Project 3:动态规划

1 简介

动态规划(dynamic programming)是运筹学的一个分支，是求解决策过程最优化的数学方法。动态规划一般可分为线性动规，区域动规，树形动规，背包动规四类。

该项目由三道动态规划编程题目和一份报告文档组成。你除了需要完成对应三道题目的三个函数，还需要编写一份报告文档，来说明你的解题思路和代码实现思路和回答一些该文档中提出的问题。

在命令行中输入 make lab3，编译程序；

在命令行中输入 make run，或者在编译后输入./lab3，启动程序，检查正确性。

在命令行中输入 make clean，删除当前编译的版本。

2 评分标准

该项目满分共 100 分，分为三项：

（1）完成三道题目，共 75 分。以通过所有测试用例为准。测试用例在./lab3/test 和./lab3/answer 中。

（2）代码规范，共 5 分。例如分配堆空间的回收、变量命名规范等等。

（3）报告文档，共 20 分。

3 从简单的例子说起

part1 是一道简单的动态规划题目：给定不同面额的硬币{N}和一个总金额 M。

写出一个函数来计算可以凑成总金额的硬币组合数。假设每一种面额的硬币有无限个。

样例：总金额=5,硬币面额=[1,2,5]。程序将输出一个正整数 4,代表：

5=1+1+1+1+1

5=1+1+1+2

5=1+2+2

5=5

注：这部分代码需完成在./lab3/lab3.cpp 的 func1 中。

这是一个完全背包问题。该如何思考这个问题呢？根据动态规划的思想，首先我们应该确定动态规划中需要不断计算的中间变量是什么。很显然，在此题中是从 1 开始直到总金额中每一个金额被硬币组合出的组合数。为此，构建一个 M ×|N|的矩阵，用来存放中间结果，如下图所示。

硬币\金额	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
5						

接着，考虑初始条件，当没有硬币但总金额为 0 时，我们应该默认其有一种组合（可以理解为集合里的 Ø），即在 dp[0][0]处填上 1，显然，没有硬币是没法组合出大于零的金额的，在第一行其余位置填 0。

我们试图寻找规律，把只用 1 元硬币的那行填上。很显然，都只有一种，在第二行填上 1。

当可以使用 1 元和 2 元硬币时，情况发生了变化。总金额为 2 时，组合数发生了增加。除了仅用 1 元硬币的一种方法，另一种方法是先用 Ø 拼出一个 0 元，

再用一个 2 元硬币拼出 2 元的总金额，共两种。是不是有些抽象?那么我们再来分析 dp[2][4]中的结果。当不用 2 元硬币时，4 元的总金额有一种仅用 1 元硬币的组合；当使用 2 元硬币时，可以先组合出 2 元的总金额（共两种，这个数据之前已经被计算出来存在哪里？）,然后再添上一枚 2 元硬币来达到 4 元的总金额。那么 dp[2][4]=1+2=3。

把这个表格填完，找一找规律吧!

问题:

(1) 设总金额为 13，硬币={1,2,5,10}，画出动态规划的表格并填满结果。

(2) 这个动态规划的时间复杂度是多少?

(3) 请将这个动态规划的空间复杂度优化到 O(M)，并指出你是如何优化的。

4 问题变得复杂起来 ……

一群人落在了绝地岛闵达凰上，它们成一个圈降落在地图的边缘。安全区最终会刷新在这个岛的中心艾西艾斯峰顶，于是所有人都要向这个峰顶前进。一路上，他们会遇到和他们有一样目标的异类，并试图击败对方。他们不断地前进，不断地决斗。最终只有一个人会活着到达艾西艾斯峰顶。到底是苟到最后击杀第二名成功吃鸡，还是选择淘汰二十九名玩家无尽杀戮，这取决于你的选择。

游戏规则：1.所有人围成一个环；2.所有人只可能会碰到他当前身边的两人的其中之一并和他决斗，且必定只存活一人；3.淘汰的人被移出环（即 A-B-C-D-A 成环，A 若击败了 B，A 的身边就变成了 C 或 D)；4.所有决斗的发生顺序都是随机的；5.最终只存活下来一人（俗称吃鸡)。

那么现在我们知道这所有人两两对决的优胜关系表，问决斗顺序随机发生的

情况下，有多少人可能最终吃鸡?

注意，优胜关系是不传递的。比如 A-B-C-A，A 胜 B，B 胜 C，C 胜 A，那么谁吃鸡完全取决于决斗的顺序。

样例：共 4 人，其优胜矩阵如下：

A胜B	A	B	C	D
A		1	0	1
B	0		1	1
C	1	0		1
D	0	0	0	

显然，D 谁都赢不了，D 必不可能吃鸡；而 A,B,C 都有可能吃鸡。所以对于这个样例，程序应该输出 3。

注：这部分代码需完成在./lab3/lab3.cpp 的 func2 中，其中参数 conquer 就是上述矩阵，conquer[i][j]代表 i 能战胜 j。

看上去这个问题似乎有些无从下手。但是我们要知道，动态规划的核心思想是先求解子问题，然后从这些子问题得到原问题的解。那么这个问题的原问题是什么？子问题又是什么？试着把原问题（谁能吃鸡？）用其它的方式表达出来，看看能不能把它拆成子问题。

从另一个角度想，既然是动态规划，那么我们就要像 part1 一样构建一个矩阵。这个矩阵的行和列会代表什么？每个值又代表了什么？这个矩阵的意义和生长方式可能和 part1 的意义不太一样，不要被简单的 part1 禁锢住了思路。

问题：

(1) 请分析./lab3/test/test2.txt 中 case3（amount=6）究竟是哪个倒霉蛋不可能吃鸡，并写出其余每个人吃鸡的一种随机决斗过程。

(2) 这个程序的时间复杂度和空间复杂度是多少？能否继续优化？你可以写下你的优化思路或者在自己的代码中实现它，或是说明你的程序时间复杂度已经达到最佳了。

5 期望 DP 与解方程组

part3 是一道比较困难的题目。

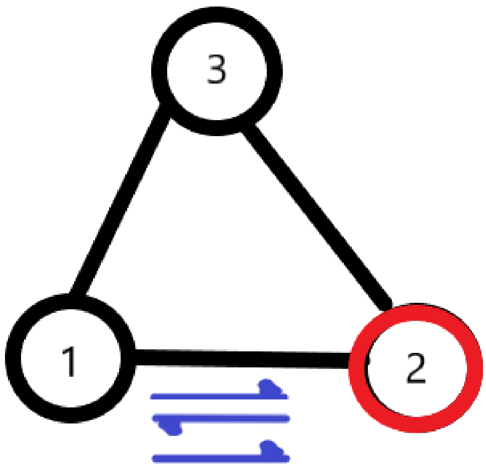
小 Z 来到一个古墓去寻找宝藏。古墓中有非常多的路口和岔路，有些路口有陷阱，小 Z 在每次经过路口 i 的陷阱的时候都要掉 A[i]点血，而且陷阱是永久有效的（即小 Z 每到一次路口 i 就要掉 A[i]点血）。幸运的是，有一些路口没有陷阱。可不幸的是，小 Z 是个路痴，他完全无法判断他走过哪里，要去哪里；他只能在每一个路口随机（等概率地）走向某一条岔路到达下一个路口。小 Z 现在在古墓的入口处（即路口 1），这里没有陷阱；宝藏藏匿在路口 n，那里也没有陷阱。

而你万万没有想到的是，你是这个古墓的守护者。你知道这个古墓所有的构造（包括它的路口、岔路和陷阱的情况），现在你需要计算出小 Z 能活着见到宝藏的概率。

注：这部分代码需完成在./lab3/lab3.cpp 的 func3 及一些其他函数中，其中参数 n 是路口数量；hp 是小 Z 的初始血量；数组 damage 是 n 个数据，代表 n 个路口陷阱的伤害（无陷阱处为 0，保证路口 1 和 n 处无陷阱）；数据 edges 是 2*（岔路条数）个数据，每 2 个数据是一条边，边都是双向的。

举个例子：

有个三角形路口 1，2，3。小 Z 有 2 点血。小 Z 在 1，宝藏在 3，陷阱在 2（伤害为 1）。那么它的结果为 0.875。小 Z 在血量降到 0 之前走到 3 就算成功，所以它失败的唯一路径是 1-2-1-2，每次寻路都是随机的，三次都走错的概率是 0.5^3 = 0.125，那么成功走到 3 的概率就是 0.875。



(图中每个蓝色路径的概率都是 0.5，经过三次“错误”的决策最终失败）

考虑这个问题，想法是比较直接的。以 hp*n 建立动态规划的矩阵是一个不错的想法，把 f(i,j)设置为剩下 i 点血到达 j 点的期望次数，相信你也能很快地写出状态转移方程（这是问题 1)。但事情就这么完了吗？你可以试一试用这种思路填上述例子的矩阵，看看能不能得出正确的结果。

你会发现，因为有一些路口的伤害值为 0，好像在填这些没有陷阱的路口的格子是非常棘手的事情……（可惜！没有陷阱对小 Z 来说真是幸运极了，但是对你来说好像不是这样……)

由于我并不能告诉你问题 1 的答案，可能接下来的讲述会抽象一些：对于一个 f(i,j)，如果它伤害值 damage[j]>0，显然是简单的；如果它伤害值=0，它会成为一个方程（因为同 hp 层其他的值也有一些未知数)，将该 hp 层的所有伤害

值为 0 的节点 j 写出的方程联立，你会得到一个方程组（这是问题 2）。

线 性 代 数 ！

这是绕不开的问题了。计算机通常用高斯消元法（gauss-jordan 消去法）求解大规模的非齐次线性方程组。有关高斯消元法，可以自行使用搜索引擎学习。如果用高斯消元法解决了方程组的问题，你将可以顺利地计算出同 hp 层的概率值，继而计算出最终结果（这次是真的）。

试试吧！

问题：

(1) 写出这个算法的状态转移方程。

(2) 对于某个特定的 hp，所有无陷阱节点构成的方程组，这个方程组的未知数是什么？系数是什么？常数项又是什么？写出它的增广矩阵。PS:如果你觉得一般情况很抽象的话，可以以 part3-case3 在 hp=2 时的方程组为特例考虑。

(3) 这个算法的时间复杂度和空间复杂度是多少？如果按照该文档截至目前的思路，算法的时间复杂度还有提升的空间。上一小问给了你什么启发？如果你能回答出来，你将会获得更高一点的分数；如果你能在你的程序中实现，你将获得满分。Hint:你需要从高斯消元法的时间复杂度去考虑这个问题。

6 后记

你需要将 lab3.cpp 和报告文档 answer.pdf 打包成一个压缩文件，并命名为[学号]_[姓名]_proj3.zip。