第三章不涉及圆的任意点作图

1. 基本定理

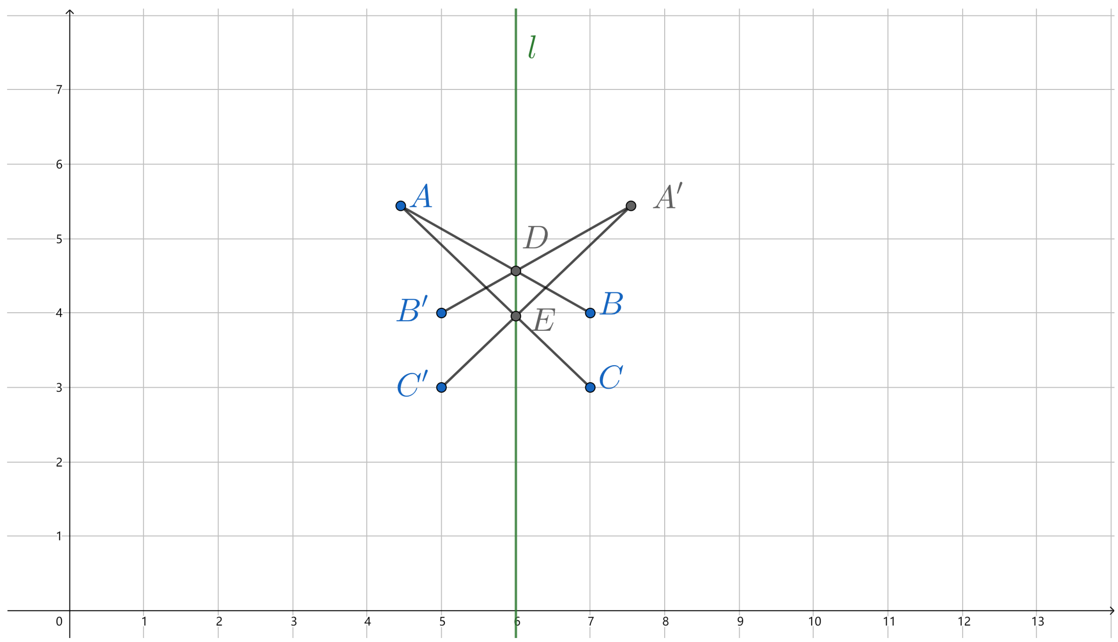
Zyk 基本对称定理

在 2022 年春季，Zyk 同学受到 B 站视频 BV16u411i75M 的启发，提出了 Zyk 基本对称定理，内容如下：

Zyk 基本对称定理 Zyk's Basic Symmetry Theorem （定理 3.1）

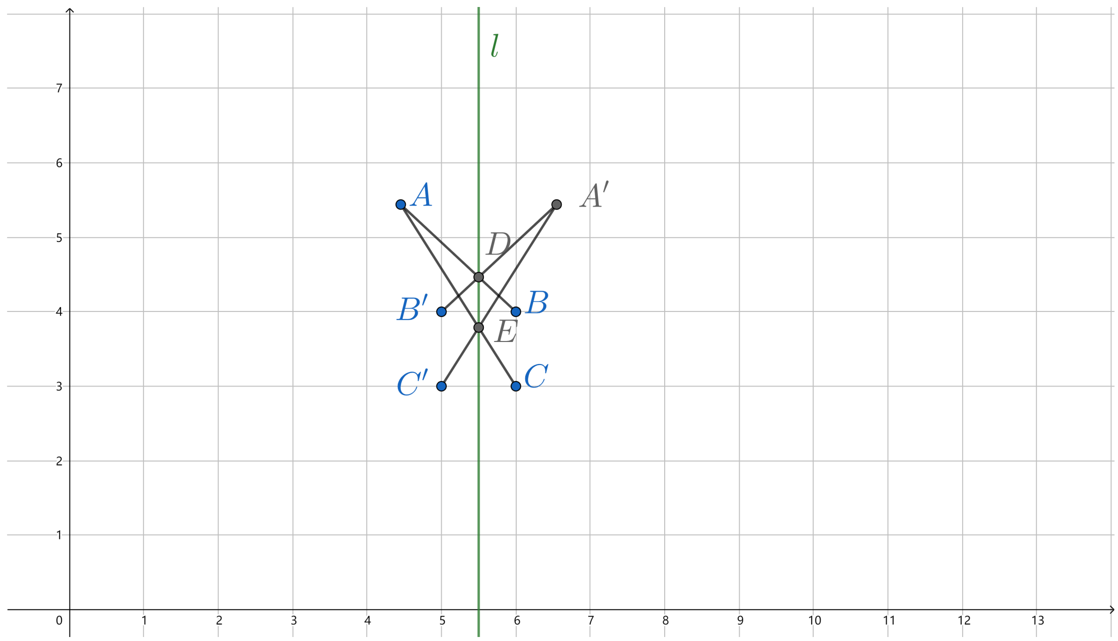
【提出者】翟悦凯

可以做出任意一点关于一条垂直格线或一条水平格线的对称点。做法如下（做 A 关于 l 的对称）：



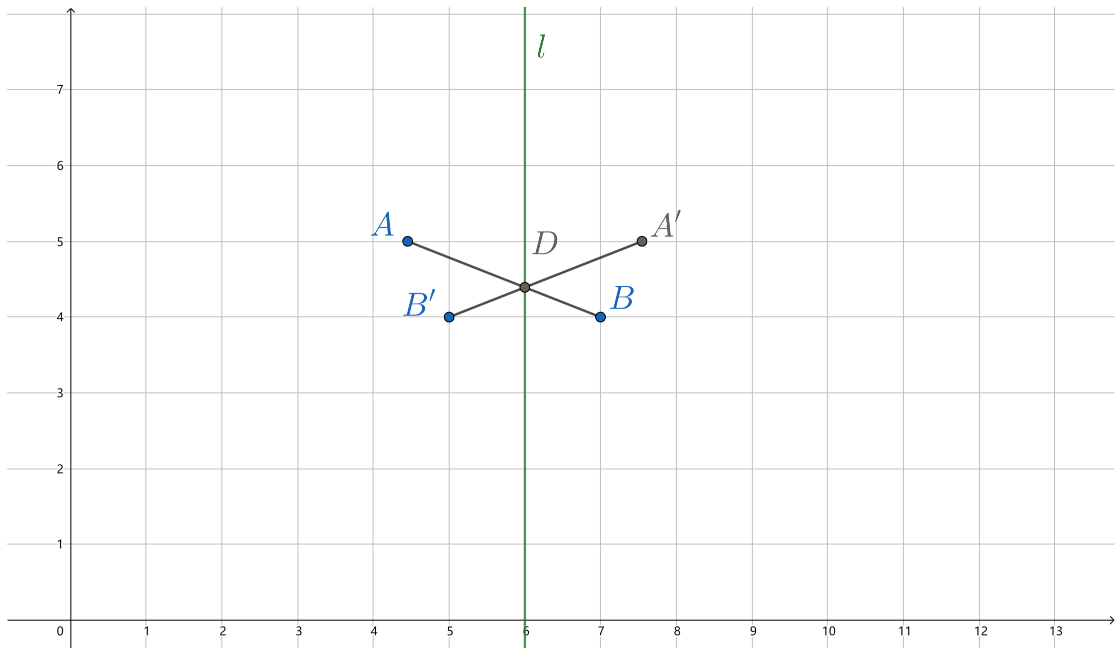
【作图语句】取格点 $B,C,B^{'},C^{'}$（要求 $B^{'},C^{'}$ 关于 l 对称），连接 AB，AC 交 l 于 D,E。连 $B^{'}D,C^{'}E$ 交于 $A^{'}$。$A^{'}$ 即为所求。

【拓展】当 l 为网格中线时，此定理依然适用：

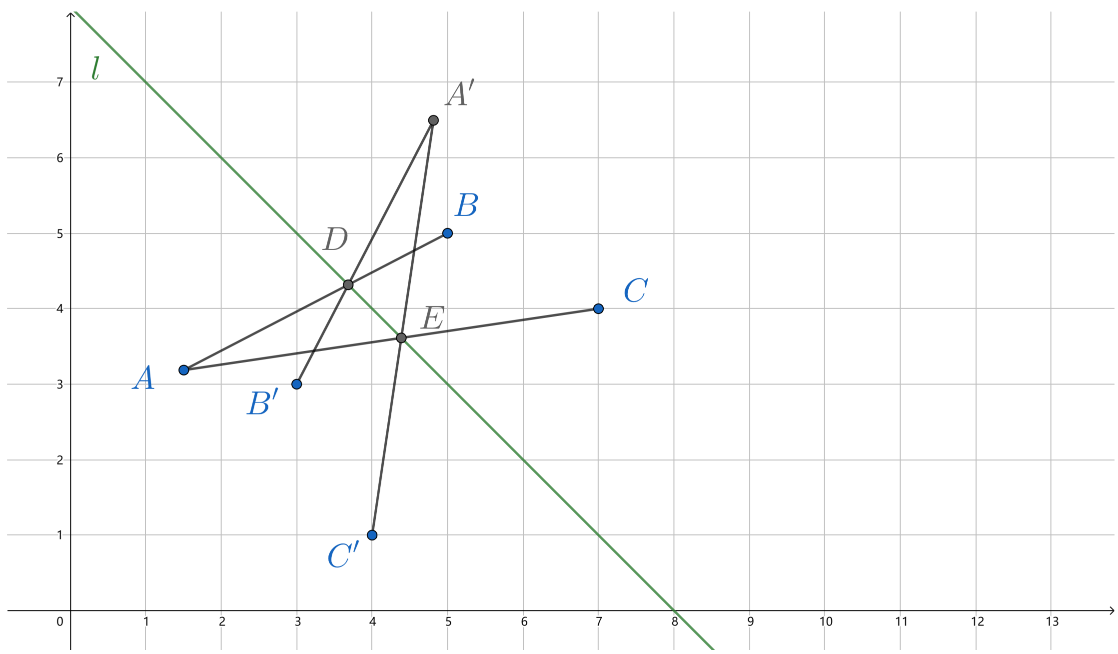


【证明】不难发现直线 AB 和直线 $A'B'$ 对称，直线 AC 与直线 $A'C'$ 对称，所以直线的交点也对称，这样 A 和 A' 就是对称的了。

【拓展】这个定理用了两对对称点以确定 A' 的位置，但在一些特殊情况下（比如 A 在水平格线上而 l 为竖直直线时），我们只需要一对对称点。下面的图片展示了一个例子。A 在水平格线上，我们不难看出 A' 也在相同的水平格线上，于是可以省去一对对称点。



【拓展】当 l 为从网格对角线的时候，此定理依然适用。

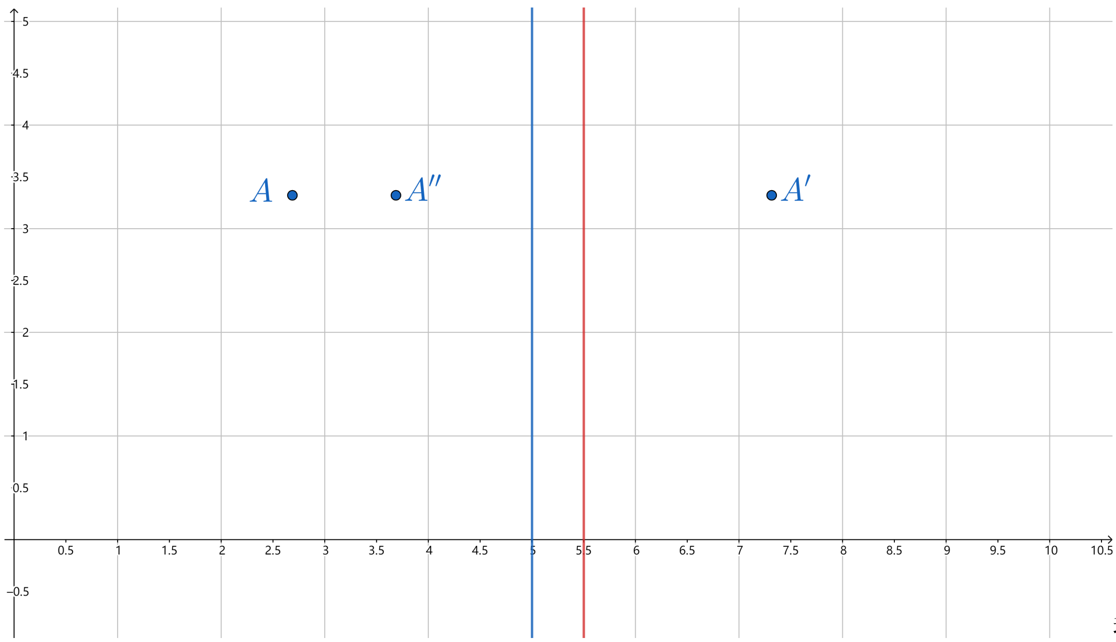


Zyk 基本对称定理的一大优势是，可以做出任意点关于一条格线（或网格中

线、网格对角线）的对称。B，C 点的选择也比较自由，画图者可以通过选择合适的 B，C 使得画图结果更美观。Zyk 基本定理有非常多的推论，它们的原理都不难理解。我们来一一列举。

推论：平移定理 Translate Theorem （定理 3.1.1）

可以将任意点向左/向右/向上/向下平移 n （$n \in N^*$）个单位长度。做法如下（将 A 向右平移）：

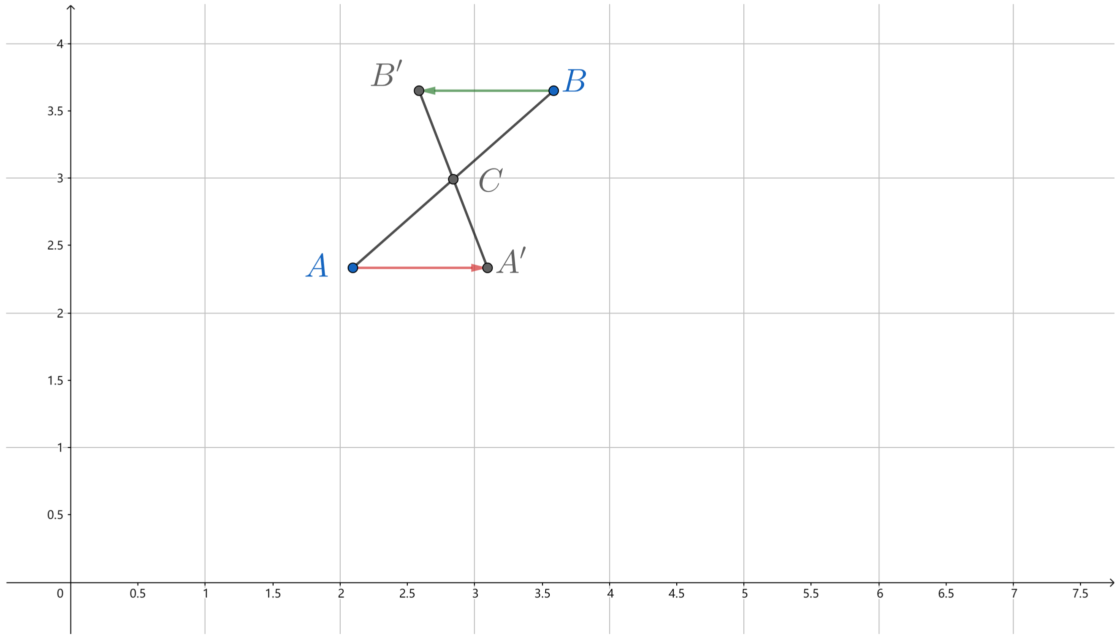


我们以向右平移为例。选定一条格线，做点 A 关于这条直线的对称点 $A^{'}$。将选定直线向右平移 $\frac{n}{2}$ 个单位（这通常是简单的），做 $A^{'}$ 关于新直线的对称点 $A^{''}$。$A^{''}$ 即为所求。

【证明】如果 A 与左边的直线相距 d，那么 $AA^{'} = 2d$，$A^{'}$ 与右边的直线相距 $d - 0.5n$，$A^{'}A^{''} = 2d - n$。所以 $AA^{''} = n$。

推论：分线段定理 Segment Dividing Theorem（定理 3.1.2）

可以把任意一条线段分成给定比例。作图方法如下（以平分线段 AB 为例）：

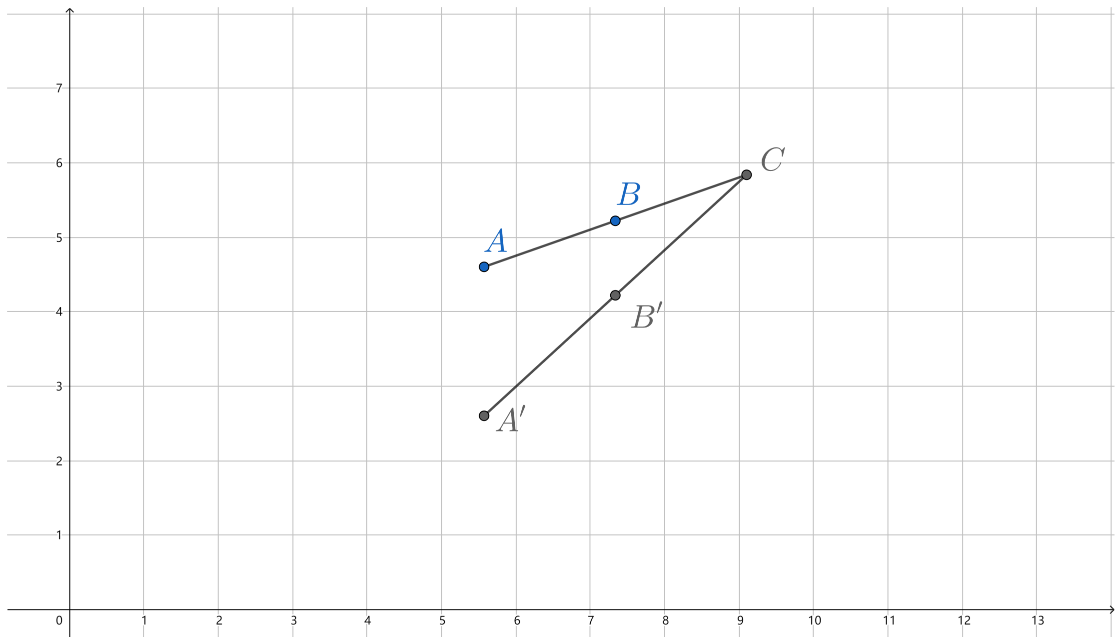


应用平移定理将 A 向右平移一个单位得到 A'，B 向左平移一个单位得到 B'，连 $A'B'$ 交 AB 于 C。C 即为 AB 中点。由全等或者相似的知识可以很简单地证明此定理。我们可以用类似的方法得到三等分点、四等分点等，只需改变平移的单位长度即可。

【证明】$\triangle BCB' \sim \triangle ACA'$，$\frac{AC}{BC} = \frac{AA'}{BB'}$。前面的证明可以同时证明定理本身和定理的扩展。

推论：倍长线段定理 Segment Multiplication Theorem（定理 3.1.3）

可以倍长任意线段。做法如下（倍长线段 AB）：



应用平移定理将 A 向下平移两个单位得到 A'，B 向下平移一个单位得到 B'，连 $A'B'$ 并延长交 AB 于 C。此时 $AB = BC = \frac{1}{2}AC$。由相似的知识可以非常简单地证明此定理。

【拓展】通过改变向下平移的单位长度，可以做到三倍、四倍甚至 3/2 倍的倍长。

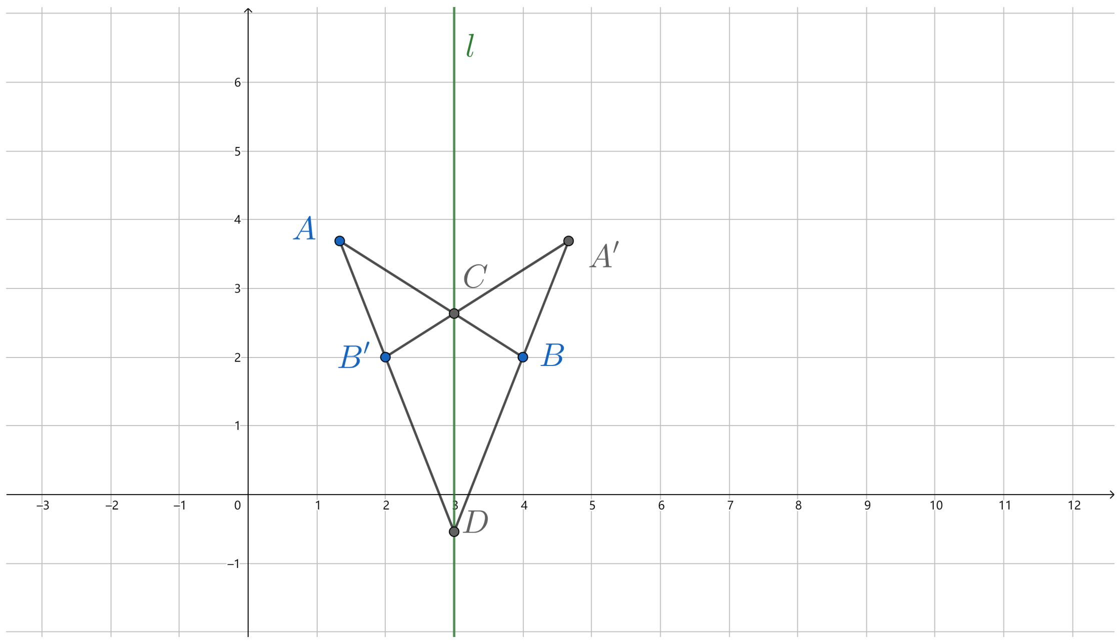
【证明】$\triangle CBB' \sim \triangle CAA'$，$\frac{AC}{BC} = \frac{AA'}{BB'}$。前面的证明可以同时证明定理本身和定理的拓展。

郝铭扬在 2022 年 6 月 12 日给出了 Zyk 基本对称定理的优化，这也被称为“绵羊把戏（Sheep’s trick）”。

Zyk 基本对称定理的 Hmy 第一优化 Hmy’s First Optimization of Zyk’s Basic Symmetry Theorem（定理 3.1.4）

【提出者】郝铭扬

可以用稍微简单一点的方法作任意点关于一条格线的对称，作图方法如下：



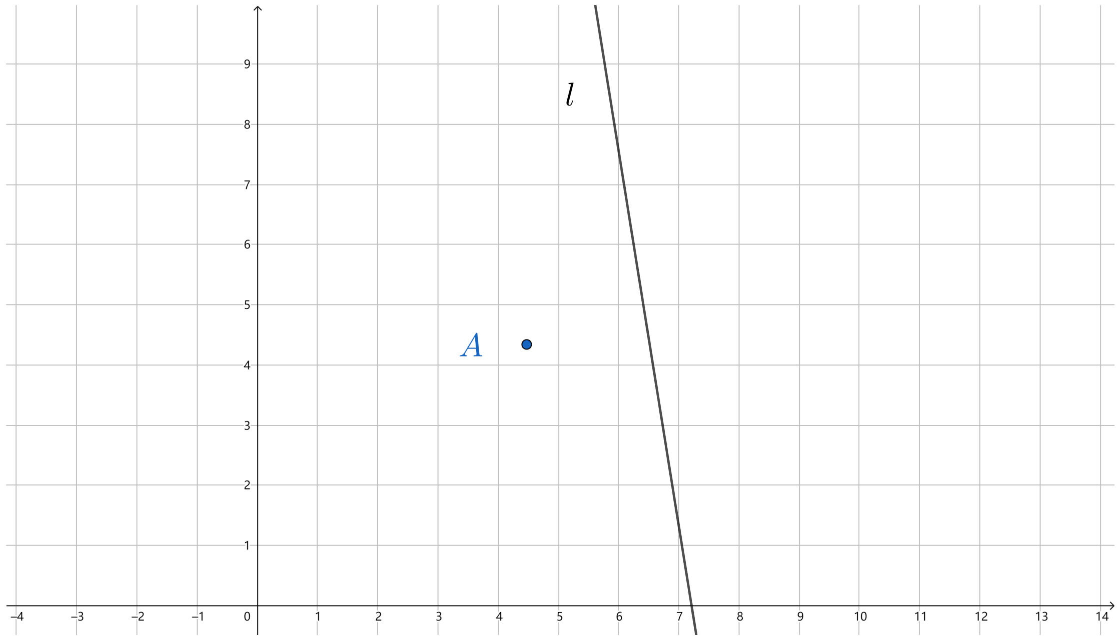
【作图语句】选定格点 B，B'（要求 B，B' 关于 l 对称），连接 AB，AB' 并延长分别交 l 于 C，D。连接 $B'C$，DB 并延长交于 A'。A' 即为所求。

【证明】不难发现直线 AB 和直线 $A'B'$ 对称，直线 AD 与直线 $A'D'$ 对称，所以直线的交点也对称，这样 A 和 A' 就是对称的了。

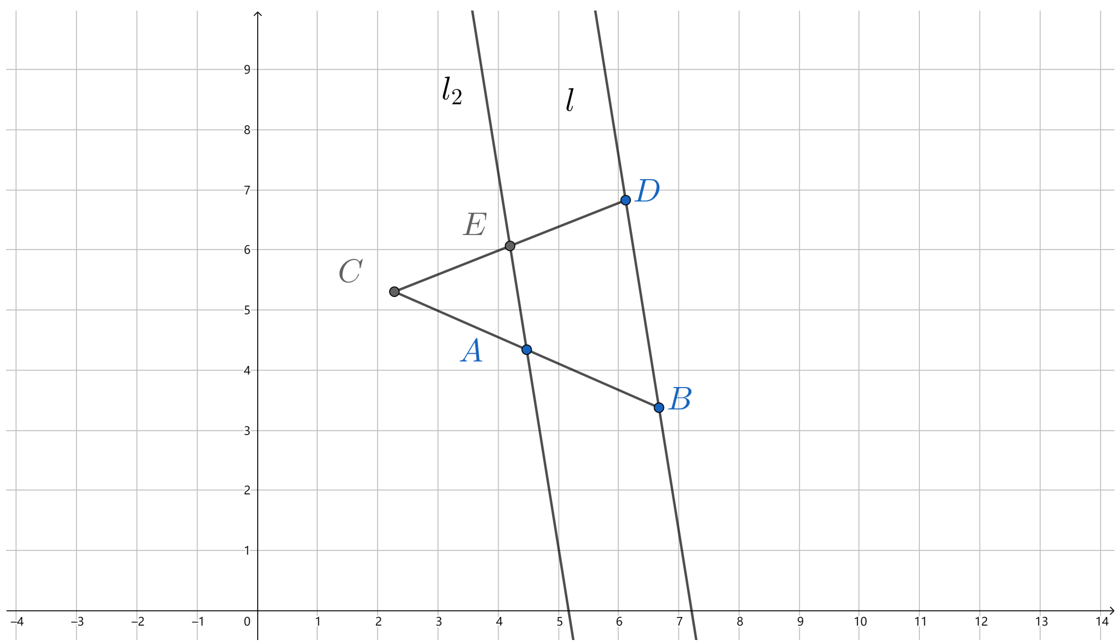
Zsq 平行定理

Zsq 同学解决了过任意点做任意直线平行线的问题。其实，只用 Zyk 基本对称定理及其推论也可以实现，但是 Zsq 平行定理更加简洁。我们先讲如何只用 Zyk 基本对称定理及其推论来实现。

如图，A 为任意点，l 为任意直线，过 A 做 $l_2 \parallel l$。



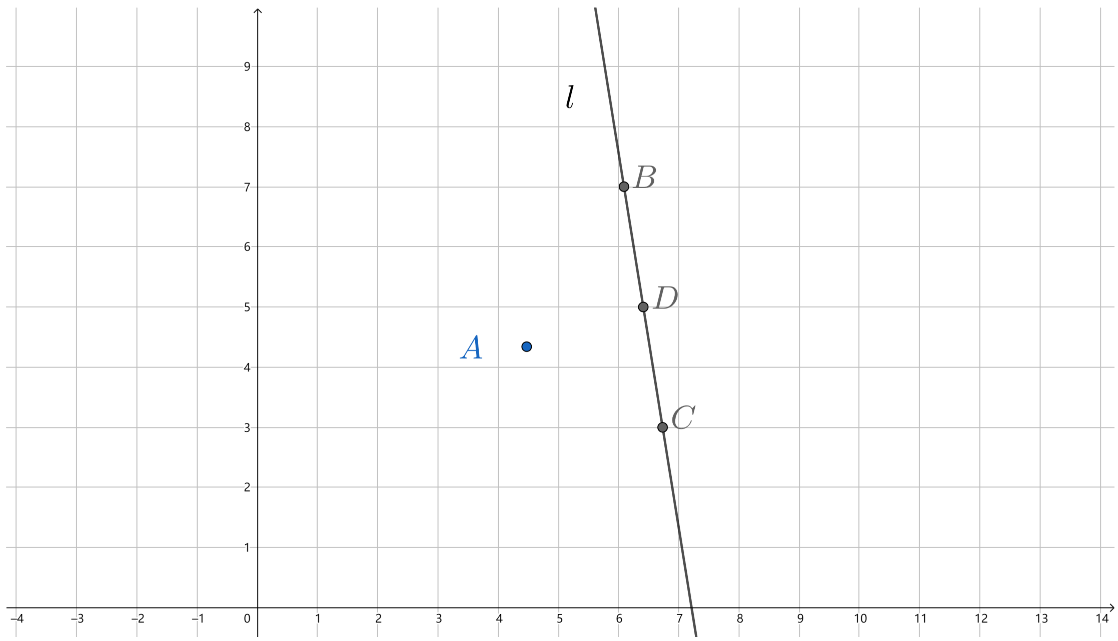
我们可以通过构造中位线的方法来解决这个问题。



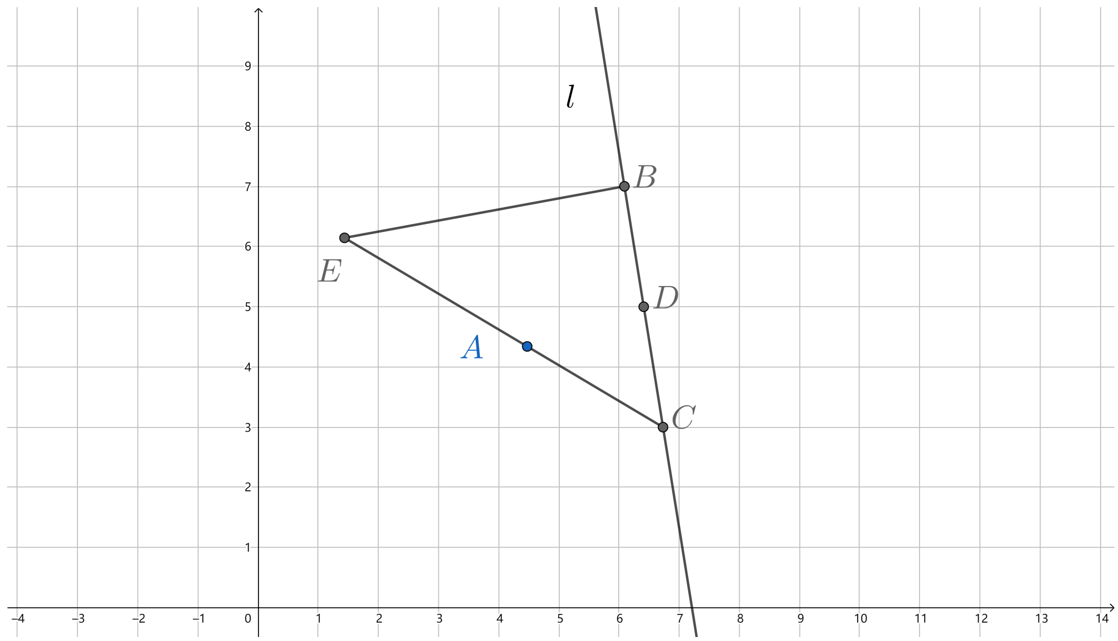
首先，在直线 l 上取合适的一点 B，应用倍长线段定理（定理 3.1.3）倍长线段 BA 到 C。再在直线上取合适的一点 D，连接 CD，应用平分线段定

理（定理 3.1.2）得到 CD 的中点 E。连接 AE，AE 即为所求。

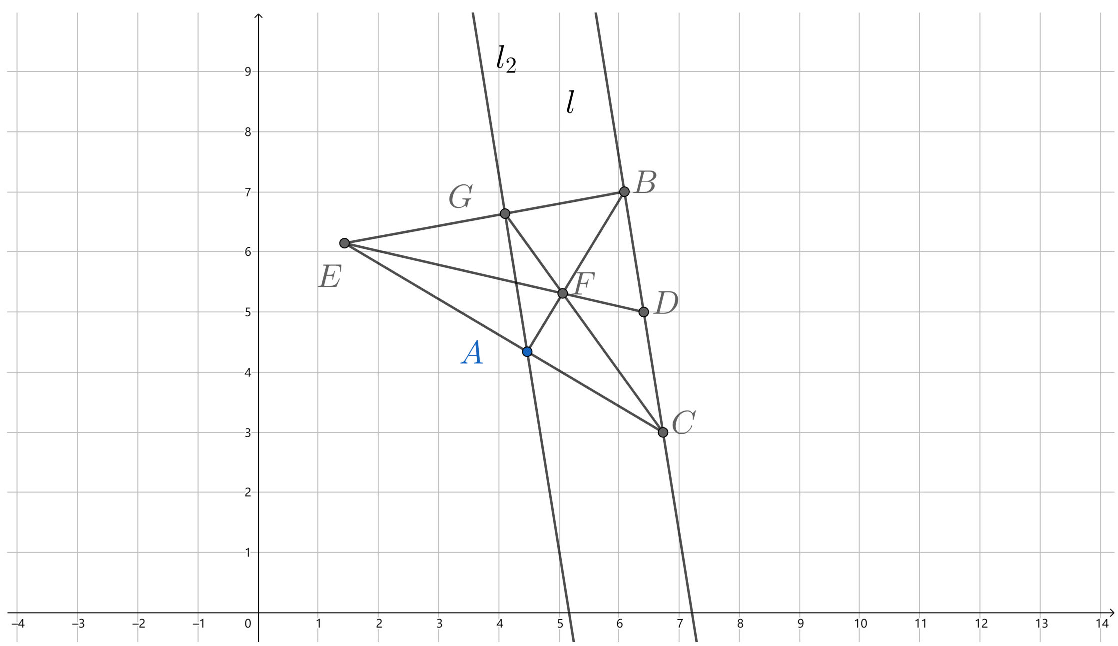
这种方法非常容易理解，但是作图非常繁琐。Zsq 平行定理巧妙地运用塞瓦定理，使得其作图方法非常简单，我们来看一下作图方法。



首先我们要选取三个点 B，D，C。这三个点不是随便选取的，它们都是直线 l 与水平格线的交点，而且 B 和 D、D 和 C 的垂直距离是相等的，这也就意味着 D 是线段 BC 的中点。选择竖直格线上等距离三点也是可以的，无论怎样选择根本目的都是让 D 为 BC 中点。此时我们连接 CA 并延长并在延长线上取一点 E 并连接 BE。



此时我们连接 ED，BA 交于 F。连接 CF 并延长交 EB 于 G。连 AG，AG 即为所求。



【证明】 这个定理的证明并不显然，我们来尝试证明一下。这里出现了三角

形内三线共点的情况，这让我们想到了塞瓦定理。

$$\frac{EA}{AC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BG}{GE} = 1$$

因为 D 是 BC 的中点，所以 $\frac{CD}{BD} = 1$，表达式被化简为：

$$\frac{EA}{AC} \cdot \frac{BG}{GE} = 1$$

再移项变换，可以得到

$$\frac{EA}{AC} = \frac{EG}{BG}$$

可以判定

$$EAG \sim \ ECB$$

所以 $AG \parallel BC$。结论得证

Zsq 平行定理 Zsq's Parallel Theorem（定理 3.2）

【提出者】张世其

可以过任意一点做任意一条直线的平行线。

Zyk 基本对称定理和 Zsq 平行定理的提出，让任意点网格作图不再是天方夜谭，为任意点作图奠定了基础。此后，越来越多的高级定理被发现。

朴素平移定理

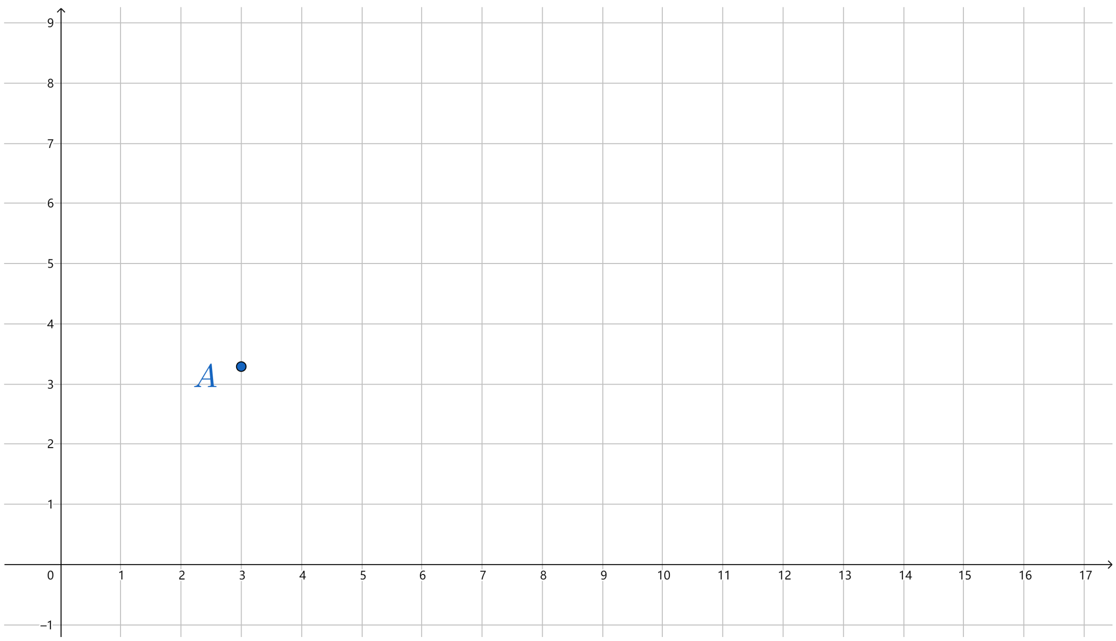
这是一个比较简单的定理，我们直接介绍做法。

朴素平移定理 Naïve Translate Theorem（定理 3.3）

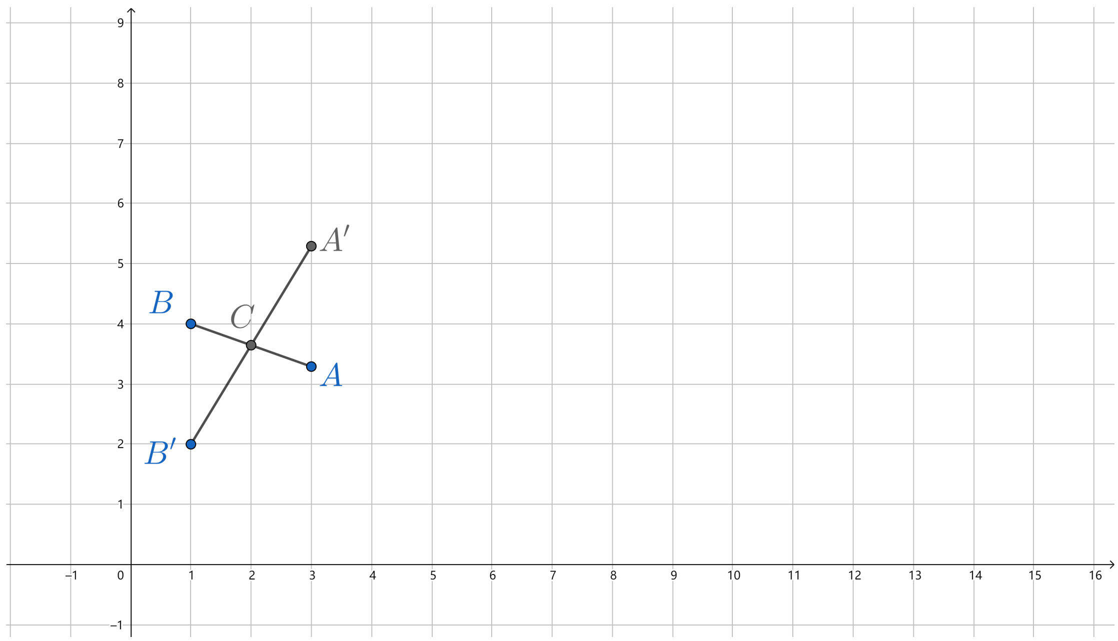
当一个点在格线上时，我们可以用比较简单的方法来平移它，做法如下。

顺格线平移

如图，A 在竖直格线上，将其向上平移 $n\,(n \in N^*)$ 个单位长度。下面将给出 $n = 2$ 时的作图。



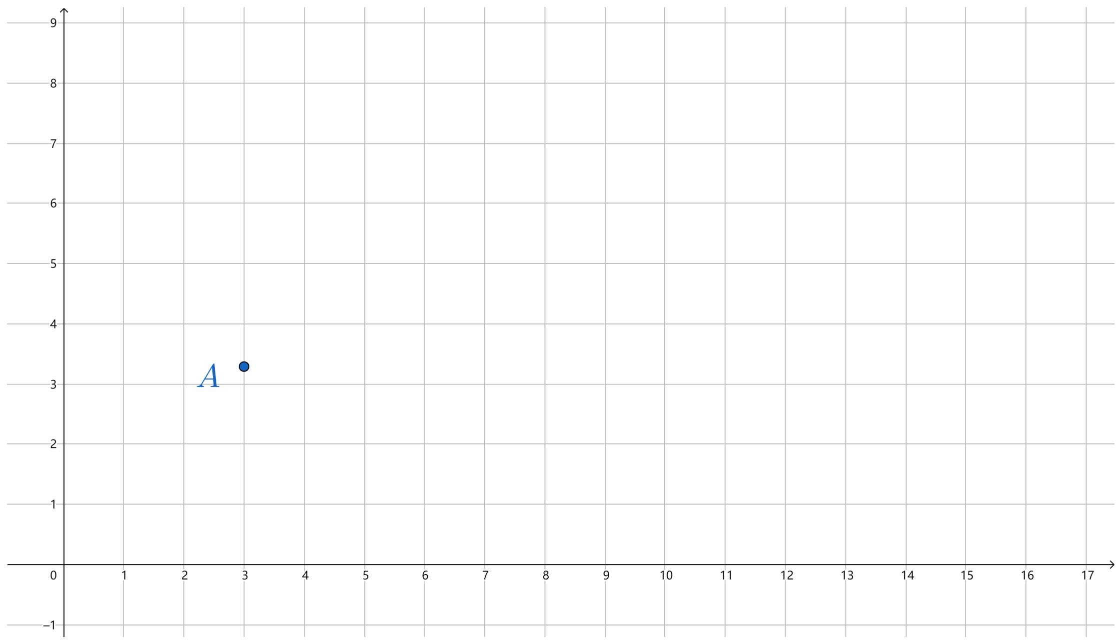
【作图语句】如下图，在 A 所在竖直格线的左侧第二条格线上取一个点 B，将 B 向下平移两单位得到格点 $B^{'}$，连 AB 交 A 所在竖直格线的左侧第一条格线于 C，连接 $B^{'}C$ 并延长交 A 所在竖直格线于 A'，A' 即为所求。



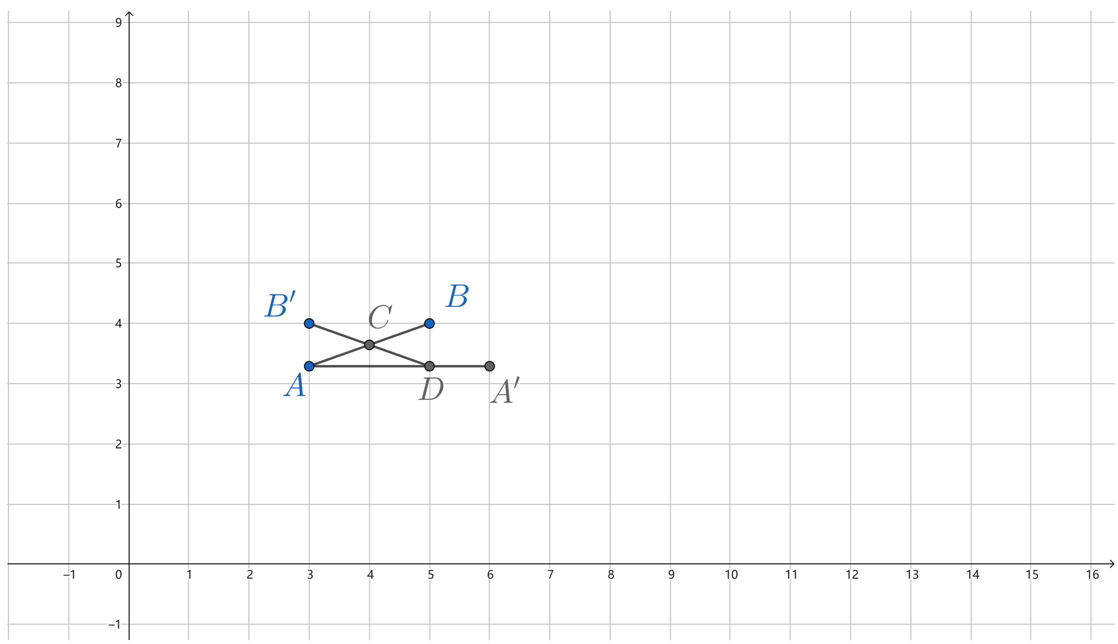
【**证明**】因为 $CA=CB$，$\angle BCB^{'}=\angle ACA^{'}$，$CA^{'}=CB^{'}$，所以 $ACA^{'}\cong BCB^{'}$，$AA^{'}=BB^{'}=2$。

跨格线平移

如图，A 在竖直格线上，将其向右平移 $n\,(n\in N^{*})$ 个单位长度。下面将给出 $n=3$ 时的作图。



【作图语句】如下图，取格点 B，B'，连 AB 交竖直格线于 C，连 $B'C$ 并延长交竖直格线于 D，连 AD 并延长交竖直格线于 A'，A' 即为所求。



【证明】因为 $CA = CB = CB' = CD$，所以四边形 $AB'BD$ 是矩形，$AA' \parallel$

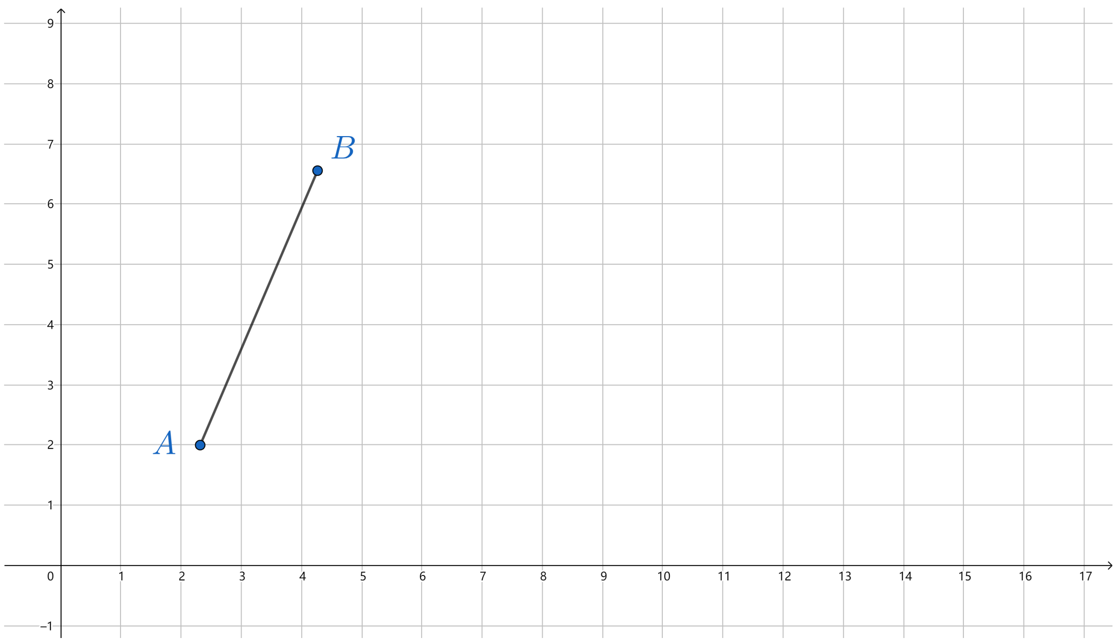
$BB^{'}$，结论得证。

2. 分线段与倍长

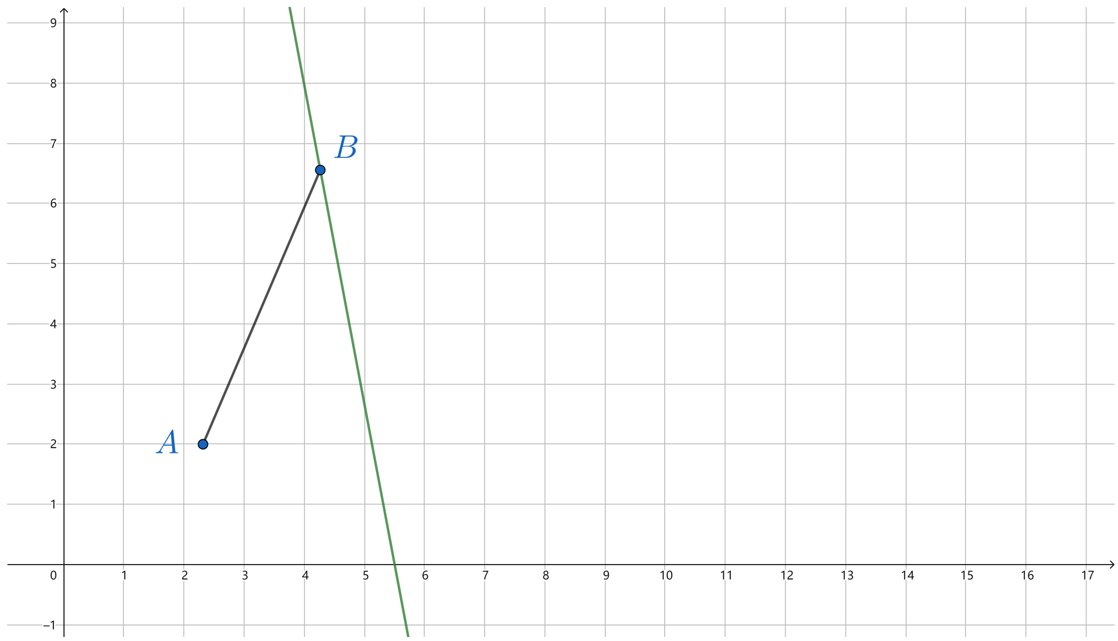
Wyc 两大分线段定理

在讨论将一条线段分成给定比例之前，我们先考虑如何平分它。虽然平分线段定理（定理 3.1.2）给出了做法，但是过程太过于复杂，我们需要考虑在一些特殊情况下可不可以简化一些步骤，然后再尝试推广到更一般的情况。

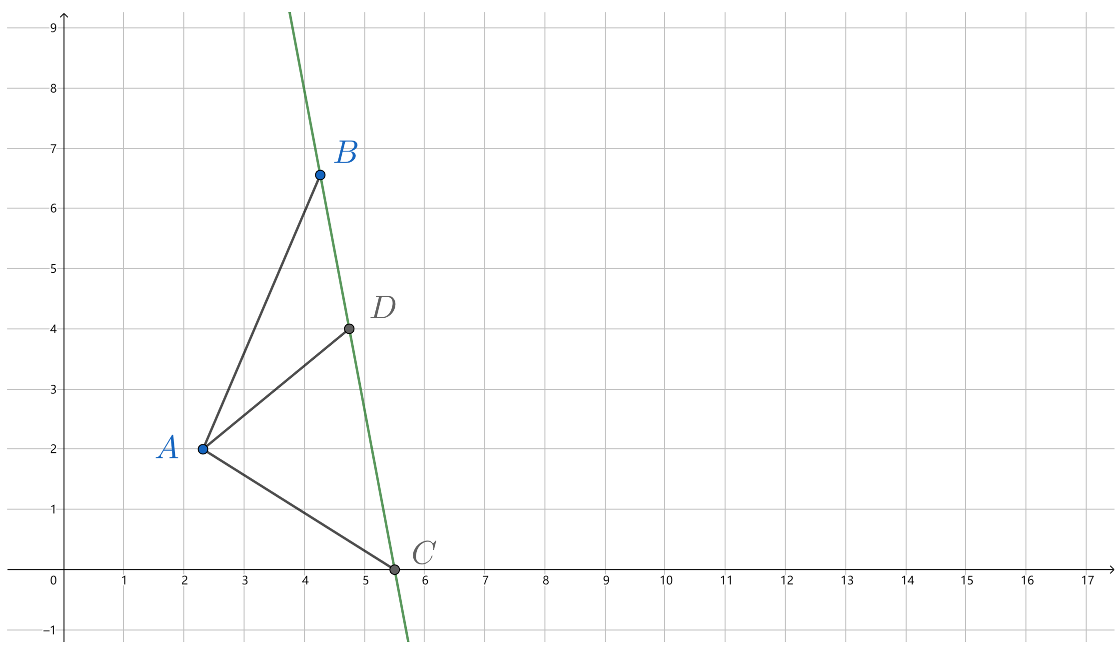
Wyc 同学考虑了一个很好的特殊情况——当线段的一个端点在格线上。如下图所示，A 在格线上，我们需要平分线段 AB。



Wyc 通过构造中位线的方法解决了这个问题。首先我们过 B 随便画一条合适的直线。

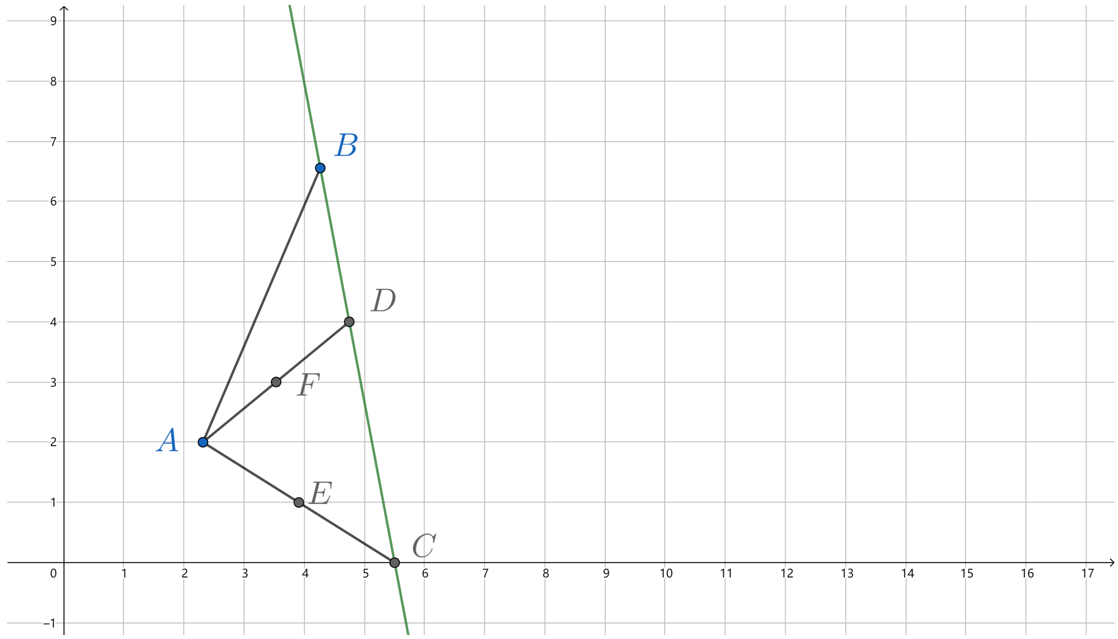


我们找到这条直线与两条水平格线的交点，设为 C，D。

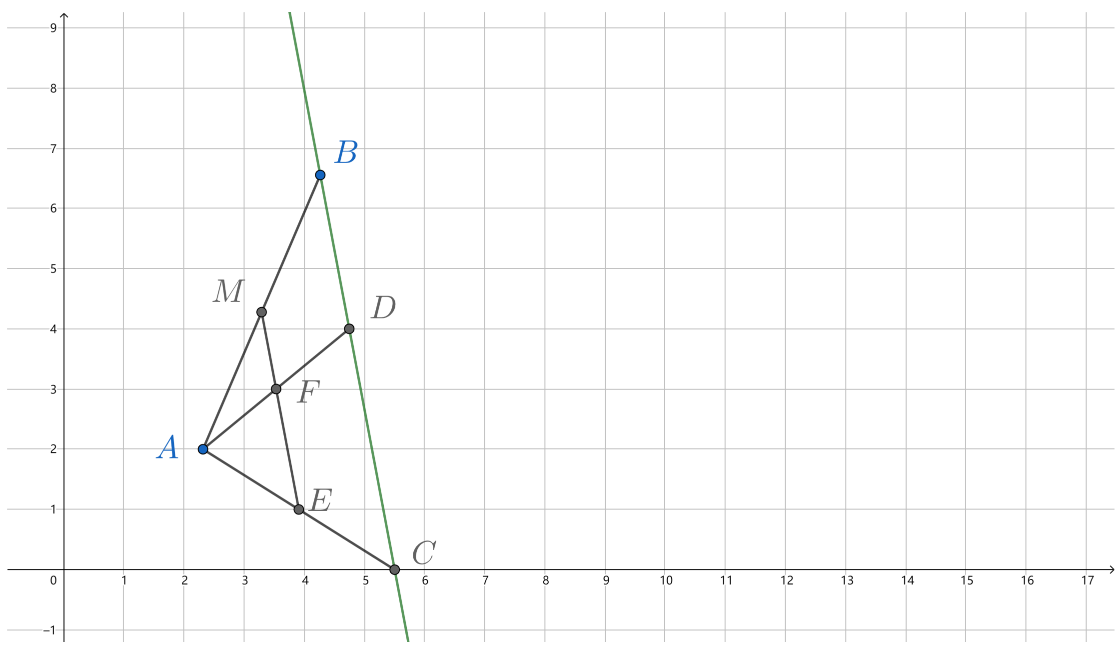


我们可以利用 “A 在格线上” 这一条件来简单地画出 AD，AC 的中点。显然，线段 AD 与 A、D 中间水平格线的交点就是 AD 的中点，线段 AC 与

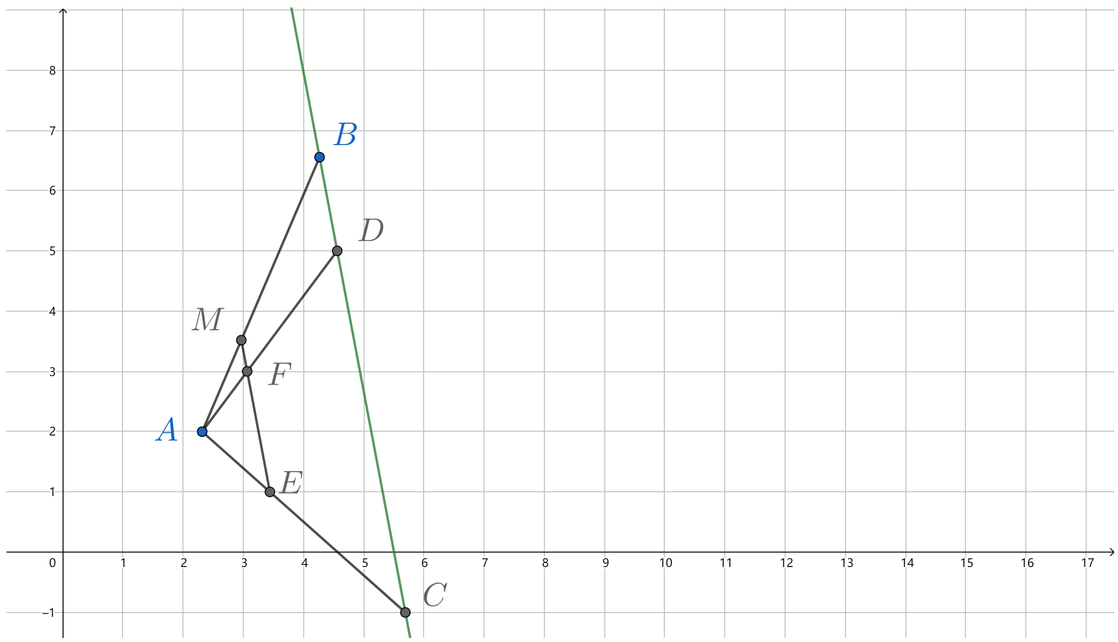
A、C 中间水平格线的交点就是 AC 的中点。



连接 EF 并延长交 AB 于 M，M 即为所求。它的正确性是显然的，这里就不提供证明了。



【拓展】我们可以用很相似的方法作出一条线段（一端点在格线上）的三等分点、四等分点以及其他比例的分线段点。下面的图给出了作三等分点的方法：



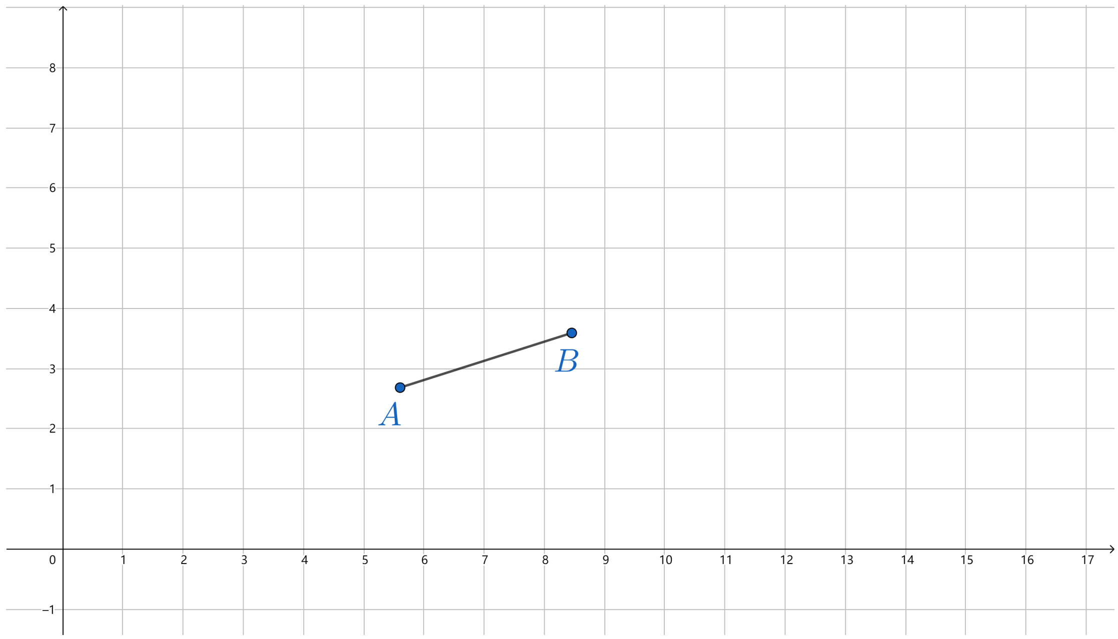
Wyc 分线段定理的思路，可以用概括为如下的部分。首先，当一条线段的两个端点都在格线上，且这两条格线都是水平格线或都是竖直格线的时候，这条线段的中点很好作；我们可以利用这个特点，构造中位线或相似，解决比较一般的情况。

Wyc 分线段定理 Wyc's Segment Dividing Theorem（定理 3.4）

【提出者】王宇辰

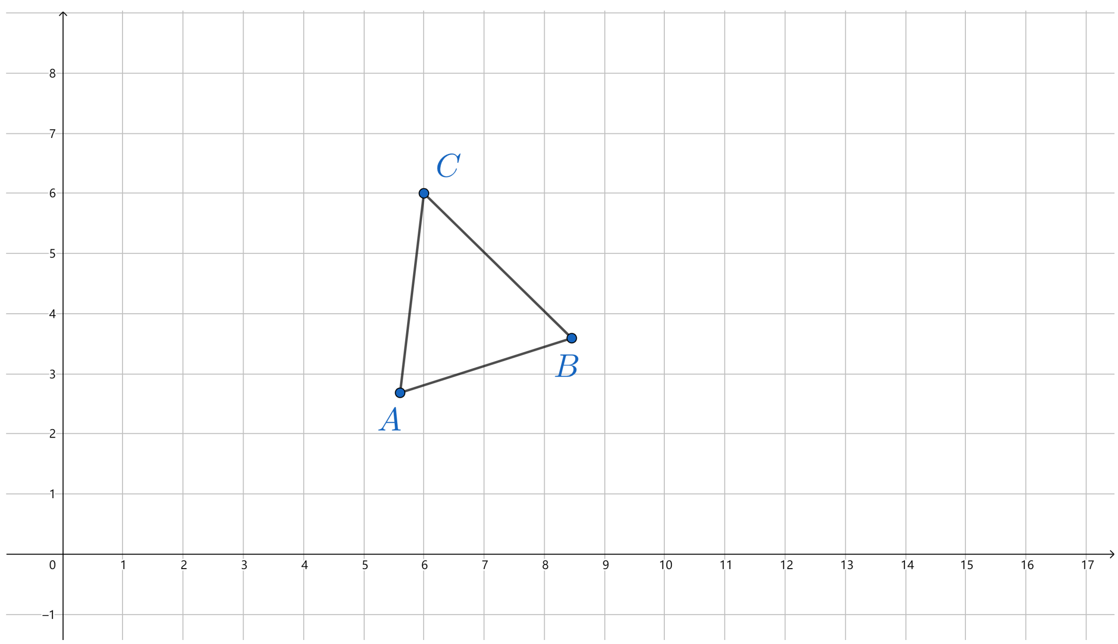
当一条线段的一个端点在格线上时，可以用比平分线段定理（定理 3.1.2）更简单的方法把该线段分成给定比例。

现在我们要考虑将任意线段平分的简单方法了。

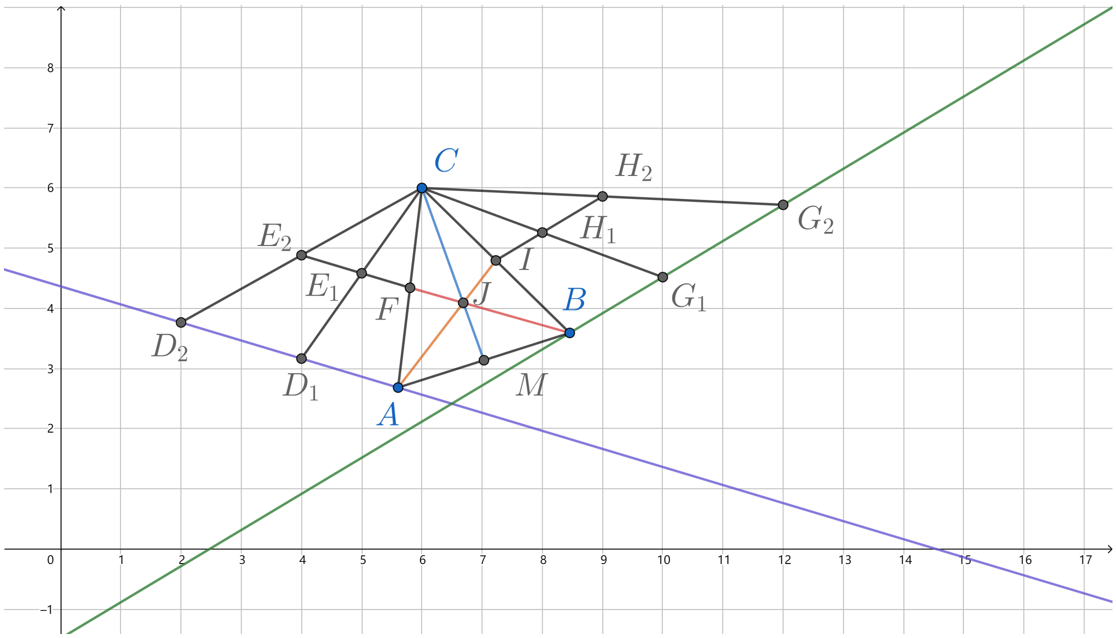


如图，AB 是任意线段，平分 AB。

我们可以利用构造重心的方法来解决这个问题。

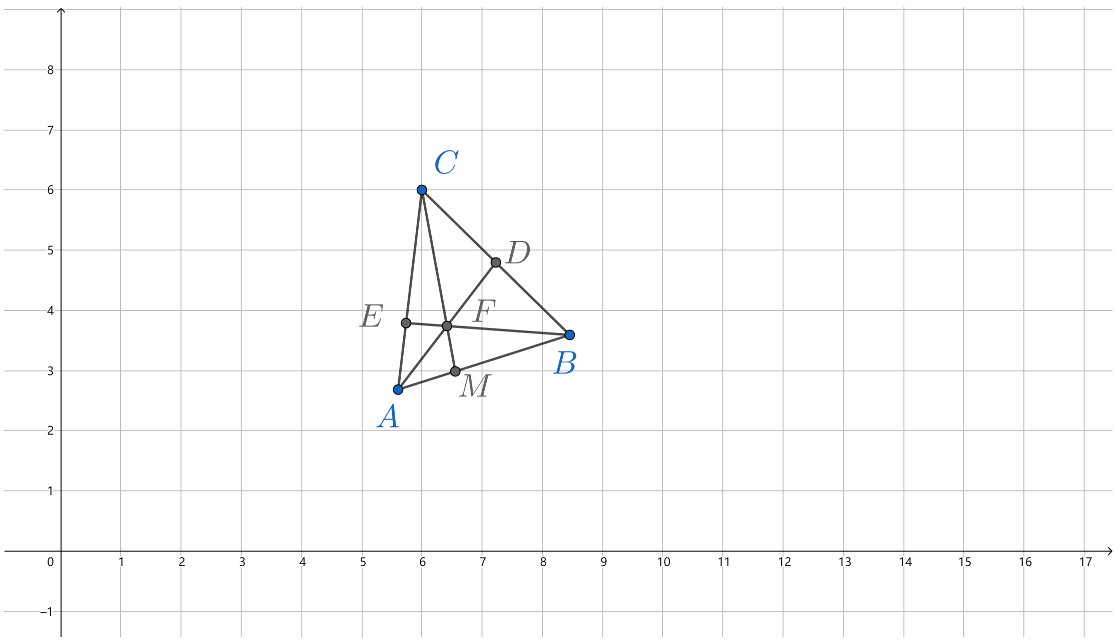


如图，C 是格点。如果我们可以作出线段 AC，线段 BC 的中点，根据三角形三条中线交于同一点，我们可以作出线段 AB 的中点。至于前两个中点，根据 Wyc 分线段定理（定理 3.4），是显然可作的。



如图，用 Wyc 分线段定理做出线段 AC 的中点 F 和线段 BC 的中点 I，连接 BF 和 AI 交于 J，连接 CJ 并延长交 AB 于 M，M 即为 AB 中点。读者需要注意，E_2、F、B 这三个点在图里看起来像是共线的三个点，实际上它们很可能不是共线的。

如果我们想要画出 AB 的三等分点、四等分点，应该怎么办呢？我们应该把这一定理扩展。通过塞瓦定理，我们可以画出三等分点，思路见下：



如图，C 是格点，画出线段 AC 的三等分点（更加靠近 A）和 BC 的中点，连接 BE、AD 交于 F，连接 CF 并延长交 AB 于 M，M 即为 AB 三等分点（更靠近 A 的那一个）。

这个做法涉及到了三角形内三线共点的情况，这让我们想到了塞瓦定理：

$$\frac{CE}{AE} \cdot \frac{AM}{BM} \cdot \frac{BD}{DC} = 1$$

因为

$$\frac{CE}{AE} = 2$$

$$\frac{CD}{BD} = 1$$

所以

$$\frac{AM}{BM} = \frac{1}{2}$$

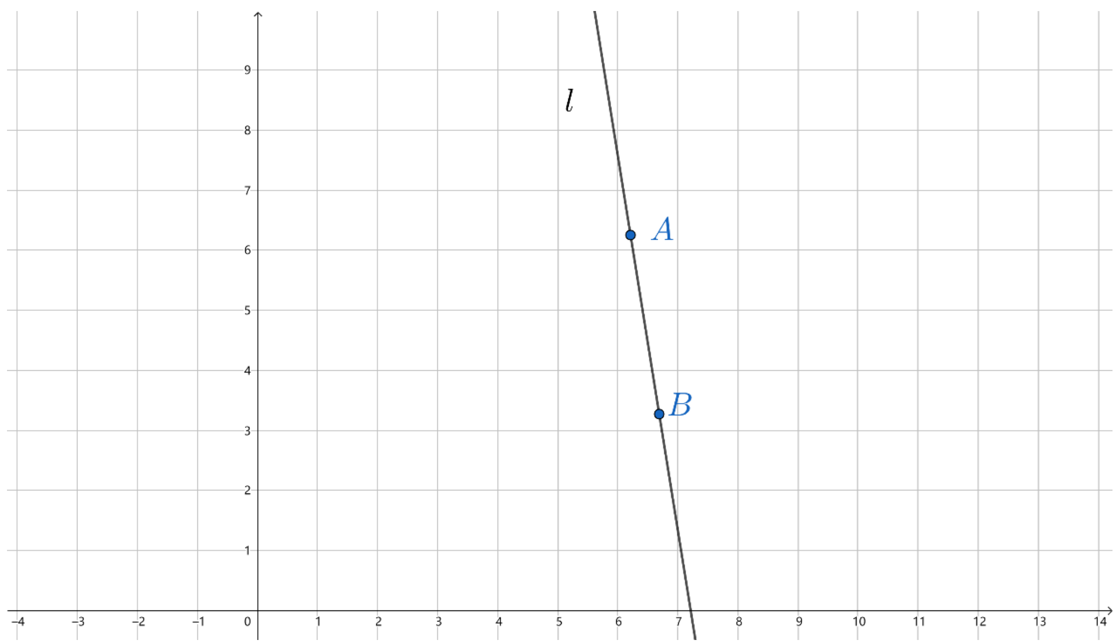
结论得证。M 的确是线段 AB 更靠近 A 的那一个三等分点。对于四等分点和其它的情况，读者可自行思考。

广义 Wyc 分线段定理 Wyc's Generalized Segment Dividing Theorem（定理 3.5）

【提出者】翟悦凯（广义定理非王宇辰本人提出）

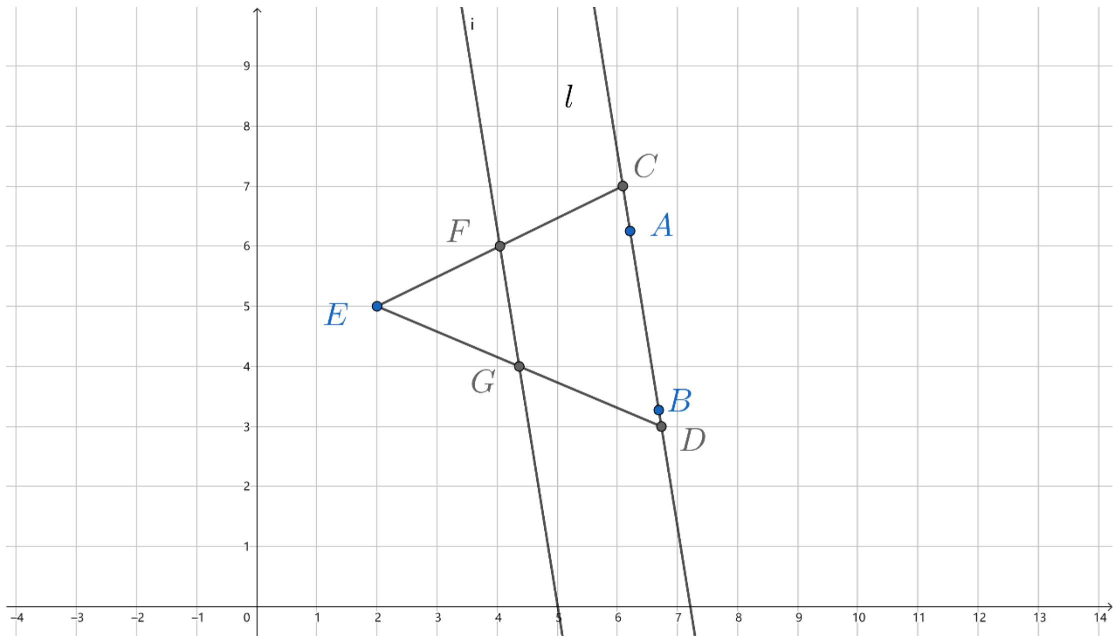
对于任意一条线段，可以用比平分线段定理（定理 3.1.2）更简单的方法，把该线段分成给定比例。

【优化】当我们想要做出一条任意线段的中点时，做法可以进一步优化。我们先来看图。



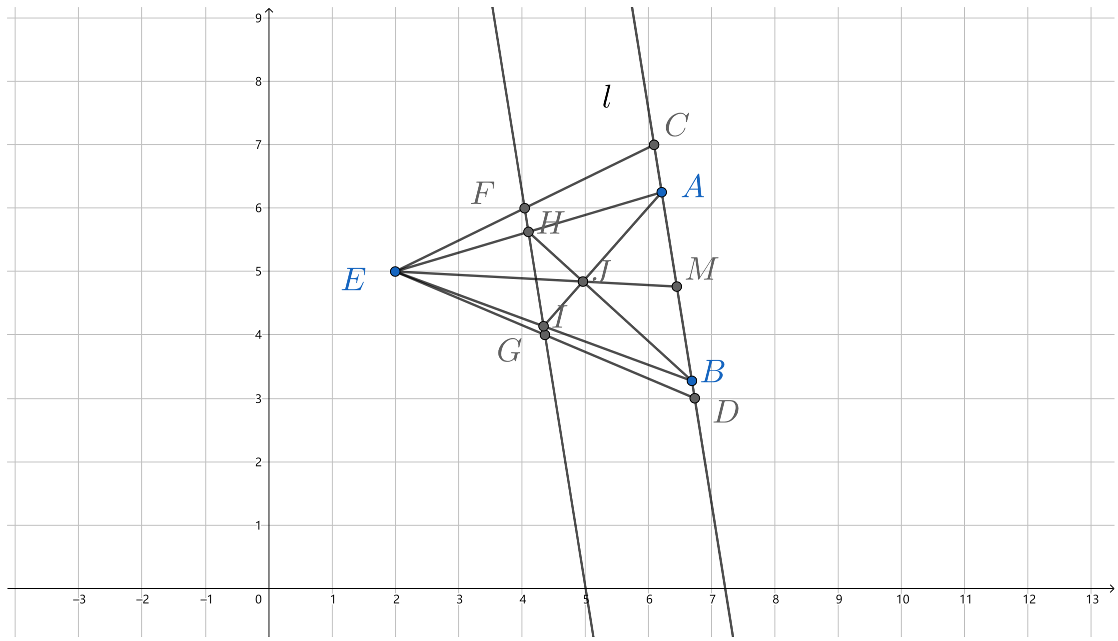
如图，在线段 AB 上找到它的中点。

首先我们要做 AB 的平行线。为了方便，我们可以充分利用格线，不用张世其平行定理来画平行线。



如图，取格点 C，D，E，连 EC 交格线于 F，连 ED 交格线于 G，连接 FG，那么 $FG \parallel CD$。

因为 $FG \parallel CD$，所以在 CD 上的任意一点 P，连接 EP 交 FG 于 Q，都满足 $EP = 2EQ$。我们可以利用这一特性来构造重心。



如图，连接 EA，EB 交 FG 分别于 H，I。连接 BH，AI 交于 J。连接 EJ 并延长交 AB 于 M。M 即为 AB 的中点。这个优化由欧思远给出。

广义 Wyc 分线段定理的 Osy 第一优化 Osy's First Optimization of Wyc's Generalized Segment Dividing Theorem（定理 3.5.1）

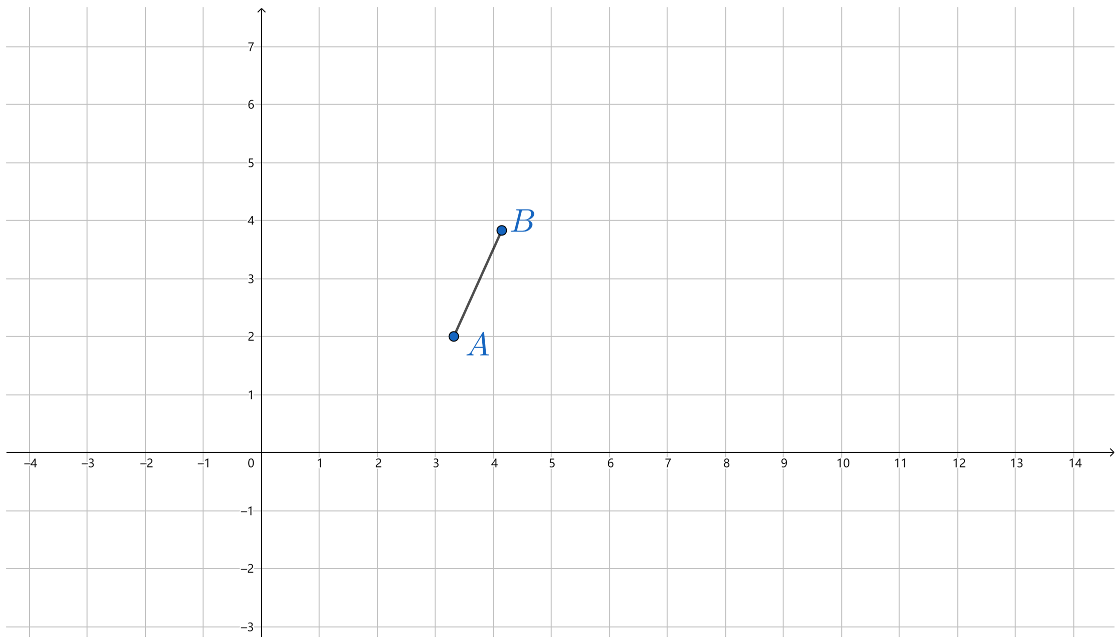
【提出者】欧思远

对于任意一条线段，我们可以用比广义 Wyc 分线段定理（定理 3.5）更简单的方法来平分它。

注意：定理 3.5.1 只能平分一条线段，不能把它分成其它的比例。

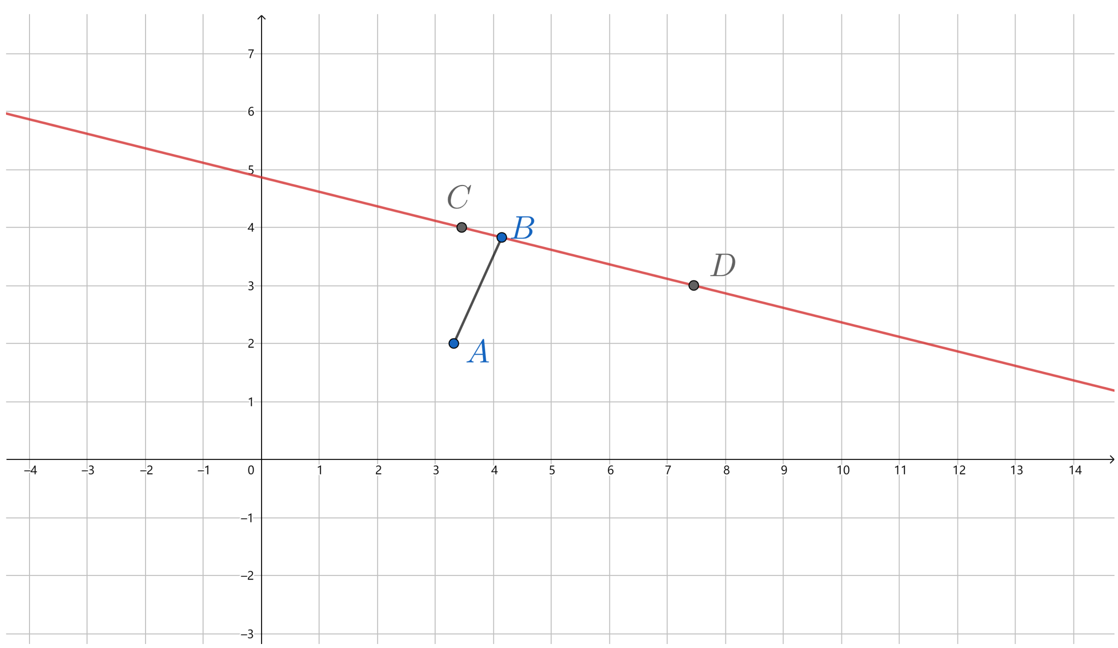
Wyc 两大倍长线段定理

类似于 Wyc 分线段定理，当线段的一个端点在格线上时，我们可以充分利用这个端点来简化作图步骤。Wyc 倍长线段定理分为两部分：一是向格线端点的方向倍长线段，一是向自由端倍长线段。我们先看向格线端点的方向倍长线段。

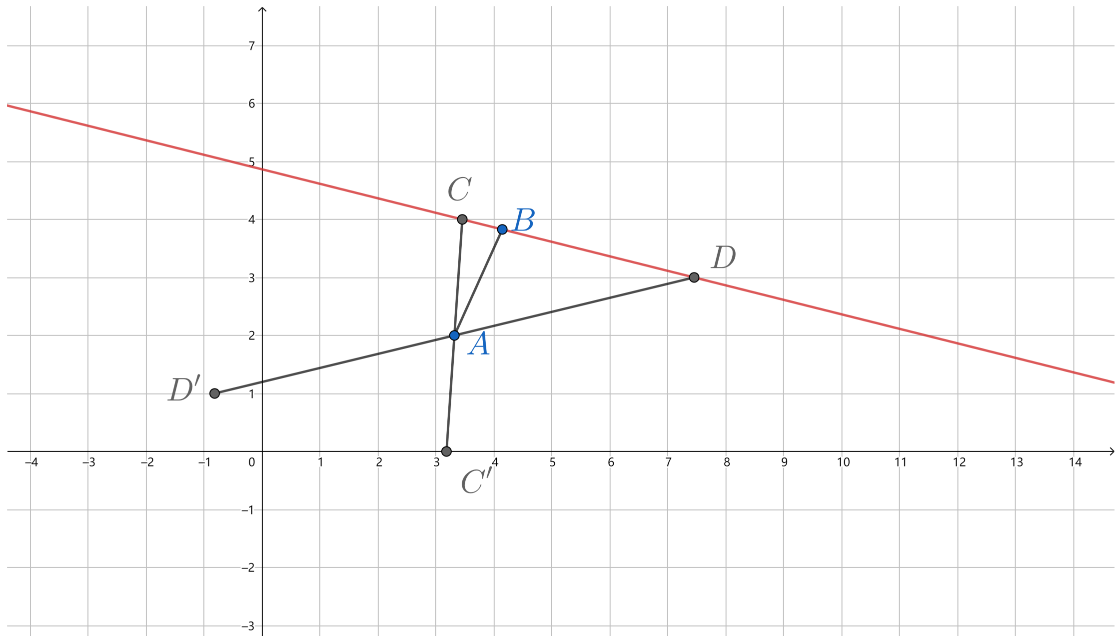


如图，A 在格线上，请延长线段 BA 到点 B' 使得 $AB = AB'$。

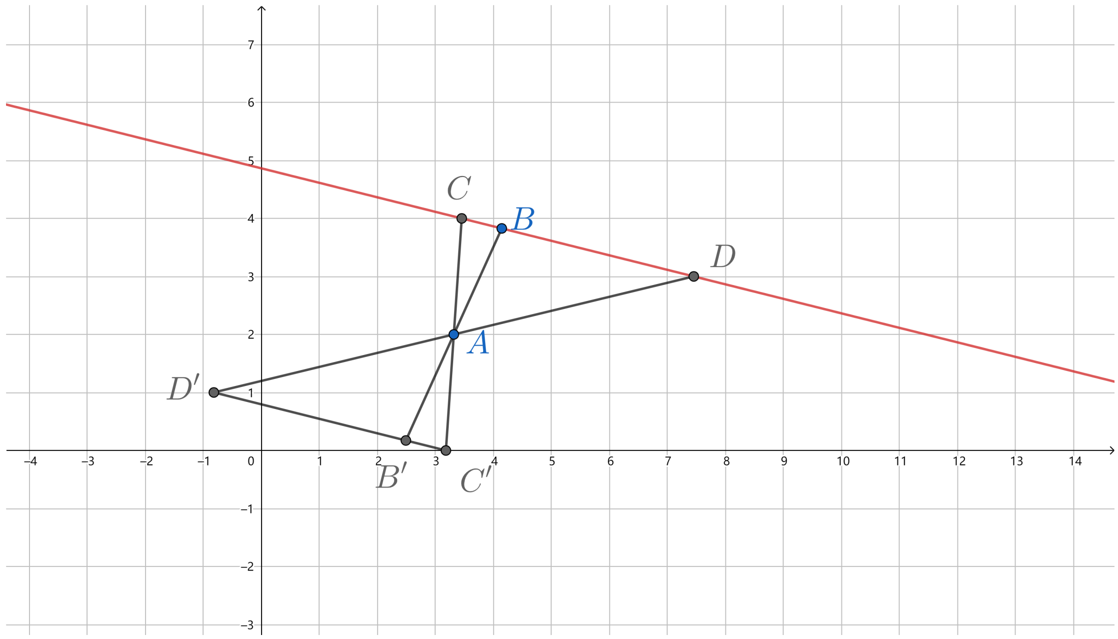
我们可以通过构造中心对称来解决这个问题。作图步骤和 Wyc 分线段定理有相似之处。



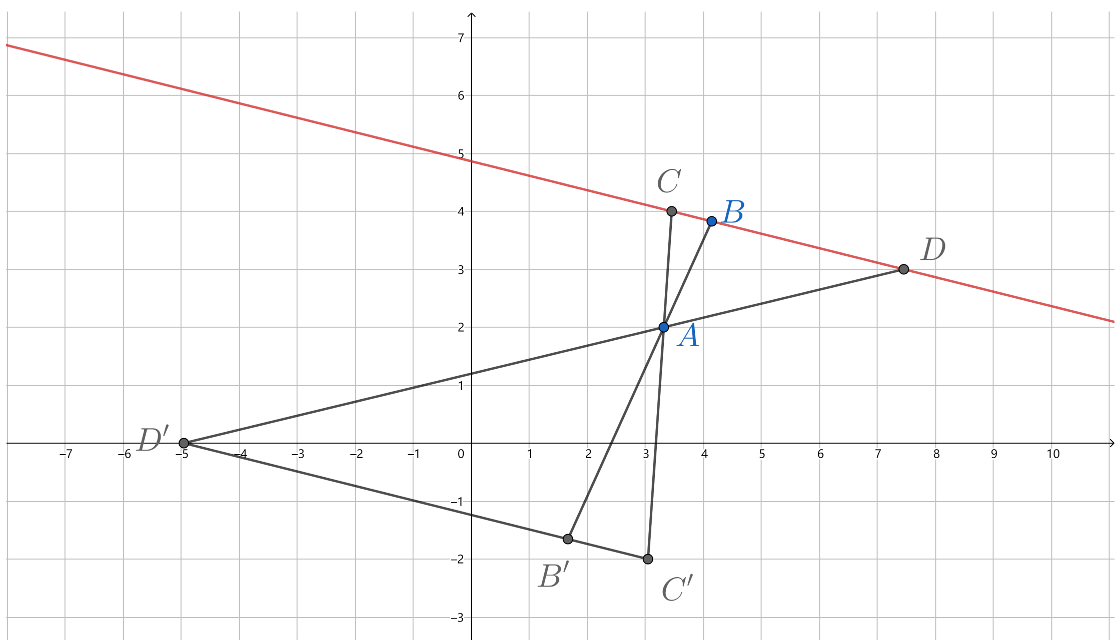
如图，过 B 作一条合适的直线，交两条水平格线分别于 C，D。我们发现，利用 A，C，D 都在水平格线上这一个条件，可以很简单地倍长线段 AC 和线段 AD。



此时，我们连接 $C'D'$，在延长线段 BA 交线段 $C'D'$ 于 B'，AB' 即为所求。

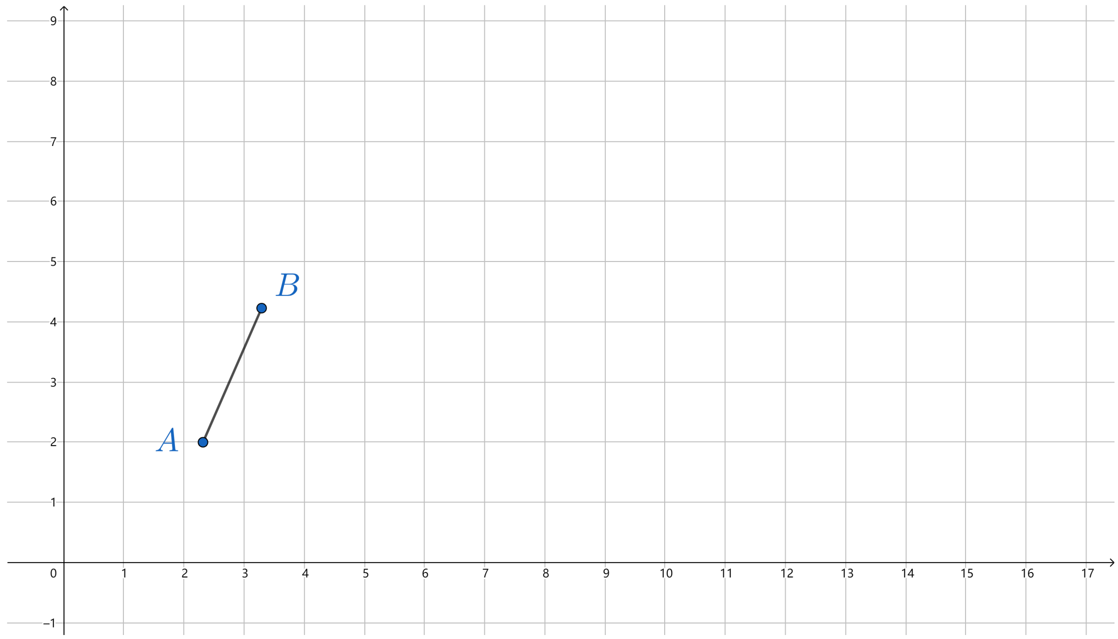


这个方法也可以推广到倍长至原线段的三倍，下面给出了三倍倍长的图，读者可以自行尝试理解。



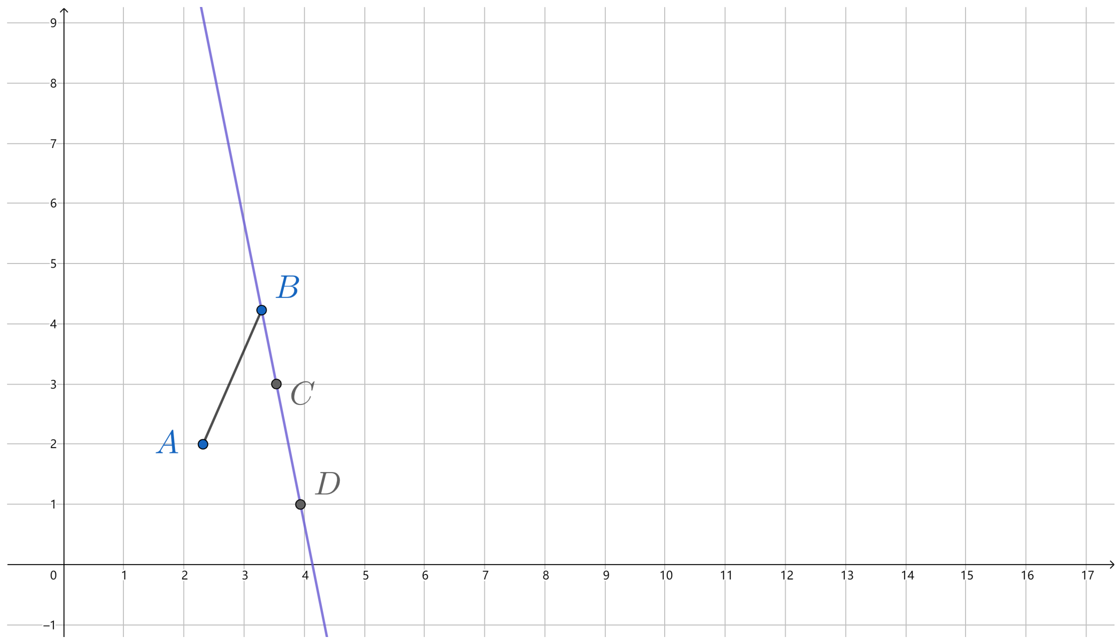
我们再看向自由端点方向倍长线段。此时的图与 Wyc 分线段定理的图几乎

完全相同。

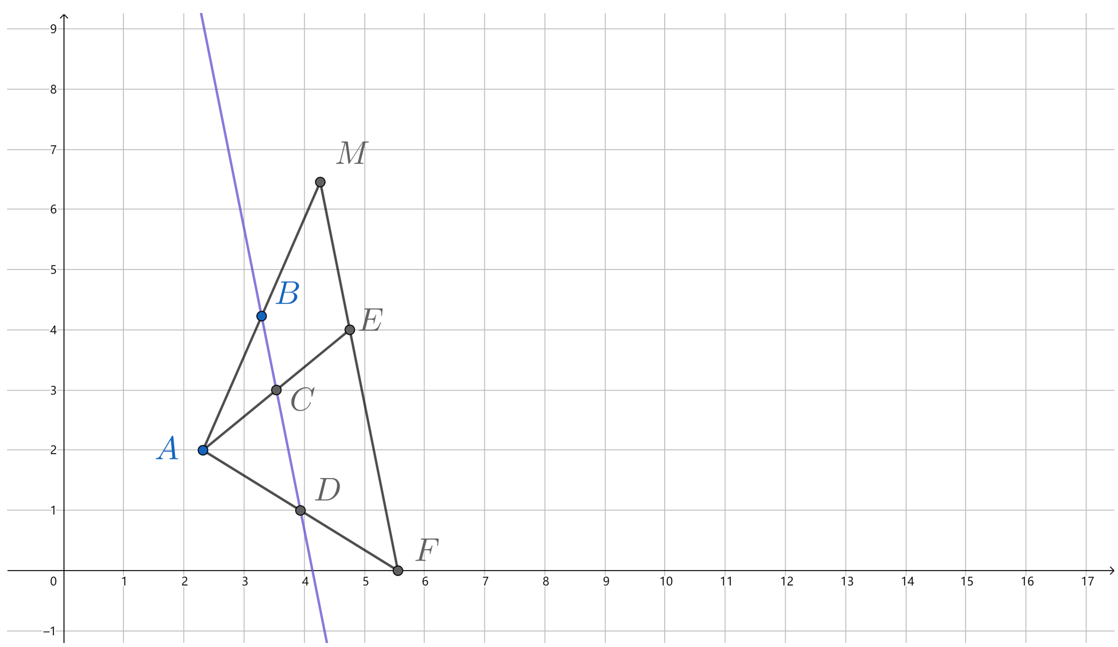


如图，A 在格线上，请在射线 AB 上找到点 M 使得 $AB = BM$。

我们还是需要通过构造中位线的方法来解决这个问题。

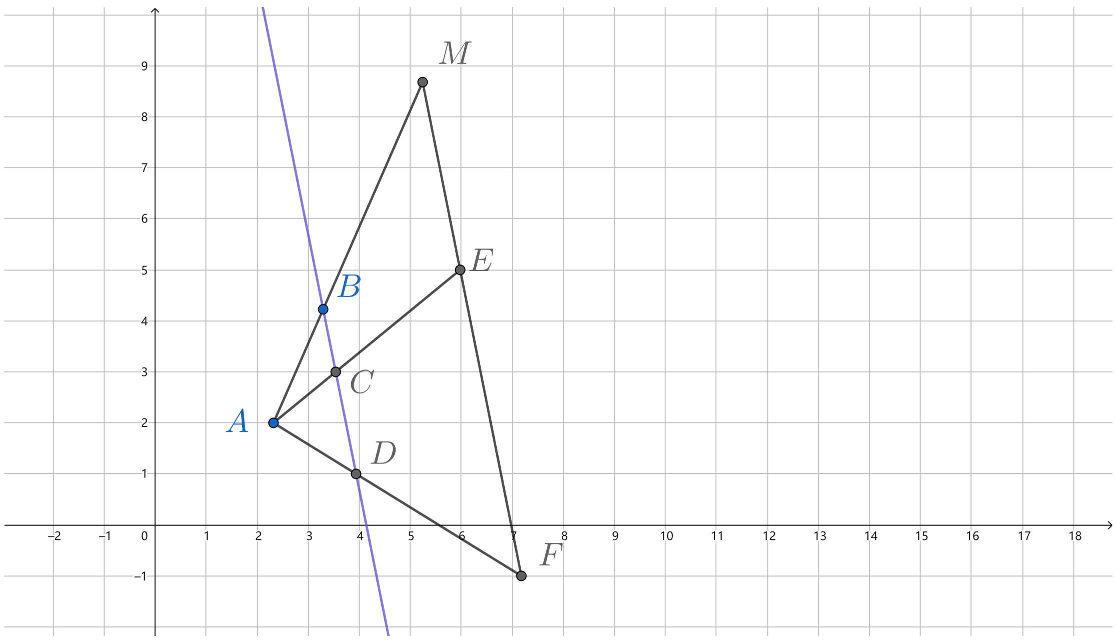


如图，过 B 作一条合适的直线，取这条直线与两条水平格线的交点，分别为 C 和 D。通过 A，C，D 都在水平格线上这一条件，我们可以很简单地倍长线段 AC 和线段 AD。



如图，倍长线段 AC 至 E，倍长线段 AD 至 F，连接 FE 并延长交 AB 延长线于 M，M 即为所求。

同样地，我们可以把 AB 倍长至原来的三倍或四倍。下面给出了倍长至原线段三倍的图。

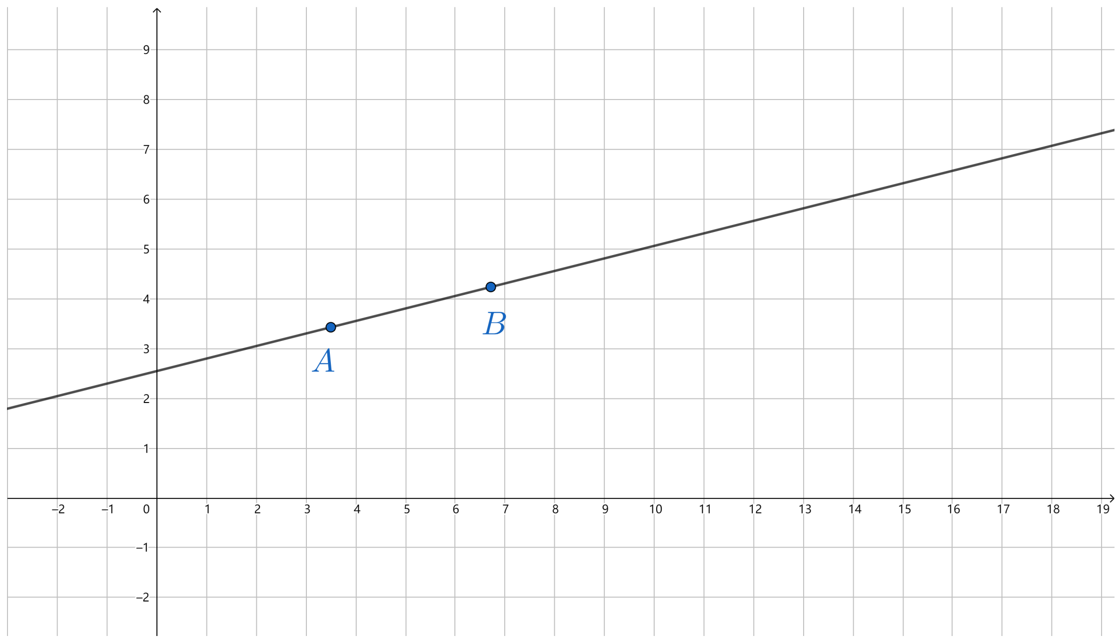


Wyc 倍长线段定理 Wyc's Segment Multiplication Theorem（定理 3.6）

【提出者】王宇辰（向自由端倍长）、翟悦凯（向格线端点倍长）

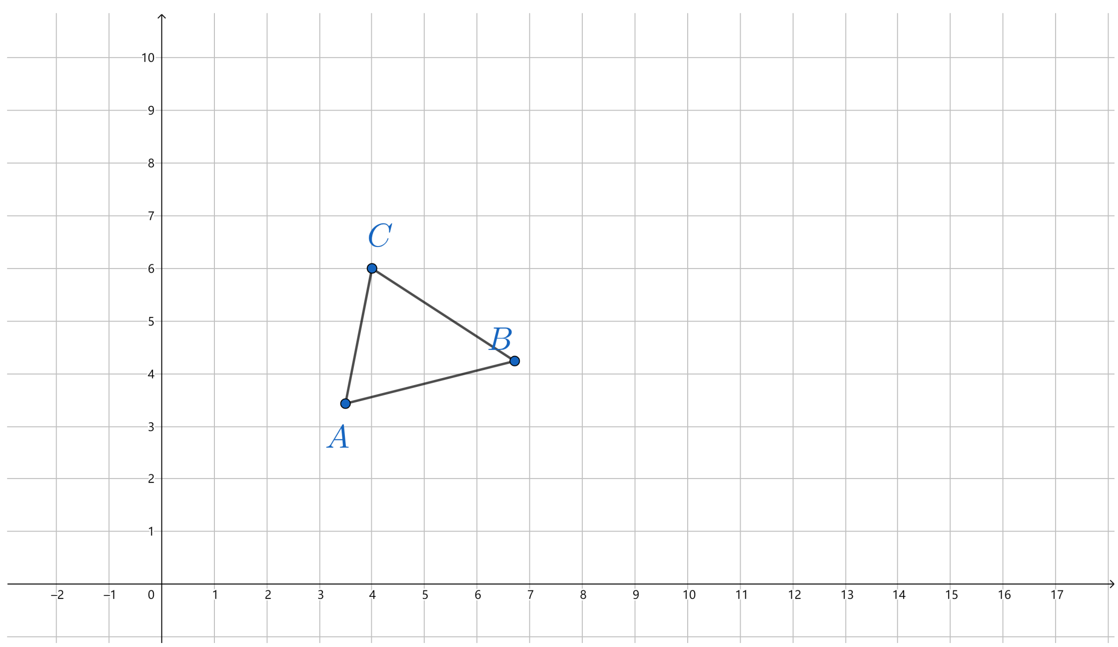
当一条线段的一个端点在格线上时，可以用比倍长线段定理（定理 3.1.3）更简单的方法倍长它。

我们现在要考虑倍长任意线段的方法了。我们来看图：

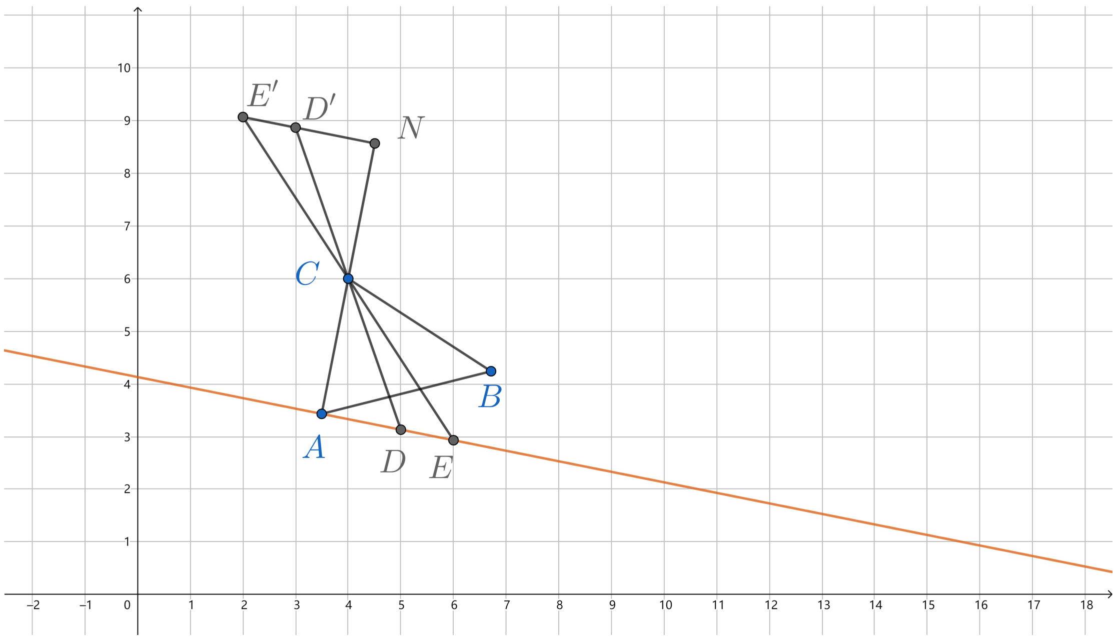


如图，A，B 为任意点，请在直线 AB 上取点 M 使得 $AB = BM$，其中 A，M 不重合。

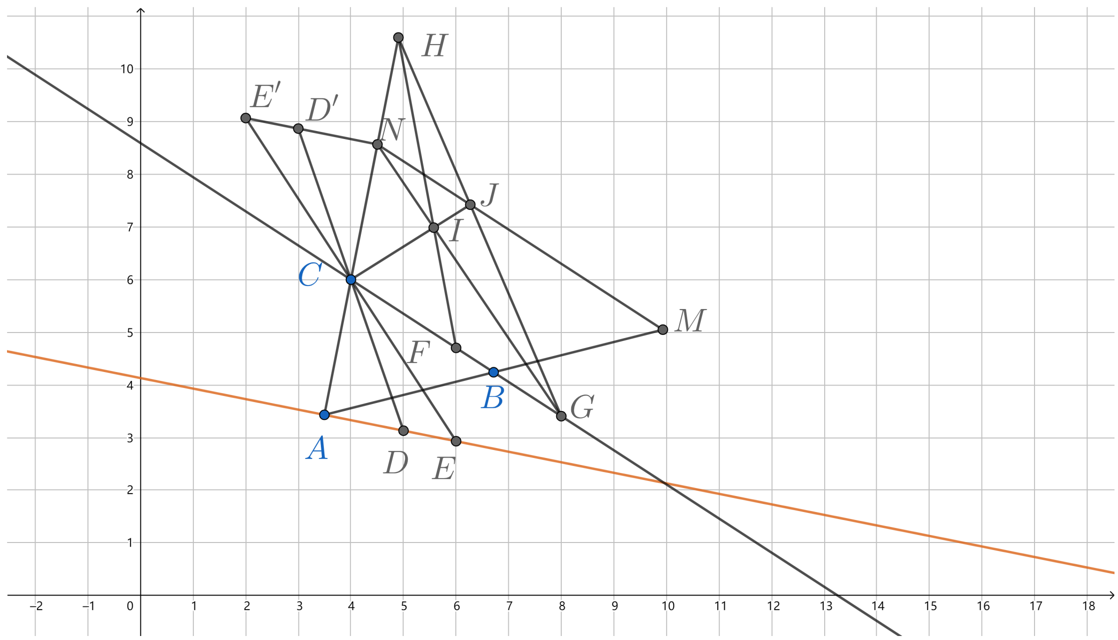
我们需要再次通过构造中位线或相似的方法解决这个问题。



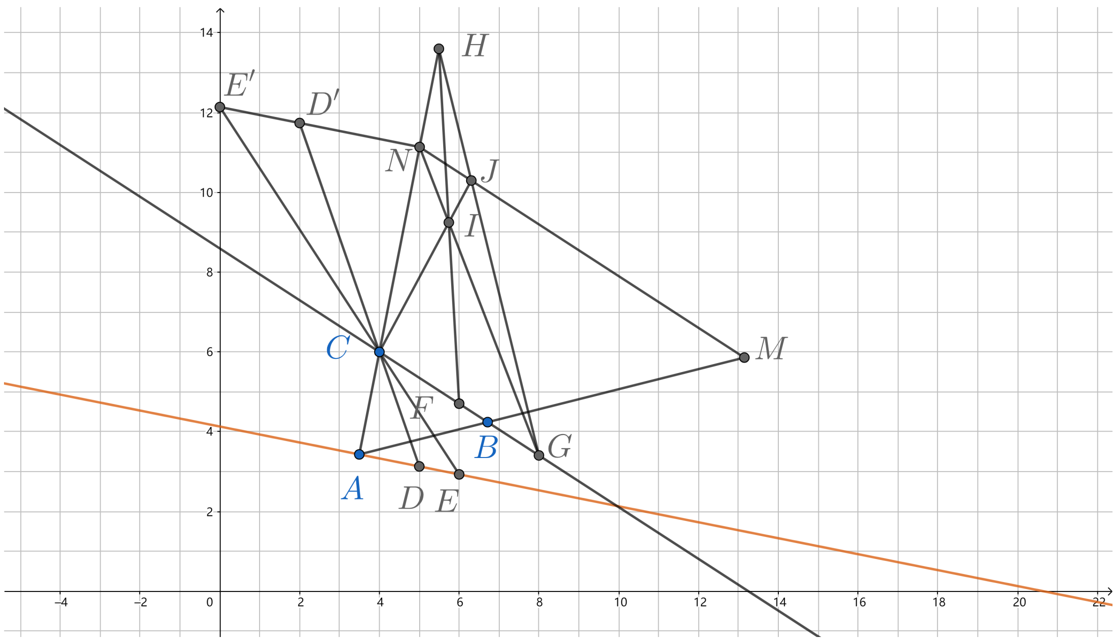
如图，我们选择格点 C，连接 AC、BC。如果我们能把 AC 倍长至 N，再过 N 作 BC 的平行线交射线 AB 于 M，M 即为所求。我们可以来尝试一下。



如图，我们把 AC 倍长到了 N。下面我们要过 N 作 BC 的平行线。



如图，M 即为所求。需要注意的是，广义 Wyc 倍长线段的图特别容易作乱，画图者需要在倍长线段 AC 这一步选择合适的点 D 和点 E。广义 Wyc 倍长线段定理显然可以推广至倍长三倍或四倍以及其它的倍数，下面给出了倍长至原线段三倍的图：



广义 Wyc 倍长线段定理 Wyc's Generalized Segment Multiplication Theorem（定理 3.7）

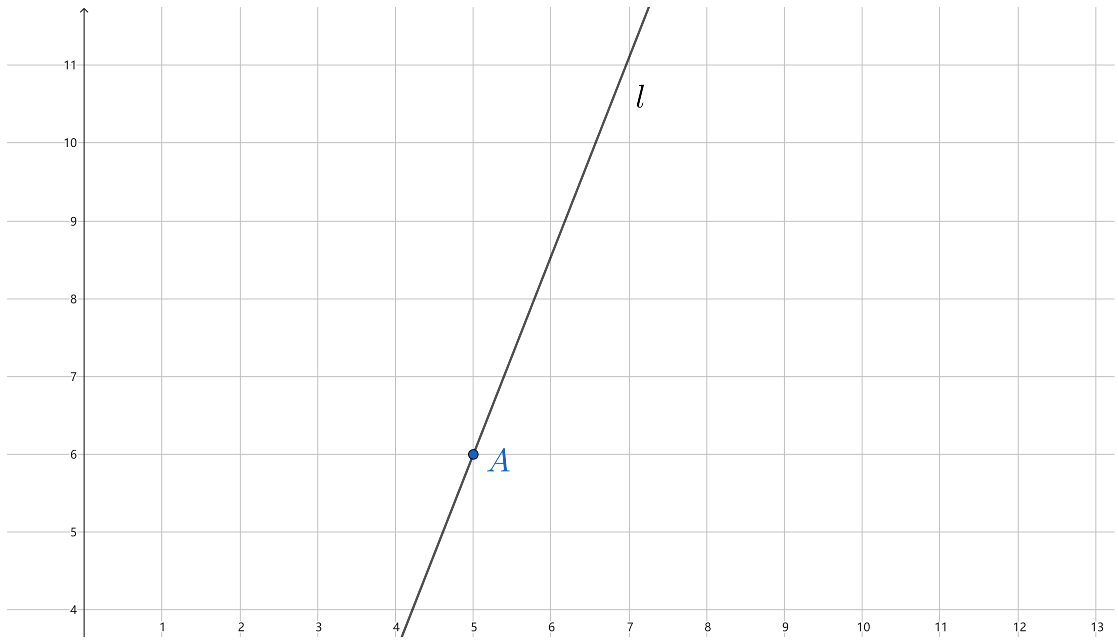
【提出者】翟悦凯（非王宇辰本人提出）

对于任意线段，可以用比倍长线段定理（定理 3.1.3）更简单的方法倍长它。

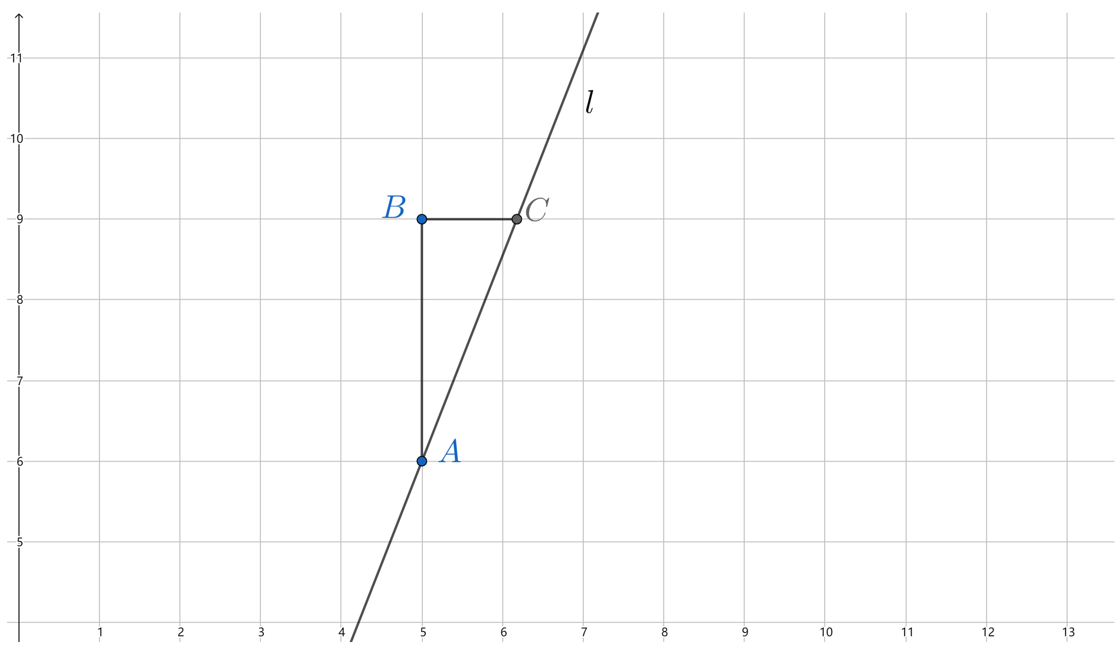
3. 垂直与对称

Zyk 垂直定理

Zyk 垂直定理解决了过任意格点 A 任意直线 l 垂线的问题——但是 l 必须过 A。如图：

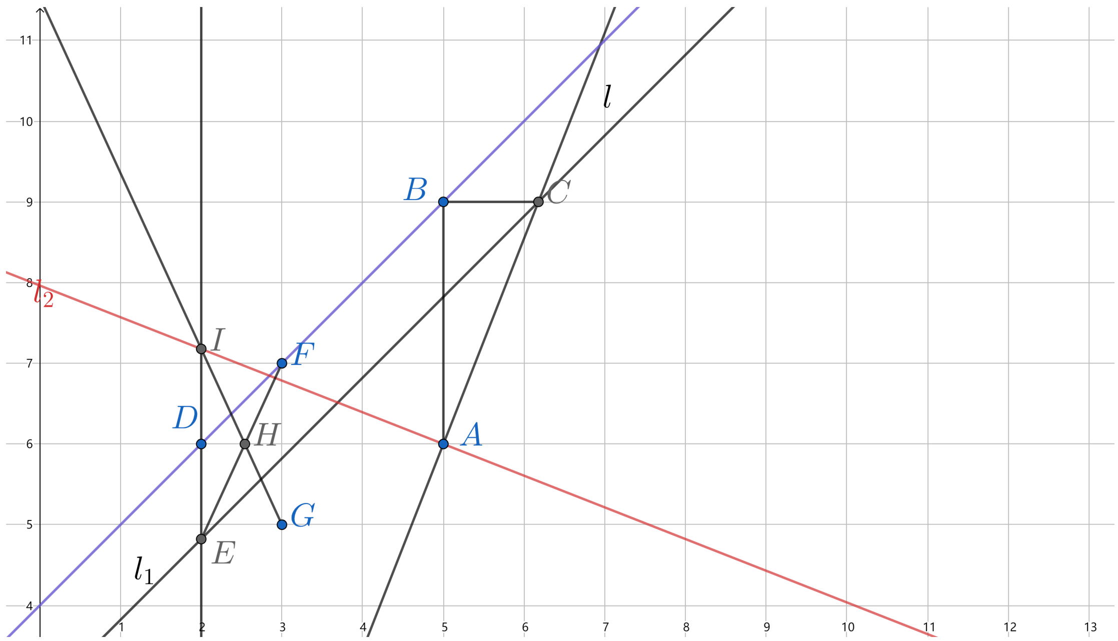


如图，l 过 A，A 是格点。请过 A 作 $l_2 \perp l$。



如图，我们取格点 B 和直线与水平格线的交点 C。如果我们可以把 $\triangle ABC$

逆时针旋转 90°，问题就可以得到解决。我们具体这样做：



去格点 D，连接 BD。过 C 作 $l_1 \parallel BD$ 交 D 所在的竖直格线于 E。作 E 关于 D 所在水平格线的对称点 I，连接 AI，AI 即为所求。

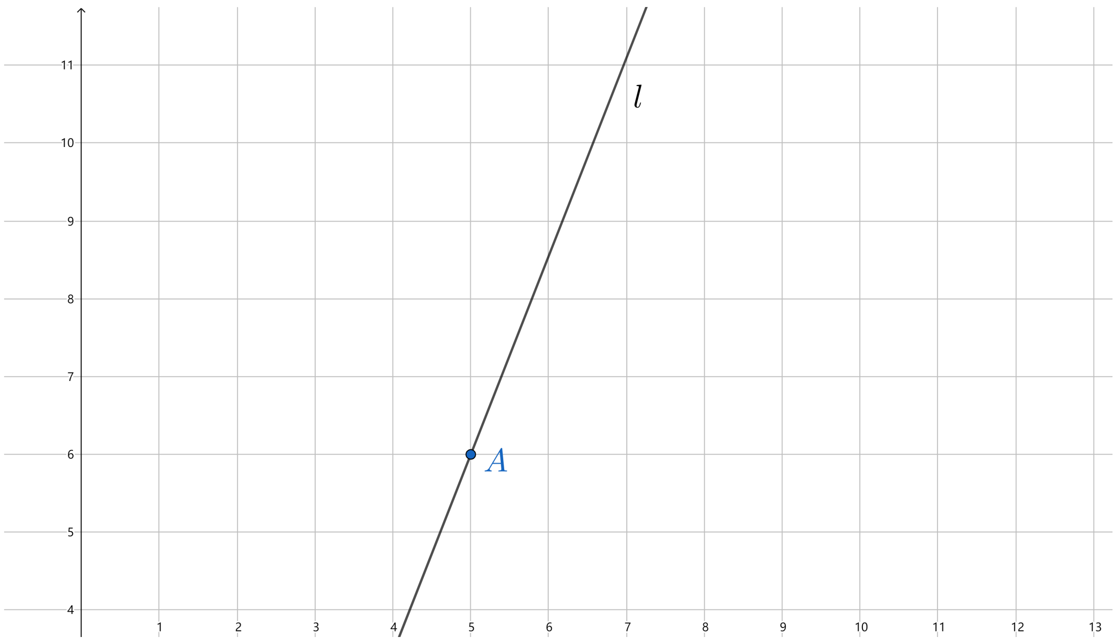
Zyk 垂直定理 Zyk's Vertical Theorem（定理 3.8）

【提出者】翟悦凯

如果一直线过一格点，那么我们可以过这个格点作这条直线的垂线。

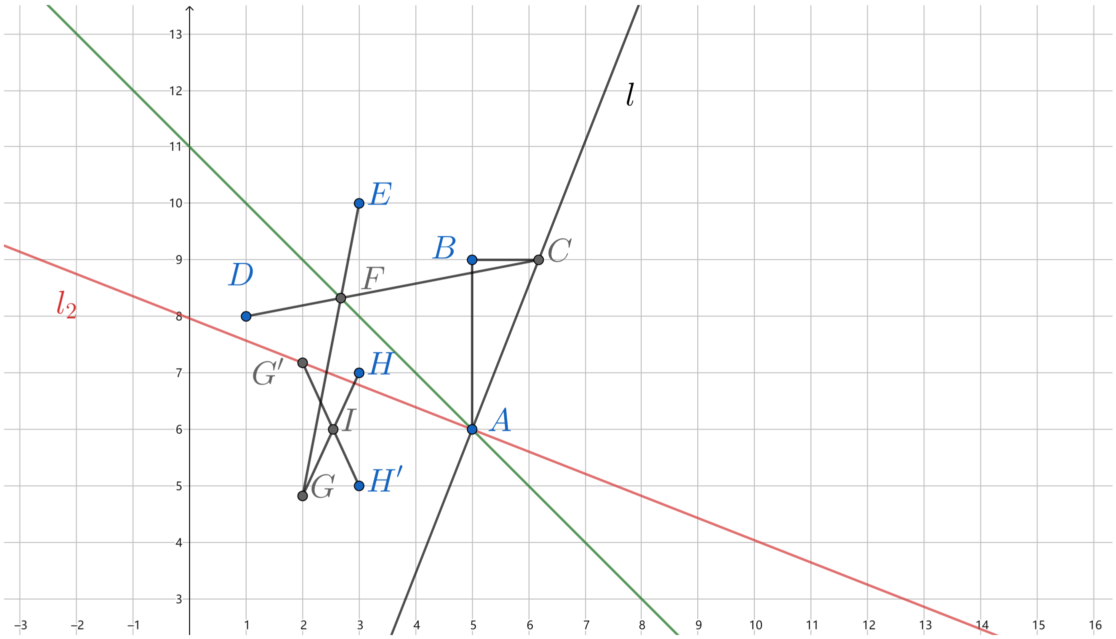
Hmy 垂直定理

Hmy 垂直定理解决了过任意格点 A 任意直线 l 垂线的问题——但是 l 必须过格点 A （和 Zyk 垂直定理的情况相同，但是做法更加简单）。



如图，l 过 A，A 是格点。请过 A 作 $l_2 \perp l$。

在 Zyk 垂直定理（定理 3.8）中，我们通过平行 + 对称的方式得到了 C 逆时针旋转 90° 后的点；而在这里我们可以通过两个对称的方法得到它。先做 C 关于网格对角线的对称点 G，再作 G 关于水平格线的对称点 G'。



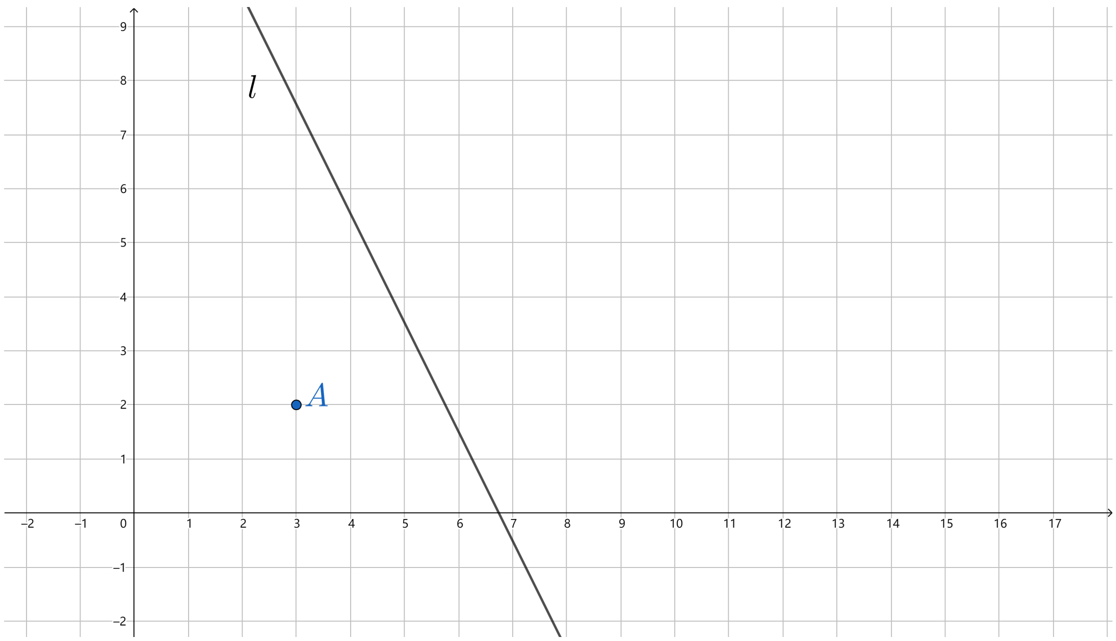
Hmy 垂直定理 Hmy's Vertical Theorem（定理 3.9）

【提出者】郝铭扬

如果一直线过一格点，那么我们可以过这个格点作这条直线的垂线。

Osy 垂直定理

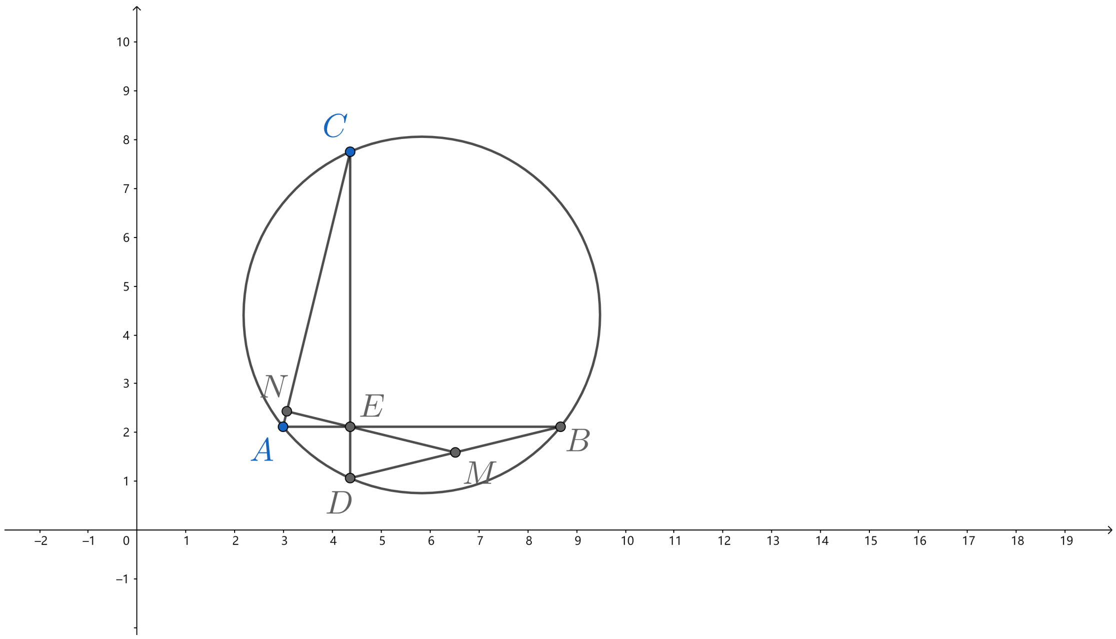
Osy 垂直定理解决了过任意格点作任意直线垂线的问题。我们来看一下图：



如图，A 是格点，l 是任意直线，请作 $l_2 \perp l$。

在开始解决这个问题之前，我们先介绍一个几何定理：婆罗摩笈多定理。

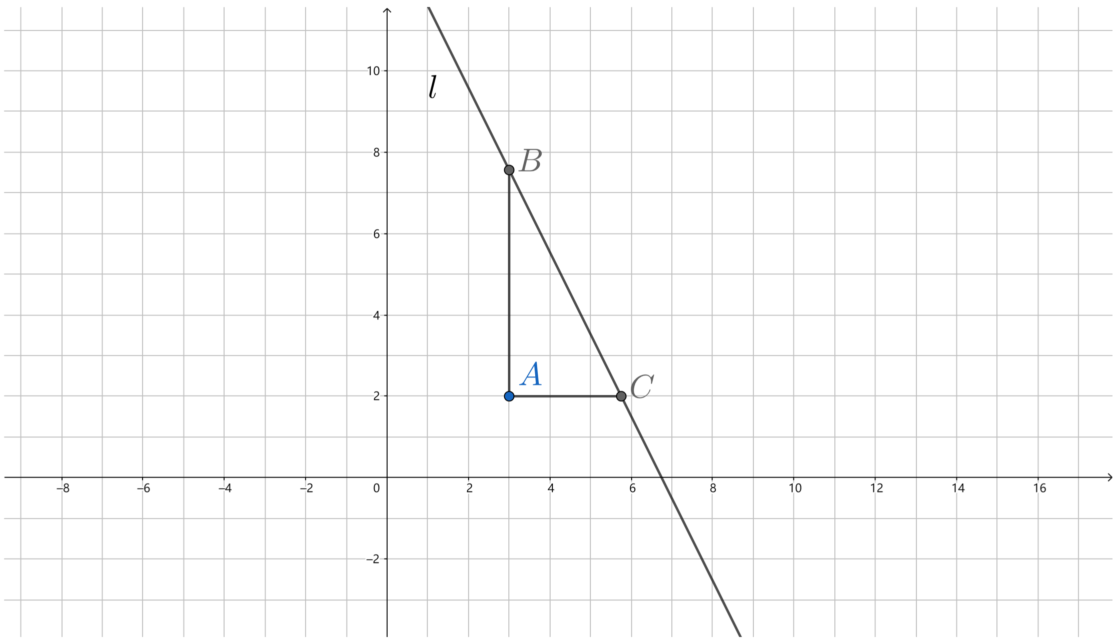
婆罗摩笈多定理（定理 3.10.1）



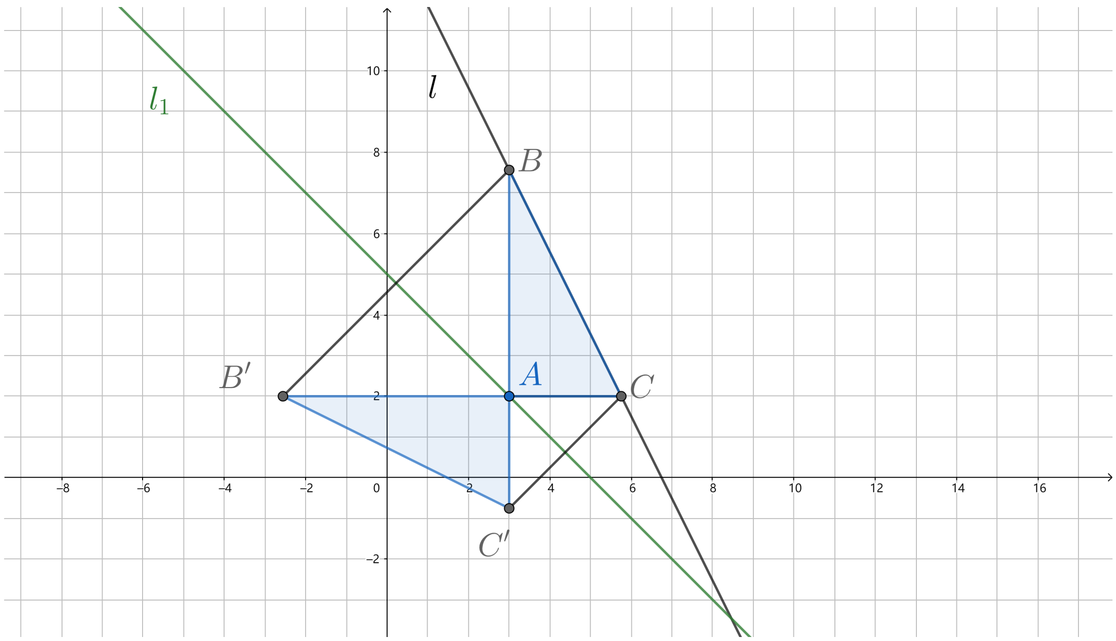
CD，AB 是两条相交且垂直的弦，M 是 BD 中点，连接 ME 并延长交 AC 于 N，则有 $MN \perp AC$。

【证明】 因为 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{BC}$，所以 $\angle A = \angle D$。因为 M 是 BD 的中点，$\angle BED = 90^\circ$，所以 $MD = ME = MB$，$\angle D = \angle MED = \angle CEN$。所以 $\angle CNE = 90^\circ$，$MN \perp AC$。

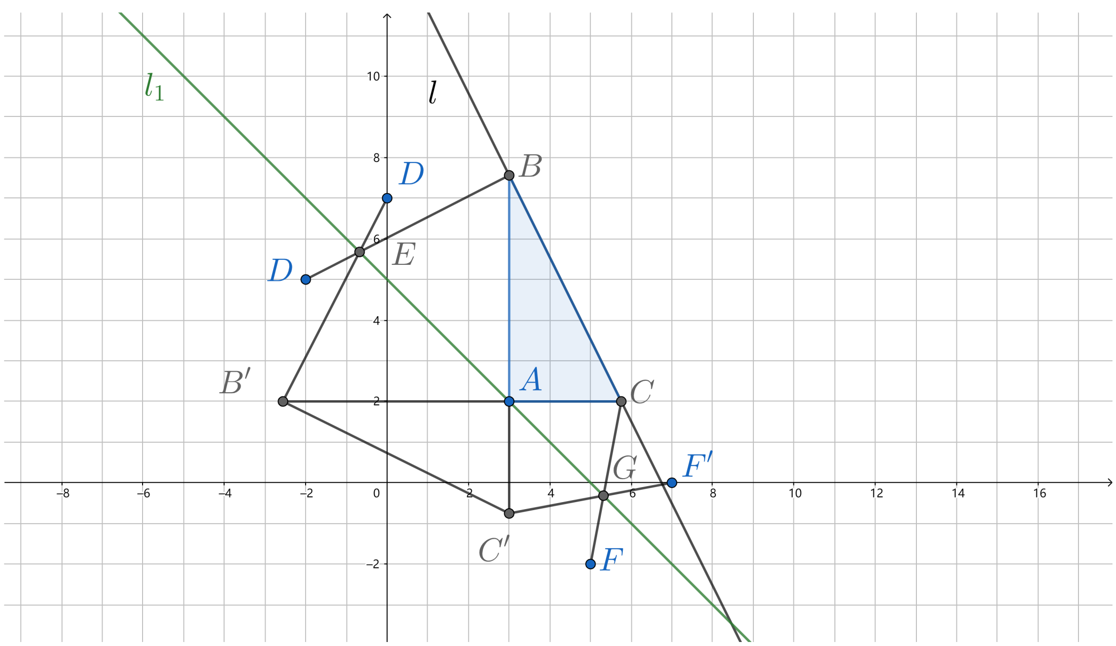
婆罗摩笈多定理可以将垂直转化为中点，而我们又有很多的方法和定理作中点，所以我们可以考虑使用婆罗摩笈多定理解决这个问题。我们先将 l 于过 A 的竖直和水平格线分别交于 B，C。



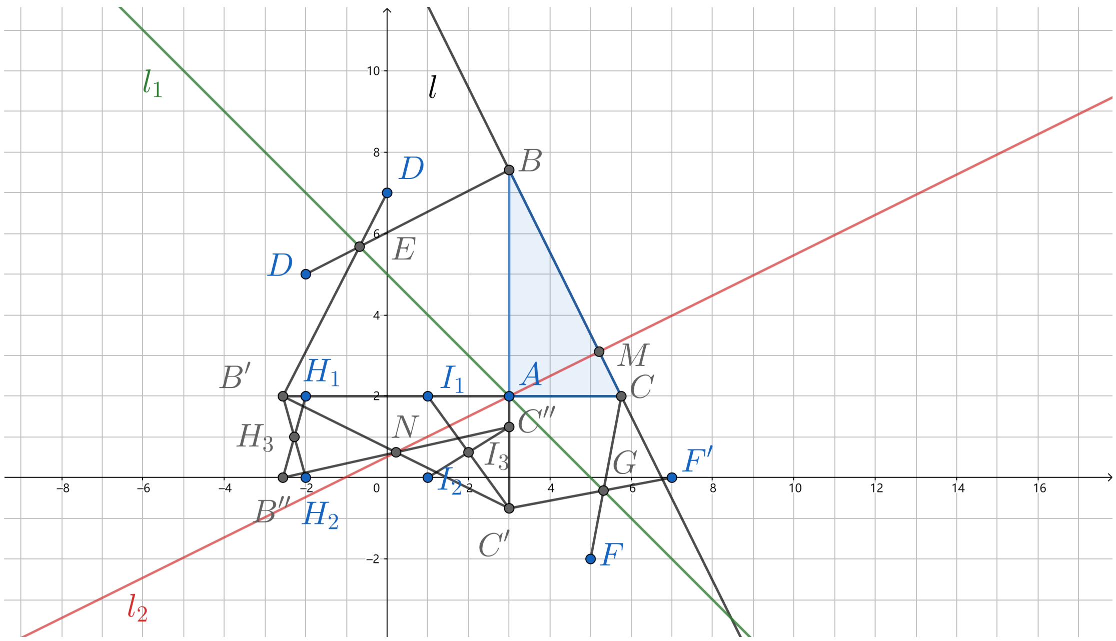
我们可以过 A 做一条网格的对角线（即下图 l_1），并将 $\triangle ABC$ 翻折过去，这样就可以得到一个圆内接四边形（如下图）。因为翻折，所以 $\angle B^{'}C^{'}B = \angle B^{'}CB$，这符合同弧所对圆周角相等的定理，所以 B，C，$C^{'}$，$B^{'}$ 是四点共圆的。



要做出 B，C 关于 l_1 的对称点并不难。首先它们肯定在水平或竖直格线上，而我们可以推广 Zyk 基本对称定理来解决这个问题。

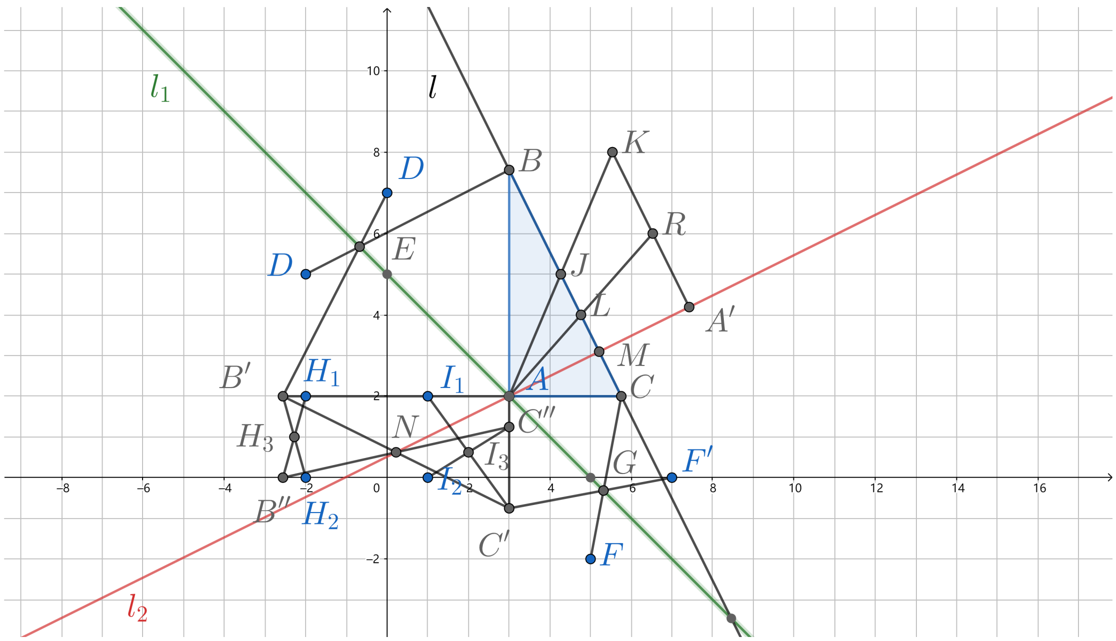


如图，我选了两组对称点（D 和 D'，F 和 F'）做出了 B 和 C 的对称点 B' 和 C'。我们现在只需做出线段 $B'C'$ 的中点 N，再连接 NA 并延长交 BC 于 M，连接 AM，AM 即为所求。做出 $B'C'$ 的中点，我们可以使用 Wyc 分线段定理，但是这里我们也可以直接使用朴素平移定理。



如图，我将 B' 向下平移了两个单位，将 C' 向上平移了两个单位。

【拓展】 A 关于 l 的对称点也可以通过这个方法做出来——倍长 AM 即可。下面是我给出的作图。



Osy 垂直定理 Osy's Vertical Theorem（定理 3.10）

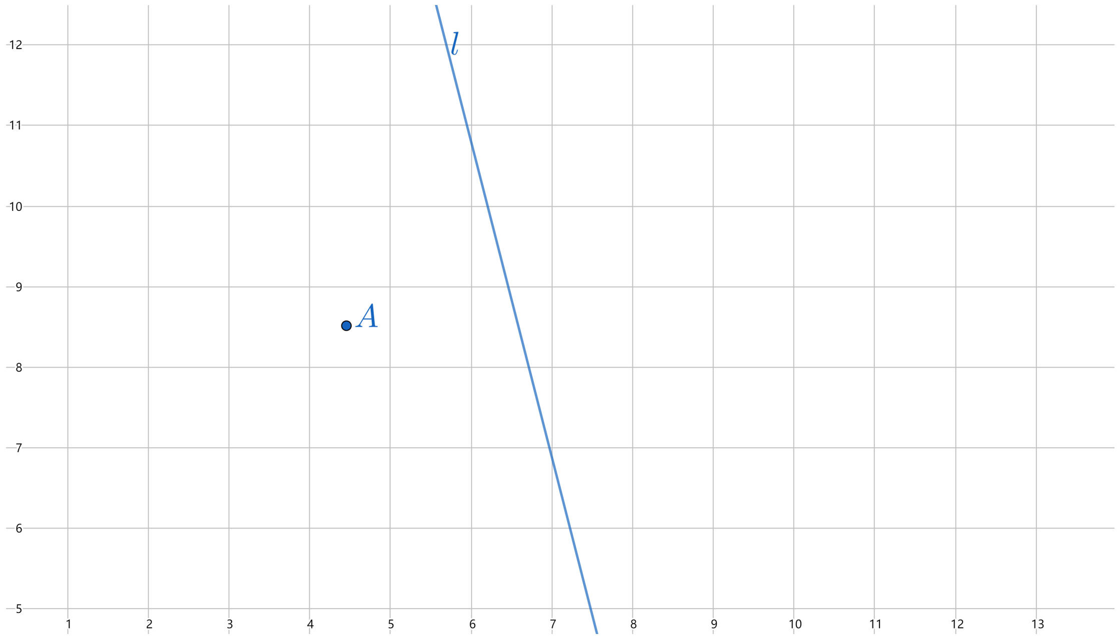
【提出者】欧思远

可以过任意一格点作任意一条直线的垂线，也可以作这个格点关于这条直线的对称点。

任意垂直和任意对称

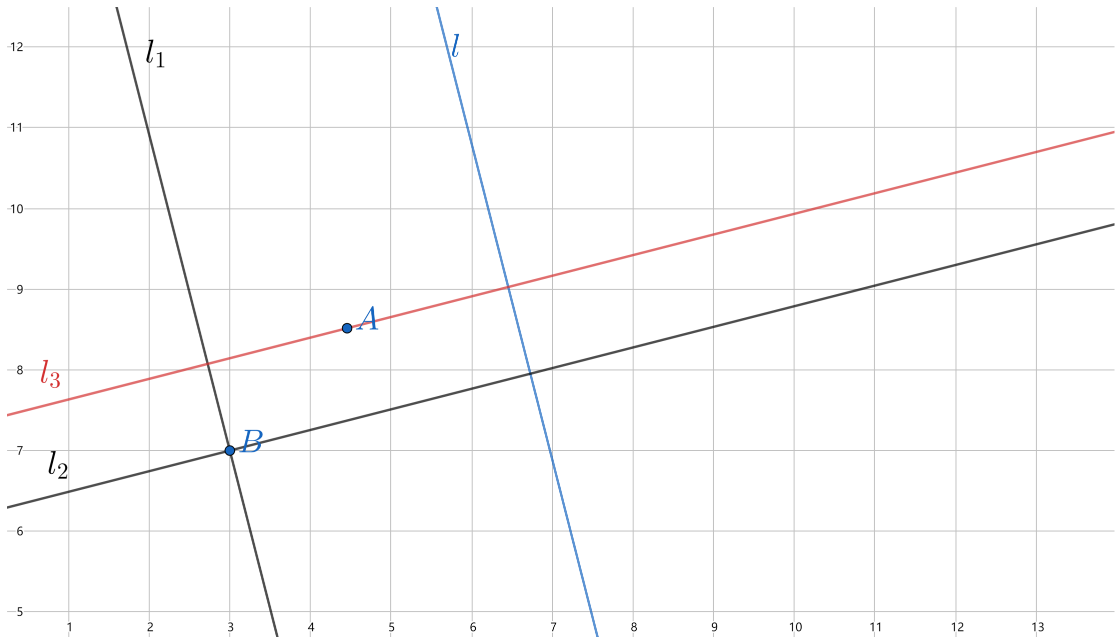
有了这两个定理，我们就可以过任意点作任意直线的垂线了。

任意垂直定理 Arbitrary Vertical Theorem（定理 3.11）



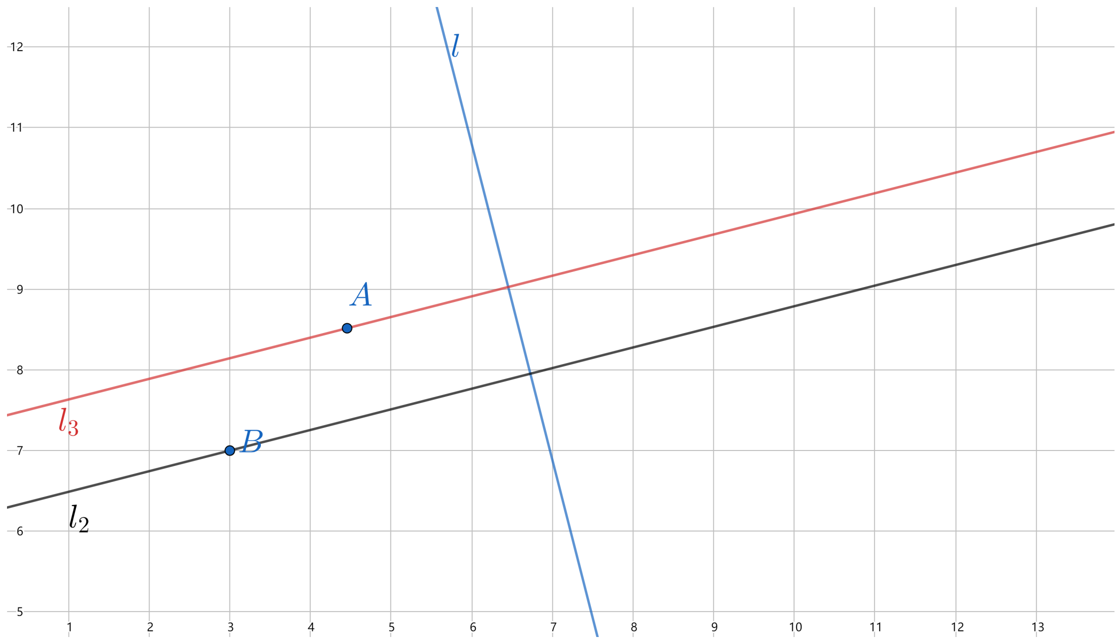
可以过任意一点 A 作任意一条直线 l 的垂线。我们有两种做法：

做法 1：利用 Zyk 垂直定理（定理 3.8）或 Hmy 垂直定理（定理 3.9）



如图，选择格点 B，过 B 作 $l_1 \parallel l$，利用 Zyk 垂直定理（定理 3.8）或 Hmy 垂直定理（定理 3.9）过 B 作 $l_2 \perp l_1$，过 A 作 $l_3 \parallel l_2$，l_3 即为所求。

做法 2：利用 Osy 垂直定理（定理 3.10）



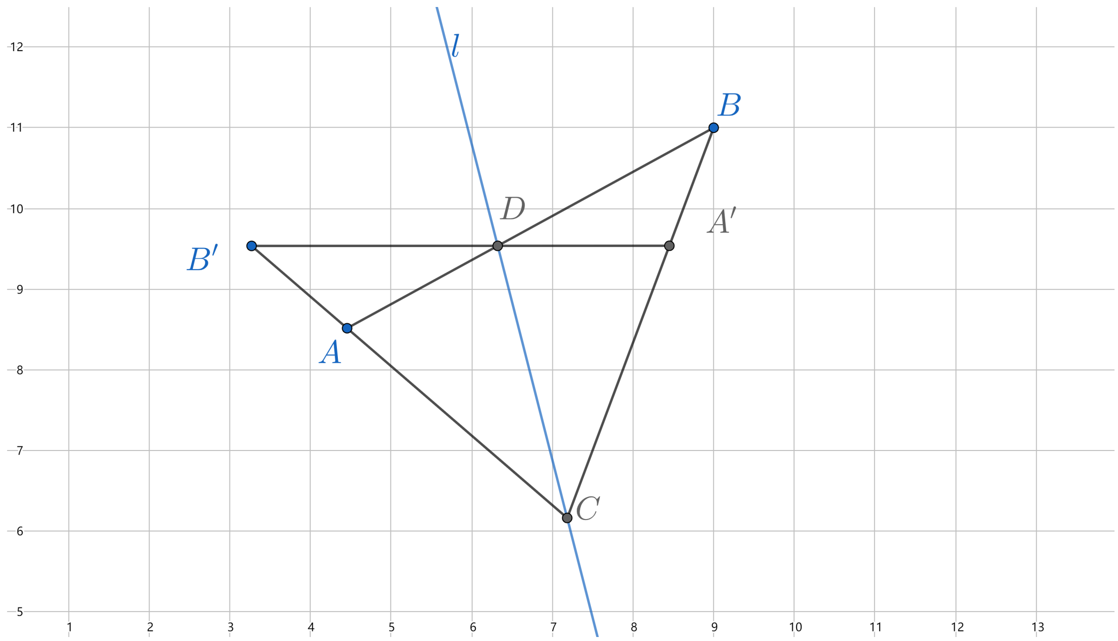
如图，选择格点 B，利用 Osy 垂直定理（定理 3.10）过 B 作 $l_2 \perp l$，过 A 作 $l_3 \parallel l_2$，l_3 即为所求。

我们甚至可以作任意点关于任意直线的对称点。

任意对称定理 Arbitrary Symmetry Theorem（定理 3.12）

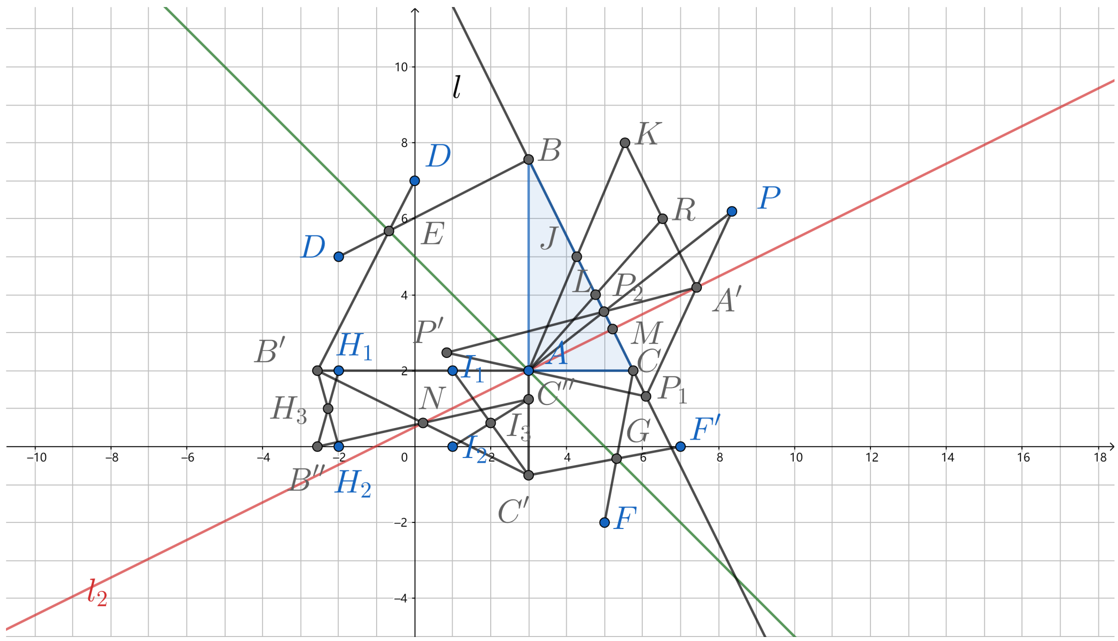
【提出者】郝铭扬

可以作任意点关于任意直线的对称点。作图如下：



如图，在直线的另一侧选取合适的格点 B，利用 Osy 垂直定理（定理 3.10）的拓展做出 B 关于 l 的对称点 B'，连 $B'A$ 并延长交 l 于 C，连 BC。连 AB 交 l 于 D，连 $B'D$ 并延长交 BC 于 A'。A' 即为所求。

我们来用 Osy 垂直定理的最后一张图来演示一下任意对称定理：



可以看到，在这张图中，我们成功地做出了任意点 P 关于任意直线 l 的对称点。