Sprawozdanie – Laboratorium nr 12

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowanie przy użyciu wzorów Simpsona i Milne'a

Marcin Urbanowicz

26 maja 2021

1. Wstęp teoretyczny

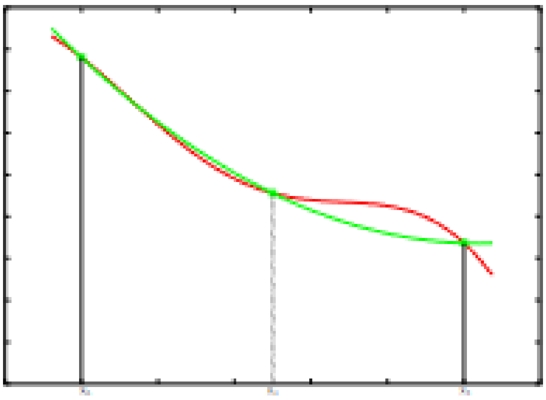
Na laboratorium zajmowaliśmy się zagadnieniem całkowania numerycznego, a konkretnie wzorach Simpsona i Milne'a oraz stosowaliśmy ekstrapolację Richardsona, w celu wyznaczenia jak najdokładniejszej wartości

1.1. Kwadratura Newtona – Cotesa

Jest to zbiór metod do obliczanie całek oznaczonych. Stosując je przyjmujemy, że wartości funkcji *f*(x) są znane w punktach, które są równooddalone od siebie.

1.2. Metoda Simpsona

W największym uproszczeniu metoda ta polega na przybliżaniu *f*(x) poprzez interpolację funkcją kwadratową, następnie obliczeniu pola powierzchni pod nią i zsumowaniu wszystkich takich pól powierzchni.



Rysunek 1:Przybliżenie funkcji *f*(x) (czerwona) funkcją kwadratową (zielona)

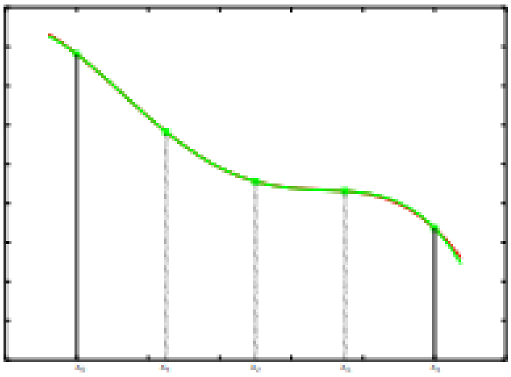
W celu zademonstrowania załóżmy, że całkujemy na przedziale [a, b]. Podzielimy ten przedział na dwa równe przedziały punktami x_0, x_1, x_2 ($x_0 = a, x_2 = b$), znamy wartości funkcji w tych punktach odpowiednio f_0, f_1, f_2 i h jest odległością pomiędzy sąsiednimi węzłami Otrzymujemy następującą postać wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(f_0 + 4f_1 + f_2) \tag{3}$$

Metoda ta nie jest w 100% dokładna (co widać na *rysunku 1*). W celu dokładniejszych przybliżeń skorzystamy z Ekstrapolacji Richardsona.

1.3. Metoda Milne'a

Metoda ta jest podobna do metody Simpsona z tą różnicą, że funkcję *f*(x) przybliżamy przy pomocy wielomianu stopnia 4 przechodzącego przez 5 węzłów (konieczne jest by liczba przedziałów zawsze była wielokrotnością liczby 4).



Rysunek 2: Przybliżenie funkcji *f*(x) (czerwona) wielomianem 4 stopnia (zielona)

Poza różnicą w sposobie przybliżania, metoda ta działa na takiej samej zasadzie jak metoda Simpsona, czyli liczymy pola powierzchni pod nią i sumujemy je. Przyjmując parametry podobnie jak przy metodzie Simpsona (tym razem bierzemy 5 punktów i wartości funkcji w nich) Wzór metody wygląda następująco:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{4h}{90}(7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4) \qquad (2)$$

W tej metodzie również jest ryzyko niedokładności, którą trzeba będzie przybliżyć.

1.4. Ekstrapolacja Richardsona

Ekstrapolacja Richardsona służy nam do możliwie najdokładniejszego wyznaczenia danej wartości, w naszym przypadku całki oznaczonej:

Metoda ta wygląda następująco:

1. Wybieramy *h* i liczymy:

$$D_{n,0} = \phi\left(\frac{h}{2^n}\right), n = 0, 1, 2, \dots, M \qquad (3)$$

gdzie ϕ to funkcja, dla której wartość chcemy wyznaczyć przybliżana jakimś wzorem numerycznym

2. Obliczamy kolejne wartości przybliżeń wg wzoru:

$$D_{n,k} = \frac{4^k}{4^{k-1}} D_{n,k-1} - \frac{1}{4^{k-1}} D_{n-1,\ k-1} \qquad k = 1, 2, \dots, M, \qquad n = k, k+1, \dots, M \quad (4)$$

Finalnie otrzymujemy następującą tablicę wartości:

$$\begin{array}{ccccc} D_{0,0} & & & & \\ D_{1,0} & D_{1,1} & & & \\ D_{2,0} & D_{2,1} & D_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_{M,0} & D_{M,1} & D_{M,2} & \cdots & D_{M,M} \end{array}$$

W tej tablicy wartość $D_{M,M}$ to najlepsze, możliwe w tej metodzie, przybliżenie wartości pochodnej lub całki

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Dla danej funkcji

$$f(x) = \ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)\sin(18x) \tag{5}$$

Naszym zadaniem było obliczenie całki w granicach [0, 1] stosując metodę Simpsona i Milne'a w połączeniu z ekstrapolacją Richardsona.

Zadanie było podzielone na dwie części:

1) Obliczenie pierwszej kolumny tablicy wartości całek $D_{n,0}$ w każdej iteracji posługując się krokiem:
   - Dla wzory Simpsona:

$$h_n = \frac{b-a}{2^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 8 \qquad N = 2^{n+1} \tag{6}$$

   - Dla wzory Simpsona:

$$h_n = \frac{b-a}{2^{n+2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, 8 \qquad N = 2^{n+2} \tag{7}$$

   Gdzie a, b to granice całkowanie, czyli w naszym wypadku a = 0, b = 1

2) Na podstawie znajomości pierwszej kolumny i wzoru ekstrapolacyjnego należy wyznaczyć pozostałe elementy tablicy

2.2. Wyniki

W tabelach mamy wartości elementów $D_{w,0}$ oraz $D_{w,w}$ z tablicy całek dla $\int_0^1 \ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)\sin(18x)dx$, obliczone dla:

- Metody Simpsona

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	0	0
1	0.206303	0.27507
2	-0.196717	-0.371466
3	-0.0460846	0.0327883
4	-0.0949457	-0.121835
5	-0.141931	-0.161542
6	-0.165479	-0.174662
7	-0.176418	-0.180642
8	-0.181575	-0.183573

- Metody Milne'a

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	0	0
1	-0.138482	-0.184642
2	-0.0920985	-0.0694371
3	-0.0686894	-0.059684
4	-0.122014	-0.146742
5	-0.161036	-0.176973
6	-0.178252	-0.184827
7	-0.185478	-0.188219
8	-0.188647	-0.18986

3. Wnioski

Metody Simpsona i Milne'a ze względu na możliwe niedokładności w dopasowaniu nie zawsze dają nam najdokładniejsze wyniki, możemy jednak zwiększyć dokładność wyników stosując ekstrapolację Richardsona, co powoduje, że otrzymane wyniki są bardzo zbieżne z rzeczywistością.