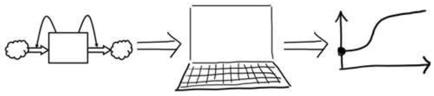
Insper

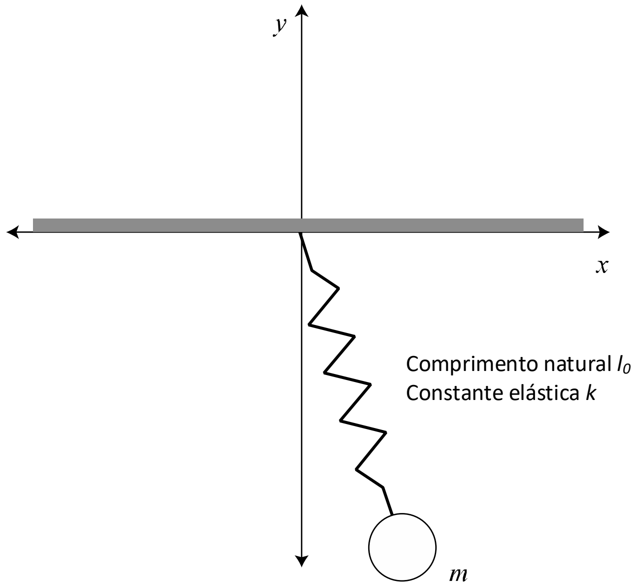
Engenharia
Modelagem e Simulação do Mundo Físico



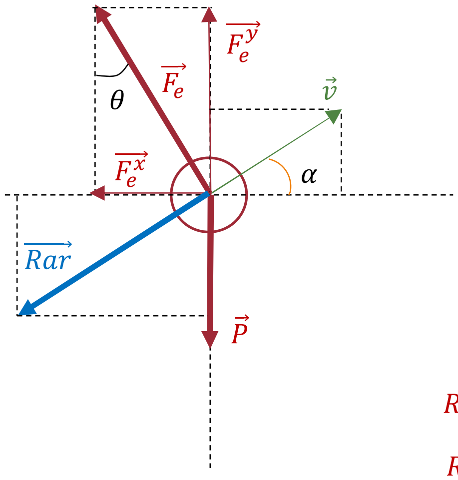
EXERCÍCIO 5

O diagrama a seguir ilustra o chamado "pêndulo extensível". Ele consiste em uma massa m unida a uma mola, que é livre para oscilar no plano xy, assim como para comprimir ou estender. A mola tem um comprimento natural l_0 (na ausência de gravidade), e uma constante elástica k.
Além da força elástica e da força peso, vertical e para baixo, vamos considerar também a força de resistência do ar, com as seguintes características:

- essa força atua na mesma direção do vetor velocidade do pêndulo, porém em sentido contrário a ele;
- a intensidade dessa força é dada por $\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v^2 \cdot C_D \cdot A$, sendo ρ a densidade do ar, v a intensidade do vetor velocidade do pêndulo, C_D o coeficiente de arrasto do pêndulo e A a área de sua seção transversal, com raio de medida R.



1. Suponha que você está abstraindo a modelagem do pêndulo em duas dimensões, x e y. Desenhe um diagrama de corpo livre para a massa m, dada a situação mostrada no diagrama. Escreva as relações de forças nas direções x e y. Para isso, considere um ângulo θ entre o eixo y e a direção da mola.



$$F_e^y = F_e \cdot \cos(\theta)$$

$$F_e^x = F_e \cdot sen(\theta)$$

$$F_e = k \cdot (l - l_0)$$

$$sen(\alpha) = \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

$$cos(\alpha) = \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$$

$$v = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

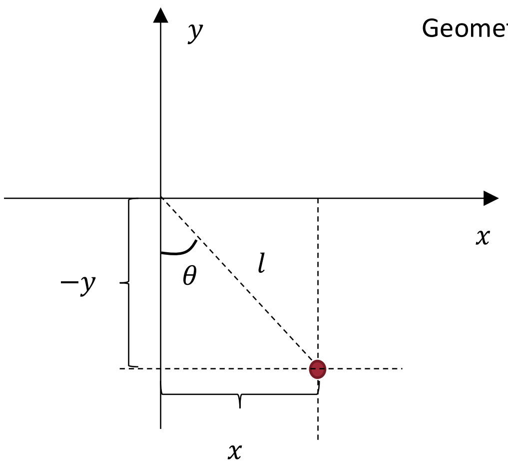
$$Rar^y = Rar \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$Rar^x = Rar \cdot cos(\alpha)$$

$$Rar = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot Cd \cdot A \cdot v^2$$

2. Escreva as equações diferenciais de movimento que você implementaria em Python (lembre-se, serão 4 equações diferenciais de primeira ordem!).

Geometria



$$sen(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}$$

$$cos(\theta) = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}$$

$$l = \sqrt{x^2 + (-y)^2}$$

Equacionamento

Na direção x:

$R_x = m \cdot a_x$
$-F_e^x - Rar^x = m \cdot a_x$ (Contrárias à orientação de x)

$$-F_e \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}\right) - \frac{1}{2}\rho C d A \cdot \left(V_x^2 + V_y^2\right) \cdot \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = m \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k \cdot \left(\sqrt{x^2 + (-y)^2} - l_0\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}\right) \cdot \frac{1}{m} - \frac{1}{2}\rho C d A \cdot \left(V_x^2 + V_y^2\right) \cdot \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \cdot \frac{1}{m}$$

Ou:

$$\frac{dx}{dt} = V_x$$

$$\frac{dv_x}{dt} = -k \cdot \left(\sqrt{x^2 + (-y)^2} - l_0\right) \cdot \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}\right) \cdot \frac{1}{m} - \frac{1}{2}\rho C d A \cdot \left(V_x^2 + V_y^2\right) \cdot \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \cdot \frac{1}{m}$$

Na direção y:

$R_y = m \cdot a_y$
$F_e^y - m \cdot g - Rar^y = m \cdot a_y$

$$F_e \cdot \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}\right) - m \cdot g - \frac{1}{2}\rho C d A \cdot \left(V_x^2 + V_y^2\right) \cdot \frac{V_y}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} = m \cdot \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = k \cdot \left(\sqrt{x^2 + (-y)^2} - l_0\right) \cdot \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}\right) \cdot \frac{1}{m} - g - \frac{1}{2}\rho C d A \cdot \left(V_x^2 + V_y^2\right) \cdot \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \cdot \frac{1}{m}$$

Ou:

$$\frac{dy}{dt} = V_y$$

$$\frac{dv_y}{dt} = k \cdot \left(\sqrt{x^2 + (-y)^2} - l_0\right) \cdot \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + (-y)^2}}\right) \cdot \frac{1}{m} - g - \frac{1}{2}\rho C d A \cdot \left(V_x^2 + V_y^2\right) \cdot \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}} \cdot \frac{1}{m}$$

3. Agora, você deverá implementar um código em Python para gerar gráficos que **comparem o comportamento do pêndulo quando a resistência do ar é considerada e quando ela é desconsiderada**. Assim, você deverá gerar três gráficos, cada um deles exibindo tanto o caso em que a resistência do ar é considerada, quanto o caso em que ela é desconsiderada (não se esqueça de colocar as legendas); esses três gráficos são:

- a **trajetória** (ou seja, um gráfico de y por x) do pêndulo;
- a **abscissa** do pêndulo ao longo do tempo (ou seja, um gráfico de x por t);
- a **ordenada** do pêndulo ao longo do tempo (ou seja, um gráfico de y por t);

Esses gráficos comparativos devem ser gerados para a seguinte situação: (simule os $20\ s$ iniciais do movimento usando um Δt conveniente):

- $l_0 = 30\ cm$
- $m = 200\ g$
- $k = 10\ N/m$
- $g = 10 m/s^2$
- $R = 10\ cm$
- $C_D = 1{,}5$
- $\rho = 1\ kg/m^3$

Com condições iniciais:

- $x(0) = 55\ cm$
- $\frac{dx}{dt}(0) = 0$
- $y(0) = 0$
- $\frac{dy}{dt}(0) = 0$

Na sua entrega, você deverá enviar dois arquivos:

- o código em Python que foi utilizado para implementar o pêndulo;
- um PDF com as respostas às perguntas anteriores;