第三次作业

赖显松 2021214726

1 书面作业题目

P63 9.

解：(1) A的各阶顺序主子式为：

$\Delta_1 = 1 > 0$

$\Delta_2 = 4-1 = 3 > 0$

$\Delta_3 = 8-2a^2-2 = 6-2a^2$

要使A能分解为 LL^T，需保证A为对称(显然)正定，则各阶主子式大于0。

$\therefore 6-2a^2 > 0$　　a的取值范围为 $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$

(2) 分解后 $A = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$

$a_{11} = l_{11}^2$　得：$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{2}$

$a_{21} = l_{21} \cdot l_{11}$　得：$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$a_{31} = l_{31} \cdot l_{11}$　得：$l_{31} = \frac{a_{11}}{l_{11}} = 0$

$a_{22} = l_{21}^2 + l_{22}^2$　得：$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$a_{32} = l_{31} l_{21} + l_{32} \cdot l_{22}$　得：$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31} l_{21}}{l_{22}} = \frac{1-0}{\frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$a_{33} = l_{31}^2 + l_{32}^2 + l_{33}^2$　得：$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{31}^2 - l_{32}^2} = \sqrt{2 - 0 - \frac{2}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

得：$L = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix}$

P64 11. $con(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

$\|A\|_\infty = 6$

$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}}{6} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$

则 $\|A^{-1}\|_\infty = 1$

$\therefore con(A)_\infty = 6 \cdot 1 = 6$

$$cond(B)_2 = \|B\|_2 \cdot \|B^{-1}\|_2$$

$$\|B\|_2 = (\rho(B^TB))^{\frac{1}{2}}$$

$$B^TB = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$[\lambda I - B^TB] = \begin{bmatrix} \lambda-5 & 4 & -1 \\ 4 & \lambda-6 & 4 \\ -1 & 4 & \lambda-5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - B^TB] &= (\lambda-5)^2(\lambda-6) + (-16) + (-16) - (\lambda-6 + 32(\lambda-5)) \\ &= \lambda^3 - 10\lambda^2 + 25\lambda - 6\lambda^2 + 60\lambda - 150 - 32 - \lambda + 6 - 32\lambda + 160 \\ &= \lambda^3 - 16\lambda^2 + 52\lambda - 16 \\ &= \lambda^2(\lambda-4) - 12\lambda(\lambda-4) + 4(\lambda-4) \\ &= (\lambda^2 - 12\lambda + 4)(\lambda-4) \end{aligned}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144-16}}{2} = 6 \pm \sqrt{32} \qquad \therefore \rho(B^TB) = 6 + 4\sqrt{2}$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}}{4} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{bmatrix} \qquad (B^{-1})^T(B^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{7}{8} & 1 & \frac{5}{8} \\ 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{5}{8} & 1 & \frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$[\lambda I - (B^{-1})^T(B^{-1})] = \begin{bmatrix} \lambda-\frac{7}{8} & -1 & -\frac{5}{8} \\ -1 & \lambda-\frac{3}{2} & -1 \\ -\frac{5}{8} & -1 & \lambda-\frac{7}{8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \det[\lambda I - (B^{-1})^T(B^{-1})] &= (\lambda-\tfrac{7}{8})^2(\lambda-\tfrac{3}{2}) - \tfrac{5}{4} - (\tfrac{25}{64}(\lambda-\tfrac{3}{2}) + 2\lambda - \tfrac{7}{4}) \\ &= \cancel{\lambda^3 - \tfrac{7}{4}\lambda^2 + \tfrac{49}{64}\lambda - \tfrac{3}{2}\lambda^2 + \tfrac{21}{8}\lambda - \tfrac{147}{128} - \tfrac{5}{4} - \tfrac{25}{64}\lambda - 2\lambda + \tfrac{75}{128}} + \tfrac{7}{4} \\ &= \lambda^3 - \tfrac{13}{4}\lambda^2 + \lambda - \tfrac{1}{16} \qquad \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-1}}{2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{2} \\ &= (\lambda - \tfrac{1}{4})(\lambda^2 - 3\lambda + \tfrac{1}{4}) \end{aligned}$$

$$\therefore \rho((B^{-1})^T(B^{-1})) = \frac{3}{2} + \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} cond(B)_2 = \|B\|_2\|B^{-1}\|_2 &= \rho(B^TB)^{\frac{1}{2}}\rho((B^{-1})^T(B^{-1}))^{\frac{1}{2}} \\ &= ((6+4\sqrt{2})(\tfrac{3}{2}+\sqrt{2}))^{\frac{1}{2}} \\ &= 3 + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

2 编程题目

2.1 Hilbert 矩阵

Hilbert 矩阵是一种系数为单位分数的方块矩阵，矩阵的元素可以根据式(2- 1)表示[1]：

$$H_{ij}=\frac{1}{i+j-1} \tag{2- 1}$$

编写生成 Hilbert 矩阵的函数（输入：阶次 n；返回：n 阶的 Hilbert 矩阵）。

```
# 函数：生成Hilbert矩阵
def geneHilbMat(n):
    Hilb = np.zeros((n, n))
    for i in range(n):
        for j in range(n):
            Hilb[i, j] = 1 / (i + j + 1)
    return Hilb
```

生成一个 5 阶 Hilbert 矩阵，如图 2. 1 所示：

	0	1	2	3	4
0	1.00000	0.50000	0.33333	0.25000	0.20000
1	0.50000	0.33333	0.25000	0.20000	0.16667
2	0.33333	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286
3	0.25000	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500
4	0.20000	0.16667	0.14286	0.12500	0.11111

图 2. 1 5 阶 Hilbert 矩阵

2.2 LU 分解法求 Hilbert 矩阵的逆

矩阵 LU 分解函数（输入：源矩阵 A，方法字符串 method；返回：分解出的矩阵 L、D 或 L、D、U）：

```
def LUDecomp(A, method):
    # 方阵大小
    n = A.shape[0]
    U = A.copy()
    L = np.eye(n)
    # 顺序消去过程
    for i in range(n):
        # 第 i 行 i 列对角元
        a = U[i, i]
        # 扫描以下的所有行元素
        for j in range(i + 1, n):
```

```
            # 输出
            # LU 分解
            l = -U[j, i] / a
            U[j, :] = U[j, :] + l * U[i, :]
            # Uji 强制置零，避免由于有限的精度，还存在一个很小的数
            U[j, i] = 0
            L[j, i] = -l
    if method == 'LU':
        return L, U
    # LDU 分解
    if method == 'LDU':
        D = np.zeros((n, n))
        for i in range(n):
            # 提取对角元
            D[i, i] = U[i, i]
            # U 的每行元素除以该行对角元
            U[i, :] = U[i, :] / U[i, i]
    return L, D, U
```

追赶法计算下三角矩阵的逆的函数（输入：下三角矩阵 L；输出：下三角矩阵的逆 invL）：

```
def invLowTriMat(L):
    # 方阵大小
    n = L.shape[0]
    invL = np.zeros((n, n))
    # 从上开始扫描每一行
    for i in range(n):
        # 对角元
        invL[i, i] = 1 / L[i, i]
        # 扫描每一行，从对角元最邻近的元素开始至 0 列
        for j in range(i - 1, -1, -1):
            l = sum(invL[i, :] * L[:, j])
            invL[i, j] = -l / L[j, j]
    return invL
```

U 矩阵原为上三角矩阵，转置后为下三角矩阵，可以借助转置使用同一个函数求得其逆矩阵。得到 L 和 U 的逆矩阵，可以通过式(2- 2)求源矩阵的逆矩阵：

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1} \tag{2- 2}$$

将求逆过程整合为一个函数（输入：源矩阵 A；输出：源矩阵逆 invA）：

```
def invLU(A):
    LA, UA = LUDecomp(A, 'LU')
    LA_inv = invLowTriMat(LA)
    UA_inv = np.transpose(invLowTriMat(np.transpose(UA)))
```

```python
    invA = UA_inv @ LA_inv
    return invA
```

求图 2. 1 中的 5 阶 Hilbert 矩阵的逆，结果如图 2. 2 所示：

	0	1	2	3	4
0	1.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	-1.50000	3.00000	0.00000	0.00000	0.00000
2	0.20833	-3.75000	5.00000	0.00000	0.00000
3	0.10694	0.17500	-5.83333	7.00000	0.00000
4	0.06183	0.12455	0.13393	-7.87500	9.00000

图 2. 2 5 阶 Hilbert 矩阵的逆

2.3 基于求逆的方法计算矩阵的范数

选择通过计算 Hilbert 矩阵的无穷范数求逆。

无穷范数为矩阵行元素绝对值和的最大值，计算无穷范数的函数（输入：源矩阵 A；输出：源矩阵无穷范数 a）为：

```python
def infNorm(A):
    n = A.shape[0]
    a = 0
    for i in range(n):
        if a < sum(abs(A[i, :])):
            a = sum(abs(A[i, :]))
    return a
```

2.4 Hilbert 矩阵的条件数

结合 LU 法求逆计算矩阵逆的函数（输入：源矩阵 A；输出：源矩阵无穷范数条件数 cond(A)）：

```python
def cond(A):
    invA = invLU(A)
    return infNorm(A) * infNorm(invA)
```

编写循环，生成不同阶次的 Hilbert 矩阵并计算其条件数，绘制条件数随阶次 n 的变化的曲线如图 2. 3 所示。可以看出，随着 Hilbert 矩阵的阶次上升，其条件数呈指数级变化增大，到 10 阶 Hilbert 矩阵，其条件数达 3.5×10^{13} 。

2.5 Hilbert 矩阵线性方程组解特性

选择 10 阶，生成一个 10 阶 Hilbert 矩阵，随机生成一组自变量，计算其结果

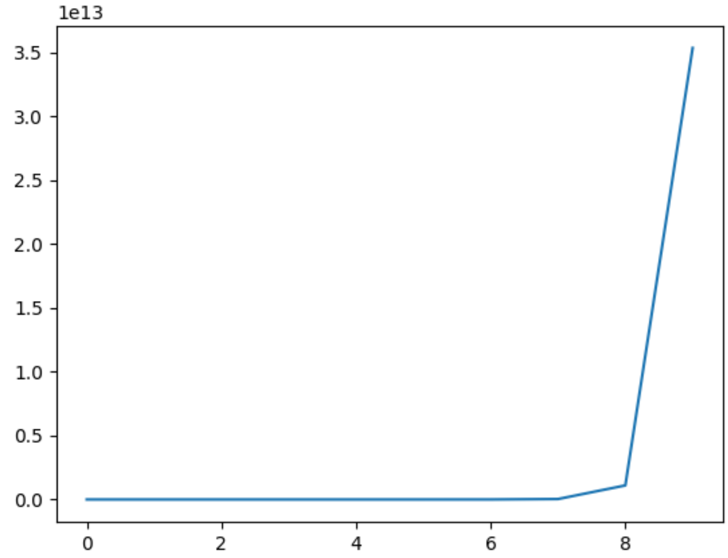

图 2. 3 条件数随 Hilbert 矩阵阶次的变化

向量 b，用之前的高斯消去法计算解。结果如图 2. 4 所示。

施加微小扰动 $\Delta A(10,1) = -0.000001, \Delta b(10) = 0.000002$，验证扰动下解的情况。结果如图 2. 5 所示：

```
无扰动情况下:
x的真值:
 [-0.36601064 -1.02242367 -0.99196619  0.54170089 -1.32696432  0.31220311
 -0.65746706 -0.43982957 -0.3143032   0.98035835]
x的sci库解
 [-0.36601064 -1.02242364 -0.9919668   0.54170633 -1.32699008  0.31227355
 -0.65758215 -0.43971873 -0.31436122  0.98037108]
x的高斯消去解
 [-0.36601064 -1.02242367 -0.99196627  0.54170148 -1.3269668   0.31220916
 -0.65747593 -0.43982187 -0.31430685  0.98035908]
```

图 2. 4 无扰动 10 阶 Hilbert 线性方程组的解

```
有扰动情况下:
x的真值:
 [-0.36601064 -1.02242367 -0.99196619  0.54170089 -1.32696432  0.31220311
 -0.65746706 -0.43982957 -0.3143032   0.98035835]
x的sci库解
 [-1.15059043e+00  6.95901326e+01 -1.55447447e+03  1.44997577e+04
 -7.06851854e+04  1.97915533e+05 -3.29859940e+05  3.23127506e+05
 -1.71662257e+05  3.81481216e+04]
x的高斯消去解
 [-1.15057171e+00  6.95884958e+01 -1.55443937e+03  1.44994375e+04
 -7.06836555e+04  1.97911325e+05 -3.29853038e+05  3.23120840e+05
```

图 2. 5 有扰动 10 阶 Hilbert 线性方程组的解

解 x 每个元素的值从绝对值 2 以内左右的范围变化到最大可以达到 10^5，变化非常显著。

从 10 阶 Hilbert 矩阵线性方程组受到扰动后解的变化可以看出：即使变化很小，对于条件数大的矩阵，都会引起解的巨大变化。这与条件数可以表征线性方程组病态程度的定义相符合。

参考文献

[1] 希尔伯特矩阵. wiki 百科.

附录

见附件 python 源代码。