Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aula 7

Prof.ª Dr.ª Analice Costacurta Brandi

Optativa - Tópicos de Matemática Aplicada
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

Sumário

Método Previsor-Corretor

Este método é utilizado na solução de equações diferenciais ordinárias e baseado no Teorema Fundamental do Cálculo, dado por

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = y(x_{n+1}) - y(x_n). \tag{1.1}$$

Como $y'(x) = f(x, y(x))$, tem-se

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx = y(x_{n+1}) - y(x_n). \tag{1.2}$$

Além disso, segue que

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\,dx. \tag{1.3}$$

A integral definida em (1.3) pode ser aproximada por diferentes métodos numéricos, tendo assim diferentes métodos para resolver a equação diferencial $y' = f(x, y)$.

Utilizando a regra dos trapézios, dada por

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, y(x))\, dx \approx \frac{h}{2}\left[f(x_n, y(x_n)) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]. \qquad (1.4)$$

Ainda, utilizando a aproximação $y_n \approx y(x_n)$, segue de (1.3) que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right]. \qquad (1.5)$$

A equação acima é denominada Método dos Trapézios.

Note que y_{n+1} aparece nos dois lados da equação. Assim, temos um método implícito. Além disso, métodos em que y_{n+1} é calculado explicitamente, são chamados métodos explícitos (métodos de Euler, por exemplo).

Cálculo de y_1

Fazendo $n = 0$ em (1.5), temos que

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right]. \tag{1.6}$$

Desta forma, o valor de y_1 não é obtido explicitamente, e temos uma equação, em geral, não-linear, para ser resolvida, na equação y é a incógnita.

Uma equação na forma $x = \phi(x)$ pode ser resolvida pelo método das aproximações sucessivas $x_{k+1} = \phi(x)$, o qual produz uma sequência $x_1, x_2, \ldots$, convergente para uma solução $\bar{x}$ da equação, se x_0, dado inicialmente, for uma boa aproximação para $\bar{x}$ e $|\phi'(x)| < 1$, para todo $x \approx \bar{x}$.

A equação (1.6) pode ser escrita do seguinte modo (onde y_1 é a incógnita).

$$\begin{cases} y_1 = \phi(y_1) \\ y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)\right] \end{cases}$$

Usando um método explícito (previsor), por exemplo, o método de Euler, podemos obter uma aproximação inicial para y_1, a qual denotamos por y_1^0.

Previsor: $y_1^0 = y_0 + hf(x_0, y_0)$ (primeira aproximação para y_1).

E, então, usar o método das aproximações sucessivas para obtermos

$$y_1^{k+1} = \phi(y_1^k).$$

Corretor: $y_1^{k+1} = y_0 + \frac{h}{2}\left[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1^k)\right]$ para determinar y_1, caso a sequência y_1^0, y_1^1, y_1^2,..., convergir. A seguir, apresentamos o critério de parada.

Critério de Parada: Se

$$\frac{\left|y_1^{k+1} - y_1^k\right|}{\left|y_1^{k+1}\right|} < \epsilon,$$

então $y_1 = y_1^{k+1}$, sendo $\epsilon > 0$ uma tolerância fixa, definida previamente.

Geralmente, poucas iterações são necessárias para o corretor, e se a convergência não for obtida, o valor de h deve ser diminuído.

Esta última observação decorre do fato de que, para que haja convergência, devemos ter $|\phi'(y)| < 1$. Como

$$\phi(y) = y_{n+1} + \frac{h}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})\right].$$

Temos que

$$\phi'(y) = \frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

O que implica em

$$|\phi'(y)| = \left|\frac{h}{2}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < 1.$$

E, portanto,

$$h < \frac{2}{\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|}.$$

Assim, se a derivada da função f com relação a y for contínua, podemos escolher h suficientemente pequeno para que o método corretor convirja.

Cálculo de y_2

Depois de calcularmos o valor de y_1, repetimos o procedimento anterior para determinar y_2.

Previsor: $y_2^0 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ (primeira aproximação para y_1).

Corretor: $y_2^{k+1} = y_1 + \frac{h}{2}\left[f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2^k)\right]$.

Até que,

$$\frac{\left|y_2^{k+1} - y_2^k\right|}{\left|y_2^{k+1}\right|} < \epsilon.$$

Assim, sucessivamente, calculamos y_3, y_4, ..., y_n.

1. Usando o método dos trapézios, com o método de Euler explícito como previsor, calcule a solução utilizando $N = 5$ e $\epsilon = 0.01$ do PVI definido por

$$\begin{cases} y' = -2y + 1, & x \in [0, 1]. \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

Solução exata: $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2x}$.

2. Resolva o seguinte PVI, utilizando o método da Regra dos Trapézios, com o método de Euler Modificado como previsor, com $h = 0.2$ e os valores de $\epsilon = 0.01$ e $\epsilon = 0.001$:

$$\begin{cases} y' = \left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x}\right)(1+y), & x \in [1,6]. \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

Solução exata: $y(x) = e^{\left(\sqrt{x}+\ln(x)-1\right)} - 1.$