Sprawozdanie – Laboratorium 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Marcin Urbanowicz

10.03.2021

1. Wstęp teoretyczny

Metoda LU należy do sposobów rozwiązywania układów równań liniowych. W wyniku tak zwanej dekompozycji, macierz wejściową zmienia się w iloczyn dwóch macierzy: macierzy trójkątnej górnej **U** (z ang. upper) oraz trójkątnej dolnej **L** (z ang lower).

1.1. Dekompozycja LU

Dla zobrazowania przyjmijmy, że macierz A jest rozmiaru n x n i ma postać:

$$\mathbf{A}_{n*n} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Jak już napisałem wcześniej szukamy L i U takich, że:

$$A = L * U$$

A zatem macierze te przyjmują następującą postać:

$$\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

Znając definicję iloczynu macierzy możemy wyznaczyć następujące wzory na poszczególne elementy macierzy L i U

$$u_{i,j} = a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} * u_{k,j} \text{ oraz } l_{i,j} = \frac{1}{u_{j,j}} * \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{i,k} * u_{k,j}\right)$$

Dla ułatwienia możemy przyjąć, że wszystkie elementy na diagonali macierzy L są jedynkami.

Jest wiele sposobów by dojść do takiego rozkładu np. poprzez metodę Crout'a, która jest ulepszeniem algorytmu eliminacji Gaussa.

1.2. Rozwiązanie układu równań liniowych

Po skorzystaniu z rozkładu LU równanie macierzowe uzyskuje postać:

$$A \cdot x=(L \cdot U)\cdot x=L \cdot (U \cdot x)=b$$

i sprowadza się do obliczenia:

$$L \cdot y = b$$

$$U \cdot x = y$$

Rozwiązanie takich dwóch równań jest szybsze niż jednego pierwotnego, ponieważ układ z macierzą trójkątną jest trywialny

1.3. Zastosowanie rozkładu LU do odwracanie macierzy oraz wyznacznika

1.3.1. Wyznacznik - det(A)

Z twierdzenia Cauchy'ego:

$$\mathbf{det(A) = det\ (L \cdot U) = det(L) \cdot det(U)}$$

Korzystając z faktu, że wyznaczniki macierzy trójkątnych to iloczyny przekątnych:

det(L) $= l_{1,1} \cdot l_{2,2} \cdot \ldots \cdot l_{n,n}$ **det(U)** $= u_{1,1} \cdot u_{2,2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot u_{n,n}$.

Co więcej gdy założymy, że elementy na diagonali **L** są jedynkami, to **det(L)** = 1. Wówczas,

det(A) = det(U)

1.3.2. Odwracanie macierzy

Rozkład LU jest też przydatny do odwracania macierzy. By to zrobić trzeba rozwiązać n układów równań z wektorami wyrazów wolnych postaci

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Kolejne wektory rozwiązań tworzą macierz odwrotną do macierzy A

2. Opis zagadnienia

Na zajęciach utworzyliśmy macierz kwadratową A o wymiarze 4x4. Elementy macierzy były tworzone według wzoru:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta},$$

gdzie $\delta = 2$ ze względu na użycie biblioteki Gnu scientific library (GSL)

Z pomocą uzyskanej w ten sposób macierzy mieliśmy rozwiązać następujące podpunkty:

2.1. Znaleźć rozkład LU

Wykorzystaliśmy w tym celu z funkcji biblioteki GSL o prototypie:

int gsl_linalg_LU_decomp(gsl_matrix * A, gsl_permutation * p, int * signum)

Gdzie: A – macierz, p – wektor permutacji, signum – znak permutacji, przekazywany jako adres

Efektem wywołania tej funkcji była zamiana macierzy A w macierz, w której zawarta jest macierz LU odpowiednio U z góry, L z dołu.

2.2. Znaleźć wyznacznik macierzy A

Skorzystaliśmy tutaj z wiedzy, którą opisałem już w podpunkcie **1.3.1** z drobną modyfikacją wynikającą ze specyfiki wykorzystanej funkcji biblioteki GSL, która ustawia znak permutacji jako signum więc musimy go uwzględnić przy obliczeniach:

$$\mathbf{det(A) = signum \cdot det(A') = signum \cdot det(L \cdot U) = signum \cdot det(L) \cdot det(U) = signum \cdot det(U)}$$

A' – macierz A po permutacji

2.3. Rozwiązać układ równań

Posłużyła do tego procedura:

int gsl_linalg_LU_solve(const gsl_matrix * LU, const gsl_permutation * p, const gsl_vector * b, gsl_vector * x)

Gdzie: LU – rozkład macierzy LU (zapisany w A), p – wektor permutacji, b – aktualny wektor wyrazów wolnych (w naszym wypadku wyzerowany), x – wektor z wynikami

2.4. Sprawdzić wynik mnożenia macierzy A z macierzą A^{-1}

Wykorzystana została technika zaprezentowana w **1.3.2** z wykorzystaniem funkcji z podpunktu wyżej **2.3**. Prawidłowym wynikiem powinna być oczywiście macierz jednostkowa.

2.5. Obliczyć wskaźnik uwarunkowania macierzy

Wskaźnik ten jest to iloczyn normy macierzy i normy macierzy odwrotnej, czyli:

$$\mathrm{cond} = \|A\|_{\alpha,\beta} \cdot \|A^{-1}\|_{\alpha,\beta}$$

3. Wyniki

Macierz A, która powstała ze wzoru podanego w rozdziale wyżej:

$$A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.33333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.33333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{pmatrix}$$

3.1. Dekompozycja LU:

$$\mathbf{LU} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.333333343 & 0.25 & 0.2 \\ 0.4 & 0.033333332 & 0.042857148 & 0.044999998 \\ 0.666666687 & 0.833332961 & -0.002380942 & -0.004166649 \\ 0.5 & 0.99999997 & 0.142857 & 0.000059518 \end{pmatrix}$$

3.2. Wyznacznik macierzy A:

det(A) = 0,00000000236180617385

3.3. Macierz odwrotna do macierzy A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 200.02 & -1200.11 & 2100.22 & -1120.12 \\ -1200.11 & 8100.79 & -15121.54 & 8400.88 \\ 2100.22 & -15121.54 & 29402.98 & -16801.71 \\ -1120.12 & 8400.88 & -16801.71 & 9800.98 \end{pmatrix}$$

3.4. Iloczyn macierzy A i macierzy A^{-1}:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 100.00796 & -400.03739 & 525.05414 & -224.02470 \\ -480.04487 & 270.02646 & -648.06597 & 378.03951 \\ 1400.14442 & -12601.27573 & -70.00681 & 70.00681 \\ -560.06175 & 8400.87828 & -8400.87853 & -0.58333 \end{pmatrix}$$

(Wynik jest dość dziwny, ale nie zauważyłem błędu w kodzie, który mógłby go powodować)

3.5. Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$\|A\| = 0.5$

$\|A^{-1}\| = 29402.983$

$\kappa(A) = 14701.491424$

4. Wyniki

Otrzymany na końcu wysoki wskaźnik uwarunkowania macierzy świadczy o tym, że dane rozwiązywanego przez nas problemu były źle dobrane i przez to nie nadają się do metod numerycznych.