数列极限

数列极限的定义与性质

一、

DATE : NO :

2.1 数列极限的定义

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$，∃正整数N，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$

理解：你先说一个数(ε)，我找一个数($\exists N\in N^*$)，只要我找的数比你要求的误误差小，我就说这个数就是你要找的。

2.2 收敛数列的性质

① 极限若存在，极限必唯一。
(极限的唯一性)

② 收敛数列的有界性

③ 收敛数列保号性

④ 数列收敛，则子数列也收敛

①证明：(用反证法)

设同时有 $x_n\to a$，$x_n\to b$，且$a<b$

$$\because \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists N_1\in N^+，使当n>N_1时，|x-a|<\frac{b-a}{2}成立 \\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow \exists N_2\in N^+，当n>N_2时，|x-b|<\frac{b-a}{2}成立 \end{cases}$$

取$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n>N$时上面两式都成立。

对于上面两式化简得 $\begin{cases} x_n < \frac{b+a}{2} \\ x_n > \frac{a+b}{2} \end{cases}$ 矛盾。

所以极限唯一

② 证明：若数列收敛，

设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

取 $\varepsilon=1$，$\exists N\in N^+$ 当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<1$ 成立

所以，对于 $n>N$ 时，

$\cancel{|x_n-a|<1 \Leftrightarrow |x_n-a+a|\le}$

$|x_n| = |x_n-a+a| \le |x_n-a|+|a| < 1+|a|$

$\therefore$ x_n 有界

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，且 $a>0$（或 $a<0$），那么存在 $N\in N^+$ 当 $n>N$ 时，$x_n>0$（或 $x_n<0$）

证明：当 $a>0$ 时，

取 $\varepsilon=\frac{a}{2}>0$，$\exists N\in N^+$，当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\frac{a}{2}$

$\Rightarrow x_n > a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0$

函数极限

函数极限的定义

二、函数极限

1.1. 定义：

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

1.2. 单侧极限.

左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ （$f(x_0^-)=A$）

$\forall\varepsilon>0,\ \exists\ x_0+\delta<x<x_0,\ |f(x)-A|<\varepsilon$

右极限

$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$

$\forall\varepsilon>0$, $\exists x_0<x<x_0+\delta$, 使得 $|f(x)-A|<\varepsilon$

3. 极限存在 $\Longleftrightarrow$ 左、右极限存在.

4. 无穷极限.

① 定义: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$,

当 $|x|>X$ 时, 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 使 $x>X$ 时
有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, 使 $x<-X$ 时
有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

函数极限的性质

2.1 函数极限的性质.

①. 函数极限的唯一性.

② 局部有界性.

③ 局部保号性.

无穷大与无穷小

三、无穷小与无穷大

DATE: NO:

1)无穷小：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ （无穷小是一个过程）

在自变量的同一变化过程中 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）
函数 $f(x)$ 具有极限的充要条件是
$f(x)=A+\alpha$，（α是无穷小）

证：必要性：

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $0<|x-x_0|<\delta$
有 $|f(x)-A|<\varepsilon$

令 $\alpha=f(x)-A$，则 α是当 $x\to x_0$ 时的无穷小
即 $f(x)=A+\alpha$.

充分性：

设 $f(x)=A+\alpha$，A是常数.
由 α 为 $x\to x_0$ 时的无穷小，
则 $|f(x)-A|=|\alpha|$
$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，
有 $|\alpha|=|f(x)-A|<\varepsilon$
$\therefore$ A是 $f(x)$，$x\to x_0$ 时的极限.

极限的运算法则

四 极限的运算法则.

1. 有限个无穷小之和也是无穷小.

2. 有界函数与无穷小的乘积还是无穷小.

(推论：常数与无穷小乘积为无穷小.

有限个无穷小乘积为无穷小)

3 若 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,

则

$$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$$

$$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$$

若 $B\neq 0$ ，则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$

推论：$\lim Cf(x)=C\lim f(x)$

若 $\lim f(x)$ 存在，且 n 为正整数.

则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$

4. 若 $\varphi(x)\geq\psi(x)$ ，且 $\lim\varphi(x)=A$, $\lim\psi(x)=B$

则 $A\geq B$.

5. 复合函数的极限.

$$\lim_{x\to x_0}f(g(x))=\lim_{u\to u_0}f(u)=A$$

极限存在准则与重要极限

五：极限存在准则 两个重要极限

1. 夹逼准则

① 若数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足：

从某项起，即 $\exists n_0 \in N_+$，当 $n > n_0$ 时，有

$$y_n \leq x_n \leq z_n;$$

$$\lim_{n \to \infty} y_n = a \quad \lim_{n \to \infty} z_n = a$$

则 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

证：
$$\begin{cases} \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_1 \in N_+，当\ n > N_1\ 时，|y_n - a| < \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N_2 \in N_+，当\ n > N_2\ 时，|z_n - a| < \varepsilon \end{cases}$$

则
$$\begin{cases} a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \\ a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon \end{cases}$$

当 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 时，$\lim_{n \to \infty} y_n = a$，$\lim_{n \to \infty} z_n = a$ 同时成立

$$a - \varepsilon \leq y_n \leq x_n \leq z_n \leq a + \varepsilon$$

则 $a - \varepsilon \leq x_n \leq a + \varepsilon$

即 $\lim_{n \to \infty} x_n = a$

② 若：

当 $x\in \mathring{U}(x_0,r)$ 或 ($|x|>M$) 时.

$$g(x)\le f(x)\le h(x)$$

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\(x\to\infty)}} f(x)=A$.

2. 重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

准则2.

单调有界数列函数必收敛.

Cauchy 极限存在准则

数列 $\{x_n\}$ 收敛的充要条件是：

$\forall\varepsilon>0$, $\exists N\in N^+$, 使得 $m>N$, $n>N$ 时, 有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon$$

即,对于任给的 ε, 在数轴上一切有足够大号码的点 x_n, 任意两点之间距离小于 ε.

无穷小的比较

六、无穷小的比较

1. 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$，则 β 是 α 的高阶无穷小 $\beta=o(\alpha)$

如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$，则 β 是比 α 低阶的无穷小.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则 β 与 α 是同阶无穷小.

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，则 β 是关于 α 的 k 阶无穷小

若 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，则 β 与 α 是等价无穷小. $\alpha\sim\beta$

常用等价无穷小.

$x\to 0$ 时，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{1}{n}x$

证：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{\frac{1}{n}x}$

$=n\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{=} n\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{n}(1+x)^{\frac{1}{n}-1}}{1}$

$=1$

$x\to 0$，$\sin x\sim x$ $\quad \ln(1+x)\sim x$

$\tan x\sim x$ $\quad e^x-1\sim x$

$\arcsin x\sim x$ $\quad (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$

$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

β与α是等价无穷小的充要条件为

$$\beta = \alpha + o(\alpha)$$

证：必要性：

$$\lim \frac{\beta-\alpha}{\alpha} = \lim\left(\frac{\beta}{\alpha}-1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \beta-\alpha = o(\alpha) \Rightarrow \beta = \alpha + o(\alpha)$$

充分性：$\beta = \alpha + o(\alpha)$

$$\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\alpha + o(\alpha)}{\alpha} = \lim\left(1+\frac{o(\alpha)}{\alpha}\right) = 1$$