スタジア大学"BABE $ -BOLYAI"、MATHEMATICA、第XLVIII巻、2号、2003年6月

シエパード法 − 近似から補間まで

イオンコザック

抽象。本稿では、この関数が内挿関数を生成するときに必要十分条件を与えるために、Franke-Little重みを用いる局所的Shepard法をレビューする。次に、幾何学的アルゴリズムに基づいた、この問題を解決するための実用的なアルゴリズムを示します。この論文は5]と6]で提示された結果の改良です。

1. 局所シエパード法

関数fに対する2つの独立変数xとyの2次元の場合を考えてみましょう。z = f（x、y）、ここで（x、y）R^2（（x、y、z）R^3）。n個の補間点1が与えられたとき、F（x_i、y_i）= f（x）のように（x、y）Dに対してz =Φ（x、y）で定義される補間関数Φを求めたい。全てのｊ ＝ １，．．．nである。

節点（x_j、y_j）（j = 1、...、n）が長方形の格子を形成せずに、完全に任意で順序付けられていない方法で配置されている場合1 。シエパード法は、表面のグラフイツク表現に非常に適していることが証明されています。その近似関数Φは、ノードの順序（ｘ$_i$、ｙ$_i$）とは無関係に独自に決定される（ｉ ＝ １、…、ｎ）。関数f：z = f（x、y）（Dは0xy平面1の任意の領域）に対して、与えられた節点（x_i、y_i）に対して次の関数で近似されます。

$$\Phi(x,y) = \sum_{i=1}^{n} w_i(x,y)\cdot f_i \quad (1$$

重み関数は次のように定義されます。

$$w_i(x,y) = \frac{(\rho - r_i(x,y))_+^{\mu}}{\sum_{l=1}^{n}((\rho - r_l(x,y))_+^{\mu}} \quad (1a$$

記法で

$$r_i(x,y) = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \quad (1b$$

そして

$$s_+^{\mu} = \begin{cases} s^{\mu}, & s \quad 0 \\ 0, & s \leq 0 \end{cases} \quad (1c$$

だから私たちは書くことができます

$$\Phi(x,y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}((\rho - r_i(x,y))_+^{\mu}\cdot f_i}{\sum_{i=1}^{n}((\rho - r_i(x,y))_+^{\mu}} \quad (2$$

編集者によつて受信された：01. 10. 2002

パラメータρおよびμは補間処理の始めに決定される。指数μは任意に選ぶことができます。0 <μ 1の場合、関数Φは節点に≤ピークを持ちます。μ> 1の場合、関数は節点で水平です。

関数Φは、新しい関数値Φ（x、y）を計算するときに半径ρの円板内のそれらのノード（x_j、y_j）のみを使用します。id est1これは局所的な方法です。計算機グラフイツクスアプリケーションにとつて非常に重要である複雑度の非常に低い次数1のために、我々はFranke-Little重みによる高速局所シエパード近似を使用します。

定理1. d: = min {r_j（x_1、y_1）/とする。j、1 = 1 nおよびj / l}. Φ（（2）で定義されるように）は、ρ≤dである場合に限り、補間関数である。

証明。以下の2つの条件が各（x、y）∈Dについて満たされる。

$$0 \leq w_i(x, y) \leq 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i(x, y) = 1$$

次の2つの条件は、ρ≤dの場合に限り満たされます。

各i / = jおよび各（x、y）∈D 'w_i（x_i、y_i）= 1に対してw_i（x_j、y_j）= 0 （i = 1、…、n）。D

2. 局所シエパード法の改良

シエパード法を使用する場合、3つの問題を分析する必要があります。1つ目は、入力データ（中心（x、y）と半径ρを持つディスクの内側にあるすべての節点をすばやく見つけることができるように集合Pを整理する方法）です。 O（n log n）の前処理時間1およびすべての必要なノードの発見は、O（n log n + k）時間1を必要とする。ここで、kは発見されたノードの数である（[1 1 [6。

第二の問題は、パラメータρの許容値をどのように決定するかである。この値には、以下の条件を課します。

- 半径ρを持つディスクは、このディスクをConvHull（P 'の内側）のどこに置いても、Pから少なくとも1つのノードをカバーする必要があります。
- このディスクはあまりにも多くの近いノードをカバーしてはいけません。

この問題は、集合Pのドロネー図を決定する0（n log n）time1で解くことができます。このダイアグラムは、頂点がP 1の節点である三角形で構成され、任意の三角形の外接円の内部にはPの他のノードは含まれていません。任意の三角形の外接円の最大半径を選択します。

第3の問題は、補間関数を得るためにシエパード法をどのように修正するかである。正確に1私たちは以下の質問に答えなければなりません。以下の一次方程式系（3は一意に解けるか？

$$\Psi(x_i, y_i) := \frac{\sum_{j=1}^{n} (\rho - r_j(x_i, y_i))_+^{\mu} \cdot z_j}{\sum_{j=1}^{n} (\rho - r_j(x_i, y_i))_+^{\mu}} = f_i \quad i = 1, \ldots, n \quad (3$$

定理2。任意のμ> μ_0 に対してシステム（3）が一意に解けるように、正の値μ_0 が存在します。

証明。一般性を失うことなく1を仮定すると、$\rho = 1$（単純なスケーリング演算を適用できます。基本変換によつて（各方程式はΨ（x_i、y_i）の分母で乗算されます））、r_i （x_j、y_j）= r_j（x_i、y_i）となる。（3）の行列は次のような性質を持つ。

それは対称的である）主対角線上にある全ての値は１）

そしてすべての 他の値は区間[0）1）にあります。しかし必ずしも対角線ではない

支配的！

(3のシステム行列が対角優勢になるような方法でμの値を決めることができますか？ n

$s_i(\mu)$: $(1 - r_i(x_j, y_j))^{\mu}$.次のように値μを決定することが =とする。 $j=1, j/=1$できます。 $+$

$s_i(\mu)$ は連続1減少関数であるため、$s_i(\mu)$ <1です（すべての項がより小さくなります）。

１ 1以上と$\lim_{\mu\to\infty} s_i(\mu) = 0$. D

値Ψ（x、y）を計算するには、中心（x、y）と半径ρを持つ円板の内側にあるPからの点だけが必要です。どのようにして最適値（パラメータρの最小値

(iΨは少なくともConvHull（P）で定義できます。

i = 1、…、nについて、（i 2Ψ（x（T F 144）、y（T F 145））= f（x（T F 146）、y（T F 147））；実際に補間関数である。

提案したアルゴリズムを以下に示す。

ステツプ1. 集合Pのドロネー図を決定します。図1の三角形を定義する3つの非共線ノードp_i、p_j、p_k を ρ 私は の外接円とします。三角形 $p_i p_j p_k$。この円は他のノードを含みません － これはドロネ図の重要な性質です（[1 1 [3。

d = = min dist（p_i、p_j）i、j = 1，．..、nであり、i = jであり、ρ = max ρ_{ijk} である。dの値は、ドローネ図の全ての三角形を走査することによつて迅速に決定することができる。もし ρ dであれば、（iと（ii）が満たされていることが容易にわかります。

ステツプ２（ρ> dの場合のみ）。この場合のみ（私は満たされているので、私たちは解決しようとします1

システム（3。z_i を満たす必要があります。（ii。（3のシステム行列が非特異的で条件が整うまで、パラメータmに対して異なる値を試す必要があります。現時点で、反復法（Jacobi 1 Gauss-Seidel）を使用してシステムを解くことができます。

3. 結論

[2の作者は、Shepard法の2つのパラメータの値の選び方について11suggestion11を与えました。

「節点でのピークを避けるために、2≤μ≤6を選択してください。

$0.1 \leq \rho \leq 0.5$が好ましい範囲です）。

利用可能なノードが多い場合はρ、ノードが少ない問題ではρが大きくなります。

しかし局所的な方法では）推奨される上限の0.5に近いρを選択すると、満足のいく結果が得られません。」

これら2つのパラメータを決定する方法について他に指示はありません。予想される結果が得られるまで、ユーザーは手動で多くのカツプル（ρ、μ）を選択する必要があります。

本論文では集合Pのトポロジーに応じてこれら2つのパラメータ1を自動的に決定するアルゴリズム1を与えたのはこのためである。それ以上に、計算1を加速し補間関数を得るためにこの方法を改良する。

参考文献

1] Franco P. Preparata、Michael I. Shamos - 計算幾何学。はじめに/ Springer Verlag 1988
2] Gisela Engeln-Mullges、Frank Uhlig (1996) - C / Springerによる数値アルゴリズム1996年。
3] M. de Berg、M。van Kreveld、M。Overmars、O. Schwarzkoph - 計算幾何学。アルゴリズムと応用/ Springer 1997
4] Gheorghe Coman、RaduTrambita§-二変量シエパード補間/セミナー、数値および統計計算セミナー、Babe§-Bolyai大学、ClujNapoca 1999、pp。41-83。
5]イオンコザツク - 内挿で使用される幾何学的アルゴリズム (Petru Maior大学、Tirgu-Mure§2000、pp。13-18)。
６］イオンコザツク - 固定ビームデイスクからの検索/ Ｓｃｉｅｎｔｉｆｉｃ Ｂｕｌｌｅｔｉｎ、「Ｐｅｔｒｕ Ｍａｉｏｒ」大学、Ｔｉｒｇｕ－Ｍｕｒｅ．２００２、ｐｐ．９４－９７。

Tgの「petru maior」大学。ルーマニア
電子メールアドレス: cozac©uttgrn.ro