor eigene liquide Mittel zur Finanzierung der Investition a_1 ein, so verzichtet er auf die alternative Verwendung dieser Mittel; es entstehen ihm Opportunitätskosten in Form entgehender Zins- und Zinseszinseinzahlungen. Zur Verdeutlichung des Zusammenhangs zwischen der Höhe des internen Zinsfußes und der Höhe entstehender Opportunitätskosten bietet es sich an, sowohl für die Unterlassensalternative als auch für die Investitionsalternative jeweils einen Tilgungs- und Anlageplan (TAP) aufzustellen. Für beliebige Zinssätze r kann bekanntlich in diesen Plänen die Vermögensentwicklung in Abhängigkeit von der gewählten Alternative abgebildet werden.

Zur Vereinfachung gehen wir nachfolgend davon aus, dass der Investor im Zeitpunkt t = 0 über liquide Mittel in Höhe von 100 GE verfügt, und zeigen für diesen Fall exemplarisch, dass bei einer Verzinsung der jeweiligen Salden der Konten in Höhe von r* gerade gilt: $EV_I = EV_U$.

TAP 1: Kontodarstellung im Falle des Projektverzichts für r = r* (Unterlassensalternative)

t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r^*$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + (e_t + z_t)$
0	0	0	0	+100
1	0	10	10	+110
2	0	11	11	+121
3	0	12,1	12,1	+133,1

TAP 2: Kontodarstellung bei Projektfinanzierung aus liquiden Mitteln für $r = r^*$

t	e_t	$z_t = C_{t-1} \cdot r^*$	$e_t + z_t$	$C_t = C_{t-1} + (e_t + z_t)$
0	–80	0	–80	+20
1	–12	+2	–10	+10
2	+50	+1	+51	+61
3	+66	+6,1	+72,1	+133,1

Rechnet man die Konten auf Basis eines beliebigen Zinssatzes $r < r^*$ $(r > r^*)$ ab, so ergibt sich: $EV_I > EV_U$ $(EV_I < EV_U)$. Der interne Zinsfuß gibt im Falle der Projektfinanzierung aus liquiden Mitteln also an, welche „Opportunitätskostenbelastung" das betrachtete Investitionsprojekt gerade noch verkraften könnte, ohne im Vergleich zur Unterlassensalternative unvorteilhaft zu werden. In diesem Sinne kann der interne Zinsfuß also auch im Falle der Projektfinanzierung aus liquiden Mitteln als „maximal verkraftbare Kapitalkosten- (Opportunitätskosten-) Belastung" interpretiert werden.

Bildet man zwischen allen in TAP 2 und TAP 1 jeweils korrespondierenden Zahlungssalden die Differenz, so ergibt sich exakt der aus Beispiel 18 für den Fall der Fremdfinanzierung abgeleitete Tilgungs- und Anlageplan gem. Tab. 1. Die z_t- und C_t-Werte aus TAP 1 der Tab. 1 sind im Falle der Projektfinanzierung aus liquiden Mitteln jedoch anders zu interpretieren.

- z_t gibt in diesem Fall an, auf welche Zinseinzahlung der Investor im Zeitpunkt t verzichtet, wenn er an Stelle der Unterlassensalternative die Investitionsalternative realisiert. Der Durchschnitt der Z_t-Werte kann demzufolge als durchschnittlich entgehende Zinseinzahlung bei Projektrealisierung interpretiert werden.

- C_t gibt in diesem Fall an, um welchen Betrag der Kontostand bei Projektrealisierung den Kontostand bei Projektverzicht im Zeitpunkt t unterschreitet. Insoweit gibt der Durchschnitt der C_t-Werte auch im Falle der Projektfinanzierung aus liquiden Mitteln die durchschnittliche Kapitalbindung des Investitionsprojektes a_1 an.

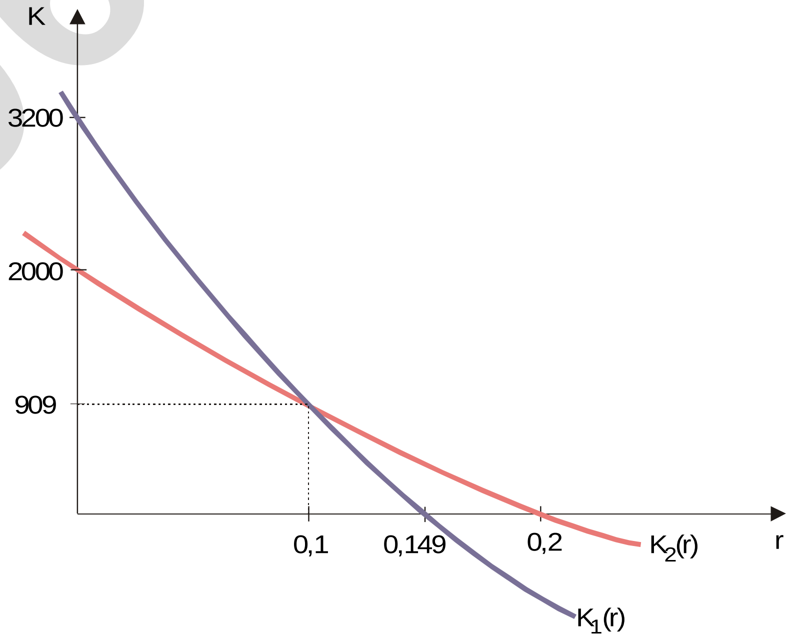
- Der Quotient aus „durchschnittlich entgehender Zinseinzahlung" und „durchschnittlicher Kapitalbindung" kann wiederum analog zum Fall der Fremdfinanzierung als „Opportunitätsverzinsung des durchschnittlich gebundenen Kapitals" der Investition a_1 interpretiert werden.

Übungsaufgabe 15

a) Bei beiden Investitionsprojekten handelt es sich um Normalinvestitionen, deren Kapitalwertfunktionen streng monoton fallend verlaufen. Die Investition a_1 weist einen Nominalwert von $N_1 = +3.200$ und einen internen Zinsfuß von $r_1^* = 14{,}89\%$ $\left(= \sqrt[2]{\frac{13.200}{10.000}} - 1\right)$ auf. Die Investition a_2 weist einen Nominalwert von $N_2 = 2.000$ und einen internen Zinsfuß von $r_2^* = 20\%$ $\left(= \frac{12.000}{10.000} - 1\right)$ auf.

Aus $N_1 > N_2$ und $r_1^* < r_2^*$ folgt, dass die beiden Kapitalwertfunktionen zumindest einen Schnittpunkt im Bereich positiver Zinssätze aufweisen müssen (vgl. dazu die folgende Abbildung).

Für jeden möglichen Schnittpunkt zweier Kapitalwertfunktionen muss an der Stelle r' gelten: $K_1\,(r = r') = K_2\,(r = r')$ bzw. $K_1\,(r = r') - K_2\,(r = r') = 0$. Der Ausdruck auf der linken Seite der letzten Gleichung ist aber nichts anderes als der Kapitalwert der Differenzzahlungsreihe, für den also gelten muss: $K^{1,2} = 0$. Bildet man die Differenzzahlungsreihe der Investitionsalternativen a_1 und a_2, so ergibt sich mit $e_0^{1,2} = 0$, $e_1^{1,2} = -12.000$ und $e_2^{1,2} = 13.200$ eine Zahlungsreihe, die nur einen einzigen internen Zinsfuß bei $r_{1/2}^* = 10\%$ aufweist. Daraus folgt, dass die beiden Projekte a_1 und a_2 nur bei einem Zinsfuß von $r = 10\%$ einen identischen Kapitalwert ($K_1 = K_2 = 909{,}09$) aufweisen (vgl. nachfolgende Abbildung).



Aus dem Verlauf der Kapitalwertfunktionen der Alternativen a_1 und a_2 ergibt sich:

a_1	ist Optimalalternative für	$0 \leq r < 0{,}10$
a_1 oder a_2	ist Optimalalternative für	$r = 0{,}10$
a_2	ist Optimalalternative für	$0{,}10 < r < 0{,}20$
U	ist Optimalalternative für	$r \geq 0{,}20$.[1]

b) Würde sich ein Investor bei Auswahlentscheidungen nach dem internen Zinsfuß richten und jeweils das Projekt mit dem höchsten r*-Wert wählen, so würde er sich für $r < 0{,}2$ für die Alternative a_2 und für $r \geq 0{,}2$ für die Unterlassensalternative entscheiden. Wie man aus obiger Abbildung erkennt, führt die auf den internen Zinsfuß gestützte Auswahlentscheidung nur für Kalkulationszinssätze in Höhe von $r \geq 0{,}1$ zu einem mit dem Kapitalwertkriterium übereinstimmenden Ergebnis. Für $0 \leq r < 0{,}1$ ergibt sich hingegen ein klarer Widerspruch zum Kapitalwertkriterium; der Investor würde bei Wahl des Projektes a_2 ein Projekt realisieren, das einen niedrigeren Kapitalwert als Projekt a_1 aufweist, und damit eine Entscheidung treffen, die nicht mit der Zielsetzung der Endvermögensmaximierung kompatibel ist.

Übungsaufgabe 16

In ihrer strengen Form beinhaltet die Prämisse des vollkommenen Finanzmarktes die Annahme, dass der Investor in seinen Planungsüberlegungen davon ausgehen kann, dass er

a) mit Sicherheit

b) zu jedem zukünftigen Zeitpunkt

c) für jeweils eine Periode

d) zu einem im Zeitablauf konstanten,

e) für Geldanlage und Geldaufnahme identischen Zinssatz

f) in beliebiger Höhe

Kredite aufnehmen und liquide Mittel anlegen kann.

1 Für $r \geq 0{,}20$ ist $K_2 \leq 0$. Definitionsgemäß entscheidet sich ein Investor auch bei $K = 0$ für die Unterlassensalternative.

Variiert man zunächst ausschließlich Annahme d) dergestalt, dass Zinssätze am Finanzmarkt im Zeitablauf variieren können, so liegt immer noch ein vollkommener Finanzmarkt vor, jetzt allerdings ein vollkommener Finanzmarkt mit wechselnden Periodenzinsfüßen.

Variiert man hingegen ausschließlich Annahme e) dergestalt, dass Zinssätze für Geldaufnahme und Geldanlage nicht übereinstimmen müssen, so liegt kein vollkommener Finanzmarkt mehr vor.

Übungsaufgabe 17

a) Zur Ermittlung des Barwertes einer Einzahlung von 100 GE ist bei wechselndem Periodenzins der Betrag von 100 GE nacheinander mit den Abzinsungsfaktoren für die Laufzeit von einem Jahr und dem jeweiligen Periodenzins zu multiplizieren. Es ergibt sich für den gesuchten Barwert (B):

$$\begin{aligned} B &= 100 \cdot 1{,}09^{-1} \cdot 1{,}07^{-1} \cdot 1{,}05^{-1} \\ &= 100 \cdot 0{,}9174 \cdot 0{,}9346 \cdot 0{,}9524 \\ &= 81{,}66 \text{ [GE]}. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} K &= -100 + 10 \cdot 1{,}05^{-1} + 10 \cdot 1{,}07^{-1} \cdot 1{,}05^{-1} \\ &\quad + 100 \cdot 1{,}09^{-1} \cdot 1{,}07^{-1} \cdot 1{,}05^{-1} \\ &= -100 + 10 \cdot 0{,}9524 + 10 \cdot 0{,}9346 \cdot 0{,}9524 \\ &\quad + 100 \cdot 0{,}9174 \cdot 0{,}9346 \cdot 0{,}9524 \\ &= 0{,}08 \text{ [GE]}. \end{aligned}$$

c) 1.
$$\begin{aligned} B &= 100 \cdot 1{,}05^{-1} \cdot 1{,}07^{-1} \cdot 1{,}09^{-1} \\ &= 100 \cdot 0{,}9524 \cdot 0{,}9346 \cdot 0{,}9174 \\ &= 81{,}66 \text{ [GE]}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis hätte man auch ohne explizite Berechnung angeben können. Der Barwert einer einzelnen Zahlung ist bei wechselnden Periodenzinssätzen ja gerade *nicht* von der Reihenfolge der einzelnen Zinssätze abhängig. Deutlich wird dies (aus formaler Sicht) daran, dass die Zahlung von 100 GE jeweils mit den gleichen Multiplikatoren multipliziert wird und lediglich die Reihenfolge der Multiplikatoren wechselt. (Es gilt das Kommutativgesetz: $a \cdot b = b \cdot a$).

2. Nein, das kann daraus nicht abgeleitet werden. Der Barwert der Projektzahlung im Zeitpunkt t = 3 ist zwar von der Reihenfolge der Zinssätze unabhängig, es verändert sich jedoch der Barwert der Projektzahlungen in den Zeitpunkten t = 1 und t = 2 bei einem Übergang von Zinssituation 1 zu Zinssituation 2. Da der Kapitalwert der Summe der Barwerte aller Projektzahlungen entspricht, ist die Reihenfolge der Zinssätze für die Höhe des Kapitalwertes eines Investitionsprojekts (im allgemeinen) also durchaus relevant.

3. $$\begin{aligned} K &= -100 + 10 \cdot 1{,}09^{-1} + 10 \cdot 1{,}07^{-1} \cdot 1{,}09^{-1} \\ &\quad + 100 \cdot 1{,}05^{-1} \cdot 1{,}07^{-1} \cdot 1{,}09^{-1} \\ &= -100 + 10 \cdot 0{,}9174 + 10 \cdot 0{,}9346 \cdot 0{,}9174 \\ &\quad + 100 \cdot 0{,}9524 \cdot 0{,}9346 \cdot 0{,}9174 \\ &= -0{,}59 \text{ [GE]}. \end{aligned}$$

   Im Beispielfall erkennt man, dass die Reihenfolge der Periodenzinssätze durchaus entscheidungsrelevant sein kann, da das betrachtete Investitionsprojekt (im Vergleich zur Unterlassensalternative) in Zinssituation 1 vorteilhaft und in Zinssituation 2 unvorteilhaft ist.

Übungsaufgabe 18

Die relevante Zahlungsreihe ergibt sich nach folgender Berechnung:

t	0	1	2	3	4
e_t	–330	+20	+90	+120	+216
f_t	+240	–84	–78	–72	–66
$c_t = e_t$ ./. f_t	–90	–64	+12	+48	+150

Für den mit 12% berechneten Kapitalwert ergibt sich dann:

$$\begin{aligned} K &= -90 - 64 \cdot 1{,}12^{-1} + 12 \cdot 1{,}12^{-2} + 48 \cdot 1{,}12^{-3} + 150 \cdot 1{,}12^{-4} \\ &= -8{,}1. \end{aligned}$$

Es würde also nicht lohnen, das Investitionsprojekt und die darauf bezogene Finanzierungsmaßnahme durchzuführen.

Übungsaufgabe 19

Zu bestimmen ist die Summe der Barwerte aller mit dem Besitz einer Anleihe verbundener zukünftiger Einzahlungen. Für einen Zinssatz von r = 4% ergibt sich für die Summe dieser Barwerte:

$$\begin{aligned} C_1\,(r=4\%) &= 6 \cdot \mathrm{RBF}\,(3\mathrm{J.}, 4\%) \;+\; 100 \cdot 1{,}04^{-3} \\ &= 6 \cdot 2{,}7751 \;+\; 100 \cdot 0{,}8890 \\ &= 16{,}65 \;+\; 88{,}90 \\ &= 105{,}55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2\;(r=4\%) &= 6 \cdot \mathrm{RBF}\,(7\mathrm{J.}, 4\%) \;+\; 100 \cdot 1{,}04^{-7} \\ &= 6 \cdot 6{,}0021 \;+\; 100 \cdot 0{,}7599 \\ &= 36{,}01 \;+\; 75{,}99 \\ &= 112. \end{aligned}$$

Der Kurs der Anleihe A_1 steigt bei einer Änderung des Marktzinses von 6% auf 4% um 5,55 GE, während der Kurs der Anleihe A_2 um 12 GE ansteigt. Die Anleihe mit der längeren Restlaufzeit ist also stärker von der Marktzinssenkung betroffen; ihr Kurs steigt mehr als der Kurs der Anleihe mit der kürzeren Laufzeit.