1 Optimierungsproblem unseres ersten Automodells ohne Parameter

Wir fixieren die Endzeit t_f beliebig, aber groß genug, so dass das Auto die vorgesehene Strecke schafft. In unserem ersten Modell sei $t_f = 120$. Zudem beinhaltet unser Optimalsteuerungsproblem den Zustand $x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ und die Steuerung $u(t) = \begin{pmatrix} M_{wh}(t) \\ F_B(t) \end{pmatrix}$

1.1 Definition der Gitter

1.1.1 Approximation der Steuerung $u(t)$ durch $u_h(t)$

Wir diskretisieren die Steuerung $u(t)$ entweder durch eine stückweise konstante oder durch eine stetige, stückweise lineare Funktion.

- Steuerungsgitter $G_u = \{0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = t_f\}$ mit $h = \frac{t_f}{N}$
  Dies ergibt uns die $N + 1$ Variablen $u_h(t_i)$ für unser Optimierungsproblem.

- Approximation durch eine stückweise konstante Funktion

$$u_h(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i B_i^1(t)$$

  mit $c_i = u(t_i)$ und $B_i^1(t) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ t_{i-1} \leq t < t_i \\ 0 & sonst \end{cases}$

- Approximation durch eine stetige, stückweise lineare Funktion

1.1.2 Approximation des Zustandes

Der Zustand $x(t)$ wird uns durch folgende Differentialgleichung beschrieben:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} v \\ \frac{1}{m}(\frac{M_{wh}(t)}{R} - F_B(t) - F_A(v(t))) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x(t))_2 \\ \frac{1}{m}(\frac{(u(t))_1}{R} - (u(t))_2 - F_A((x(t))_2) \end{pmatrix}$$

Sie gilt es nun in Gleichungsnebenbedingungen für unser Optimimierungsproblem umzuwandeln. Dafür verwenden wir das Multiple Shooting mit einem Runge Kutta Verfahren zur Lösung der Teildifferentialgeleichungen:

- Zustandsgitter: $G_x = \{0 = T_0 < T_1 < ... < T_M = t_f\}$

- Löse in jedem Zustandsgitterintervall $[T_i, T_{i+1}]$, $i = 0, ..., M-1$ ausgehend von Startschätzungen X_i des Zustandes x an den Zustandsgitterpunkten T_i das Anfangswertproblem mit Runge Kutta

  $$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u_h(t)) \; mit \; x(T_i) = X_i$$

  also

  $$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} (x(t))_2 \\ \frac{1}{m}(\frac{(u_h(t))_1}{R} - (u_h(t))_2 - F_A((x(t))_2) \end{pmatrix} \; mit \; x(T_i) = X_i.$$

  Dabei ist $X_i = (Y_i, V_i)^T$ mit $Y_i = y(T_i)$ und $V_i = v(T_i)$.
  Dabei sollten die Steuergitterpunkte aus G_u stets auch Gitterpunkte des Runge Kutta Verfahrens sein. Eventuell können zuerst G_x und ein Diskretisierungsgitter für das Runge Kutta Verfahren gewählt werden und dann die dafür benötigten Funktionswerte von u als Optimierungsvariablen $u_h(t_i)$ aufgefasst werden. Dies ist aber nicht nötig.

- Sei $z = (X_0, X_1, ..., X_{M-1}, X_M = x(t_f), u_h(t_0), u_h(t_1), ..., u_h(t_N) = u_h(t_f))$. Wir bezeichnen die Lösung des Runge Kutta Verfahrens in $[T_i, T_{i+1}]$ mit $X^i(t, z)$ für $i = 0, ..., M-1$ (stetige Fortsetzung der von Runge Kutta gelieferten Werte). Damit ist die Näherungslösung für x auf $[0, t_f]$:

  $$X(t, z) = \begin{cases} X^i(t, z) & f\ddot{u}r \; t \in [T_i, T_{i+1}], \quad i = 0, ..., M-1 \\ X_M & t = t_f \end{cases}$$

1.2 Unser Optimierungsproblem in Standardform und ohne Parameter

Erinnerung: Unsere Zielfunktion war

$$\begin{aligned} f_0(x(t_f), t_f) &= c_1 \int F_A(v)v(t) + \frac{M_{wh}}{R} v(t) + F_R v(t) - c_2 \cdot y(t_f) \\ &= 0.5 c_1 c_w \rho A \int v(t)^3 dt + \frac{c_1}{R} \int M_{wh}(t) v(t) dt \\ &+ c_1 \int f_R m g \int v(t) dt - c_2 y(t_f) \\ &= 0.5 c_1 c_w \rho A \int x_2^3 dt + \frac{c_1}{R} \int u_1(t) x_2(t) dt + (c_1 f_r m g - c_2) x_1(t_f) \end{aligned}$$

In unserem ersten Modell vernachlässigen wir noch den Luftwiderstand, d.h. wir lassen den ersten Summanden erstmal weg.

Diese Zielfunktion wollen wir bezüglich des Zustandes $x(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$ und der Steuerung $u(t) = \begin{pmatrix} M_{wh}(t) \\ F_B(t) \end{pmatrix}$ minimieren. Da diese Elemente des unendlichdimensionalen Funktionenraumes sind, haben wir sie bereits oben diskretisiert. Damit ist unsere Optimierungsvariable

$$z = (X_0, X_1, ..., X_{M-1}, X_M = x(t_f), u_h(t_0), u_h(t_1), ..., u_h(t_N) = u_h(t_f)) \\ \in \mathbb{R}^{n_x \cdot (M+1) + n_u \cdot (N+1)}$$

Hier bei unserem ersten Optimierungsproblem ist $n_x = 2$ und $n_u = 2$ und wir setzen $N = M$, d.h. die $t_i's$ und $T_i's$ stimmen überein.

Unser Optimierungsproblem ergibt sich wie folgt (mit c_1 und c_2 Gewichtungsparameter)

$$\underset{z}{min} \frac{c_1}{R} \sum_{i=0}^{N-1} (u_h(t_i))_1 (X(t_i, z))_2 \cdot h + (c_1 f_r mg - c_2)(X_M)_1 \tag{1}$$

unter den Randbedingungen

$$X_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$(X_M)_2 = 0 \tag{3}$$

den gemischten Steuer- und Zustandsbeschränkungen

$$(u_h(t_i))_1 \leq R(\ (u_h(t_i))_2 + F_A((X(t_i, z))_2 \ ) + F_R + m \cdot a_{max}((X(t_i, z))_2) \tag{4}$$
$$f\ddot{u}r \ alle \ i = 0, ..., N$$

der Boxschranke

$$0 \leq (u_h(t_i))_2 \leq F_{B,max} \tag{5}$$
$$f\ddot{u}r \ alle \ i = 0, ..., N$$

und der Stetigkeitsbedingung an die Knoten T_i

$$X^i(T_{i+1}, z) - X_{i+1} = 0 \tag{6}$$
$$f\ddot{u}r \ alle \ i = 0, ..., M-1$$

Hierauf ist nun das innere Punkte Verfahren anwendbar. Das Ziel wäre noch, die Ableitungen der Zielfunktion und der Nebenbedingungen dem Solver zu übergeben. Die dafür benötigten Gradienten und Jacobimatrizen können über eine Sensitivitätsanalyse bestimmt werden.

Anmerkung: Die Integrale der Zielfunktion lassen sich noch durch bessere Quadraturformeln nähern!

1.3 Quellen

Gerdts, Matthias: Optimale Steuerung, Universität Würzburg, Wintersemester 2009/2010

Moritz Diehl, Hans Georg Bock, Holger Diedam, Pierre-Brice Wieber. Fast Direct Multiple Shooting Algorithms for Optimal Robot Control. Fast Motions in Biomechanics and Robotics, 2005, Heidelberg, Germany.