Sprawozdanie – Laboratorium nr 1

Rozwiązywanie UARL metodami bezpośrednimi

Marcin Urbanowicz 03.03.2021

1. Wstęp teoretyczny:

Naszym zadaniem jest rozwiązanie układu równań liniowych postaci:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Jest to układ m – równań z n - niewiadomymi. Wyrazy $a_{i,j}$ (i, $\in$ 1,2,...m, j $\in$ 1,2,...n) są to współczynniki układu, natomiast liczby b_i (i $\in$ 1,2,...,m) są wyrazami wolnymi.

Układ równań można także zapisać w postaci macierzowej:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \quad [A]\overline{x} = \overline{b}$$

Postać ta jest szczególnie wygodna, gdyż dzięki niej możemy skorzystać z wielu metod rozwiązywania układu, między innymi metody Gaussa – Jordana.

1.1 Metoda Gaussa-Jordana

Metoda Gaussa – Jordana służy do odwracania macierzy oraz rozwiązywania układów równań z wieloma niewiadomymi

Dla zaprezentowania działania metody, posłużę się układem równań:

$$\begin{cases} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3 \end{cases}$$

Jest to układ trzech równań z trzema niewiadomymi, który zapisujemy w postaci macierzowej:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Następnie tworzymy wyznacznik z macierzy rozszerzonej, która składa się ze „sklejenia" dwóch macierzy, macierzy współczynników oraz macierzy wyrazów wolnych

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{array}\right]$$

Za pomocą różnych przekształceń doprowadzamy powyższą macierz do macierzy jednostkowej, która wygląda w następujący sposób:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & e_3 \end{array}\right]$$

Jak widać rozwiązaniem układu równań jest zestaw:

$$\begin{cases} x_1 = e_1 \\ x_2 = e_2 \\ x_3 = e_3 \end{cases}$$

2. Zadanie do wykonania

2.1 Opis problemu

Przy rozwiązywaniu równań różniczkowych często pojawia się konieczność rozwiązania układu algebraicznych równań liniowych. W naszym zadaniu mamy dany prosty oscylator harmoniczny, w którym znamy zależność różniczkową wynikającą z drugiej zasady dynamiki Newtona. Można wyznaczyć iteracyjny wzór na wychylenie x_{i+1} oscylatora mając jedynie dwa wcześniejsze czyli x_i oraz x_{i-1}. Ta relacja prezentuje się następująco:

$$x_{i+1} + (\omega^2 h^2 - 2)x_i + x_{i-1} \qquad \boxed{(2.1)}$$

Znając dwie dowolne, kolejne wartości x (w szczególności dwie początkowe), będziemy wyznaczać wartość kolejnej. Powtarzanie tego procesu, pozwala nam uzyskać całe rozwiązanie.

Mamy zadane warunki początkowe:

- $x_0 = A$ – początkowe wychylenie z położenia równowagi
- $v_0 = (x_1 - x_2)/h$ – wyrażenie określające początkową prędkość ciała

Równanie iteracyjne (2.1) wraz z warunkami początkowymi daje się zapisać w postaci macierzowej dla pierwszych siedmiu kroków czasowych jako:

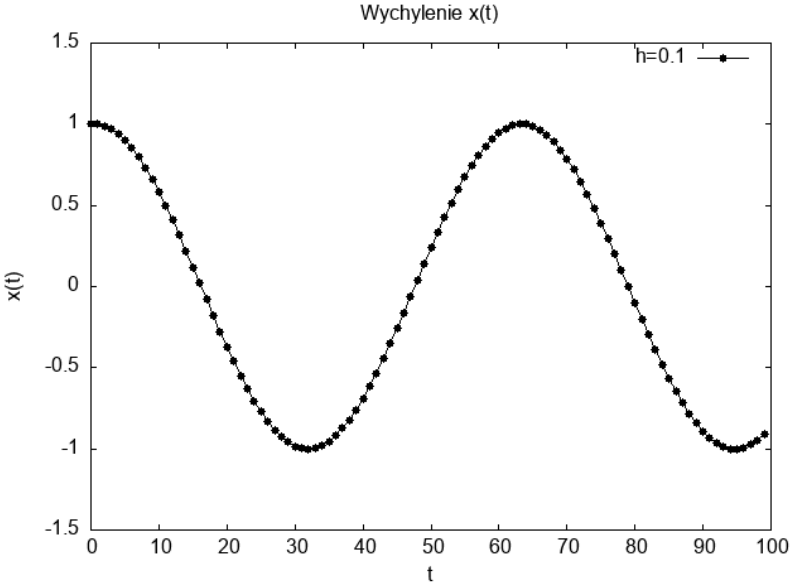
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \omega^2h^2-2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \omega^2h^2-2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \omega^2h^2-2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2h^2-2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \omega^2h^2-2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ v_0h \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Przejęliśmy także następujące założenia $k/m = 1 = \omega^2$, warunki początkowe: $v_0 = 0$, $A=1$, a krok całkowania wynosi $h=0,1$.

W zadaniu rozpatrzyłem macierz kwadratową o boku 100 (ilość kroków czasowych). Na podstawie znajomości wzoru (2.1), który jest prawdziwy dla każdego wiersza macierzy poczynając o trzeciego, stworzyłem macierz i wykorzystując metodę Gaussa – Jordana rozwiązałem układ równań. W implementacji posłużyłem się gotową funkcją z biblioteki Numerical Recipes.

2.2 Wyniki

Po wykonaniu instrukcji opisanych powyżej, output programu przekierowaliśmy do pliku z którego wygenerowaliśmy następujący wykres:



Jak łatwo można zauważyć, wykres ten jest niemal nierozróżnialny względem wykresu funkcji cosinus, co jest jednak prawdziwe tylko w przypadku drgań nietłumionych oscylatora harmonicznego, w którym nie występuje stopniowe zmniejszanie się amplitudy.

3. Wnioski

Fakt uzyskania niemalże identycznych wykresów świadczy, że metody bezpośrednie rozwiązań UARL są bardzo dokładne, o ile zapewnimy programowi odpowiednie warunki przeprowadzania obliczeń. W warunkach naszego zadania osadzonego w ruchu oscylatora harmonicznego istotna była częstotliwość, z jaką dokonywano pomiaru wartości. Ustalając ją na stosunkowo wysokim poziomie, otrzymaliśmy odpowiednio dużą dokładność. Warto podkreślić, że wysoka dokładność sprawiła, że program musiał wykonać więcej obliczeń.