Sprawozdanie – Laboratorium nr 10

Poszukiwanie minimum wartości funkcji metodą największego spadku w 2D

Marcin Urbanowicz

12 maja 2021

1. Wstęp teoretyczny

W trakcie laboratorium zajmowaliśmy się problemem przybliżenia minimum funkcji metodą największego spadku w 2D.

1.1. Metoda największego spadku

Działanie metody największego spadku opiera się na wybraniu pewnego początkowego przybliżenia r_0, które w kolejnych iteracjach (jako, że jest to algorytm iteracyjny) będzie poprawiało przybliżenie rozwiązania. Sposób w jaki dokonuje się przybliżenie można przedstawić za pomocą następującego wzoru:

$$r_{i+1} = r_i - h \cdot \nabla f(r) \;|_{r=r_i}$$

Gdzie:

- r_{i+1} - kolejne przybliżenie
- r_i – obecne przybliżenie
- $\nabla f(r)$ – gradient, czyli $\left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$

Pochodne do gradientu mogą zostać wyznaczone numerycznie przy wykorzystaniu poniższych wzorów.

$$\frac{\partial f(r)}{\partial x} = \frac{f(r + \Delta \cdot e_x) - f(r - \Delta \cdot e_x)}{2\Delta}$$

$$\frac{\partial f(r)}{\partial y} = \frac{f\left(r + \Delta \cdot e_y\right) - f(r - \Delta \cdot e_y)}{2\Delta}$$

Gdzie:

- e_x, e_y - są wersorami układu współrzędnych
- Δ - to krok przestrzenny

2. Wstęp teoretyczny

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem było znalezienie przybliżonego położenia minimum funkcji:

$$f(r) = f(x, y) = \frac{5}{2}(x^2 - y)^2 + (1 - x)^2$$

Trzeba było zaprogramować opisaną we wstępnie teoretycznym metodę największego spadku przyjmując następujące warunki:

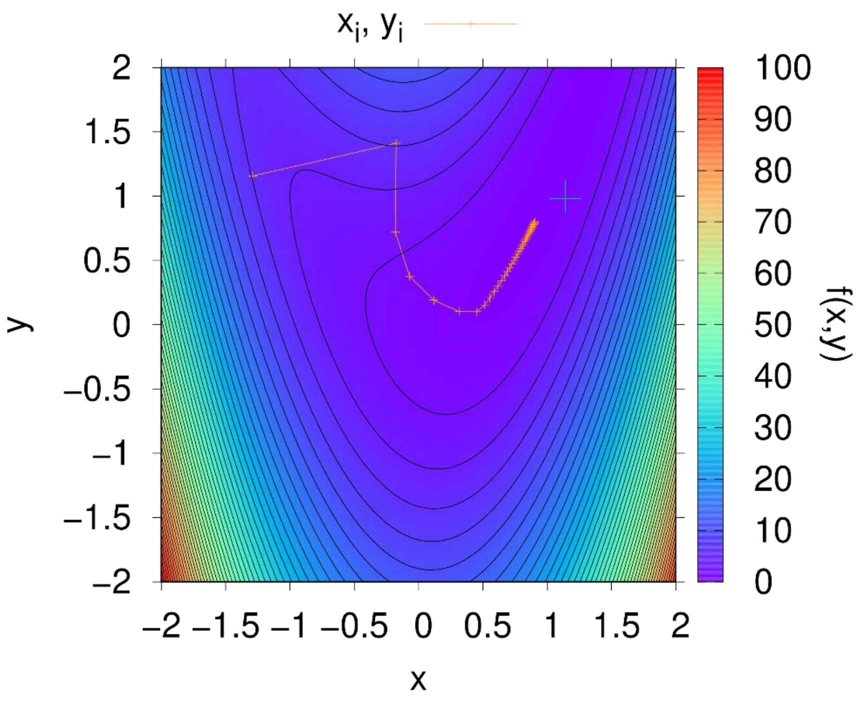
- wektor startu r_0 = [-0.75,1.75]
- stała $h = 0.1$
- stała $\Delta = 10^{-4}$
- maksymalna liczba iteracji $n = 1000$
- warunek szybszego opuszczenia pętli (uzyskanie zbieżności) $\|r_{i+1} - r_i\| < \varepsilon$

Stworzony program zostanie przetestowany dla $\varepsilon = 10^{-2}$, $\varepsilon = 10^{-3}$. Proces szukania rozwiązania (kolejne przybliżenia) mieliśmy zobrazować na wykresach, na których miał być przedstawiony także kontur funkcji.

2.2. Wyniki

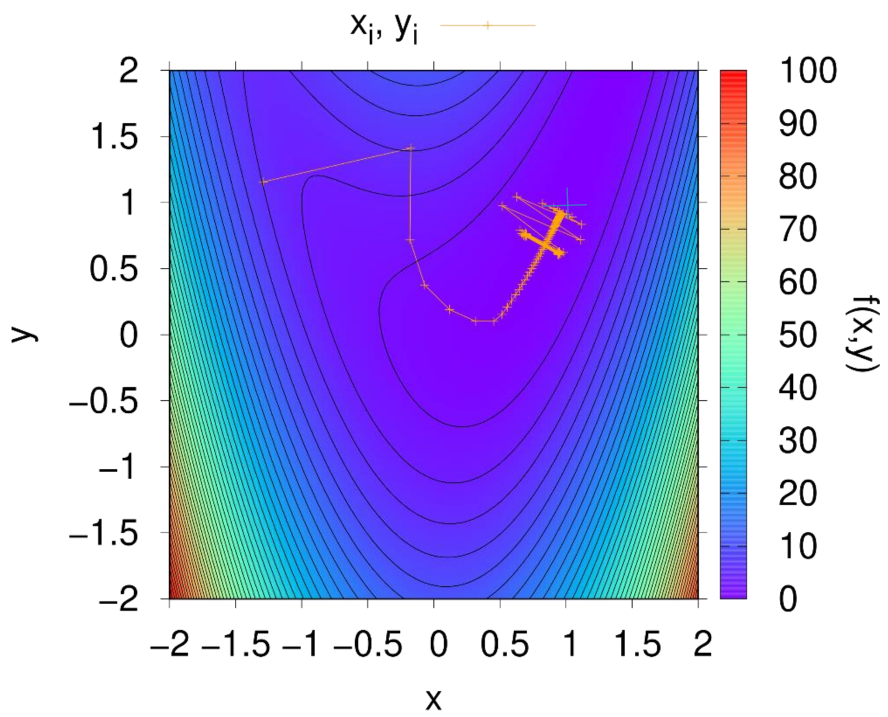
Dla dwóch wartości ε sporządziłem rysunki, na których widoczne są: kontur funkcji oraz kolejne przybliżenia minimum (połączone linią):

- **Dla $\varepsilon = 10^{-2}$**



Jak możemy zauważyć, przy dokładności ε = 10^{-2} nie uzyskałem zadowalającego przybliżenia położenia minimum funkcji. Zauważalne jest jednak, że żółta linia łącząca kolejne wyznaczone przybliżenia sukcesywnie zbliża się do rzeczywistego położenia minimum. Choć można byłoby wysnuć wniosek, że gdyby zwiększyć dokładność ε to wspomniana żółta linia powędrowałaby prosto ku szukanemu minimum, które na rysunku jest zaznaczone znakiem '+'. Analizując kolejny rysunek zobaczymy, czy powyższa teza jest prawdziwa.

- **Dla ε = 10^{-3}**



Na pierwszy rzut oka można stwierdzić, że wysnuta wcześniej teza, mówiąca, że zwiększenie dokładności ε wpłynie korzystnie na dalsze poszukiwania jest błędna. Linia żółta najpierw, jak na pierwszym rysunku dąży do rzeczywistego miejsca zerowego, ale zbliżając się coraz bliżej, wykonuje dosyć spore oscylacje. Obliczenia zakończyły się, ze względu na wyczerpanie liczby iteracji, która była ustalona na początku. Zmniejsza to wiarygodność ustalonych danych, co skłania ku stwierdzeniu, że metoda największego spadku sama w sobie jest poprawna, jednak niewłaściwy jest przyjęty warunek stopu ($\|r_{i+1} - r_i\|_2 < \varepsilon$). Źródeł oscylacji możemy prawdopodobnie doszukać się najprawdopodobniej w podatności na błędy zaokrągleń metody, a ponadto jeśli kontur wartości funkcji celu jest wydłużony, może pojawić się nietypowy zygzak. Nie bez znaczenia pozostaje też wartość parametru h, którego ustalenie na stałą wartość nie jest najkorzystniejszym rozwiązaniem. Lepszym sposobem byłoby zmienianie go wraz z postępem obliczeń.

3. Wnioski

Metoda największego spadku może być stosowana w algorytmie poszukiwania minimum funkcji, ale na podstawie przeprowadzonej próby dla podanych nam danych, nie można nazwać jej metodą dokładną. Duże znaczenie dla poprawności uzyskiwanych przybliżeń mają bowiem niewątpliwie warunek stopu oraz stała h. Po odpowiednim ustaleniu tych parametrów metoda może być postrzegana jako wiarygodna. W przeciwnym wypadku, tak jak dla powyższych danych, znajdowane przybliżenia będą oscylować w granicach prawdziwego rozwiązania, ale nie będziemy w stanie stwierdzić, na ile są to przybliżenia wiarygodne.