Projet de probabilité et statistique

LAFONTAINE Laurine - SÉGUY Margaux

IMAC 2021

Chapter 1

Présentation du projet Blackjack

Le blackjack est un jeu régi par la loi hypergéométrique car c'est un jeu sans remise. Si on ne descend pas au niveau de la main, mais que l'on reste au niveau du sabot, chaque sabot étant indépendant du prochain, on peut approximer le jeu avec une loi binomiale. Le jeu est constitué d'une suite de manches indépendantes les unes des autres où le joueur gagne ou perd, on suit toujours la même loi. A chaque manche, le joueur touche un gain positif ou négatif aléatoire. On notera Ca la cagnotte du jeu. On peut considérer le hit (lorsque l'utilisateur pioche une carte) comme la variable de temps. A chaque hit, on considère un nouveau cycle, pour lequel les probabilités de jeu changent.

Chapter 2

Les variables aléatoires et la probabilité au sein du blackjack

2.1 Début de jeu

Soit un paquet de 52 cartes ou de 32 cartes (le blackjack ne se joue quasi jamais avec un paquet de 32 cartes, ici, on a fait le choix de simuler ce paquet quand même). Un paquet de 32 cartes contient AS, 7, 8, 9, 10, J, D, R. Les paquets sont choisis au grâce à un tirage de Bernoulli. Entre autre, le nombre de cartes différents,il existe aussi deux types de paquet. Soit un paquet est équilibré et alors il est normalement constitué. Soit un paquet est truqué et donc les probabilités de gagner ou perdre ne sont donc pas les mêmes. Le paquet déséquilibré de 52 cartes est construit comme suivant : ['A', 'A', 'A', 'K', '5', '2', '7', '8', '9', '10', 'J', 'Q', 'K']. Et la version 32 cartes : ['A', 'A', 'A', 'K', '10', 'J', 'Q', 'K']

On note P(blackjack) la probabilité de gagner au Blackjack dès le début de la partie, lorsque le joueur reçoit ses deux premières cartes. L'événement possible est donc d'avoir un as (qui vaut 11 points quand le score est inférieur à 11) + une tête(valet, dame, roi) ou un dix car ces cartes valent 10 points. Le blackjack est équiprobable, alors la probabilité de l'événement "obtenir un blackjack dès les premières cartes", noté A, est noté p(A) et correspond au rapport : $P(A) = \frac{nb_{issuesfavorables}}{nb_{issues}}$.

- Le nombre d'issues possibles de ce jeu est C_2^{52}
- Le nombre d'issues favorables est C_1^4 (1 as parmi les 4 dans le jeu) et

C_1^{16} (le nombre de têtes possibles = 4 * 4 cartes par couleurs = 16)

- On a donc $P(A) = \frac{C_1^4 C_1^{16}}{C_2^{52}} = \frac{32}{663} = 0,05$

Le joueur a donc une probabilité de 0,05 de gagner dès le début. Ce qui correspond à une fois toutes les 20 mains, pour donner un ordre d'idée. Dans les vraies conditions du casino, le blackjack est un des jeux les moins avantageux pour le joueur.

2.2 Chance du croupier

Notre croupier est automatisé. Celui-ci est obligé de piocher des cartes jusqu'à obtenir le score de 17 (règle normal du blackjack pour que le croupier ait une chance de gagner). A partir de 17, il peut faire le choix de rester (stand) ou de piocher une carte (hit).

Imaginons que le score du croupier soit compris entre 14 et 17. Comment simuler son choix ? Il suffit de tirer un nombre aléatoire entre 0 et 9. Si le nombre est supérieur à 4, alors le croupier tire une carte. Sinon, il ne fait rien. Le croupier aura donc 60% de chance de tirer une carte et 40% de ne rien faire.

2.3 Retour espéré

Le retour espéré est un pourcentage attribué à chaque jeu qui définit la somme que doit reverser obligatoirement le casino aux joueurs, en fonction des mises. Parier un montant moindre à chaque fois ne change pas les chances de gagner une seule main, mais cela réduit la variation du retour espéré. En d'autres termes, la probabilité que vous vous retrouviez dans le positif diminue avec le temps de jeu.

Comment calcule-t-on le retour espéré ?

$Retouresp\acute{e}r\acute{e} = P(1 - P(blackjack)) * miseperdue - P(blackjack) * misegagn\acute{e}$

2.4 Probabilité de la bonne main

Au blackjack, une bonne main est le fait de démarrer avec 21, 20, 19 ou 18 points (en seulement deux cartes donc). En début de jeu, on peut calculer la probabilité que le joueur démarre avec une bonne main. Pour 52 cartes on a :

Pour 21 points (le cas Blackjack), nous avons déjà calculé la probabilité qui est de 5%.

Pour 20 points, les cas possibles sont : un AS et un 9. Ou deux têtes. On a donc $P(20points) = \frac{C_1^4 C_1^4 + C_2^{16}}{C_2^{52}} = 10.25\%$

Pour 19 points, les cas possible sont : une tête et un neuf; un AS et un 8. On a donc $P(19points) = \frac{C_2^4 + C_1^{16} C_1^4}{C_2^{52}} = 5.97\%$

Pour 18 points, les cas possible sont : une tête et un 8; un AS et un 7; deux 9. On a donc $P(19points) = \frac{C_2^4 + C_1^{16} C_1^4 + C_2^4}{C_2^{52}} = 6.48\%$

Pour la bonne main totale : $P(bonnemain) = P(21points) + P(20points) + P(19points) + P(18points) = 27.6\%$

2.5 Probabilité de la prochaine carte

Dans le blackjack équilibré de 52 cartes ou 32 cartes, on a 4 as et 16 cartes allant de 10 à Roi (on rappelle que chaque carte est décliné en 4 couleurs). Dans le jeu déséquilibré de 52 ou 32 cartes, on a 12 as et 20 cartes allant de 10 à Roi.

Le joueur peut entrer la valeur de la carte dont il aimerait savoir la probabilité pour le prochain tirage. La formule de probabilité pour obtenir une certaine valeur favorable dépend du nombre de jeux de cartes utilisés. Si l'on indique par x une valeur favorable, par nx le nombre de cartes ayant la valeur x (de la main du joueur et du dealer) et par nv le nombre total de cartes, alors la probabilité que la prochaine carte du jeu ait la valeur x est :

Pour le jeu équilibré :

- $P(prochainecarte = x) = \frac{4 - nx}{nombredecartestotaldanslepaquet - nv} si x \neq 10$
- $P(prochainecarte = x) = \frac{16 - nx}{nombredecartestotaldanslepaquet - nv} si x = 10$

Pour le jeu déséquilibré :

- $P(prochainecarte = x) = \frac{12 - nx}{nombredecartestotaldanslepaquet - nv} si x \neq 10$
- $P(prochainecarte = x) = \frac{20 - nx}{nombredecartestotaldanslepaquet - nv} si x = 10$

2.6 Probabilité de brûler

Brûler (qu'on appelle bust) au blackjack signifie dépasser le 21. On veut calculer la probabilité de bust à la prochaine carte donné (au prochain hit). La formule utilisée est la suivante : $P(bust) = \frac{nombredecartequipeuventfairebrûler}{nombredecarteinconnue}$

On s'explique : à chaque fois avant le hit, on vérifie le score du joueur. On soustrait 21 (le blackjack) à ce score. On obtient la limite à ne pas dépasser, i.e les valeurs de carte qu'il ne faut pas dépasser. Pour trouver le nombre de carte qui ferait dépasser la limite, on parcourt le deck du joueur et on vérifie à chaque carte si elle est supérieure ou non à la limite. Si c'est le cas, on ajoute 1 au compteur. A la fin du parcours, on aura donc le nombre de carte qui font brûler.

Le nombre de carte inconnue est le nombre de carte contenu dans le paquet - le nombre de carte dans la main du joueur.

2.7 Graphique du couple aléatoire et de la distribution des cartes

Pour le cas d'un couple aléatoire, on peut généraliser une loi de probabilité. Soit (X,Y), un couple de variable aléatoire et si l'on définit Z = h(X,Y), la fonction de répartition de cette variable est obtenue en identifiant pour le couple (X,Y) un événement. Soit Z = X + Y avec $X \perp Y$ car X et Y ont la même distribution

On cherche donc la distribution des valeurs obtenues avec les deux premières cartes si l'on veut obtenir la plus grosse somme (avec l'AS valant 11). Soit X et Y les valeurs respectives de la première et de la deuxième carte. Les valeurs possibles vont de 2 à 11 pour X et Y. Dans un jeu classique de 52 cartes, on a comme distribution :

$p_z(4) = p_x(2) * p_y(2) = 1/169$ car $p_x(x) = 1/13$ si $2 \leq x \leq 9$ et $p_x(10) = 4/13$ et $p_x(11) = 1/13$

avec ce même principe, on calcule toutes les répartitions possibles jusqu'à la valeur 22 (deux AS). Cela donne le graphique que vous pouvez voir sur le site.

2.8 Risque de ruine

L'opposé du gain de la $n^{ème}$ manche constitue une perte X_n. On peut donc calculer la perte cumulée à la $i^{ème}$ manche. $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ En mathématiques, on appelle la suite $(S_1, S_2, ..., S_n)$ la marche au hasard.

On suppose que le joueur est compétant : l'espérance de gain à un manche est donc $\nu > 0$. On a donc comme espérance de perte $E(X_1) = -\nu$ On peut donc calculer la variance sur le gain ou la perte : $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$

Ici, comme le jeu est hasardeux, à tout moment il peut y avoir une perte cumulée, qui va dépasser la cagnotte Ca. $\exists$ n tq $S_n \geq Ca$. Ce qui simule la ruine.

On suppose la perte X_n composé d'une partie déterministe (pour le même argument renverra toujours le même résultat) $-\nu$ et de fluctuation aléatoire de la loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2

Puisque le jeu est en temps continu, on peut calculer la perte du joueur à un instant t. Celle-ci est composée d'une partie déterministe $-\nu t$ et de fluctuation cumulée σWt de la loi normale centrée, issue des manches aux instants $S \leq t$

Comme la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances, on demande que la variance de σWt soit $\sigma^2 t$ (cf mouvement brownien standard)

On peut donc calculer le risque de perte comme suit : $\exp(\frac{-2\nu Ca}{\sigma^2})$

σ étant l'espérance