Standardform des robusten Optimalsteuerungsproblems (Direct robust counterpart formulation) mit Slackvariablen

Annkathrin

25. Mai 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Übersichtlichere Form

Zielfunktion

$$\min_{T,u(.),x(.),s_{0,0},s_{0,1},...,s_{0,n_f},...,s_{n_f,j},D(.)} f_0(x(T),T) + e^T s_0 \tag{1}$$

Mit

- f_0: Zielfunktion aus Automodell (unseres ursprünglichen Problems)
- $e^T = (1, 1, ..., 1) \in \mathbb{R}^{n_p}$.
- $s_{i,j}$: Slackvariablen, die benötigt werden, um Nichtdifferenzierbarkeit der Unendlichnorm (resultierend aus approximated robust counterpart, vgl. Diehl (11)-(13)) zu beseitigen. (vgl. Diehl (23)-(26) im diskreten Fall)

- $D(.)$: Sensitivitäts-Matrix, die aus der numerisch effizienten Problemformulierung resultiert (vgl. Diehl (14)-(17) oder (31)-(32)).

$$D(t) = \frac{dx(t)}{dx(0)} \frac{\partial x_0}{\partial p}(p)$$

Ungleichungsnebenbedingungen

$$f_i(x(t_j), t_j) + e^T s_{i,j} \leq 0 \quad \text{for } i = 1, ..., n_f, j \text{ abhängig Gitter} \tag{2}$$

$$-AD(t_j)^T \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t_j), t_j) \right)^T - s_{i,j} \leq 0 \quad \text{for } i = 1, ..., n_f, j \text{ abhängig Gitter} \tag{3}$$

$$AD(t_j)^T \left(\frac{\partial f_i}{\partial x}(x(t_j), t_j) \right)^T - s_{i,j} \leq 0 \quad \text{for } i = 1, ..., n_f, j \text{ abhängig Gitter} \tag{4}$$

Dabei kommem die zweite und dritte Ungleichungsserien von der oben genannten Slackformulierung (vgl. Diehl (23)-(26) im diskreten Fall).

Mit:

- f_i: Ungleichungsbedingungen, die unsere Straße und die Beschränkung der Steuerung beschreiben.
- t_j: Interpolationszeitpunkte der Straße/Gitterpunkte für die Ungleichungsbedingungen der Straße (eventuell gleich der Gitterpunkte bei der späteren Diskretisierung des Optimalsteuerungsproblems)
- A: Matrix aus der Beschreibung der für die Parametermenge verwendeten Höldernorm: $\|p\| = \|A^{-1}p\|_\infty$ (vgl. Diehl S.213 f.)

$$A = diag\left(\frac{p_u - p_l}{2}\right)^{-1}$$

DGLs

$$\frac{dx(t)}{dt} = G(x(t), u(t)) \qquad \forall t \in [0,T] \tag{5}$$
$$\frac{ds_{i,j}}{dt} = 0 \qquad \forall t \in [0,T] \tag{6}$$
$$\frac{dD(t)}{dt} = \frac{\partial G}{\partial x}(x(t), u(t))D(t) \qquad \forall t \in [0,T] \tag{7}$$
$$x(0) = x_0(p) \tag{8}$$
$$s_{i,j}(0) = s_{i,j} \tag{9}$$
$$D(0) = \frac{\partial x_0}{\partial p}(p) \tag{10}$$

Dabei kommt die dritte DGL von der oben genannten numerisch effizienten Problemformulierung (vgl. Diehl (14)-(17) oder (31)-(32)).
Der zweite Satz DGLs wird eingeführt, damit das Problem in Standardform formuliert ist. Der numerische Integrator müsste sie als triviale DGLs erkennen.

Mit:

- G: Beschreibung der Dynamik des Autos.

2 Resultierende Standardform

Dafür schreibe die Matrix $D = \begin{pmatrix} -D_1(t)- \\ -D_2(t)- \\ \dots \\ -D_{n_p(t)-} \end{pmatrix}$ als Spaltenvektor: $\begin{pmatrix} D_1(t) \\ D_2(t) \\ \dots \\ D_{n_p}(t) \end{pmatrix}$.
Sei $z = (x(.), s_{0,0}, s_{0,1}, ..., s_{0,n_f}, ..., s_{n_f,j}, D_1(.), ..., D_{n_p}(.))^T$ der Zustandsvektor. Dann ist die Standardnormalform

$$\min_{T,u(.),z(.)} f_0(z_1(T), T) + e^T s_0 \tag{11}$$

Die Nebenbedingung und die DGL erhält man durch zusammenfassen von (2)-(4) bzw. von (5)-(10) zu einer Ungleichung bzw. DGL und durch Ersetzen der Zustände durch ihren jeweiligen z-Eintrag.

Achtung: x besteht nicht mehr nur aus den Autozuständen $y, v, Lenkwinkel$, sondern wird pro Integral in der ursprünglichen Zielfunktion unserer Autobeschreibung und pro Parameter p_i vergrößert. Letzteres müsste bereits in der Dynamikbeschreibung durch G enthalten sein und auch ersteres müsste darin aufgenommen werden.