Sprawozdanie – Laboratorium nr 9

Aproksymacja wielomianowa

Marcin Urbanowicz

5 maja 2021

1. Wstęp teoretyczny

Tematem laboratoriów była aproksymacja wielomianowa.

1.1. Aproksymacja funkcji

Aproksymacją w największym skrócie nazywamy zastępowanie jednej funkcji (zwanej funkcją aproksymowaną) inną funkcją (funkcją aproksymacyjną) w taki sposób, aby funkcje te niewiele różniły się w sensie określonej normy. Aproksymację można wykorzystać, gdy nie istnieje funkcja analityczna pozwalająca na wyznaczenie wartości dla dowolnego z jej argumentów, a jednocześnie wartości funkcji są dla pewnego zbioru jej argumentów znane. Niestety w czasie aproksymacji pojawiają się błędy, zwane błędami aproksymacji. Jedną z najpopularniejszych miar błędu aproksymacji jest średni błąd kwadratowy. Pomimo tego dużą zaletą aproksymacji w porównaniu do interpolacji jest fakt, że aby dobrze przybliżyć funkcję, funkcja aproksymująca nie musi być wielomianem wysokiego stopnia.

Istnieje wiele metod aproksymacji np.: liniowa, średniokwadratowa, jednostajna itd.

1.2. Aproksymacja wielomianowa

Jest to jeden z rodzajów aproksymacji średniokwadratowej. Dysponuje układem funkcji bazowych w podprzestrzeni X_n :

$$\Phi_i(x), \quad i = 0, 1, \dots, m$$

Szukamy takiego wielomiany F(x), który będzie najlepszym przybliżeniem średniokwadratowym funkcji $f(x)$ na zbiorze $X = (x_j)$:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i \, \Phi_i(x)$$

Dla F(x) liczymy normę L_2:

$$H(a_0, a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=0}^{n} w(x_j)[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \, \Phi_i(x_2)]^2 = \sum_{j=0}^{n} w(x_j) R_j^2$$

Gdzie: R_j – jest odchyleniem w punkcie x_j

Następnie szukamy minimum funkcji H ze względu na współczynniki a_i:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k}, \quad k = 0, 1, \dots, m$$

Powyższy warunek generuje m + 1 równań liniowych z m + 1 niewiadomymi:

$$\frac{\partial H}{\partial a_k} = -2\sum_{j=0}^{n} w(x_j)\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i \Phi_i(x_j)\right]\Phi_k(x_j) = 0$$

Taki układ jest układem normalnym. Funkcje bazowe są liniowo niezależne, więc istnieje dokładnie jedno rozwiązanie minimalnej wartości *H*. Układ ten można zapisać w postaci macierzowej:

$$\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{f}$$

Gdzie:

- D – macierz wypełniona według wzoru $d_{i,j} = \Phi_j(x_i),\ \ i = 0, 1, \dots, n \quad j = 0, 1, \dots m$
- A – wektor współczynników a_i
- f – wektor wartości funkcji f w kolejnych węzłach $x_0, x_1, \dots, x_n$.

1.3. Aproksymacja średniokwadratowa w bazie jednomianów

Baza jednomianów to ciąg: 1, x, x^2, …, x^m. Warunek na minimum przyjmuje postać:

$$\sum_{j=0}^{m}\left[f(x_j) - \sum_{i=0}^{m} a_i x_j^i\right]x_j^k = 0, k = 0, 1, \dots, m$$

Po zmianie kolejności sumowania:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i\left(\sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}\right) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)x_j^k$$

Następnie wprowadzamy oznaczenia:

$$g_{i,k} = \sum_{j=0}^{n} x_j^{i+k}$$

$$\rho_k = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)x_j^k$$

Dzięki wprowadzonemu powyżej oznaczeniu otrzymujemy układ normalny:

$$\sum_{i=0}^{m} a_i g_{i,k} = \rho_k$$

$$\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{a} = \rho$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Na laboratorium zajmowaliśmy się aproksymacją funkcji:

$$g(x) = \exp\left(-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma^2}\right) = \exp\,(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$$

Gdzie:

- $x_0 = 2$
- $\sigma = 4$
- $a_0 = \frac{-x_0^2}{2\sigma^2}$
- $a_1 = x_0 \sigma^2$
- $a_2 = \frac{-1}{2\sigma^2}$

Po zlogarytmowaniu funkcji g(x) otrzymujemy funkcję:

$$f(x) = \ln\big(g(x)\big) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

Funkcję tą można aproksymować w bazie jednomianów. Wybrana została baza jednomianów $\Phi_i = 1, x, x^2, x^3$, dla której szukaliśmy kombinacji liniowej:

$$F(x) = \sum_{i=0}^{m=3} b_i x^i$$

Dzięki temu mogliśmy utworzyć funkcję G(x), będącą przybliżeniem funkcji g(x):

$$g(x) \approx G(x) = \exp\big(F(x)\big) = \exp\,(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3)$$

Aproksymację przeprowadzaliśmy w przedziale $x \in [-3\sigma + x_0, 3\sigma + x_0]$.

Aby znaleźć współczynniki b_i, należało skorzystać ze wzorów i po dokonaniu odpowiednich przekształceń utworzyć stworzyć układ równań:

$$\boldsymbol{Gb} = \boldsymbol{r}$$

Elementy macierzy **G** i wektora **r** tworzyliśmy zgodnie z poniższym schematem:

$$g_{i,k} = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}$$

$$r_k = \sum_{j=0}^{N-1} x_j^{i+k}$$

Rozwiązanie układu równań daje nam wektor współczynników b_i.

Na początku należało stworzyć i zapisać do wektora węzły siatki dla danego N, które stworzyliśmy jako równoodległe od siebie, a następnie wektory z wartościami w węzłach g(x) i f(x).

Przy sworzeniu programu do aproksymacji funkcji posługiwaliśmy się, z zalecenia prowadzącego, biblioteką GSL, z której wykorzystywaliśmy wektory, macierze oraz metodę Householdera do rozwiązanie układu równań.

Aproksymację g(x) rozpatrywaliśmy dla następujących parametrów:

- $x_0 = 2$
- $\sigma = 4$
- $m = 4$
- $N = 11$

Następnie należało przeprowadzić aproksymację funkcji:

$$g_2(x) = g(x)(1 + \delta(x))$$

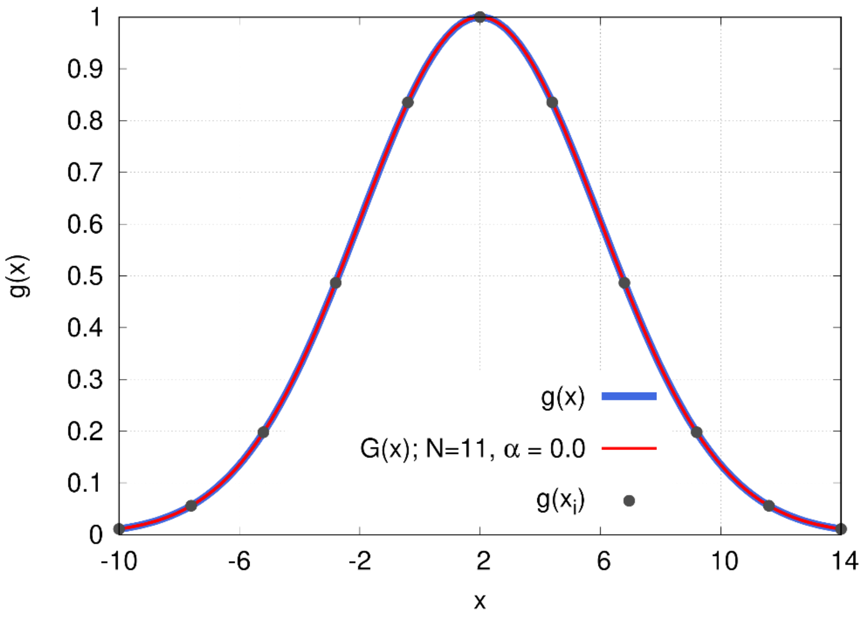
Gdzie $\delta(x) = \alpha \cdot (U - 0.5)$, α = 0.5, natomiast U jest liczbą pseudolosową z przedziału od 0 do 1

Pozostałe parametry są takie same jak przy aproksymacji g(x), z tym, że trzeba było ją wykonać dla N = 11 i dla N = 101.

Dla obu funkcji trzeba było stworzyć wykresy oraz porównać wartość b_i z wartościami a_i.

2.2. Wyniki

Dla parametrów α = 0, N = 11



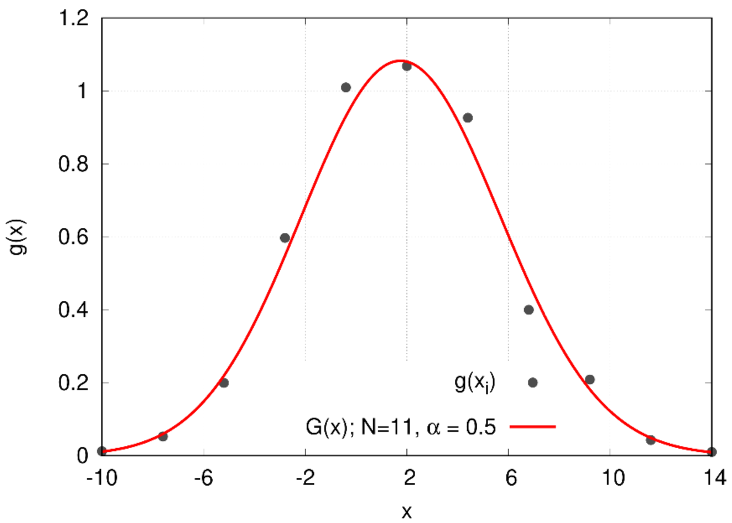
Rysunek 1: Aproksymacja funkcji g(x)

Na powyższym wykresie widać, że oszacowana funkcja pokrywa się z funkcją g(x). Węzły znajdują się na funkcji, co jest zgodne ze sposobem w jaki sposób obliczane były wartości węzłów, czyli bez losowych szumów.

	Analityczne		Numeryczne
a_0	-0.125	b_0	-0.125
a_1	0.125	b_1	0.125
a_2	-0.03125	b_2	-0.03125
		b_3	0

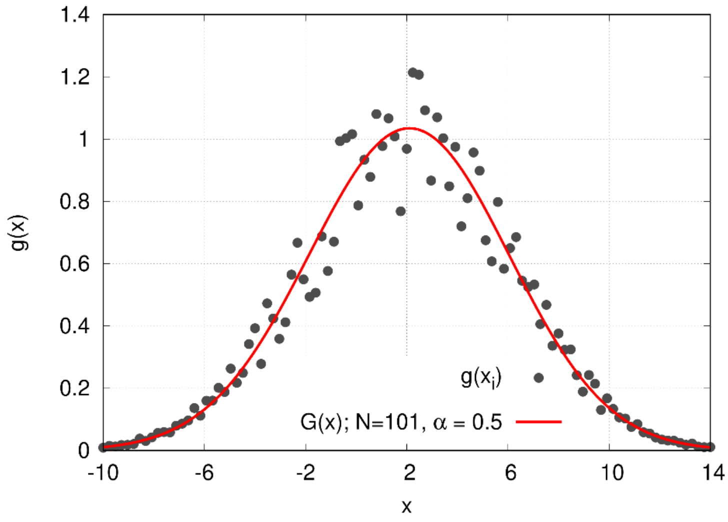
Tabela 1: Współczynniki a_i, oraz odpowiadające i przybliżone współrzędne b_i

Dla parametrów N = 11, α = 0.5



Rysunek 2: Aproksymacja funkcja $g_2(x)$ N = 11, α 0.5

Dla parametrów N = 101, α = 0.5



Rysunek 3: Aproksymacja funkcji $g_2(x)$ dla N = 101, α 0.5

Dla węzłów obliczanych z losowymi szumami (wynikającymi ze zmiany parametru α) również widać, że funkcja jest bardzo zbliżona do funkcji, której aproksymacji dokonywaliśmy.

	Analityczne		Numeryczne N = 11	Numeryczne N = 101
a_0	-0.125	b_0	-0.02093	-0.10646
a_1	0.125	b_1	0.11462	0.13335
a_2	-0.03125	b_2	-0.03298	-0.03146
		b_3	0.00007	-0.00007

Tabela 2: Współczynniki a_i oraz odpowiadające im przybliżone współczynniki b_i dla funkcji g(x) z losowym szumem

3. Wnioski

Aproksymacja wielomianowa pozwala na szybkie i dokładne wyznaczenie funkcji, gdy znamy jej wartości w danym zbiorze. Jej dużą zaletą jest fakt, że do przybliżenia wartości funkcji nie potrzebny jest wielomian wysokiego stopnia oraz fakt, że węzły mogą być równoodległe, a mimo to oszacowanie funkcji nie straci na dokładności w przeciwieństwie np. do omawianej wcześniej interpolacji