Almenn eðlisfræði

Krista Hannesdóttir

29. desember 2015

Formáli

Eftirfarandi efni er gefið út undir frjálsu leyfi sem er samhæft við GPLv3[1]og FDL 1.3[2], athugið að frjáls er hér notað undir þeim skilningi sem er á ensku. Þá er hægt að afrita og dreifa innhaldi bókarinnar, jafnvel leyfilegt að bæta við og breyta innihaldi eftir þörf. Eina krafan sem fylgir því að meiga nota innhald bókarinnar í afleidd verk er að það má ekki víkja frá frjálsu leyfi í afleiddum verkum og upphafshöfunda skal vera getið. Skuli afleidd verk vera ekki gefin undir frjálsu leyfi er það talið sem höfundarréttarbrot og varðar við lög. Þá telst það refsivert undir lögum nr. 73/1972, grein 54. Refsing varðar allt að 2 árum í fangelsi og fjársektum.

Markmið þessara bókar er að reyna búa til námsefni sem er nothæft fyrir kennslu í eðlisfræði á framhaldsskólastigi. Það eru til fjöldi bóka en nær engar gefnar undir frjálsum leyfum. Þá er hægt að þróa námsefni sem getur bæði verið sjálfstætt eða notað sem viðbót við annað námsefni. Á þessu námsstigi eru fáar grundvallarbreytingar sem gerast í námsefni og því er ekki örar breytingar sem gerast í efnisinnihaldi. Aftur á móti eru bækur oft skrifaðar með málfari sem er ekki í takt við tíman, orðabeiting og framsetning hugtaka þykja úrelt.

Hins vegar með því að bjóða frjálst efni er hægt að endurnota og endurskrifa það með tíðarandanum. Það er ekki krafa að fá beint leyfi frá höfundum, svo lengi sem höfundar eru nefndir og afleidd verk haldast áfram frjáls. Þá verður lagt meira í að bæta og viðhalda vinnunni sem fór í að skapa upphaflega verkið. Í stað þess að hver höfundur þarf að vinna alla vinnuna uppá nýtt í hvert sinn.

[1]http://www.gnu.org/licenses/gpl-3.0.html
[2]http://www.gnu.org/licenses/fdl-1.3.html

Sem stendur er núverandi ritverk í mikilli vinnslu og því eru tíðar villur og ókĺáraðir hlutar. Innihaldið sem stendur er viðbótarefni eða önnur frammsetning á þekktu efni.

Efnisyfirlit

Hluti I

Grunnhugtök

Kafli 1

Einingar

Einingar tákna stærðir, sem dæmi er vegalengd stærð en er líka mæld í mismunandi stærðum (t.d. km eða cm. Almennt er heppilegast að mæla í sömu einingum. Þegar mælanlegar stærðir eru gefnar á alltaf að gefa einingu með, stærðir án eininga hafa enga merkingu. Einingakerfið sem er notað í eðlisfræði er kallað SI-einingakerfið, þar sem SI stendur fyrir *Systeme international d'unites* eða alþjóða einingakerfið.

Alþjóða einingakerfið er byggt á franska metrakerfinu, alþjóða einingakerfið var útgefið 1960.

1.1 SI-einingar

Mælingar eru háðar því að geta mælt stærðir, t.d. við getum mælt vegalengd, tíma og massa. Það er líka hægt að mæla krafta af völdum hleðslu rafeinda, mælanlegar stærðir eru almennt tengdar við eiginleika hluta. Sem dæmi eru mælanlegar stærðir

- Vegalengd
- Tími
- Massi
- Hleðsla
- Straumur
- Hraði
- Orka

sumar stærðir eru samsettar stærðir, t.d. er hraði stærð samansett af vegalengd og tíma. Til að hafa staðlað form af mælingum þá er alþjóða-einingakerfið samansett alltaf af sömu einingum. Sem eru kallaðar grunneiningar sem eru gefnar í töflu 1.1. Síðan er hægt að leiða út allar aðrar einingar út frá grunneiningum, sem er stórt verk að gera þar það finnast fjölmargar einingar. Hægt er að

Stærð	Heiti	Tákn
Lengd	Meter	m
Massi	Kílógramm	kg
Tími	Sekúnda	s
Rafstraumur	Amper	A
Algildur hiti	Kelvin	K
Ljósstyrkur	Kándela	cd
Efnismagn	Mól	mol

Tafla 1.1: SI-grunneiningar gefnar, tákn þeirra og heiti.

breyta þessum einingum í aðrar stærðir, svosem fet, mínútur, klukkutíma eða kílómetra.

Fet er uþb. einn þriðji úr meter, eldri einingar voru venjulega byggðar á mannslíkanum, t.d. faðmar og tommur

Einingar sem eru samansettar úr SI-einingum er einfaldlega kallaðar samsettar einingar og eru jafn mikið notaðar á við SI-grunneiningar (ef ekki meira), sjá töflu 1.2. Sem dæmi er hraði samsett eining, líka orka, og tíðni. Sem hluti

Stærð	Heiti	Tákn	SI-grunneining
Kraftur	Newton	N	$\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Orka	Joule	J	$\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$
Hleðsla	Couloumb	C	As
Tíðni	Hertz	Hz	$\frac{1}{\mathrm{s}}$

Tafla 1.2: Samsettar SI-einingar, dæmi um nokkrar einingar.

af SI-einingakerfinu, þá eru stöðluð forskeyti oft nýtt til þess að gefa til kynna stærð einingar. Þetta er stundum ákjósanlegra en að nota staðalform sem er hentugt en getur verið illlæsilegt. Til að fá tilfinningu fyrir þessum forskeytum eru sýnidæmi hentug, skal hafa í huga að hægt er að breyta á milli einingar. Hægt er að búa til breytistuðull sem hentar hverri einingu að sinni, sem dæmi að breyta meter í nanómeter væri

Forskeyti eru orð (eða bókstafir) sem eru sett framan á önnur orð, t.d. er forskeytið kíló á orðið gramm skrifað sem kílógramm

$$
\begin{aligned}
1\mathrm{nm} &= 1\times 10^{-9}\mathrm{m} && \Leftrightarrow \\
1\times 10^{9}\mathrm{nm} &= 1\mathrm{m} && \Leftrightarrow \\
\frac{1\times 10^{9}\mathrm{nm}}{1\mathrm{m}} &= 1
\end{aligned}
$$

eða í beinum orðum er þetta 10^9 nanómetrar á hvern meter.

SI-forskeyti		
Stærð	Tákn	Heiti
10^{12}	T	Tera
10^{9}	G	Gíga
10^{6}	M	Mega
10^{3}	k	Kílo
10^{2}	h	Hekta
10^{1}	da	Deka
10^{-1}	d	Deci
10^{-2}	c	Centi
10^{-3}	m	Milli
10^{-6}	μ	Míkró
10^{-9}	n	Nanó
10^{-12}	p	Píkó

Tafla 1.3: SI forskeyti, stærð og heiti

Sýnidæmi 1
Hvað eru 30cm margir kílómetrar?

Hægt er að fara nokkrar leiðir að þessu markmiði, fyrst er centimetrum breytt í metra

$$30\cancel{\mathrm{cm}} \times \frac{1\mathrm{m}}{100\cancel{\mathrm{cm}}} = 0{,}30\mathrm{m}$$

síðan er metrum breytt í kílómetra

$$0{,}30\cancel{\mathrm{m}} \times \frac{1\mathrm{km}}{1000\cancel{\mathrm{m}}} = 0{,}30 \times 10^{-3}\mathrm{km}$$

Sýnidæmi 2
Breyttu eftirfarandi í SI-einingar

1. 20 nm
2. 2 cm^2
3. 3 km^2
4. 4 mg

og sýna útreikninga.

Þá er

1. $20\ \text{nm} = 20 \cdot 10^{-9}\text{m} = 2 \cdot 10^{-8}\text{m}$
2. $2\ \text{cm}^2 = 2 \cdot \left(10^{-2}\text{m}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-4}\text{m}^2$
3. $3\ \text{km}^2 = 3 \cdot \left(10^{3}\text{m}\right)^2 = 3 \cdot 10^{6}\text{m}^2$
4. $4\ \text{mg} = 4 \cdot 10^{-3}\text{g} = 4 \cdot 10^{-6}\ \text{kg}$

Seinasti liðurinn minnir okkur á að SI-eining fyrir massa er kg eða þúsund grömm.

Sýnidæmi 3
Breyttu eftirfarandi í SI-einingar

1. $3\frac{\text{km}}{\text{klst}}$
2. $2\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$
3. $5\frac{\mu\text{m}}{\text{ns}}$
4. $6\frac{\text{Mm}}{\text{ks}}$

og sýna útreikninga.

Þá er

1. $3\frac{\text{km}}{\text{klst}} = 3 \cdot \frac{10^3\text{m}}{3600\text{s}} = 3 \cdot \frac{1}{3{,}6}\frac{\text{m}}{\text{s}} = 0{,}8 \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$
2. $2\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 2 \cdot \frac{10^{-3}\ \text{kg}}{(10^{-2}\text{m})^3} = 2 \cdot \frac{10^{-3}\ \text{kg}}{10^{-6}\text{m}^3} = 2 \cdot 10^3\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
3. $5\frac{\mu\text{m}}{\text{ns}} = 5 \cdot \frac{10^{-6}\text{m}}{10^{-9}\text{s}} = 5 \cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}$
4. $6\frac{\text{Mm}}{\text{ks}} = 6 \cdot \frac{10^{6}\text{m}}{10^{3}\text{s}} = 6 \cdot 10^3\frac{\text{m}}{\text{s}}$

1.2 Óvissa

Þegar við vinnum með mælistærðir þá er innbyggð óvissa sem fylgir stærðinni. Þá er mælingin sem var gerð með nákvæmi sem stjórnar hversu marga stafi þarf til að lýsa stærðinni. Þá er fjöldinn af stöfunum ummerki um meiri nákvæmni, þá gilda líka reglur um samanlagningu og margföldun varðandi slíkar tölur. Einföld þumalputtaregla er

Staðhæfing 1

Minnsti fjöldi markverða stafa á reiknistærðum stjórnar fjölda markverða stafa í svari.

Lokastærðin verður þá háð því hver nákvæmnin var í upphafsmælistærðum. Hins vegar er líka óvissa sem fylgir mælistærð. Óvissa eru efri og neðri mörk mælistærðar, ekki bara er hægt að tala um hvað er mesta nákvæmni en líka hvað eru ytri þolmörk slíkrar nákvæmi. Sem dæmi er hægt að búa til tilraun þar sem í hvert sinn er sama fjölda markverða stafa en hins vegar breytist útkoman úr hverri mælingu. Þá þyrpast allar mælingar umhverfis ákveðið miðgildi og hafa efri og neðir mörk. Þá þarf að taka meðaltal af mælingum og gefa með efri og neðri mörk útfrá þeim upplýsingum. Þá er meðaltalið af öllum mælingum

$$\langle \mathrm{x} \rangle = \frac{\text{Summa allra mælinga}}{\text{Fjöldi mælinga}} \tag{1.1}$$

þar sem x getur verið t.d. hraði, vegalengd eða aðrar stærðir. Þegar meðaltalið er þekkt er hægt að finna ytri mörkin á mælingum. Sem er táknað með

$$\langle \mathrm{x} \rangle \pm \text{ óvissa} \tag{1.2}$$

þess vegna er oft gefnar stærðir sem $4\mathrm{m} \pm 0,5\mathrm{m}$. Þar sem meðaltal er 4m og óvissan er $0,5\mathrm{m}$. Það eru til margar leiðir til að finna efri og neðri mörk en almennt er hægt að velja lægstu tölu úr mengi og hæðstu tölu úr mengi til að finna efri og neðri mörk. Það er líka hægt að gefa sér stæðasta frávik sem bæði efri og neðri mörk. Sumir hafa notað einfalda útgáfu af meðatali á milli neðri og efri frávika.

Sýnidæmi 4

Jóhannes fór út og ákvað að mæla stökkhraðan á engisprettum, hann mældi eftirfarandi

Hraði $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$
3,11
3,0
2,92

hvað er óvissan í mælingunum?

Meðaltalið af öllum mælingunum er

$$\langle x \rangle = \frac{3,11\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 3,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} + 2,92\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}{3} = 3,01\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

hins vegar er lægsti fjöldinn af markverðum stöfum 2 og því er ekki hægt að treysta meira en stærðinni $3,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$. Þá eru efri og neðri mörk þessa mælinga uþb. $0,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ frá miðgildi. Þá er ágiskun á óvissu

$$3,0\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \pm 0,1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Kafli 2

Hreyfilýsing

2.1 Hreyfilýsing í einni vídd

Þegar hlutir hreyfast í tíma og rúmi notum við oftast staðsetningu og breytingu á staðsetningu hluta til að lýsa því hvernig við aukum hraða, hversu hratt hraðinn breytist og sambærilegar hugmyndir.

Staðsetning er oft táknuð með x eða s, og tími er táknaður með t. Meðalhraði er skilgreindur til að vera

$$\mathrm{v} \equiv \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{s}_2 - \mathrm{s}_1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1} \tag{2.1}$$

þar sem v táknar hraða. Þar sem Δ táknar breytingu á staðsetningu og tíma. Þá er hægt að segja hraði er breyting á staðsetningu á meðan breyting í tíma á sér stað. Fyrir lengra komna er augnarblikshraði gefinn við

$$v = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{ds}{dt} \tag{2.2}$$

þegar $\Delta \mathrm{t} \to 0$ þá er tímabilið sem færslan Δs gerist yfir að verða eins lítið eins og hægt er. Hins vegar mun það aldrei ná að verða núll, en verður eins lítið og mögulegt er. Það verður ekki farið dýpra í þess útlistun sem stendur en smæðar reikningur verður tekinn fyrir seinna í námsefninu.

Markgildi eru táknuð með lim og eru mikið notuð í stærðfræðigreiningu (calculus) og henta til að skoða breytingu á föllum. Hérna er vegalengd, hraði og hröðun föll af tíma.

Meðalhröðun er skilgreind til að vera breyting í hraða yfir tíma, sem gefur

$$\mathrm{a} \equiv \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{\mathrm{v}_2 - \mathrm{v}_1}{\mathrm{t}_2 - \mathrm{t}_1} \tag{2.3}$$

og hérna táknar a hröðunina, sem er hversu stór hraðabreytingin er á hverja tímaeiningu. Í raun er núna búið að skilgreina allt sem er þörf á, afgangurinn af vinnunni er að finna not og beita jöfnunum. Hlutur undir hröðun breytir hraða sínum með

$$\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} = \mathrm{v}_{\mathrm{byrjun}} + \mathrm{a}\Delta \mathrm{t} \tag{2.4}$$

aftur á móti þegar hraði breytist er vegalengdin sem er farin flóknari að finna. Til þess getum við nýtt hraða-tíma gröf sem verða tekin fyrir nánar í hluta

2.2. Augnablikshröðun er gefinn við

$$v = \lim_{\Delta \mathrm{t} \to 0} \frac{\Delta \mathrm{a}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{dv}{dt} \tag{2.5}$$

sem myndi lýsa hröðuninni á hverju augnabliki fyrir hraðafall.

Sýnidæmi 5
Bíll er á 25 m/s hraða, bíllinn keyrir í 2 h. Hversu langt hefur bíllinn keyrt?

Við breytum fyrst 2 h í sekúndur, $2\,\mathrm{h} = 2\,\mathrm{s} \cdot 3600\,\mathrm{s} = 7200\,\mathrm{s}$, síðan er vegalengdin gefin við

$$\mathrm{v} = \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} \Leftrightarrow \Delta \mathrm{s} = \mathrm{v}\Delta \mathrm{t} = 25\,\mathrm{m/s} \cdot 7200\,\mathrm{s} = 180\,000\,\mathrm{m} = 180\,\mathrm{km}$$

Sýnidæmi 6
Bíll er á $36\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{klst}}$ hraða, bíllinn eykur hraða sinn upp í 72 km/h á 8 s. Hver er hröðun bílsins? Hversu langan tíma tekur að komast upp í 100 km/h hraða, ef hann byrjaði á 36 km/h hraða og hefur sömu hröðun?

Byrjum á því að breyta í SI-einingar, $36\,\mathrm{km/h} = 10\,\mathrm{m/s}$, $72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$ og $100\,\mathrm{km/h} = 27{,}8\,\mathrm{m/s}$. Síðan getum við fundið hröðunina við

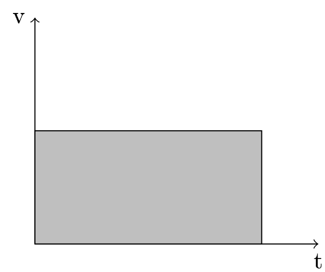
$$\mathrm{a} = \frac{20\,\mathrm{m/s} - 20\,\mathrm{m/s}}{8\,\mathrm{m/s}} = 1{,}25\,\mathrm{m/s}^2$$

lokahraði bílsins er gefinn, og við getum einangrað tíman með

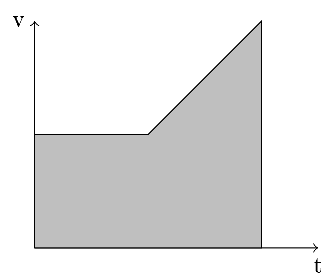
$$\begin{aligned}
\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} &= \mathrm{v}_{\mathrm{byrjun}} + \mathrm{a}\Delta \mathrm{t} \\
\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byrjun}} &= \mathrm{a}\Delta \mathrm{t} \\
\Delta \mathrm{t} &= \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byrjun}}}{\mathrm{a}} \\
&= \frac{27{,}8\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s}}{1{,}25\,\mathrm{m/s}^2} \\
&= 14{,}2\,\mathrm{m/s}
\end{aligned}$$

2.2 Hraða-Tíma gröf

Þegar hlutur er á hreyfingu ferðast hann vegalengd í samræmi við hversu lengi hann er á hreyfingu. Nánar tiltekið getum við myndað graf sem sýnir samhengið á milli hraða og tíma. Eftir því er hægt að mynda ferill sem sýnir hversu langt hluturinn ferðast, sjá mynd 2.2. Þegar hraðinn breytist, þá breytist vegalengdin á tímaeiningu sem hluturinn ferðast. Þá er samanlögð vegalengd sem hluturinn hefur ferðast í samræmi við hversu stórt flatarmálið er undir ferlinum á hraða-tíma grafi, sjá mynd 2.2. Sem sagt er hægt að meta hversu



Mynd 2.1: Flatarmálið undir grafinu gefur vegalengdina sem hefur verið ferðast.



Mynd 2.2: Þrátt fyrir hraðabreytingu seinna meir á ferlinum gildir ennþá að flatarmálið undir graftinu gefur vegalengdina sem hefur verið ferðast, það getur oft orðið talsvert flókið að finna flatarmálið á hraða-tíma gröfum.

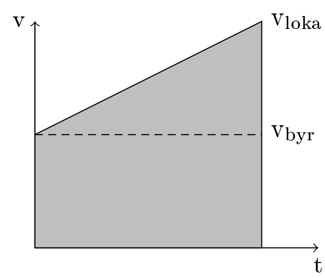
langt hlutur ferðast einunigs útfrá hraða-tíma gröfum, hins vegar gildir *ekki* það sama um stöðu-tíma gröf. Það sem við getum útleitt með hraða-grafi fyrir hlut sem hefur sömu hröðun (jöfn hröðun) er vegalengdin sem er búið að ferðast, sjá mynd 2.3. Sem er hægt að setja sem jöfnu

$$\Delta \mathrm{s} = \mathrm{v_{byr}} \mathrm{t} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{v_{loka}} - \mathrm{v_{byr}}\right)\mathrm{t} = \mathrm{v_{byr}}\mathrm{t} + \Delta \mathrm{v} \cdot \mathrm{t} \tag{2.6}$$

eða líka hægt að umskrifa til að vera

$$\Delta \mathrm{s} = \mathrm{v_{byr}}\mathrm{t} + \frac{1}{2}\mathrm{a}\mathrm{t}^2 \tag{2.7}$$

sem er líka nefnd oft stöðujafna.



Mynd 2.3: Hérna sést hvernig hægt er að deila hraða-tíma grafi í þríhyrning og ferhyrning.

Sýnidæmi 7
Bíll er á 54 km/h hraða, bíllinn bremsar niður í 18 km/h hraða og það tekur 3,2 s. Hversu langt ferðast bíllinn á meðan hann er að bremsa?

Byrjum á því að breyta í SI-einingar, 54 km/h = 15 m/s og 18 km/h = 5 m/s. Við nýtum

$$\begin{aligned}\Delta \mathrm{s} &= \mathrm{v_{byr}} \mathrm{t} + \frac{1}{2}\left(\mathrm{v_{loka}} - \mathrm{v_{byr}}\right) \mathrm{t} \\ &= 15\,\mathrm{m/s} \times 3{,}2\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \times (5\,\mathrm{m/s} - 15\,\mathrm{m/s}) \times 3{,}2\,\mathrm{s} \\ &= 48\,\mathrm{m} - 16\,\mathrm{m} \\ &= 32\,\mathrm{m}\end{aligned}$$

Sýnidæmi 8
Bíll er á 54 km/h hraða, bíllinn eykur hraða sinn með hröðuninni 3 $\mathrm{m/s^2}$ í 3,4 s. Hversu langt ferðast bíllinn á meðan hann eykur hraða sinn?

Byrjum á því að breyta í SI-einingar, 54 km/h = 15 m/s. Við nýtum

$$\Delta \mathrm{s} = \mathrm{v_{byr}} \mathrm{t} + \frac{1}{2}\mathrm{a}\mathrm{t} = 15\,\mathrm{m/s} \times 3{,}4\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \times 3\,\mathrm{m/s^2} \times (3{,}4\,\mathrm{s})^2 = 69{,}4\,\mathrm{m}$$

2.3 Hraðabreytingar og hröðun

Þegar jöfn hröðun á sér stað, þá er hægt lýsa breytingunni án þess að nota tíma sem lýsingu. Tíminn sem tekur fyrir hlut að auka hraða sinn jafnt er

$$\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} = \mathrm{v}_{\mathrm{byrjun}} + \mathrm{a}\Delta\mathrm{t} \Leftrightarrow \Delta\mathrm{t} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}}{\mathrm{a}}$$

ef við setjum þessa stærð inní stöðujöfnuna 2.7 fæst

$$\begin{aligned}
\Delta\mathrm{s} &= \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}\mathrm{t} + \frac{1}{2}\mathrm{a}\mathrm{t}^2 && \Leftrightarrow\\
\Delta\mathrm{s} &= \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}}{\mathrm{a}} + \frac{1}{2}\mathrm{a}\left(\frac{\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}}{\mathrm{a}}\right)^2 && \Leftrightarrow\\
\Delta\mathrm{s} &= \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{loka}}\mathrm{v}_{\mathrm{byr}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2}{\mathrm{a}} + \frac{\left(\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}\right)^2}{2\mathrm{a}} && \Leftrightarrow\\
2\mathrm{a}\Delta\mathrm{s} &= 2\mathrm{v}_{\mathrm{loka}}\mathrm{v}_{\mathrm{byr}} - 2\mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2 + \left(\mathrm{v}_{\mathrm{loka}} - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}\right)^2 && \Leftrightarrow\\
2\mathrm{a}\Delta\mathrm{s} &= 2\mathrm{v}_{\mathrm{loka}}\mathrm{v}_{\mathrm{byr}} - 2\mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2 + \mathrm{v}_{\mathrm{loka}}^2 - 2\mathrm{v}_{\mathrm{loka}}\mathrm{v}_{\mathrm{byr}} + \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2 && \Leftrightarrow\\
2\mathrm{a}\Delta\mathrm{s} &= \mathrm{v}_{\mathrm{loka}}^2 - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2
\end{aligned}$$

þeas. við höfum þá jöfnuna

$$2\mathrm{a}\Delta\mathrm{s} = \mathrm{v}_{\mathrm{loka}}^2 - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2 \tag{2.8}$$

sem getur lýst hraða, hröðun eða vegalengd hluta undir jafnri hröðun.

Sýnidæmi 9
Bíll er á 54 km/h hraða, bíllinn eykur hraða sinn með hröðuninni $3\,\mathrm{m/s^2}$ uppí hraðan 90 km/h. Hversu langt ferðast bíllinn á meðan hann eykur hraða sinn?

Byrjum á því að breyta í SI-einingar, 54 km/h = 15 m/s og 90 km/h = 25 m/s Við umskrifum 2.8 til að vera

$$2\mathrm{a}\Delta\mathrm{s} = \mathrm{v}_{\mathrm{loka}}^2 - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2 \Leftrightarrow \Delta\mathrm{s} = \frac{\mathrm{v}_{\mathrm{loka}}^2 - \mathrm{v}_{\mathrm{byr}}^2}{2\mathrm{a}} = \frac{(25\,\mathrm{m/s})^2 - (15\,\mathrm{m/s})^2}{2 \times 3\,\mathrm{m/s^2}} = 66{,}7\,\mathrm{m}$$

2.4 Hraði og línulegar jöfnur

Hægt er að setja upp sett af línulegum jöfnum til að lýsa því hvað það tekur langan tíma fyrir hluti að ná hvort öðru, t.d. bíll sem tekur frammúr öðrum bíl. Til að lýsa því þá verður staðsetning hvers hlutar gefin með

$$\mathrm{s}_{\mathrm{loka}} = \mathrm{v}\Delta\mathrm{t} + \mathrm{s}_{\mathrm{byrjun}}$$

gott er að muna að $\Delta s = s_{\text{loka}} - s_{\text{byrjun}}$. Sem er staðsetning eins hlutarins, þá er hægt að setja upp tvær jöfnur

$$\begin{aligned} s_{\text{loka,A}} &= v_A \Delta t + s_{\text{byrjun,A}} \\ s_{\text{loka,B}} &= v_B \Delta t + s_{\text{byrjun,B}} \end{aligned}$$

báðar jöfnunar hafa sameiginlegan tíma sem er hægt að nýta til að leysa út eða tengja saman. Fyrir lengra komna er hægt að sjá þessa sem fylki í hliðarrúmi [1]. Það eru til nokkrar útfærslur á því hvernig hægt er að leysa þessar jöfnur.

Sýnidæmi 10
Tveir bílar ferðast með jöfnum hraða, bíll A ferðast á 20 m/s og bíll B ferðast með 15 m/s, bíll B er með 80 m forskot miðað við A. Hversu langan tíma tekur það fyrir bíl A að taka frammúr bíl B?

Báðir bílarnir hafa staðsetningu miðað við núllpunkt bíls A til að vera

$$\begin{aligned} s_{\text{loka,A}} &= 20\,\text{m/s} \times \Delta t + 0\,\text{m} \\ s_{\text{loka,B}} &= 15\,\text{m/s} \times \Delta t + 80\,\text{m} \end{aligned}$$

þegar bíll A nær bíl B þá er staðsetning beggja sú sama

$$\begin{aligned} s_{\text{loka,A}} &= s_{\text{loka,B}} \\ 20\,\text{m/s} \times \Delta t + 0\,\text{m} &= 15\,\text{m/s} \times \Delta t + 80\,\text{m} \\ 20\,\text{m/s} \times \Delta t - 15\,\text{m/s} \times \Delta t &= 80\,\text{m} \\ (20\,\text{m/s} - 15\,\text{m/s})\,\Delta t &= 80\,\text{m} \\ (5\,\text{m/s})\,\Delta t &= 80\,\text{m} \\ \Delta t &= \frac{80\,\text{m}}{5\,\text{m/s}} \\ &= 16\,\text{s} \end{aligned}$$

Sýnidæmi 11
Bíll A bíður á ljósum og bíll B fer frammhjá með hraðanum 15 m/s, bíll A hefur hröðunina $2\,\text{m/s}^2$ og hraðar sér upp í hraðan 20 m/s, hversu lengi er bíll A að ná bíl B?

Til að byrja með er gott að athuga hvort að bíll A nær bíl B á meðan hröðun stendur, það tekur bíl A að hraða sér frá kyrrstöðu upp í 20 m/s nákvæmlega

[1] S.s. $\vec{s}_{\text{loka}} = \vec{v} \cdot \Delta t + \vec{s}_{\text{byrjun}}$

10 s. Þá hafa bílarnir ferðast

$$s_{\text{hröð},A} = \frac{1}{2} \times 2\,\text{m/s}^2 \times (10\,\text{s})^2 = 100\,\text{m}$$
$$s_{\text{hröð},B} = 15\,\text{m/s} \times 10\,\text{s} = 150\,\text{m}$$

báðir bílarnir hafa staðsetningu miðað við núllpunkt bíls A til að vera

$$s_{\text{loka},A} = 20\,\text{m/s} \times \Delta t + 100\,\text{m}$$
$$s_{\text{loka},B} = 15\,\text{m/s} \times \Delta t + 150\,\text{m}$$

þegar bíll A nær bíl B þá er staðsetning beggja sú sama

$$\begin{aligned}
s_{\text{loka},A} &= s_{\text{loka},B} \\
20\,\text{m/s} \times \Delta t + 100\,\text{m} &= 15\,\text{m/s} \times \Delta t + 150\,\text{m} \\
20\,\text{m/s} \times \Delta t - 15\,\text{m/s} \times \Delta t &= 50\,\text{m} \\
(20\,\text{m/s} - 15\,\text{m/s})\,\Delta t &= 50\,\text{m} \\
(5\,\text{m/s})\,\Delta t &= 50\,\text{m} \\
\Delta t &= \frac{50\,\text{m}}{5\,\text{m/s}} \\
&= 10\,\text{s}
\end{aligned}$$

þá er samanlagður tími sem er í að ná bíl B

$$\Delta t = \Delta t_{\text{hröðun}} + \Delta t_{\text{jafn}} = 10\,\text{s} + 10\,\text{s} = 20\,\text{s}$$

Kafli 3

Kraftar

Fyrst skilgreinum við hvað tregða er, það er mótþrói hlutar til að breyta hraða sínum. Hlutur á hreyfingu hefur innbyggða tregðu sem lætur hlut halda áfram í þá stefnu og hraða sem þegar hefur. Það sem getur breytt stefnu og hraða hlutar eru kraftar og síðan eru nokkur lögmál sem voru framsett af Newton sem lýsa þeim eiginleikum sem láta hlutir hafa áhrif á hvorn annan.

Staðhæfing

1. **Tregða** Hlutur sem er á hreyfingu mun halda áfram í þá stefnu sem hann hefur, ásamt því að halda hraða sínum óbreyttum, nema kraftur breyti stefnu og/eða hraða hanns. Stærð tregðu, þ.e.a.s. mótþrói við breytingu í hreyfingu er skriðþungi, sem er margfeldi massa og hraða.
2. **Kraftur** Kraftur er margfeldi, massa og hröðunar, enginn kraftur verkar ef hlutur er á jöfnum hraða og heldur sömu stefnu.
3. **Gagnkraftur** Fyrir hvern kraft sem verkar á hlut, er jafnstór og gagnstæður kraftur sem verkar samtímis.

og til að byrja með er lögð áhersla á krafta fremur en tregðu og skriðþunga. Frá öðru lögmáli Newtons er hægt að tala um mismunandi gerðir krafta sem allir gegna hlutverki þegar reynt er að lýsa hegðun hluta, t.d. eru nokkrir

- togkraftur
- þyngdarkraftur
- heildarkraftur
- núningskraftur
- rafkraftur
- segulkraftur

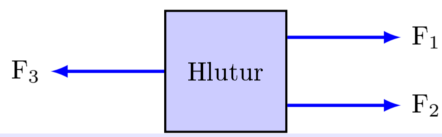
og þetta eru ekki allar mögulegar týpur af kröftum sem finnast. Allir kraftar hafa eininguna N sem er SI-eining. Það er líka hægt að að skrifa kraft sem $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$.

3.1 Heildarkraftur

Við getum skilgreint krafta til að vera $\mathrm{F} = \mathrm{ma}$, en þegar við leggjum saman alla mismunandi krafta þá myndast *heildarkraftur*. Þá er allt talið saman, togkraftar, núningskraftar, þyngdarkraftar, o.s.f., til að mynda kraft sem lýsir endanlegri hreyfingu hluta í lokuðu kerfi. Heildarkrafturinn er gefinn sem summa allra krafta fyrir *einn* hlut:

$$\mathrm{F}_{\mathrm{heild}} = \sum \text{allir kraftar} = \mathrm{ma} \tag{3.1}$$

til að byrja með virkar þetta sem mjög óáhugaverð jafna en mun verða talsvert hagnýtin með tímanum og sýnir styrk lögmála Newtons[1].



$$\mathrm{F}_{\mathrm{heild}} = \sum \text{allir kraftar} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 - \mathrm{F}_3 = \mathrm{ma}$$

Aðalatriði í beitingu heildarkraftsins er að velja sér hnitakerfi og byrja skilgreina hvar mismunandi kraftar verka á ákveðin hlut. Þegar sagt er hnitakerfi er átt við að velja hvað er jákvæð stefna í hreyfingu í láréttu og lóðréttu. Til að reyna sýna hvernig á beita heildarkrafti er best að nýta sér sýnidæmi.

Sýnidæmi 12
Við höfum $10\,\mathrm{kg}$ kassa sem liggur á borði, og er dreginn af $20\,\mathrm{N}$ krafti og það er $5\,\mathrm{N}$ kraftur sem verkar á móti hreyfingu kassans. Hver er heildarkrafturinn? Hver er hröðun kassans?

Heildarkrafturinn er summa togkrafts $20\,\mathrm{N}$ og mótkraftur er $5\,\mathrm{N}$ sem gefur

$$\mathrm{F}_{\mathrm{heild}} = \mathrm{F}_{\mathrm{tog}} - \mathrm{F}_{\mathrm{mót}} = 20\,\mathrm{N} - 5\,\mathrm{N} = 15\,\mathrm{N}$$

þar sem heildarkraftur er $\mathrm{F}_{\mathrm{heild}} = \mathrm{ma}$, þá er hægt að einangra hröðun hlutarins

$$\mathrm{F}_{\mathrm{heild}} = \mathrm{ma} \Leftrightarrow \mathrm{a} = \frac{\mathrm{F}_{\mathrm{heild}}}{\mathrm{m}} = \frac{15\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{kg}} = 1{,}5\,\mathrm{m/s}^2$$

sem er þá hröðun kassans þegar allir kraftar eru taldir saman.

[1] Táknið $\sum$ þýðir samanlagning, notast til að tákna samanlagningu á stærðum (eða kröftum hér)

Sýnidæmi 13
Við höfum 1 kg kúlu sem hangir í lausu lofti í bandi, og er toguð upp með 20 N krafti, þyngdarkrafturinn verkar á móti togkraftinum með stærðinni 9,8 N. Hver er heildarkrafturinn? Hver er hröðun kúlunnar?

Heildarkrafturinn er summa togkrafts 20 N og þyngdarkrafts sem er 9,8 N sem gefur

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{F_{tog}} - \mathrm{F_g} = 20\,\mathrm{N} - 9{,}8\,\mathrm{N} = 10{,}2\,\mathrm{N}$$

þar sem heildarkraftur er $\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{ma}$, þá er hægt að einangra hröðun hlutarins

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{ma} \Leftrightarrow \mathrm{a} = \frac{\mathrm{F_{heild}}}{\mathrm{m}} = \frac{10{,}2\,\mathrm{N}}{1\,\mathrm{kg}} = 10{,}2\,\mathrm{m/s^2}$$

sem er þá hröðun kúlunnar þegar allir kraftar eru taldir saman.

aftur á móti eru nokkur önnur sértilfelli af þessu lögmáli. *Þegar við tölum um jafnan hraða getum við sagt að hraði hlutar helst óbreyttur.* Þetta gefur að

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{m} \cdot 0\,\mathrm{m/s^2} = 0\,\mathrm{N}$$

sem gildir bara fyrir hluti sem ferðast með *óbreyttum* hraða. Sem dæmi er

Sýnidæmi 14
Við höfum 1 kg kúlu sem hangir í lausu lofti í bandi, og er toguð upp með krafti og heldur kúlunni á jöfnum hraða, þyngdarkrafturinn verkar á móti togkraftinum með stærðinni 9,8 N. Hver er togkrafturinn?

Heildarkrafturinn er summa togkrafts og þyngdarkrafts sem er 9,8 N, samanlagt verður heildarkrafturinn 0 N til að halda kúlunni á jöfnum hraða. Sem gefur

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{F_{tog}} - \mathrm{F_g} = 0\,\mathrm{N} \Leftrightarrow \mathrm{F_{tog}} - 9{,}8\,\mathrm{N} = 0\,\mathrm{N} \Leftrightarrow \mathrm{F_{tog}} = 9{,}8\,\mathrm{N}$$

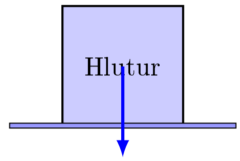
þ.e.a.s. togkrafturinn er jafn stór og þyngdarkrafturinn ef við höldum kúlunni á jöfnum hraða. Athugið að jafn hraði oft losar sig við fullt af vandamálum og einfaldar talsvert kraftasamhengi.

3.2 Þyngdarkraftur

Stærð þyngdarkraftsins er í samræmi við massa hlutars, þetta er langdregin leið til að segja hlutur með meira massa veldur stærri þyngdarkrafti. Mátinn sem við getum lagt fram stærð þyngdarkrafts sem er:

$$\mathrm{F_g} = \mathrm{mg} \tag{3.2}$$

þar sem $\mathrm{g} = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.



Þá er einungis að ræða um hröðun sem hlutur upplifir vegna þyngdarsviðs jarðar (og á yfirborði jarðar samtímis). Þyngdarhröðun er breytileg milli pláneta, þess vegna er talað um *þyngd* hlutars í Newtons og *massa* hlutar í kílógrömmum. Massi hlutar er óháður þyngdarsviðinu, en þyngdin er háð styrk þyngdarsviðsins.

Sýnidæmi 15
Við höfum 5 kg kúlu sem hangir í lausu lofti í bandi, og er toguð upp með krafti og heldur kúlunni á jöfnum hraða. Hver er togkrafturinn?

Við getum nýtt fyrri dæmi þar sem kúlan er á *jöfnum* hraða, þá er hægt að segja

$$\mathrm{F_{tog}} = \mathrm{F_g}$$

og þar sem við höfum nýlega skilgreint stærð þyngdarkrafts, þá er

$$\mathrm{F_{tog}} = \mathrm{F_g} = \mathrm{mg} = 5\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 49\,\mathrm{N}$$

3.3 Þverkraftur

Þegar kraftur verkar á yfirborð hluta, þá myndast gagnstæður kraftur sem er kallaður þverkraftur. Til samanburðar, ef bók liggur á borði, þá er það þverkrafturinn sem sér til þess að bókin dettur ekki í gegnum borðið. Í raun er þverkraftur form af þriðja lögmáli Newtons.

Sýnidæmi 16
Við höfum kyrrstæðan kassa sem liggur á borði (á láréttu plani), kassinn er 10 kg. Hver er stærð þverkraftsins?

Þar sem kassinn er kyrrstæður, þá getum við sagt að heildarkrafturinn meðfram hinu lóðrétta sé núll. S.s. kassinn eykur hvorki hraðan sinn upp né niður. Sem gefur að

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{F_{þver}} - \mathrm{F_g} = 0\,\mathrm{N} \Leftrightarrow \mathrm{F_{þver}} = \mathrm{F_g}$$

og þar sem við þekkjum massa kassans þá er hægt að setja

$$\mathrm{F}_{\text{þver}} = \mathrm{F}_{\mathrm{g}} = \mathrm{mg} = 10\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 98\,\mathrm{N}$$

sem er þá þverkrafturinn sem kassinn upplifir vegna þyngdarkraftsins.

3.4 Núningskraftur

Þegar hlutir ferðast yfir yfirborð, þá myndast kraftur verkar á móti hreyfingu hlutarins. Sá kraftur kallast *núningskraftur* og er í hlutfalli við stærð þverkraftsins. Til að lýsa hversu stór prósenta af þverkraftinum nýtist til að verða núningskraftur höfum við núningsstuðullinn μ. Sem er notaður í samhengið

$$\mathrm{F}_{\text{nún}} = \mu \mathrm{F}_{\text{þver}} \tag{3.3}$$

núningskrafturinn sjálfur er afleiða þess að draga hlut eftir yfirborði. Ef hluturinn er ekki á hreyfingu (eða reynir ekki að hreyfa sig) þá myndast ekki núningskraftur. Ber að athuga núningsstuðullinn er *einingarlaus* stærð, sem liggur á milli núll og einn.

Sýnidæmi 17
Kassi er togaður áfram með jöfnum hraða á borði, núningsstuðull á milli borðs og kassa er $0,4$, massi kassans er $5\,\mathrm{kg}$. Hver er stærð togkraftsins?

Þar sem kassinn er á jöfnum hraða er $\mathrm{F}_{\text{nún}} = \mathrm{F}_{\text{tog}}$, og þar sem kassinn liggur í láréttu plani þá er $\mathrm{F}_{\text{þver}} = \mathrm{F}_{\text{nún}}$. Sem gefur að

$$\mathrm{F}_{\text{tog}} = \mathrm{F}_{\text{nún}} = \mu \mathrm{F}_{\text{þver}} = \mu \mathrm{F}_{\mathrm{g}} = \mu \mathrm{mg} = 0,4 \times 5\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 19{,}6\,\mathrm{N}$$

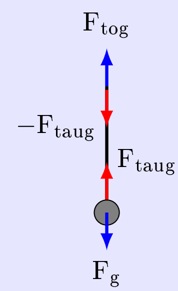
sem gildir einungis í lárréttu plani með kassa á jöfnum hraða.

3.5 Gagnkraftur

Sem stærð kemur hún sjálfkrafa þegar kraftur verkar á hlut, gagnkraftur sér til þess að þegar kraftur verkar á hlut muntu finna fyrir því að kraftur sé beittur. Sem dæmi er hægt að ímynda sér að ýta kassa úr kyrrstöðu, ef þú verkar á kassann með krafti þá ferðast hluturinn áfram en ef það væri *enginn* kraftur sem verkaði á móti myndi sá sem ýtir kassanum ekki finna fyrir því. Sem er ókunnugt frá daglegri reynslu, ef ýtt er á kassa þá finnst kraftur á móti, sem er kunnugt frá daglegri reynslu.

Sýnidæmi 18

Kúla hangir í bandi, enda bandsins er haldið fast. Kúlan hefur massann 5 kg. Sýndu stefnu og stærð allra krafta og gagnkrafta.



Þar sem endinn á bandinu er haldið fast, þá er heildarkrafturinn núll, ef við skoðum bara endann á bandinu þá eru kraftarnir verka á enda bandsins

$$F_{heild,endi} = F_{tog} - F_{taug} = 0\,\mathrm{N}$$

og þar sem kúlan hengur í hinum endanum er

$$F_{heild,kúla} = F_{taug} - F_g = 0\,\mathrm{N}$$

núna er hægt að búa til heildar-kraftsmynd þar sem allir kraftarnir eru lagðir saman. Ef við leggjum alla kraftana saman á samtímis

$$\begin{aligned} F_{heild} &= F_{tog} + F_{taug} - F_{taug} - F_g = 0 \\ F_{heild} &= F_{tog} - F_g = 0 \\ F_{tog} &= F_g \end{aligned}$$

sem gefur að togkrafturinn er

$$F_{tog} = F_g = mg = 5\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} = 49\,\mathrm{N}$$

Heildarkraftur á stór kerfi

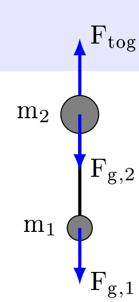
Hingað til hefur verið unnið með ekki meira en einn hlut í einu, þá eru allir kraftar sem verka á einn hlut teknir og lagðir saman til að mynda þann kraft sem kemur ef allt er talið saman. En það er sjaldan sem það er svo einfalt í raunveruleikanum, þá munu fleiri en einn hlutur oft taka þátt í því að mynda heildarkraft. Nánar tiltekið þá er mikilvægt að bæta við massanum á hverjum hlut sem er í kerfinu. Sem gefur

$$F_{heild} = \sum \text{allir kraftar} = \sum ma \tag{3.4}$$

sem þýðir að allir massar þurfa eru lagðir saman til að lýsa hreyfingu og kröftum kerfisins, og samtímis táknar summu alla krafta. Nokkur dæmi eru heppileg til að sýna hvernig slíkir eiginleikar lýsa sér.

Sýnidæmi 19

Kúlur hanga í bandi, enda bandsins er haldið fast. Kúla 1 hefur massann 2 kg. Kúla 2 hefur massan 5 kg.



Sýndu stefnu og stærð allra krafta og gagnkrafta.

Þar sem endinn á bandinu er haldið fast, þá er heildarkrafturinn núll, kraftarnir sem verka á sitt hvora kúluna eru

$$F_{\text{heild},1} = F_{\text{taug}} - F_{g,1} = 0\,\text{N}$$

og þar sem kúlan hengur í hinum endanum er

$$F_{\text{heild},2} = F_{\text{tog}} - F_{g,2} - F_{\text{taug}} = 0\,\text{N}$$

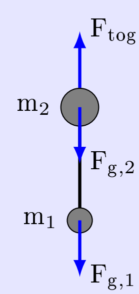
núna er hægt að búa til heildar-kraftsmynd þar sem allir kraftarnir eru lagðir saman. Ef við leggjum alla kraftana saman á samtímis

$$\begin{aligned}
F_{\text{heild}} &= F_{\text{taug}} - F_{g,1} + F_{\text{tog}} - F_{g,2} - F_{\text{taug}} = 0\,\text{N} \\
F_{\text{heild}} &= F_{\text{tog}} - F_{g,1} - F_{g,2} = 0\,\text{N} \\
F_{\text{heild}} &= F_{\text{tog}} - m_1 g - m_2 g = 0\,\text{N} \\
F_{\text{heild}} &= F_{\text{tog}} - 19{,}6\,\text{N} - 49\,\text{N} = 0\,\text{N} \\
F_{\text{tog}} &= 19{,}6\,\text{N} + 49\,\text{N} \\
&= 68{,}6\,\text{N}
\end{aligned}$$

Hins vegar er hægt að taka sömu aðstæður og í fyrra sýnidæmi og skoða hver hröðunin verður ef togað er upp með krafti.

Sýnidæmi 20

Kúlur hanga í bandi, enda bandsins er haldið fast. Kúla 1 hefur massann 2 kg. Kúla 2 hefur massann 5 kg. Togað er í efri kúluna með 75 N krafti. Sýndu stefnu og stærð allra krafta og gagnkrafta.



Þar sem endinn á bandinu er haldið fast, þá er heildarkrafturinn núll, kraftarnir sem verka á sitt hvora kúluna eru

$$F_{\text{heild},1} = F_{\text{taug}} - F_{g,1} = m_1 a$$

og þar sem kúlan hangir í hinum endanum er

$$F_{\text{heild},2} = F_{\text{tog}} - F_{g,2} - F_{\text{taug}} = m_2 a$$

núna er hægt að búa til heildar-kraftsmynd þar sem allir kraftarnir eru lagðir saman. Ef við leggjum alla kraftana saman

$$
\begin{aligned}
F_{heild} &= F_{taug} - F_{g,1} + F_{tog} - F_{g,2} - F_{taug} = 0\,N \\
F_{heild} &= F_{tog} - F_{g,1} - F_{g,2} = (m_1 + m_2)\,a \\
F_{heild} &= F_{tog} - m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2)\,a \\
F_{heild} &= 75\,N - 19{,}6\,N - 49\,N = (7\,kg) \times a \\
F_{heild} &= 6{,}4\,N = (7\,kg) \times a \\
a &= \frac{6{,}4\,N}{7\,kg} \\
&= 0{,}914\,m/s^2
\end{aligned}
$$

3.6 Kraftar í skáplani

Þegar hlutur liggur í skáplani breytast aðstæðurnar fyrir því hvernig þyngdarkrafturinn verkar á sjálft. Í láréttu plani er hægt að miða út frá því að allur þyngdarkrafturinn verður þverkraftur, aftur á móti í skáplani er þverkrafturinn háður því hver hallinn er á planinu. Samhliða því myndast kraftur sem verkar samsíða planinu. Kraftarnir hafa stærðina:

$$F_s = F_g \sin\theta \tag{3.5}$$

$$F_{\text{þver, ská}} = F_g \cos\theta \tag{3.6}$$

Þá er hægt að byggja upp kraftmynd, þar sem við skoðum allt frá sjónarhorni plansins.

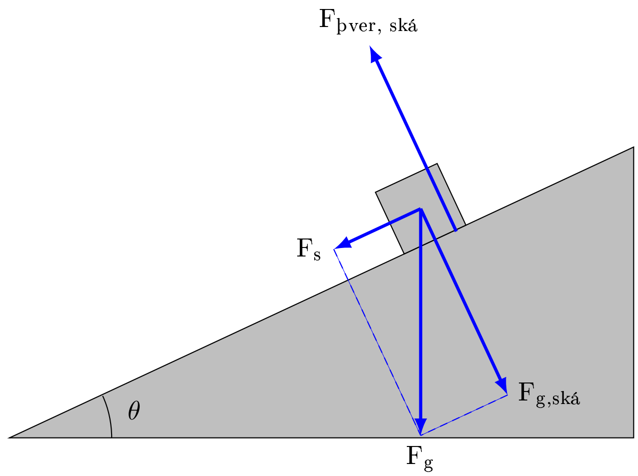
Sýnidæmi 21
Kassi er togaður upp plan með jöfnum hraða í skáplani, núningsstuðull á milli skáplans og kassa er 0,4, massi kassans er 5 kg og halli skáplans er 15°. Hver er stærð togkraftsins?

Þar sem kassinn er á jöfnum hraða þá er

$$F_{heild} = F_{tog} - F_s - F_{\text{nún}} = 0$$

sem gefur að togkrafturinn er $F_{tog} = F_s + F_{\text{nún}}$. Þar sem $F_{\text{nún}} = \mu F_{\text{þver}}$ og $F_g = mg$, þá er hægt að setja inn

$$
\begin{aligned}
F_{tog} &= F_s + F_{\text{nún}} \\
&= F_g \sin\theta + \mu F_g \cos\theta \\
&= mg \sin\theta + \mu mg \cos\theta \\
&= 5\,kg \times 9{,}8\,m/s^2 \times \sin(15^\circ) + 0{,}4 \times 5\,kg \times 9{,}8\,m/s^2 \times \cos(15^\circ) \\
&= 3{,}2\,N
\end{aligned}
$$



Mynd 3.1: Kraftar í skáplani, þar sem kassinn er áætlaður til að vera dreginn samsíða planinu þá er heildarkrafturinn þvert á planið núll. Sem þýðir $F_{\text{heild, þver}} = F_{\text{þver, ská}} - F_{g,\text{ská}} = 0$ og gefur $F_{\text{þver, ská}} = F_{g,\text{ská}}$.

> það sem er gott að muna er að þessir kraftar reiknast einungis frá sjónarhorni plansins. Þannig séð er þetta nákvæmlega sama tilfelli eins þegar við skoðum kassa sem dreginn í láréttu nema það kemur aukakraftur og þverkrafturinn er flóknari í uppsetningu.

Sýnidæmi 22

Kassi rennur niður skáplan, núningsstuðull á milli skáplans og kassa er 0,25, massi kassans er 5 kg og halli skáplansins er 15°. Hver er hröðun kassans?

Núna er enginn togkraftur en núningskrafturinn verkar upp planið sem gefur

$$F_{\text{heild}} = F_{\text{nún}} - F_s = ma$$

til að ná betri yfirsjón, þá er hægt er hægt að reikna þessa tvo krafta nú þegar

$$F_{\text{nún}} = \mu mg\cos\theta = 0{,}25 \times 5\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \times \cos(15^\circ) = 11{,}8\,\text{N}$$
$$F_s = mg\sin\theta = 5\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \times \sin(15^\circ) = 12{,}7\,\text{N}$$

og við getum fundið hröðunina með

$$a = \frac{F_{\text{nún}} - F_s}{m} = \frac{11{,}8\,\text{N} - 12{,}7\,\text{N}}{5\,\text{kg}} = -0{,}18\,\text{m/s}^2$$

neikvætt formerki táknar hér að kassinn rennur *niður* skáplanið, þar sem jákvæð hreyfistefna er skilgreind sem *upp* planið.

3.7 Skriðþungi

Skriðþungi er stærð táknar tregðu hlutars til að breyta hraða og stefnu, sem almenn regla er skriðþungi táknaður sem vigur stærð. Hins vegar verður einungis kynntur skriðþungi í einni vídd, sem þýðir að formerki mun tákna stefnu og stærð skriðþungans verður tölugildið. Í fleiri víddum þarf að nota vigra sem verður nánar skoðað í áframhaldandi köflum. Fyrst er það skilgreiningin á skriðþunga

$$\mathrm{p} = \mathrm{mv} \tag{3.7}$$

mikilvægi þessa jöfnu verður útlistað í framtíðarköflum, en til að byrja með verður skoða þau tilfelli þegar hlutir breyta skriðþunga sínum. Sem er oftast við árekstra á milli atóma, hluta, kúlna og kassa.

Það eru tvenns konar kerfi sem verða skoðuð, þegar við segjum kerfi er átt við samansafn af hlutum sem geta verkað á hvort annað. Þegar um lokað kerfi er átt við að skriðþunginn er varðveittur og hverfur ekki, opið kerfi myndi leyfa massa að hverfa (þ.e.a.s. hlut) og myndi ekki varðveita skriðþungan[2]. Það er líka hægt að tala um samanlagðan skriðþunga kerfis, þá er skriðþungi hvers hlutar samanlagður og tekið tillit til stefnu hlutarins.

$$\mathrm{p}_{\mathrm{heild}} = \sum \mathrm{p} = \text{summa allra p}$$

þá er táknið $\sum$ notað fyrir samanlagningu á öllum skriðþungum. Það sem gildir í *lokuðum kerfum* er það skriðþunginn breytist ekki. Sem gefur að

$$\mathrm{p}_{\text{heild, fyrir}} = \mathrm{p}_{\text{heild, eftir}}$$

þá er samanlagður skriðþunga fyrir og eftir atvik sá sami.

Sýnidæmi 23

Tveir bílar lenda í árekstri, bíll A er 800 kg og á 54 km/h hraða, bíll B er 1500 kg og er á 36 km/h hraða. Þegar bílarnir lenda saman getum áætlað að þeir festast saman og verði einn nýr heildarmassi. Hver verður hraði nýja massanns eftir árekstur?

Við breytum helstu stærðum í SI-einingar, 54 km/h = 15 m/s og 36 km/h = 10 m/s. Síðan er stefna bílanna mikilvæg, þar sem bílarnir koma úr *gagnstæðum* áttum þýðir að annar hefur neikvæða hreyfistefnu. Ef við áætlum að bíll A ferðast í jákvæða stefnu, þá ferðast bíll B í neikvæða stefnu. Þar sem við getum fundið heildarskriðþunga fyrir og eftir árekstur, þá er heildarskriðþungi fyrir árekstur

$$\begin{aligned}
\mathrm{p}_{\text{heild, fyrir}} &= 800\,\mathrm{kg} \times 15\,\mathrm{m/s} + 1500\,\mathrm{kg} \times (-10\,\mathrm{m/s}) \\
&= 800\,\mathrm{kg} \times 15\,\mathrm{m/s} - 1500\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m/s} \\
&= -3000\,\mathrm{N\,s}
\end{aligned}$$

[2] Opin og lokuð kerfi gilda líka um krafta og orku, en hér er einungis verið að skoða skriðþunga

þegar bílarnir lenda saman er þá er samanlagður skriðþungi eftir árekstur

$$\begin{aligned} p_{\text{heild, eftir}} &= (800\,\text{kg} + 1500\,\text{kg}) \times v \\ &= 2300\,\text{kg} \times v \end{aligned}$$

þar sem skriðþunginn varðveitist er hægt að segja

$$\begin{aligned} p_{\text{heild, fyrir}} &= p_{\text{heild, eftir}} \\ -3000\,\text{N s} &= 2300\,\text{kg} \times v \\ v &= \frac{-3000\,\text{N s}}{2300\,\text{kg}} \\ &= -1{,}3\,\text{m/s} \end{aligned}$$

hér táknar $-1{,}3\,\text{m/s}$ að nýi massinn (bíll A og B klesstir saman) stefna í sömu átt og bíll B, þ.e.a.s. í gagnstæða átt við bíl A.

Kraftar og skriðþungi eru nátengdar stærðir, nánar tiltekið, kraftur er afleiða skriðþunga. Afleiða í stærðfræðilegum skilningi og reyndar almennum líka. Sem stærð er hægt að tengja skriðþunga og kraft með

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \tag{3.8}$$

s.s. kraftur er jafn stór og breytingin í skriðþunga á tímaeiningu. Sem passar ef lögmál Newtons eru skoðuð nánar, til að breyta stefnu eða hraða hlutars þarf að beita krafti. Þá hlýtur að gilda að ef hlutur breytir skriðþunga sínum (í stefnu eða stærð) að kraftur hafi verkað á hlutinn, annars hefði allt haldist óbreytt.

Atlag

Þegar skriðþungi breytist er hægt að lýsa því sem stærð af krafti og tíma, sem stærð er atlag

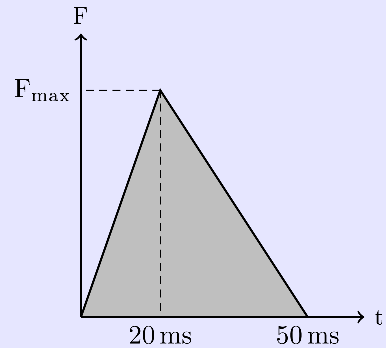
$$\Delta p = F\Delta t \tag{3.9}$$

þá er það skriðþungabreyting sem er jafngildi meðalkraftsins margafaldað með tímanum. Það er líka mikilvægt að gera grein fyrir stefnu skriðþunga, sama og með krafta, stundum vinna kraftar með eða móti hreyfingu, skriðþungi getur unnið með og móti hreyfingu hluta.

Sem hluti af þessu, þá er hægt að gera kraft-tíma gröf þar sem flatarmálið undir grafinu er jafngildi skriðþungans sem hefur verið færður á milli hlutanna. Það er sjáanlegt á stærðinni $\Delta p = F\Delta t$ að hún svipar til $\Delta s = v\Delta t$.

Sýnidæmi 24

Bolti lendir á kylfu, áður en boltinn boltinn lendir á kylfunni er hraði boltans 10 m/s og eftir að boltinn lendir kylfunni er hraði boltans er $8\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ og í gagnstæða átt. Það líða 20 ms áður en krafturinn sem boltinn verkar kylfuna verður stærstur og síðan líða 30 ms þar til kylfan er búin að verka á boltann. Massi boltans er 0,10 kg. Hvert er hámark kraftsins sem verkar á boltann?



Þar sem við þekkjum hraðan fyrir og eftir kylfuslagið er hægt að finna breytingu í skriðþunga á þessum 50 ms. Sem gefur

$$\begin{aligned}\Delta p &= p_{eftir} - p_{fyrir} \\ &= 0{,}1\,\mathrm{kg} \times 10\,\mathrm{m/s} - (-0{,}1\,\mathrm{kg} \times 8\,\mathrm{m/s}) \\ &= 0{,}9\,\mathrm{N\,s}\end{aligned}$$

og allt flatarmálið undir grafinu er jafn stórt og þessi stærð, flatarmálið er gefið sem

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{1}{2}F_{max}\Delta t_1 + \frac{1}{2}F_{max}\Delta t_2 \\ 0{,}9\,\mathrm{N\,s} &= \frac{1}{2} \times F_{max} \times 0{,}020\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \times F_{max} \times 0{,}030\,\mathrm{s} \\ 0{,}9\,\mathrm{N\,s} &= \left(\frac{1}{2} \times 0{,}020\,\mathrm{s} + \frac{1}{2} \times 0{,}030\,\mathrm{s}\right) \times F_{max} \\ 0{,}9\,\mathrm{N\,s} &= 0{,}025\,\mathrm{s} \times F_{max} \\ F_{max} &= \frac{0{,}9\,\mathrm{N\,s}}{0{,}025\,\mathrm{s}} = 36\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

sem er hámarkið á kraftinum sem hefur verkað á boltann er því í beinu samræmi við hversu lengi og hversu stór skriðþungabreytingin er.

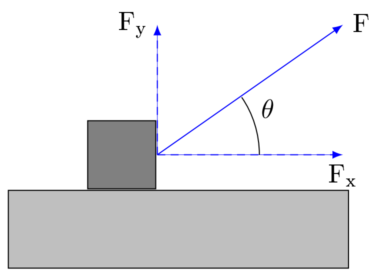
3.8 Kraftar sem vigrar

Kraftar í einni vídd eru hagnýtir, nema það er oft þörf að taka mark á fleiri en einni vídd, vídd hér er átt við hreyfistefna. Kraftur sem verkar á horni er hægt að lýsa sem tveim kröftum sem eru hornréttir á hvorn annan. Almennt getum við sagt að kraftur er gefinn í hornréttu hnitakerfi er

$$F_x = F\cos(\theta) \tag{3.10}$$
$$F_y = F\sin(\theta) \tag{3.11}$$

Þar sem F táknar stærð vigursins, F_x táknar stærð vigurs meðfram x-ás og F_y táknar stærð vigurs meðfram y-ás. Almennt er hægt að gera þetta við alla vigra, ekki einungis kraftvigra, þeir vigrar sem munu verða skoðaðir í þessum hluta eru kraftvigrar. Mynd 3.8 sýnir dæmi um hvernig kraftur er þáttum meðal ásum kerfisins.

Ef kassi er togaður áfram og togáttin er samsíða planinu sem kassi er dreginn eftir þá fer allur togkraftur í að toga kassann áfram. Hins vegar ef kassi er dreginn á horni við planið, þá er hluti af togkraftinum sem fer í að toga kassann áfram og hluti fer í að lyfta kassann upp.

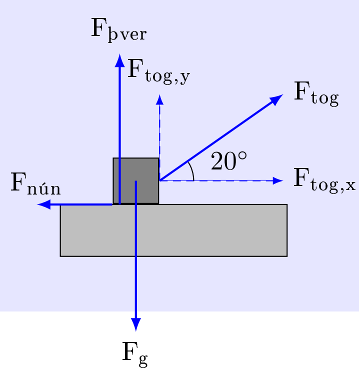


Mynd 3.2: Kassinn er togaður áfram á horni, F_x og F_y. Stikluðu bláu línurnar tákna kraftana sem eru meðfram hnitakerfinu.

Og þetta leiðir til að hægt er að deila kraftinum meðfram ásum hnitakerfisins og finna líka heildarkraftinn sem verkar á hlutinn í tveim þáttum. S.s. við getum talað um heildarkraftinn $F_{heild,x}$ og $F_{heild,y}$.

Sýnidæmi 25

Kassi er togaður áfram með 50 N krafti og á 20° horni miðað við lárétt, massi kassans er 10 kg og núningsstuðull á milli kassans og flatar er 0,25. Hver er hröðun kassans?



Fyrst er að finna hver heildarkrafturinn meðfram lóðrétta ásnum, við höfum þyngdarkraftinn sem verkar niður, þverkraftinn sem verkar upp og núna kemur viðbótar y þáttur frá togkraftinum. Heildarkrafturinn er samanlagt núll, þar sem kassinn helst á yfirborði flatarins

$$\begin{aligned}
F_{\text{heild,y}} &= F_{\text{tog,y}} + F_{\text{þver}} - F_g = 0 && \Leftrightarrow \\
F_{\text{þver}} &= F_g - F_{\text{tog,y}} && \Leftrightarrow \\
&= mg - F_{\text{tog}} \sin(\theta) \\
&= 10\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 - 50\,\text{N} \times \sin(20^\circ) \\
&= 98\,\text{N} - 17\,\text{N} = 81\,\text{N}
\end{aligned}$$

núningskrafturinn sem verkar á móti hreyfingu kassans í láréttu er

$$F_{\text{nún}} = \mu F_{\text{þver}} = 0{,}25 \times 81\,\text{N} = 20\,\text{N}$$

þá er heildarkrafturinn í láréttu er þá

$$\begin{aligned}
F_{\text{heild,x}} &= F_{\text{tog,x}} - F_{\text{nún}} = ma && \Leftrightarrow \\
F_{\text{heild,x}} &= 50\,\text{N} \times \cos(20^\circ) - 20\,\text{N} = 10\,\text{kg} \times a && \Leftrightarrow \\
F_{\text{heild,x}} &= 47\,\text{N} - 20\,\text{N} = 10\,\text{kg} \times a && \Leftrightarrow \\
F_{\text{heild,x}} &= 27\,\text{N} = 10\,\text{kg} \times a && \Leftrightarrow \\
a &= \frac{27\,\text{N}}{10\,\text{kg}} = 2{,}7\,\text{m/s}^2
\end{aligned}$$

Sem verður hröðun kassans með togkrafti á horni.

Kafli 4

Orka

Þegar kraftur verkar á hlut yfir veglengd, þá kostar það orku að færa hlutinn. Orka hefur SI-eininguna J sem er líka hægt að skrifa sem Nm eða $\mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}$. Sérstakur eiginleiki orku er að hún getur breytt mynd og færst á milli forma, sem dæmi getum við fært orku frá rafmagni yfir í hreyfingu. Það eru margvísleg form af orku sem hægt er að nýta bæði til gagns og ógagns. Hlutir geta líka móttekið og gefið frá sér orku, t.d. bíll eykur hreyfiorkuna sem hann hefur þegar hraði bílsins eykst. Það er líka hægt að tapa hreyfiorkunni við að bíllinn bremsar.

4.1 Vinna

Þegar kraftur verkar yfir vegalengd, þá kostar það orku eða leysir orku úr læðingi. Almennt er vinna til gagns ef hún er jákvæð og ógagn ef hún er neikvæð. Skilgreining á vinnu er:

$$\mathrm{W} = \mathrm{F}\Delta\mathrm{s} \tag{4.1}$$

þar sem F er krafturinn sem verkar og Δs er vegalengdin sem krafturinn verkar yfir. Þetta gildir um alla krafta, líka heildarkraft, sem verður heildarvinna. Þá er sem dæmi hægt skoða þá krafta sem verka jafnt yfir sömu vegalengd, sem dæmi er hægt að:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathrm{heild}} &= \mathrm{F}_{\mathrm{tog}} - \mathrm{F}_{\mathrm{n\acute{u}n}} \\ \mathrm{F}_{\mathrm{heild}}\Delta\mathrm{s} &= \mathrm{F}_{\mathrm{tog}}\Delta\mathrm{s} - \mathrm{F}_{\mathrm{n\acute{u}n}}\Delta\mathrm{s} \\ \mathrm{W}_{\mathrm{heild}} &= \mathrm{W}_{\mathrm{tog}} - \mathrm{W}_{\mathrm{n\acute{u}n}} \end{aligned}$$

svo lengi sem kraftarnir verka yfir sömu vegalengd. Þetta svipar til að heildarkrafts, heildarorka er samansafn af öllum orkum sem vinna til gagns eða ógagns.

Sýnidæmi 26
Kassi er dreginn 5 m yfir flöt, núningskrafturinn sem verkar á hreyfistefnunni er 10 N og er togaður áfram með 25 N krafti. Hver er heildarvinnan sem er framkvæmd?

Vinnan sem er framkvæmd af togkraftinum er

$$\mathrm{W_{tog} = F_{tog}\Delta s = 25\,N \times 5\,m = 125\,J}$$

og vinnan sem er framkvæmd af núningskraftinum er

$$\mathrm{W_{nún} = F_{nún}\Delta s = 10\,N \times 5\,m = 50\,J}$$

þá er heildarvinnan

$$\mathrm{W_{heild} = W_{tog} - W_{nún} = 125\,J - 50\,J = 75\,J}$$

þó það kostaði 125 J af orku að toga kassann áfram, þá var ekki nema 75 J sem gátu nýst í að koma kassanum áfram, afgangurinn fór í núning sem verkaði á móti hreyfingunni.

4.2 Skriðorka

Út frá skilgreiningu um vinnu er hægt að finna út samhengi á milli orku hlutar og hraða hlutar. Hlutur byrjar í kyrrstöðu ($\mathrm{v_0 = 0\,m/s}$) og nær hraðanum v með jafnri hröðun og skoðum vinnuna sem fer í að koma hlutnum áfram með krafti F:

$$\mathrm{W = F_{heild}\Delta s = ma\Delta s = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 \equiv K}$$

sem er orkan sem hluturinn hefur náð við að hraða sér upp í hraðan v. Þetta er almennt kallað skriðorka

$$K = \frac{1}{2}\mathrm{mv^2} \tag{4.2}$$

að endurtaka sömu útleiðslu nema í stað þess að byrja í kyrrstöðu þá er byrjað á hraðanum $\mathrm{v_0} \neq 0$

$$\mathrm{W = ma\Delta s = m\left(\frac{v^2 - v_0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = K - K_0 = \Delta K}$$

þá gefur breytingin í hraða vinnuna sem hefur verið framkvæmd á meðan hraðabreytingunni stóð. Þetta er kallað vinnulögmálið

$$\mathrm{W = \Delta K} \tag{4.3}$$

4.3 Stöðuorka

Þegar hlutur ferðast í þyngdarsviði verkar kraftur á hann, það er ávallt þyngdarkraftur sem verkar í átt að miðju jarðar. Vinnan sem er framkvæmd að *minnsta kosti* til að færa hlut upp hæðarmismun á jöfnum hraða er samanlagt núll, þ.e.as. $\mathrm{F_{heild}} = 0\,\mathrm{N}$ sem þýðir $\mathrm{F_{tog}} = \mathrm{F_g}$, sem gefur

$$\begin{aligned}\mathrm{W_{heild}} &= \mathrm{W_{tog}} - \mathrm{W_g} = 0\,\mathrm{J}\\ \mathrm{W_{tog}} &= \mathrm{W_g} = \mathrm{mg}\Delta\mathrm{h}\end{aligned}$$

sú vinna sem var framkvæmd við að færa hlutinn upp hæðarmismuninn $\Delta\mathrm{h}$. Ef við sleppum hlutnum, þá fellur hann í frjálsu falli og við fáum vinnuna sem var framkvæmd leyst úr læðingi. Vinnan geymist í þyngdarsviðinu sem orka, og kallast *geyminn orka* þar sem vinnan framkvæmd einungis til að breyta hæð hlutarins er endurheimtanleg. Dæmi um ógeymda orku, er núningur, vinnan sem er framkvæmd og fer í núning er ekki hægt að endurheimta á sama máta og úr þyngdarsviði. Sem gefur að orkan sem geymist í einsleitu þyngdarsviði jarðar hefur stærðina

$$\Delta\mathrm{U} = \mathrm{mg}\Delta\mathrm{h} \tag{4.4}$$

varðandi hæðarmismuninn $\Delta\mathrm{h} = \mathrm{h_2} - \mathrm{h_1}$, þá þarf að velja *núllpunkt* $(\mathrm{h_1})$ sem er upphafsstaðsetning. Þá getur lokastaðsetning $(\mathrm{h_2})$ verið fyrir neðan eða ofan upphafstaðsetningu.

Sýnidæmi 27

Lóð með massann 5 kg er togað upp 10 m hæð frá jörðu upp á húsþak. Hver er stöðuorka lóðsins séð frá jörðinni? En séð frá húsþakinu? Síðan er lóðinu sleppt, hver er stöðuorka lóðsins þá?

Séð frá jörðu, þá er stöðuorkan

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{U} &= \mathrm{mg}\Delta\mathrm{h}\\ &= 5\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times (10\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\\ &= 490\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Séð frá húsþakinu, þá er stöðuorkan

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{U} &= \mathrm{mg}\Delta\mathrm{h}\\ &= 5\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times (0\,\mathrm{m})\\ &= 0\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Hins vegar þegar lóðið dettur niður

$$\begin{aligned}\Delta\mathrm{U} &= \mathrm{mg}\Delta\mathrm{h}\\ &= 5\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times (-10\,\mathrm{m} - 0\,\mathrm{m})\\ &= -490\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

Þetta þýðir í stuttu máli að lóðið eykur alltaf innri orku sína í formi stöðuorku þegar lóðið fer gagnstætt þyngdarsviði og þegar lóðið fylgir stefnu þyngdarsviðsins þá tapar lóðið innri orkunni sinni sem var geyminn í því.

4.4 Vélræn orka

Hlutur á hreyfingu hefur bæði skriðorku og stöðuorku, samanlagt eru þessar stærðir vélræn orka hlutars. Sem er

$$E = U + K \tag{4.5}$$

vélræn orka varðveitist ef það eru *engir* núningskraftar eða aðrir kraftar en þeir sem eru gefnir af þyngdarsviði. Sem gefur mjög hentuga leið til að vita hver hraði hlutar ætti að vera ef orkan er varðveitt, samtímis er hægt að fá upplýsingar um tapið af orku sem fer í núning.

Sýnidæmi 28
Kúla er í 15 m hæð yfir jörðu, kúlan er 10 kg. Hver er stöðuorka kúlunar? Ef kúlan er látin falla, hversu mikil verður skriðorka og hraði kúlunnar við lendingu?

Hæðarmismunurinn við jörðu er $\Delta h = 15\,\mathrm{m}$, stöðuorkan er gefin til að vera

$$\Delta U = mg\Delta h = 10\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 15\,\mathrm{m} = 1470\,\mathrm{J}$$

þar sem enginn núningur er á meðan kúlan fellur (áætlum hverfandi loftmótstaða) þá er ekkert tap á vélrænni orku sem þýðir að öll stöðuorkan breytist í skriðorku. Sem gefur að $\Delta E = 0$, þeas. engin breyting sem gefur að

$$\Delta U = K = 1470\,\mathrm{J}$$

sem er hægt að umskrifa til

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \sqrt{\frac{2 \times 1470\,\mathrm{J}}{10\,\mathrm{kg}}} = 17{,}1\,\mathrm{m/s}$$

sem er hraði kúlunnar rétt áður fyrir lendingu.

Sýnidæmi 29
Bíll hefur upphafshraðan 5 m/s við toppinn á 40 m háa brekku, bíllinn rennur vélvana (s.s. á þess að mótorinn hjálpar) niður brekkuna og hefur hraðan 20 m/s við botninn á brekkunni. Massi bílsins er 1000 kg og samanlagt rennur bíllinn vegalengdina 70 m. Hver er breytingin í vélrænni orku bílsins? Hversu mikið af orkunni fer í annað en hreyfiorku eða stöðuorku?

Hver er meðalkrafturinn sem verkar á móti hreyfingu bílsins?

Hæðarmismunurinn við jörðu er $\Delta h = 40\,\mathrm{m}$, og upphafshraðinn er $5\,\mathrm{m/s}$ áður en bíllinn rennur niður brekkuna sem þýðir að vélræn orka bílsins áður en hann rennur niður er

$$\begin{aligned} E_{\text{fyrir}} &= mg\Delta h + \frac{1}{2}m\,(v_1)^2 \\ &= 1000\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 40\,\mathrm{m} + \frac{1}{2} \times 1000\,\mathrm{kg} \times (5\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 405\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

við botninn á brekkunni er vélræn orka bílsins

$$\begin{aligned} E_{\text{eftir}} &= mg\Delta h + \frac{1}{2}m\,(v_2)^2 \\ &= 1000\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 0\,\mathrm{m} + \frac{1}{2} \times 1000\,\mathrm{kg} \times (20\,\mathrm{m/s})^2 \\ &= 200\,\mathrm{kJ} \end{aligned}$$

þá er breytingin í vélrænni orku

$$\Delta E = E_{\text{eftir}} - E_{\text{fyrir}} = 200\,\mathrm{kJ} - 405\,\mathrm{kJ} = -205\,\mathrm{kJ}$$

sem er tapið af vélrænni orku, orkan hefur ekki varðveist á leiðinni niður og megnið (hátt í 50%) hefur farið að reyna yfirvinna núning og mótstöðukrafta. Ef vélræn orka varðveitist ekki þá er kraftur sem er einhverskonar mótstöðukraftur við hreyfingu bílsins. Magnið af orku sem hefur verið gefið úr vélrænni orku er mikið og hefur farið í vinnu af mótstöðukröftum

$$W = -F_{\text{mót}}\Delta s \Leftrightarrow F_{\text{mót}} = -\frac{W}{\Delta s} = -\frac{-205\,\mathrm{kJ}}{70\,\mathrm{m}} = -2{,}93\,\mathrm{kN}$$

Sýnidæmi 30

Mótor togar $250\,\mathrm{kg}$ lyftu upp með kraftinum $2{,}5\,\mathrm{kN}$, skinnurnar sem lyftan fer eftir mynda núningskraft uppá $250\,\mathrm{N}$. Lyftan ferðast upp hæðina $25\,\mathrm{m}$, hversu mikla orku þarf mótorinn að láta frá sér til að lyftan kemst upp?

Orkan sem lyfta þarf að fá í form stöðuorku er

$$U = mgh = 250\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 25\,\mathrm{m} = 61\,250\,\mathrm{J}$$

vinnan sem núningur framkvæmir gagnsætt mótori er

$$W = 250\,\mathrm{N} \times 25\,\mathrm{m} = 6250\,\mathrm{J}$$

þá er heildarvinna jöfn orkunni sem fór í að toga lyftuna upp

$$\begin{aligned}
\mathrm{W}_{\mathrm{heild}} &= \mathrm{W}_{\mathrm{tog}} - \mathrm{W}_{\mathrm{nún}} \\
\mathrm{W}_{\mathrm{tog}} &= \mathrm{W}_{\mathrm{heild}} + \mathrm{W}_{\mathrm{nún}} \\
&= 61\,250\,\mathrm{J} + 6250\,\mathrm{J} \\
&= 67\,500\,\mathrm{J}
\end{aligned}$$

Þá þarf mótorinn að gefa minnst þetta magn af orku til þess að lyftan komist upp 25 m.

4.5 Afl

Afl er einfaldlega orka á tímaeiningu, eða í meira hefðbundnu máli, Joule á sekúndu J/s sem hefur SI-eininguna Watt sem er W. Skilgreining á afli er

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{\Delta \mathrm{t}} \tag{4.6}$$

almennt er W vinnan sem var framkvæmd á tímabilinu Δt. Sem er magnið af orku notað deilt tímanum sem það tók. Sambærilegt form af því að segja að hraði sé hversu langt var ferðast deilt með tímanum sem það tók.

Sýnidæmi 31
Pumpa sem dælir vatni upp úr brunni sem er 10 m djúpur nær að dæla 5 m^3 á 3 min. Hver er afl dælunnar?

Eðlismassinn fyrir vatn er 1000 kg/m^3, sem þýðir að samanlagður massi vatnsins er 5×10^3 kg, orkan sem fór lágmark í að færa vatnið upp um 10 m er

$$\mathrm{W} = \mathrm{mg}\Delta\mathrm{h} = 5 \times 10^3\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 10\,\mathrm{m} = 490\,\mathrm{kJ}$$

þá er aflið sem dælan gaf á meðan hún dældi vatninu

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{W}}{\Delta\mathrm{t}} = \frac{490\,000\,\mathrm{J}}{180\,\mathrm{s}} = 2{,}7\,\mathrm{kW}$$

Nýtni afls

Það er hægt að bera saman hversu vel aflið er notað til þess sem áætlað er, hversu góð nýtingin er táknuð með stærðinni η. Þetta svipar til núningsstuðulsins, er prósentuhlutfallið sem er hægt að nýta. Nýtni er gefin við

$$\eta = \frac{\mathrm{P}_{\mathrm{út}}}{\mathrm{P}_{\mathrm{inn}}} \tag{4.7}$$

þá er átt við að P_{inn} er aflið gefið og $P_{\mathrm{út}}$ er aflið sem fór í að áætlað verk. Ber að athuga að nýtni liggur á milli 0 og 1, þ.e.a.s. 0% og 100% nýtingu.

Sýnidæmi 32

Mótor sem dregur upp lyftu með farþegum er skráður til að hafa aflið 8 kW, samanlagður massi lyftu og farþega er 800 kg og mótorinn dregur lyftuna upp 12 m á 15 s. Hver er nýtni mótorsinns

Aflið sem fer í að hífa lyftuna séð út frá vélrænni orku er

$$P_{\mathrm{út}} = \frac{\mathrm{mg}\Delta \mathrm{h}}{\Delta \mathrm{t}} = \frac{800\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s^2} \times 12\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}} = 6272\,\mathrm{W} \approx 6{,}3\,\mathrm{kW}$$

sem gefur að nýtni mótorsinns til að hífa lyftuna upp er

$$\eta = \frac{6{,}3\,\mathrm{kW}}{8\,\mathrm{kW}} = 0{,}79$$

þ.e.a.s. það fer 79% af aflinu frá mótorinnum í að toga lyftuna upp á meðan 21% af aflinu fer mótstöðukrafta eða núning.

Kafli 5

Þrýstingur

Þegar kraftur verkar yfir flatarmál kallast það þrýstingur, sem hefur eininguna Pascal eða Pa. Sem er líka hægt að skrifa sem $\mathrm{N/m^2}$, eldri stærðir eru bar og torr.

5.1 Þverkraftur

Ef við látum kraft verka á flöt er krafturinn sem verkar beint út frá fletinum kallaður þverkraftur, þá er stefna kraftsins hornrétt á flötinn. Krafturinn sem er notaður til að skilgreina hvað þrýstingur er

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{F_{þver}}}{\mathrm{A}} \tag{5.1}$$

Sýnidæmi 33

Maður með massann 80 kg stendur á plötu sem er 0,5 m á breidd og 0,2 m á lengd. Hver er þrýstingurinn sem botninn á plötunni upplifir vegna mannsins?

Þyngdarkrafturinn vegna mannsins er

$$\mathrm{F_g = mg = 80\,kg \times 9{,}8\,m/s^2 = 784\,N}$$

þar sem krafturinn verkar hornrétt á plötuna og það er kraftjafnvægi, þá er $\mathrm{F_g = F_{þver}}$ sem gefur

$$\mathrm{P} = \frac{784\,\mathrm{N}}{0{,}5\,\mathrm{m} \times 0{,}2\,\mathrm{m}} = 7840\,\mathrm{Pa}$$

5.2 Þyngdarþrýstingur

Þegar maður fer dýpra í vatni eykst massinn sem er fyrir ofan mann, þ.e.a.s. það áhvílir meiri massi eftir því dýpra er farið. Þá er hægt að meta kraftinn með

$$F_g = \rho V g = \rho A h g$$

með innsetningu í þrýsting

$$P = \frac{\rho A h g}{A} = \rho h g$$

einfaldað gefur

$$P = \rho h g \tag{5.2}$$

það sem er gott að muna er að þessi þrýstingur kemur frá öllum áttum, þá er heildarkrafturinn núll. Það er einmitt vegna lögmáls Pascals, að vökvi dreifist jafnt undir sama þrýstingi. Almennt getum við sagt að þrýstingurinn sem við upplifum er líka þrýstingurinn frá andrúmsloftinu ásamt þrýstingnum frá vökvanum. Sem þýðir

$$P_{heild} = P + P_0$$

þar sem P_0 er þrýstingur við yfirborð jarðar.

Lögmál Arkimedesar

Það er hægt að leiða út lögmálið út frá grunnforsendum, lögmálið er gefið sem

$$F_{upp} = \rho V g \tag{5.3}$$

þar sem V er rúmmálið af hlutnum sem er dýft ofan í vökva og ρ er eðlismassi vökvans. Þá er hægt að leiða lögmálið út frá því að byrja skoða kraftana sem verka á sívalning í vökva, heildarkrafturinn er

$$\begin{aligned}
F_{heild} &= F_{botn} - F_{top} \\
&= P_{botn} A - P_{top} A \\
&= \rho h_{botn} g A - \rho h_{top} g A \\
&= \rho g A \left(h_{botn} - h_{top}\right) \\
&= \rho g A \Delta h \\
&= \rho V g
\end{aligned}$$

fyrir sívalning gildir að $A\Delta h = V$. Sem gefur þegar lögmál Arkimedes er jafngildi þessa, þ.e.a.s. $F_{heild} = F_{upp}$.

> **Sýnidæmi 34**
> Bolti með rúmmálið $0{,}03\,\mathrm{m}^3$ er haldið neðansjávar svo að hann er kyrr, boltinn hefur massan $0{,}100\,\mathrm{kg}$. Hversu stóran kraft þarf til þess halda boltanum niðri?

Kraftastefnan er valin til að vera jákvæð þegar krafturinn stefnir niður. Heildarkrafturinn sem verkar á boltann er

$$F_{\text{heild}} = F_{\text{upp}} - F_{\text{g}} - F_{\text{ýta}}$$

þar sem boltinn er í kyrrstöðu þá er heildarkrafturinn núll

$$\begin{aligned} 0\,\text{N} &= F_{\text{upp}} - F_{\text{g}} - F_{\text{ýta}} \\ F_{\text{ýta}} &= F_{\text{upp}} - F_{\text{g}} \end{aligned}$$

krafturinn sem verkar vegna uppdrifs er

$$\begin{aligned} F_{\text{upp}} &= \rho V g \\ &= 1000\,\text{kg/m}^3 \times 0{,}03\,\text{m}^3 \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \\ &= 294\,\text{N} \end{aligned}$$

og þyngdarkrafturinn

$$\begin{aligned} F_{\text{g}} &= mg \\ &= 0{,}100\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \\ &= 0{,}98\,\text{N} \end{aligned}$$

þá myndi ýtikrafturinn vera

$$\begin{aligned} F_{\text{ýta}} &= F_{\text{upp}} - F_{\text{g}} \\ &= 294\,\text{N} - 0{,}98\,\text{N} \\ &= 293{,}02\,\text{N} \end{aligned}$$

Hluti II

Aflfræði

Kafli 6

Kasthreyfing

Í fyrri köflum hefur verið skoðað hvernig hlutir falla í frjálsu falli, núna er markmiðið að skoða hvernig hlutur hagar sér í skákasti. Það er fyrst að skoða hvernig krafturinn sem verkar á hlut er í frjálsu falli. Hann er

$$\bar{F} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

s.s. það er enginn kraftur sem reynir að toga hlutinn áfram á meðan hann er í skákastinu. Fyrir svona hlut er heildarkrafturinn einungis þyngdarkraftur, sem gefur

$$\bar{F}_{\mathrm{heild}} = m \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = m\bar{a} \Leftrightarrow \bar{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Þá er hægt að skrifa hraða hlutarins meðfram sitthvorum ásnum til að vera

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y - gt \end{pmatrix}$$

þar sem v_x og v_y eru upphafshraðar meðfram x og y ásum hnitakerfisins. Áframhaldið er að vita hver er staðsetning hlutarins eftir ákveðinn langan tíma. Sem gefur að

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix}$$

s.s. út kemur að staðsetning hlutarins er einungis háð tíma sem hefur liðið frá upphafspunkti. Í meira almennu formi er hægt að bæta við færslu frá upphafstaðsetningu. Sem gefur

$$\bar{s} = \begin{pmatrix} v_x t \\ v_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} + \bar{s}_0 \tag{6.1}$$

þar sem $\bar{s}_0$ er færsla frá upphafsstaðsetningu hnitakerfisins. Síðan er hægt að setja upp ýmsar tilraunir sem fiina upphafshraða og stefnu hlutarins í kastihreyfingunni. Líka er hægt að skrifa sama vigraform sem sett af jöfnum

$$x(t) = s_x + v_x t \tag{6.2}$$

$$y(t) = s_y + v_y t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{6.3}$$

þar sem s_x og s_y tákna færslu frá upphafstaðsetningu meðfram sitthvorum ás.

Sýnidæmi 35
Kúlu er skotið fram af borði með lárétta hraðanum $6\frac{m}{s}$, hæð borðsins yfir gólfinu er $1,2$m. Hversu langt lendir kúlan frá borðinu?

Til að byrja með þá er nauðsyn finna tímann sem tekur fyrir kúluna að lenda á gólfinu til að finna hversu langt hún lendir frá borðinu. Fyrir y-ásinn þá er

$$y(t) = 0\frac{m}{s} \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}gt^2$$

og þegar kúlan lendir á gólfinu er staðsetningin meðfram y-ásnum

$$-1,2m = -\frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,2m)}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot (1,2m)}{9,8\frac{m}{s^2}}} = 0,49s$$

þá er staðsetningin meðfram x-ásnum er

$$x(0,49s) = 6\frac{m}{s} \cdot 0,49s = 2,94m$$

Það er hægt að umskrifa fyrri jöfnur sem fall af stærð upphafshraða v og hornsins θ sem hlutnum er skotið af stað með. Þá eru jöfnurnar sem eru nýttar (miðað við núll færslu frá núllpunkt)

$$x(t) = v_x t$$
$$y(t) = v_y t - \frac{1}{2}gt^2$$

hægt er að einangra tímann til að vera

$$x(t) = x = v_x t \Leftrightarrow t = \frac{x}{v_x}$$

innsetning gefur

$$x\left(\frac{x}{v_x}\right) = v_x \frac{x}{v_x}$$
$$y\left(\frac{x}{v_x}\right) = v_y \frac{x}{v_x} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_x}\right)^2$$

þá dettur jafnan sem lýsir hreyfingu meðfram x-ásnum út en jafnan sem er meðfram y-ásnum er

$$
\begin{aligned}
y &= v_y \frac{x}{v_x} - \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_x}\right)^2 \\
y &= \frac{v_y}{v_x} x - \frac{g}{2}\frac{x^2}{v_x^2} \\
y &= \frac{v\sin(\theta)}{v\cos(\theta)} x - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2(\theta)} \\
y &= \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2(\theta)}
\end{aligned}
$$

sem gefur að hlutur sem hefur upphafshraða og horn hefur ferilinn með x sem breytur fyrir fallið y(x)

$$
y(x) = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2(\theta)} \tag{6.4}
$$

Þá er hægt að búa til sýnidæmi úr þessu

Sýnidæmi 36
Kúlu er kastað með hraðanum $25\frac{m}{s}$ á horninu 30°, það er 3m hár veggur sem er 40m langt í burtu frá kaststaðsetningunni. Kemst kúlan yfir vegginn?

Þar sem við þekkjum hraða, horn og vegalengd er það fljótt mál að finna hæðina sem kúlan er

$$
\begin{aligned}
y(40m) &= \tan(30°)\cdot 40m - \frac{9,8\frac{m}{s^2}\cdot(40m)^2}{2\left(25\frac{m}{s}\right)^2\cos^2(30°)} \\
&= 23,5m
\end{aligned}
$$

sem er talsvert hærra en veggurinn sem er 3m hár. Þá kemst kúlan yfir.

6.1 Hámarks kastvegalengd

Markmiðið hér að sýna hvað er hornið sem gefur mestu vegalengdina fyrir ákveðinn upphafshraða.

$$
y(x) = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2(\theta)}
$$

til að einfalda uppsetninguna þá er bara skoðað þegar hluturinn lendir aftur á upphafspunkt vegalengdina x frá núllpunkti

$$
0 = \tan(\theta)x - \frac{gx^2}{2v^2\cos^2(\theta)}
$$

sem er hægt að umskrifa sem

$$
\begin{aligned}
0 &= \tan(\theta)\mathrm{x} - \frac{\mathrm{g}\mathrm{x}^2}{2\mathrm{v}^2\cos^2(\theta)} \\
\frac{\mathrm{g}\mathrm{x}^2}{2\mathrm{v}^2\cos^2(\theta)} &= \tan(\theta)\mathrm{x} \\
\frac{\mathrm{g}\mathrm{x}}{2\mathrm{v}^2\cos^2(\theta)} &= \tan(\theta) \\
\frac{\mathrm{g}\mathrm{x}}{2\mathrm{v}^2\cos^2(\theta)} &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \\
\frac{\mathrm{g}\mathrm{x}}{2\mathrm{v}^2} &= \sin(\theta)\cos(\theta) \\
\mathrm{g}\mathrm{x} &= 2\mathrm{v}^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
\mathrm{x} &= \frac{2\mathrm{v}^2\sin(\theta)\cos(\theta)}{\mathrm{g}}
\end{aligned}
$$

sem í fljótu bragði virðist ekki vera sérstaklega hagnýtin lýsing á hámarksvegalengdinni. Hins vegar er hægt að umskrifa hornaföllin sem

$$2\sin(\theta)\cos(\theta) = \sin(2\theta)$$

sem einfaldar fyrri jöfnu til að vera

$$\mathrm{x} = \frac{\mathrm{v}^2\sin(2\theta)}{\mathrm{g}} \tag{6.5}$$

þá er hámarksvegalengd náð þegar breytingin á x staðsetningu er núll á meðan hornið breytist, sem gefur

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{d\mathrm{x}}{d\theta} \\
0 &= \frac{d}{d\theta}\left(\frac{\mathrm{v}^2\sin(2\theta)}{\mathrm{g}}\right) \\
0 &= \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{g}}\frac{d\sin(2\theta)}{d\theta} \\
0 &= \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{g}}2\cos(2\theta) \\
0 &= \frac{2\mathrm{v}^2}{\mathrm{g}}\cos(2\theta)
\end{aligned}
$$

sem getur bara verið jafnt og núll ef

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{2\mathrm{v}^2}{\mathrm{g}}\cos(2\cdot 45^\circ) \\
0 &= \frac{2\mathrm{v}^2}{\mathrm{g}}\cdot 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

s.s. við hornið 45° uppfyllist skilyrðið að $\frac{dx}{d\theta}$ er núll. Stærðin $\frac{dx}{d\theta}$ segir hver er breytingin á staðsetningu miðað við breytingu á horni. Á einhverju horni verður sú stærð jafnt og núll, þar sem hún er jákvæð á meðan við aukum vegalengdina sem hluturinn kemst og síðan aftur neikvæð þegar hornið verður of stórt og við minnkum vegalengdina sem hluturinn kemst.

Kafli 7

Hringhreyfing

Þegar hlutir hreyfast í hringhreyfingu þarf að taka mið af því hvernig hnitakerfið er uppsett. Í hefðbundnu rétthyrndu hnitakerfi þarf að lýsa hreyfingunni með vigrum og í tvívídd. Hringhreyfing er líka eitt af þeim svæðum þar sem skiptir máli hvar upphafsstaðsetning hnitakerfsins er. Þetta þýðir að við getum upplifað sömu aðstæður sem kraftar verka á hluti á nokkra mismunandi og oft furðulega máta. Sem hluti af því þarf að skilgreina tregðukerfi og heildarkraftinn uppá nýtt.

7.1 Tregðukerfi

Þegar við erum í lyftu fáum við upplifun að það er kraftur sem togar okkur niður, á þvert við tilfinninguna okkar þá er reyndar enginn kraftur sem togar okkur niður. Heldur er lyftan að ýta okkur upp og við erum að upplifa kraftinn sem kemur við að breyta hraða okkar. Séð utan frá, þá er lyftan að ýta okkur upp, síðan er gagn kraftur á milli okkar og lyftunar, þá er heildarkrafturinn jákvæður og stefnir upp. S.s. skrifað í kröftum

$$\begin{aligned} F_{\text{heild}} &= F_{\text{tog, lyfta}} - F_{\text{g, lyfta}} - F_{\text{g, persóna}} \\ (m_{\text{lyfta}} + m_{\text{persóna}})a &= F_{\text{tog, lyfta}} - F_{\text{g, lyfta}} - F_{\text{g, persóna}} \end{aligned}$$

þar sem $F_{\text{heild, lyfta}}$ er krafturinn sem lyftan getur lyft sér með án þess að hafa farþega. Ef við skoðum kraftinn sem verkar á okkur í lyftunni

$$\begin{aligned} F_{\text{heild, persóna}} &= F_{\text{þver}} - F_{\text{g}} \\ m_{\text{persóna}}a &= F_{\text{þver}} - F_{\text{g}} \\ F_{\text{þver}} &= m_{\text{persóna}}a + F_{\text{g}} \end{aligned}$$

þverkrafturinn $F_{\text{þver}}$ er stærri þyngdarkrafturinn, og þverkraftur er gagnkraftur sem verkar gagnstætt á lyftubotninn. Þar sem persónan helst á gólfi lyftunar, þá er gagnkrafturinn sem verkar á lyftuna jafn stór og gagnstæður þverkrafts persónunnar. Þá er heildkrafturinn fyrir lyftuna staka

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}_{\text{heild, lyfta}} &= \mathrm{F}_{\text{tog, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{g, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{þver}} \\
\mathrm{m}_{\text{lyfta}}\mathrm{a} &= \mathrm{F}_{\text{tog, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{g, lyfta}} - (\mathrm{m}_{\text{persóna}}\mathrm{a} + \mathrm{F}_{\mathrm{g}}) \\
\mathrm{m}_{\text{lyfta}}\mathrm{a} &= \mathrm{F}_{\text{tog, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{g, lyfta}} - \mathrm{m}_{\text{persóna}}\mathrm{a} - \mathrm{F}_{\mathrm{g}} \\
\mathrm{m}_{\text{lyfta}}\mathrm{a} + \mathrm{m}_{\text{persóna}}\mathrm{a} &= \mathrm{F}_{\text{tog, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{g, lyfta}} - \mathrm{F}_{\mathrm{g}} \\
(\mathrm{m}_{\text{lyfta}} + \mathrm{m}_{\text{persóna}})\mathrm{a} &= \mathrm{F}_{\text{tog, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{g, lyfta}} - \mathrm{F}_{\mathrm{g}} \\
\mathrm{F}_{\text{heild, allt}} &= \mathrm{F}_{\text{tog, lyfta}} - \mathrm{F}_{\text{g, lyfta}} - \mathrm{F}_{\mathrm{g}}
\end{aligned}$$

sem sagt, þó að við blöndum saman tveim „kerfum", þá er ennþá sama niðurstaða eins og það væri fyrir utan lyftuna.

Þegar við erum í hringhreyfingu þá er heildarkrafturinn sem verkar á hlut með stefnuna í átt að miðju hringsins. Annars væri hluturinn að fara beint meðfram þeirri stefnu sem hraði hlutarins hefur á hringferlinum. S.s. þá er heildarkrafturinn sem verkar á hlut er

$$\bar{\mathrm{F}}_{\text{heild, hring}} = \bar{\mathrm{F}}_{\text{mið}} \tag{7.1}$$

þá er líka mikilvægt að gera sér grein fyrir því að heildarkrafturinn er líka

$$\bar{\mathrm{F}}_{\text{heild, hring}} = \bar{\mathrm{F}}_{\text{mið}} = \mathrm{m}\bar{\mathrm{a}}_{\text{mið}} = \sum \text{summa krafta á hlut}$$

sem leiðir af sér að hröðunin sem hluturinn hefur verður að stefna í átt að miðju hringferlsins. Þá þarf einmitt að finna út hvernig vigurstærðin $\bar{\mathrm{a}}$ lítur út, sem er kölluð miðsóknarhröðun.

7.2 Miðsóknarhröðun

Í þessum hluta er markmiðið að sýna stærð miðsóknarhröðunnar er gefin til að vera

$$\mathrm{a}_{\text{mið}} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{r}} \tag{7.2}$$

fyrst til að komast að þessari niðurstöðu þarf að skilgreina hringferil

$$\bar{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{r}\cos(\theta(\mathrm{t})) \\ \mathrm{r}\sin(\theta(\mathrm{t})) \end{pmatrix}$$

þar sem radíus hringsins er r og hornið er $\theta(\mathrm{t})$ en hins vegar er hornið sem hluturinn ferðast meðfram hringferilunum er háð tíma, nánar tiltekið

$$\theta = \omega \mathrm{t} + \theta_0$$

þar sem ω er hornhraði, þeas hversu margar gráður/radíanar hornið breytist með á hverri sekúndu, upphafshornið θ_0 er venjulega núll. Þá verður staðsetningin $\bar{\mathrm{r}}$ meðfram hringferilunum

$$\bar{\mathrm{r}} = \begin{pmatrix} \mathrm{r}\cos(\omega\mathrm{t}) \\ \mathrm{r}\sin(\omega\mathrm{t}) \end{pmatrix}$$

og hraði er $\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$, sem gefur

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix}$$

þá er stærð hraðavigursins

$$\begin{aligned} \|\bar{v}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-r\omega \sin(\omega t))^2 + (r\omega \cos(\omega t))^2} \\ &= r\omega \sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} \\ &= r\omega \sqrt{1} \\ &= r\omega \end{aligned}$$

sem er hægt að skrifa sem

$$v = \|\bar{v}\| = r\omega$$

þetta er einungis stærð vigursins, stefnan er gefin við $\bar{v}$. Hröðun er skilgreind sem breyting hraða á móti tíma, eða $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$. Þá er hröðun sem vigurstærð

$$\bar{v} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

þá er stærð hraðavigursins

$$\begin{aligned} \|\bar{a}_{\text{mið}}\| &= \left\| \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sqrt{(-r\omega^2 \cos(\omega t)))^2 + (-r\omega^2 \sin(\omega t))^2} \\ &= r\omega^2 \sqrt{\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)} \\ &= r\omega^2 \sqrt{1} \\ &= r\omega^2 \end{aligned}$$

sem er hægt að skrifa sem

$$a_{\text{mið}} = \|\bar{a}_{\text{mið}}\| = r\omega^2$$

og þar sem hornhraði er $\omega = \frac{v}{r}$ þá er

$$a_{\text{mið}} = r\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{v^2}{r}$$

sem sýnir að stærð miðsóknarhröðunar er það sem var fyrst haldið fram. Stefna miðsóknarhröðunnar er hinsvegar alltaf í átt að miðju hringsins, sem er reyndar ástæðan fyrir nafninu *miðsóknar*hröðun.

Tíðni og hringhreyfing

Hornhraði er stærð sem er skilgreind til að vera radíanar á sekúndu, en tíðni er skilgreind til að vera snúningar á sekúndu. Þá er samhengið á milli tíðni og hornahraða

$$\omega = 2\pi \mathrm{f} \tag{7.3}$$

þá er hægt að umskrifa miðsóknarhröðun á marga máta

$$\begin{aligned} \mathrm{a_{mið}} &= \frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} \\ &= \mathrm{r}\omega^2 \\ &= 4\pi^2\mathrm{f}^2\mathrm{r} \end{aligned}$$

og umferðartíminn fyrir hlut í hringhreyfingu er

$$\mathrm{T} = \frac{2\pi}{\omega}$$

umferðartími er tíminn sem það tekur hlutinn að fara *einn hring*. T.d. er umferðartími jarðar $\approx$ 1ár.

7.3 Miðsóknarkraftur

Þar sem heildarkrafturinn sem verkar á hlut þarf að vera jafn miðsóknarkrafti, þá er

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{F_{mið}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} \tag{7.4}$$

sem er hægt að setja upp á mismunandi máta. Þá verður heildarkrafturinn séð frá tregðukerfi sem er utan hringhreyfingar. Það verður vandamál að setja upp alla möguleika sem geta lýst kröftunum á meðan hringhreyfingu stendur. Sýnidæmi eru hentug til að lýsa heildakröftum og miðsóknarkrafti.

Sýnidæmi 37

Kúla er í hringhreyfingu í láréttu plani, massi kúlunnar er 2 kg og lengd taugarinnar $1,2$m. Taugin (bandið) sem heldur kúlunni þolir mest 20N kraft áður en taugin slitnar. Hver er hámarkshraði kúlunnar áður en taugin slitnar?

Heildarkrafturinn sem verkar á hlutinn er

$$\mathrm{F_{heild}} = \mathrm{F_{mið}} = \mathrm{m}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} = \mathrm{F_{taug}}$$

sem er hægt leysa sem

$$\begin{aligned}
m\frac{v^2}{r} &= F_{\text{taug}} \\
2\ \text{kg} \cdot \frac{v^2}{1,2\text{m}} &= 20\text{N} \\
v^2 &= \frac{1,2\text{m} \cdot 20\text{N}}{2\ \text{kg}} \\
v &= \sqrt{\frac{1,2\text{m} \cdot 20\text{N}}{2\ \text{kg}}} \\
&= 3,46\frac{\text{m}}{\text{s}}
\end{aligned}$$

sem er hámarkshraði áður en bandið slitnar.

Sýnidæmi 38
Kúla er í hringhreyfingu í lóðréttu plani, massi kúlunnar er 2 kg, lengd taugarinnar 1,2m og hraði kúlunnar er $5\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Hver er togkrafturinn í tauginn þegar kúlan er í toppnum eða botni hringhreyfinginnar?

Heildarkraftuinn hefur núna líka þyngdarkraft sem verkar á taugina við toppinn

$$\begin{aligned}
F_{\text{heild}} &= F_{\text{taug}} + F_g \\
m\frac{v^2}{r} &= F_{\text{taug}} + mg \\
2\ \text{kg} \cdot \frac{\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,2\text{m}} &= F_{\text{taug}} + 2\ \text{kg} \cdot 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
41,7\text{N} &= F_{\text{taug}} + 19,6\text{N} \\
F_{\text{taug}} &= 41,7\text{N} - 19,6\text{N} \\
&= 22,1\text{N}
\end{aligned}$$

aftur á móti við botninn á hringferlinum þá er heildarkrafturinn

$$\begin{aligned}
F_{\text{heild}} &= F_{\text{taug}} - F_g \\
m\frac{v^2}{r} &= F_{\text{taug}} - mg \\
2\ \text{kg} \cdot \frac{\left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,2\text{m}} &= F_{\text{taug}} - 2\ \text{kg} \cdot 9,8\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\
41,7\text{N} &= F_{\text{taug}} - 19,6\text{N} \\
F_{\text{taug}} &= 41,7\text{N} + 19,6\text{N} \\
&= 61,3\text{N}
\end{aligned}$$

togkrafturinn verður þá að vera stærri við botninn en við toppinn á hringferlinum.

Sýnidæmi 39
Kúla er í hringhreyfingu í lóðréttu plani, lengd taugarinnar $1,2\mathrm{m}$. Hver er minnsti hraði sem hægt er að sleppa með til að halda kúlunni í hringhreyfingu?

Til að finna minnsta hraðan þá þarf að finna nákvæmlega þann punkt sem miðsóknarkraftur er ekki undir áhrifum togkrafts taugarinnar og einungis þyngdarkraftur hefur áhrif á hlutinn. S.s. $F_{\mathrm{taug}} = 0$ og í toppstöðu getur þyngdarkrafturinn búið til kraft sem verkar á hlutinn og sér til þess að hann heldur hringhreyfingu

$$\begin{aligned}
F_{\mathrm{heild}} &= F_g \\
m\frac{v^2}{r} &= mg \\
\frac{v^2}{r} &= g \\
\frac{v^2}{1,2\mathrm{m}} &= 9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\
v^2 &= 9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1,2\mathrm{m} \\
\sqrt{v^2} &= \sqrt{9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1,2\mathrm{m}} \\
v &= \sqrt{9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1,2\mathrm{m}} \\
&= 3,43\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

Sýnidæmi 40
Lóð hengur í bandi, massi lóðsins er 5 kg. Hver er krafturinn í bandinu þegar lóðið er dregið upp í $90°$ horn upp og látið falla?

Það er hægt að finna hraðan sem lóðið hefur þegar það er komið í lægstu stöðu eftir að því er sleppt frá $90°$ horninu. Í hæðstu stöðu er lóðið í r hæð, síðan dettur lóðið og öll stöðuorka hlutarins er færð í skriðorku

$$\begin{aligned} \mathrm{mgr} &= \frac{1}{2}\mathrm{mv}^2 \\ \mathrm{gr} &= \frac{1}{2}\mathrm{v}^2 \\ \mathrm{v}^2 &= 2\mathrm{gr} \end{aligned}$$

heildkrafturinn á bandið og lóðið við botninn á hringhreyfingu lóðsins er

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathrm{heild}} &= \mathrm{F}_{\mathrm{taug}} - \mathrm{F}_{\mathrm{g}} \\ \mathrm{m}\frac{\mathrm{v}^2}{\mathrm{r}} &= \mathrm{F}_{\mathrm{taug}} - \mathrm{mg} \\ \mathrm{m}\frac{2\mathrm{gr}}{\mathrm{r}} &= \mathrm{F}_{\mathrm{taug}} - \mathrm{mg} \\ 2\mathrm{mg} &= \mathrm{F}_{\mathrm{taug}} - \mathrm{mg} \\ \mathrm{F}_{\mathrm{taug}} &= 2\mathrm{mg} + \mathrm{mg} \\ &= 3\mathrm{mg} \\ &= 3 \cdot 5\ \mathrm{kg} \cdot 9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \\ &= 147\mathrm{N} \end{aligned}$$

sem er krafturinn sem taugin upplifir.

Kafli 8

Þyngdarlögmál Newtons

Hlutir með massa verka á hvorn annan með þyngdarkrafti, þar á meðal verka plánetur á sólina og sólin á plánetur. Nánar tiltekið massar verka jafnt á hvorn annan. Það er ekki ennþá búið að útskýra afhverju massar geta verkað með þyngdarkrafti en það er búið að lýsa því *hvernig* mjög vel. Eitt af efnisgreinum Newtons var að lýsa því hvernig plánetur hreyfast undir áhrifum þyngdarkrafta. Sem hluti af þeirri lýsingu þarf að koma með fasta sem er kallaður þyngdarfastinn G. Stærðin sem Newton kom er

$$\mathrm{F} = \mathrm{G}\frac{\mathrm{mM}}{\mathrm{r}^2} \tag{8.1}$$

þeas. krafturinn milli tveggja massa breytist í öfugri ferningsstærð vegalengdarinnar. Það er mikið til að byrja með, en þetta er óvenju saklaus jafna þegar uppi er staðið.

Sýnidæmi 41
Tveir loftsteinar eru á floti í geimnum, annar hefur massan 2 tonn og hinn hefur massan 4 tonn, hver er þyngdarkrafturinn á milli þeirra þegar þeir eru 3 km frá hvor öðrum?

Þá er krafturinn á milli steinana

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \mathrm{G}\frac{\mathrm{mM}}{\mathrm{r}^2} \\
&= 6,670 \cdot 10^{-11}\frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot \frac{2000\ \mathrm{kg} \cdot 3000\ \mathrm{kg}}{(3000\mathrm{m})^2} \\
&= 4,45 \cdot 10^{-11}\mathrm{N}
\end{aligned}$$

Sýnidæmi 42
Hver er krafturinn sem jörðin verkar á 50 kg persónu við yfirborð jarðar? Radíus jarðar er $6.37 \cdot 10^6$m og massi jarðar er $6 \cdot 10^{24}$m.

Þá er krafturinn jörðin verkar með

$$\begin{aligned} F &= G\frac{mM}{r^2} \\ &= 6,670 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{50 \text{ kg} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}}{(6,731 \cdot 10^6 m)^2} \\ &= 490N \end{aligned}$$

8.1 Stefna þyngdarkrafts

Lögmál Newtons gefur til um stærð þyngdarkraftsins en hins vegar kemur ekki með lýsingu á rúmlegri uppsetningu. Þá er ekki mikið sagt annað en að krafturinn aðdráttarkraftur. Þá verkar þyngdarkraftur á báða hlutina og báðir togast að hvor öðrum. Til að lýsa því er hægt að bæta við vigur formi af þyngdarlögmálinu

$$\bar{F} = G\frac{mM}{|r|^2}\hat{r} \tag{8.2}$$

þar sem $\hat{r}$ er stefnuvigur af stærðinni 1 sem miðar alltaf í átt að gagnstæðum massa og $|r|$ er vegalengdin á milli massanna. Síðan er hægt að hafa marga massa sem verka á einn hlut, þá þarf fara út í nokkuð langa útreikininga.

Sýnidæmi 43
Á milli tveggja loftsteina er massi m sem er 20 kg, loftsteinn A hefur massann $M_A = 3000$ kg og loftsteinn B hefur massann $M_B = 2000$ kg. Vegalengdin á milli A og B er $r_A = 1500$m og $r_B = 2000$m. Hver er krafturinn sem verkar á massan m

Þá er krafturinn á milli loftsteina A og massa

$$\begin{aligned} F_{A,m} &= G\frac{mM}{r^2} \\ &= 6,670 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{20 \text{ kg} \cdot 3000 \text{ kg}}{(1500m)^2} \\ &= 1,78 \cdot 10^{-12}N \end{aligned}$$

og á milli loftsteins B og massans

$$\begin{aligned} F_{B,m} &= G\frac{mM}{r^2} \\ &= 6,670 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{20\text{ kg} \cdot 2000\text{ kg}}{(2000m)^2} \\ &= 6,67 \cdot 10^{-13}N \end{aligned}$$

þá er heildarkrafturin sem verkar á massan

$$\begin{aligned} F_{heild} &= -F_{A,m} + F_{B,m} \\ &= -1,78 \cdot 10^{-12}N + 6,67 \cdot 10^{-13}N \\ &= -1,11 \cdot 10^{-12}N \end{aligned}$$

neikvætt formerki hér táknar að krafturinn sem verkar á massan stefni á loftstein A.

Sýnidæmi 44

Þrír massar (A, B og C) eru allir í láréttu plani, og mynda jafnhliða þríhyrning. Hliðar þríhyrningins eru 5 km, massar A og B eru 4000 kg á meðan massi C er 6000 kg. Hver er stefna og stærð kraftsins sem verkar á massa C?

Valið er að setja massan C í toppinn á þríhyrningnum, þá er heildarkrafturinn sem verkar á C

$$\bar{F}_C = \bar{F}_{A,C} + \bar{F}_{B,C}$$

þyngdarkrafturinn á milli A og C er

$$\begin{aligned} \bar{F}_{A,C} &= 6,670 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{4000\text{ kg} \cdot 6000\text{ kg}}{|5000m|^2}\hat{r}_{A,C} \\ &= 6,40 \cdot 10^{-11}N \cdot \begin{bmatrix} -\cos(30°) \\ -\sin(30°) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5,54 \cdot 10^{-11}N \\ -3,20 \cdot 10^{-11}N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

þyngdarkrafturinn á milli B og C er

$$\begin{aligned} \bar{F}_{B,C} &= 6,670 \cdot 10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2} \cdot \frac{4000\text{ kg} \cdot 6000\text{ kg}}{|5000m|^2}\hat{r}_{B,C} \\ &= \begin{bmatrix} 5,54 \cdot 10^{-11}N \\ -3,20 \cdot 10^{-11}N \end{bmatrix} \end{aligned}$$

sem gefur heildarkraftinn

$$\begin{aligned}
\bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{C}} &= \bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{A,C}} + \bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{B,C}} \\
&= \begin{bmatrix} -5,54 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \\ -3,20 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5,54 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \\ -3,20 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -5,54 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} + 5,54 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \\ -3,20 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} - 3,20 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0\mathrm{N} \\ -6,40 \cdot 10^{-11}\mathrm{N} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

sem þýðir að stærð kraftsins er

$$\left|\bar{\mathrm{F}}_{\mathrm{C}}\right| = \sqrt{(0\mathrm{N})^2 + (-6,40 \cdot 10^{-11}\mathrm{N})^2} = 6,40 \cdot 10^{-11}\mathrm{N}$$

8.2 Þyngdarsvið

Skilgreining á þyngdarsviði er kraftur per kílógramm, við yfirborð jarðar svarar það til þyngdarhröðunar

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{m}} = \mathrm{G}\frac{\mathrm{M}}{|\mathrm{r}|^2}\hat{\mathrm{r}} \tag{8.3}$$

einingin fyrir þyngdarsvið er hröðun, en hins vegar þykir það betra að nota $\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}$ til að hafa lýsingu sem tengist kraftinum sem verkar á massann. Nánar tiltekið er massinn kallaður prufumassi, sem hugtak er það massi sem verður fyrir verkun annara massa án þess að breyta skipulagi kerfisins. Seinna meir mun hugtakið prufuhleðsla koma á sama máta fram til lýsa krafti per hleðslu sem verkar á hlut.

Annar eiginleiki er að hægt er að leggja saman þyngdarsvið á sama máta eins og hægt er að leggja saman krafta sem verka á einn hlut. Í einvíðu samhengi þá er það fremur fljótgert en þegar komið er upp í tvær eða fleiri rúmvíddir verður reiknivinnan talsvert þyngri.

8.3 Orka í þyngdarsviði

Aukin í stöðuorku er einfaldlega heildin af kraftinum yfir þá vegalengd sem hluturinn færist yfir. Almennt er hægt að segja vinnan sé

$$\mathrm{W} = \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \mathrm{F}dr$$

eða gefur að

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W} &= \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \mathrm{G}\frac{\mathrm{mM}}{\mathrm{r}^2} d\mathrm{r} \\
&= \mathrm{GmM} \int_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \frac{d\mathrm{r}}{\mathrm{r}^2} \\
&= \mathrm{GmM} \left[-\frac{1}{\mathrm{r}} \right]_{\mathrm{r}_1}^{\mathrm{r}_2} \\
&= \mathrm{GmM} \left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2} \right)
\end{aligned}
$$

til að lýsa því hversu mikla orku þarf til að losa sig algjörlega undan áhrifum þyngdarsviðs frá hlut þá er hægt að láta byrjunar punkti vera óendanlega langt frá upphafspunt og síðan verður massinn m færður nær og nær þar til hann nær stöðunni r sem gefur

$$
\begin{aligned}
\mathrm{W} &= \mathrm{GmM} \left(\frac{1}{\mathrm{r}_1} - \frac{1}{\mathrm{r}_2} \right) \\
&= \mathrm{GmM} \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\mathrm{r}} \right) \\
&\approx -\frac{\mathrm{GmM}}{\mathrm{r}}
\end{aligned}
$$

neikvætt formerki hérna táknar að massinn hefur tapað orkunni í fallinu en hins vegar þá myndi það kost nákvæmlega jafn mikið af orku til að komast óendanlega langt frá stöðunni r. Hugmyndin verður þá að miðað við núllpunkt sem er óendanlega langt frá er hægt að finna hlutfallslega breytingu í stöðuorku miðað við óendanlega punktinn. Tap hér, er tap af stöðuorku hlutarins.

Sýnidæmi 45

Hver er stöðuorka hlutars sem er 400 km yfir jörðu og hefur massann 200 kg? Áætla má að hluturinn hafi byrjað við yfirborð jarðar.

Þá er aukningin í stöðuorku miðað við núll punkt í óendanlegu

$$\begin{aligned}
\Delta \mathrm{U} &= \mathrm{U}_2 - \mathrm{U}_1 \\
&= -\frac{\mathrm{GmM}}{\mathrm{r}_2} + \frac{\mathrm{GmM}}{\mathrm{r}_1} \\
&= -\frac{\mathrm{GmM}}{\mathrm{r}_2} + \frac{\mathrm{GmM}}{\mathrm{r}_1} \\
&= \mathrm{GmM}\left(-\frac{1}{\mathrm{r}_2} + \frac{1}{\mathrm{r}_1}\right) \\
&= 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{kg}^2} \cdot 200\ \mathrm{kg} \cdot 6,0 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg} \\
&\ldots \cdot \left(-\frac{1}{6,77 \cdot 10^6 \mathrm{m}} + \frac{1}{6,37 \cdot 10^6 \mathrm{m}}\right) \\
&= 7,42 \cdot 10^8 \mathrm{J}
\end{aligned}$$

Það er mun heppilegra að vinna núllpunkt í óendanlegu einmitt uppá að geta skoða breytingar án þess að miða við miðju þyngdarsviðins.

Kafli 9

Bylgjuhreyfing

Bylgjuhreyfing er þegar hlutur hreyfist með reglulegri tíðni, t.d. sveiflur á pendúl og útbreiðsla á bylgju í plani. Þá er hægt að nota svipaðar jöfnur og gert er í kaflanum um hringhreyfingu. Föll sínus og kósínus henta mjög vel til þess. Samt er nauðsyn að koma með nýja fasta og stærðir sem lýsa hegðun bylgjunnar.

Þá er einhver bylgja með hámarks útslag frá miðstöðu (A) og hornhraða (ω). Þá er klassískri bylgju oft lýst með fallinu

$$x(t) = A\cos(\omega t)$$

þetta er ein leið til að lýsa slíku falli, það er til nokkrar útgáfur sem er notaðar eftir ýmsum aðstæðum. Það eru nokkur hugtök sem bylgjum er ljáð í téð

Ölduhæð, sveifluvídd Sem er hámarkið sem bylgjan nær frá miðju sinni. Sem er mesta útslag sem hlutur í hreyfingu getur leyft sér frá punkti sem oft nefndur miðstaða.

Bylgjuhraði Sá hraði sem bylgja breiðir út sér með

Bylgjulengd Lengin sem bylgja nær að breiða úr sér í einni sveiflu

Hornhraði, horntíðni Er fasti sem gefur upplýsingar um hversu marga radíana í ferli bylgjunnar eru farnir á hverri sekúndu.

Tíðni, sveiflutíðni Er fasti sem gefur upplýsingar umgangar í ferli bylgjunnar eru farnir á hverri sekúndu. Svipað og fara heilan hring í hringferlinum.

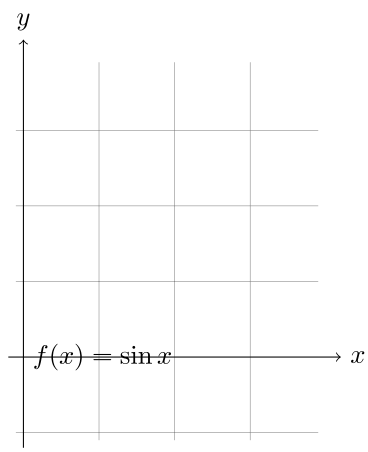
Avoid this list, seemes to defeat its own purpose

9.1 Sveiflur gorma

Finish current picture without using pgf functions

Þegar gormur sveiflast umhverfis miðstöðu, þá togar hann hlutinn aftur í átt að miðstöðu. Þetta þýðir í kraftasamhengi að

$$F_{\text{gormur}} = kx \tag{9.1}$$



Mynd 9.1: Mynd af helstu stærðum sem eru tengd bylgjuhreyfingu

og ber að nefna stefna gormkraftsins er alltaf í átt að miðstöðu, þetta er einungis stærð gormkrafts. Þá er hægt að leika sér smáveigis með slíkar jöfnu, það er hægt að umskrifa til

$$\mathrm{ma} = -\mathrm{kx}$$

neikvætt formerki hérna táknar að krafturinn beinist að miðstöðu. Við vitum að hröðun er breyting á hraða yfir tíma, og hraði er breyting á staðsetningu yfir tíma. Sem gefur

$$\begin{aligned} \mathrm{ma(t)} &= -\mathrm{kx(t)} \\ \mathrm{m}\frac{d\mathrm{v(t)}}{d\mathrm{t}} &= -\mathrm{kx(t)} \\ \mathrm{m}\frac{d^2\mathrm{x(t)}}{d\mathrm{t}^2} &= -\mathrm{kx(t)} \end{aligned}$$

sem er hægt að umskrifa til

$$\frac{d^2\mathrm{x(t)}}{d\mathrm{t}^2} = -\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\mathrm{x(t)}$$

þetta er diffurjafna sem hefur sett af lausnum sem eru samsetning af sínus eða kósínus lausnum. Hins vegar þá var í byrjun kaflans þá kom ágiskun á hvað gæti verið heppileg lýsing á bylgju sem er

$$\mathrm{x(t)} = \mathrm{A}\cos(\omega \mathrm{t})$$

þá er innsetning í diffurjöfnu

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathrm{x(t)}}{d\mathrm{t}^2} &= \frac{d}{d\mathrm{t}}\left(\frac{d\mathrm{x(t)})}{d\mathrm{t}}\right)\\ &= \frac{d}{d\mathrm{t}}\left(-\mathrm{A}\omega\sin\left(\omega\mathrm{t}\right)\right)\\ &= -\mathrm{A}\omega^2\cos\left(\omega\mathrm{t}\right)\\ &= -\omega^2\mathrm{x(t)}\end{aligned}$$

og þá er diffurjafnan líka

$$\begin{aligned}-\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\mathrm{x} &= -\omega^2\mathrm{x(t)}\\ \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}} &= \omega^2\\ \omega^2 &= \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}\\ \omega &= \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}}\end{aligned}$$

sem er áhugaverð niðurstaða, núna er hægt að finna hornatíðni hlutars á enda gorms með einungis upplýsingar um massa og kraftstuðull gorms

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} \tag{9.2}$$

sem er líka hægt að umskrifa til að vera sveiflutími

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{k}}} \tag{9.3}$$

þá eru komnar sett af breytum sem geta lýst furðulega miklu varðandi innihaldi sveifluhreyfingar, án þess að taka sérstakt tilfelli af gormi fyrir.

Sýnidæmi 46

Gormur liggur í láréttu og er fest við massa sem er 5 kg, kraftstuðull gormsins er $140\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$, hver er horntíðni, sveiflutíðni og sveiflutími gormsins?

Þar sem gefið er bæði kraftstuðull og massir þá er horntíðni

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{k}}{\mathrm{m}}} = \sqrt{\frac{140\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}}{5\ \mathrm{kg}}} = 5,29\frac{1}{\mathrm{s}}$$

síðan er hægt að nota til að finna tíðni með

$$\mathrm{f} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{5,29\frac{1}{\mathrm{s}}}{2\pi} = 0,842\mathrm{Hz}$$

> og sveiflutíma með
>
> $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,842\text{Hz}} = 1,19\text{s}$$

Sem stærð er hægt að nýta horntíðni á margvíslegan máta, t.d. er sveiflutíðni (ω) stærð sem getur lýst hegðun efna. Þá eru atóm með bæði fráhrindi- og aðdráttarkrafta, sem er oft lýst með eiginleikum gormsins sem líkan af hegðun þeirra. Þá er titringur af atómum með tíðni á stærðargráðunni 10^{13}Hz. Sem myndi gefa fyrir massa koparatóms

$$\begin{aligned} 2\pi f &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\ 2\pi \cdot 10^{13}\text{Hz} &= \sqrt{\frac{k}{1.05 \cdot 10^{-25}\ \text{kg}}} \\ k &= \left(2\pi \cdot 10^{13}\text{Hz}\right) \cdot 1.05 \cdot 10^{-25}\ \text{kg} \\ &= 41600\frac{N}{m} \end{aligned}$$

sem er há tala, en í raun sýnir af hverju málmar eru sterkir og hafa góða leiðni fyrir hita. Líka er hraði hljóðs margfalt hærri í málmum en í lofti, nákvæmlega vegna stífleika „gormana".

Orka sveifluhreyfingar

Þar sem við fengum heppilega lýsingu á því hvernig bylgja hagar sér við góða ágiskun í fyrri köflum, þá er hægt nota hana til að sýna að orkan sem sveiflan hefur er föst, óbreytt. Fyrst þarf að finna stöðuorku gormsins, almennt gildir að vinnan framkvæmd sem verður að stöðuorku er

$$U = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

eða með krafti gorms verður það

$$U = \int_0^{x_2} kx\,dx = \left[\frac{1}{2}kx^2\right]_0^{x_2} = \frac{1}{2}kx_2^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

en áður er áfram haldið, þá er góð hugmynd að hafa fundið hraðan sem massinn á enda gormsins hefur

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin(\omega t)$$

og vélræn orka gormsins er

$$\begin{aligned}
E &= K + U \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 \\
&= \frac{1}{2}m\left(-A\omega \sin(\omega t)\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(A\cos(\omega t)\right)^2 \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t)
\end{aligned}$$

þá er hægt að nýta $\omega^2 = \frac{k}{m}$ til að

$$\begin{aligned}
E &= K + U \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + \frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2(\omega t) \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right) \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega^2(1) \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega^2
\end{aligned}$$

Sem þýðir að heildarorka gorms er ávalt föst stærð, óháð því hvar á ferli sveiflunar gormurinn er, sem gefur

$$E = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2 \tag{9.4}$$

Sýnidæmi 47
Gormur hefur kraftstuðullinn $160\frac{N}{m}$ og sveifluvíddin er $0,2m$. Hver er heildarorka gormsins?

Þá er orkan

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}\cdot 160\frac{N}{m}\cdot(0,2)^2 = 3,2J$$

Sýnidæmi 48
Gormur með massann 2 kg er teygður $0,1m$ frá miðstöðu og gefinn hraðinn $1,2\frac{m}{s}$ frá miðstöðu. Kraftstuðull gormsins er $160\frac{N}{m}$. Hver er sveifluvídd gormsins?

Heildarorkan er

$$\begin{aligned}
E &= K + U \\
&= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx(t)^2 \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2\ \mathrm{kg}\cdot\left(1,2\frac{m}{s}\right)^2 + \frac{1}{2}\cdot 160\frac{N}{m}\cdot(0,1m)^2 \\
&= 1,44J + 0,8J \\
&= 2,24J
\end{aligned}$$

þar sem heildarorkan er alltaf sú sama, þá er hægt að setja orkuna sem er reiknuð á einum stað í sveifluhreyfingunni til að vera jöfn heildarorkunni fundin í jöfnu 9.4

$$\begin{aligned}
2,24J &= \frac{1}{2}kA^2 \\
\frac{2,24J}{\frac{1}{2}k} &= A^2 \\
A^2 &= \frac{2,24J}{\frac{1}{2}\cdot 160\frac{N}{m}} \\
A^2 &= 0.028m^2 \\
A &= \sqrt{0.028m^2} \\
&= 0.167m = 16,7\ \mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Sem er sveifluvíddin.

9.2 Pendúll

Það er hægt að umskrifa þann kraft sem pendúll verður fyrir vegna þyngdarkrafts til að vera með sömu hegðun og gormur. Hins vegar er það einungis hægt fyrir sveiflur sem eru ekki sérlega stórar. Þetta er nálgun á hegðun en virkar furðulega vel. Þá er krafturinn sem verkar á massa í spotta venjulega

Add a picture showing the approximation

$$F_{\text{pendúll}} = F_g \sin\theta$$

hins vegar með nálgun verður

$$F_{\text{pendúll}} = F_g \frac{x}{l}$$

og á sama máta og með gorminn verður

$$\begin{aligned} \mathrm{ma} &= -\frac{\mathrm{F_g}}{\mathrm{l}}\mathrm{x} \\ \mathrm{ma} &= -\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{l}}\mathrm{x} \\ \mathrm{a} &= -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\mathrm{x} \\ \frac{d^2\mathrm{x}}{d\mathrm{t}^2} &= -\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}\mathrm{x} \end{aligned}$$

sem þýðir að fyrir pendúl að

$$\omega = \sqrt{\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{l}}} \tag{9.5}$$

og gefur að sveiflutíminn er

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{g}}} \tag{9.6}$$

Sýnidæmi 49
Kúla hengur í 2m löngu bandi, hver er horntíðni og sveiflutími kúlunnar?

Þá er horntíðni

$$\omega = \sqrt{\frac{9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}{2\mathrm{m}}} = 2,21\frac{1}{\mathrm{s}}$$

og sveiflutíman

$$\mathrm{T} = 2\pi\sqrt{\frac{2\mathrm{m}}{9,8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}} = 2,84\mathrm{s}$$

9.3 Einfaldar bylgjur

Bylgjur hafa getuna til að breiða úr sér með ákveðnum hraða, þá er sagt að hún hafi útbreiðsluhraða. Sem hluti af því þarf að skilgreina bylgjulengd λ og sveiflutíma T. Bylgjulengd er veglengdin sem bylgjan ferðast til að fara frá einum bylgjutoppi til annars [1] og sveiflutíminn er tíminn sem tekur að fara frá byrjunarstöðu til útslags báðum megin við miðstöðu og aftur til byrjunarstöðu. Bylgjuhraði er skilgreindur til að vera

$$\nu = \frac{\lambda}{\mathrm{T}} = \lambda \mathrm{f} \tag{9.7}$$

[1] Það er réttar að segja það er vegalengdin sem bylgjan ferðast á einni sveiflu sem er 2π í radíönum

Add a picture for the wave, adding wavelength and period symbols

Einföldum bylgjum er oft lýst á tvö máta, sem langbylgjur og sem þverbylgjur. Langbylgjur hafa bylgjueiginleika *samsíða* útbreiðslustefnu á meðan þverbylgjur hafa bylgjueiginleika *þvert* á útbreiðslustefnu. Sem dæmi eru vatnsbylgjur þverbylgjur og hljóðbylgjur eru langbylgjur.

Add a picture for the longditudional and transversive waves

Samliðun bylgja

Bylgjur hafa þann eiginleika að geta tvinnast saman, sem leiðir af sér aukningu eða minnkun af útslagi bylgjunnar. Gagnleg samliðun er þegar tvær (eða fleiri) bylgjur auka útslagið og eyðandi samliðun er þegar tvær (eða fleiri) ná að draga úr útslagi hvors annars. Dæmi um slíkt er gefið of í myndrænu formi en í jöfnuformi þá er það

$$\begin{aligned} \mathrm{x_{AB}(t)} &= \mathrm{x_A(t) + x_B(t)} \\ &= \mathrm{A_A \cos(\omega t + \phi_A) + A_B \cos(\omega t + \phi_B)} \end{aligned}$$

sem er í það minnsta lagi ekki álítanlegt form, hérna er ϕ_A og ϕ_B fasahliðrun fyrir sitthvora bylgjuna. Í meira daglegu tali þá er fasahliðrun svipað og breyta tímasetningunni sem bylgjan leggur afstað. Til að búa til eyðandi samliðun þarf ákveðið skilyrði að koma upp, bylgjurnar þurfa að vera úr fasa (s.s. byrja ekki á sama tíma) og með jafnstórt hámarks útslag. Til að sjá slíkt er hægt að hafa $\phi_\mathrm{AB} = \phi_\mathrm{A} - \phi_\mathrm{B} = 180^\circ$ og $\mathrm{A_A = A_B}$ sem gefur

$$\begin{aligned} \mathrm{x_{AB}(t)} &= \mathrm{x_A(t) + x_B(t)} \\ &= \mathrm{A_A \cos(\omega t) + A_A \cos(\omega t + 180^\circ)} \\ &= \mathrm{A_A \cos(\omega t) - A_A \cos(\omega t)} \\ &= 0 \end{aligned}$$

sem gefur að bylgjur sem er úr fasa með 180° og með sömu sveifluvídd hafa lengur ekki áhrif á nokkuð. Sem þykir dálítið sérstakt en í raun er þetta kunnulegt fyrirbrigði úr daglegu lífi þar sem við getum stundum heyrt hljóð „hverfa”.

Add picture for interference, showing constructive and destructive interference

9.4 Doppler áhrif

Doppler áhrif koma þegar bylgjulengdin breytist vegna þess að sendandi bylgjunar er á hreyfingu. Þá er hægt að finna hver nýja bylgjulengdin verður sem hlustandi heyrir. Það þarf einmitt að gera greinamun á því hver sendir og móttekur bylgjuna. Daglega er þetta kunnugt þegar bílar keyra frammhjá manni, t.d. sírenur hljóma „dýpri” þegar sjúkrabíll keyrir frá manni en „skrækari” þegar sjúkrabíll keyrir að manni. Þá þarf að koma með skilgreiningar á því hver er sendandi og hver er móttakandi.

$$\nu = \lambda_{\mathrm{send}} \mathrm{f}_{\mathrm{send}}$$
$$\nu = \lambda_{\mathrm{mót}} \mathrm{f}_{\mathrm{mót}}$$

hraði sendanda hefur áhrif á útbreiðslu með

$$\lambda_{\mathrm{send}} = (\nu \pm \mathrm{v}_{\mathrm{send}})\mathrm{T}_{\mathrm{mót}}$$

þegar sendandi stefnir að móttakanda þá dregst hraðinn frá og þegar sendandi stefnir frá móttakanda bætist hraðinn við. Sem gefur að tíðni sendana er

$$\begin{aligned} \mathrm{f}_{\mathrm{send}} &= \frac{\nu}{(\nu \pm \mathrm{v}_{\mathrm{send}})\mathrm{T}_{\mathrm{mót}}} \\ &= \frac{\nu}{\nu \pm \mathrm{v}_{\mathrm{send}}} \mathrm{f}_{\mathrm{mót}} \end{aligned}$$

þetta er sértilfelli þegar annar aðilinn er kyrr og hinn er á hreyfingu, þá er ν hraði bylgjunar í miðli [2] Sem gefur að tíðnin sem sendandin hefur er

$$\mathrm{f}_{\mathrm{send}} = \frac{\nu}{\nu \pm \mathrm{v}_{\mathrm{send}}} \mathrm{f}_{\mathrm{mót}} \tag{9.8}$$

Add a picture for a observer that is static while the transmitter is in motion, showing the change in wavelength

hins vegar er hægt að láta móttakanda vera líka á ferð, þá verður uppsetningin svipuð nema að bylgjulengd móttakanda breytist líka eins og hjá sendanda.

$$\lambda_{\mathrm{mót}} = (\nu \pm \mathrm{v}_{\mathrm{mót}})\mathrm{T}_{\mathrm{mót}}$$

[2] Miðill getur t.d. verið loft sem hljóðið berst með eða sjálft tómarúmið sem ljósið berst með.

Kafli 10

Bylgjuhreyfing í fleti

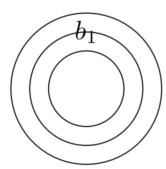
Þegar bylgja breiðir úr getur færst út í allar áttir, í fyrri köflum hefur bara verið skoðað tilfellið þegar bylgja breiðist út í einni vídd. Núna er hægt að taka fyrir þegar bylgja breiðist út tveim víddum, s.s. fleti. Þá er hægt lýsa nokkrum gerðum af bylgjuútbreiðslum, sem hringjum og línum.

10.1 Bylgjustafn

Bylgjustafn er þegar við táknum með línu hvar bylgjutoppur er í fletinum. S.s meðfram línunni er toppurinn á bylgju sem er að breiðast út, á meðan tíminn líður mun línan ferðast áfram og hugsanlega breyta lögun.

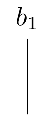
Bylgjustafnar geta verkað saman eða á móti hvor öðrum, það er hægt að hafa til dæmis 2 bylgjustafna sem verka með eða gegn hvor öðrum. Þá er samliðun líka gild fyrir bylgjur í fleti jafnt til bylgna í einni vídd. Þá geta bylgjustafnar komið í mörgum formum, hér verður einungis tekið fyrir kúlubylgjur og línubylgjur.

Kúlurbylgjur byrja í punkti og dreifast síðan jafnt í allar, tíðni bylgjustafnsins myndi þá vera háð fjölda skipta á sekúndu sem punkturinn myndar nýjan bylgjustafn. Eftirfarandi mynd sýnir tvær tímamyndir, þar sem b_1 táknar fyrsta bylgjustafn og b_2 táknar annan bylgjustafn, b_3 þriðja, o.s.f. Þannig er hægt að sýna staðsetningu stafnsins



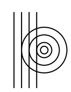
Þá myndast nýr stafn í hvert sinn, hinsvegar þegar tími líður ferðast stafninn áfram og er hraði bylgjunar kallaður bylgjuhraði eða oftar útbreiðsluhraði bylgjunar, s.s. hversu hratt bylgjan breiðir úr sér. Mælieiningin sem er er notuð er mæld í metrum per sekúndu eða $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Þegar bylgjustafn er bein lína er hægt að ímynda sér sett af línum sem myndast og ferðast síðan fram á við



Bylgjustafn og brot

Þegar flatur bylgjustafn lendir á littlu gati getur hann umbreyst frá því að vera flatur stafn yfir í að verða kúlustafn. Í raun er stafninn ennþá „flatur" í fyrri skilgreiningi, bara í stað þess að vilja fara beint áfram er það styttra að ferðast meðfram bogaferli en að þvinga sig beint áfram. Ef opið er haft nægilega breitt þá myndast beinn stafn að hluta til en ef opið er of lítið getur enginn stafn myndast.



til að prufa slíkt í raunveruleikanum er kjörið að prufa slíkt með vatni í bala. Með því að dýfa littlum pinna í vatnið er hægt að skapa kúlustafn og með því að dýfa þunnum ferköntuðum hlut í vatn er hægt að skapa flatbylgjur.

10.2 Lögmál Huygens

Hægt er að nýta lögmál Huygens til að finna bylgjustafn frá við mismunandi punktbrot og línubrotl.

10.3 Ljósbognun

10.4 Samliðun í föstum efnum

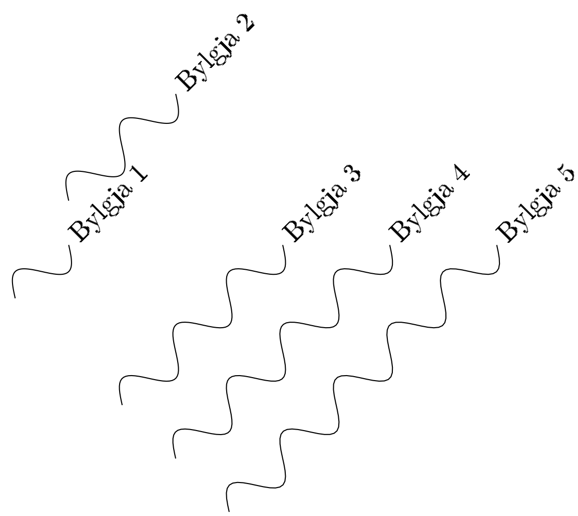
Bylgjur sem ferðast í gegnum efni geta náð að mynda samliðun með reglulegu millibili. Þá er hægt að ímynda sér að bylgjustafn sem lendir þvert á sett af atómum og myndar kúlubylgju í stað fyrir þverbylgju. Frá hverju atómi kemur kúlubylgja sem myndar gagnlega og eyðandi samliðun við hin atómin. Sem stærð er hægt að setja það í jöfnuform á hvaða hornum samliðunum á sér stað. Gagnleg samliðun gerist við

$$\mathrm{n}\lambda_\mathrm{n} = \mathrm{d}\sin\varphi_\mathrm{n} \tag{10.1}$$

fyrir eyðandi samliðun þá er jafan

$$\frac{\mathrm{n}}{2}\lambda_\mathrm{n} = \mathrm{d}\sin\phi_\mathrm{n} \tag{10.2}$$

sönnunin á þessu er áhugaverð blanda af hornafræði og bylgjuútbreiðslu. Fyrir gagnlega samliðun þá er bara hægt að tala um algjöra samliðun þegar bylgjutopparnir eru eina bylgjulengd frá hvor öðrum.

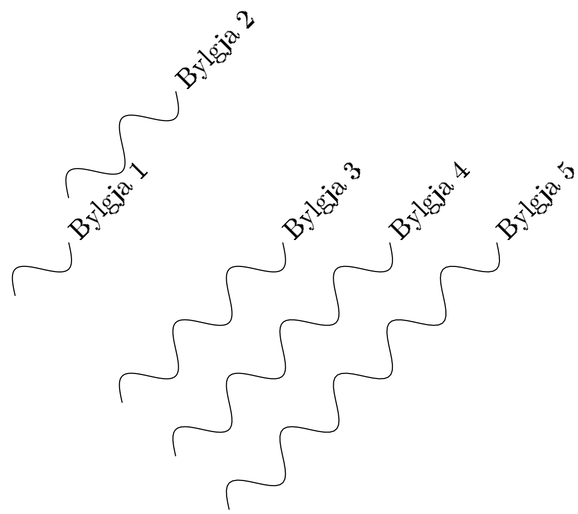


10.5 Lögmál Braggs

Þegar bylgjustafn (oft röntgen geislar) lendir á atómum myndast gagnleg samliðun sem er eins og hefðbundin samliðun, nema hvað það kemur auka tala með sem tvölfaldar bylgjulengdina á stafninum. Úr því kemur lögmál Braggs sem er einungis hægt að nota fyrir þunnar himnur.

$$n\lambda_n = 2d \sin \varphi_n \tag{10.3}$$

til að sanna þetta lögmál er hægt að búa til teikningu sem sýnir hvaðan þessi tvöföldun kemur


Bylgja 2
Bylgja 1
Bylgja 3
Bylgja 4
Bylgja 5

Hluti III

Varmafræði

Kafli 11

Hiti

Hitastig er lýsing á hreyfingu atóma, eftir því sem hitastigið er hærra þá er hreyfingin meiri. Í daglegu tali er oftast notast við Celcíus skalann (°C), hins vegar finnast margar leiðir til að kvaðra hita. Hiti er mælieining sem er miðuð við einhvern kvaðra, t.d. er Celcíus kvarðinn miðaður við bræðslumarks vatns. Farenheit kvarðinn er miðaður við jafnvægisblöndu af þrem efnum, vatni, ís og ammóníumklóri. Kelvinn kvarðinn miðast við meðalhreyfiorku atóma og núll hreyfiorka er jafngildi núll hita. Einingin fyrir Kelvin er K. Til að breyta kelvin í gráður celcíus

$$\mathrm{T}_{\text{celcíus}} = \mathrm{T}_{\text{kelvin}} - 273,15 \tag{11.1}$$

og til að breyta gráður celcíus í kelvin

$$\mathrm{T}_{\text{kelvin}} = \mathrm{T}_{\text{celcíus}} + 273,15 \tag{11.2}$$

sem er hægt að nýta á marga máta. Það ætti að vera venja að alltaf vinna með SI-einingar. Fyrir flestar jöfnur er það krafa að vinna með Kelvin skalann, undanteikningin er þegar breyting á hitastigi á sér stað. Fyrir Kelvin og Celcíus þá er $\Delta\mathrm{T}_{\text{kelvin}} = \Delta\mathrm{T}_{\text{celcíus}}$.

Sýnidæmi 50
Breyttu 92°C í kelvin og breyttu 310K í gráður celcíus.

Þá er

$$92°\mathrm{C} = (92 + 273,15)\mathrm{K} = 365\mathrm{K}$$

og

$$310\mathrm{K} = (310 - 273,15)°\mathrm{C} = 36,8°\mathrm{C} \approx 37°\mathrm{C}$$

Kafli 12

Gasjafnan

Gas getur fundist í mörgum ástöndum, þá er gas sem er hagar sér eins og það er samsett af kúlum sem hafa næga hreyfiorku til að yfirvinna bindisorkuna sem gasatómin geta haft sín á milli. Þá kallast slíkt gas, *kjörgas* þar sem það er bara stjórnað af hitastigi, þrýstingi og rúmmáli. Þá skiptir ekki máli hvort að um er að ræða atóm eða sameindir, svo lengi sem eigin hreyfiorka markvert stærri en bindiorka á milli gaseindana. Þá er gasjafnan gefin við

$$\mathrm{PV} = \mathrm{Nk_b T} \tag{12.1}$$

líka er til önnur útgáfa sem mikið notuð í efnafræði

$$\mathrm{PV} = \mathrm{nRT} \tag{12.2}$$

Bæði tilvikin eru gaslögmálið fyrir kjörgas, þess ber að merkja að þrýstingur margfaldaður með rúmmáli hefur sömu einingu og orka. Reyndar er þetta orkan sem kjörgas hefur í samræmi við hitastigið sem gasið finnst við. Fyrri jafnan skoðar orkuna á hverri eind sem finnst í gasinu á meðan seinni skoðar magnið af orku sem finnst í einu móli af kjörgasi. Þá er fasti Boltzmanns $\mathrm{k_b} = 1.38 \cdot 10^{-23} \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ og gasfastinn $\mathrm{R} = 8,314 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kmol}}$.

Sýnidæmi 51
Ílát sem er með rúmmálið $0,1\,\mathrm{m}^3$ inniheldur 8,5 mol af kjörgasi, þrýstingurinn í ílátinu er $2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$. Hvert er hitastigið í flöskunni?

Hægt er að nota gasjöfuna með gasfastanum til að einangra hitan úr kjörgasjöfnunni

$$
\begin{aligned}
2\times 10^5\,\mathrm{Pa}\times 0,1\,\mathrm{m}^3 &= 8{,}5\,\mathrm{mol}\times 8,314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kmol}}\times \mathrm{T} && \Leftrightarrow\\
\mathrm{T} &= \frac{2\times 10^5\,\mathrm{Pa}\times 0,1\,\mathrm{m}^3}{8{,}5\,\mathrm{mol}\times 8,314\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Kmol}}}\\
&= 283\mathrm{K}\\
&= 10^\circ\mathrm{C}
\end{aligned}
$$

sem þýðir að hitastigið er að meðaltali í ílátinu 10°C

Þegar Boltzmanns fastinn er notaður er talað um meðalorku per atóm í kjörgasi. Hægt er að lesa fastan $\mathrm{k_b} = 1.38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ sem 1, 38J af orku á hvert einasta atóm í gasinu fyrir hvert Kelvin.

Sýnidæmi 52
Loftþéttur stálkassi inniheldur 5×10^{24} atóm, þrýstingurinn í kassanum er mældur til að vera $3\times 10^5\,\mathrm{Pa}$ og hitastigið er mælt til að vera $320\,\mathrm{K}$. Áætlaðu að gasið í kassanum sé kjörgas, finndu rúmmál kassans.

Hægt er að nota gasjöfuna til að finna rúmmálið á kassanum með

$$
\begin{aligned}
3\times 10^5\,\mathrm{Pa}\times \mathrm{V} &= 5\times 10^{24}\times 1.38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\times 320\,\mathrm{K} && \Leftrightarrow\\
\mathrm{V} &= \frac{5\times 10^{24}\times 1.38\cdot 10^{-23}\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}\times 320\,\mathrm{K}}{3\times 10^5\,\mathrm{Pa}}\\
&= \frac{2{,}2\times 10^4\,\mathrm{J}}{3\times 10^5\,\mathrm{Pa}}\\
&= 0{,}073\,\mathrm{m}^3\\
&= 73\,\mathrm{dm}^3\\
&= 73\,\mathrm{L}
\end{aligned}
$$

Sem þýðir að kassinn fyllir 73 L af rúmmáli. Hins vegar er hægt að finna út afhverju $\mathrm{J/Pa} = \mathrm{m}^3$, þegar við skoðum eininguna $\mathrm{J} = \mathrm{N\,m}$ og eininguna $\mathrm{Pa} = \mathrm{N/m^2}$ sem gefur

$$
\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{Pa}} = \frac{\cancel{\mathrm{N}}\mathrm{m}}{\cancel{\mathrm{N}}/\mathrm{m}^2} = \frac{\mathrm{m}}{1/\mathrm{m}^2} = \mathrm{m}^3
$$

Það gildir líka fyrir gaslögmálið að orkan sem gasið hefur dreifist jafn í gegnum lokað kerfi. Ef rúmmál, hiti eða þrýstingur breytist í lokuðu kerfi er orkan óbreytt, sem þýðir að hægt er að setja

$$\frac{P_1V_1}{T_1} = Nk_b = nR = \frac{P_2V_2}{T_2} \tag{12.3}$$

Ef tvö (eða fleiri) kerfi eru tengd saman þá hækkar orkan ekki en hins vegar breytist þrýstingur, rúmmál eða hitastig þegar gasið jafnast út. Eitthvað af stærðunum sem stýra gildunum verða breytast annars hverfur orkan úr kerfinu!

Kafli 13

Varmarýmd

Þegar hitamismunur á sér stað þá mun heitari hluturinn reyna lækka hitastigið sitt og kaldari hluturinn mun reyna hækka hitastigið sitt. Það sem gerist er að orka færist á milli hlutana og sú orka hefur nafnið varmi.

Varmi er orka, en er nánar tiltekið orka sem tengist hitastigi hluta. Því er varmaflæði líka orkuflæði, hlutir geta gefið frá sér varma og tekið til sín varma. S.s. það er geta sem hlutir hafa mismunandi mæli.

Varmarýmd er stærð táknar magnið af orku fyrir hvert kelvin [1] sem hlutur breytir hita sínum. Í jöfnuformi þá er varmarýmd

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{Q}}{\Delta \mathrm{T}} \tag{13.1}$$

síðan er hægt að mæla varmarýmd hluta með að þekkja magnið af orku sem er notað til að hita hlutinn upp. Einingin fyrir varmarýmd er $\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}}$ eða Joule per Kelvin.

Sýnidæmi 53
Ílát er hitað upp með rafhitara sem hefur aflið 2 kW, uþb. 80% af orku rafhitarns fer í að hita ílátið, eftir að rafhitarinn er búin að vera í gangi í 2min þá er hiti ílátsins búinn að hækka um 20K. Hver er varmarýmd ílátsins?

tíminn sem hitarinn er í gangi eru 2min = 120s og orkan sem hann lætur í té er

$$\Delta \mathrm{U} = \mathrm{P}\Delta \mathrm{t} = 2 \cdot 10^3 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} \cdot 120\mathrm{t} = 240 \text{ kJ}$$

og af þessari orku, þá er $\mathrm{Q} = 0,80 \cdot 240$ kJ $= 192$ kJ sem gefur að varmarýmd-

[1] Hægt líka að segja hluturinn rúmar orku á hverja kelvin breytingu

in er

$$\begin{aligned} C &= \frac{Q}{\Delta T} \\ &= \frac{192 \cdot 10^3 J}{20K} \\ &= 9600 \frac{J}{K} \end{aligned}$$

13.1 Eðlisvarmi

Eðlisvarmi er sama hugtak og varmarýmd nema þá er tekið mark á massa hlutsins sem hefur varmarýmdina. S.s. eðlisvarmi er varmarýmd per kílógramm. Eðlisvarmi er gefin til að vera

$$c = \frac{Q}{m\Delta T} \tag{13.2}$$

þar sem einingin fyrir eðlisvarma er $\frac{J}{kg \cdot K}$. Önnur heppileg leið til að sýna sömu jöfnu er

$$Q = mc\Delta T$$

en þessi jafna er í raun útleitt form af varmarýmd per massa.

Sýnidæmi 54
Hversu mikla orku þarf til þess að hita 2 lítra af vatni um 30K? Eðlisvarmi vatns er $4186 \frac{J}{kg \cdot K}$.

Varminn sem vatnið tekur við er

$$\begin{aligned} Q &= mc\Delta T \\ &= 2 \text{ kg} \cdot 4186 \frac{J}{kg \cdot K} \cdot 30K \\ &= 251 \text{ kJ} \end{aligned}$$

13.2 Gagnleg not af varmarýmd

Dæmi um nýtingu varmarýmdar er oftast til að finna breytingu í hitastigi hluta miðað við magnið af orku sem er gefin eða þeginn sem varmi. Það sem er oft góð hugmynd að áætla er að varmi sem hlutur getur látið frá sér fer allur í hlutinn sem þiggur. Sem gefur

$$Q_{\text{gefin}} = Q_{\text{þeginn}}$$

til að byrja með virðist þetta ekki vera einstaklega hagnýtt fyrirbæri. Vonin er að sýna hvernig þetta litla samhengi leggur drög að góðu verkfæri.

Sýnidæmi 55
20g af ís við bræðslumark er færður í skál með $0,5$L af 20°C heitu vatni. Hvert er lokahitastigið á vatninu með bráðnaða ísnum?

Vatnið sem ísinn er lagður mun tapa varma sem ísinn mun allur nýta, þeas. vatnið gefur varman sem ísinn þiggur. Bæði bráðnaði ísinn og vatnið munu enda í sama lokahitastigi. Orka sem krefst að breyta hitastigi vatnsins er

$$\begin{aligned} Q_{\text{vatn}} &= m_{\text{vatn}} c_{\text{vatn}} \Delta T_{\text{vatn}} \\ &= 0,5\ \text{kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} \\ &= 2093 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} \end{aligned}$$

varminn sem ísinn þiggur er

$$\begin{aligned} Q_{\text{ís}} &= L m_{\text{ís}} + m_{\text{ís}} c_{\text{vatn}} \Delta T_{\text{ís}} \\ &= 334 \cdot 10^3 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \cdot 0,020\ \text{kg} + 0,02\ \text{kg} \cdot 4186 \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} \cdot \Delta T_{\text{ís}} \\ &= 6680\text{J} + 83,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \Delta T_{\text{ís}} \end{aligned}$$

þar sem við erum bara taka stærðina af varmanum þá er krafa að hitastigsbreytingar séu jákvæðar. Við vitum líka að ísinn fer frá 0°C til T_{lok} og vatnið fer frá 20°C til T_{lok}. Samanlagt er stærðin hitastigsbreytingu $\Delta T_{\text{vatn}} + \Delta T_{\text{ís}} = 20\text{K}$. Sem þýðir að $\Delta T_{\text{ís}} = 20\text{K} - \Delta T_{\text{vatn}}$ Gefur það að varminn sem ísinn þiggur er

$$\begin{aligned} Q_{\text{ís}} &= 6680\text{J} + 83,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \Delta T_{\text{ís}} \\ &= 6680\text{J} + 83,7 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot (20\text{K} - \Delta T_{\text{vatn}}) \end{aligned}$$

þá er hægt að setja að varminn sem vatnið gefur er þegið af ísnum

$$\begin{aligned}
Q_{\text{vatn}} &= Q_{\text{ís}} \\
2093\frac{J}{K} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} &= 6680J + 83,7\frac{J}{K} \cdot 20K - 83,7\frac{J}{K} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} \\
2093\frac{J}{K} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} &= 6680J + 1674J - 83,7\frac{J}{K} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} \\
2093\frac{J}{K} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} + 83,7\frac{J}{K} \cdot \Delta T_{\text{vatn}} &= 8354J \\
\left(2093\frac{J}{K} + 83,7\frac{J}{K}\right) \Delta T_{\text{vatn}} &= 8354J \\
\left(2177\frac{J}{K}\right) \Delta T_{\text{vatn}} &= 8354J \\
\Delta T_{\text{vatn}} &= \frac{8354J}{2177\frac{J}{K}} \\
&= 3,84K \approx 3,84°C
\end{aligned}$$

þá er lokahitastigið fyrir vatnið og ísinn

$$T_{\text{loka}} = 20°C - 3,84°C = 16,2°C$$

13.3 Varmafærsla

Þegar það er hitastigsmunur í efni þá leitast hitastigið á öllum stöðum í sama hitastigið. Þetta þýðir að innri varmi efnisins dreifist jafn um efnið, varmi hefur ekki tilhneigingu til að halda sér á sama stað ef það er hægt að leita til lægra hitastigs.

Kafli 14

Varmalögmál

Þegar varmi færist á milli staða er hægt að tala um lokuð og opin kerfi, þeas. hvort að orka geti horfið úr kerfinu (opið kerfi). Útfrá því eru nokkur lögmál kynnt á þeim grundvelli. Dagleg reynsla segir okkur að hlutir reyna að nálgast hitastigið í því umhverfinu. Þegar ísmoli er tekinn út í hitann þá bráðnar hann þar sem ísmolinn móttekur varma frá umhverfinu. Þá er er talað um jafnvægi sem næst á milli ísmolans og umhverfis.

14.1 Núllta lögmál varmafræðinnar

Í grófum dráttum er það:

> Þegar tveir hlutir (A og B) eru í jafnvægi við þriðja hlut (C), þá eru hlutir A og B í jafnvægi. Jafnvægi er skilgreint sem sama hitstig eða jafnorkuflæði á milli hluta

Lögmálið beinir athyglinni að því að hlutir með varma munu ekki leita til þess að færa varma sinn nema kerfið sé í ójafnvægi.

14.2 Fyrsta lögmál varmafræðinnar

Orka í lokuðu kerfi er varðveitt, þá hverfur ekki orka í varmafærslu en í staðinn fer hún í vinnu af hendi kerfisins. Hins vegar þegar orka bætist inní lokað kerfi verður samanlögð innri orka kerfisins aukin og einhver hluti af orkunni fer í annað en að auka innri orkuna (þeas. vinna).

> Samanlögð breyting á innri okru kerfisins er summan af viðbættri orku í kerfið og vinnunni sem fer í að bæta orkunni við. Í jöfnuformi fæst
>
> $$\Delta \mathrm{U} = \Delta \mathrm{Q} + \Delta \mathrm{W} \tag{14.1}$$

Fyrir lokuð kerfi með engri breytingu er $\Delta \mathrm{U} = 0\,\mathrm{J}$.

Sýnidæmi 56
Kjörgas móttekur 2,5 kJ af orku og vinnan framkvæmd af gasinu er 300 J, hvað er breytingin í innri orku gasins?

Þar sem vinnan er framkvæmd af gasinu þá er það orka sem gasið ætlur frá sér. Á sama tíma móttekur gasið orku, það gefur

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta Q + \Delta W \\ &= 2500\,\mathrm{J} - 300\,\mathrm{J} \\ &= 2200\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

hækka innri orka kjörgasins um 2,2 kJ.

14.3 Annað lögmál varmafræðinnar

Sem afleiðing af núllta og fyrsta lögmálinu, þá verður orka að flæða á milli hluta sem ná að komast í jafnvægi. Hins vegar segir annað lögmálið að varminn flæðir frá heitari hlutnum til kaldari hlutarins, oft er notuð óreiða til að lýsa þessu lögmáli. Lítil óreiða er kostnaðarsamari en mikil óreiða (við sama hitastig), það virkar andstætt almennri skynsemi en lítil óreiða samsvarar mikilli röðun og sem þarf að viðhalda. Lögmálið er oft skrifað sem

Varmi leitar frá heitari hlut til kaldari hluts.

14.4 Þriðja lögmál varmfræðinnar

Þegar efni kólnar minnkar óreiða efnis, ef efni er kælt til 0 K þá mun óreiða nálgast núll. Sem lögmál þá er þetta viðbót við annað lögmálið til að gera fulla grein fyrir óreiðu.

Efni við núll kelvin hefur núll óreiðu.

14.5 Óreiða

Allt efni hefur innbyggða orku sem tengist hita stigi efnisins, sé hitastigið hærra verður orkan hærri. Samtímis er hægt að koma með nýtt hugtak, sem er að efnið hefur innbyrðis röðun og getur bara haft ákveðið mikið af uppröðunum af staðsetningu og orku. Fyrst er þetta hugtak mjög sérstakt því óreiða er eitthvað sem öll efni reyna að hámarka, þá vill efni koma sem mestu „óskipulagi" í umhverfið. Óreiðu er líka hægt að lýsa sem magn af orku sem á eftir að ná að dreifa sér út almennilega. Það eru talsvert margar myndlíkingar á óreiðu en það er hægt að lýsa magninu af óreiðu með tölum og stærðum. Djúp lýsing á óreiðu sem nær alla leið niður á atómskalan krefst umtalsverðar stærðfræði og því verður ekki meðhöndluð á þann máta. Verður stuðst við myndlíkingar til að reyna skapa skilning.

Hluti IV

Rafsegulfræði

Kafli 15

Straumur

André-Marie Ampéré(1775-186) var franskur vísindamaður sem gerði tilraunir með rafkrafta í rafmagnsleiðurum.

Þegar rafeindir ferðast í leiðurum þá myndast rafstraumur, eða einfaldlega straumur. Vatnsstraumur er t.d. vatnsmagn á tímaeiningu, oft lýst sem massi per tímaeingu $\frac{\text{kg}}{\text{s}}$. Á svipaðan máta er straumur gefinn sem $\frac{\text{C}}{\text{s}}$, þar sem C er „magnið" af rafmagni (svipar til massa). Einingin sem er notuð fyrir straum er Amperé[1] (A) sem er það sama og að segja $\frac{\text{C}}{\text{s}}$.

15.1 Hleðsla og rafeindir

Hleðsla sem stærð er eitthvað sem sumar eindir búa yfir sem eiginleiki, þetta er svipað og sumar eindir hafa massa (t.d. kg). Það eru ekki allar eindir sem búa yfir massa, ljós er massalaus eind á meðan rafeindin hefur massa. Hleðsla er „form" af massa, eitthvað sem sumar eindir hafa og aðrar ekki, í þessum kafla eru bara rafeindir, jáeindir og róteindir með hleðslu. Það eru talsvert fleiri eindir sem bera hleðslu á sama máta og það eru til talsvert fleiri eindir sem hafa massa. Þá er *grunnhleðsla* hugtak sem er viðmiðunarpunktur af hleðslu. Grunnhleðslan er

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19}\text{C} \tag{15.1}$$

sem er jafn stór og hleðslan og ein rafeind, jáeind eða róteind hefur.

Heiti	Tákn	Hleðsla
Rafeind	e^-	$-e$
Jáeind	e^+	$+e$
Róteind	p^+	$+e$

Tafla 15.1: Yfirlit yfir hleðslu frumeinda

[1] Fengið frá `http://en.wikipedia.org/wiki/Andr%C3%A9-Marie_Amp%C3%A8re`

Sýnidæmi 57
Hvað eru margar rafeindir í einu kúlombi?

Þegar grunnhleðslan per rafeind er

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{rafeind}}$$

þá er fjöldi rafeinda

$$\text{fjöldi} = \frac{1\mathrm{C}}{1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{rafeind}}} = 6,242 \cdot 10^{18} \mathrm{rafeindir}$$

sem er talsverður fjöldi rafeinda. Almennt er eitt C fremur stór stærð af rafeindum en þegar við mælum straum er hún hentugri til en fjöldi rafeinda.

15.2 Straumur

Straumur er þegar hleðsla (sem geta verið rafeindir) færist á milli staða, færsla á hleðsu myndar strauminn en annað hugatak sem kallast spenna sér um að ýta hleðslunni áfram. Til samanburðar er hægt að ímynda sér að hleðsa sé vatn og þyngdarkrafturinn sé spennan sem togar vatnið áfram. Einingin fyrir straum er A eða $\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}$, SI-einingin er samt A er oftast gefinn upp. Þá er straumur gefinn við

$$\mathrm{I} = \frac{\Delta \mathrm{Q}}{\Delta \mathrm{t}} \tag{15.2}$$

þar sem er ΔQ magnið af hleðslu sem hefur fengið færslu á tímabilinu Δt.

Sýnidæmi 58
Mjög þolinmóður talningsmaður hefur talið að í 1g af kopari eru $1,5 \cdot 10^{20}$ rafeindir sem geta fært sig. Hann tengir vír við koparinn (undir spennu) og mælir strauminn 5 mA. Hvað tekur það langan tíma að færa allar rafeindirnar úr koparinum?

Þegar grunnhleðslan per rafeind er

$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{rafeind}}$$

þá er heildarhleðslan

$$\Delta \mathrm{Q} = 1,602 \cdot 10^{-19} \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{rafeind}} \cdot 1,5 \cdot 10^{20} \mathrm{rafeindir} \qquad = 24,03\mathrm{C}$$

hægt er að umskrifa straumjöfnuna til að vera

$$\Delta t = \frac{\Delta Q}{I} \qquad = \frac{24,03C}{5 \cdot 10^{-3} A} = 4806s = 80min$$

ef spennan yrði aukin myndi tíminn minnka, samsvarar að nota stærri kraft til að hreyfa rafeindirnar.

Kafli 16

Rafkraftur

Á sambærilegan máta og þyngdarafl þá eru hlutir sem hafa hleðslu munu verka með krafti á hvort annað, stærð kraftsins er í samræmi við magn hleðslu hlutarins. Hleðsla er einfaldlega eiginleiki sem efni hefur á sama máta og efni getur haft eiginleikan massa. Rafeindar hafa bæði massa og hleðslu og því getur þyngdarkraftur og rafkraftur verkað á rafeindina.

Eindir eða hlutir sem hafa enga hleðslu verða því ekki fyrir áhrifum rafkrafts, niftendir eru gott dæmi um slíkt, hún hefur massa og enga *ytri hleðslu*[1]. Róteindir hafa hins vegar andstæða hleðslu við rafeindir og hafa líka mun meiri massa.

Tilraunir sýna að neikvæð hleðsla (rafendir) dregst að jákvæðri hleðslu (róteindir) með aðdráttarkrafti, hins vegar mun neikvæð hleðsla valda fráhrindikrafti á aðra neikvæða hleðslu. Tvær jákvæðar hleðslur valda sömuleiðis fráhrindikrafti á hvor aðra. Lögmálið sem lýsir kraftinum er

$$\mathrm{F}_{\mathrm{raf}} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{r}^2} \tag{16.1}$$

þar sem q og Q er stærð hleðslanna sem verka á hvor aðra og r er lengdin á milli hleðsla. Fastinn k er gefinn til að vera $8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}$ og er kallaður fasti Coulombs. Álíka ber fyrrnefnt lögmál, kraftalögmál Coulombs[2].

Fasti Coulombs þjónar sama tilgangi og þyngdarfastinn í þyngdarlögmáli Newtons, sem er krafturinn sem massar verkar á hvorn annan í ferningslengd[3] per ferningsmassa. Á svipaðan máta er fasti Coulombs tengdur við rafkraftinn sem hleðslur verka á hvor aðra í ferningslengd per ferningshleðslu. Mikilvægt er að muna

Charles-Augustin de Coulomb var franskur eðlisfræðingur (f. 1736 -d. 1806) sem kom með skilgreininguna á rafkrafti sem lögmál.

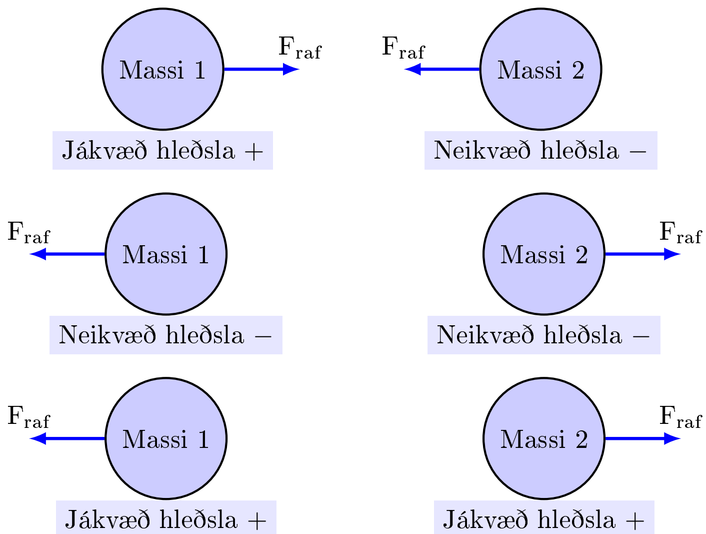
[1]Niftendir eru samsettar úr kvörkum sem hafa hleðslu en samanlagt verður hleðslan núll á nifteindinni

[2]Fengið af `http://en.wikipedia.org/wiki/Charles-Augustin_de_Coulomb`

[3]Ferningslengd er sama og að segja lengd í öðru veldi (m^2). Svipað er ferningsmassi gefinn sem kg^2.

16.1 Stefna rafkrafta

Rafkraftur hefur stefnu, nánar tiltekið þá er stefna rafkrafts samsíða beinni línu á milli hleðsla. Formerki hleðslna stýra stefnu krafts og er neikvætt formerki oftast meint sem aðdráttarkraftur og jákvætt formerki meint sem fráhrindikraftur. Gefin eru nokkrar myndir um hvernig rafkraftur hanga sér miðað við hleðslu:



þá ber að nefna að stefna og stærð eru aðskildar stærðir, stefna kraftins er háð formerkjum hleðsla en hins vegar er stærð kraftsins gefin við lögmál Coulombs. Almennt er nauðsyn að taka tillit stefnu rafkrafta þar sem hleðslur hafa títt mismunandi hleðslu eða sömu hleðslu.

Sýnidæmi 59
Tvær rafeindir með hleðsluna $-1{,}602 \times 10^{-19}$ C liggja 20 nm frá hvor annari. Hver er stærð og stefna rafkraftsins sem verkar rafeindirnar?

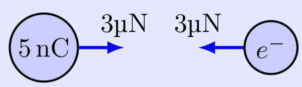
Fyrst þarf að reikna stærð rafkraftsins

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{raf}} &= k\frac{qQ}{r^2} \\ &= 8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\frac{(-1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}) \times (-1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})}{\left(20 \times 10^{-9}\,\mathrm{m}\right)^2} \\ &= 8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\frac{2{,}5664 \times 10^{-38}\,\mathrm{C^2}}{4 \times 10^{-16}\,\mathrm{m^2}} \\ &= 5{,}77 \times 10^{-13}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

þar sem formerkið er jákvætt þýðir að það er fráhrindikraftur á milli rafeindanna.

Þá stefnir krafturinn frá sitt hvorri rafeind og með jafnstórri stærð.

Sýnidæmi 60
Hlutur með punkthleðsluna $5\,\mathrm{nC}$ og rafeind liggur í óþekktri vegalengd frá rafeindinni. Hins vegar upplifir rafeindin kraftinn $-3\mu\mathrm{N}$.



Finndu óþekktu vegalengdina á milli hleðslanna.

Hægt er að umskrifa lögmál Coulombs sem

$$\begin{aligned} \mathrm{F_{raf}} &= \mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{r}^2} && \Leftrightarrow \\ \mathrm{r}^2 &= \mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{F_{raf}}} && \Leftrightarrow \\ \mathrm{r} &= \pm\sqrt{\mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{F_{raf}}}} \end{aligned}$$

neikvæða formerkið við rótina hefur ekki þýðingu sem lengd og því er það ekki notað. Þetta gefur við innsetningu

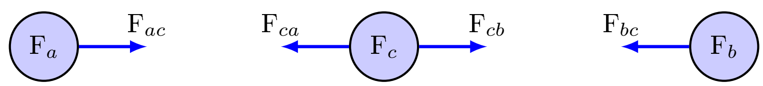
$$\begin{aligned} \mathrm{r} &= \sqrt{8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\,\frac{(5 \times 10^{-9}\,\mathrm{C}) \times (-1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C})}{-3 \times 10^{-6}\mathrm{N}}} \\ &= \sqrt{2{,}3998 \times 10^{-12}\mathrm{m}^2} \\ &= 1{,}55 \times 10^{-6}\mathrm{m} \end{aligned}$$

sem þýðir að bilið á milli hleðslunnar og rafeindarinnar er $1{,}55\mu\mathrm{m}$.

16.2 Superposition hleðsla

Hægt er að leggja saman kraftinn á hleðslur, þá geta margar hleðslu verkað á eina hleðslu. Sem dæmi er hægt að skoða kraftinn sem verkar á eina hleðslu þegar tvær hleðslur eru lagðar sitthvorum megin við hana.

Finna íslenskt orð fyrir superposition

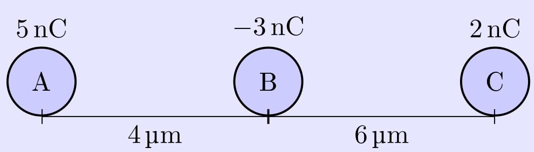


þá er samanlagður kraftur sem verkar á miðju hleðsluna er þá

$$F_{\text{heild, c}} = F_{ca} + F_{cb}$$

hins vegar ef það er skoðað nánar, þá heildarkrafturinn sem verkar á allt kerfið núll. Sem virkar dálítið sérstakt nema hvað báðar hleðslurnar verka með jafnstórum og gagnstæðum kröftum. Þá leiðir af sér að þriðja lögmál Newtons myndar heildkraftinn núll ef enginn utanaðkomandi kraftur verkar á kerfið þrátt fyrir innri gagnkrafta.

Sýnidæmi 61
Þrjár hleðslur liggja á beinni línu, hver er krafturinn sem verkar á hleðsluna C af völdum A og B?



.

Þar sem við erum með bæði jákvæðar og neikvæðar hleðslur er nauðsynlegt að huga að stefnu rafkraftana sem verka á hleðslu C. Við veljum að jákvæð kraftstefna er til hægri að vana. Fyrst er krafturinn á mill A og C fráhrindikraftur og samanlagt er vegalengdin á milli A og C 10 µm. Hleðslurnar ýta hvor annari í burtu með kraftinum

$$\begin{aligned} F_{ca} &= k\frac{q_A q_C}{r_{AC}^2} \\ &= 8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\,\frac{(5\times 10^{-9}\,\mathrm{C})\times(2\times 10^{-9}\,\mathrm{C})}{\left(10\times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^2} \\ &= 898\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

á svipaðan máta er hægt að finna kraftinn á milli B og C, nema hvað það er aðdráttarkraftur

$$\begin{aligned} F_{ca} &= k\frac{q_B q_C}{r_{BC}^2} \\ &= 8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2}\,\frac{(-3\times 10^{-9}\,\mathrm{C})\times(2\times 10^{-9}\,\mathrm{C})}{\left(6\times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^2} \\ &= -1498\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

þá er heildarkrafturinn á hleðslu C gefinn við

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_{\mathrm{heild,\,C}} &= 898\,\mathrm{N} - 1498\,\mathrm{N} \\ &= -600\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

þeas. hleðsla C er dregin í átt að bæði A og B vegna aðdráttarkrafts hleðslu B.

16.3 Eiginleikar hleðslu

Hleðsla er eiginleiki efnis sem er svipaður og massi, hleðsla er s.s. stærð sem gefur mælanlegan kraft sem er ekki öðrum stærðum. Tveir helstu kraftarnir sem koma frá eiginleikum efnis er einmitt rafkraftar og þyngdarkraftar. Hins vegar eru fleiri kraftar sem efni getur myndað, þar af veikir og sterkir kjarnakraftar. Hins vegar verða þeir ekki teknir fyrir hér.

16.4 Rafsvið

Krafturinn sem hleðsla verkar á aðra hleðslu er í beinu samræmi við stærð upphafshleðslu. Þá er það kraftur á hverja hleðslu einingu sem hægt er að verka á aðrar hleðslur með. Krafurinn sem verkar á eind með tiltekna hleðslu q frá hleðslunni Q er hægt að lýsa sem

$$\mathrm{F} = \mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{r}^2}$$

þá þetta kraftur sem verkar á q vegna Q. Þá er rafsvið sama og kraftur á hleðslu, svipað og kraftur per massa í þyngdarsviði. Þá myndi rafsviðið vera skilgreint sem

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{q}} \tag{16.2}$$

skoðað nánar er hefur þetta eininguna N/C. Það sem ber að huga, er að prufuhleðslan upplifir kraftinn per hleðslu í rafsviði. Þá er hægt að ímynda sér að allar aðrar hleðslu en prufuhleðslan mynda rafsvið sem prufuhleðslan liggur í. Þá myndi rafsviðið sem frá hleðslunni Q sem verkar á q vera gefið við

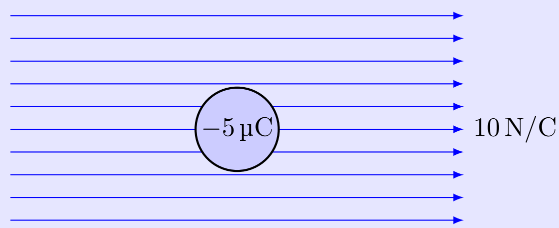
$$\begin{aligned} \mathrm{E} &= \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{q}} \\ &= \mathrm{k}\frac{\mathrm{qQ}}{\mathrm{qr}^2} \\ &= \mathrm{k}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{r}^2} \end{aligned}$$

sem sagt rafsviðið sem q upplifir er óháð eigin hleðslu. Þá er stefna rafsviðs líka mikilvæg, líkt og með krafta þá getum við gefið rafsviði stefnu. Nánar tiltekið þá getum við ímyndað okkur að jákvæðar hleðslur hafi rafsvið sem flæðir útfrá hleðslunni, hið gagnstæða myndi vera neikvæð hleðsla sem tekur á móti rafsviði sem flæðir í átt að neikvæðu hleðslunni. Þá þarf að skoða hvernig kraftur hagar sér í rafsviði, krafturinn sem hleðsla myndi upplifa er hægt að umskrifa með hjálp (16.2) til að vera

$$\mathrm{F} = \mathrm{qE} \tag{16.3}$$

þá er stefna kraftins háð formerki E og q.

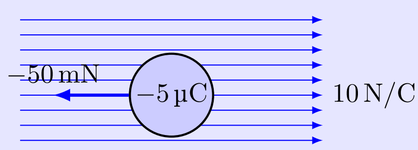
Sýnidæmi 62
Eind með hleðsluna $-5\,\mu\mathrm{C}$ liggur láréttu einsleitu rafsviði með styrkinn $10\,\mathrm{N/C}$. Finndu kraftinn sem hleðslan upplifir í rafsviðinu.

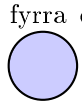
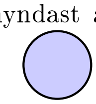


Þá er mikilvægt að hafa stefnur vel skilgreindar, hérna stefnir rafsviðið til hægri og því er valin sem jákvæð stefna. Þegar við skoðum stærð kraftsins

$$\begin{aligned} \mathrm{F} &= \mathrm{Eq} \\ &= 10\,\mathrm{N/C} \times -5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C} \\ &= -5 \times 10^{-5}\,\mathrm{N} \\ &= -500\,\mathrm{mN} \end{aligned}$$

sem þýðir að krafturinn verkar gagnstætt stefnu rafsviðsins, myndrænt myndi krafturinn vera



rafsviðið sem myndast á milli tveggja hleðsla er venjulega ekki einsleitt eins og í fyrra dæmi. Þá er rafsviðið sem myndast á milli tveggja hleðsla gefið sem   eftir því hvar rafsviðið á milli hleðslanna er skoðað er það stundum þéttara en annars. Þéttleikinn á rafsviðinu er í beinu samræmi við línuþéttleikann á myndinni, því minna bil

make pretty lines, make tikz plot the lines á milli línanna því stærri rafsviðsstyrkurinn. Nánar tiltekið, hægt er að lesa myndina á sama máta og hæðarlínur á kortum, því þéttari sem hæðarlínurnar eru því meiri breyting er í hæðinni (upp eða niður).

Sýnidæmi 63
Eind með hleðsluna $5\,\mu\mathrm{C}$ liggur á beinni línu $2\,\mu\mathrm{m}$ frá prufhleðslu. Finndu styrk rafsviðsins og kraftinn sem prufuhleðslan upplifir ef hún er rafeind.

Styrkur rafsviðsins sem prufuhleðslan upplifir er einungis háð hleðslu eindarinnar, þeas.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} &= \mathrm{k}\frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{r}^2} \\
&= 8{,}988 \times 10^9\,\mathrm{N\,m^2/C^2} \times \frac{5 \times 10^{-6}\,\mathrm{C}}{\left(2 \times 10^{-6}\,\mathrm{m}\right)^2} \\
&= 11{,}235 \times 10^{15}\,\mathrm{N/C} \\
&= 11{,}235\,\mathrm{PN/C}
\end{aligned}$$

sem er ótrúlegur kraftur á hvert Coulomb, ef við skoðum kraftinn sem rafeind myndi upplifa í þessu rafsviði þá fæst

$$\begin{aligned}
\mathrm{F} &= \mathrm{Eq} \\
&= 11{,}235 \times 10^{15}\,\mathrm{N/C} \times -1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\
&= -17{,}998 \times 10^{-3}\,\mathrm{N} \\
&= -18\,\mathrm{mN}
\end{aligned}$$

þá er krafturinn talsvert minni, oft eru rafsvið með gríðarlega styrk en stærð kraftsins sem verkar á prufuhleðsluna er í beinu samræmi við eigin hleðslu. Þá tvær rafeind myndu upplifa tvöfalda hleðslu.

16.5 Þyngdar- og rafsvið

Þegar við vinnum hluti sem verða fyrir krafti í fjarlægð, þá er hægt að koma með samlíkingu á milli áhrifa. Það er svipað mynstur sem bæði rafkraftar og þyngdarkraftar fylgja. Báðir kraftar hafa öfugt hlutfall við vegalengdina á milli einda (hleðslur eða massar), þá er almment átt við

$$F \propto \frac{1}{r^2}$$

sem er eins hlutfall fyrir báða krafta. Hins vegar verður lesandi að fara varlega hvaða ályktanir er hægt að draga af slíku samræmi. Það geti verið ábending um að það bæði þyngdar- og rafkraftar eru tvö form af sama kraftinum, nema að þyngdakraftur hefur ekki getað samræmst öðrum kröftum sem heilstætt líkan fyrir alla krafta. Hægt er að samræma þrjá af fjórum þekktum kröftum sem eru taldnir stýra alheiminum, nema þyngdarkraftinum, sér í lagi vegna þess hversu lítill hann er miðað við hina þrjá kraftana.

Þetta er mjög gott dæmi um að fylgni stærða er ekki nauðsynlega vegna gagnkvæmna afleiðinga, þeas. sem stendur þá lítur út fyrir að þyngdarkrafturinn er sér á báti.

16.6 Fasti couloumbs

Kafli 17

Rafmætti

17.1 Núll punktur

17.2 Varðveisla orku

Kafli 18

Segulsvið

Segulsvið eru kraftasvið sem eru náteng rafsviðum en hafa samt talsvert frábrugðna hegðun í samanburði við rafsvið. Segulsvið myndast frá nokkrum gerðum af málmum, þá nær innri uppbyging efnisins skapa náttúrulegt segulsvið útfrá hreyfingu rafeinda.

Helsti munurinn á segulsviði og rafsviði er að segulsvið þurfa að flæða í hringrás. Það leiðir til þess að efni sem er segulmagnað verður að mynda segulpóla sem eru nefndir norður og suðurpólar. Síðan verkar krafturinn sem hleðsla upplifir í segulsviði er hornréttur á hreyfiátt hleðslu og stefnu segulsviðs.

Helsta einingin sem er notuð er Tesla eða T.

18.1 Lögmál Lorentz

Krafturinn sem hleðsla upplifir er gefinn við krossfeldið á milli hreyfistefnu og segulsviðs, þá er nauðsynlegt að beita vigrum til að finna kraftstefnu. Þá eru venslin sem mynda kraftinn gefinn við

$$\vec{\mathrm{F}} = \mathrm{q}\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}\right) \tag{18.1}$$

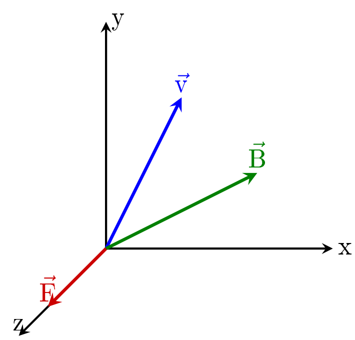
það er ekki augljóst hvaða afleiðingar þetta hefur fyrir kraftinn sem verkar á hleðsluna. Þá þarf að vinna úr dæmum með krossfeldum, sem geta verið fremur

Lorentz er ekki talinn hafa fundið Lögmál Lorentz en hann var sá fyrsti til finna skýra stærðfræðilega lýsingu á eiginleikum lögmálsins.

ruglingsleg. Krafturinn, hraðinn og segulsviðið er þá gefið við

$$\vec{\mathrm{F}} = \begin{pmatrix} \mathrm{F_x} \\ \mathrm{F_y} \\ \mathrm{F_z} \end{pmatrix}$$
$$\vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} \mathrm{v_x} \\ \mathrm{v_y} \\ \mathrm{v_z} \end{pmatrix}$$
$$\vec{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{B_x} \\ \mathrm{B_y} \\ \mathrm{B_z} \end{pmatrix}$$

þar sem $\mathrm{F_x}$ táknar stærðkraftsins meðfram x-ás. Dæmi teikningu á slíkum vigrum er



þar sem krafturinn verkar einmitt hornrétt á tvo vigra. Þá leiðir til þess að krafturinn er ekki samsíða hreyfi stefnunni. Dæmi um þetta væri segulsviðið sem myndast umhverfis leiðara, það myndast hornrétt á hreyfistefnu rafeindanna í leiðaranum. Stærð kraftins er hægt að finna með

$$\begin{aligned} \left|\vec{\mathrm{F}}\right| &= \left|\mathrm{q}\left(\vec{\mathrm{v}} \times \vec{\mathrm{B}}\right)\right| \\ &= \mathrm{q}\,|\vec{\mathrm{v}}|\left|\vec{\mathrm{B}}\right|\sin(\theta) \end{aligned}$$

þar sem $v = |\vec{\mathrm{v}}|$ er lengd hraðavigursins og $B = \left|\vec{\mathrm{B}}\right|$ er lengd segulsviðsvigurs. Þá er θ hornið á milli vigrana $\vec{\mathrm{v}}$ og $\vec{\mathrm{B}}$, hægt er að finna hornið á milli þeirra með að leysa út $\cos(\theta)|\vec{\mathrm{B}}||\vec{\mathrm{v}}| = \vec{\mathrm{B}} \cdot \vec{\mathrm{v}}$.

Sýnidæmi 64

Rafeind ferðast í lárréttu plani, hornrétt á rafeinda í planinu er segulsvið. Hraði rafeindarinnar er $15 \times 10^3\,\mathrm{m/s}$ og styrkur segulsviðsins er

$0{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{T}$. Í vigurformi er það

$$\vec{\mathrm{v}} = \begin{pmatrix} 15 \times 10^{3}\,\mathrm{m/s} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\mathrm{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{T} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Fyrst þarf að setja upp hnitakerfi, þá er valið að láta x-ásin vera samsíða

hreyfistefnu rafeindarinnar, þar sem hornið á milli vigrana er $\theta = 90°$ vegna þess að þeir eru hornréttir á hvorn annan þá er stærð kraftsins gefin við

$$\begin{aligned} F &= \mathrm{q}\,|\vec{\mathrm{v}}|\,\left|\vec{\mathrm{B}}\right| \sin(\theta) \\ &= 1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C} \times 15 \times 10^{3}\,\mathrm{m/s} \times 0{,}5 \times 10^{-4}\,\mathrm{T} \times \sin(90°) \\ &= 12{,}45 \times 10^{-20}\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

sem er afar lítill kraftur sem verkar á rafeinda.

18.2 Straumur og segulsvið

Þegar rafeindir eru á hreyfingu er það kallaður rafstraumur eða straumur, hægt er að lýsa straumi með hraða og magni. Þeas. flæðið af rafeindum, eða hleðslu er stjórnað af fjölda þeirra og magnið fyrir einhvern bút af leiðara á tímaeiningu segir til um hraða þeirra.

Beinn leiðari

Spóla

18.3 Lögmál Biot-Savart

18.4 Hleðsla í segulsviði

18.5 Segulflæði

Hluti V

Nútíma eðlisfræði