Projet de math

LAFONTAINE Laurine - SÉGUY Margaux

IMAC 2021

Chapter 1

Présentation du projet Blackjack

Le blackjack est un jeu régi par la loi hypergéométrique car c'est un jeu sans remise. Si on ne descend pas au niveau de la main, mais que l'on reste au niveau du sabot, chaque sabot étant indépendant du prochain, on peut approximer le jeu avec une loi binomiale. Le jeu est constitué d'une suite de manches indépendantes les unes des autres où le joueur gagne ou perd, toujours selon la même loi. A chaque manche, le joueur touche un gain positif ou négatif aléatoire. On notera Ca la cagnotte du jeu.

1.1 Début de jeu

Soit un paquet de 52 cartes.

On note P(blackjack) la probabilité de gagner au Blackjack dès le début de la partie, lors de la première attribution de cartes. L'événement possible est donc d'avoir un as (qui vaut 11 points) + soit un dix, un valet, une dame ou un roi (ses cartes valent 10 points). On appelle épreuve de Bernoulli une épreuve n'ayant que deux issues : Succès (S) et Échec(E). Ici, on utilisera la propriété combinatoire suivante : $P(X) = \frac{nb_{issuesfavorables}}{nb_{issues}}$

- Le nombre d'issues possibles de ce jeu est C_2^{52}
- Le nombre d'issues favorables est C_1^4 (1 as parmi les 4 dans le jeu) et C_1^{16} (le nombre de têtes possibles = 4 * 4 cartes par couleurs = 16)

- On a donc $P(blackjack) = \frac{C_1^4 C_1^{16}}{C_2^{52}} = \frac{32}{663} = 0,05$

Le joueur a donc une probabilité de 0,05 de gagner dès le début.

1.2 Chance du croupier

Notre croupier est automatisé. Celui-ci est obligé de piocher des cartes jusqu'à obtenir le score de 17 (règle normal du blackjack pour que le croupier ait une chance de gagner). A partir de 17, il peut faire le choix de rester (stand) ou de piocher une carte (hit).

Imaginons que le score du croupier est compris entre 14 et 17. Comment simuler son choix ? Il suffit de tirer un nombre aléatoire entre 0 et 9. Si le nombre est supérieur à 4, alors le croupier tire une carte. Sinon, il ne fait rien. Le croupier aura donc 60% de chance de tirer une carte et 40% de ne rien faire.

1.3 Risque de ruine

L'opposé du gain de la $n^{ème}$ manche constitue une perte X_n. On peut donc calculer la perte cumulée à la $i^{ème}$ manche. $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ En mathématiques, on appelle la suite $(S_1, S_2, ..., S_n)$ la marche au hasard.

On suppose que le joueur est compétant : l'espérance de gain à un manche est donc $\nu > 0$. On a donc comme espérance de perte $E(X_1) = -\nu$ On peut donc calculer la variance sur le gain ou la perte : $Var(X_1) = \sigma^2 > 0$

Ici, comme le jeu est hasardeux, à tout moment il peut y avoir une perte cumulée, qui va dépasser la cagnotte Ca. $\exists$ n tq $S_n \geq Ca$. Ce qui simule la ruine.

On suppose la perte X_n composé d'une partie déterministe (pour le même argument renverra toujours le même résultat) $-\nu$ et de fluctuation aléatoire de la loi normale d'espérance 0 et de variance σ^2

Puisque le jeu est en temps continu, on peut calculer la perte du joueur à un instant t. Celle-ci est composée d'une partie déterministe $-\nu t$ et de fluctuation cumulée σWt de la loi normale centrée, issue des manches aux instants $S \leq t$

Comme la variance d'une somme de variables indépendantes est la somme des variances, on demande que la variance de σWt soit $\sigma^2 t$ (cf mouvement brownien standard)

On peut donc calculer le risque de perte comme suit : $\exp(\frac{-2\nu Ca}{\sigma^2})$
σ étant l'espérance