1 Klassische Entscheidungsprinzipien für Risikosituationen

1.1 Grundbegriffe

klassisches Prinzip

Aus der Lektüre des Abschnitts 2.3 der Kurseinheit 3 kennen Sie die wichtigsten Kennzahlen, die üblicherweise zur Charakterisierung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen herangezogen werden. Bei der Erörterung von Entscheidungen unter Risiko bezeichnet man es nun häufig als **klassisches Prinzip,** wenn die für die Ranglozierung der Alternativen $a_i (i = 1, 2, \ldots, m)$ maßgeblichen Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ direkt als Funktion derartiger, unmittelbar im Hinblick auf die Ergebniswerte e_{ij} definierter Kennzahlen $y_h(E_i)$ $(h = 1, 2, \ldots, \overline{h})$ ermittelt werden, also gilt:

$$(1) \qquad \varphi(a_i) \;=\; \Phi\left[y_1(E_i), y_2(E_i), \ldots, y_{\overline{h}}(E_i)\right] .$$

Entscheidungsprinzip

Das erste bei der Formulierung einer dem klassischen Prinzip entsprechenden Entscheidungsregel zu lösende Problem besteht also in der Auswahl der maßgeblichen Kennzahlen. Eine solche Vorschrift, die zwar Art und Anzahl der subsidiären Teilzielvariablen festlegt, die Art und Weise ihrer Berücksichtigung in der Präferenzfunktion jedoch noch offen lässt, bezeichnet man als Entscheidungsprinzip. Je nach der Auswahl der relevanten Kennzahlen bezeichnet man verschiedene Entscheidungsprinzipien dann auch als $(y_1, y_2, \ldots, y_{\overline{h}})$-Prinzipien. So spricht man beispielsweise vom μ-Prinzip, wenn als einzige Kennzahl der mathematische Erwartungswert ausgewählt wird, oder vom μ-σ-Prinzip, wenn Erwartungswert und Streuung verwendet werden.

Die Festlegung auf ein bestimmtes Entscheidungsprinzip führt nun zwangsläufig dazu, dass alle Alternativen, für deren Wahrscheinlichkeitsverteilungen die relevanten Kennzahlen $y_1, y_2, \ldots, y_{\overline{h}}$ dieselben Werte annehmen, als gleichwertig ausgewiesen werden – unabhängig davon, wie sehr die Wahrscheinlichkeitsverteilungen ansonsten voneinander abweichen. Das Ausmaß, in dem es dazu kommt, ist natürlich tendenziell umso geringer, je größer die Zahl der subsidiären Zielvariablen ist.

Wird nun über die Auswahl der überhaupt relevanten subsidiären Zielvariablen hinaus

– auch noch festgelegt, inwieweit diese Variablen verschiedenen Satisfizierungs- und Fixierungsbedingungen unterworfen werden oder als Variable in eine Amalgamationsfunktion eingehen sollen,

– sowie spezifiziert, wie die in die Amalgamationsfunktion einzubeziehenden Variablen im Einzelnen miteinander verknüpft werden sollen,

Entscheidungsregel

so spricht man von einer **Entscheidungsregel.**

Zur konkreten Anwendung einer Entscheidungsregel bedarf es in der Regel darüber hinaus natürlich noch der numerischen Spezifikation der kritischen Werte der Satisfizierungs- und Fixierungsbedingungen sowie der Parameter der Amalgamationsfunktion. Die Notwendigkeit einer weiteren numerischen Spezifikation entfällt lediglich in dem – in der Literatur allerdings ausgiebig erörterten – Spezialfall, dass die Entscheidungsregel ausschließlich die Extremierung einer einzigen subsidiären Zielvariablen vorsieht, so wie wir es in der Kurseinheit 5 für Ungewissheitssituationen noch an mehreren Beispielen kennenlernen werden.

Sicherheitsäquivalent

Bevor wir nun einige der bekanntesten klassischen Entscheidungsprinzipien näher betrachten, wollen wir uns vorab noch kurz mit einem weiteren zentralen Begriff der Risikotheorie beschäftigen, nämlich dem sog. Sicherheitsäquivalent.

x **Definition: Sicherheitsäquivalent**

Unter dem einer Wahrscheinlichkeitsverteilung E_i, durch die die Konsequenzen einer Alternative a_i gekennzeichnet werden, entsprechenden Sicherheitsäquivalent versteht man den sicheren Einkommensbetrag $S(a_i)$, der dem Entscheidenden gerade als gleichwertig mit der (unsicheren) Alternative a_i erscheint.

Beispiel 1:

Angenommen, Sie besäßen ein Lotterielos, das sich mit 90%iger Wahrscheinlichkeit als Niete erweisen wird (Gewinn ±0 GE), bei dem jedoch mit 10%iger Wahrscheinlichkeit ein Gewinn von 1.000 GE zu erwarten ist. Für welchen sicheren Betrag wären Sie bereit, das Lotterielos zu verkaufen? Bei einem Gebot von nur 1 GE würde die überwiegende Mehrzahl von Ihnen das Los wohl behalten wollen; für 900 GE hingegen würden die meisten wohl zum Verkauf bereit sein. Wie sähe es jedoch bei Beträgen von beispielsweise 75, 90, 100, 125 oder 150 GE aus? Auf jeden Fall kann man sich vorstellen, dass bei einer schrittweisen Erhöhung des Kaufgebots irgendwo ein Punkt erreicht wird, bei dem die Entscheidung gegen bzw. für den Verkauf des Loses gerade „umkippt". Das Sicherheitsäquivalent ist dann genau dieser kritische Betrag, bei dem der Entscheidende den beiden Alternativen, das Los zu behalten oder zu verkaufen, gerade indifferent gegenübersteht.

Mindestkompensation

Das Sicherheitsäquivalent kann somit als der (subjektive) **Wert** einer Alternative angesehen werden, und zwar im Sinne des „Mindestkompensationsbetrages" („Preisuntergrenze"), bei dem der Entscheidende gerade bereit ist, auf die Wahrnehmung der betrachteten Alternative zu verzichten bzw. sein Recht dazu zu verkaufen.

Umgekehrt ist natürlich auch der Fall denkbar, dass man sich einer Wahrscheinlichkeitsverteilung gegenübersieht, auf deren „Besitz" man gerne verzichten würde – wenn man nur könnte (z.B. die Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicher Krankheitskosten). Bei solchen als unangenehm empfundenen Positionen stellt sich nun die Frage, welchen sicheren Betrag man maximal zu bieten bereit wäre, um diese Position loszuwerden. Diese Frage nach der **maximalen Versicherungsprämie** entspricht mit umgekehrten Vorzeichen genau der nach der Mindestkompensation für eine als angenehm empfundene Wahrscheinlichkeitsverteilung. Mithin gibt der absolute Betrag des – natürlich negativen – Sicherheitsäquivalentes einer solchen Wahrscheinlichkeitsverteilung die gesuchte maximale Versicherungsprämie an.

maximale Versicherungsprämie

Ist die maßgebliche Präferenzfunktion Φ bekannt, so ist das einer Alternative a_i entsprechende Sicherheitsäquivalent formal durch die Relation

(2) $$\Phi\left[S(a_i)\right] = \Phi\left[(E_i)\right]$$

zu bestimmen, d.h. der durch die Präferenzfunktion bestimmte Präferenzwert der a_i entsprechenden Ergebnisverteilung E_i muss mit dem des Sicherheitsäquivalentes übereinstimmen.

Das Sicherheitsäquivalent darf hingegen nicht mit dem **Maximaleinsatz** $M(a_i)$ verwechselt werden, d.h. dem Betrag, den ein Entscheidungssubjekt maximal bieten würde, um eine bestimmte Handlungsalternative a_i wahrnehmen zu können. Das Sicherheitsäquivalent geht gewissermaßen von der Besitzerposition aus und gibt Antwort auf die Frage, für welchen Betrag man auf den „Besitz" verzichten würde (bzw. welchen Betrag man maximal bieten würde, um den Besitz loszuwerden). Der Maximaleinsatz hingegen bezieht sich auf die Frage, welchen sicheren Betrag das Entscheidungssubjekt zu opfern bereit wäre, um in den „Besitz" zu gelangen, geht also von der Position des Besitzlosen aus. Verdeutlicht man die Position dessen, der eine Wahrscheinlichkeitsverteilung „besitzt", mit $\{E_i\}$, die desjenigen, der sie nicht „besitzt", mit $\{0\}$, so kann der Unterschied zwischen Sicherheitsäquivalent und Maximaleinsatz durch Abb. 1 verdeutlicht werden: Das Sicherheitsäquivalent bezieht sich auf den Übergang von der Position $\{E_i\}$ zur Position $\{0\}$, während der Maximaleinsatz gerade umgekehrt im Hinblick auf den Übergang von $\{0\}$ zu $\{E_i\}$ definiert ist.[1)]

1 Für den Fall, dass der Besitz von E_i als unangenehm empfunden wird, entspricht dem Maximaleinsatz die Minimalprämie, die einer Versicherung geboten werden muss, um sie zur Übernahme der entsprechenden Risiken zu bewegen.

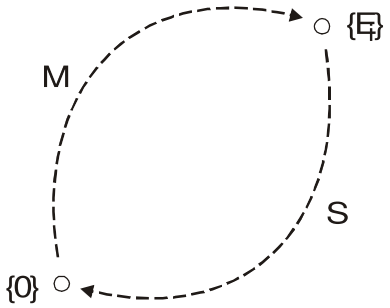


Abb. 1: Sicherheitsäquivalent und Maximaleinsatz

Dass diese beiden Beträge bei vorgegebener Präferenzstruktur voneinander abweichen können (wenn auch nicht zwingend müssen), mag Ihnen im Augenblick vielleicht nicht ganz einsichtig erscheinen. Wir werden darauf bei der Erörterung verschiedener Entscheidungsregeln noch zurückkommen, indem wir die für die Bestimmung von Sicherheitsäquivalent und Maximaleinsatz maßgeblichen Relationen

(2) $$\Phi\left[S(a_i)\right] = \Phi\left[(E_i)\right]$$

(3) $$\Phi\left[E_i - M(a_i)\right] = \Phi[0]$$

im einzelnen näher untersuchen werden.[1)]

1 $\Phi[S(a_i)]$ und $\Phi[0]$ bezeichnen die dem sicheren Einkommen $S(a_i)$ bzw. 0 zuzuordnenden Präferenzwerte; $[E_i - M(a_i)]$ die Wahrscheinlichkeitsverteilung derjenigen Ergebniswerte der Alternative a_i, die um den Maximaleinsatz vermindert sind $[p_{ij}; e_{ij} - M(a_i)]$ $(j=1, 2, \ldots, n)$.

1.2 Eindimensionale Entscheidungsregeln – Das μ-Prinzip

1.2.1 Formale Darstellung

Die wohl bekannteste und einfachste Entscheidungsregel für Risikosituationen sieht vor, die verschiedenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen E_i jeweils durch ihren **Erwartungswert** zu charakterisieren, die Präferenzfunktion also als

$$(4) \qquad \Phi(E_i) = \mu_i = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j$$

zu definieren.[1] Dabei wird als Optimierungskriterium vorwiegend die Maximierung (bzw. Minimierung) vorgesehen; d.h. es ist die Alternative mit dem maximalen (oder minimalen) Erwartungswert zu bestimmen, also:

$$(5) \qquad \boxed{\max_i : \varphi(a_i) = \mu_i \, .}$$

Erwartungswert-maximierung

Daneben ist es natürlich – so wie im Abschnitt 2.2.2.2 der Kurseinheit 3 unter (1) dargestellt – auch möglich, als Optimierungskriterium eine Satisfizierungs- oder eine Fixierungsbedingung aufzustellen. Da diese Zielvorschriften in dem hier vorliegenden Fall nur einer subsidiären Zielvariablen bekanntlich jedoch nur insoweit sinnvoll sind, wie sie als spezielle Ausprägungen eines übergeordneten Extremierungskonzeptes angesehen werden können, wollen wir uns von vornherein auf die Analyse der Zielfunktion (5) beschränken.

Für Sicherheitsäquivalent und Maximaleinsatz einer Wahrscheinlichkeitsverteilung E_i ergibt sich nach den (4) entsprechenden Relationen

$$\Phi[E_i] = \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j = \mu_i$$

$$\Phi[S(a_i)] = S(a_i)$$

1 Daneben werden als weitere Formen eindimensionaler Entscheidungsprinzipien gelegentlich noch die Optimierung des wahrscheinlichsten Wertes oder des Medians erörtert; vgl. z.B. BROSS (1964), S. 104; MOXTER (1962).

$$\Phi[E_i - M(a_i)] = \sum_{j=1}^{n} \left[e_{ij} - M(a_i)\right] \cdot p_j = \mu_i - M(a_i)$$

$$\Phi[0] = 0$$

einfach

$$S(a_i) = \mu_i \quad \text{und} \tag{6}$$

$$\mu_i - M(a_i) = 0, \quad \text{also}$$

$$M(a_i) = \mu_i\ . \tag{7}$$

Bei Anwendung des μ-Prinzips stimmen Sicherheitsäquivalent und Maximaleinsatz also untereinander überein und sind zugleich auch noch mit dem Präferenzwert μ betragsgleich. Würde also im Fall unseres im vorigen Abschnitt betrachteten Lotterieloses das μ-Kriterium angewandt, so beliefen sich sowohl die Preisuntergrenze des Losbesitzers als auch die Preisobergrenze eines potentiellen Loskäufers jeweils gerade auf den Erwartungswert von 100 GE.

Es steht außer Zweifel, dass das μ-Prinzip das weitaus gebräuchlichste Entscheidungskriterium darstellt, das insbesondere im Bereich des Operations-Research bei der Konstruktion und Analyse stochastischer Entscheidungsmodelle[1)] verwendet wird. Diese Beliebtheit dürfte nicht zuletzt daraus resultieren, dass dieses Prinzip, sofern die notwendigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen einmal festgestellt sind, zumeist mathematisch recht einfach zu handhaben ist. Auf der anderen Seite wird die Sinnhaftigkeit dieses Entscheidungsprinzips allerdings auch grundsätzlich in Frage gestellt. Zur Untersuchung dieser Frage ist es zweckmäßig, zwei Typen von Entscheidungssituationen zu unterscheiden, nämlich

Wiederholungs- und Einzelfall

– die Entscheidung über eine sehr häufig in ähnlicher Form wiederholbare Aktion (**Wiederholungsfall**),

– die Entscheidung über eine einmalige, in dieser und in ähnlicher Form nicht wiederholbare Aktion (**Einzelfall**).[2)]

1 Entscheidungsmodelle bezeichnet man als stochastisch, wenn – im Gegensatz zu deterministischen Modellen – die Unsicherheit der alternativ möglichen Ergebnisse explizit berücksichtigt wird.

2 Reale Entscheidungssituationen liegen natürlich sehr häufig zwischen diesen beiden Extremtypen.

1.2.2 Beurteilung des μ-Kriteriums für den Wiederholungsfall

Für die Plausibilität des μ-Kriteriums im Wiederholungsfall wird häufig auf das „Gesetz der großen Zahlen" und in Verbindung damit auf den „zentralen Grenzwertsatz" hingewiesen. Wir können hier auf Herleitung und Bedeutung dieser beiden Theoreme nicht näher eingehen, wollen die für die Bedeutung des μ-Kriteriums relevanten Aspekte jedoch an folgendem Beispiel ansatzweise verdeutlichen.

Gesetz der großen Zahlen

Beispiel 2:

Gegeben sei eine Alternative – z.B. ein Glücksspiel, bei dem eine Münze geworfen wird – mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung:

	K	Z
e	0	10
p	0,5	0,5

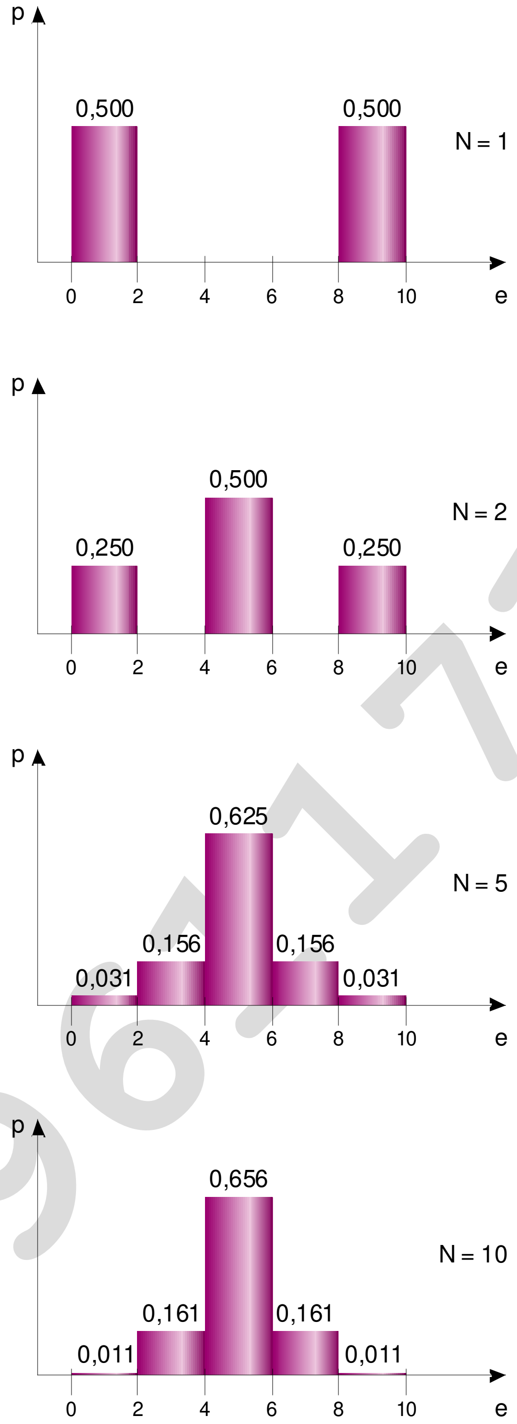
K=„Kopf", Z=„Zahl"

Der Erwartungswert beträgt offenbar $\mu=5$, jedoch streuen die möglichen Spielausgänge recht weit um diesen rechnerischen Wert.

Wird dieses Glücksspiel nun mehrfach hintereinander gespielt, so stellt der in einer Serie von N Spielen erzielbare Durchschnittsgewinn pro Spiel $\overline{e}$ natürlich ebenfalls eine Zufallsvariable dar, die ebenfalls zwischen 0 (≡ alle N Spiele führen zu „Kopf") und 10 (≡ alle N Spiele führen zu „Zahl") streuen kann und deren Erwartungswert $\mu^{(N)}$ unverändert bei $\mu^{(N)}=5$ bleibt. Die Stärke, mit der die einzelnen Ergebnismöglichkeiten um diesen Mittelwert streuen, nimmt jedoch mit zunehmender Zahl von Spielen ständig ab; die Wahrscheinlichkeitsverteilungen konzentrieren sich immer mehr auf den Mittelwert.[1] (Vgl. die folgende Abbildung.)

Durchschnittsgewinn pro Spiel: $\overline{e}$

1 Wie Sie noch im Modul „Statistische Methodenlehre" lernen werden, gilt allgemein, dass sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung der in N Spielen erzielbaren Durchschnittsgewinne pro Spiel mit wachsendem N asymptotisch einer sog. Normalverteilung mit dem Erwartungswert μ und der Varianz σ^2/N nähert, wobei σ^2 die Varianz der einfachen Ausgangsverteilung bezeichnet.


p
0,500
0,500
N = 1
0
2
4
6
8
10
e
p
0,500
0,250
0,250
N = 2
0
2
4
6
8
10
e
p
0,625
0,156
0,156
0,031
0,031
N = 5
0
2
4
6
8
10
e
p
0,656
0,161
0,161
0,011
0,011
N = 10
0
2
4
6
8
10
e

Dieser „Konzentrationsprozess“ wird durch die grafisch dargestellten Intervall-Wahrscheinlichkeitsverteilungen verdeutlicht, in denen jeweils für Serien von $N=1$, $N=2$, $N=5$ und $N=10$ die Wahrscheinlichkeiten dafür angegeben sind, dass der Durchschnittsgewinn pro Spiel in eines der Intervalle $(0 \leq \bar{e} < 2)$, $(2 \leq \bar{e} < 4)$, $(4 \leq \bar{e} \leq 6)$, $(6 < \bar{e} \leq 8)$, $(8 < \bar{e} \leq 10)$ fällt.

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das tatsächlich eintretende Ergebnis in unmittelbare Nähe des Erwartungswertes fällt, (etwa in dem Intervall von 4 bis 6), wird also mit zunehmender Zahl von Wiederholungen immer größer. So beläuft sich die Wahrscheinlichkeit für einen Durchschnittsgewinn im Intervall zwischen 4 und 6 nach 100 Wiederholungen bereits auf rund 85%, nach 250 Wiederholungen schon auf mehr als 99,9%.

Stehen nun zwei hinreichend oft wiederholbare Alternativen a_1 und a_2 mit $\mu_1 > \mu_2$ zur Auswahl, so konzentrieren sich die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Durchschnittsergebnisse mit zunehmender Zahl von Wiederholungen jeweils immer dichter um ihre Erwartungswerte; die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich für kleine N evtl. sehr stark überlappten, rücken immer deutlicher auseinander und die Wahrscheinlichkeit, bei Wahl von Alternative a_1 den höheren Durchschnittsgewinn zu erzielen, nimmt praktisch den Wert eins an. Folgendes Beispiel verdeutlicht diesen Sachverhalt.

Beispiel 3:
Gegeben seien 2 Alternativen a_1, a_2 mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen:

p	0,5	0,5	
e_1	0	10	$\mu_1=5$
e_2	4	5	$\mu_2=4{,}5$

a_1 hat zwar den eindeutig höheren Erwartungswert, führt aber bei einmaliger Durchführung immerhin mit 50%iger Wahrscheinlichkeit zu einem schlechteren Ergebnis als a_2. Für den Fall, dass die Alternativen hinreichend oft wiederholt werden können, wird die Wahrscheinlichkeit, bei a_1 schlechter zu fahren als bei a_2, jedoch praktisch gleich null. Dieser Sachverhalt kann – wie in folgender Tabelle gezeigt – auf zwei miteinander verwandte Arten verdeutlicht werden. So ist zunächst mit 4,55 ein – beliebig zwischen μ_1 und μ_2 gewählter – fester Wert angenommen worden, für den dann jeweils die Wahrscheinlichkeiten dafür berechnet worden sind, dass $\bar{e}_1$ darüber bzw. $\bar{e}_2$ darunter bleibt. Daneben kann auch direkt die Wahrscheinlichkeit dafür ermittelt werden, dass sich bei a_1 ein größerer Durchschnittsgewinn ergibt als bei a_2.[1)]

N= 100	$p(\bar{e}_1 > 4{,}55) = 0{,}816$	$p(\bar{e}_2 < 4{,}55) = 0{,}841$
N= 250	$p(\bar{e}_1 > 4{,}55) = 0{,}923$	$p(\bar{e}_2 < 4{,}55) = 0{,}943$
N= 500	$p(\bar{e}_1 > 4{,}55) = 0{,}978$	$p(\bar{e}_2 < 4{,}55) = 0{,}987$
N=1.000	$p(\bar{e}_1 > 4{,}55) = 0{,}998$	$p(\bar{e}_2 < 4{,}55) = 0{,}999$
N= 100	$p(\bar{e}_1 \geq \bar{e}_2) = 0{,}840$	
N= 250	$p(\bar{e}_1 \geq \bar{e}_2) = 0{,}942$	
N= 500	$p(\bar{e}_1 \geq \bar{e}_2) = 0{,}987$	
N=1.000	$p(\bar{e}_1 \geq \bar{e}_2) = 0{,}999$	

Bei 500 Wiederholungen etwa bleibt der bei a_2 erzielbare Durchschnittsgewinn also mit fast 99%iger Wahrscheinlichkeit unter 4,55, während dieser Wert bei Wahl von a_1 mit fast 98%iger Wahrscheinlichkeit überschritten wird. In Übereinstimmung damit liegt auch die Wahrscheinlichkeit, dass a_1 zu dem höheren Durchschnittsgewinn führt, auch schon sehr nahe bei eins. Bei einer hinreichend großen Zahl von Wiederholungen überschneiden sich die beiden Wahrscheinlichkeitsverteilungen praktisch kaum noch; a_1 führt dann fast mit Sicherheit zu einem höheren Durchschnittsgewinn als a_2.

Sofern die Voraussetzung einer hinlänglich großen Anzahl von Wiederholungsmöglichkeiten gegeben ist, erscheint das μ-Kriterium also durchaus als sinnvolles Entscheidungsprinzip.

Dabei ist die Voraussetzung der häufigen Wiederholbarkeit gleicher (oder auch nur ähnlicher) Zufallsexperimente in einer größeren Zahl ökonomischer Entscheidungssituationen gegeben, als man auf den ersten Blick annehmen möchte. So etwa

– bei der Qualitätsbeurteilung gleichartiger Werkstücke, die zu tausenden den gleichen Arbeitsgängen unterzogen werden,

---

1 Zur numerischen Ermittlung der angegebenen Wahrscheinlichkeitswerte wurden die sich für die verschiedenen N-Werte jeweils ergebenden Binomial-Verteilungen durch eine entsprechende Normalverteilung mit $\mu = \mu_i$ und $\sigma^2 = \sigma_i^2/N$ $(i = 1, 2)$ approximiert. Außerdem wurde völlige stochastische Unabhängigkeit der bei a_1 und a_2 eintretenden Ergebnisse unterstellt.

Zum Verständnis des folgenden ist es nicht notwendig, dass Ihnen der Inhalt dieser Anmerkung ganz klar ist. Sie sollten sich gegebenenfalls die einschlägigen Kapitel des Kurses „Statistik“ anschauen.

– ebenso bei der Qualitätsbeurteilung der entsprechenden Werkzeuge und Maschinen (z.B. Abschätzung von Toleranzabweichungen bei Schneide- und Bohrmaschinen),

– bei der Planung von Stillstandszeiten und Reparaturkosten bei einem Park mehrerer hundert oder tausend gleichartiger Aggregate (z.B. Webstühle),

– bei der Ausrüstung einer großen Zahl von Gegenständen mit bestimmten Einzelteilen (z.B. Reifen bei einem großen Fuhrpark, Glühbirnen).

Bei einigem Überlegen werden Ihnen selbst bestimmt noch etliche weitere Beispiele für entsprechende Massenphänomene einfallen.

1.2.3 Beurteilung des μ-Kriteriums für Einzelentscheidungen

Im Gegensatz zum Wiederholungsfall wird die Sinnhaftigkeit des μ-Kriteriums für Entscheidungen in Einzelfällen allgemein erheblich kritischer beurteilt. Dabei werden unter anderem folgende zwei Gruppen von Argumenten gegen die Rationalität des μ-Prinzips vorgebracht:

(1) **Das Petersburger Paradoxon**

Petersburger Paradoxon

Das sog. Petersburger Spiel sieht folgenden Verlauf vor: Eine ideale Münze mit den Seiten „Adler“ und „Zahl“ wird so lange geworfen, bis zum ersten Mal „Adler“ erscheint. Geschieht dies sofort beim ersten Wurf, erhält der Spieler 2 GE von der Bank. Erscheint der „Adler“ erst beim zweiten Wurf, so zahlt die Bank den doppelten Betrag, also 4 GE. Fällt der „Adler“ erst im dritten Wurf, so verdoppelt sich die Auszahlung noch einmal, beträgt also 8 GE usw. Allgemein gilt also: Fällt die Münze im n-ten Wurf zum ersten Mal auf „Adler“, so erhält der Spieler einen Gewinn von 2^n GE.

Die Anzahl der verschiedenen Ergebnismöglichkeiten dieses Spiels ist offensichtlich unendlich groß. Denn theoretisch ist es ohne weiteres denkbar, dass eine beliebig lange Wurfserie nicht zu dem Ergebnis „Adler“ führt.

Allerdings ist die entsprechende Wahrscheinlichkeit umso kleiner, je länger die Serie ist. Die Konsequenzen des Petersburger Spiels können somit durch folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung umschrieben werden:

e	$2(=2^1)$	$4(=2^2)$	$8(=2^3)$	$\ldots 2^n \ldots$
p(e)	$\frac{1}{2}(=2^{-1})$	$\frac{1}{4}(=2^{-2})$	$\frac{1}{8}(=2^{-3})$	$\ldots 2^{-n} \ldots$

Tab. 1: Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Petersburger Spiel

Angenommen, wir würden Sie zu diesem Spiel einladen.

a) Welchen Betrag wären Sie maximal zu zahlen bereit, um einmal an diesem Spiel teilnehmen zu dürfen?

b) Welchen Betrag müssten wir Ihnen bieten, damit Sie bereit wären, für ein einziges Spiel die Bank zu übernehmen?

Für den Erwartungswert ergibt sich nun gem. Tab. 1:

(8) $$\mu = 2 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} + 8 \cdot \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (2^n \cdot 2^{-n}) = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \infty .$$

Erwartungswert und damit auch das dem μ-Kriterium entsprechende Sicherheitsäquivalent sowie der Maximaleinsatz für das Petersburger Spiel sind also unendlich hoch. D.h., sofern Sie sich nach dem μ-Prinzip richten würden,

– müssten Sie für die Möglichkeit, an diesem Spiel teilnehmen zu können, praktisch Millionen- oder Milliardenbeträge bieten,

– während Sie andererseits auch durch das Angebot sechs- oder siebenstelliger Summen immer noch nicht bereit sein dürften, auch nur für ein einziges Spiel die Bank zu halten.

Nach aller Erfahrung ist jedoch kaum damit zu rechnen, dass irgendjemand von Ihnen wesentlich mehr als 100 GE für die Spielteilnahme bieten wird. Und andererseits lassen sich leicht Leute finden, die auch für weniger als 100 GE die Bank halten würden. Mit den aus der Anwendung des μ-Prinzips resultierenden extremen Verhaltensvorschlägen hingegen fühlten wir uns wohl alle schlecht beraten.

Wir können also zunächst festhalten, dass die Anwendung des μ-Prinzips zumindest in gewissen Entscheidungssituationen – etwa in der Art des Petersburger Spiels – zu Entscheidungen führte, die wir allgemein als nicht vernünftig empfinden. Insoweit ist die allgemeine Tauglichkeit dieses Entscheidungsprinzips also in Zweifel zu ziehen, was natürlich seine Sinnhaftigkeit für speziellere Entscheidungssituationen noch nicht zwangsläufig ausschließt.

(2) Glücksspiele und Versicherungen

Täglich werden Glücksspiele gespielt und Versicherungen abgeschlossen, obwohl beide Verhaltensweisen einen niedrigeren Erwartungswert haben als die jeweilige Unterlassensalternative. Denn alle „kommerziellen" Glücksspiele (wie z.B. Toto, Lotto, Roulette, Klassenlotterie etc.) sind stets so konstruiert, dass der erwartete Gewinn niedriger ist als der entsprechende

Einsatz. Und Versicherungsprämien ergeben sich – vereinfacht dargestellt – als Summe aus der mittels statistischer Wahrscheinlichkeiten ermittelten Schadenserwartung, einem „Risikozuschlag“ und einem „Verwaltungskostenzuschlag“.

Beispiel 4:
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die innerhalb eines Jahres anfallenden Krankheitskosten eines Versicherungsnehmers möge etwa folgendes Aussehen haben (GE):

0	100	500	1.000	5.000	10.000	50.000
30%	50%	19%	0,50%	0,39%	0,10%	0,01%

Die erwartete Schadenssumme beträgt demnach 184,50 GE jährlich, also ca. 15,40 GE pro Monat. Nach dem μ-Kriterium wäre es also nur sinnvoll, eine Krankenversicherung abzuschließen, sofern die Monatsprämie unterhalb dieses Betrages läge. De facto würden jedoch viele Leute durchaus bereit sein, auch das doppelte dieses Betrages zu zahlen, um sich gegen die – wenn auch recht unwahrscheinliche, aber keineswegs ausschließbare – Gefahr sehr hoher Krankheitskosten abzusichern.

Auch hier erkennt man, dass recht alltägliche Verhaltensweisen nicht mit dem μ-Kriterium übereinstimmen. Nun sprechen diese Gesichtspunkte allerdings zunächst nur gegen die **deskriptive** Relevanz des μ-Kriteriums, also gegen seine Eignung als allgemeine Verhaltenshypothese. Es wäre somit durchaus möglich, die aufgezeigte Divergenz nicht als Argument gegen die Sinnhaftigkeit des μ-Kriteriums, sondern als Beleg für die allgemeine Unvernunft menschlichen Handelns zu interpretieren.

empirische Gültigkeit

Aber halten Sie es wirklich für völlig unvernünftig, wenn etwa jemand pro Woche 2 oder 4 GE, die ihm nicht sonderlich „weh tun“, im Lotto einsetzt, in der Hoffnung, vielleicht den für ihn sonst nie erreichbaren Betrag von 1 Million GE zu gewinnen? Oder ist es wirklich so dumm, sich mit einer Jahresprämie von rund 40 GE gegen eine Fülle möglicher Haftpflichtansprüche zu versichern, die einen vielleicht etliche tausend GE kosten könnten?

Plausibilität

Wir wissen nicht, wie Sie diese Fragen beantworten. Vielen mit der Entscheidungstheorie befassten Autoren jedenfalls erscheint ein solches Verhalten keineswegs als durchweg unvernünftig. Sie haben daher versucht, weniger starre Entscheidungsregeln zu entwickeln, indem zur Bewertung der betrachteten Wahrscheinlichkeitsverteilungen neben dem Erwartungswert noch weitere Verteilungsparameter herangezogen werden. Dabei hat insbesondere das im folgenden Unterabschnitt an erster Stelle zu behandelnde μ-σ-Prinzip große Beachtung gefunden.

Übungsaufgabe 1:

In Kapitel 1.2.3 haben Sie das sog. „Petersburger Spiel" kennengelernt. Hierbei wird eine ideale Münze mit den Seiten „Adler" und „Zahl" so lange geworfen, bis zum ersten Mal „Adler" erscheint. Hierbei erhält der Spieler für den ersten Wurf 2 GE, und für jeden weiteren Wurf bis zum Abbruch des Spiels jeweils eine Verdoppelung des Gewinnbetrages.

a) In wie vielen aufeinanderfolgenden Würfen müsste jeweils „Zahl" fallen, damit sich beim ersten Erscheinen des „Adlers" ein Gewinn von knapp über 1.000 GE ergibt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass es genau zu der in a) bestimmten Serie kommt?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Gewinn von mehr als 1.000 GE ergibt?

1.3 Mehrdimensionale Entscheidungsregeln

1.3.1 Das μ-σ-Prinzip

1.3.1.1 Das Grundkonzept

Dem μ-σ-Prinzip zufolge wird der für die Ranglozierung der Handlungsalternativen a_i maßgebliche Präferenzwert $\varphi(a_i)$ als Funktion des mathematischen Erwartungswertes μ_i und der Streuung σ_i (oder der Varianz σ_i^2) der zugehörigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen E_i ermittelt, also:

$$(9) \qquad \varphi(a_i) \;=\; \Phi(\mu_i, \sigma_i)\ .$$

Streubreite der Ergebnisse

Bei der Beurteilung der Handlungsalternativen wird also neben dem Erwartungswert als Maßstab für das Risiko auch noch berücksichtigt, wie sehr die möglichen Ergebnisse um den Erwartungswert schwanken. Dabei können auf die Präferenzfunktion (9) natürlich wieder die verschiedenen Optimierungskriterien in reiner oder gemischter Form angewendet werden. In der Literatur wird jedoch für das μ-σ-Prinzip am weitaus häufigsten der Fall der reinen Extremierung untersucht.[1)]

Beschränken wir uns auf den Fall der Maximierung, so kann allgemein unterstellt werden, dass φ bei konstantem σ einen umso höheren Wert annimmt, je größer μ wird, also – Differenzierbarkeit der Präferenzfunktion unterstellt – gilt:

1 Als Beispiel für die Verwendung eines gemischten Extremierungs- und Satisfizierungskonzeptes seien TINTNER (1957) und ALBACH (1959) angeführt.

(10) $\partial\Phi(\mu,\sigma)/\partial\mu > 0$.

Bezüglich der Abhängigkeit der Präferenzfunktion von σ hingegen sind zunächst zwei Fälle denkbar, nämlich:

(11.1) $\partial\Phi(\mu,\sigma)/\partial\sigma < 0$

und

(11.2) $\partial\Phi(\mu,\sigma)/\partial\sigma > 0$.

Eine (11.1) entsprechende Präferenzfunktion wird allgemein als **risikoscheu** (risikofeindlich) bezeichnet; denn von zwei Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit gleichen μ wird offenbar diejenige höher bewertet, deren Risiko, gemessen durch σ , niedriger ist. Den entgegengesetzten Fall (11.2) bezeichnet man dementsprechend als **risikofreudig.** (Dagegen liegt **Risikoneutralität** vor, wenn Wahrscheinlichkeitsverteilungen ausschließlich nach ihrem Erwartungswert beurteilt werden (μ-Prinzip)).

Risikoscheu

Risikofreude

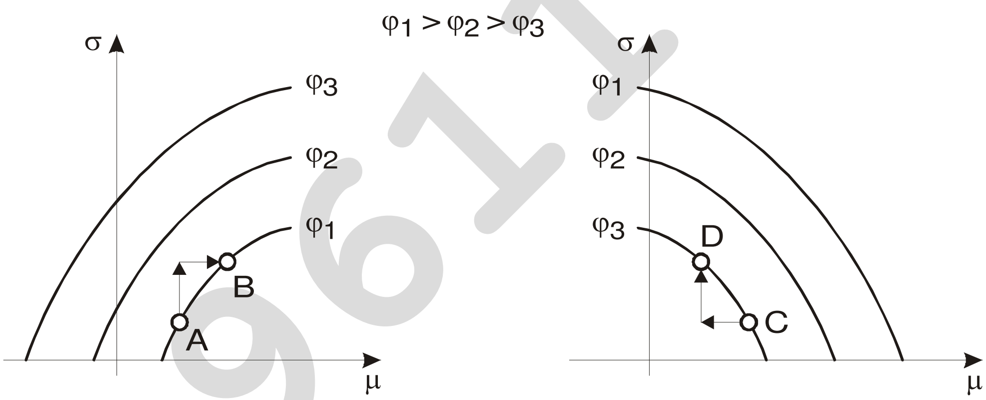


Abb. 2: Risikoscheu und -freude beim μ-σ-Prinzip

Risikoscheu: steigende Indifferenzlinien

Risikofreude: fallende Indifferenzlinien

In einem μ-σ-Präferenzfeld schlagen sich diese beiden Fälle jeweils durch einen unterschiedlichen Verlauf der μ-σ-*Indifferenzlinien*[1] nieder. Hierbei stellt z.B. die Indifferenzlinie zu φ_1 sämtliche Kombinationen von μ und σ dar, welche aus Sicht des Entscheiders zu dem gleichen Präferenzwert φ_1 führen. Im Fall der Risikoscheu verlaufen die Indifferenzlinien steigend (Abb. 2), d.h., dass eine Zunahme des durch σ gemessenen Risikos durch eine entsprechende Erhöhung des Erwartungswertes ausgeglichen werden muss, damit die modifizierte und die ursprüngliche Wahrscheinlichkeitsverteilung als gleichwertig angesehen werden können. (Vgl. den Übergang von A zu B im linken Teil von Abb. 2.) Umgekehrt haben die Indifferenzlinien bei Risikofreude einen fallenden Verlauf: Eine Verminderung des Erwartungswertes kann durch eine – als angenehm empfundene – Steigerung des Risikos kompensiert werden (vgl. den Übergang von C zu D im rechten Teil von Abb. 2).

Sicherheitsäquivalent

Das gemeinsame Sicherheitsäquivalent aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die den gleichen Präferenzwert aufweisen, also auf der gleichen Indifferenzlinie liegen, kann einfach durch den Schnittpunkt dieser Indifferenzlinie mit der μ-Achse bestimmt werden.

Im Gegensatz zum μ-Kriterium können nun sowohl der Abschluss von Versicherungen als auch die Teilnahme an Glücksspielen je nach der Form der Indifferenzlinien durchaus mit dem μ-σ-Prinzip vereinbar sein.

Versicherungs-bereitschaft

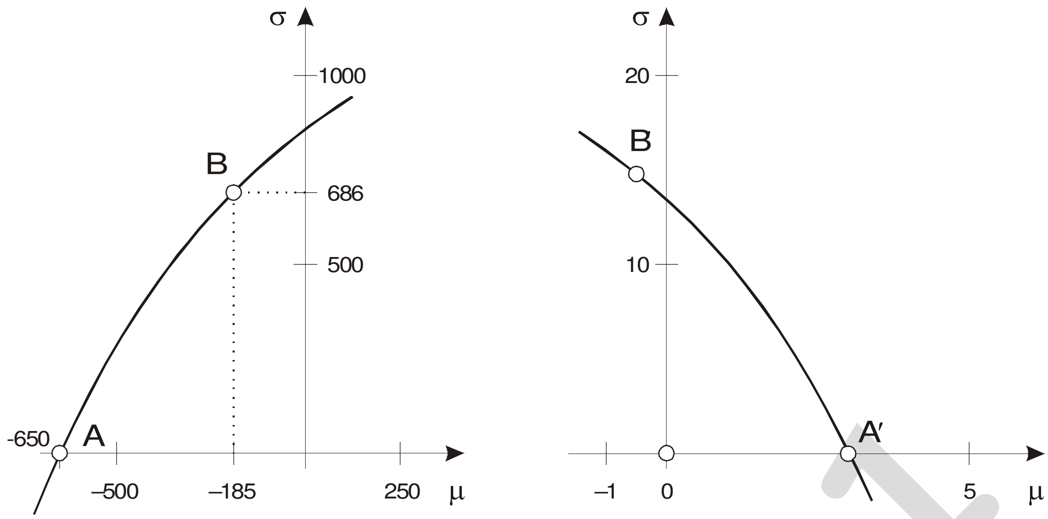
Beispiel 5:

Betrachten wir noch einmal die in Beispiel 4 angegebene Wahrscheinlichkeitsverteilung möglicher Krankheitskosten. Drücken wir Kostenbeträge durch negative Werte aus, so errechnet man für die Parameter μ und σ (auf ganze Zahlen abgerundet):

$$\mu = -185 \qquad \sigma = 686 .$$

Die Position des potentiellen Versicherungsnehmers kann im μ-σ-Diagramm der folgenden Abbildung, linker Teil, durch Punkt B verdeutlicht werden.

1 In diesen Diagrammen werden alle μ-σ-Kombinationen, die zu dem gleichen Präferenzwert führen, jeweils durch eine Indifferenzkurve beschrieben.



Verlaufen die μ-σ-Indifferenzlinien nun wie in diesem Diagramm dargestellt, so beträgt das der Position B entsprechende Sicherheitsäquivalent (Punkt A) ca. –650. Ein Entscheidungssubjekt mit einer derartigen Präferenzstruktur wäre also bereit, bis zu 650 GE zu zahlen, um sich gegen Krankheitsrisiken zu versichern, obwohl sich der Erwartungswert der entsprechenden Kosten nur auf ca. 185 GE beläuft. Der Differenzbetrag von 465 GE könnte als Risikozuschlag interpretiert werden, den das risikoscheue Entscheidungssubjekt zu zahlen bereit wäre, um die extrem weit schwankende Wahrscheinlichkeitsverteilung „loszuwerden".

Spielbereitschaft

Betrachten wir nun umgekehrt ein einfaches Glücksspiel, bei dem mit 99%iger Wahrscheinlichkeit der Einsatz von 2 GE verlorengeht, während mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% ein Gewinn von (netto) 148 GE winkt. Hier lässt sich errechnen

$$\mu = -0{,}5 \quad \text{und} \quad \sigma = 14{,}9$$

was dem Punkt B′ im rechten Teil der Abbildung entspricht. Der Verzicht auf die Teilnahme an diesem Glücksspiel wird demgegenüber durch den Punkt 0 (mit $\mu = 0$ und $\sigma = 0$) verdeutlicht.

Bei **Risikoscheu**, also steigend verlaufenden Indifferenzlinien (so wie im linken Teil der Abbildung gezeigt), läge 0 offenbar auf jeden Fall auf der höheren Indifferenzlinie, d.h. der Verzicht auf das Spiel würde der Teilnahme eindeutig vorgezogen. Liegt hingegen **Risikobereitschaft** vor, verlaufen die Indifferenzlinien also fallend (so wie im rechten Teil der Abbildung), so kann die Spielteilnahme (= Übergang von 0 nach B′) durchaus als vorteilhaft anzusehen sein, da dadurch eine höhere Indifferenzkurve erreicht wird.

1.3.1.2 Formen des μ-σ-Prinzips

Für die nähere Ausgestaltung der Präferenzfunktion $\Phi(\mu, \sigma)$ werden nun als formal einfachste Konzepte

$$(12) \qquad \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - \alpha \cdot \sigma_i$$

oder

$$(13) \qquad \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - \alpha \cdot \sigma_i^2$$

vorgeschlagen. Der entscheidungsrelevante Präferenzwert soll demnach also als Differenz

– zwischen Erwartungswert
– und der mit einem Faktor α gewichteten Standardabweichung bzw. Varianz ermittelt werden.

Risikoscheu und Risikobereitschaft

Dabei bezeichnet α einen im Hinblick auf die individuelle Risikoeinstellung festzulegenden Parameter; $\alpha > 0$ bringt Risikoscheu, $\alpha < 0$ Risikobereitschaft zum Ausdruck. Für $\alpha > 0$ entsprechen (12) und (13) offenbar den auch in der Wirtschaftspraxis häufig anzutreffenden Verfahren, im Sinne einer vorsichtigen Beurteilung von Handlungsmöglichkeiten, das „im Durchschnitt zu erwartende" Ergebnis um einen von der Höhe des jeweils involvierten Risikos abhängigen Risikoabschlag zu vermindern.

Außerdem wird häufig auch noch eine Präferenzfunktion des Typs

$$(14) \qquad \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i - \alpha \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$$

benutzt. Diese Funktion mag auf den ersten Blick vielleicht weniger einsichtig erscheinen als (12) oder (13). Wir werden jedoch im Folgenden bei der Erörterung des BERNOULLI-Prinzips noch näher auf Präferenzfunktionen dieses Typs eingehen.

Wenn vor allem die Präferenzfunktionen (12) und (13) auf den ersten Blick recht plausibel erscheinen mögen, so werden bei näherer Analyse doch erhebliche Mängel erkennbar, die erhebliche Zweifel an der allgemeinen **Tauglichkeit** dieser Präferenzfunktionen rechtfertigen.

Je nachdem, welcher Wert für α angesetzt wird, kann es nämlich vorkommen, dass Entscheidungen entsprechend (12) und (13) eindeutig gegen das **Dominanzprinzip** verstoßen. Zur exemplarischen Verdeutlichung der Möglichkeit mag folgendes Beispiel dienen.

Beispiel 6:
Betrachten wir die Alternativen a_1 und a_2. Die Ergebnismatrix hat folgendes Aussehen:

	$p_1=0,2$ s_1	$p_2=0,1$ s_2	$p_3=0,3$ s_3	$p_4=0,2$ s_4	$p_5=0,2$ s_5
a_1	10	0	10	10	10
a_2	10	10	10	40	10

Es ist offensichtlich, dass a_1 von a_2 nach dem Prinzip der absoluten Dominanz dominiert wird (und somit erst recht nach den Prinzipien der Zustands- und Wahrscheinlichkeitsdominanz).

Für die μ- und σ-Werte dieser beiden Alternativen errechnet man nun jedoch:

$$\mu_1 = 9 \qquad \sigma_1 = 3$$
$$\mu_2 = 16 \qquad \sigma_2 = 12\ .$$

Wendet man nun weiter die Präferenzfunktion (13) an, so gilt für die Präferenzwerte:

$$\varphi(a_1) = 9 - \alpha \cdot 9$$

$$\varphi(a_2) = 16 - \alpha \cdot 144\ .$$

Die Frage, welcher dieser beiden Werte größer ist und damit auch, welche Alternative vorgezogen wird, hängt somit von der Größe des Risikoparameters α ab. Dabei erhält man den kritischen Wert für α einfach aus der Gleichsetzung der beiden oben stehenden Ausdrücke. Als Ergebnis einer solchen Rechnung ergibt sich:

$$\varphi(a_2) \begin{cases} > \varphi(a_1) & \text{für } \alpha < 0{,}05185 \\ = \varphi(a_1) & \text{für } \alpha = 0{,}05185 \\ < \varphi(a_1) & \text{für } \alpha > 0{,}05185\,. \end{cases}$$

Bei der Verwendung der Präferenzfunktion (13) gelangt man im vorliegenden Fall also nur dann zu einer mit dem Dominanzprinzip vereinbaren Entscheidung, wenn für den Risikoparameter ein geringerer Wert als 0,05185 angesetzt wird.

Entsprechendes lässt sich auch bei der Anwendung der Präferenzfunktion (12) nachweisen; hier beläuft sich der für unser Beispiel kritische Wert von α auf 7/9.

Als erstes Zwischenergebnis können wir also festhalten:

Wird das μ-σ-Kriterium ohne Beschränkung auf ganz bestimmte Ausprägungsformen allgemein verwendet, so kann es zu Handlungsempfehlungen führen, die dem Dominanzprinzip widersprechen. Akzeptiert man die Verträglichkeit mit dem Dominanzprinzip jedoch als notwendige Minimalanforderung an eine vernünftige Entscheidungsregel, so kann das μ-σ-Prinzip nicht ohne Einschränkungen als vernünftig angesehen werden.

Zum Abschluss dieses Kapitels werden wir in Abschnitt 1.4 noch einmal auf einen bestimmten Anwendungsbereich des μ-σ-Prinzips zurückkommen, nämlich die Portefeuilletheorie. Es wird sich dort erweisen, dass bestimmte Formen des μ-σ-Prinzips hinsichtlich der Anwendung auf ein spezifisches Entscheidungsproblem durchaus eine positivere Beurteilung erfahren können als in dem vorstehenden Zwischenergebnis.

Jedoch berücksichtigt das μ-σ-Prinzip bestimmte Charakteristika einer Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht, welche für die Präferenzvorstellung vieler Menschen offenbar von Bedeutung sind. Als Beispiel sei die sog. Schiefe einer Verteilung genannt, welche berücksichtigt, ob der „Schwerpunkt“ der Verteilung eher bei hohen oder eher bei niedrigen Ergebniswerten liegt.[1)] Als Konsequenz ist es naheliegend,

– entweder das μ-σ-Prinzip – etwa durch Einbeziehung eines Schiefemaßes – zu einem dreidimensionalen Prinzip zu erweitern
– oder alternativ zum μ-σ-Prinzip andere zweidimensionale Entscheidungsprinzipien zu konstruieren.

Wir wollen uns in der folgenden Darstellung in einem kurzen Überblick nur noch mit der zweiten Möglichkeit beschäftigen.

1 Vgl. BITZ (1981), S.55–58.

1.3.2 Zweidimensionale Entscheidungsregeln auf der Basis von Extremmaßen

Wie das μ-σ-Prinzip basieren auch die sonstigen in der Literatur erörterten zweidimensionalen Entscheidungsprinzipien fast durchweg auf einem Zentralmaß und einem Unsicherheitsmaß. Dabei hat als Zentralmaß der mathematische Erwartungswert die weitaus größte Verbreitung gefunden; Modus oder Median werden nur gelegentlich herangezogen.

Etwas breiter hingegen ist der Katalog der neben Standardabweichung bzw. Varianz verwendeten Unsicherheitsmaße, wobei von den im Abschnitt 2.3 der Kurseinheit 3 erörterten Kennzahlen vor allem die folgenden vier Extremmaße besondere Beachtung gefunden haben:

- das schlechtestmögliche Ergebnis e^{min},
- der Fraktilswert f (für p^k nahe bei 1),
- Verlustwahrscheinlichkeit v und
- die Verlusterwartung V.

Vergegenwärtigen Sie sich, bevor Sie weiterlesen, noch einmal, wie diese Kennzahlen gebildet werden und was ihr Aussagegehalt ist!

In Verbindung mit dem Erwartungswert als Zentralmaß resultieren daraus dann folgende vier Entscheidungsprinzipien, die allerdings alle primär auf den Fall tendenziell risikoscheuer Einstellung abzielen.

(1) **μ-e^{min}-Prinzip**

μ-e^{min}-Prinzip

Als reines Extremierungskonzept mit der Zielfunktion

$$(15) \qquad \boxed{\max_i: \Phi(\mu_i, e_i^{min}) \;=\; \lambda \cdot \mu_i \;+\; (1-\lambda) \cdot e_i^{min}}$$

entspricht das μ-e^{min}-Prinzip der sog. HODGES-LEHMANN-Regel.[1] Dabei bezeichnet $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ – ähnlich wie beim noch in Kurseinheit 5 zu behandelnden HURWICZ-Kriterium – einen nach den subjektiven Präferenzvorstellungen festzulegenden „Vertrauensparameter“. Für $\lambda = 1$ wird (15) offenbar zum reinen μ-Prinzip, während es für den

1 Vgl. HODGES/LEHMANN (1952).

entgegengesetzten Extremfall $\lambda = 0$ zum Mini-Max-Kriterium[1] degeneriert.

Daneben erscheint im Sinne einer Begrenzung der Maximalverluste gerade bei diesem Prinzip auch ein gemischtes Extremierungs- und Satisfizierungskonzept der Art

$$(16) \qquad \boxed{\max_{i}: \mu_i \qquad \text{und} \qquad e_i^{min} \geq e^k, \quad {}^{2)}}$$

als plausibel.

Wie man sich leicht überzeugen kann, sind die beiden dargestellten Formen des μ-e^{min}-Prinzips grundsätzlich mit dem Dominanzprinzip vereinbar. Andererseits lassen sich jedoch auch hier Beispiele finden, in denen das μ-e^{min}-Prinzip zu weithin als wenig plausibel empfundenen Entscheidungen führt.

Dies beruht im Wesentlichen auf dem Umstand, dass das gesamte Spektrum negativer Ergebnisse einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ausschließlich durch den negativen Extremwert repräsentiert wird.

μ-f-Prinzip

(2) **μ-f-Prinzip**[3]

Dieses Prinzip, das die Ermittlung der Präferenzwerte auf der Basis von Erwartungswert und Fraktilswert vorsieht, kann insofern als Verallgemeinerung des μ-e^{min}– Prinzips aufgefasst werden, als für den Grenzfall $p^k = 1$ zwangsläufig $f = e^{min}$ gilt. Wie das μ-e^{min}-Prinzip steht auch dieses Prinzip im Einklang mit dem Dominanzprinzip. Es weist jedoch auch in gleicher Weise die Schwäche auf, dass der gesamte untere Ast der Wahrscheinlichkeitsverteilung ausschließlich durch den Abszissenwert eines einzigen – durch die Vorgabe der Mindestwahrscheinlichkeit p^k fixierten – Punktes repräsentiert wird. Mithin kann auch dieses Prinzip vor allem bei dem Vergleich von Wahrscheinlichkeitsverteilungen, die sich in ihrer Struktur deutlich unterscheiden, zu wenig plausiblen Ergebnissen führen. Zur Erläuterung werden wir gleich ein kurzes Beispiel betrachten. Außerdem bein-

1 Vgl. zu diesem Kriterium ausführlich Abschnitt 1.2 der Kurseinheit 5 dieses Kurses.

2 Dabei bezeichnet e^k das gerade noch tolerierbare Minimalergebnis bzw. e^k den zulässigen Maximalverlust.

3 Vgl. DINKELBACH (1973), S. 45 f.

haltet die Fixierung des kritischen Wahrscheinlichkeitswertes p^k stets eine gewisse Willkür, was ebenfalls Anlass zur Kritik geben kann.

Beispiel 7:

Zur Auswahl stehen die Alternativen a_1 und a_2 mit den nachfolgend angegebenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Angaben in GE):

a_1	e_1	–100.000	+10	+100.000
	$p(e_1)$	0,01	0,98	0,01

a_2	e_2	–1.000	+10	+100.000
	$p(e_2)$	0,1	0,899	0,001

Die Erwartungswerte betragen

$$\mu_1 = 9{,}8 \qquad \text{und} \qquad \mu_2 = 8{,}99\ ,$$

während sich bei Annahme einer kritischen Wahrscheinlichkeit von p^k=0,98 für die Fraktilswerte

$$f_1 = +10 \qquad \text{und} \qquad f_2 = -1.000\ ,$$

ergibt.

Unterstellt man nun risikoscheues Verhalten, so könnte eine dementsprechende Präferenzfunktion etwa

$$\text{(17)} \qquad \max: \varphi = \Phi(\mu, f) = \mu + \beta \cdot f$$

lauten, wobei β mit $\beta > 0$ wiederum einen subjektiv festzulegenden Koeffizienten darstellt, dessen Wert das Ausmaß der Risikoscheu repräsentiert. Auf der Basis der Präferenzfunktion wäre Alternative a_1 der Alternative a_2 jedoch auf jeden Fall vorzuziehen, sofern nur $\beta \geq 0$ gilt. Denn a_1 weist sowohl den höheren Erwartungswert als auch den höheren Fraktilswert auf. – Vermutlich würden viele von Ihnen jedoch eindeutig Alternative a_2 vorziehen, ohne dass man eine solche Entscheidung grundsätzlich als unvernünftig klassifizieren könnte. Diese unterstellte Form des µ-f-Prinzips ließe eine solche Entscheidung jedoch nicht zu.

(3) µ-v-Prinzip

µ-v-Prinzip

Auch bei Anwendung dieses Prinzips, dem zufolge Erwartungswert und Verlustwahrscheinlichkeit zur Ableitung der entscheidungsrelevanten Präferenzwerte heranzuziehen sind, wird der untere Ast der Wahrscheinlichkeitsverteilung ausschließlich durch einen auf einen einzigen Punkt bezogenen

Wert erfasst. Wenn das μ-v-Prinzip auch mit dem Dominanzprinzip vereinbar ist, steht der Anwendung dieses Prinzips als reines Extremierungskonzept noch der Umstand entgegen, dass die zu amalgamierenden Größen μ und v grundsätzlich ganz unterschiedlich dimensioniert sind – z.B. Geldbeträge und „dimensionslose“ Prozentzahlen – und somit auch von Fall zu Fall auf sehr unterschiedliche Weise in ihrer Größenordnung divergieren können.

Die relative Gewichtung dieser beiden Komponenten müsste somit stets entscheidungsproblemindividuell nach Abschätzung der zu erwartenden Größenordnung der μ-Werte vorgenommen werden.

Unterstellen wir beispielsweise eine Präferenzfunktion der Form

$$\text{(18)} \qquad \boxed{\max_{i}: \Phi(\mu_i, v_i) \;=\; \mu_i \;-\; \alpha \cdot v_i \,.}$$

Liegen nun die Unterschiede zwischen den μ-Werten verschiedener Alternativen in der Größenordnung von vierstelligen Zahlen und divergieren die v-Werte entsprechend bis zu der Größenordnung von 0,1, so müsste für den Parameter α schon ein fünfstelliger Betrag angesetzt werden, damit die Negativkomponente $\alpha \cdot v$ überhaupt entscheidungsrelevantes Gewicht erlangen kann. Andernfalls liefe (18) praktisch auf das einfache μ-Kriterium hinaus. Würde ein solcher α-Wert jedoch angewendet, wenn alle Erwartungswerte etwa unter 100 liegen, so würde gerade umgekehrt die Verlustwahrscheinlichkeit v zur praktisch allein maßgeblichen Präferenzgröße. Diese Schwierigkeit wird allerdings vermieden, wenn das μ-v-Prinzip in der Form

$$\text{(19)} \qquad \boxed{\max_{i}: \mu_i \qquad \text{und} \qquad v_i \;\le\; v^k}$$

als gemischtes Extremierungs- und Satisfizierungskonzept verwendet wird.[1)]

1 So z. B. TELSER (1955); FÖRSTNER (1958); GÄFGEN (1974), S. 374 f.

(4) **μ-V-Prinzip**[1]

μ-V-Prinzip

Wie die drei zuvor behandelten Prinzipien steht auch das μ-V-Prinzip, wonach die Präferenzwerte auf der Basis von Erwartungswert und Verlusterwartung ermittelt werden, mit dem Dominanzprinzip im Einklang, sofern $e^k \leq 0$ gilt. Darüber hinaus weist es die evtl. als Vorteil angesehene Eigenschaft auf, dass der untere Ast der Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht nur punktuell, sondern in der bereits verdeutlichten Weise[2] aggregierend erfasst wird. Andererseits weist auch dieses Prinzip Schwächen auf.

Beispiel 8:

So wäre etwa bei der Entscheidung zwischen den beiden unten dargestellten Alternativen a_1 und a_2 (Angaben in GE) nach dem μ-V-Prinzip (mit $e^k=0$) auf jeden Fall a_1 vorzuziehen,[3] obwohl die entgegengesetzte Entscheidung allgemein wohl eher akzeptiert würde.

a_1

e_1	–10.000	± 0	+10.000
$p(e_1)$	0,001	0,099	0,9

a_2

e_2	–100	+9.990
$p(e_2)$	0,1	0,9

Es wäre nun ohne weiteres möglich, eine Fülle weiterer (zwei- oder auch mehrdimensionaler) klassischer Entscheidungsprinzipien zu konstruieren und auch jeweils zugleich Beispiele zu finden, in denen entsprechende Entscheidungsregeln zu einer weithin als wenig vernünftig empfundenen Auswahl zwischen den zur Disposition gestellten Alternativen führt. Angesichts dieses Sachverhaltes wollen wir die Analyse der klassischen Entscheidungsprinzipien an dieser Stelle zunächst abbrechen und werden uns stattdessen im Kapitel 2 einem anderen Lösungsansatz zuwenden, der seit der auf diesem Gebiet bahnbrechenden Arbeit von J. v. NEUMANN und O. MORGENSTERN aus dem Jahr 1944 inzwischen grundlegende Bedeutung für die gesamte moderne entscheidungstheoretische Forschung erlangt hat.

1 Vgl. z.B. DOMAR/MUSGRAVE (1944); MARKOWITZ (1967), S. 291 f.

2 Vgl. (K_{10}) im Abschnitt 2.3.3 der Kurseinheit 3 dieses Kurses.

3 Es gilt offenbar $V_1=V_2=10$ und $\mu_1=8990>\mu_2=8981$.

Zuvor wollen wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels jedoch noch einmal zu dem bereits bekannten μ-σ-Prinzip zurückkehren und einen der fruchtbarsten Anwendungsfälle dieses Prinzips etwas eingehender betrachten.

1.4 Portefeuilletheorie als Anwendungsfall des μ-σ-Prinzips

1.4.1 Wertpapierindividuelle Risiken und Portefeuillerisiko

1.4.1.1 Ein einfaches Beispiel

Gegenstand der **Portefeuilletheorie** war zunächst die Frage, wie ein **Wertpapierportefeuille** in optimaler Weise aus verschiedenen Wertpapieren zusammengesetzt werden soll. Die im Hinblick auf diese Fragestellung entwickelten Ansätze können allerdings in analoger Weise auch auf die „Mischung" sonstiger risikobehafteter Handlungsalternativen angewendet werden – so etwa bei der Zusammensetzung eines Sortiments aus verschiedenen Produkten. Für die nachfolgende kurze Einführung in die Portefeuilletheorie wollen wir jedoch bei der traditionellen Fragestellung nach der optimalen Wertpapiermischung bleiben und dazu folgende hypothetische Entscheidungssituation betrachten.

Ausgangssituation

Beispiel 9:

Ein Anleger will zu Beginn des Jahres 2006 100.000 GE für genau ein Jahr in Wertpapieren anlegen; sein originäres Ziel ist es dabei, eine möglichst hohe Rendite auf sein eingesetztes Kapital zu erzielen. Da die erzielbaren Renditen jedoch nicht mit Sicherheit vorhersehbar sind, verwendet er Erwartungswert und Streuung als subsidiäre Zielvariablen, wendet also das μ-σ-Prinzip an.

In der letzten Ausgabe des von unserem Anleger seit Jahren abonnierten „Börsendienstes" sind nun zwei Wertpapiere (a_1 und a_2) als „heißer Tipp" empfohlen worden. Unser Anleger zieht dabei in einem ersten Schritt seines Entscheidungsprozesses zunächst nur diese beiden Wertpapiere in Betracht. Für diese beiden Wertpapiere hat er für die letzten fünf Jahre jeweils die bei einer einjährigen Anlage in dem entsprechenden Wertpapier erzielbaren Renditen[1)] ermittelt. Folgende Tabelle gibt die Ergebnisse dieser Untersuchung wieder:

---

1 Bezeichnet C_t (C_{t-1}) den Wertpapierkurs am Ende (zu Beginn) einer Periode t und D_t die in der Periode t erfolgte Zins- oder Dividendenzahlung, so ist die Rendite e_t einer einjährigen Anlage in Periode t definiert als

$$e_t = \frac{D_t + (C_t - C_{t-1})}{C_{t-1}} \cdot 100 \; .$$

Die Rendite ergibt sich demnach als Quotient aus

– Dividende plus Kurssteigerung bzw. minus Kurssenkung

s_j	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
Jahr	2001	2002	2003	2004	2005
a_1	15	5	–5	25	10
a_2	–10	50	10	30	20

Unser Anleger betrachte diese aus Vergangenheitsdaten gewonnene Aufstellung nun zugleich als Wahrscheinlichkeitsverteilung für die im Jahr 2006 alternativ möglichen Renditen. Dabei hält er die fünf verschiedenen Entwicklungsmöglichkeiten alle für gleich wahrscheinlich, ordnet ihnen also jeweils eine Eintrittswahrscheinlichkeit von $p_j = 0{,}2$ ($j = 1, 2, \dots, 5$) zu.

Für die Renditen der beiden Wertpapiere individuell errechnen sich dann folgende μ- und σ-Werte:

$$\mu_1 = 10; \qquad \sigma_1 = 10$$

$$\mu_2 = 20; \qquad \sigma_2 = 20\,.$$

Da unser Anleger trotz der hohen Renditechancen das mit a_2 verbundene Risiko als zu hoch empfindet, will er sich spontan zunächst dafür entscheiden, die 100.000 GE ausschließlich in Wertpapier a_1 anzulegen. Dann fällt ihm jedoch ein, dass es ja auch möglich ist, die 100.000 GE auf beide Wertpapiere aufzuteilen; vielleicht 90.000 GE auf a_1 und die restlichen 10.000 GE auf a_2.

Damit aber stehen wir vor der Frage, welche μ- und σ-Werte sich für ein derartiges aus zwei Wertpapieren zusammengesetztes Portefeuille ergeben.

Bezeichnen wir die bei Umweltzustand $j (j = 1, 2, \dots, n)$ eintretende **Portefeuillerendite** mit e_{pj} sowie Erwartungswert und Varianz eines Portefeuilles mit μ_p und σ_p^2, so gilt definitionsgemäß:[1)]

Erwartungswert und Varianz

$$(20) \qquad \mu_p = \sum_{j=1}^{n} e_{pj} \cdot p_j$$

$$(21) \qquad \sigma_p^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_{pj} - \mu_p)^2 \cdot p_j = \sum_{j=1}^{n} (e_{pj})^2 \cdot p_j - (\mu_p)^2\,.$$

– und dem Kurs zu Periodenbeginn.

Sofern eine Kurssenkung (also $C_t < C_{t-1}$) eintritt, die größer ist als die Dividendenzahlung, wird die Rendite negativ.

1 Zur Herleitung von (21) vgl. Abschnitt 2.5, (S. 80/81).

Portefeuillerendite

Bezeichnen wir weiterhin die aus Wertpapier a_1 (a_2) bei Umweltzustand j erzielbare Rendite mit e_{1j} (e_{2j}) und die Anteile der beiden Wertpapiere a_1 und a_2 am Gesamtportefeuille mit x_1 und x_2, so gilt für die bei Zustand j erzielbare Portefeuillerendite

(22) $$e_{pj} = x_1 \cdot e_{1j} + x_2 \cdot e_{2j} \; .$$

Die Portefeuillerendite bei Zustand j ergibt sich also als gewogener Durchschnitt der wertpapierindividuellen Renditen. Analog ergibt sich der Erwartungswert des Portefeuilles μ_p auch als gewogener Durchschnitt der beiden wertpapierindividuellen Erwartungswerte, also

(23) $$\mu_p = x_1 \cdot \mu_1 + x_2 \cdot \mu_2 \; .$$

Beispiel 9 (Fortsetzung): Ein gemischtes Portefeuille

Würde unser Anleger seine 100.000 GE also wie vorgesehen zu 90% in a_1 und zu 10% in a_2 anlegen (d.h. $x_1=0{,}9$ und $x_2=0{,}1$), so erhielte er folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der alternativ möglichen Portefeuillerenditen:

	$p_1=0{,}2$	$p_2=0{,}2$	$p_3=0{,}2$	$p_4=0{,}2$	$p_5=0{,}2$
	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
$x_1=0{,}9;\; x_2=0{,}1$	12,5	9,5	–3,5	25,5	11

Daraus errechnen sich dann sofort folgende μ- und σ-Werte für das betrachtete Portefeuille:

$$\mu_p = 11$$

$$\sigma_p = 9{,}2 = \sqrt{0{,}2(12{,}5-11)^2 + 0{,}2(9{,}5-11)^2 + 0{,}2(-3{,}5-11)^2 + 0{,}2(25{,}5-11)^2 + 0{,}2(11-11)^2} \; .$$

ein Ergebnis, das unseren Anleger zunächst verblüfft. Denn gegenüber der ausschließlichen Geldanlage in a_1 kann er durch den Übergang zu dem „gemischten" Portefeuille ($x_1=0{,}9$; $x_2=0{,}1$) zugleich

– den Erwartungswert der Rendite *erhöhen*
  (von $\mu_1=10$ auf $\mu_p=11$)

– und das Risiko, gemessen an der Standardabweichung, *verringern*
  (von $\sigma_1=10$ auf $\sigma_p=9{,}2$).

Dabei ergibt sich der Erwartungswert des Portefeuilles ($\mu_p=11$) einfach als gewogener Durchschnitt der wertpapierindividuellen Erwartungswerte ($\mu_1=10$; $\mu_2=20$), da $0{,}9 \cdot 10 + 0{,}1 \cdot 20 = 11$. Dieses Ergebnis ist nicht weiter überraschend. Anders verhält es sich jedoch mit dem Risikoindikator: $\sigma_p=9{,}2$ kann nämlich keineswegs als gewogener Durchschnitt der wertpapierindividuellen Risikoindikatoren aufgefasst werden. Vielmehr liegt das Portefeuillerisiko deutlich *unter* beiden wertpapierindividuellen Risikowerten ($\sigma_1=10$ und $\sigma_2=20$).

D.h., ausgehend von einem Portefeuille, das nur das risikoarme Wertpapier a_1 enthält (Risikoindikator $\sigma_1 = 10$) ergibt sich bei teilweiser Substitution des Wertpapiers a_1 durch das sehr viel riskantere Wertpapier a_2 ($\sigma_2 = 20!$) ein gemischtes Portefeuille, dessen Risiko sogar noch *niedriger* ist als das des risikoarmen Wertpapiers; also: *Risikoverringerung* durch Austausch eines risikoarmen Wertpapiers gegen ein risikoreiches?

1.4.1.2 Zur Bedeutung der Korrelation

Um diesen Sachverhalt zu ergründen, ist es hilfreich, auf den Begriff der **Korrelation** zurückzugreifen, wie er etwa durch den **Korrelationskoeffizienten** ρ quantifiziert werden kann.

Der Korrelationskoeffizient stellt ein auf den Wertbereich von +1 bis –1 standardisiertes Maß dafür dar, in welchem Ausmaß die beiden betrachteten Zufallsvariablen gleichartig auf Veränderungen der Umweltzustände reagieren. Der Korrelationskoeffizient ist folgendermaßen definiert:

$$\rho_{12} = \frac{\mathrm{cov}_{12}}{\sigma_1 \, \sigma_2} ,$$

wobei die **Kovarianz** zwischen zwei Zufallsvariablen wie folgt definiert ist:

$$\mathrm{cov}_{12} = \sigma_{12}^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_{1j} - \mu_1) \cdot (e_{2j} - \mu_2) \cdot p_j .$$

Folgende Beispiele dienen der Verdeutlichung:

Vollständig positive Korrelation

(1) **Vollständig positive Korrelation ($\rho = +1$)**

Zur Verdeutlichung dieses Falles mag folgende Modifikation des bisher betrachteten Beispiels dienen. Die Verteilung der a_1-Renditen sei wie in der Tabelle in Beispiel 9, für a_2 seien insgesamt auch die gleichen Renditewerte angenommen, jedoch in einer anderen Reihenfolge, so wie es Tab. 2 verdeutlicht.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	15	5	–5	25	10
a_2	30	10	–10	50	20

Tab. 2: Ergebniswerte bei vollständig positiver Korrelation

Nach wie vor gilt $\mu_1 = 10$; $\mu_2 = 20$; $\sigma_1 = 10$ und $\sigma_2 = 20$. Weiterhin berechnen wir nach der angegebenen Formel die Kovarianz der Renditen von a_1 und a_2:

$$cov_{12} \quad = \quad 1/5\ (50 + 50 + 450 + 450 + 0) \quad = \quad 200\ .$$

Für den **Korrelationskoeffizienten** folgt dann[1]

$$\rho_{12} \quad = \quad \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} \quad = \quad \frac{200}{10 \cdot 20} \quad = \quad +1\ .$$

In diesem Fall wären a_1 und a_2 also zu 100% positiv korreliert, was auch folgende Grafik noch einmal verdeutlicht:

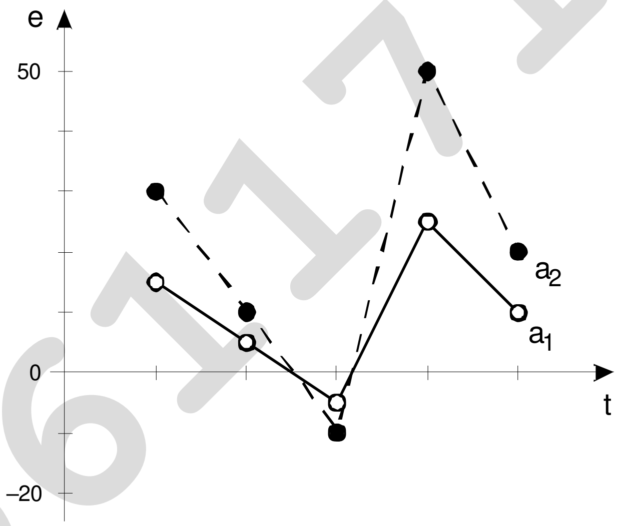


Abb. 3.1: Wertpapierrenditen bei 100%iger Korrelation

Die Renditeschwankungen von a_1 und a_2 verlaufen genau gleichartig, wobei e_2 gegenüber e_1 stets die doppelte Amplitude aufweist.

Allgemein signalisiert ein ρ-Wert nahe bei +1, dass die betrachteten Variablen, z.B. hier die Renditen zweier verschiedener Wertpapiere, weitgehend gleichgerichtet schwanken.

1 Bei dem Buchstaben ρ handelt es sich um den griechischen Buchstaben rho in kleiner Schreibweise.

Vollständig negative Korrelation

(2) **Vollständig negative Korrelation ($\rho = -1$)**

Wiederum bleibt die Verteilung der a_1-Renditen wie gehabt; für die der a_2-Renditen sei nun jedoch die in Tab. 3 dargestellte Form unterstellt.

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	15	5	–5	25	10
a_2	10	30	50	–10	20

Tab. 3: Ergebniswerte bei vollständig negativer Korrelation

Noch deutlicher als in Tab. 3 zeigt folgende Grafik, dass die a_1- und die a_2-Renditen nun gerade entgegengesetzt schwanken.

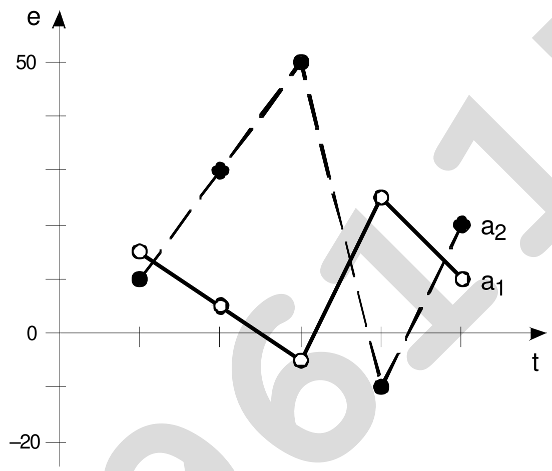


Abb. 3.2: Wertpapierrenditen bei 100%ig negativer Korrelation

Wertpapierindividuell gelten nach wie vor die oben abgeleiteten μ- und σ-Werte. Berechnen Sie nun jedoch bitte selbst die Kovarianz und darauf aufbauend den Korrelationskoeffizienten:

$$\text{cov}_{12} = \frac{1}{5} \cdot (\quad + \quad + \quad + \quad + \quad)$$

$$=$$

$$\rho_{12} = \frac{\text{cov}_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\quad}{200} =$$

Wenn Sie richtig gerechnet haben, ergibt sich $cov_{12}=-200$ und damit $\rho_{12}=-1$. Die Renditen der Wertpapiere a_1 und a_2 sind in diesem Fall also zu 100% negativ korreliert.

Keinerlei Korrelation

(3) **Keinerlei Korrelation ($\rho = 0$)**

Kehren wir schließlich zu unserem Ausgangsbeispiel gem. der Ausgangstabelle in Beispiel 9 zurück. Berechnen Sie bitte auch für diesen Fall die Kovarianz und den Korrelationskoeffizienten:

$$cov_{12} = \frac{1}{5} \cdot (\quad + \quad + \quad + \quad + \quad)$$

$$=$$

$$\rho_{12} = \frac{cov_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{\quad}{200} =$$

Bei richtiger Rechnung erhalten Sie $cov_{12}=\rho_{12}=0$. D.h., in diesem Fall unterliegen die Wertpapierrenditen von a_1 und a_2 völlig unabhängigen Zufallsschwankungen.

1.4.1.3 Zur Bestimmung des Portefeuillerisikos

Nach diesem kleinen Exkurs auf das Gebiet der Statistik können wir uns nun wieder unserem Hauptproblem zuwenden, nämlich der Frage danach, wie sich die Varianz bzw. die Standardabweichung eines gemischten Portefeuilles in Abhängigkeit von den wertpapierindividuellen Einzelrisiken sowie der zwischen den Wertpapieren bestehenden Korrelation bestimmt.

Wie im Anhang am Ende der Kurseinheit näher verdeutlicht wird, kann für ein Portefeuille aus nur zwei Wertpapieren der Risikoindikator σ_p^2 aus (21) zu

(24) $$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \rho_{12}$$

weiterentwickelt werden. Welche Bedeutung der durch ρ_{12} gemessenen Korrelation zwischen den Wertpapieren a_1 und a_2 für das Portefeuillerisiko zukommt, verdeutlichen die drei folgenden Fälle:

(1) **Vollständig positive Korrelation ($\rho = 1$)**

Sind zwei Wertpapiere zu 100% positiv korreliert, gilt also $\rho_{12} = 1$, so kann (24) wie folgt vereinfacht werden:

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 + 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2$$

$$= (x_1 \cdot \sigma_1 + x_2 \cdot \sigma_2)^2 ,$$

also

$$\boxed{\sigma_p = x_1 \cdot \sigma_1 + x_2 \cdot \sigma_2 .} \tag{24.1}$$

Im Fall vollständig positiver Korrelation berechnet sich die Standardabweichung der Portefeuillerendite also – analog zum Erwartungswert – als gewichteter Durchschnitt der wertpapierindividuellen Standardabweichungen.

Man bezeichnet eine derartige Zusammenfügung positiv korrelierter Einzelrisiken gelegentlich auch als **Risikokumulation.**

Risikokumulation

In unserem Beispiel aus Tab. 2 würde also gem. (24) die Relation

$$\sigma_p = 10 x_1 + 20 x_2$$

gelten.

Übungsaufgabe 2:

Überprüfen Sie die Behauptung, dass bei der Zusammenfügung vollständig positiv korrelierter Wertpapiere die Standardabweichung der Portefeuillerendite der gewichtete Durchschnitt der wertpapierindividuellen Standardabweichungen ist, indem Sie von Tab. 2 ausgehend für die nachfolgend aufgeführten Portefeuillestrukturen jeweils zunächst die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portefeuillerenditen e_{pj} und dann die zugehörigen Erwartungswerte μ_p und Standardabweichungen σ_p berechnen!

(1) $x_1 = 0{,}9$; $x_2 = 0{,}1$

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e_{pj}					

$\mu_p \;=\; \frac{1}{5}(\quad + \quad + \quad + \quad + \quad) \;=$

$\sigma_P^2 \;=$

$\quad\;\, =$

$\sigma_P \;=$

(2) $x_1 = 0{,}5$; $x_2 = 0{,}5$

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e_{pj}					

$\mu_p \;=\; \frac{1}{5}(\quad + \quad + \quad + \quad + \quad) \;=$

$\sigma_P^2 \;=$

$\quad\;\, =$

$\sigma_P \;=$

(3) $x_1 = 0{,}1$; $x_2 = 0{,}9$

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e_{pj}					

$\mu_p \;=\; \frac{1}{5}(\quad + \quad + \quad + \quad + \quad) \;=$

$\sigma_P^2 \;=$

$\quad\;\, =$

$\sigma_P \;=$

(2) **Vollständig negative Korrelation ($\rho = -1$)**

Werden im Gegensatz zu (1) zwei Einzelrisiken kombiniert, die in vollständig negativer Korrelation stehen, einander bei geeigneter Mischung also tendenziell kompensieren, so spricht man gelegentlich auch von **Hedging.**

Hedging

Formal folgt in diesem Fall aus (24) unmittelbar

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2 - 2 x_1 x_2 \sigma_1 \sigma_2 = (x_1 \cdot \sigma_1 - x_2 \cdot \sigma_2)^2 ,$$

woraus sich dann weiter

$$\sigma_p = \pm (x_1 \cdot \sigma_1 - x_2 \cdot \sigma_2)$$

ergibt.

Der Ausdruck in der Klammer kann nun je nachdem, welche Werte für x_1 und damit auch für $x_2 = 1 - x_1$ angesetzt werden, positiv oder negativ werden. Da die Standardabweichung jedoch ausschließlich im Bereich nicht-negativer Werte definiert ist, können wir den zuletzt gefundenen Ausdruck zu

$$\text{(24.2)} \quad \boxed{\sigma_p = \begin{cases} x_1 \cdot \sigma_1 - x_2 \cdot \sigma_2 , & \text{wenn } x_1 \cdot \sigma_1 \geq x_2 \cdot \sigma_2 \\ -(x_1 \cdot \sigma_1 - x_2 \cdot \sigma_2) , & \text{wenn } x_1 \cdot \sigma_1 < x_2 \cdot \sigma_2 \end{cases}}$$

präzisieren.

Beachtet man nun weiterhin, dass $x_1 + x_2 = 1$ gelten muss, so kann (24.2) nach geeigneter Umstellung auch wie folgt geschrieben werden:

$$\text{(24.2')} \quad \sigma_p = \begin{cases} x_1 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) - \sigma_2 , & \text{wenn } x_1 \geq \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ \\ -x_1 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_2 , & \text{wenn } x_1 < \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} . \end{cases}$$

Beispiel 10:

Zur Verdeutlichung mögen folgende aus Tab. 3 abgeleiteten Berechnungen für drei alternativ mögliche Portefeuilles dienen:

Portefeuille I: $x_1 = 0{,}9\,; \quad x_2 = 0{,}1$:

$$\sigma_p = \pm(0{,}9 \cdot 10 - 0{,}1 \cdot 20) = \pm(+7)\,.$$

In diesem Fall muss das positive Vorzeichen gelten, also

$$\sigma_p = +7$$

Portefeuille II: $x_1 = 0{,}5\,; \quad x_2 = 0{,}5$:

$$\sigma_p = \pm(0{,}5 \cdot 10 - 0{,}5 \cdot 20) = \pm(-5)\,.$$

In diesem Fall muss das negative Vorzeichen gelten, also

$$\sigma_p = -(-5) = +5$$

Portefeuille III: $x_1 = 0{,}1\,; \quad x_2 = 0{,}9$:

$$\sigma_p = \pm(0{,}1 \cdot 10 - 0{,}9 \cdot 20) = \pm(-17)\,.$$

Auch in diesem Fall muss das negative Vorzeichen gelten, also

$$\sigma_p = -(-17) = +17\,.$$

Übungsaufgabe 3:

a) Gehen Sie von der für 100%ig negative Korrelation geltenden Relation (24.2) aus und bestimmen Sie daraus allgemein, bei welcher Zusammensetzung von x_1 und x_2 sich ein Portefeuillerisiko von $\sigma_p=0$ ergibt.

b) Angenommen, zwei Wertpapiere a_1 und a_2 mit den Parameterwerten $\mu_1=10, \sigma_1=10$ und $\mu_2=20$, $\sigma_2=20$ seien zu 100% negativ korreliert ($\rho_{12}=-1$). Bestimmen Sie für diesen Fall unter Benutzung des zu a) abgeleiteten Ergebnisses die Zusammensetzung des „risikofreien" Portefeuilles!

c) Gehen Sie von der in der folgenden Tabelle dargestellten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Renditen a_1 und a_2 aus und berechnen Sie die Renditeverteilung für ein Portefeuille, das aus den Wertpapieren a_1 und a_2 genau in der unter b) ermittelten Relation zusammengestellt ist!

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
a_1	15	5	–5	25	10
a_2	10	30	50	–10	20

(3) **Keinerlei Korrelation ($\rho = 0$)**

In diesem Fall, der häufig als **Risikodiversifikation** oder **Risikostreuung** im engeren Sinne bezeichnet wird, folgt aus (24) unmittelbar

$$(24.3) \quad \boxed{\sigma_p = \sqrt{x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + x_2^2 \cdot \sigma_2^2}},$$

so dass σ_p, außer für die Grenzfälle $x_1 = 1$ oder $x_2 = 1$, stets kleiner ist als der durch (24.1) ausgedrückte gewichtete Durchschnitt der wertpapier-individuellen Standardabweichungen. Risikodiversifikation

Die bislang erörterten Zusammenhänge lassen sich sehr schön in einem μ-σ-Diagramm verdeutlichen, wie Sie es ja bereits aus dem Abschnitt 1.3.1.1 kennen. Dabei liegt einer solchen Darstellung folgender Gedankengang zugrunde: Grafische Veranschaulichung

- In dem hier betrachteten Fall von nur zwei Wertpapieren ist ein Portefeuille allein schon durch die Angabe von x_1 exakt definiert (da $x_2 = 1 - x_1$ und $x_1, x_2 \geq 0$ gelten muss).
- Bei gegebenem Korrelationskoeffizienten können dann aber jedem x-Wert, also jedem denkbaren Portefeuille, gem. (23) und (24) sofort eindeutige μ- und σ-Werte zugeordnet werden.
- Variiert man nun von $x_1 = 1$ ausgehend sukzessive den Wert x_1 bis zum entgegengesetzten Extrem $x_1 = 0$, so erhält man eine Folge von μ-σ-Kombinationen, die in einem entsprechenden Diagramm dann so dargestellt werden können, wie es Abb. 4 zeigt.

Da diese Kurvenzüge die μ-σ-Kombinationen verdeutlichen, die bei alternativen a_1-a_2-Mischungen, also bei unterschiedlichen Portefeuilles erzielbar sind, wollen wir sie im folgenden als **Portefeuillelinien** bezeichnen. Portefeuillelinien

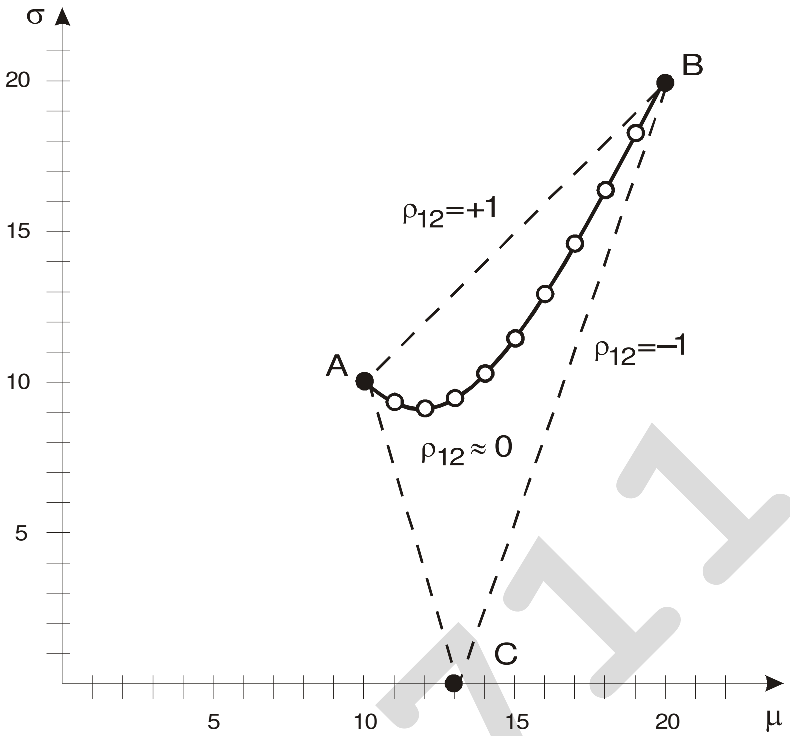


Abb. 4: Portefeuillelinien (Extremverläufe)

Alternativ mögliche Verlaufsformen derartiger Portefeuillelinien können nun insbesondere durch die nachfolgend genannten Zusammenhänge zwischen Portefeuillerendite, Portefeuillerisiko und Korrelation deutlich gemacht werden. Dabei wird stets unterstellt, dass der Anleger zunächst von einem reinen a_1-Portefeuille (also $x_1 = 1$; vgl. Punkt A in Abb. 4) ausgeht und dann überlegt, ob er durch teilweise Einbeziehung des rentableren, aber auch riskanteren Wertpapiers a_2 die erwartete Rendite erhöhen soll.

– Sind die beiden in ein Portefeuille eingehenden Wertpapiere zu **100% positiv korreliert**, so ist eine Steigerung der erwarteten Portefeuillerendite nur möglich, wenn zugleich eine Steigerung des Portefeuillerisikos in dem gleichen Umfang in Kauf genommen wird. D.h., Renditeerwartung und Risiko steigen proportional, die Portefeuillelinie stellt eine Gerade dar (vgl. die Gerade AB in Abb. 4).

– Liegt hingegen der entgegengesetzte Grenzfall von **100% negativer Korrelation** vor, so bewirkt die sukzessive Substitution von Wertpapier a_1 durch a_2 zunächst eine Steigerung der Renditeerwartung und eine gleichzeitige Verminderung des Risikos; und zwar stehen μ_p und σ_p in einem entgegengesetzt proportionalen Zusammenhang (vgl. die Gerade AC in Abb. 4). Dabei ist es als Extrem sogar stets möglich, eine Wertpapiermischung zu erhalten, die völlig risikofrei ist (vgl. Punkt C in Abb. 4). Bei diesem Mischungsverhältnis gleichen sich die auf die beiden Wertpapiere genau entgegengesetzt wirkenden Zufallseinflüsse gerade vollständig aus.[1)]

Wird dieses Mischungsverhältnis dann jedoch überschritten, so sind weitere Erhöhungen der Renditeerwartung nur noch erreichbar, wenn eine proportionale Risikosteigerung in Kauf genommen wird. (Vgl. die Gerade CB in Abb. 4). Die Portefeuillelinie insgesamt besteht in diesem Fall also aus zwei Geraden, die auf der μ-Achse gerade aufeinanderstoßen, bildet also einen Winkel. (Vgl. ACB in Abb. 4).

– Liegt die Korrelation schließlich irgendwo zwischen den beiden Grenzen von +1 und –1, so verläuft die Portefeuillekurve irgendwo zwischen der oberen Grenzlinie (AB) und dem unteren Grenzwinkel (ACB). Dabei wird die entsprechende Kurve umso „bauchiger" und nähert sich umso mehr dem Punkt C, je näher ρ_{12} bei –1 liegt; umgekehrt wird die Portefeuillelinie umso flacher und nähert sich umso mehr der oberen Grenzgeraden AB, je größer die Korrelation ist, je näher ρ_{12} also bei +1 liegt.

1.4.1.4 Mischung aus einer risikobehafteten und einer sicheren Anlageform

Bislang haben wir uns mit der Zusammenstellung eines Portefeuilles aus zwei jeweils individuell risikobehafteten Wertpapieren befasst. Auf diesen Ergebnissen aufbauend ist es nun sehr einfach, die speziellen Eigenschaften eines Portefeuilles zu analysieren, das zum einen aus einem risikobehafteten Wertpapier, zum anderen jedoch aus einer *risikofreien* Anlagenalternative zusammengesetzt ist.

Beispiel 11:

Nehmen wir dazu an, der Anleger unseres bislang benutzten Beispiels ziehe nur noch das Wertpapier a_1 (mit $\mu_1 = 10$ und $\sigma_1 = 10$) als risikobehaftete Anlageform in Betracht. Außerdem überlege er jedoch, ob er einen Teil seines Portefeuilles in 6%igen Staatstiteln mit einjähriger Laufzeit anlegen soll, wobei er einen Staatsbankrott oder ähnliches ausschließt, diese Anlageform also als sicher ansieht. Bezeichnen wir diese Alternative als a_0, so gelten offenbar die Parameterwerte

$$\mu_0 = 6, \qquad \sigma_0 = 0 .$$

1 Die Übungsaufgabe 3 verdeutlicht diesen Grenzfall des totalen Hedging noch einmal.

Für die Renditeerwartung eines aus den Wertpapieren a_0 und a_1 zusammengesetzten Portefeuilles gilt nun gem. Relation (23) wiederum

$$\mu_p = x_0 \cdot 6 + x_1 \cdot 10 \qquad (x_0 + x_1 = 1) .$$

Ebenso gilt natürlich auch für das Portefeuillerisiko allgemein die Relation (24), also

$$\sigma_p^2 = x_0^2 \cdot \sigma_0^2 + x_1^2 \cdot \sigma_1^2 + 2 x_0 x_1 \sigma_0 \sigma_1 \rho_{01} .$$

Beachtet man nun, dass $\sigma_0 = 0$ gilt, so vereinfacht sich diese Relation sofort zu

$$\sigma_p^2 = x_1^2 \cdot \sigma_1^2 \quad \text{oder} \quad \sigma_p = x_1 \cdot \sigma_1 .$$

Numerisch gilt also in unserem Beispielfall

$$\sigma_p = 10 x_1 \qquad (0 \le x_1 \le 1) .$$

Die bislang abgeleiteten Zusammenhänge können natürlich auch wieder durch eine Portefeuillelinie verdeutlicht werden. Die Ableitung ist dabei für den hier untersuchten Fall besonders einfach. Analog zu (23) und unter Beachtung von $x_0 = 1 - x_1$ gilt nämlich zunächst

$$x_1 = \frac{\mu_p - \mu_0}{\mu_1 - \mu_0} .$$

Setzt man diesen Wert dann in die Relation $\sigma_p = x_1 \cdot \sigma_1$ ein, so ergibt sich nach geeigneter Umformung

$$\sigma_p = -\frac{\mu_0 \cdot \sigma_1}{\mu_1 - \mu_0} + \frac{\sigma_1}{\mu_1 - \mu_0} \cdot \mu_p .$$

Die Portefeuillelinie stellt in diesem Fall also eine *Gerade* zwischen den Punkten $a_0(\mu_0, \sigma_0)$ und $a_1(\mu_1, \sigma_1)$ dar.

Numerisch gilt dementsprechend für unser Beispiel, so wie es auch Abb. 5 verdeutlicht:

$$\sigma_p = -15 + 2{,}5 \cdot \mu_p .$$

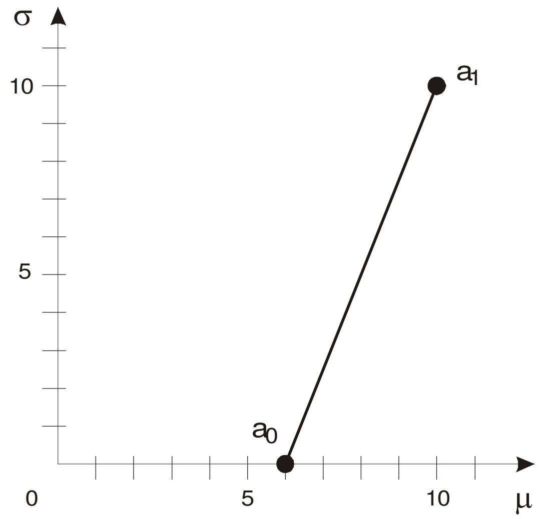


Abb. 5: Portefeuillelinie bei einer risikofreien Anlagealternative

Übungsaufgabe 4:

Gehen Sie von der in der Tabelle in Übungsaufgabe 3c) angegebenen Verteilung der a_1-Renditen mit übereinstimmenden Eintrittswahrscheinlichkeiten von $p_j=0{,}2$ aus und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung eines Portefeuilles, das nach folgenden Relationen aus den Wertpapieren $a_0(\mu_0=6;\ \sigma_0=0)$ und a_1 zusammengesetzt ist; überprüfen Sie dabei die zuletzt für μ_P und σ_P abgeleiteten Relationen.

a) $x_1 = 0{,}2$; $x_0 = 0{,}8$

b) $x_1 = 0{,}5$; $x_0 = 0{,}5$

c) $x_1 = 0{,}8$; $x_0 = 0{,}2$

Bedienen Sie sich zur Lösung folgender Tabelle:

j	1	2	3	4	5	$\mu_i;\ \mu_p$	$\sigma_i;\ \sigma_p$
e_{1j}							
e_{0j}							
$e_{Pj}=0{,}2\cdot e_{1j}+0{,}8\cdot e_{0j}$							
$e_{Pj}=0{,}5\cdot e_{1j}+0{,}5\cdot e_{0j}$							
$e_{Pj}=0{,}8\cdot e_{1j}+0{,}2\cdot e_{0j}$							

1.4.2 Die Ableitung des optimalen Portefeuilles

Als letztes gilt es schließlich, anhand der Portefeuillelinie die optimale Zusammensetzung des Portefeuilles auszuwählen, d. h. diejenige Zusammensetzung, die den Präferenzen des jeweiligen Anlegers am besten entspricht. Gegenüber bislang erörterten Problemen stellt sich damit eine qualitativ andersartige Frage. Denn bei den bisherigen Ableitungen wurde an keiner Stelle auf die Präferenzvorstellungen des Entscheidenden im Einzelnen rekurriert; wir haben lediglich die recht allgemeine Prämisse risikoscheuen Entscheidungsverhaltens gesetzt. Das bedeutet zugleich, dass die Portefeuillelinie für alle Anleger, denen die gleichen Anlagemöglichkeiten offenstehen, genau das gleiche Aussehen hat. Die Bestimmung der Portefeuillelinie stellt somit für eine Vielzahl von Anlegern mit im Einzelnen durchaus unterschiedlichen Präferenzen in gleicher Weise eine wichtige Vorinformation und Erleichterung der endgültigen Anlageentscheidung dar. Auch ohne die Präferenzvorstellungen des Entscheidenden zu kennen, lässt sich anhand einfacher Dominanzüberlegungen zeigen, dass eine bestimmte Menge an Portefeuilles suboptimal ist. So ist bei zwei Portefeuilles, die die gleiche Standardabweichung aufweisen, dasjenige mit der höheren erwarteten Rendite zu wählen. Betrachtet man in Abb. 4 z.B. die Portefeuillelinie für einen Korrelationskoeffizienten von $\rho_{12}=-1$, so sind alle Portefeuilles auf dem linken Ast der Portefeuillelinie *unabhängig* von der Risikoeinstellung des Entscheiders uninteressant, da sich auf dem rechten Ast stets ein Portefeuille finden lässt, welches bei einem gegebenen σ ein höheres μ aufweist. Jedoch lässt sich so lediglich eine „Einengung" der vorteilhaften Portefeuilles vornehmen, in aller Regel ist das Optimalportefeuille nur mit Kenntnis der Präferenzfunktion bestimmbar.

Ist nun nicht nur die Portefeuillelinie bekannt, sondern auch die maßgebliche Präferenzfunktion $\Phi=\Phi(\mu_p, \sigma_p)$, so kann die Bestimmung des Optimalportefeuilles im einfachsten Fall in folgender Weise erfolgen:

Ermittlung des Optimalportefeuilles

– In der Präferenzfunktion werden σ_p durch $\sqrt{x_1^2\sigma_1^2+x_2^2\sigma_2^2+2x_1x_2\,\sigma_{12}}$ und μ_p durch $x_1\,\mu_1+x_2\,\mu_2$ ersetzt, so dass die Präferenzfunktion $\Phi[x_1, x_2]$ nur noch von x_1 abhängt, da $x_2=1-x_1$ gilt.[1)]

– Die so modifizierte Präferenzfunktion wird dann optimiert, in dem die Nullstelle ihrer ersten Ableitung nach x_1 bestimmt wird.

1 Beachte: $\sigma_{12}=\sigma_1\cdot\sigma_2\cdot\rho_{12}$. σ_{12} bezeichnet hier also die Kovarianz zwischen den Wertpapieren 1 und 2.

Im Folgenden wollen wir nun einige Eigenschaften der nach dem dargestellten Verfahren ableitbaren Optimallösung etwas näher untersuchen. Aus den Abschnitten 1.3.1.1 und 1.3.1.2 ist ihnen bereits die Möglichkeit vertraut, die Präferenzvorstellungen eines Entscheidungssubjekts, das sich grundsätzlich nach dem μ-σ-Prinzip richtet, in einem μ-σ-Diagramm durch eine Schar von **Indifferenzlinien** darzustellen:

Indifferenzlinien

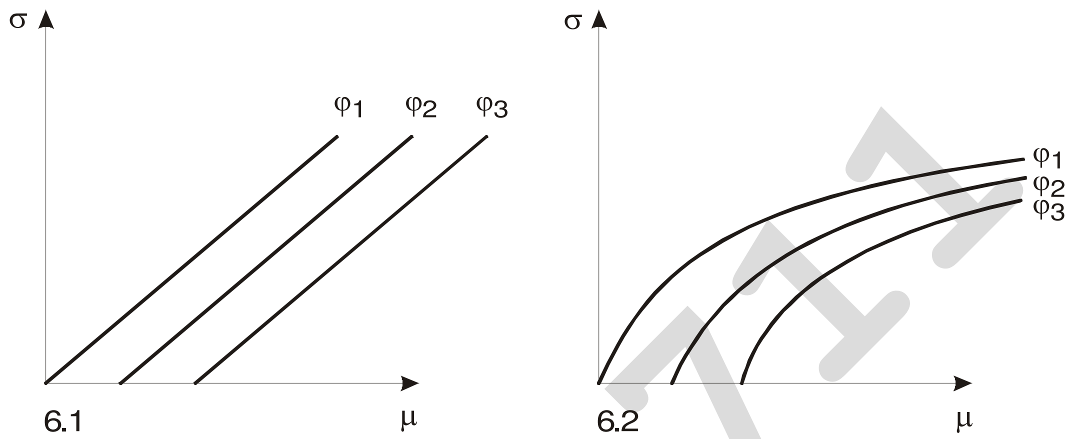


Abb. 6: Indifferenzlinien im μ-σ-Diagramm (mit $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$)

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 sind derartige Indifferenzlinien für die geläufigsten Formen des μ-σ-Prinzips noch einmal dargestellt, nämlich für die Präferenzfunktionen

(25) $\varphi = \mu - \alpha \cdot \sigma, \quad \alpha > 0,$

was zu dem in Abb. 6.1 verdeutlichten *linearen* Verlauf der Indifferenzlinien führt, sowie

(26) $\varphi = \mu - \alpha \cdot \sigma^2, \quad \alpha > 0,$

was den in Abb. 6.2 dargestellten *konkav* verlaufenden Indifferenzlinien entspricht. Bekanntlich werden alle μ-σ-Kombinationen, für die sich der gleiche Präferenzwert φ ergibt, durch Punkte auf derselben Indifferenzlinie dargestellt. Dabei repräsentiert eine Indifferenzlinie ein umso höheres Präferenzniveau, je weiter rechts sie liegt.

Das Portefeuilleproblem unseres Anlegers kann somit formal als die Bestimmung des Punktes auf der Portefeuillelinie dargestellt werden, durch den die Indifferenzlinie mit dem höchstmöglichen Präferenzniveau verläuft.

Für die Bestimmung des Optimalportefeuilles sind also

– sowohl der Verlauf der Portefeuillelinie (als Abbild der zur Auswahl stehenden Handlungsalternativen)

– als auch der Verlauf der Indifferenzlinien (als Abbild der individuellen Präferenzvorstellungen des Investors)

maßgeblich. Zur exemplarischen Verdeutlichung des Zusammenwirkens dieser beiden grundlegenden Komponenten jedes Entscheidungsproblems, im speziellen Fall unseres Portefeuilleproblems, wollen wir uns auf die beiden durch Abb. 6.1 und 6.2 verdeutlichten Verlaufsformen der Indifferenzlinien beschränken. Somit gilt es im Folgenden, zwei verschiedene Konstellationen von Portefeuille- und Indifferenzlinien zu untersuchen.

Konstellation 1: Lineare Indifferenzkurven

Abb. 7.1 verdeutlicht diesen Fall unseres Portefeuilleproblems. Von den durch die Portefeuillelinie AB charakterisierten Portefeuilles weist dasjenige das höchste Präferenzniveau auf, das dem Punkt P entspricht, d.h. dem Punkt, in dem die Portefeuillelinie gerade von einer Indifferenzlinie tangiert wird.

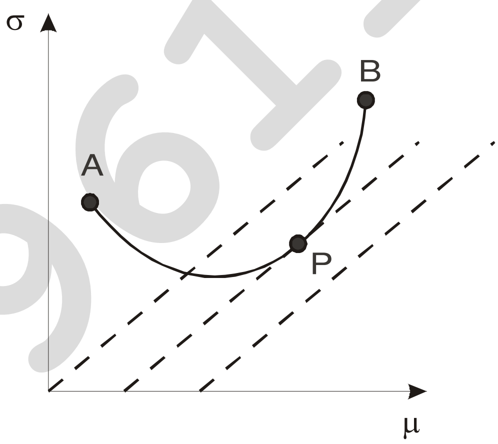


Abb. 7.1: Optimalportefeuille bei linearen Indifferenzkurven

Konstellation 2: Konkave Indifferenzkurven

Wie Abb. 7.2 unmittelbar verdeutlicht, geht es auch in diesem Fall darum, dasjenige Portefeuille zu ermitteln, das durch den Berührungspunkt P der Portefeuillelinie charakterisiert ist.

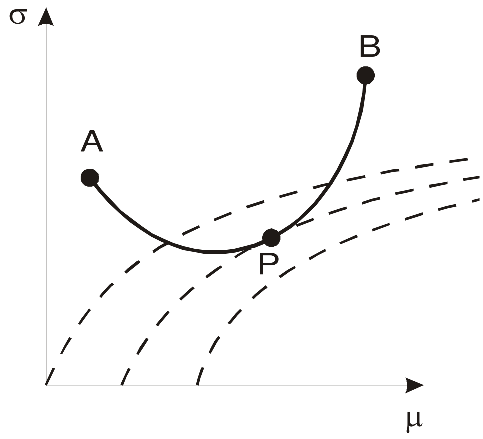


Abb. 7.2: Optimalportefeuille bei konkaven Indifferenzkurven

Je kleiner die durch den Parameter α ausgedrückte Risikoscheu des Entscheidungssubjektes ist, desto steiler verlaufen die Indifferenzlinien, desto weiter rechts oben auf der Portefeuillelinie wird mithin der für die Bestimmung des optimalen Portefeuilles ausschlaggebende Berührungspunkt von Portefeuille- und Indifferenzlinie liegen (vgl. Abb. 7.1 und 7.2).

Je geringer also die Risikoscheu eines Anlegers ist, desto größer wird die Renditeerwartung, aber auch das Risiko des für ihn optimalen Portefeuilles sein. Diese für diese Form des μ-σ-Prinzips geltende Konsequenz ist nun ohne weiteres als vernünftig anzusehen. Sie spricht insoweit *für* die Sinnhaftigkeit der untersuchten Entscheidungsregel.

2 Das BERNOULLI-Prinzip

2.1 Begriff und Inhalt

Im 1. Kapitel haben wir gesehen, dass das μ-Prinzip – zumindest bei Einzelfallentscheidungen – zu Ergebnissen führen kann, die weithin als wenig vernünftig angesehen werden. So würde wohl niemand bereit sein, sein ganzes Vermögen aufs Spiel zu setzen, nur um einmal an dem Petersburger Spiel teilzunehmen, obwohl dessen Erwartungswert unendlich hoch ist. Wir haben dann weiter einige der sogenannten klassischen Entscheidungsprinzipien kennengelernt, wonach die Beurteilung unsicherer Handlungsmöglichkeiten nicht nur auf den Erwartungswert, sondern zusätzlich noch auf einen oder mehrere andere Parameter wie z.B. auf Streuungsmaße gestützt wird.

Daniel BERNOULLI

Ein anderer Versuch, gewisse allgemein als unvernünftig empfundene Konsequenzen des μ-Prinzips zu überwinden, wird auf Daniel BERNOULLI zurückgeführt. Daniel Bernoulli lebte von 1700 bis 1782. Er entstammte einer bekannten Schweizer Gelehrtenfamilie. Im „Brockhaus‘ Konversations-Lexikon“ von 1901 beginnt der mehr als zweispaltige Artikel über diese Familie wie folgt:

> *„BERNOULLI (spr. -nulli), Name einer Reihe ausgezeichneter Männer, die fast sämtlich die mathemat. Wissenschaften zum Gegenstande ihrer Studien wählten ...“*

In seiner Abhandlung „Specimen theoriae novae de mensura sortis“ schlug Daniel Bernoulli 1738 der Idee nach vor, bei der Beurteilung von Glücksspielen

– nicht von dem Erwartungswert der möglichen *Gewinne* auszugehen,

– sondern von der „moralischen Erwartung“, d.h. dem Erwartungswert des aus den Gewinnen resultierenden *Nutzens*.

Dabei ging Bernoulli davon aus, dass der Nutzen mit steigendem Gewinn nur *unterproportional* steige.

NEUMANN, MORGENSTERN

Trotz der im 19. und 20. Jahrhundert ausführlich geführten allgemeinen Diskussion um den Nutzenbegriff geriet der Ansatz Bernoulli‘s zunächst lange Zeit mehr oder weniger in Vergessenheit, bis John v. NEUMANN und Oskar MORGENSTERN 1944 in ihrer bahnbrechenden Arbeit über die „Theory of Games and Economic Behavior“ diesen Grundgedanken wieder aufnahmen und zu einem wichtigen Baustein der neueren Entscheidungstheorie machten.

In die hier verwendete Formalsprache übertragen sieht das BERNOULLI-Prinzip also vor:

1. Allen Ergebniswerten e_{ij} einer Alternative a_i wird mittels einer Nutzenfunktion $u(e)$ ein Nutzenwert $u_{ij} = u(e_{ij})$ zugeordnet.
2. Der entscheidungsrelevante Präferenzwert $\varphi(a_i)$ einer Alternative a_i wird als Erwartungswert dieser Nutzenwerte ermittelt.

Gesucht wird dann die Alternative, für die dieser Erwartungswert des Nutzens am größten ist.

Zielfunktion des BERNOULLI-Prinzips

Für die Zielfunktion des BERNOULLI-Prinzips gilt also:

$$\boxed{\max_i : \varphi(a_i) \quad = \quad \sum_{j=1}^{n} u(e_{ij}) \cdot p_j \, .} \tag{27}$$

Folgendes Beispiel mag zur Erläuterung dienen:[1)]

Beispiel 12:
Gegeben seien die beiden durch die folgenden Tabellen umschriebenen Alternativen a_1 und a_2.

a_1

e	0	9	36
p	0,1	0,5	0,4

a_2

e	4	25	49
p	0,4	0,5	0,1

Nimmt man nun an, für die Nutzenfunktion gelte

$$u(e) \;=\; \sqrt{e}\,,$$

so entsprechen den vorstehenden **Ergebnisverteilungen** folgende **Nutzenverteilungen:**

a_1

u	0	3	6
p	0,1	0,5	0,4

a_2

u	2	5	7
p	0,4	0,5	0,1

1 Zur vertiefenden Übung empfehlen wir Ihnen außerdem, die entsprechende Übungsaufgabe des Kapitels 4 in BITZ/EWERT (2014) zu lösen und die zugehörige Musterlösung gründlich durchzuarbeiten!

Daraus ergibt sich gem. (27) für die beiden Präferenzwerte:

$$\varphi(a_1) \;=\; 0\cdot 0{,}1 \;+\; 3\cdot 0{,}5 \;+\; 6\cdot 0{,}4 \;=\; 3{,}9$$

$$\varphi(a_2) \;=\; 2\cdot 0{,}4 \;+\; 5\cdot 0{,}5 \;+\; 7\cdot 0{,}1 \;=\; 4{,}0\ .$$

Alternative a_2 wäre in diesem Fall vorzuziehen, da sie den größeren Erwartungswert des Nutzens aufweist.

Das wesentliche Charakteristikum des BERNOULLI-Prinzips, das es zugleich auch von den klassischen Entscheidungsprinzipien abhebt, ist also die Transformation der Ergebnisbeträge in Nutzenwerte.

Entscheidungsmatrix

Die geordnete Darstellung der den verschiedenen a_i-s_j-Kombinationen zuzuordnenden Nutzenwerte bezeichnet man dementsprechend als Nutzenmatrix oder häufiger noch als **Entscheidungsmatrix.**

Risiko-Nutzen

Für den speziellen Nutzenbegriff, der diesem Konzept zugrundeliegt, sind verschiedene Bezeichnungen gebräuchlich, so vor allem: NEUMANN-MORGENSTERN-Nutzen, BERNOULLI-Nutzen, Erwartungs-Nutzen oder – wie wir im Folgenden sagen werden – Risiko-Nutzen.

RNF ≡ Risiko-Nutzen-Funktion

Das Aussehen der Risiko-Nutzen-Funktion (≡ RNF), auf die zur Bildung der maßgeblichen Präferenzwerte üblicherweise zurückgegriffen wird, wird durch das BERNOULLI-Prinzip noch nicht festgelegt. Sie ist vielmehr im Hinblick auf die individuellen Risiko- und Präferenzvorstellungen des jeweiligen Entscheidungssubjektes gesondert zu bestimmen. Insofern erlaubt das BERNOULLI-Prinzip in seiner modernen Ausprägung also durchaus eine große Flexibilität und Anpassungsfähigkeit. Ein Verfahren, nach dem eine den jeweiligen Risiko- und Präferenzvorstellungen entsprechende RNF abgeleitet werden kann, werden wir im folgenden Abschnitt 2.2 noch näher kennenlernen.

Zuvor gilt es aber noch, eine wichtige Eigenschaft der RNF herauszuarbeiten, indem wir untersuchen, was passiert, wenn wir die ursprüngliche RNF $u(e)$ durch eine *positiv-lineare Transformation* ersetzen.[1] Bezeichnen wir die transformierte RNF mit $\hat{u}(e)$, so gilt:

1 Eine positiv-lineare Transformation einer Funktion $f(x)$ liegt vor, wenn diese Funktion ersetzt wird durch eine Funktion $g(x)$, für die gilt: $g(x) = \alpha + \beta \cdot f(x)$ mit $\beta > 0$. Gilt also etwa

$f(x) = 3 + 2x - x^2$,

so stellt

$g(x) = -5 + 10x - 5x^2$

(28) $\quad \hat{u}(e) \;=\; \alpha \;+\; \beta \cdot u(e) \qquad \beta > 0 \;.$

Für die auf der Basis von $u(e)$ gem. (27) bzw. $\hat{u}(e)$ gem. (28) ermittelten Präferenzwerte $\varphi(a_i)$ bzw. $\hat{\varphi}(a_i)$ gilt dann:

$$\varphi(a_i) \;=\; \sum_{j=1}^{n} u(e_{ij}) \cdot p_j$$

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}(a_i) \;&=\; \sum_{j=1}^{n} \hat{u}(e_{ij}) \cdot p_j \\
&=\; \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha + \beta \cdot u(e_{ij})\right] \cdot p_j \\
&=\; \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \;+\; \beta \cdot \sum_{j=1}^{n} u(e_{ij}) \cdot p_j \;.
\end{aligned}$$

In dem letzten Ausdruck ist nun die erste Summe bekanntlich gleich eins, während die zweite Summe nichts anderes darstellt als den Präferenzwert $\varphi(a_i)$. Mithin stehen die auf der Basis der RNF $u(e)$ und $\hat{u}(e)$ abgeleiteten Präferenzwerte φ und $\hat{\varphi}$ grundsätzlich in der Relation:

(29) $\quad \hat{\varphi} \;=\; \alpha \;+\; \beta \cdot \varphi \qquad \beta > 0 \;.$

D.h., $\hat{\varphi}$ stellt ebenfalls eine positiv-lineare Transformation von φ dar. Dies ist jedoch eine hinreichende Bedingung dafür, dass die auf der Basis der φ-Werte und der $\hat{\varphi}$-Werte abgeleiteten Präferenzrelationen zwischen zwei beliebigen Alternativen stets übereinstimmen.

Bei Anwendung des BERNOULLI-Prinzips können wir also die benötigte RNF in beliebiger Weise positiv-linear transformieren, ohne dass dies Einfluss auf das Entscheidungsergebnis hätte. Man sagt daher auch, die RNF sei nur bis auf eine positiv-lineare Transformation genau bestimmbar. Das bedeutet, dass bei der Ermittlung der RNF der *Nullpunkt* und die *Maßeinheit* beliebig gewählt werden können.

---

eine positive lineare Transformation von $f(x)$ dar, und zwar mit $\alpha = -20$ und $\beta = 5$. D.h., wir erhalten $g(x)$, indem wir zunächst $f(x)$ mit 5 multiplizieren und von diesem Ausdruck dann 20 abziehen.

Beispiel 13:

Bei der Wärmemessung bedient man sich traditionell eines zum Teil mit Quecksilber gefüllten Glasröhrchens. Da sich Quecksilber unter Wärmeeinfluss stärker ausdehnt als Glas und die Quecksilbersäule somit beim Erwärmen steigt, kann deren Ausdehnung als Indikator für die jeweilige Temperatur verwendet werden. Es fragt sich jedoch, wo bei dieser Art der Temperaturmessung der *Nullpunkt* fixiert werden soll und wie die *Maßeinheit* festzulegen ist.

Der Danziger Wissenschaftler G.D. FAHRENHEIT (1686–1736) ging im Jahre 1714 wie folgt vor:

1. Die *Maßeinheit* bestimmte er, indem er den Längenunterschied der Quecksilbersäule zwischen dem **Gefrierpunkt** des Wassers und dem **Siedepunkt** in **180**° unterteilte.
2. Als *Nullpunkt* legte er dann den tiefsten Thermometerstand fest, der im Laufe des Winters 1709 in Danzig aufgetreten war.

Da der unter 2. angegebene Nullpunkt entsprechend der unter 1. beschriebenen Gradeinteilung genau 32° unter dem Gefrierpunkt lag, ist die von Fahrenheit entwickelte Temperaturskala also durch folgende Normwerte gekennzeichnet:

Gefrierpunkt: 32°F
Siedepunkt: 212°F .

Der schwedische Astronom CELSIUS (1701–1744) entwickelte demgegenüber einige Jahre später (1742) folgende Skala:

1. Die *Maßeinheit* ergibt sich, indem der Abstand zwischen Gefrier- und Siedepunkt des Wassers in **100**° unterteilt wird.
2. Der *Nullpunkt* wird auf den Gefrierpunkt fixiert.

Mithin weist die Ihnen bekannte Celsius-Skala folgende Normwerte auf:

Gefrierpunkt: 0°C
Siedepunkt: 100°C.

In Fahrenheitgraden (f) und in Celsiusgraden (c) gemessene Temperaturangaben können nun ohne weiteres durch eine einfache positiv-lineare Transformation ineinander überführt werden. Es gilt nämlich:

$$c = (f - 32) \cdot \frac{100}{180}$$

$$c = -\frac{32 \cdot 100}{180} + \frac{100}{180} \cdot f$$

$$c = -17\frac{7}{9} + \frac{5}{9} \cdot f \quad .$$

Ob Temperaturen nach der Fahrenheit- oder Celsiusskala gemessen werden, ist somit letztlich unerheblich, da der Aussagewert von Angaben der einen oder der anderen Art angesichts der aufgezeigten eindeutigen Umrechnungsmöglichkeiten identisch ist.

Genau so wie bei der Temperaturmessung können auch bei der Bestimmung der RNF Skalennullpunkt und Maßeinheit beliebig gewählt werden. Dabei wäre es z.B. auch ohne weiteres möglich, RNF so zu normieren, dass allen in Frage kommenden Ergebniswerten *negative* Nutzenwerte zugewiesen werden. Dabei besteht diese *Möglichkeit* natürlich auch in solchen Entscheidungssituationen, in denen die Ergebnisse dem Entscheidenden durchaus als angenehm, als „positiv" erscheinen – z.B. mögliche Lotteriegewinne oder ähnliches. Angesichts der beliebigen linearen Transformierbarkeit der RNF sagt das Vorzeichen der Nutzenwerte $u(e)$ eben überhaupt nichts darüber aus, ob der Entscheidende das betrachtete Ergebnis e als angenehm oder unangenehm einstuft.

Übungsaufgabe 5:

Gehen Sie von den in Beispiel 12 in den Tabellen beschriebenen Alternativen aus und ermitteln Sie jeweils den Erwartungswert des Nutzens, wenn für die Nutzenfunktion gilt:

(1) $u(e) = \sqrt{e}$

(2) $u(e) = -100 + 10 \cdot \sqrt{e}$

(3) $u(e) = 5 \cdot (10 + 0{,}2\sqrt{e})$.

Erläutern Sie an Hand Ihrer Ergebnisse die für die positiv-lineare Transformation $\hat{u}(e)$ einer RNF $u(e)$ geltenden Relationen

(1) $\hat{u}(e) = \alpha + \beta u(e) \quad \text{mit} \quad \beta > 0$

und

(2) $\hat{\varphi} = \alpha + \beta \cdot \varphi \quad \text{mit} \quad \beta > 0$.

2.2 Bestimmung der Risiko-Nutzen-Funktion

einfache Chance

Die aufgezeigte Beliebigkeit der Wahl von Nullpunkt und Maßeinheit ermöglicht es nun zugleich, die RNF in recht einfacher Weise durch hypothetische Wahlakte zwischen einem sicheren Einkommen und einer sog. **einfachen Chance** zu ermitteln. Als einfache Chance bezeichnet man eine Alternative, bei der es genau zwei verschiedene Ergebnismöglichkeiten e' und $e''(e' > e'')$ gibt, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten p' bzw. $p''=(1-p')$ betragen. Zur abkürzenden Beschreibung wird eine solche Alternative im Folgenden durch den Ausdruck $(e'; p'; e'')$ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit p' für das Auftreten des günstigeren Ergebnisses e' wird dabei häufig als die **Erfolgswahrscheinlichkeit** der betrachteten einfachen Chance bezeichnet.

> **Beispiel 14:**
> Ein Lotterielos, das sich mit 99%iger Wahrscheinlichkeit als Niete erweisen wird ($e''=0$; $p''=0{,}99$), jedoch mit 1%iger Wahrscheinlichkeit zu einem Gewinn von 1.000 GE führt ($e'=1.000$; $p'=0{,}01$), wäre somit durch (1.000; 0,01; 0) zu kennzeichnen.

BERNOULLI-Befragung

Zur Ermittlung der RNF bedient man sich nun der sog. BERNOULLI-Befragung, wonach im Einzelnen wie folgt vorzugehen ist:

1. Normierung der RNF

(1) Es werden zwei Ergebniswerte e' und e'' mit $(e' > e'')$ beliebig vorgegeben, denen zwei bis auf die Bedingung $u'=u(e')>u''=u(e'')$ ebenfalls beliebige Nutzenwerte zugeordnet werden.

Da Nullpunkt und Maßeinheit beliebig wählbar sind, erweist es sich als besonders praktisch, bei der Festlegung von e' und e'' sowie u' und u'' wie folgt vorzugehen:

- Alle in der zu beurteilenden Entscheidungssituation möglicherweise auftretenden Ergebnisse e_{ij} liegen im Bereich zwischen e' und e''.
- Die Eckwerte u' und u'' werden auf $u' = 1$ und $u'' = 0$ festgelegt.

Nullpunkt und Maßeinheit sind somit so gewählt, dass die – noch zu ermittelnden – Nutzenwerte aller nur möglichen Ergebnisse zwangsläufig in dem Wertintervall von 0 bis 1 liegen müssen. Man sagt daher auch, die RNF werde auf das Wertintervall von 0 bis 1 normiert.

Beispiel 15:

Als Beispiel wollen wir annehmen, dass in einem bestimmten Entscheidungsproblem sämtliche möglichen Ergebniswerte in dem Intervall zwischen 0 und 100 liegen. Dementsprechend legen wir fest: $e'=100$ und $u'=u(100)=1$ sowie $e''=0$ und $u''=u(0)=0$. Die RNF ist damit zunächst in zwei Punkten eindeutig festgelegt.

(2) Als nächstes wird das Entscheidungssubjekt nun (hypothetisch) vor die Wahl gestellt zwischen

2. hypothetische Wahlakte

– einer sicheren Alternative mit dem Einkommen $\bar{e}$ und
– einer einfachen Chance $(e'; p'; e'')$.

Beispiel 16:

Wählen wir etwa zunächst $\bar{e}=25$, so ist dieses sichere Einkommen mit der einfachen Chance $(100; p'; 0)$ zu vergleichen.

(3) Die Erfolgswahrscheinlichkeit p' wird dann bei jeweils vorgegebenem $\bar{e}$ so lange variiert, bis der kritische Wert $p^*(\bar{e})$ gefunden ist, für den sichere Alternative und einfache Chance nach den subjektiven Präferenzvorstellungen des Entscheidenden als gleichwertig angesehen werden.

3. Ermittlung der kritischen Erfolgswahrscheinlichkeit

Beispiel 17:

Liegt p' sehr nahe bei 1, so wird man wohl allgemein die einfache Chance $(100; p'; 0)$ dem sicheren Einkommen $\bar{e}=25$ vorziehen. Nähert sich p' hingegen dem Wert 0, so erscheint das sichere Einkommen eindeutig als vorteilhafter. Wir suchen nun den kritischen Zwischenwert p^*, bei dem gerade Indifferenz zwischen sicherem Einkommen und einfacher Chance besteht. Dieser Wert p^* könnte etwa durch sukzessives „Herantasten" ermittelt werden. Gibt das befragte Entscheidungssubjekt beispielsweise die Präferenzrelationen $25 \succ (100; 0{,}3; 0)$ und $25 \prec (100; 0{,}7; 0)$ an, so besagt dies, dass p^* größer als 30%, aber kleiner als 70% sein muss. Durch weitere Fragen kann dieser Spielraum dann immer weiter eingeengt werden, bis p^* schließlich hinlänglich genau bestimmt werden kann. Für unser Beispiel wollen wir $p^*(25)=0{,}5$ annehmen.

4. Bestimmung des Nutzenwertes

(4) Entsprechend Relation (27) folgt aus der elementaren Indifferenzrelation

$$\bar{e} \sim \left(e'; p^*(\bar{e}); e''\right)$$

sofort, dass

$$u(\bar{e}) = p^*(\bar{e}) \cdot u(e') + \left[1 - p^*(\bar{e})\right] \cdot u(e'')$$

gelten muss, was sich gemäß der vorgenommenen Normierung ($u(e')=1$ und $u(e'')=0$) sofort zu

$$u(\bar{e}) = p^*(\bar{e})$$

vereinfacht. D.h., im einfachsten Fall kann die kritische Erfolgswahrscheinlichkeit $p^*(\bar{e})$ selbst unmittelbar als der einem Ergebniswert $\bar{e}$ zuzuordnende Nutzenwert verwendet werden.

Beispiel 18:
In unserem Beispiel gilt also 25~(100; 0,5; 0) und somit auch:

$$\begin{aligned} u(25) &= 0{,}5 \cdot u(100) + 0{,}5 \cdot u(0) \\ &= 0{,}5 \cdot 1 \\ &= 0{,}5\ . \end{aligned}$$

Der Risiko-Nutzen des Betrages 25 hängt also von dem Wert der Erfolgswahrscheinlichkeit ab, für den das sichere Einkommen und die einfache Chance gerade als äquivalent angesehen werden.

Auf diese Weise können für beliebig viele Ergebniswerte $\bar{e}$ die zugehörigen Nutzenwerte ermittelt und so die gesamte RNF in hinreichend genauer Weise approximiert werden.

Beispiel 19:
In unserem Beispiel könnte dementsprechend als nächstes etwa $\bar{e}=40$ gesetzt und die dementsprechende kritische Erfolgswahrscheinlichkeit p*(40) ermittelt werden. Ergibt sich dabei etwa $p^*(40)=0{,}65$, so gilt also $40 \sim (100; 0,65; 0)$ und dementsprechend auch $u(40)=0{,}65 \cdot u(100)+0{,}35 \cdot u(0)=0{,}65$.

Auf diese Weise kann die RNF u(e) in beliebig vielen Punkten bestimmt werden. Für das Entscheidungssubjekt unseres Beispiels mögen sich dabei folgende Wertepaare ergeben haben:

$\bar{e}$	0	5	10	15	20	30	40	50	75	100
$p^*(\bar{e})$	0	0,2	0,3	0,4	0,45	0,55	0,65	0,7	0,85	1

Wie Abb. 8 verdeutlicht, kann diese Punktfolge sehr gut durch die Funktion

$$u(e) \quad = \quad 0{,}1 \cdot \sqrt{e}$$

approximiert werden. Angesichts der beliebigen positiv-linearen Transformierbarkeit der RNF könnte in der Anwendung natürlich auch auf den Faktor 0,1 verzichtet und einfach die RNF $u(e) = \sqrt{e}$ zugrundegelegt werden.

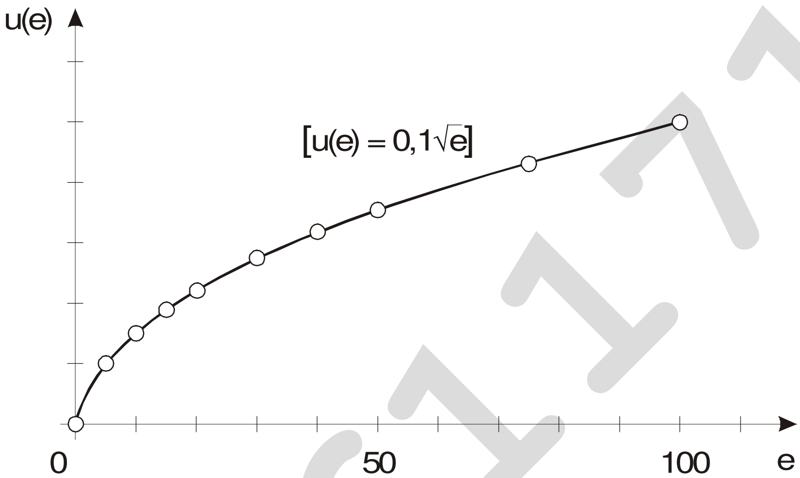


Abb. 8: Risiko-Nutzen-Funktion $u = 0{,}1\sqrt{e}$

Übungsaufgabe 6:

Im Zuge der BERNOULLI-Befragung äußert ein Entscheidungssubjekt u.a. folgende Indifferenzrelationen:

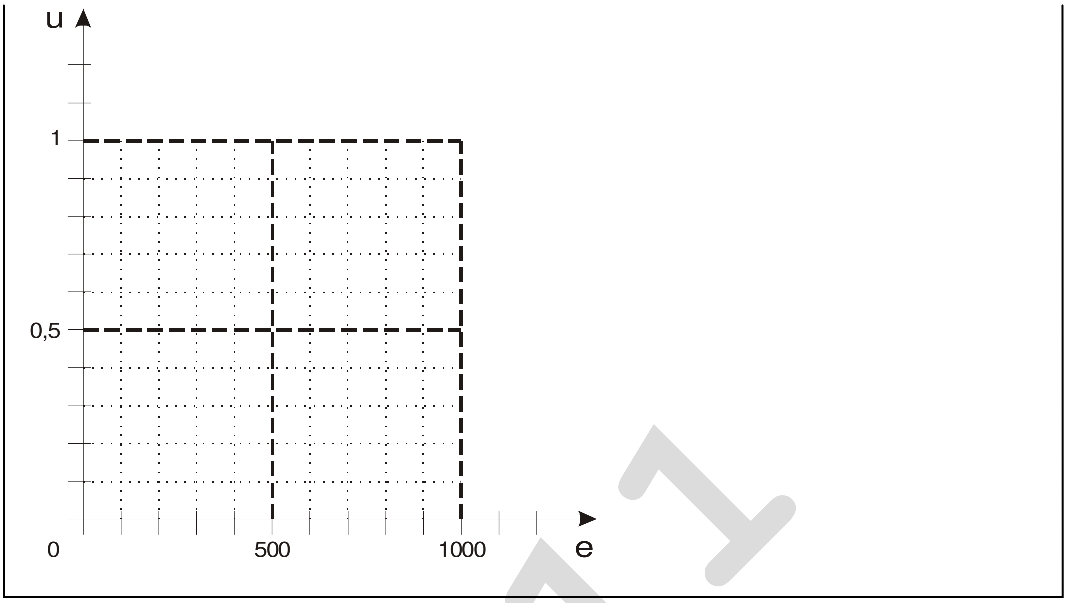
$$\text{I:} \quad (1000; 0{,}4; 0) \quad \sim \quad 200$$

$$\text{II:} \quad (1000; 0{,}5; 0) \quad \sim \quad 400$$

$$\text{III:} \quad (1000; 0{,}8; 0) \quad \sim \quad 600.$$

Die Normwerte sind auf $u(0) = 0$ und $u(1000) = 1$ festgelegt.

Skizzieren Sie nach den vorliegenden Angaben den ungefähren Verlauf der RNF!



Bei der Ableitung der RNF in den dargestellten Schritten (1) bis (4) ist es im praktischen Anwendungsfall allerdings keineswegs ausgeschlossen, dass ein Entscheidender die im ersten Anlauf aus einer Fülle hypothetischer Einzelentscheidungen abgeleitete RNF in ihrer Gesamtheit doch nicht in jeder Hinsicht als adäquaten Ausdruck seiner Risiko- und Präferenzvorstellungen empfindet. Somit gilt es grundsätzlich, die im ersten Anlauf artikulierte RNF daraufhin zu überprüfen, ob die damit verbundenen Konsequenzen für die Entscheidungsfindung wirklich mit dem eigentlich intendierten Abbild der Risiko- und Präferenzvorstellungen übereinstimmen. Je nach dem Resultat einer solchen Überprüfung ist die RNF dann gegebenenfalls mehrfach zu modifizieren, bevor die endgültige Entscheidungsregel formuliert werden kann.

Angesichts verschiedener Missverständnisse, die im einschlägigen Schrifttum im Zusammenhang mit dem BERNOULLI-Prinzip anzutreffen sind, erscheint folgender Hinweis wichtig: Die Verknüpfung einer dem BERNOULLI-Prinzip entsprechenden Entscheidungsregel mit den Risiko- und Präferenzeinstellungen des maßgeblichen Entscheidungssubjektes erfolgt ausschließlich durch die Artikulation der elementaren Indifferenzrelationen gem. Schritt (4). Die Indifferenzrelationen sind das Elementare; ihre „Übersetzung“ in eine RNF entsprechend Abb. 8 hingegen dient lediglich einer Vereinfachung der Darstellung, ist jedoch kein essentieller Bestandteil des BERNOULLI-Prinzips.

Dies lässt sich in Fortführung der Tabelle in Beispiel 19 wie folgt verdeutlichen: Angenommen, einem Entscheidungssubjekt stünden die beiden einfachen Chancen a_1 und a_2 zur Auswahl, die jeweils mit 50%-iger Wahrscheinlichkeit zu den Ergebnissen 20 und 40 (a_1) bzw. 10 und 50 (a_2) führen. Sind nun ausschließlich die in der Tabelle mit verdeutlichten elementaren Indifferenzrelationen

$$10 \sim (100; 0{,}3; 0)$$
$$20 \sim (100; 0{,}45; 0)$$
$$40 \sim (100; 0{,}65; 0)$$
$$50 \sim (100; 0{,}7; 0)$$

bekannt, so kann auch daraus schon eine eindeutige Entscheidung abgeleitet werden, ohne dass es der Formulierung einer RNF bedarf.

Alternative a_1 ist nämlich äquivalent zu der Möglichkeit, mit jeweils 50%iger Wahrscheinlichkeit eine der einfachen Chancen (100; 0,65; 0) oder (100; 0,45; 0) zu erlangen, die dann in einem zweiten Schritt alternativ zu dem Ergebnis 100 oder 0 führen. Formalisiert kann also geschrieben werden:

$$a_1 \sim (40; 0{,}5; 20) \sim \left[(100; 0{,}65; 0);\ 0{,}5;\ (100; 0{,}45; 0)\right] .$$

Diese zusammengesetzte „einfache Chance" weist nun aber eine sehr einfache Wahrscheinlichkeitsverteilung auf: Die Wahrscheinlichkeit für ein Endergebnis von 100 beträgt nämlich $0{,}5 \cdot 0{,}65 + 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}325 + 0{,}225 = 0{,}55$, die für das Endergebnis 0 dementsprechend 0,45. Das aber heißt, dass auch

$$a_1 \sim (100; 0{,}55; 0)$$

gelten muss.

In entsprechender Weise ergibt sich für Alternative a_2:

$$a_2 \sim (50; 0{,}5; 10) \sim \left[(100; 0{,}7; 0);\ 0{,}5;\ (100; 0{,}3; 0)\right]$$
$$\sim (100; 0{,}5; 0) .$$

Nach dem Prinzip der Wahrscheinlichkeitsdominanz gilt nun aber eindeutig

$$(100; 0{,}55; 0) \succ (100; 0{,}5; 0) ;$$

mithin wird auch a_1 gegenüber a_2 vorgezogen, also $a_1 \succ a_2$.

Zur Ableitung dieser Entscheidung haben wir also ausschließlich die den vier möglichen Ergebniswerten 10, 20, 40, und 50 entsprechenden elementaren Indifferenzrelationen benötigt; ein Rückgriff auf eine explizit formulierte RNF hingegen war völlig entbehrlich. Nichtsdestoweniger ist die so abgeleitete Entscheidung mit dem BERNOULLI-Prinzip voll kompatibel. Setzt man nämlich unter Rückgriff auf die Tabelle in Beispiel 19 einfach $u(e) = p^*(e)$, so erhält man für a_1 und a_2 folgende Präferenzwerte:

$$\varphi_1 = 0{,}5 \cdot 0{,}65 + 0{,}5 \cdot 0{,}45 = 0{,}55$$

$$\varphi_2 = 0{,}5 \cdot 0{,}7 + 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}5\ .$$

Diese Präferenzwerte stimmen genau mit den Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden einfachen Chancen (100; 0,55; 0) und (100; 0,5; 0) überein, die sich als äquivalent zu den ursprünglichen Alternativen a_1 und a_2 herausgestellt hatten. Auch darin zeigt sich noch einmal, dass die RNF letztlich nichts anderes ist als eine Darstellungsform für die elementaren Indifferenzrelationen. Dennoch werden wir im Folgenden stets auf die RNF zurückgreifen; Sie sollten sich des soeben verdeutlichten Charakters dieses Darstellungsbehelfs stets bewusst bleiben.

Für eine nach dem BERNOULLI-Prinzip vorzunehmende Entscheidung ist nun offensichtlich das Aussehen der aus den elementaren Indifferenzrelationen abgeleiteten RNF von ausschlaggebender Bedeutung. Wir wollen daher zunächst einige, aus verschiedenen Verlaufsformen der RNF resultierende Implikationen etwas näher untersuchen. Dabei werden wir für den hier stets unterstellten Fall, dass sich die Handlungsergebnisse e_{ij} auf positiv bewertete Sachverhalte (Einkommen, Gewinne etc.) beziehen, grundsätzlich verlangen, dass die RNF u(e) innerhalb des relevanten Ergebnisbereichs streng monoton steigend verläuft, für den Fall der Differenzierbarkeit von u(e) also der Bedingung

$$\text{(30)} \qquad \frac{du}{de} > 0$$

entspricht.

2.3 Verlaufstypen der Risiko-Nutzen-Funktion und die zugrundeliegende Risikoeinstellung

Unter der Grundprämisse (30) sind nun zunächst drei besonders prägnante Fälle zu unterscheiden, nämlich:

– Die RNF verläuft **degressiv** steigend. Es gilt also:

$$(31.1)\quad \frac{d^2u}{de^2} < 0 .$$

– Die RNF verläuft **progressiv** steigend. Es gilt also:

$$(31.2)\quad \frac{d^2u}{de^2} > 0 .$$

– Die RNF verläuft **linear** steigend. Es gilt also:

$$(31.3)\quad \frac{d^2u}{de^2} = 0 .$$

Diese drei verschiedenen Verlaufsformen implizieren nun zugleich unterschiedliche **Risikoeinstellungen.** Zur Verdeutlichung dieses Sachverhalts wollen wir jeweils die Entscheidung zwischen

Risikoeinstellung

– einer Alternative a_1, mit Sicherheit ein Einkommen von $\bar{e}=45{,}4$ zu erzielen, und
– einer einfachen Chance $a_2 \equiv (100; 0{,}4; 9)$

näher analysieren. Wie man sofort erkennt, weisen beide Alternativen den gleichen *Erwartungswert* von $\mu = 45{,}4$ auf. Ihre *Risikostruktur* ist jedoch deutlich verschieden.

(1) Degressiv steigende RNF

Als Beispiel gelte:

$$u(e) = \sqrt{e} \qquad e \geq 0 .$$

Dann ergibt sich gem. (27) sofort:

$$\varphi(a_1) = \sqrt{45{,}4} = 6{,}74$$
$$\varphi(a_2) = 0{,}6 \cdot \sqrt{9} + 0{,}4 \cdot \sqrt{100} = 5{,}8 .$$

In diesem Fall wird – bei gleichem Erwartungswert – die sichere Alternative eindeutig vorgezogen.

risikoscheue Entscheidungen

Die Verwendung der angegebenen RNF führt also zu **risikoscheuen** Entscheidungen. D.h., das Entscheidungssubjekt wäre grundsätzlich bereit, eine Verringerung der Erfolgsaussichten (= kleineres μ) hinzunehmen, wenn dadurch die Unsicherheit in hinreichendem Ausmaß gemindert würde. Oder anders ausgedrückt: Das Sicherheitsäquivalent einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist stets kleiner als der entsprechende Erwartungswert.

Dies gilt grundsätzlich für eine degressiv steigende RNF, wie an Hand von Abb. 9 beispielhaft für die Alternative a_1 mit dem sicheren Einkommen $\bar{e} = 45{,}4$ und die einfache Chance $a_2 = (100;\ 0{,}4;\ 9)$ verdeutlicht werden kann. Der Präferenzwert einer sicheren Alternative mit dem Ergebnis $\bar{e}$ ergibt sich allgemein als der zu $\bar{e}$ gehörende Ordinatenwert der RNF (vgl. Punkt A in Abb. 9). Der Präferenzwert einer unsicheren Alternative mit den Ergebnissen e' und e'' sowie den zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten p' bzw. $(1-p')$ hingegen kann ermittelt werden, indem man die Verbindungslinie der beiden entsprechenden Kurvenpunkte (B′ und B″ in Abb. 9) im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten $(1-p')$ zu p' teilt (vgl. Punkt C in Abb. 9) und den diesem Punkt entsprechenden Ordinatenwert feststellt.[1)]

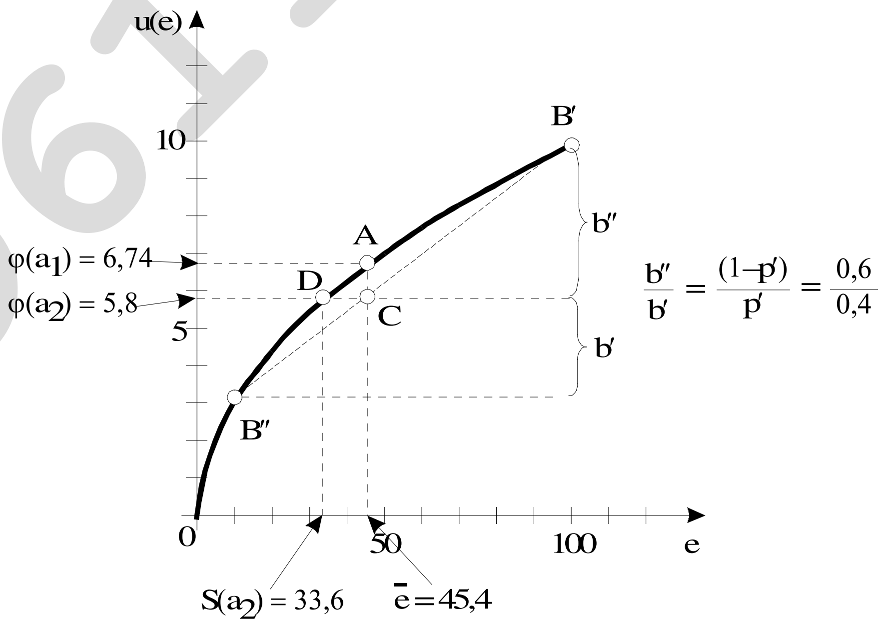


Abb. 9: Risiko-Nutzen-Funktion bei Risikoscheu

1 Das der Alternative a_2 entsprechende Sicherheitsäquivalent kann übrigens sehr einfach ermittelt werden, indem man den Abszissenwert des Punktes feststellt, in dem eine durch C verlaufende Parallele zur e-Achse die RNF schneidet (Punkt D in Abbildung 9).

Sofern die beiden Vergleichsalternativen nun den gleichen Erwartungswert haben, also

$$e' \cdot p' + (1 - p') \cdot e'' = \bar{e}$$

gilt, haben die Punkte A und C zwingend den gleichen Abszissenwert. Bei einem degressiv steigenden Verlauf der RNF liegt aber die Verbindungslinie zweier Punkte (vgl. die Linie B′B″ in Abb. 9) stets *unterhalb* der RNF. Also liegt C unterhalb von A,[1] d.h. der Präferenzwert der unsicheren Alternative unter dem der sicheren Alternative.

(2) **Progressiv steigende RNF**

Für diesen Fall gelte:

$$u(e) = e^2 \qquad e \geq 0 \ .$$

Dann ergeben sich für unser Beispiel folgende Werte:

$$\varphi(a_1) = (45{,}4)^2 = 2061{,}16$$

$$\varphi(a_2) = 0{,}6 \cdot (9)^2 + 0{,}4 \cdot (100)^2 = 4048{,}60 \ .$$

Man erkennt: Bei gleichem Erwartungswert wird die unsichere Alternative vorgezogen.

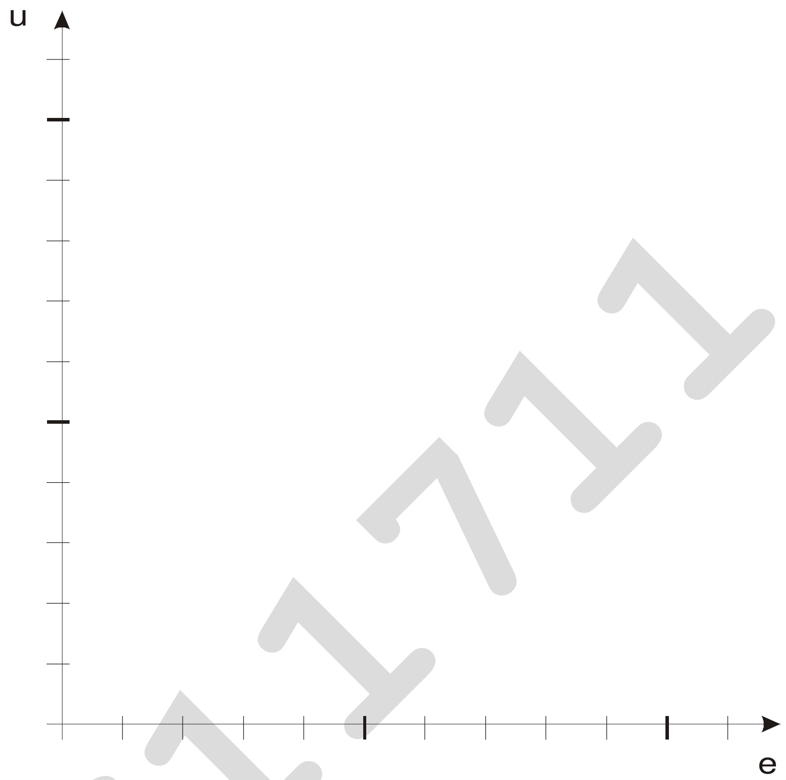
Eine progressiv steigende RNF impliziert durchgängig **risikofreudiges** Verhalten. Das Entscheidungssubjekt wäre in diesem Fall also bereit, eine Minderung der Erfolgsaussichten hinzunehmen, wenn dadurch eine größere Streuung der Ergebnismöglichkeiten, also eine Steigerung der Unsicherheit, erreicht werden könnte. Dementsprechend liegt das Sicherheitsäquivalent einer Wahrscheinlichkeitsverteilung stets *oberhalb* des Erwartungswertes.

risikofreudiges Verhalten

1 In entsprechender Weise liegt auch der für die Bestimmung des Sicherheitsäquivalentes einer unsicheren Alternative maßgebliche Punkt D stets links von dem Punkt C, dessen Abszissenwert ja den Erwartungswert μ angibt. D.h., das Sicherheitsäquivalent ist in diesem Fall stets kleiner als der Erwartungswert.

Übungsaufgabe 7:

Verdeutlichen Sie anhand einer Zeichnung, dass eine progressiv steigende RNF allgemein Risikofreude impliziert.



(3) Lineare RNF

Im Fall einer linearen RNF von der allgemeinen Form

$$u = \alpha + \beta \cdot e \qquad (\beta > 0)$$

ergibt sich gem. (27) sofort:

$$(32) \qquad \varphi(a_i) = \sum_{j=1}^{n} (\alpha + \beta \cdot e_{ij}) \cdot p_j$$

$$= \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j + \beta \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j$$

$$= \alpha + \beta \cdot \mu_i \ .$$

Damit aber gilt für den Vergleich zweier beliebiger Alternativen a_1 und a_2 grundsätzlich:

$$\mu_1 > \mu_2 \leftrightarrow \varphi(a_1) > \varphi(a_2)$$
$$\mu_1 = \mu_2 \leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2),$$

d.h., die aus der Anwendung des BERNOULLI-Prinzips resultierende Rangordnung der Alternativen ist mit derjenigen, die sich nach dem einfachen μ-Prinzip ergibt, identisch. Im Falle einer linearen RNF können die zur Auswahl stehenden Alternativen somit von vornherein, ungeachtet ihrer Unsicherheitsstruktur, ausschließlich nach dem Erwartungswert beurteilt werden. Eine solche RNF impliziert also zwingend **risikoneutrales** Verhalten.

risikoneutrales Verhalten

Zusammenfassend können wir also festhalten:

– Verläuft die RNF durchgängig degressiv, so impliziert dies risikoscheue Entscheidungen; das Sicherheitsäquivalent ist kleiner als der Erwartungswert.

– Verläuft die RNF durchgängig progressiv, so impliziert dies risikofreudige Entscheidungen; das Sicherheitsäquivalent ist größer als der Erwartungswert.

– Verläuft die RNF schließlich durchgängig linear, so impliziert dieses risikoneutrale Entscheidungen; Sicherheitsäquivalent und Erwartungswert stimmen überein.

2.4 Axiomatik des Risiko-Nutzens

2.4.1 Begriff und Zweck der Nutzenaxiomatik

Sie haben nun den Inhalt des BERNOULLI-Prinzips sowie ein Verfahren zur Ermittlung der benötigten RNF kennengelernt. Wir haben außerdem die mit verschiedenen Verlaufsformen der RNF verbundenen Implikationen erörtert. Offen ist jedoch noch die Frage, inwieweit dieses Entscheidungsprinzip als **rational** angesehen werden kann.

axiomatische Betrachtungsweise

Zur Rationalitätsanalyse des BERNOULLI-Prinzips wollen wir uns wieder einer **axiomatischen Betrachtungsweise** bedienen. Als Axiome bezeichnet man a priori gesetzte Postulate, die nicht weiter abgeleitet oder bewiesen werden können, sondern autonom (mehr oder weniger willkürlich) vorgegeben werden. Dabei geht man bei der axiomatischen Analyse von Entscheidungsprinzipien in aller Regel allerdings doch nicht so ganz willkürlich vor, sondern bemüht sich, solche Postulate als Axiome zu formulieren, die möglichst allgemein als plausible Voraussetzungen rationalen Entscheidungsverhaltens akzeptiert werden.

Auf der Basis der so vorgegebenen Axiome sollen dann weitere Aussagen über bestimmte Sachverhalte abgeleitet werden – und zwar so, dass diese Aussagen zwingend aus den Axiomen folgen. Wer die Axiome (einschließlich denen des logischen Schließens) akzeptiert, muss somit zwangsläufig auch das aus ihnen abgeleitete Aussagensystem akzeptieren. Ein bestimmter Satz von Axiomen kann insoweit als der Nucleus des gesamten darauf aufgebauten Aussagensystems angesehen werden. So sind ja auch die meisten der Ihnen bekannten mathematischen „Gesetze" nichts anderes als die Folgerungen aus einer relativ kleinen Zahl von Grundaxiomen.

Für unser hier anstehendes Problem gilt es, ein möglichst plausibles und zugleich einfaches Axiomensystem zu finden, aus dem ein geschlossenes präskriptives Entscheidungskonzept abgeleitet werden kann. Im Laufe der letzten drei Jahrzehnte sind nun verschiedene Axiomensysteme entwickelt worden, als deren Konsequenz sich jeweils zwingend das BERNOULLI-Prinzip ergibt.[1] Wir werden im Folgenden allerdings nur eines – vielleicht jedoch das eingängigste – dieser Axiomensysteme etwas näher behandeln.

1 Vgl. etwa SCHNEEWEISS (1967), S. 73–77 mit weiteren Literaturhinweisen.

2.4.2 Vier Axiome des BERNOULLI-Prinzips

Ein Satz von Axiomen, die das BERNOULLI-Prinzip impliziert, ist folgender:

(1) **Ordinalprinzip**

Ordinalprinzip

Es wird gefordert, dass eine rationale Entscheidungsregel die zur Auswahl stehenden Alternativen ordinal ordnet, d.h. nach ihrer Vorziehenswürdigkeit in eine eindeutige Rangordnung bringt. Dieses Axiom impliziert im einzelnen zweierlei, nämlich:

– **Vergleichbarkeit:** Für zwei Alternativen a_1, a_2 soll stets genau eine der Präferenzrelationen $a_1 \succ a_2, a_2 \succ a_1$ oder $a_2 \sim a_1$ erfüllt sein, was voraussetzt, dass die beiden Alternativen grundsätzlich als vergleichbar anzusehen sind.

– **Transitivität:** Sind drei Alternativen a_1, a_2, a_3 gegeben, für die $a_1 \succsim a_2$ und $a_2 \succsim a_3$ gilt, so soll daraus auch zwingend $a_1 \succsim a_3$ folgen.

(2) **Dominanzprinzip**

Dominanzprinzip

Stehen zwei Alternativen in Form einfacher Chancen

– $a_1 \equiv (e'; p_1; e'')$,
d.h. die Möglichkeit, mit der Wahrscheinlichkeit p_1 das Ergebnis e' und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $(1-p_1)$ das (schlechtere) Ergebnis $e''(e' > e'')$ zu erzielen, und

– $a_2 \equiv (e'; p_2; e'')$
mit entsprechender Bedeutung

zur Auswahl, so soll für $p_1 > p_2$ zwingend auch $a_1 \succ a_2$ gelten, was nichts anderes als die Geltung des Prinzips der Wahrscheinlichkeitsdominanz verlangt.

(3) **Stetigkeitsprinzip**

Stetigkeitsprinzip

Stehen eine sichere Alternative mit dem eindeutigen Ergebnis $\bar{e}$ und eine einfache Chance in Form $(e'; p'; e'')$ zur Auswahl und gilt $e' > \bar{e} > e''$, so soll sich bei stetiger Variation der Erfolgswahrscheinlichkeit p' stets ein kritischer Wert $p^*\ (0 < p^* < 1)$ finden lassen, für den einfache Chance und sichere Alternative gerade als gleichwertig angesehen werden, also

$$(33.1) \quad (e'; p^*; e'') \sim \bar{e}$$

gilt.

Nehmen wir also etwa die Werte $e' = 100$, $e'' = 0$ und $\bar{e} = 50$ an, so verlangt dieses Axiom, dass es einen Wahrscheinlichkeitswert p^* gibt, für den die einfache Chance $(100; p^*; 0)$ gerade als ebenso gut wie ein sicheres Einkommen von 50 bewertet wird.

Im Zusammenhang mit der Ermittlung der RNF (Abschnitt 2.2) haben wir derartige kritische Wahrscheinlichkeitswerte ja bereits kennengelernt.

Substitutionsprinzip

(4) **Substitutionsprinzip**

Dieses gelegentlich auch als Unabhängigkeitsprinzip bezeichnete Axiom bezieht sich auf die Bewertung von **zusammengesetzten Wahrscheinlichkeitsverteilungen.** Was darunter zu verstehen ist, kann wie folgt erläutert werden:

Gegeben seien zwei Lotterielose mit Wahrscheinlichkeitsverteilungen E_1 und E_2. Statt sich direkt für eines der beiden Lose zu entscheiden, wäre es nun auch möglich, die Auswahl selbst einem Zufallsprozess zu überlassen, der mit der Wahrscheinlichkeit π_1 zur Wahl von E_1 und entsprechend mit der Gegenwahrscheinlichkeit $\pi_2 = (1 - \pi_1)$ zu E_2 führt.

Wir erhalten so einen zweistufigen Zufallsprozess (erste Stufe: Loswahl; zweite Stufe: Auslosung), dessen Ergebnisse durch die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeitsverteilung $\hat{E} \equiv (E_1; \pi_1; E_2)$ beschrieben werden.

Beispiel 20:
Zur beispielhaften Verdeutlichung seien folgende Wahrscheinlichkeitsverteilungen E_1 und E_2 betrachtet:

E_1

e	10	20
p	0,8	0,2

E_2

e	0	10	30
p	0,3	0,4	0,3

Hängt die Auswahl zwischen E_1 und E_2 nun noch einmal von einem Zufallsexperiment ab, durch das mit 60%iger Wahrscheinlichkeit E_1 bestimmt wird (also $\pi_1 = 0{,}6$ und $\pi_2 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$) so ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung der „Mischung“ $\hat{E}$ wie folgt zu ermitteln:

(1) Als mögliche Ergebnisse $\hat{e}$ kommen die Beträge 0; 10; 20 und 30 in Betracht.

(2) $\hat{e} = 0$ setzt voraus, dass E_2 bestimmt wird, was zu 40% wahrscheinlich ist (da $\pi_2 = 0{,}4$). Wird E_2 tatsächlich gewählt, so beträgt die Wahrscheinlichkeit für ein Ergebnis von 0 genau 30% (da $p(e_2 = 0) = 0{,}3$). Die Wahrscheinlichkeit für $\hat{e} = 0$ ergibt sich nun einfach als Produkt dieser beiden Wahrscheinlichkeiten, also:

$$p(\hat{e}=0) \;=\; \pi_2 \cdot p(e_2=0) \;=\; 0{,}4 \cdot 0{,}3 \;=\; 0{,}12 \;.$$

$\hat{e}=10$ kann sich sowohl auf dem Weg über E_1 als auch auf dem Weg über E_2 ergeben. Die Wahrscheinlichkeit für den ersten Fall beträgt $\pi_1 \cdot p(e_1=10)=0{,}6 \cdot 0{,}8=0{,}48$, die für den zweiten Fall $\pi_2 \cdot p(e_2=10)=0{,}4 \cdot 0{,}4=0{,}16$. Die Wahrscheinlichkeit, dass es auf die eine oder andere Weise zu einem Ergebnis von 10 kommt, beträgt somit:

$$\begin{aligned} p(\hat{e}=10) \;&=\; \pi_1 \cdot p(e_1=10) \;+\; \pi_2 \cdot p(e_2=10) \\ &=\; 0{,}6 \cdot 0{,}8 \;+\; 0{,}4 \cdot 0{,}4 \;=\; 0{,}64 \;. \end{aligned}$$

$\hat{e}=20$ kann nur bei Bestimmung von E_1 eintreten, also gilt:

$$p(\hat{e}=20) \;=\; \pi_1 \cdot p(e_1=20) \;=\; 0{,}6 \cdot 0{,}2 \;=\; 0{,}12 \;.$$

$\hat{e}=30$ schließlich ist nur über die Auswahl von E_2 möglich, also:

$$p(\hat{e}=30) \;=\; \pi_2 \cdot p(e_2=30) \;=\; 0{,}4 \cdot 0{,}3 \;=\; 0{,}12 \;.$$

(3) Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der „Mischung“ $\hat{E}$ lautet somit insgesamt:

$\hat{E}$

e	0	10	20	30
p	0,12	0,64	0,12	0,12

Das Substitutionsprinzip verlangt nun, dass zwei zusammengesetzte Verteilungen $\hat{E}_1$ und $\hat{E}_2$, die sich jeweils aus der Kombination von einer der zwei Verteilungen E_1 und E_2 mit einer beliebigen dritten Verteilung E_3 ergeben, stets in genau der gleichen Präferenzbeziehung stehen wie die Ausgangsverteilungen E_1 und E_2.

Es soll also gelten:

(33.2) $$E_1 \succ E_2 \;\leftrightarrow\; \hat{E}_1 \succ \hat{E}_2 \quad \text{und}$$

$$E_1 \sim E_2 \;\leftrightarrow\; \hat{E}_1 \sim \hat{E}_2 \,, \quad \text{wenn}$$

$$\hat{E}_1 \;\equiv\; (E_1; \pi; E_3) \quad \text{und} \quad \hat{E}_2 \;\equiv\; (E_2; \pi; E_3) \;,$$

wobei die „Mischwahrscheinlichkeit“ π innerhalb $0<\pi<1$ und E_3 völlig beliebig gewählt werden kann.[1]

Der in (33.2) ausgedrückte Grundgedanke kann auch noch auf etwas andere Weise formuliert werden, indem man verlangt, dass zwischen einer aus zwei Verteilungen E_1, E_2 ($E_1 \succsim E_2$) zusammengesetzten Verteilung $\hat{E}$ und den Ausgangsverteilungen entweder

$$(33.3) \qquad E_1 \succ \hat{E} \succ E_2 \quad \text{oder}$$

$$E_1 \sim \hat{E} \sim E_2$$

gelten soll, wobei $\hat{E} \equiv (E_1; \pi; E_2)$ und $0<\pi<1$.[2]

Beispiel 21:

Angenommen, ein guter Onkel von Ihnen besitzt einen Lottoschein (E_1), einen Totoschein (E_2) und ein Lotterielos (E_3), von denen er Ihnen eines schenken will. Die Auswahl des Geschenkes will er Ihnen jedoch nicht völlig überlassen, vielmehr schlägt er Ihnen folgendes Spielchen vor:

- Entweder wird ein **roter** Würfel geworfen, mit der Maßgabe, dass Sie bei einer 1 oder 2 das Lotterielos, ansonsten den **Lottoschein** erhalten,
- oder es wird ein **weißer** Würfel geworfen, mit der Maßgabe, dass Sie bei einer 1 oder 2 wiederum das Lotterielos, ansonsten aber den **Totoschein** erhalten.

Mit welchem Würfel geworfen wird, können jedoch Sie bestimmen.

Das Substitutionsprinzip in der durch (33.2) umschriebenen Form verlangt folgendes: Wenn Ihnen der **Lottoschein** isoliert betrachtet lieber ist als der **Totoschein,** so muss Ihnen zwingend auch der **rote** Würfel lieber sein als der **weiße**. Ziehen Sie umgekehrt an sich den **Totoschein** vor, so müssen Sie auch zwingend den **weißen** Würfel vorziehen. Und wenn Ihnen Toto- und Lottoschein gerade als gleichwertig erscheinen, so müsste Ihnen die Wahl des Würfels auch gerade gleichgültig sein.

In entsprechender Weise verlangt das Substitutionsprinzip gem. (33.3) folgendes: Ist Ihnen der Lottoschein lieber als das Lotterielos, so muss Ihnen der Wurf mit dem roten Würfel einerseits angenehmer als das direkte Geschenk des Lotterieloses, andererseits jedoch weniger gut als die unmittelbare Erlangung des Lottoscheines erscheinen. Wären Ihnen hingegen Lotterielos

---

1 Dieses Axiom hat sehr starke Ähnlichkeit mit dem aus der Mathematik bekannten „Gesetz“, dass für drei beliebige Zahlen a, b, c aus $a>b$ auch $(a+c)>(b+c)$ folgt. (Sog. Monotoniegesetz der Addition als eines der grundlegenden Axiome der Arithmetik).

2 In dieser Variante entspricht das Substitutionsprinzip in etwa dem mathematischen Gesetz, dass für zwei beliebige Zahlen a, b aus $a>b$ auch $a>0{,}5(a+b)>b$ folgen muss.

und Lottoschein gerade gleich lieb, so müssten Sie den Wurf mit dem roten Würfel ebenfalls als gleichwertig ansehen.

Um mit dem Inhalt des Substitutionsprinzips noch etwas näher vertraut zu werden, empfehlen wir Ihnen, die Aufgaben 4.38 und 4.39 in BITZ/EWERT (2011) zu bearbeiten und die angegebene Musterlösung gründlich zu studieren.

Übungshinweis

Akzeptiert man diese vier Axiome, denen allen eine gewisse Plausibilität wohl kaum abgesprochen werden kann, als Ausdruck rationalen Verhaltens in Risikosituationen (und werden zudem die „Gesetze" logischen Schließens anerkannt), so ergibt sich daraus zwingend, dass eine rationale Bewertung verschiedener unsicherer Alternativen genau dem BERNOULLI-Prinzip entsprechend vorgenommen werden muss.[1)]

Verträglichkeit der BERNOULLI-Befragung mit den vier Axiomen:

Dass eine RNF, die nach dem in Abschnitt 2.2 beschriebenen Verfahren der BERNOULLI-Befragung gewonnen wird, und eine darauf aufbauende Entscheidung diesen vier Axiomen entsprechen, kann wie folgt gezeigt werden:

Ordinalprinzip

– Da jeder Alternative a_i genau ein Präferenzwert $\varphi(a_i)$ zugeordnet wird und höhere Präferenzwerte niedrigeren vorgezogen werden, ist das **Ordinalprinzip** erfüllt.

– Gilt für zwei Ergebniswerte $e' > e''$, so gilt stets $u(e') > u(e'')$. Werden nun die beiden einfachen Chancen $a_1 \equiv (e'; p_1; e'')$ und $a_2 \equiv (e'; p_2; e'')$ betrachtet, so gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a_i) &= p_i \cdot u(e') + (1 - p_i) \cdot u(e'') \qquad i = 1, 2 \\ &= p_i \cdot [u(e') - u(e'')] + u(e'') \ . \end{aligned}$$

Aus $p_1 > p_2$ folgt somit zwingend $\varphi(a_1) > \varphi(a_2)$ und somit auch $a_1 \succ a_2$. Das **Dominanzprinzip** wird also ebenfalls erfüllt.

Dominanzprinzip

Stetigkeitsprinzip

– Das **Stetigkeitsprinzip** ist ebenfalls erfüllt, da die Ableitung der RNF die Erfüllung dieses Axioms voraussetzt. Andernfalls wäre ja gar nicht gesichert, dass die kritischen Erfolgswahrscheinlichkeiten $p^*(\overline{e})$ – vgl. Schritt (3) in Abschnitt 2.2 – überhaupt bestimmt werden können.

Substitutionsprinzip

– Kann eine Alternative a_3 als zufallsabhängige „Mischung" zweier Grundalternativen a_1 und a_2 angesehen werden (mit den „Mischwahrscheinlich-

1 Zur Skizze eines Beweises vgl. SCHNEEWEISS (1967), S. 76 f.

keiten“ π_1 und $\pi_2 = 1 - \pi_1$), so gilt zunächst für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass a_3 zu einem bestimmten Ergebniswert e' führt:

$$p(e_3 = e') \;=\; \pi_1 \cdot p(e_1 = e') + (1 - \pi_1) \cdot p(e_2 = e') \;.$$

Bezeichnet man nun weiter die Menge aller bei a_1 oder a_2 möglichen Ergebnisse mit E, so gilt für den nach dem BERNOULLI-Prinzip ermittelten Präferenzwert von a_3:

$$\begin{aligned}
\varphi(a_3) &= \sum_{e' \in E} u(e') \cdot p(e_3 = e') \\
&= \sum_{e' \in E} u(e') \cdot \left[\pi_1 \cdot p(e_1 = e') + (1 - \pi_1) \cdot p(e_2 = e')\right] \\
&= \pi_1 \cdot \sum_{e' \in E} u(e') \cdot p(e_1 = e') + (1 - \pi_1) \cdot \sum_{e' \in E} u(e') \cdot p(e_2 = e') \\
&= \pi_1 \cdot \varphi(a_1) + (1 - \pi_1) \cdot \varphi(a_2) \;.
\end{aligned}$$

Der Präferenzwert einer „gemischten“ Alternative ergibt sich also stets als der mit den „Mischwahrscheinlichkeiten“ gewichtete Durchschnitt der Präferenzwerte der beiden Grundalternativen. Damit aber ist gesichert, dass die Relationen (33.2) und (33.3) stets gewahrt sind. Also ist auch das **Substitutionsprinzip** erfüllt.

Die Plausibilität des BERNOULLI-Prinzips steht und fällt also mit der Plausibilität dieser Axiome. Wir wollen daher im folgenden Unterabschnitt die vier Axiome und einige mit ihnen verbundene Implikationen noch etwas eingehender überprüfen.

2.4.3 Zur Plausibilität der Axiome (1) bis (3)

Ordinalprinzip

(1) Das **Ordinalprinzip** wird auch in der Literatur soweit ersichtlich durchweg als unabdingbare Voraussetzung für rationales Handeln angesehen. Die daraus ableitbare Forderung nach Transitivität der Präferenzordnung stößt allerdings auf das Problem der **Fühlbarkeitsschwellen.**[1] Dazu folgendes, in der Literatur häufig gebrauchtes Beispiel:

Fühlbarkeitsschwellen

Beispiel 22:

Auf einer Party wird ein Gast vor die Wahl zwischen Whisky (W) oder Cognac (C) gestellt und er erklärt, man möge nur eingießen – was, sei ihm gleich. Auf die weitere Frage, ob statt Cognac (C) vielleicht auch ein Steinhäger (S) recht sei, wird die gleiche Antwort gegeben. Als der Gastgeber unserem Gast daraufhin eine Whisky- und eine Steinhägerflasche mit der Bitte hinstellt, sich selbst zu bedienen, greift der Gast ohne zu zögern zur Whiskyflasche – denn, so sagt er, Whisky sei ihm lieber als Steinhäger.

Formal können diese drei Präferenzangaben durch die Relationen

$$W \sim C, \qquad C \sim S \qquad \text{und} \qquad W \succ S$$

dargestellt werden, die offenbar dem Transitivitätsprinzip widersprechen.

Als eine mögliche Erklärung für ein solches Verhalten wird angeführt, der Präferenzunterschied zwischen W und C ($W \succ C$) sei so gering, dass der Entscheidende einen Unterschied gar nicht wahrnehme. Ebenso läge auch der Präferenzunterschied zwischen C und S ($C \succ S$) unterhalb der Fühlbarkeitsschwelle. Würden nun aber W und S verglichen, so würden sich die je einzeln gar nicht wahrgenommenen Präferenzunterschiede soweit addieren, dass sie in ihrer Summe nun doch die Fühlbarkeitsschwelle übersteigen.

Ähnliche Probleme können natürlich auch bei der Beurteilung von Wahrscheinlichkeitsverteilungen auftauchen. Dennoch erscheint es als plausibel, das Ordinalprinzip als Grundforderung rationalen Entscheidungsverhaltens zu akzeptieren, da es hier ja zunächst um die Entwicklung eines **präskriptiven Idealkonzepts** geht, das im Hinblick auf die Ausgestaltung tatsächlicher Entscheidungsprozesse in erster Linie als richtungsweisende Orientierungsgröße und weniger als in allen Details auch wirklich zu realisierendes Verfahren anzusehen ist (**„Polarsternfunktion“**).

präskriptives Idealkonzept

Dominanzprinzip

1 Der Begriff der „Fühlbarkeitsschwellen“ wurde, soweit wir sehen, im deutschsprachigen Schrifttum zuerst durch KRELLE (1968) eingeführt. Wegen weiterer Literaturhinweise vgl. KRELLE (1968), S. 21–24.

(2) Auch das **Dominanzprinzip** wird im Allgemeinen in seiner Plausibilität kaum bestritten. Wir sind auf diesen Punkt ja bereits im Abschnitt 2.2.1 der Kurseinheit 3 kurz eingegangen.

Beispiel 23: Bergsteiger-Beispiel

Auch das von SCHNEEWEISS (1967), S. 74, Anm. 2, nach MARSCHAK (1950) zitierte Bergsteiger-Beispiel – lesen Sie die angegebene Stelle bitte nach – vermag die Plausibilität dieses Axioms nicht wirklich zu widerlegen, da der in diesem Beispiel angesprochene Vergleich unvollständig ist.[1] Statt des einfachen x (= „Leben") sind nämlich genauer zwei verschiedene Leben zu unterscheiden; x_1 (= „mit Sicherheit langweiliges Leben ohne Bergsteigen") und x_2 (= „mit Sicherheit aufregendes, erfülltes Leben mit Bergsteigen und allem damit verbundenen Hochgefühl, jedoch ohne Absturz"). Gegenüber der Variablen y (= „Tod") herrscht nun sicher die Präferenzfolge

$$x_2 \succ x_1 \succ y \; .$$

Nur ist ein 100%iges x_2 gar nicht realisierbar, sondern stets nur die Alternative $(x_2; p; y)$. Wenn diese (bei hinlänglich großem p) dem sicheren x_1 vorgezogen wird, so stellt das aber keineswegs einen Verstoß gegen das Dominanzprinzip dar.

Erst recht geht der von KOCH (1974), S. 195, 200 vorgetragene Einwand fehl, über das Dominanzaxiom setze das BERNOULLI-Prinzip bereits axiomatisch **risikoscheues** Entscheidungsverhalten voraus. Wie wir gesehen haben, schließt die Beachtung des Dominanzprinzips risikoneutrale oder -freudige Entscheidungen keineswegs aus.

Stetigkeitsprinzip

(3) Etwas kritischer verhält es sich schon mit dem **Stetigkeitsprinzip.** Dazu folgendes Beispiel:

Beispiel 24:

Betrachten wir die sichere Alternative ($\bar{e} = 5$) und die einfache Chance (7; p; 0) und nehmen wir an, die Ergebnisse seien in Millionen GE angegeben. Gilt nun als Grenzfall $p = 1$, so wird wohl jeder die (degenerierte) einfache Chance vorziehen, da ihm sieben Millionen lieber sind als fünf Millionen, also:

$$(7; p; 0) \succ (\bar{e} = 5) \quad \text{für} \quad p = 1 \; .$$

1 Zu dem angesprochenen Bergsteiger-Beispiel vgl. auch LUCE/RAIFFA (1989), S. 28.

Wird nun aber für p ein geringerer Wert als 1 angesetzt, besteht also bei der einfachen Chance auch nur die geringste Gefahr, ganz leer auszugehen – und sei es mit noch so geringer Wahrscheinlichkeit –, so kann es wohl kaum als eindeutig unvernünftig angesehen werden, wenn dann das sichere Einkommen von „nur“ 5 Millionen GE auf jeden Fall vorgezogen wird, also

$$(7; p; 0) \prec (\bar{e} = 5) \quad \text{für} \quad 0 \le p < 1$$

gilt.

Bei einer solchen Einstellung wäre es aber nicht möglich, einen kritischen Wahrscheinlichkeitswert p* zu bestimmen, bei dem das sichere Einkommen von fünf Millionen GE und einfache Chance gerade als gleichwertig angesehen werden, also gem. (33.1)

$$(7; p^*; 0) \sim (\bar{e} = 5)$$

gilt.

In dem geschilderten Beispielsfall wäre das Stetigkeitsprinzip also nicht erfüllt, ohne dass das zugrundegelegte Verhalten so ohne weiteres als völlig unvernünftig abqualifiziert werden könnte.[1] Von daher sind also durchaus gewisse Zweifel daran berechtigt, ob jede Entscheidungsregel, die im Widerspruch zu diesem Axiom steht, wirklich als nicht-rational anzusehen ist.

Andererseits muss natürlich gesehen werden, dass unser Beispiel doch recht unrealistisch war. In praxi werden Sie wohl kaum in derartige Entscheidungssituationen geraten. (Falls doch: herzlichen Glückwunsch!). Für weniger extreme Entscheidungsprobleme erscheint das Stetigkeitsprinzip jedoch eher plausibel. Wenn man dementsprechend den Rationalitätsanspruch dieses Axioms und damit auch den des BERNOULLI-Prinzips – einigermaßen unscharf – auf eine Klasse von Entscheidungssituationen mit Ergebnissen „normaler“ Größenordnung beschränkt, so erscheint es uns (insbesondere im Hinblick auf die „Polarsternfunktion“) doch sinnvoll, von einem als rational anzusehenden Entscheidungskonzept die Erfüllung des Stetigkeitsprinzips zu verlangen.

1 Dieses einfache Beispiel zeigt im übrigen auch, dass es, um gewisse Zweifel an der absoluten Plausibilität des Stetigkeitsprinzips zu wecken, gar nicht nötig ist, so extreme Alternativen wie „Sicherer Tod“ in die Betrachtung einzubeziehen, wie dies LUCE/RAIFFA (1989), S. 27 tun.

2.4.4 Zur Diskussion um das Substitutionsprinzip

Die weitaus heftigste Diskussion hat Axiom (4), das Substitutionsprinzip, ausgelöst.[1] Deshalb wollen wir dieses Problem hier auch unter einem gesonderten Gliederungspunkt behandeln.

Komplementaritäts-effekte

Die Diskussion um das Substitutionsprinzip entzündet sich daran, dass dieses Axiom in gewisser Weise impliziert, dass das Ganze stets genau die Summe seiner Teile sein müsse. Gerade in der Ökonomie wie auch in anderen Bereichen finden sich jedoch häufig Beispiele dafür, dass aus der Zusammenfügung zweier „Faktoren“ weit mehr an Effekt resultiert als die Summe dessen, was die beiden Faktoren je einzeln zu leisten vermögen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **Komplementaritätseffekten** oder **Synergieeffekten,** die aus der Kombination bestimmter Faktoren resultieren. Zur Verdeutlichung mögen folgende Beispiele dienen:

Beispiel 25:

(1) Zur Räumung eines Möbellagers stehen ein kräftiger Arbeiter (A) und ein schwacher Arbeiter (B) zur Auswahl. Steht nun wirklich nur genau einer dieser beiden für einen Arbeitstag zur Verfügung, so schafft A mehr. Also gilt:

$$A \succ B .$$

Eine erheblich größere Leistung ist jedoch zu erwarten, wenn beide Arbeiter gemeinsam räumen, und sei es auch nur für einen halben Tag, also:

$$\left(\frac{1}{2}A \;\&\; \frac{1}{2}B\right) \succ A \succ B ,$$

was der Struktur nach der durch (33.3) ausgedrückten Variante des Substitutionsprinzips natürlich widerspricht.

(2) Ein Feinschmecker schätzt eine reichliche Portion Hummer (H) gerade so hoch ein wie ein kräftiges Wildschweinsteak (W), also

$$H \sim W .$$

Weist nun aber die Weinkarte des von unserem Feinschmecker besuchten Restaurants auf Grund eines Lieferausfalls nur noch äußerst schwere Rotweine (R) auf, so zieht er das Wildschweinsteak natürlich eindeutig vor, also:

$$(W \& R) \succ (H \& R) ,$$

1 Vgl. hierzu z.B.: SAMUELSON (1952); ALLAIS (1953); MARKOWITZ (1967), S. 218–224; SCHNEEWEISS (1967), S. 77–84 mit weiteren Literaturangaben.

wäre andererseits der Rotwein ausgegangen und nur noch ein trockener Chablis (C) verfügbar, so würde unser Gourmet natürlich nun den Hummer vorziehen, also

$$(H \,\&\, C) \succ (W \,\&\, C) \; .$$

Diese Relationen würden – auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen – ebenfalls dem Substitutionsprinzip widersprechen.

Immer dann, wenn aus der Kombination zweier Faktoren ein besonderer Komplementaritätseffekt resultiert – so wie in unserem Beispiel auf Grund der Arbeitsteilung oder wegen geschmacklicher Harmonien –, ist es denkbar, dass

– die Mischung zweier Faktoren höher bewertet wird als die Einzelfaktoren oder

– die Einzelfaktoren in einer anderen Präferenzrelation stehen als die korrespondierenden Mischungen mit einem in beiden Fällen identischen dritten Faktor.

Nun können die aufgeführten Beispiele natürlich nicht so ohne weiteres auf unser Problem der Bewertung einfacher und zusammengesetzter Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen werden, da sie sich ja stets auf Entscheidungen bei Sicherheit bezogen. Es fragt sich also, ob – entgegen der Forderung des Substitutionsprinzips – ein als rational anzusehendes Entscheidungskonzept nicht sinnvollerweise zulassen müsste, dass auch bei der Bewertung zusammengesetzter Wahrscheinlichkeitsverteilungen ähnliche Komplementaritätseffekte auftreten können.

In der Tat lassen sich ohne allzu große Schwierigkeiten Entscheidungsprobleme konstruieren, in denen eine Vielzahl normalerweise recht vernünftig handelnder Personen zu Entscheidungen gelangen, die mit dem Substitutionsprinzip nicht in Einklang zu bringen sind.[1)]

1 Vgl. hierzu vor allem ALLAIS (1953).

Beispiel 26:
In Situation A stehen drei Alternativen a_1, a_2, a_3 mit folgenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen (Ergebnisse in GE) zur Auswahl:

e	0	1.000	0	100	1.000	0	100
p	0,99	0,01	0,945	0,05	0,005	0,9	0,1
	E_1		E_2			E_3	

Bei näherer Analyse erkennt man nun leicht, dass

$$E_2 \equiv (E_1; 0{,}5; E_3)$$

gilt, d.h. Alternative a_2 erhielte man etwa, wenn die Wahl zwischen a_1 und a_3 einem 50:50-Münzwurf überlassen bliebe.

Je nachdem, in welcher Präferenzrelation die Grundalternativen a_1 und a_3 stehen, sind somit nur Präferenzrelationen mit dem Substitutionsprinzip gem. (33.3) vereinbar, also:

(a) $a_1 \sim a_2 \sim a_3$, wenn $a_1 \sim a_3$;

(b) $a_1 \succ a_2 \succ a_3$, wenn $a_1 \succ a_3$;

(c) $a_3 \succ a_2 \succ a_1$, wenn $a_3 \succ a_1$.

Wir kennen zwar ihre Antworten nicht. Nach allen Erfahrungen[1)] ist jedoch anzunehmen, dass eine nennenswerte Zahl von Ihnen eine andere Präferenzrelation angegeben hätte.

deskriptive Ebene

Nun ist die Tatsache, dass sich ohne besondere Schwierigkeiten Entscheidungsprobleme konstruieren lassen, in denen sich eine Vielzahl von Personen in Widerspruch zum Substitutionsprinzip setzt, zunächst rein **deskriptiver** Natur. Der Befund könnte also einfach mit dem Hinweis abgetan werden, in etwas unübersichtlichen Situationen sei im Sinne des BERNOULLI-Prinzips rationales Entschei-

1 Der Verfasser dieses Studienbriefes hat einen ähnlichen Test im Wintersemester 1975/76 im Rahmen einer Lehrveranstaltung zur Entscheidungstheorie an der Saarbrücker Universität durchgeführt: Damals waren nur 28% der abgegebenen Entscheidungen mit dem Substitutionsprinzip vereinbar. Im Studienjahr 1976/77 wurde ein entsprechender Test auch mit den Teilnehmern des Kurses „Entscheidungstheorie“ an der FernUniversität durchgeführt. Bei diesem Test waren allerdings 70% der gegebenen Antworten mit dem Substitutionsprinzip vereinbar. Es kann jedoch nicht ausgeschlossen werden, dass das Ergebnis dieses Tests dadurch verfälscht wurde, dass die Teilnehmer die Erörterungen über das Substitutionsaxiom bereits zur Kenntnis genommen hatten und deshalb nicht mehr ganz unbefangen antworteten.

dungsverhalten eben gar nicht so einfach. Mithin verhielten sich viele Personen auch in diesem Sinne nicht rational – jedoch weniger aus bewusstem Vorsatz als aus schlichtem Irrtum. So wird in der Literatur auch darauf hingewiesen,[1)]

– dass viele Personen sich zwar zunächst in einer mit dem Substitutionsprinzip nicht vereinbaren Weise entscheiden (auf unser Beispiel übertragen also nicht eine der in diesem Sinne allein zulässigen Präferenzrelationen (a), (b) oder (c) angeben),

– jedoch bereit sind, ihre ursprüngliche Entscheidung zu korrigieren, wenn man sie auf die zwischen den einzelnen Alternativen bestehenden Zusammenhänge aufmerksam macht (sie also etwa darauf hinweist, dass Alternative a_2 unseres Beispiels nichts anderes darstellt als eine 50 : 50-Zufallsauswahl zwischen den beiden Grundalternativen a_1 und a_3).

Subjektivität des Rationalitätsbegriffes

Nach der Lektüre der in Kurseinheit 5 dieses Kurses folgenden Ausführungen zur grundlegenden Subjektivität des Rationalitätsbegriffs wird Ihnen wahrscheinlich erst wirklich klar werden, dass auch mit noch so vielen Beispielen der einen oder der anderen Art die Sinnhaftigkeit des Substitutionsaxioms weder bewiesen noch widerlegt werden kann. Wir wollen daher auch auf eine Fortführung der Diskussion um die Plausibilität dieses Axioms verzichten und für den Rest dieses Studienbriefes die Vereinbarung treffen, Entscheidungsprinzipien für Risikosituationen nur noch insoweit als **rational** zu bezeichnen, wie sie

– als spezielle Ausprägung des BERNOULLI-Prinzips – also als Maximierung des erwarteten Risiko-Nutzens – interpretiert werden können

– und dabei eine monoton steigende Risiko-Nutzen-Funktion implizieren.

Die Problematik einer solchen Festlegung dürfte Ihnen durch die vorangegangenen Ausführungen wohl hinlänglich klar geworden sein. Dennoch erscheint uns dieser Schritt aus pragmatischen Gründen allein schon deshalb vertretbar, weil es bei aller Kritik am BERNOULLI-Prinzip noch nicht gelungen ist, ein anderes Entscheidungskonzept zu entwickeln, das auch nur annähernd in seinen Grundannahmen so einfach und in seiner Gesamtheit so plausibel erscheint wie eben das BERNOULLI-Prinzip.

1 So z.B. MARKOWITZ (1967), S. 218 ff.; SCHNEEWEISS (1967), S. 79 f.

2.5 Zur Rationalität klassischer Entscheidungsprinzipien

Definiert man nun die Rationalität von Entscheidungsprinzipien, so wie wir es am Ende des vorangegangenen Abschnitts 2.4 getan haben, im Hinblick auf deren Verträglichkeit mit dem BERNOULLI-Prinzip,[1] so stellt sich nach den vorangegangenen Ausführungen in diesem Kapitel natürlich die Frage, in welcher Relation die klassischen Entscheidungsprinzipien, die wir im Kapitel 1 kennengelernt haben, zu diesem Rationalitätsprinzip stehen. Es ist also zu untersuchen,

– ob sie im Sinne des BERNOULLI-Prinzips als rational, also als spezielle Ausprägung der Entscheidungsregel (27) angesehen werden können und,

– wenn ja, welchen Verlauf der entsprechenden RNF $u(e)$ sie implizieren.

Nachweis der Unverträglichkeit

Im Zuge einer entsprechenden Rationalitätsanalyse reicht es zum Nachweis der allgemeinen **Unverträglichkeit** eines klassischen Entscheidungsprinzips mit dem BERNOULLI-Prinzip schon aus, ein Beispiel zu finden, für das sich aus dem betrachteten klassischen Prinzip eine Entscheidung ergibt, die zumindest mit einem der für das BERNOULLI-Prinzip konstitutiven Axiome nicht vereinbar ist. Umgekehrt lässt sich die durchgängige **Verträglichkeit** nachweisen, indem man für eine bestimmte Verlaufsform der RNF $u(e)$ zeigt, dass der für das BERNOULLI-Prinzip maßgebliche Präferenzausdruck $\Sigma u(e_{ij}) \cdot p_j$ zu dem entsprechenden Präferenzausdruck des betrachteten klassischen Prinzips umgeformt werden kann.

Nachweis der Verträglichkeit

Zur beispielhaften Verdeutlichung dieser Vorgehensweise wollen wir einige der Ihnen schon bekannten klassischen Entscheidungsprinzipien einer entsprechenden Rationalitätsanalyse unterziehen.

μ-Prinzip

(1) μ-Prinzip

Wir haben bereits im Abschnitt 2.3 unter Punkt (3) gesehen, dass das BERNOULLI-Prinzip genau dann, wenn man eine lineare RNF von der Form

lineare Nutzenfunktion

$$u = \alpha + \beta \cdot e \qquad (\beta > 0)$$

zugrundelegt, mit dem μ-Prinzip übereinstimmt.

---

1 Demnach sollen Entscheidungsprinzipien für Risikosituationen nur noch insoweit als rational bezeichnet werden, wie sie

– als spezielle Ausprägung des BERNOULLI-Prinzips – also als Maximierung des erwarteten Risiko-Nutzens – interpretiert werden können

– und dabei eine monoton steigende Risiko-Nutzen-Funktion implizieren.

Mithin ist das reine μ-Prinzip durchaus als rational im Sinne des BERNOULLI-Prinzips anzusehen. Allerdings impliziert das μ-Prinzip dann zwingend einen **linearen Verlauf** der RNF, also durchweg **risikoneutrales Verhalten.**

(2) μ-σ-Prinzip

μ-σ-Prinzip

Betrachten wir eine RNF von der quadratischen Form

quadratische Nutzenfunktion

$$(34) \qquad u = e - \gamma \cdot e^2 \qquad (\gamma > 0) \ .$$

Wird diese RNF dem BERNOULLI-Prinzip zugrundegelegt, so gilt für den Präferenzwert $\varphi(a_i)$ einer Alternative a_i allgemein:

$$(35.1) \quad \varphi(a_i) = \sum_{j=1}^{n} (e_{ij} - \gamma \cdot e_{ij}^2) \cdot p_j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j - \gamma \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 \cdot p_j \ .$$

Um die Beziehung zwischen der RNF gem. (34) und dem μ-σ-Prinzip weiter analysieren zu können, lösen wir den zuletzt abgeleiteten Ausdruck weiter auf. Für den *ersten* Summenausdruck gilt bekanntlich

$$(35.2) \quad \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j = \mu_i \ .$$

Zur Umformung des *zweiten* Summenausdrucks greifen wir zunächst auf die Definition der Varianz zurück

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_{ij} - \mu_i)^2 \cdot p_j$$

und lösen den quadratischen Klammerausdruck weiter auf:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^{n} (e_{ij}^2 - 2\, e_{ij} \cdot \mu_i + \mu_i^2) \cdot p_j \ .$$

Als nächstes multiplizieren wir die Klammern aus und bilden drei getrennte Teilsummen:

$$\sigma_i^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 \cdot p_j \;-\; \sum_{j=1}^{n} 2\, e_{ij} \cdot \mu_i \cdot p_j \;+\; \sum_{j=1}^{n} \mu_i^2 \cdot p_j \;.$$

Die konstanten Größen können nun vor das Summenzeichen gezogen werden:

$$\sigma_i^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 \cdot p_j \;-\; 2\,\mu_i \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij} \cdot p_j \;+\; \mu_i^2 \cdot \sum_{j=1}^{n} p_j \;.$$

Berücksichtigt man nun die oben angegebene Definition für μ_i (bei der zweiten Teilsumme) sowie die Tatsache, dass sich die Eintrittswahrscheinlichkeiten stets zu 1 addieren (bei der dritten Teilsumme), so ergibt sich schließlich:

$$\sigma_i^2 \;=\; \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 \cdot p_j \;-\; 2\,\mu_i^2 \;+\; \mu_i^2 \;.$$

Damit aber gilt:

$$(35.3) \qquad \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 \cdot p_j \;=\; \sigma_i^2 \;+\; \mu_i^2 \;.$$

Setzen wir nun die Ausdrücke (35.2) und (35.3) in (35.1) ein, so ergibt sich sofort:

$$(35.4) \qquad \varphi(a_i) \;=\; \Phi(\mu, \sigma) \;=\; \mu_i \;-\; \gamma \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2) \;.$$

Das aber heißt, dass das BERNOULLI-Prinzip bei Verwendung der quadratischen RNF (34) mit der durch (35.4) gegebenen speziellen Ausprägung des μ-σ-Prinzips übereinstimmt. Folgendes Beispiel mag zur Verdeutlichung dienen:

Beispiel 27:
Gegeben sei folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Alternative a_1:

a_1	e	0	10	20
	p	0,2	0,6	0,2

Für diese Verteilung gilt:

$$\mu_1 = 0 \cdot 0{,}2 + 10 \cdot 0{,}6 + 20 \cdot 0{,}2 = 10$$

$$\sigma_1^2 = 10^2 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}6 + 10^2 \cdot 0{,}2 = 40 \ .$$

(1) Wird nun das μ-σ-Prinzip gem. (35.4) in der Form

$$\varphi(a_i) = \Phi(\mu, \sigma) = \mu_i - 0{,}01 \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$$

angewandt, so ergibt sich nach dieser Form eines klassischen Entscheidungsprinzips numerisch:

$$\varphi(a_i) = 10 - 0{,}01 \cdot (100 + 40) = 10 - 1{,}4 = 8{,}6 \ .$$

(2) Wird die gleiche Wahrscheinlichkeitsverteilung nun nach dem BERNOULLI-Prinzip bewertet und gem. (35.4) in Verbindung mit (34) die RNF $u = e - 0{,}01 \cdot e^2$ verwendet, so ergeben sich zunächst folgende Nutzenwerte:

	e	0	10	20
a_1	u	0	9	16
	p	0,2	0,6	0,2

Mithin gilt für den als Erwartungswert des Risikonutzens ermittelten Präferenzwert:

$$\varphi(a_i) = 0 \cdot 0{,}2 + 9 \cdot 0{,}6 + 16 \cdot 0{,}2 = 8{,}6 \ .$$

Die nach dem μ-σ-Prinzip gem. (35.4) und nach dem BERNOULLI-Prinzip auf der Basis einer RNF gem. (34) ermittelten Präferenzwerte stimmen also überein.

Aus der aufgezeigten Übereinstimmung der gem. (35.4) und (34) ermittelten Präferenzwerte sofort auf die Rationalität dieses quadratischen μ-σ-Prinzips schließen zu wollen, wäre allerdings voreilig. Denn – wie Abb. 10 verdeutlicht – stellt sich die RNF (34) grafisch als nach unten geöffnete Parabel dar, die für

$e^* = 1/(2\gamma)$[1] ihr Maximum erreicht und von da ab ständig fällt. Damit aber verletzt (34) unsere Grundforderung, dass die RNF **monoton steigend** verlaufen soll. Insoweit kann also (35.4) *allgemein* nicht als rational angesehen werden.

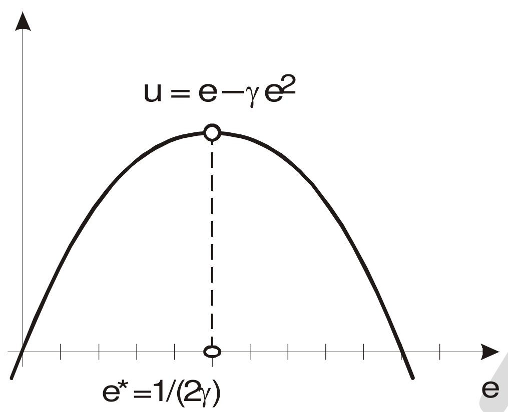


Abb. 10: Quadratische Risiko-Nutzen-Funktion

Beispiel 28:

Angenommen, neben der im vorigen Beispiel dargestellten Alternative a_1 stehe noch folgende Alternative a_2 zur Auswahl (die Nutzenwerte sind wiederum gem. der RNF $u = e - 0{,}01e^2$ berechnet):

	e	0	10	80
a_2	u	0	9	16
	p	0,2	0,6	0,2

a_2 ist a_1 offenbar nach dem Prinzip der Wahrscheinlichkeitsdominanz eindeutig vorzuziehen. Trotzdem ergibt sich mit

$$\varphi(a_2) \;=\; 0 \cdot 0{,}2 \;+\; 9 \cdot 0{,}6 \;+\; 16 \cdot 0{,}2 \;=\; 8{,}6$$

jedoch genau der gleiche Präferenzwert wie für a_1, ein Ergebnis, das offensichtlich nicht sinnvoll sein kann.

1 Die erste Ableitung von $u = e - \gamma e^2$ ergibt $\frac{du(e)}{de} = 1 - 2\gamma e$. Da dieser Ausdruck bei Existenz eines Extrempunkts Null betragen muss, folgt daraus $e^* = \frac{1}{2\gamma}$.

Der Grund für diesen Mangel ist folgender:

– Die Nutzenparabel $u = e - 0{,}01 \cdot e^2$ erreicht ihr Maximum bei

$$e^* = \frac{1}{2 \cdot 0{,}01} = 50 \ .$$

– Mithin werden alle Ergebniswerte, die den Betrag von 50 überschreiten, nutzenmäßig umso niedriger bewertet, je **höher** sie sind (vgl. Abb. 10).

– So wird bei a_2 der 30 Einheiten **rechts** von e^* liegende Betrag von 80 genau so hoch bzw. niedrig bewertet, wie der 30 Einheiten **links** von e^* liegende Betrag von 20 bei a_1.

Übungsaufgabe 8:

Zur Auswahl stehe ein Satz einfacher Chancen der Form $a(x) = (x;\, 0{,}5;\, 100)$, wobei der Parameter x je nach Wahl des Entscheidenden alle Einkommenswerte im Intervall von 100 bis 250 (Grenzen eingeschlossen) annehmen kann. Welcher ist der optimale x-Wert nach dem μ-σ-Prinzip gem. $\varphi(a_i) = \mu_i - \gamma \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$, wenn für den Parameter γ alternativ folgende Werte angenommen werden:

$$\gamma = 0{,}01; \qquad \gamma = 0{,}0025; \qquad \gamma = 0{,}001\,?$$

Kommentieren Sie das Ergebnis!

In vielen Entscheidungssituationen dürfte es allerdings möglich sein, eine absolute Obergrenze e^0 anzugeben, die die effektiv eintretenden Ergebniswerte auf keinen Fall überschreiten werden, also:

$$e^0 = \max_{i,j}(e_{ij}) \ .$$

Sofern nun $e^0 \leq e^*$ gilt, ist gesichert, dass für das konkret anstehende Entscheidungsproblem nur der ansteigende Ast der Nutzenparabel relevant ist, die Monotoniebedingung (30) insoweit also erfüllt ist. Unter dieser einschränkenden Bedingung ist das der quadratischen RNF (34) entsprechende μ-σ-Prinzip also durchaus als rational anzusehen. Es impliziert allerdings durchgängig **Risikoscheu.**

Wir kommen also zu einem Teilergebnis: 1. Teilergebnis

Das μ-σ-Prinzip in der speziellen Ausprägung $\Phi(\mu,\sigma) = \mu - \gamma \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$ mit $\gamma > 0$ kann als rational im Sinne des BERNOULLI-Prinzips angesehen werden, wenn es nur auf die Bewertung von Alternativen angewendet wird, für deren Ergebnisse durchgängig

(37) $$e_{ij} \leq \frac{1}{2\gamma} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

gilt. Diese Form des μ-σ-Prinzips impliziert dann strikte **Risikoscheu.**

> **Übungsaufgabe 9:**
> Versuchen Sie ganz analog zu unserem bisherigen Vorgehen die Rationalität des μ-σ-Prinzips in der Form
>
> $$\Phi(\mu, \sigma) = \mu + \delta \cdot (\mu^2 + \sigma^2) \qquad \text{mit} \quad \delta > 0$$
>
> zu analysieren!

2. Teilergebnis

Wie Sie aus der Lösung der Übungsaufgabe 9 ersehen, kann die zu (35.4) komplementäre quadratische Form des μ-σ-Prinzips

(35.5) $$\varphi(a_i) = \Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu_i + \delta \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2) \qquad \text{mit} \quad \delta > 0$$

also ebenfalls als rational angesehen werden, sofern die Ergebnisse der zur Auswahl stehenden Alternativen der Bedingung

(38) $$e_{ij} \geq -\frac{1}{2\delta} \qquad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

gehorchen. Diese Ausprägung des μ-σ-Prinzips impliziert dann durchgängig **Risikobereitschaft.**

3. Teilergebnis

Andere Formen des μ-σ-Prinzips hingegen – so etwa der Art $\Phi = \mu - \gamma \cdot \sigma$ oder $\Phi = \mu - \gamma \cdot \sigma^2$ – sind nicht rational im Sinne des BERNOULLI-Prinzips, d.h., es ist nicht möglich, *allgemein* (d.h. unabhängig von speziellen Annahmen bezüglich der Dichtefunktion der betrachteten Zufallsvariablen) eine RNF derart zu finden, dass der nach dem μ-σ-Prinzip ermittelte Präferenzwert einer beliebigen Alternative mit dem Erwartungswert des Nutzens übereinstimmt. Zum Nachweis der angegebenen Unvereinbarkeit reicht es beispielsweise aus, wenn gezeigt werden kann, dass die betrachteten Formen des μ-σ-Prinzips nicht mit dem Substitutionsprinzip vereinbar sind. Der entsprechende Nachweis wird Ihnen in der Übungsaufgabe 10 selbst überlassen. In ähnlicher Weise kann auch gezeigt werden, dass das μ-σ-Prinzip in Form von (reinen oder gemischten) Satisfizierungs- oder Fixierungskonzepten nicht rational ist.

Übungsaufgabe 10:

Gegeben seien die sichere Alternative a_1 mit $e_1 = 40$, die einfache Chance $a_2 \equiv (100;\, 0{,}5;\, 0)$ und die Alternative a_3, die eine 50:50-Kombination von a_1 und a_2 darstellt.

a) Welche Relation muss aufgrund des Substitutionsaxiomes zwischen den Präferenzwerten $\varphi(a_3)$ einerseits sowie $\varphi(a_1)$ und $\varphi(a_2)$ andererseits bestehen?

b) Überprüfen Sie anhand der zu a) abgeleiteten Relation, ob das μ-σ-Prinzip in den Formen $\Phi(\mu, \sigma) = \mu - \gamma \cdot \sigma$ und $\Phi(\mu, \sigma) = \mu - \gamma \cdot \sigma^2$ (jeweils $\gamma \neq 0$) mit dem BERNOULLI-Prinzip vereinbar ist!

Übungshinweis

Zur vertiefenden Einübung des zuletzt behandelten Stoffs empfehlen wir Ihnen, die Aufgabe 4.36c) in BITZ/EWERT (2011) gründlich zu bearbeiten und die angegebene Musterlösung aufmerksam zu studieren.

Lösungen zu den Übungsaufgaben

Übungsaufgabe 1

a) Gesucht ist n (n: Anzahl der Würfe), für das zum ersten Mal $2^n > 1.000$ ist.

Für $n = 10$ gilt: $2^{10} = 1.024$.

Damit der Spieler 1.024 GE Gewinn erhält, muss daher das Spiel eine Wurfserie aufweisen, in der 9mal hintereinander „Zahl" und im 10. Wurf „Adler" erscheint.

b) Die Wahrscheinlichkeit, dass es zu der in a) ermittelten Wurfserie kommt, beträgt $2^{-10} = 1/1.024 \approx 0{,}00098$. Die Gewinnentwicklung und die zugehörige Wahrscheinlichkeit sind in der folgenden Tabelle aufgezeigt:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$e = 2^n$	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
$p(e) = 2^{-n}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1.024}$

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Gewinn von mehr als 1.000 GE ergibt, ist gleich 1, abzüglich der Wahrscheinlichkeit dafür, dass **vor** dem 10. Wurf (also bis spätestens zum 9. Wurf) „Adler" erscheint, also:

$$\begin{aligned} p(e > 1.000) &= 1 - p(e \leq 1.000) \\ &= 1 - \sum_{n=1}^{9} 2^{-n} \\ &= 1 - \frac{511}{512} = \frac{1}{512} \,. \end{aligned}$$

Übungsaufgabe 2

(1) Aus den Daten der Tab. 2 ergibt sich gem. der Relation $e_{pj} = 0{,}9\, e_{1j} + 0{,}1\, e_{2j}$ folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portefeuillerenditen:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e_{pj}	16,5	5,5	–5,5	27,5	11

Beispielhaft sei die Berechnung der e_{pj}-Werte für e_{p1} demonstriert:

$$e_{p1} = 0{,}9 \cdot 15 + 0{,}1 \cdot 30 = 13{,}5 + 3 = 16{,}5 .$$

Für die erwartete Rendite folgt aus den oben angegebenen Werten dann:

$$\begin{aligned} \mu_p &= \frac{1}{5}(16{,}5 + 5{,}5 - 5{,}5 + 27{,}5 + 11) \\ &= \mathbf{11} . \end{aligned}$$

Für die Varianz ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sigma_p^2 &= \frac{1}{5}\left[(16{,}5-11)^2 + (5{,}5-11)^2 + (-5{,}5-11)^2 + (27{,}5-11)^2 + (11-11)^2\right] \\ &= \frac{1}{5}\left[(5{,}5)^2 + (-5{,}5)^2 + (-16{,}5)^2 + (16{,}5)^2 + 0\right] \\ &= \frac{1}{5}[30{,}25 + 30{,}25 + 272{,}25 + 272{,}25] \\ &= \frac{1}{5} \cdot 605 = \mathbf{121} . \end{aligned}$$

Für die Standardabweichung ergibt sich dann:

$$\sigma_p = \sqrt{121} = \mathbf{11} .$$

Gegenprobe: Für den gewichteten Durchschnitt der Standardabweichungen gilt:

$$\sigma_p = 10 \cdot 0{,}9 + 20 \cdot 0{,}1 = \mathbf{11} \quad \text{q.e.d.}$$

(2) Für $x_1 = 0{,}5$ und $x_2 = 0{,}5$ ergibt sich aus der Tab. 2 folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portefeuillerenditen:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e_{pj}	22,5	7,5	–7,5	37,5	15

Daraus folgt dann weiter:

$$\mu_p = \frac{1}{5}(22{,}5 + 7{,}5 - 7{,}5 + 37{,}5 + 15)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 75 = \mathbf{15}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{5}\left[(22{,}5-15)^2 + (7{,}5-15)^2 + (-7{,}5-15)^2 + (37{,}5-15)^2 + (15-15)^2\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[(7{,}5)^2 + (-7{,}5)^2 + (-22{,}5)^2 + (22{,}5)^2\right]$$

$$= \frac{1}{5}(56{,}25 + 56{,}25 + 506{,}25 + 506{,}25 + 0)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 1.125 = 225$$

$$\sigma_p = \sqrt{225} = \mathbf{15}\ .$$

Gegenprobe: Für den gewichteten Durchschnitt der Standardabweichungen gilt:

$$\sigma_p = 10 \cdot 0{,}5 + 20 \cdot 0{,}5 = \mathbf{15} \quad \text{q.e.d.}$$

(3) Für $x_1 = 0{,}1$ und $x_2 = 0{,}9$ ergibt sich folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Portefeuillerenditen:

	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
e_{pj}	28,5	9,5	–9,5	47,5	19

Daraus folgt dann weiter:

$$\mu_p = \frac{1}{5}(28{,}5 + 9{,}5 - 9{,}5 + 47{,}5 + 19)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 95 = \mathbf{19}$$

$$\sigma_p^2 = \frac{1}{5}\left[(28{,}5-19)^2 + (9{,}5-19)^2 + (-9{,}5-19)^2 + (47{,}5-19)^2 + (19-19)^2\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left[(9{,}5)^2 + (-9{,}5)^2 + (-28{,}5)^2 + (28{,}5)^2 + 0\right]$$

$$= \frac{1}{5}(90{,}25 + 90{,}25 + 812{,}25 + 812{,}25 + 0)$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 1.805 = 361$$

$$\sigma_p = \sqrt{361} = \mathbf{19} \; .$$

Gegenprobe: Für den gewichteten Durchschnitt der Standardabweichungen gilt:

$$\sigma_p = 10 \cdot 0{,}1 + 20 \cdot 0{,}9 = \mathbf{19} \quad \text{q.e.d.}$$

Übungsaufgabe 3

a) Für $\rho = -1$ gilt: $\sigma_p = \pm(x_1 \cdot \sigma_1 - x_2 \cdot \sigma_2)$.

Hieraus folgt unmittelbar, dass $\sigma_p = 0$ genau dann gilt, wenn

$$x_1 \cdot \sigma_1 = x_2 \cdot \sigma_2 \; .$$

Da $x_2 = 1 - x_1$, folgt daraus sofort weiter

$$x_1 \cdot \sigma_1 = (1 - x_1) \cdot \sigma_2 \quad \text{oder}$$

$$x_1 \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = \sigma_2 \quad \text{, d.h.}$$

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \qquad \text{und dementsprechend}$$

$$x_2 = 1 - \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2} .$$

b) Gem. dem Ergebnis zu a) ergibt sich sofort

$$x_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{3} .$$

Um ein risikofreies Portefeuille zu erhalten, müsste das Portefeuille also zu zwei Dritteln aus Wertpapier a_1 und zu einem Drittel aus Wertpapier a_2 zusammengestellt werden.

c) Analog zu Relation (23) gilt für die bei Umweltzustand j eintretende Rendite e_{pj} eines aus den Wertpapieren a_1 und a_2 zusammengesetzten Portefeuilles

$$e_{pj} = x_1 \cdot e_{1j} + x_2 \cdot e_{2j} .$$

Gem. b) sind für x_1 und x_2 die Werte $x_1 = \frac{2}{3}$ und $x_2 = \frac{1}{3}$ einzusetzen, also gilt:

$$e_{pj} = \frac{2}{3} e_{1j} + \frac{1}{3} e_{2j} .$$

Nach dieser Relation ergeben sich für die in der Tabelle angegebenen Renditewerte e_{1j}, e_{2j} jeweils folgende e_{pj}-Werte:

j	e_{1j}	e_{2j}	$2/3\, e_{1j}$	$+1/3\, e_{2j}$	$= e_{pj}$
1	15	10	30/3	+10/3	=13 1/3
2	5	30	10/3	+30/3	=13 1/3
3	–5	50	–10/3	+50/3	=13 1/3
4	25	–10	50/3	–10/3	=13 1/3
5	10	20	20/3	+20/3	=13 1/3

Für alle Umweltzustände ergibt sich also unabhängig von der Schwankung der wertpapierindividuellen Renditen die gleiche Portefeuillerendite; es liegt also gerade ein vollständiger Ausgleich der Einzelrisiken vor.

Übungsaufgabe 4

j	1	2	3	4	5	μ_i; μ_p	σ_i; σ_p
e_{1j}	15	5	–5	25	10	10	10
e_{0j}	6	6	6	6	6	6	0
$e_{pj}=0{,}2\cdot e_{1j}+0{,}8\cdot e_{0j}$	7,8	5,8	3,8	9,8	6,8	6,8	$2(=0{,}2\cdot\sigma)$
$e_{pj}=0{,}5\cdot e_{1j}+0{,}5\cdot e_{0j}$	10,5	5,5	0,5	15,5	8	8	$5(=0{,}5\cdot\sigma)$
$e_{pj}=0{,}8\cdot e_{1j}+0{,}2\cdot e_{0j}$	13,2	5,2	–2,8	21,2	9,2	9,2	$8(=0{,}8\cdot\sigma)$

Übungsaufgabe 5

(1) Die Lösung für diesen Fall ist bereits im Text des Studienbriefes im Beispiel 12 angegeben. Es gilt also:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi^1(a_1) &= 3{,}9\\ \varphi^1(a_2) &= 4{,}0\end{aligned}}$$

(2) In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}\varphi(a_1) &= (-100)\cdot 0{,}1 + (-70)\cdot 0{,}5 + (-40)\cdot 0{,}4\\ &= -10 - 35 - 16 = -61\\ \varphi(a_2) &= (-80)\cdot 0{,}4 + (-50)\cdot 0{,}5 + (-30)\cdot 0{,}1\\ &= -32 - 25 - 3 = -60\ .\end{aligned}$$

Also:

$$\boxed{\begin{aligned}\varphi^2(a_1) &= -61\\ \varphi^2(a_2) &= -60\end{aligned}}$$

(3) In diesem Fall gilt:

$$\varphi(a_1) = 50 \cdot 0{,}1 + 53 \cdot 0{,}5 + 56 \cdot 0{,}4$$
$$= 5 + 26{,}5 + 22{,}4 = 53{,}9$$
$$\varphi(a_2) = 52 \cdot 0{,}4 + 55 \cdot 0{,}5 + 57 \cdot 0{,}1$$
$$= 54 \; .$$

Also:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^3(a_1) &= 53{,}9 \\ \varphi^3(a_2) &= 54 \end{aligned}}$$

Vergleicht man die drei Ergebnisse, so erkennt man,

– dass die Nutzenfunktionen (2) und (3) positive Lineartransformationen von (1) sind, und
– dass die drei Arten von Präferenzwerten in genau der gleichen formalen Relation zueinander stehen wie die Nutzenfunktion, also gilt:

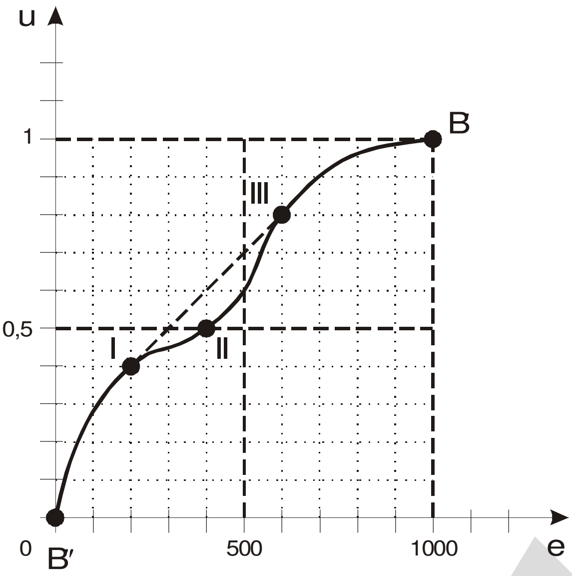
$$\boxed{\begin{aligned} \varphi^2 &= -100 + 10 \cdot \varphi^1 \\ \varphi^3 &= 5 \cdot (10 + 0{,}2\, \varphi^1) \end{aligned}}$$

Übungsaufgabe 6

Entsprechend der Normierung $u(0) = 0$ und $u(1.000) = 1$ ergibt sich, dass den drei angegebenen Indifferenzrelationen zufolge gelten muss:

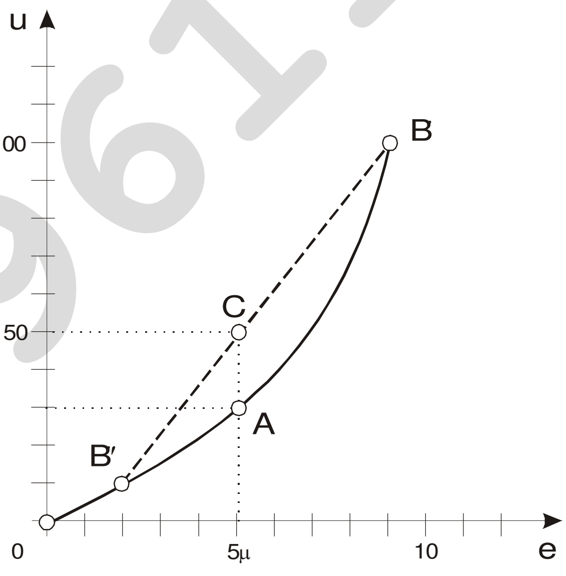
$$\begin{aligned} &(\mathrm{I}) && u(200) = 0{,}4 \\ &(\mathrm{II}) && u(400) = 0{,}5 \\ &(\mathrm{III}) && u(600) = 0{,}8 \; . \end{aligned}$$

Zeichnet man nun die beiden Normpunkte B′ und B″ sowie die diesen drei Nutzenrelationen entsprechenden Punkte (I, II, III) in ein u-e-Diagramm ein, so kann der Verlauf der RNF etwa, wie in folgender Abbildung in Form der durchgezogenen Kurve gezeigt, durch eine doppelt geschwungene Linie skizziert werden.



Übungsaufgabe 7

Wie man aus der folgenden Grafik sofort erkennt, liegt die Verbindungslinie zweier Punkte B″ und B′ stets oberhalb der RNF.



Das aber bedeutet, dass bei gleichem Erwartungswert (μ) der Präferenzwert einer sicheren Alternative (vgl. Punkt A) niedriger ist als der Präferenzwert einer einfachen Chance (vgl. Punkt C).

Übungsaufgabe 8

Für die benötigten Werte μ, μ^2 und σ^2 gilt für eine einfache Chance (x; 0,5; 100):

$$\begin{aligned}
\mu &= 0{,}5 \cdot x + 0{,}5 \cdot 100 = 50 + 0{,}5\,x \\
\mu^2 &= (50 + 0{,}5\,x)^2 \\
\sigma^2 &= 0{,}5 \cdot [x - 50 - 0{,}5\,x]^2 + 0{,}5 \cdot [100 - 50 - 0{,}5\,x]^2 \\
&= (50 - 0{,}5\,x)^2 \ .
\end{aligned}$$

Für den Präferenzwert einer einfachen Chance a(x) gilt somit in Abhängigkeit von x:

$$\begin{aligned}
\varphi[a(x)] = \Phi(x) &= 50 + 0{,}5\,x - \gamma \cdot \left[(50 + 0{,}5\,x)^2 + (50 - 0{,}5\,x)^2\right] \\
&= 50 + 0{,}5\,x - \gamma \cdot (5.000 + 0{,}5\,x^2) \ .
\end{aligned}$$

Um den **optimalen x-Wert** zu ermitteln, gilt es, das Maximum dieser Präferenzfunktion zu ermitteln, also:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = 0{,}5 - \gamma \cdot x = 0\,,$$

woraus sich sofort

$$x = \frac{1}{2\gamma}$$

ergibt. Da die zweite Ableitung für $\gamma > 0$ stets negativ ist, erreicht $\Phi(x)$ bei diesem Wert eindeutig das Maximum. Da nun aber der Aktionsparameter x nur innerhalb des Intervalls $100 \leq x \leq 250$ variieren kann, ist der gesuchte optimale x-Wert allgemein nach folgender Relation zu bestimmen:

$$x^* = \begin{cases} 100 & \text{wenn } 100 > \dfrac{1}{2\gamma} \\[2ex] \dfrac{1}{2\gamma} & \text{wenn } 100 \leq \dfrac{1}{2\gamma} \leq 250 \\[2ex] 250 & \text{wenn } \dfrac{1}{2\gamma} > 250 \ . \end{cases}$$

Demnach ergibt sich für die verschiedenen vorgegebenen γ-Werte:

$$\boxed{\begin{array}{lllllllll} \gamma & = & 0{,}01 & \rightarrow \dfrac{1}{2\gamma} & = & 50 & \rightarrow x^* & = & 100 \\[2ex] \gamma & = & 0{,}0025 & \rightarrow \dfrac{1}{2\gamma} & = & 200 & \rightarrow x^* & = & 200 \\[2ex] \gamma & = & 0{,}001 & \rightarrow \dfrac{1}{2\gamma} & = & 500 & \rightarrow x^* & = & 250 \end{array}}$$

Für den Normalfall kann davon ausgegangen werden, dass ein höheres Einkommen einem niedrigeren vorgezogen wird. Demnach würde in unserem Beispielfall trivialerweise $x = 250$ gewählt, so wie es sich bei $\gamma = 0{,}001$ auch als Ergebnis der untersuchten Entscheidungsregel ergibt.

Für $\gamma = 0{,}01$ ($\gamma = 0{,}0025$) implizierte die verwendete Entscheidungsregel jedoch, dass der Nutzen mit steigendem Einkommen nur bis zum Betrag von 50 (bzw. 200) ebenfalls steigt, danach jedoch wieder ständig sinkt. Dementsprechend wird es als optimal ausgewiesen, für x gerade den niedrigst zulässigen Wert von 100 (bzw. den „Optimalwert" 200) zu wählen. Beide Entscheidungsregeln führten in dem vorliegenden Fall also zu wenig sinnvollen Ergebnissen.

Übungsaufgabe 9

Das klassische Prinzip $\Phi(\mu, \sigma) = \mu + \delta \cdot (\mu^2 + \sigma^2)$ mit $\delta > 0$ ist mit dem BERNOULLI-Prinzip kompatibel, wenn eine RNF der Form $u = e + \delta \cdot e^2$ (oder eine positiv lineare Transformation davon) zugrundegelegt wird. Für eine solche RNF gilt nämlich für die Nutzenerwartung:

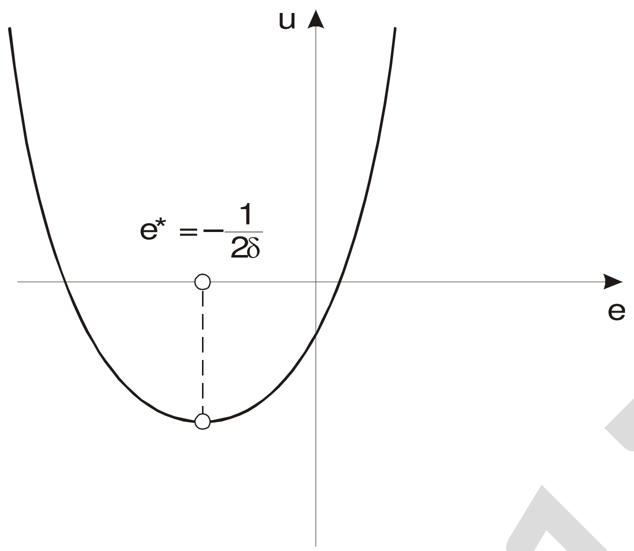
$$\begin{aligned} \varphi(a_i) &= \sum_{j=1}^{n} (e_{ij} + \delta \cdot e_{ij}^2) \cdot p_j \\ &= \mu_i + \delta \cdot \sum_{j=1}^{n} e_{ij}^2 \cdot p_j \ . \end{aligned}$$

Für den letzten Summenausdruck ist nun im Text des Studienbriefes bereits die Übereinstimmung mit dem Ausdruck $(\mu_i^2 + \sigma_i^2)$ nachgewiesen worden, also gilt

$$\boxed{\varphi(a_i) = \mu_i + \delta \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2),}$$

so dass das BERNOULLI-Prinzip auf der Basis der angegebenen RNF in der Tat mit der untersuchten Ausprägung des μ-σ-Prinzips übereinstimmt.

Die implizierte RNF $u = e + \delta e^2$ stellt – wie in folgender Zeichnung verdeutlicht – eine nach oben geöffnete Parabel dar.



Der Abszissenwert e^* des Minimums dieser Parabel bestimmt sich nach:

$$\frac{du}{de} = 1 + 2\delta e^* = 0 , \quad \text{also}$$

$$e^* = -\frac{1}{2\delta} .$$

Wird eine Entscheidungssituation betrachtet, in der alle nur möglichen Ergebnisse sämtlicher Alternativen nicht unterhalb von e^* liegen (also $\min(e_{ij}) \geq e^*$), so erfüllt die RNF innerhalb des relevanten Ergebnisbereiches die Monotoniebedingung (30). Das hier untersuchte μ-σ-Prinzip kann als insoweit rational angesehen werden, als es auf Entscheidungssituationen mit entsprechend eingeschränkten Ergebnisverteilungen angewendet wird. Es impliziert dann durchgängig **Risikobereitschaft.**

Übungsaufgabe 10

a) Für den Präferenzwert der Alternative a_3, die eine 50:50-Mischung der Alternativen a_1 und a_2 darstellt, muss nach dem BERNOULLI-Prinzip – als Implikation des Substitutionsprinzips –

$$\varphi(a_3) = 0{,}5 \cdot \varphi(a_1) + 0{,}5 \cdot \varphi(a_2)$$

gelten. Der Nachweis befindet sich bereits unmittelbar am Schluss des Abschnittes 2.4.2.

b) Es gilt nun zu überprüfen, ob diese Relation auch bei Anwendung der beiden angegebenen Ausprägungen des μ-σ-Prinzips erfüllt ist.

(1) Zu diesem Zweck werden zunächst die μ- und σ-Werte der drei Alternativen errechnet. Dabei ergibt sich:

a_1: $\mu_1 = 40$

$\sigma_1^2 = 0$

a_2: $\mu_2 = 50$

$\sigma_2^2 = 50^2 \cdot 0{,}5 + 50^2 \cdot 0{,}5 = 2.500$

$\sigma_2 = 50$

a_3:

e	0	40	100
p(e)	0,25	0,5	0,25

Also ergibt sich

$$\mu_3 = 0 \cdot 0{,}25 + 40 \cdot 0{,}5 + 100 \cdot 0{,}25 = 45$$

$$\sigma_3^2 = (-45)^2 \cdot 0{,}25 + (-5)^2 \cdot 0{,}5 + 55^2 \cdot 0{,}25 = 1.275$$

$$\sigma_3 = 35{,}7 \ .$$

(2) Daraus ergeben sich bei Anwendung der beiden Formen des μ-σ-Prinzips folgende Präferenzwerte für die drei Alternativen:

$$\begin{aligned}
\Phi(\mu,\sigma) &= \mu - \gamma\cdot\sigma: \\
\varphi(a_1) &= 40 \\
\varphi(a_2) &= 50 - 50\gamma \\
\varphi(a_3) &= 45 - 35{,}7\gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi(\mu,\sigma) &= \mu - \gamma\cdot\sigma^2: \\
\varphi(a_1) &= 40 \\
\varphi(a_2) &= 50 - 2.500\gamma \\
\varphi(a_3) &= 45 - 1.275\gamma\ .
\end{aligned}$$

(3) Die so ermittelten Präferenzwerte werden nun in Relation (*) eingesetzt. Dabei ergibt sich für die erste Form des μ-σ-Prinzips:

$$\begin{aligned}
45 - 35{,}7\gamma &= 0{,}5\cdot 40 + 0{,}5\cdot(50-50\gamma) \\
45 - 35{,}7\gamma &= 45 - 25\gamma \\
(**)\quad 35{,}7\gamma &= 25\gamma\ .
\end{aligned}$$

Entsprechend gilt für die zweite Form:

$$\begin{aligned}
45 - 1.275\gamma &= 0{,}5\cdot 40 + 0{,}5\cdot(50-2.500\gamma) \\
45 - 1.275\gamma &= 45 - 1.250\gamma \\
(***)\quad 1.275\gamma &= 1.250\gamma\ .
\end{aligned}$$

Die Relationen (**) und (***) sind offensichtlich nur für $\gamma=0$ erfüllt, enthalten für jedes (endliche) $\gamma>0$ jedoch einen Widerspruch. Die beiden untersuchten Formen des μ-σ-Prinzips verletzen in unserem Beispielsfall also das Substitutionsprinzip. Das aber bedeutet, dass sich in allgemeiner Weise keine RNF u(e) finden lässt, auf deren Grundlage das BERNOULLI-Prinzip stets zu einer Entscheidung führt, die mit dem μ-σ-Prinzip in der Form $\Phi(\mu,\sigma)=\mu-\gamma\cdot\sigma$ (bzw. $\Phi(\mu,\sigma)=\mu-\gamma\cdot\sigma^2$) im Einklang steht. Diese beiden Formen des μ-σ-Prinzips sind also nicht rational in dem hier verwendeten Sinn.