Sprawozdanie - Laboratorium 4

Uogólniony (symetryczny) problem własny – wyznaczanie modów własnych struny w 1D

Marcin Urbanowicz 24.03.2021

1. Wstęp teoretyczny

Na laboratorium zajęliśmy się wyznaczaniem częstości drgań własnych struny, której wychylenie w czasie i przestrzeni jest dane funkcją:

$$\psi = \psi(x, t)$$

Natomiast dynamiką struny rządzi równanie falowe:

$$\frac{N}{\rho(x)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

Gdzie:

- N – naciąg struny
- $\rho(x)$ – liniowy rozkład gęstości

Dokonując kolejnych przekształceń powyższego równania , możemy uzyskać postać równanie różniczkowego zależnego wyłącznie od zmiennej położeniowej:

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \lambda \frac{\rho(x)}{N} u$$

W równaniu tym λ jest kwadratem częstości drgań własnych

Struna jest zamocowana w punktach ± L/2 (L – długość struny). Dzięki takiemu zamocowaniu możliwe jest wprowadzenie siatki równoodległych od siebie węzłów, które określać będą kolejne punkty na danej strunie. Odległość między nimi jest dana zależnością:

$$\Delta x = \frac{L}{n+1}$$

Położenie natomiast wyznaczamy w taki sposób:

$$x_i = -\frac{L}{2} + \Delta x \cdot (i+1), i = 0,1,2, \dots, n-1$$

Mając tak przygotowane dane, możemy dokonać dyskretyzacji równania $-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \lambda \frac{\rho(x)}{N} u$ podstawiając trójpunktowy iloraz różnicowy za drugą pochodną i uzyskując poniższą zależność:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{\Delta x^2} = \lambda \frac{\rho_i}{N} u_i$$

które najlepiej zapisać macierzowo:

$$\mathrm{Au} = \lambda \mathrm{Bu}$$

Powyższa zależność stanowi uogólniony problem własny. Elementy macierz A oraz B definiujemy w sposób następujący:

$$A_{i,j} = \frac{-\delta_{i,j+1} + 2\delta_{i,j} - \delta_{i,j-1}}{\Delta x^2}$$

$$B_{i,j} = \frac{\rho_i}{N} \delta_{i,j}$$

Gdzie:

- Δx to odległość między węzłami utworzonej siatki, a
- $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest było rozwiązanie uogólnionego problemu własnego dla poniższych danych:

- L = 10 (parametr określający długość struny)
- N = 200 (parametr określający liczbę węzłów na siatce)
- $\rho(x) = 1 + 4\alpha x^2$ (liniowy rozkład gęstości)
- N = 1 (naciąg struny)

Najpierw utworzyliśmy macierze A i B według wzorów podanych w rozdziale wyżej.

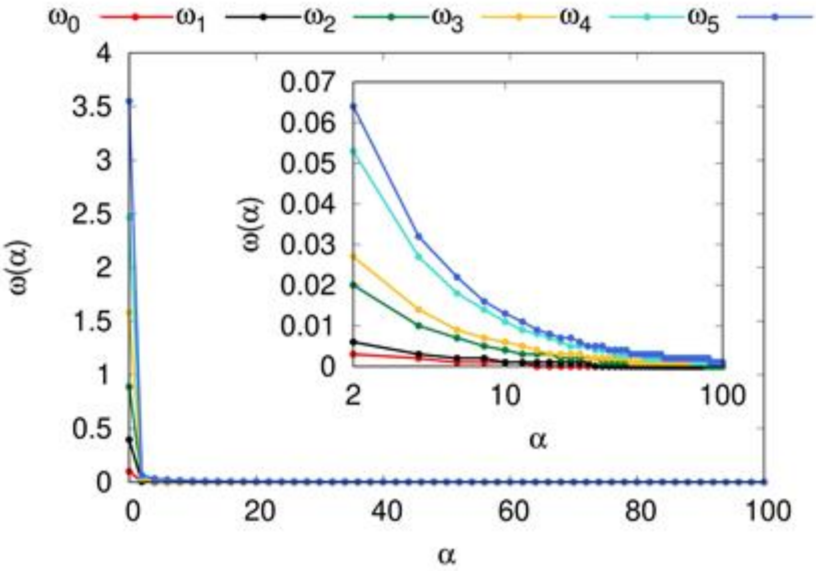
Następnie naszym zadaniem było rozwiązanie równania macierzowego uogólnionego problemu własnego dla parametru $\alpha \in [0,100]$ z krokiem $\Delta\alpha = 2$. Dla każdego parametru α należy wypisać wartości pierwiastków z 6 najmniejszych wartości własnych i sporządzić odpowiedni wykres

W rozwiązaniu zadania posługujemy się biblioteką GNU Scientific Library (GSL), a konkretnie funkcjami:

- *gsl_eigen_gensymm* (rozwiązanie równania)
- *gsl_eigen_gensymmv_sort* (posortowanie otrzymanych danych rosnąco)

2.2. Wyniki

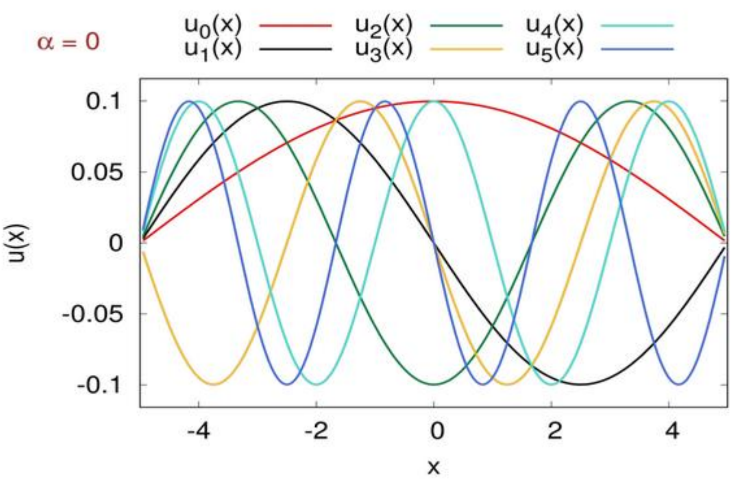
Na poniższym rysunku przedstawiono zależność częstotliwości własnej struny w funkcji parametru α:



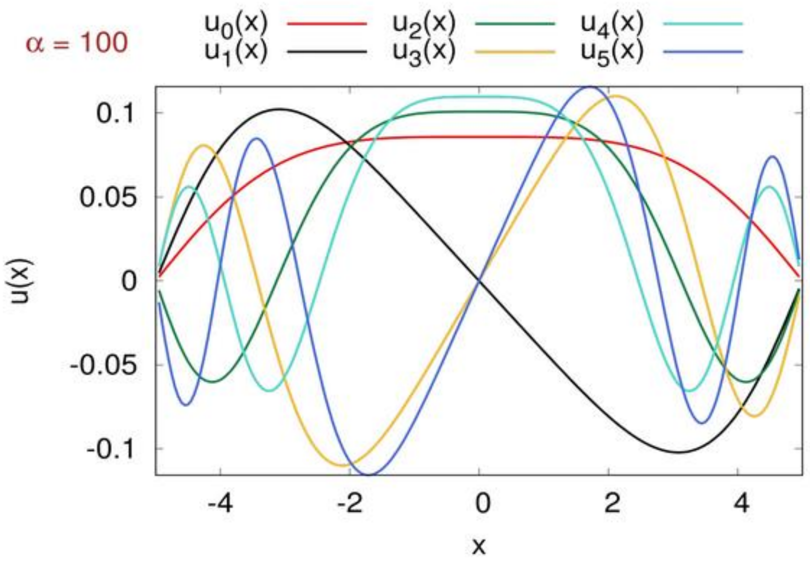
Wykres 1: Zmiany wartości własnych w funkcji parametru α. Wstawiony wykres ma skalę logarytmiczną na osi poziomej, ograniczoną do wartości [2, 100]

Jak widać na przedstawionym wykresie, częstości własne maleją wraz ze wzrostem parametru α. Jego wzrost powoduje bowiem wzrost gęstości struny. Przy zwiększającym się α można zaobserwować grupowanie się częstości w pary.

Kolejne dwa wykresy przedstawiają wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym.



Wykres 2: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym. Przypadek dla α = 0.



Wykres 3: Wektory własne odpowiadające sześciu najniższym wartościom własnym. Przypadek dla niejednorodnej gęstości α = 100.

Wykres 2 wskazuje nam, że wektory własne dla wartości α = 0 będące w funkcji umiejscowienia punktu na strunie są nieparzystymi wielokrotnościami połówek wykresów funkcji sinus.

Wykres 3 przedstawia nam wyraźnie, że funkcje oznaczone parzystymi indeksami są funkcjami parzystymi, a pozostałe są nieparzyste. Środek struny staje się masywny dla α = 100, stąd spłaszczenie wykresu wektorów o parzystych indeksach w okolicach środka

3. Wnioski

Możemy zauważyć, że liniowa gęstość struny w sposób znaczący wpływa na wartości i wektory własne otrzymywane z rozwiązania rówania uogólnionego problemu własnego.

Na podstawie pierwszego wykresu można zaobserwować, że dla jednorodnej gęstości całej struny, częstości własne tej struny są bardzo duże w porównaniu z tymi, jakie obserwuje się w przypadku drgań o niejednorodnej gęstości. Wraz ze wzrostem ciężaru struny (w tym wypadku parametru α) częstości własne maleją drastycznie.

Dwa następne wykresy wskazują na to, że gdy struna jest jednolitej gęstości, jej wektory własne odpowiadające szęsciu najniższym wartościom własny, prezentują się ma wykresie jako połówki sinusa, które ulegają znacznemu spłaszczeniu na środku, gdy rośnie parametr α, a z nim gęstość środka struny. W drugim przypadku amplituda wykresu najpierw rosła, a potem malała, dokładnie, jak można by się spodziewać w przypadku drgań struny o większym ciężarze środka.