Sprawozdanie – Laboratorium nr 7

Interpolacja Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów

Marcin Urbanowicz 21.04.2021

1. Wstęp teoretyczny

Podczas laboratoriów zajęliśmy się problemem interpolacji Lagrange'a z optymalizacją położeń węzłów.

1.1. Interpolacja

Interpolacja jest to metoda numeryczna, polegająca na wyznaczaniu w danym przedziale tzw. funkcji interpolacyjnej, która ma takie cechy, że przyjmuje z góry zadane wartości dla ustalonych punktów zwanych węzłami. Dla zobrazowania bierzemy przedział domknięty np. [a, b], w którym dane jest n + 1 punktów x_0, x_1, … , x_n (węzły) oraz wartości funkcji w tych punktach: $f(x_0) = y_0, f(x_1) = y_1, \dots, f(x_n) = y_n$. Interpolację najczęściej przeprowadza się korzystając z wielomianów algebraicznych, trygonometrycznych oraz funkcji sklejanych.

Interpolacja jest wykorzystywana do zagęszczania tablic i efektywniejszego rozwiązywania równań nieliniowych dla stablicowanych wartości funkcji z określonymi położeniami węzłów, w postaci wielomianowej do lokalnego przybliżania dowolnych funkcji, co upraszcza rozwiązywanie modeli fizycznych, modelowanie powierzchni w dwóch i trzech wymiarach oraz całkowanie numeryczne.

1.2. Interpolacja Lagrange'a

Interpolacja ta zwana jest także interpolacją wielomianową. Stosując ją przybliżamy funkcję korzystając z wielomianu Lagrange'a, który ma postać:

$$W_n(x) = \sum_{j=0}^{n} y_j \cdot \prod_{k=0 \wedge k \neq j}^{n} \frac{x - x_k}{x_j - x_k}$$

Gdzie n to stopień wielomianu dla n + 1 podanych węzłów.

1.3. Wielomiany Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa są określone wzorem:

$$T_n(x) = \cos[n \cdot arccos(x)] \qquad x \in [-1, 1]$$

Lub w relacji rekurencyjnej:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = \cos(\arccos(x)) = x$$

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \qquad n \geq 2$$

Z tak zapisanych zależności jak również uogólnienia przedziały z [-1,1] na [x_{min}, x_{max}]. Możemy uzyskać wzór na miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa:

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(x_{max} - x_{min})\cos\left(\pi\frac{2m+1}{2n+2}\right) + (x_{max} + x_{min})\right], m = 0,1,2,\ldots,n$$

Jako, że zera wielomianów Czebyszewa zagęszczają się ku krańcom przedziału, co pozwala lepiej związać wielomian zapobiegając naturalnym dla wielomianów wysokiego rzędu oscylacjom. Są one przez to optymalnymi położeniami węzłów.

1.4. Błędy interpolacji, dobór węzłów i efekt Rungego

Dokładność interpolacji zależy od odpowiedniego dobrania do niej węzłów oraz ich ilości. Mogłoby się wydawać, że większa liczba węzłów spowoduje większą dokładność. W przypadku węzłów równoodległych tak nie jest, co jest przykładem efektu Rungego. Efekt ten polega na pogorszeniu jakości interpolacji wielomianowej, mimo zwiększenia liczby jej węzłów. Początkowo wraz ze wzrostem węzłów przybliżenie poprawia się, jednak w pewnym momencie zaczyna się ono psuć, co jest szczególnie obserwowalne na krańcach przedziału. Aby temu zaradzić można posłużyć się opisanymi w sekcji wyżej węzłami Czebyszewa zamiast węzłami równoodległymi.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem na laboratoriach jest znalezienie wielomianu interpolacyjnego Lagrange’a dla funkcji:

$$f(x) = e^{-x^2}$$

W przedziale x ∈ [-5,5].

Należało napisać program, z zaimplementowaną metodą wyznaczającą przybliżoną wartość funkcji w położeniu międzywęzłowym wykorzystując wielomian interpolacyjny Lagrange’a.

Następnie korzystając z powyższego programu należało przeprowadzić interpolację funkcji $f(x) = e^{-x^2}$ dla n = 5, 10, 15, 20. Węzły miały być równoodległe zgodnie z odległością wyliczaną ze wzoru:

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{n}$$

Dla każdego n trzeba było stworzyć wykres funkcji oraz wielomianu interpolacyjnego.

Ostatnią częścią zadania było zoptymalizowanie położeń węzłów poprzez określenie ich jako miejsca zerowe wielomianu Czebyszewa określonych wzorem z punktu **1.3).**

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(x_{max} - x_{min})\cos\left(\pi\frac{2m+1}{2n+2}\right) + (x_{max} + x_{min})\right]$$

Gdzie:

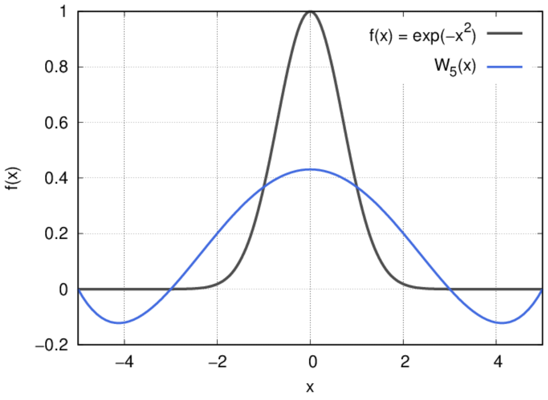
- m = 0, 1, …, n
- n+1 – jest całkowitą liczbą węzłów oraz stopniem wielomianu Czebyszewa.

Po przeprowadzeniu takiej optymalizacji należało ponownie przeprowadzić interpolację, dla tych samych n co poprzednio, a następnie stworzyć wykresy.

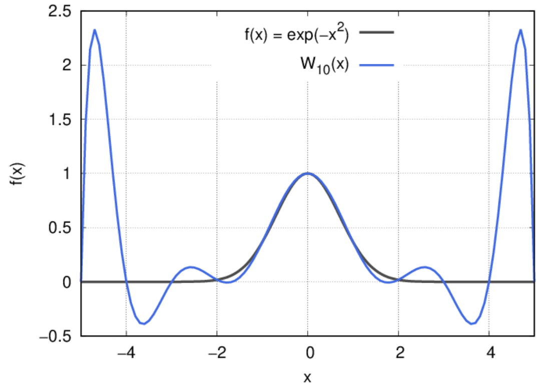
2.2. Wyniki

Dla poszczególnych n otrzymałem następujące wyniki:

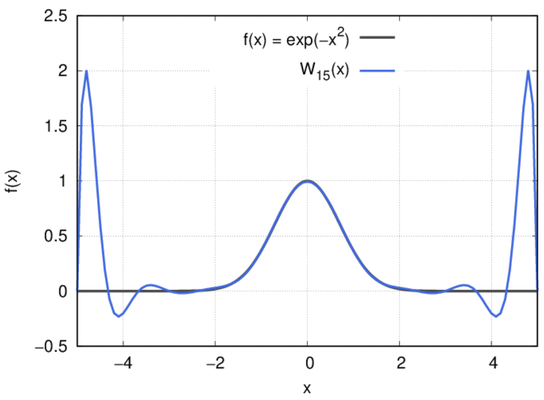
1) Węzły równoodległe



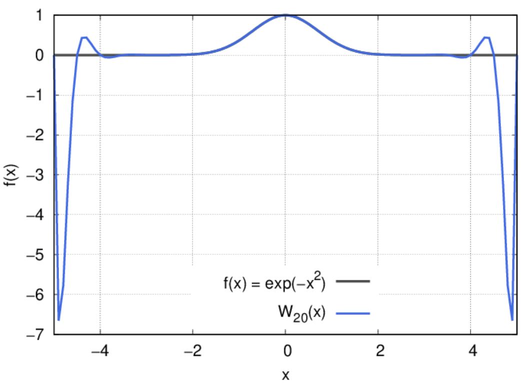
n = 5



n = 10

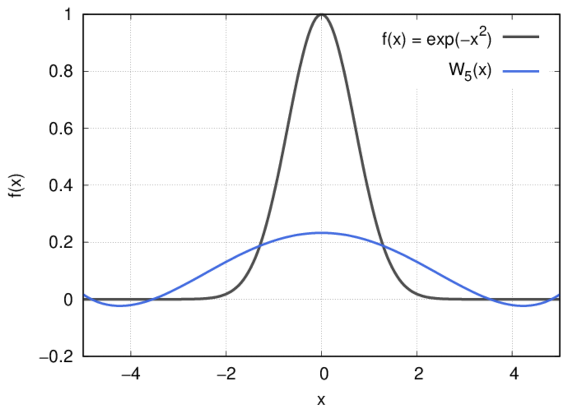


n = 15

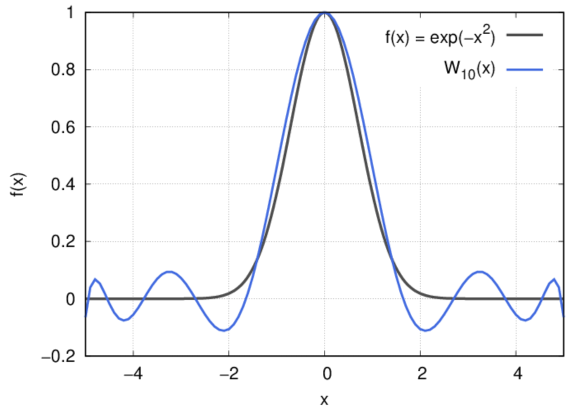


n = 20

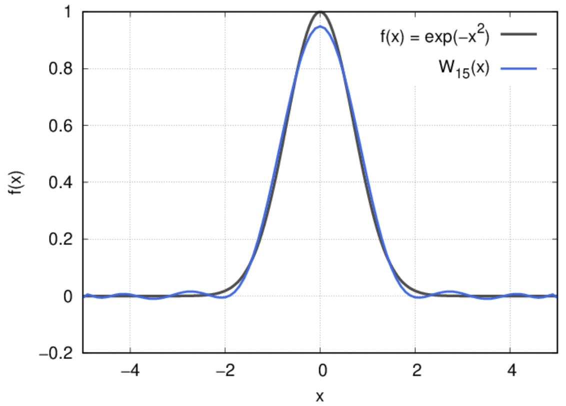
2) Węzły Czebyszewa



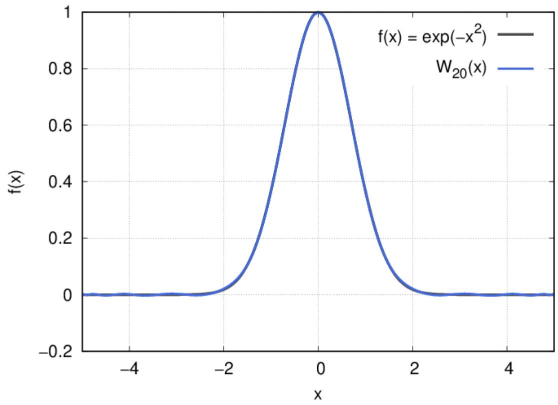
n = 5



n = 10



n = 15



n = 20

3. Podsumowanie

Możemy zauważyć, że im większa liczba węzłów tym większa dokładność interpolacji. Ważnym jest jednak odpowiedni dobór węzłów. Przy wykorzystaniu węzłów równoodległych na krańcach przedziałów pojawiają się charakterystyczne skoki, które czynią oszacowanie mniej dokładnym. Dobierając węzły, korzystając z wielomianów Czebyszewa możemy uzyskać dokładniejsze przybliżenie, co jest wynikiem tego, że węzły uzyskane w ten sposób zagęszczają się na krańcach przedziału.