期末选做编程实践作业

赖显松 2021214726

1 编程题目——星体问题

1.1 问题背景

天体运动问题符合万有引力定律，当物体的质量非常大的时候，物体间的吸引力变得很明显，地球绕太阳旋转，月球绕地球旋转，都是在真空的宇宙中的万有引力的表现。

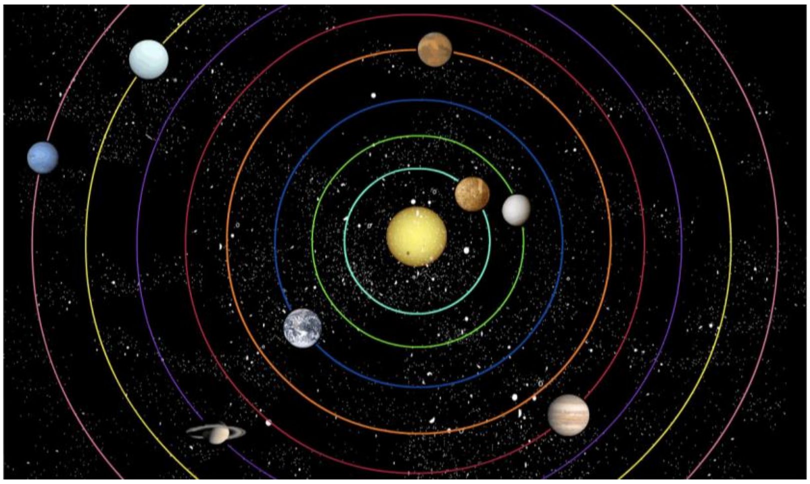

图 1. 1

在宇宙空间中，当其中一个星体质量非常大，另一个物体质量非常小时，质量大的物体可以近似认为固定在原点，而质量小的物体绕其运动，运动满足方程：

$$ma = m\frac{d^2x_i}{dt^2} = -\frac{GmMx_i}{(\sum_{i=1}^{3} x_i^2)^{\frac{3}{2}}}$$

其中 x_i 为物体在三维空间中三个正交方向的坐标。小物体以圆轨迹做运动，进一步对圆轨迹做分析，在轨迹平面将其转化为二维问题。在分析平面两个方向上的运动方程进一步简化为：

$$ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GmMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}, ma_y = m\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GmMy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2 问题分析及程序

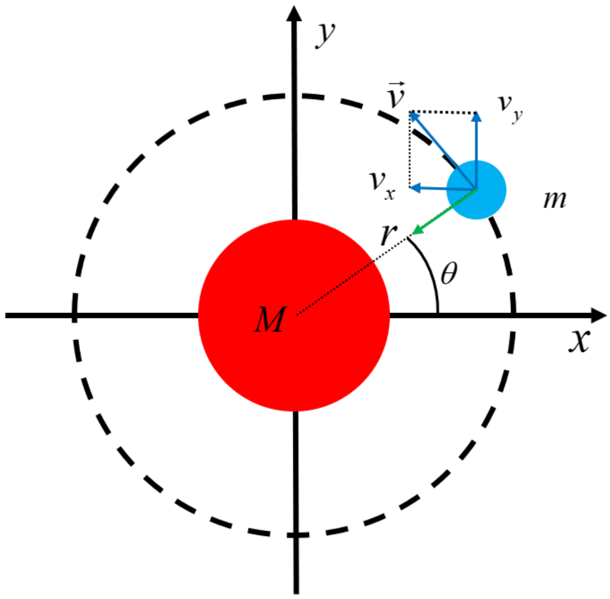

图 2. 1

描述天体运动，需要知道运动的位移和速度。在二维平面上分析，结合背景知识中的万有引力公式，可以得到天梯运动方程组：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x \\ \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{GMx}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -\dfrac{GMy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

常微分方程组问题，可以采用数值计算的方法解决。

单位归一化

为了统一单位，距离用地球半径归一化，时间用 1000s 归一化:

$$RE = 1(unit) = 6.371\times10^6 m$$

单位速度为$6.371\times10^3 m/s$。地球的质量为$5.72\times10^{24} kg$，万有引力常数$G = 6.67\times10^{-11} N\cdot m^2/kg^2$则引力中的$GM$一项可以简化并近似等于：

$$G^{'}M=\frac{GM}{(RE)^2}\approx 9.8(\frac{m\cdot RE}{s^2})$$

归一化后的微分方程组用函数表示为：

$$\vec{z}=\begin{bmatrix} x \\ v_x \\ y \\ v_y \end{bmatrix}, \vec{f}(t,x,v_x,y,v_y)=\begin{bmatrix} v_x \\ -\dfrac{9.8x}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ v_y \\ -\dfrac{9.8y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \end{bmatrix}=\frac{d\vec{z}}{dt}, \vec{z}_0=\begin{bmatrix} x_0 \\ v_{x0} \\ y_0 \\ v_{y0} \end{bmatrix}$$

编程实现函数 f：

```
def f(input):
    # input[] = t, x, vx, y, vy
    # t = input[0]
    x = input[0]
    vx = input[1]
    y = input[2]
    vy = input[3]
    return np.array([vx, -9.8*x/(6.371*(x**2 + y**2)**(1.5)), vy, -
9.8*y/(6.371*(x**2 + y**2)**(1.5))])
```

选择一种低阶方法：显式 Euler 法；一种高阶方法：4 阶 RK 方法。对应的迭代式子为：

$$y_{n+1}=y_n+f(x_n,y_n)$$

$$\begin{cases} y_{n+1}=y_n+\dfrac{1}{6}h(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \\ K_1=f(x_n,y_n) \\ K_2=f(x_n+\dfrac{1}{2}h,y_n+\dfrac{1}{2}hK_1) \\ K_3=f(x_n+\dfrac{1}{2}h,y_n+\dfrac{1}{2}hK_2) \\ K_4=f(x_n+h,y_n+hK_3) \end{cases}$$

程序：

```
for i in range(1, n+1):
    K1 = f(rk4_solver[:, i-1])
    K2 = f(rk4_solver[:, i-1]+0.5*h*K1)
    K3 = f(rk4_solver[:, i-1]+0.5*h*K2)
    K4 = f(rk4_solver[:, i-1]+h*K3)
```

```
6.      trapezoid_solver[:, i] = trapezoid_solver[:, i-1] + h*f(trapezoid_solver[:, i-1])
7.      rk4_solver[:, i] = rk4_solver[:, i-1] + 1/6*h*(K1+2*K2+2*K3+K4)
```

设置初始值，查得地球表面圆周运动的速度[]，即第一宇宙速度为$7.9\times10^3/s$，约为 1.24 倍的单位速度。则设置初始值：[1, 0, 0, 1.24]。

3 结果

运行程序，10 个单位距离，步长设置为 100s 即 0.1 单位时间。得到显式 Euler 和 RK4 方法的轨迹结果如图。

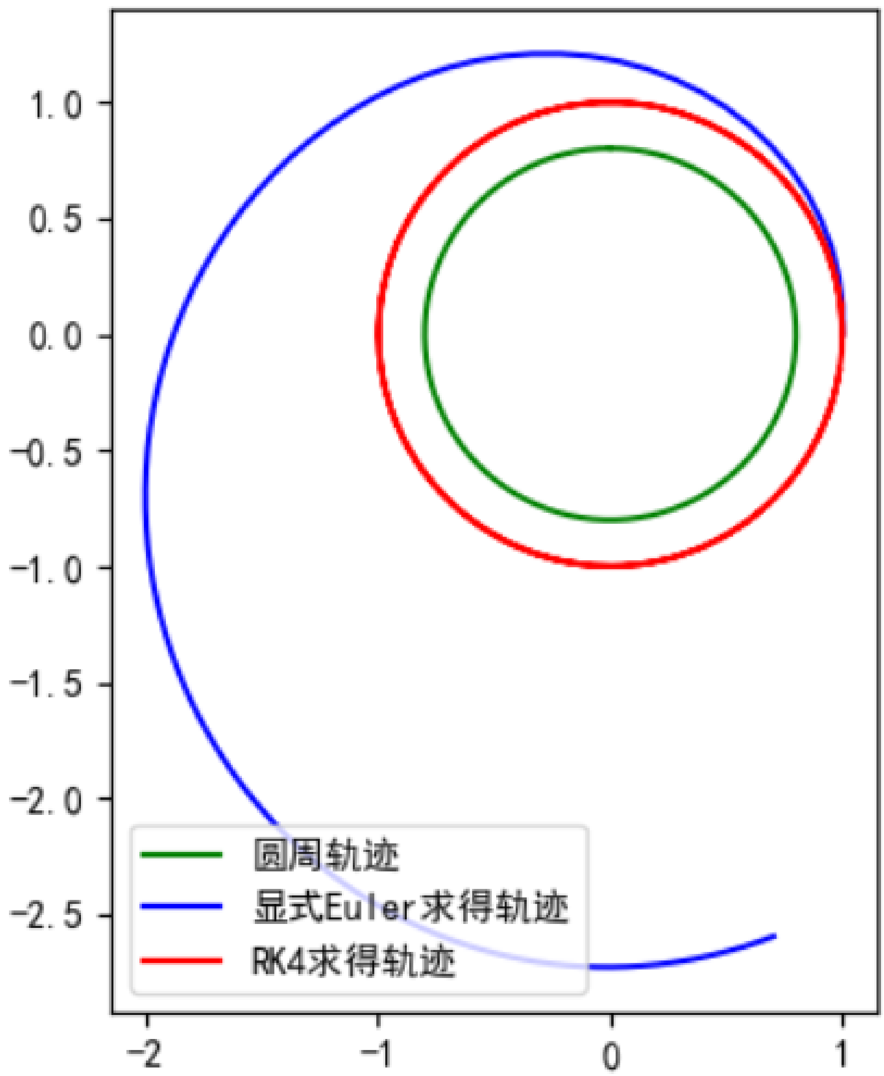

图 3. 1 步长为 0.1 的求解轨迹结果

从结果中可以很清晰地看到，两种方法得到的结果不一样。显式 Euler 这种低阶方法在求解后得到的轨迹出现了偏离。在选择第一宇宙速度的情况下，符合

实际情况的轨迹应为如 RK4 方法这种高阶方法求得的结果这样的标准的圆周，物体绕大质量物体的表面作圆周运动。

改步长为 0.01 再次尝试（）：

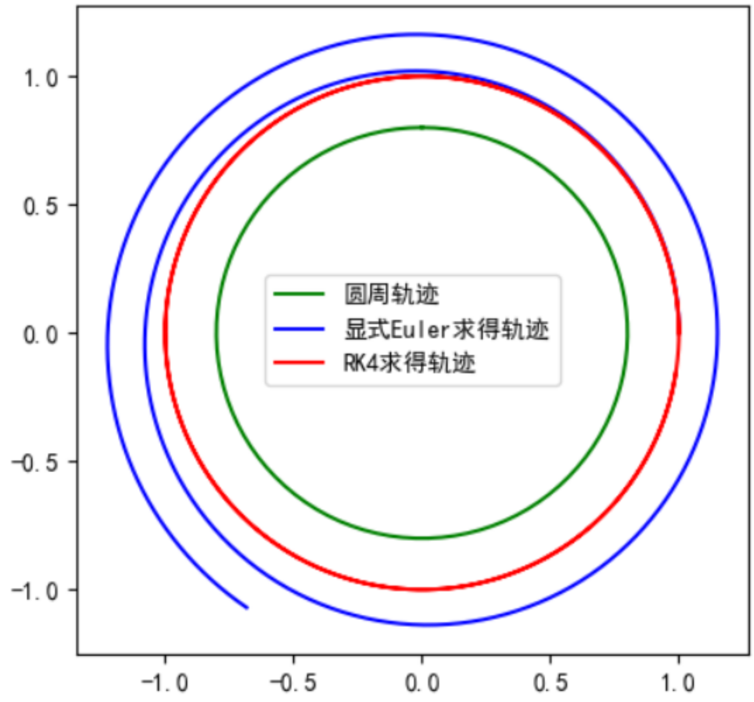

图 3. 2 步长为 0.01 的求解轨迹结果

步长变小之后，显式 Euler 方法的偏离正确结果的程度更小一些，但是还是存在偏离，而 RK4 方法与 0.1 步长下没有变化。

取步长为 0.5，结果（）：

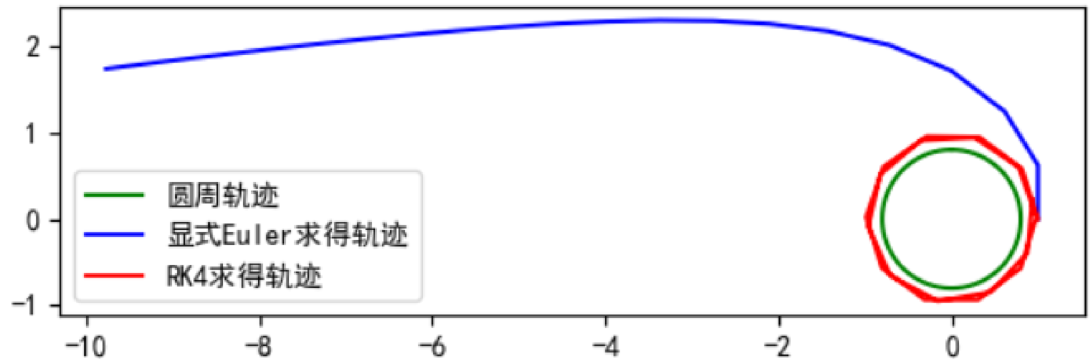

图 3. 3 步长为 0.5 的求解轨迹结果

可以看到，在步长为 0.5 时，RK4 方法求得的轨迹出现了较大的直线段，但是整体的轨迹还是圆，半径有变小的趋势。

更改初始速度，测试结果（）：

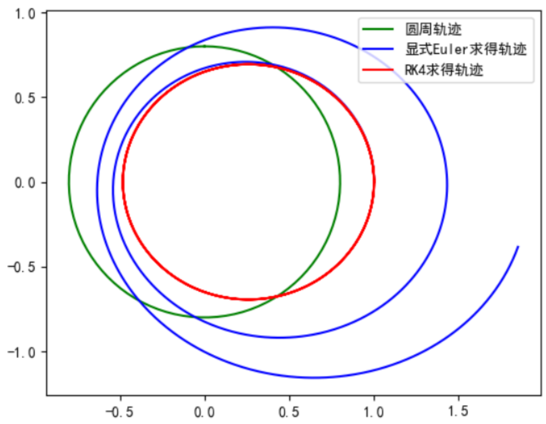

图 3. 4 初始速度为 1 的求解轨迹结果

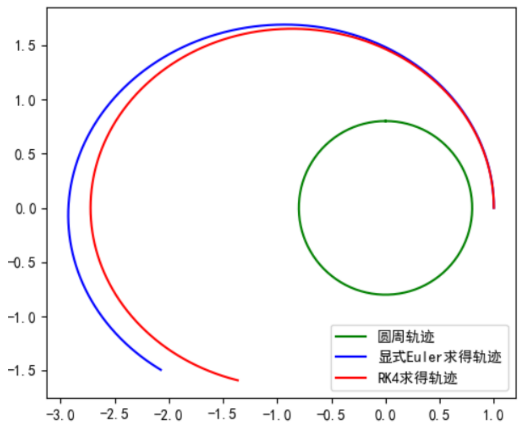

图 3. 5 初始速度为 1.5 的求解轨迹结果

当初始速度不满足圆周运动时，天体运动的轨迹变为了椭圆。速度过小的话容易靠近大物体的质心，初始点是椭圆长轴上的点；速度过大有拜托引力的趋势，初始点是椭圆短轴上的点。

参考文献

[1] 关治．数值方法[M]．北京：清华大学出版社，2006：66-92．

[2] 宇宙速度 - Wikipedia

附录

见附件 python 源代码。