Sprawozdanie – Laboratorium nr 13

Szacowanie całek niewłaściwych przy użyciu kwadratur Gaussa

Marcin Urbanowicz

2 czerwca 2021

1. Wstęp Teoretyczny

1.1. Kwadratura Gaussa

Jest to zbiór metod całkowania numerycznego, których wspólną cechą jest to, że polegają najpierw na wybraniu wag $w_1, w_2, w_3, \dots, w_n$, a następnie węzłów interpolacji $x_1, x_2, \dots, x_n$, przy czym $x_1 = a, x_n = b$, gdzie a, b są granicami całkowania. Parametry te dobieramy, w celu aby wyrażenie:

$$\sum_{i=0}^{n} w_i f(x_1) \tag{1}$$

Przybliżało całkę postaci:

$$\int_a^b w(x) f(x)\, dx \tag{2}$$

Poszczególne metody kwadratury Gaussa różnią się zazwyczaj funkcjami wagowymi oraz możliwymi przedziałami całkowania.

1.2. Metoda Gaussa – Legandre'a

Jest to metoda, w której wagą jest w = 1, a przedziałem całkowania jakiś przedział, którego krańce są liczbami rzeczywistymi.

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{3}$$

Gdzie x_i to pierwiastki wielomianu Czebyshewa.

1.3. Metoda Gaussa – Hermite'a

Jest to metoda, w której wagą jest funkcja $w(x) = e^{-x^2}$, natomiast przedziałem całkowania jest przedział: $[-\infty, \infty]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x)\, dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{4}$$

Gdzie x_i to pierwiastki wielomianu Hermite'a.

1.4. Metoda Gaussa – Laguerre'a

Jest to metoda, w której wagą jest funkcja $w(x) = e^{-x}$, natomiast przedział całkowania jest przedziałem: $[0, \infty]$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} w_i f(x_i) \tag{5}$$

Gdzie x_i to pierwiastki wielomianu Laguerre'a.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

zadaniu były do rozwiązania trzy podpunkty, w których wykorzystywaliśmy procedury podchodzące z biblioteki Numerical Recipies, które odpowiednio uzupełniały tablice węzłów i wag. W każdej z tych metod pewne argumenty są takie same, mianowicie:W

- w – tablica wag
- x – tablica węzłów
- n – rozmiar tablicy

1) Obliczyć przy użyciu metody Gaussa – Legandre'a całkę:

$$\int_{1}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$$

W celu rozwiązania tego podpunktu posłużyła nam procedura **gauleg(float x1,float x2, float x[],float w[],int n),** gdzie:

- x1 – dolna granica całkowanie
- x2 – górna granica całkowania

Tablice wytworzone z tej procedury posłużyły nam do obliczenia wartości całki ze wzoru (3), następnie dla każdego *n* liczony był błąd bezwzględny i na podstawie tych obliczeń narysowany wykres.

2) Ten podpunkt dzielił się na dwie części:

- Obliczyć przy użyciu metody Gaussa – Hermite'a całkę:

$$\int_{0}^{\infty} \ln{(x)} e^{-x^2}$$

Zadanie trzeba było rozwiązać dla *n* – parzystych. Posługiwaliśmy się procedurą: **void gauher(float x[], float w[], int n).** Ze względu jednak na to, że metoda Gaussa – Hermite'a ma zakres całkowania od -∞ do +∞ musimy dokonać modyfikacji funkcji podcałkowej, która finalnie uzyska postać:

$$\frac{1}{2}\ln{(x)}$$

Do obliczenia całki posłużył wzór (4).

- Obliczyć tą samą całkę co powyżej jednak korzystając z metody Gaussa – Legendre'a. Ze względu na to, że w metodzie Gaussa – Legandra całkujemy na jakimś przedziale rzeczywistym przyjęliśmy, że: x1 = 0, x2 = 5.

Dla obydwu podpunktów trzeba było wykonać wykresy błędu bezwzględnego dla każdego n.

3) Obliczyć przy użyciu metody Gaussa – Laguerre'a całkę:

$$\int_0^\infty \sin(2x) e^{-3x} dx$$

W tym podpunkcie posłużyliśmy się metodą: **void gaulag(float x[], float w[], int n, float alf),** w której *alf* – jest parametrem wielomianu Laguerre'a (przyjęliśmy *alf* = 0)

Ponieważ w metodzie Gaussa – Laguerre'a funkcją wagową jest e^{-x} wydzieliłem ją z funkcji bazowej i licząc całkę ze wzoru (5) przyjąłem funkcję:

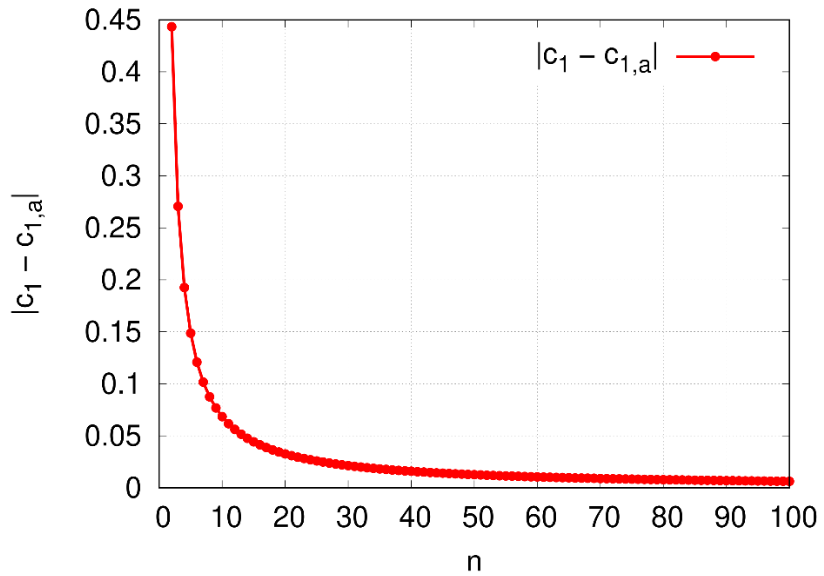
$$f(x) = \sin(2x) e^{-2x}$$

Podobnie jak w poprzednich podpunktach dla każdego *n* trzeba było policzyć błąd bezwzględny i stworzyć wykres.

2.2. Wyniki

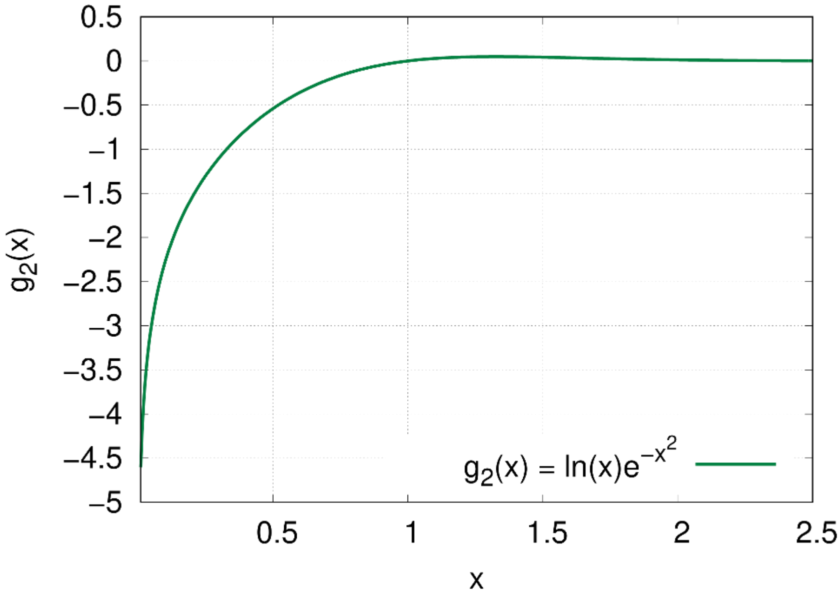
Uzyskałem następujące wyniki:

- Podpunkt **1)**

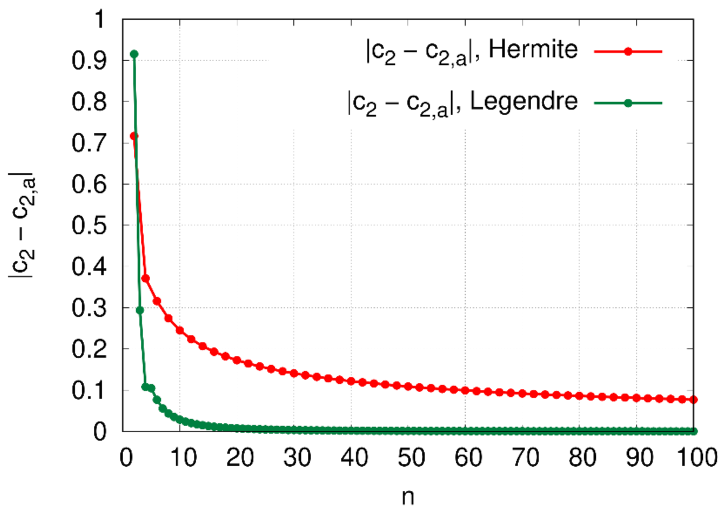


Rysunek 1: Wykres błędu bezwzględnego powstałego po całkowaniu funkcji $\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ w przedziale [1,2]

- Podpunkt **2)**



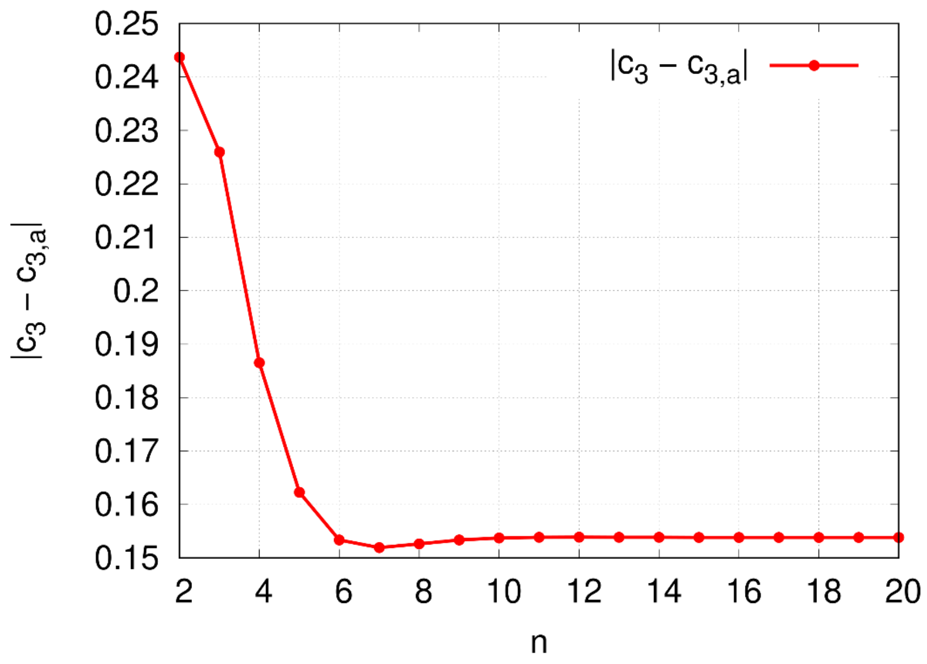
Rysunek 2: Wykres funkcji $g_2(x)$



Rysunek 3: Porównanie błędu bezwzględnego przy całkowaniu funkcji $g_2(x)$ metodami Gaussa – Hermit'a i Gaussa – Legendre'a

Możemy zauważyć, że mimo iż metoda Gaussa – Legendre'a całkuje na przedziale rzeczywistym błąd względny jej wyniku jest znacząco bliższy zeru niż w przypadku metody Gaussa – Hermite'a. Dzieje się tak prawdopodobnie ze względu na liczne zmiany jakie musieliśmy dokonać we wzorze funkcji aby móc wykorzystać na niej metodę Gaussa – Hermite'a.

- Podpunkt **3)**



Rysunek 4: Wykres błędu bezwzględnego przy całkowaniu metodą Gaussa – Laguerre'a funkcji $\sin{(2x)}e^{-3x}$

3. Wnioski

We wszystkich trzech omówionych na tych laboratoriach metodach z kwadratury Gaussa dokładność wyniku (mniejszy błąd bezwzględny) wzrastała wraz z ilością węzłów interpolacji i wag. Na każdym z wykresów błędów bezwzględnych możemy zauważyć też, że od pewnego momentu błąd się stabilizuje i nie zmienia się znacząco. Oznacza to, że aby bardziej przybliżyć wynik potrzebne byłyby jakieś dodatkowe działania i metody przybliżające.