第二章 导数与微积分

引例

1. 我们已经一辆汽车在一段时间（t）内行驶的路程（s），我们很快就能知道它在这段时间内的平均速度：$\bar{v} = \frac{s}{t}$。

   但是，如果我们想知道它在某一特定时刻的速度（例如，汽车启动后第5s的速度），那我们该如何计算？

   我们可以取第5s-第5.00001s汽车所行驶的路程，然后通过速度公式，我们就可以近似地得到汽车在第5s时的速度。当我们取时间间隔也小，所得出的速度就越接近汽车的瞬时速度。

   将以上方法翻译成数学的语言就是：

   $v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (when \;\; \Delta t \to 0)$

2. 如果我们已知一个函数的图像，我们想知道它在某一点（P）处的切线斜率(slope)，我们该怎么计算？

   我们可以在函数图像上再取一点（Q），这样我们可以知道割线PQ（secant）的斜率。我们可以固定P，让Q点不断地接近P点，这样算出的结果可以认为是函数再P点处的切线斜率。

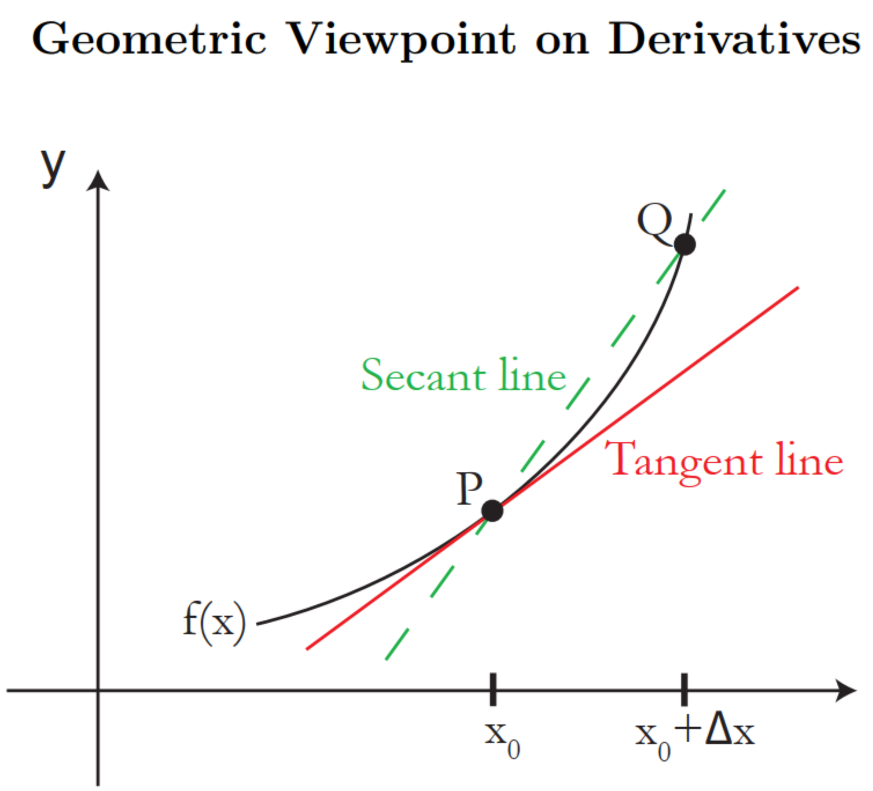


Figure 1: A function with secant and tangent lines

导数的定义

由上面两个引例我们可以知道，对于求速度或者是函数的斜率都可以归结成极限问题。由此引出导数的定义：

$$f^{'}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

其他形式有： $f^{'}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

（从几何角度上看，导数就是函数在某一点处切线的斜率。从物理角度上看，导数可以是瞬时速度，电流等物理量。关键是理解导数的意义：瞬时变化率）

常见函数的导数证明：

(1) $f(x)=C$ ， $f'(x)=0$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0$$

(2) $f(x)=x^n$ $(n\in N_+)$ ， $f'(x)=nx^{n-1}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

二项式展开

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x^n+nhx^{n-1}+o(h))-x^n}{h}$$ （ $o(h)$ h的高阶无穷小）

$$=\lim_{h\to 0}\frac{nhx^{n-1}+o(h)}{h}$$

$$=nx^{n-1}$$

单侧导数

左导数： $f_{-}^{'}(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

右导数： $f_{+}^{'}(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

函数在某一点可导的等价条件：函数在该点处的左导数和右导数存在且相等。

函数f(x)在区间[a, b]可导的条件：函数f(x)在(a, b)可导，且 $f_{+}^{'}(a),f_{-}^{'}(b)$ 存在。

函数可导与连续的关系

函数连续的定义

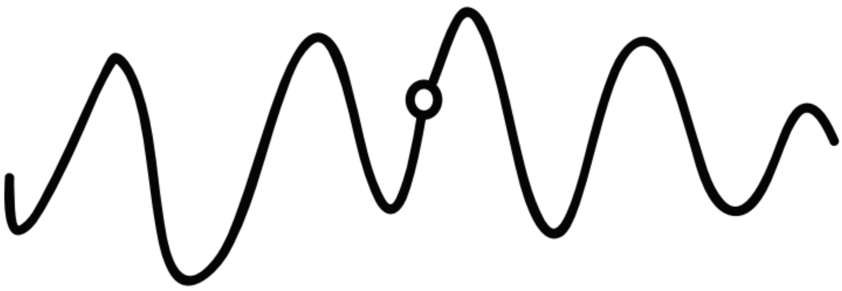
函数f(x)在x_0处连续(continuous):

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

如果不满足上面的公式，我们就称函数在x_0处不连续。

函数不连续的常见形式

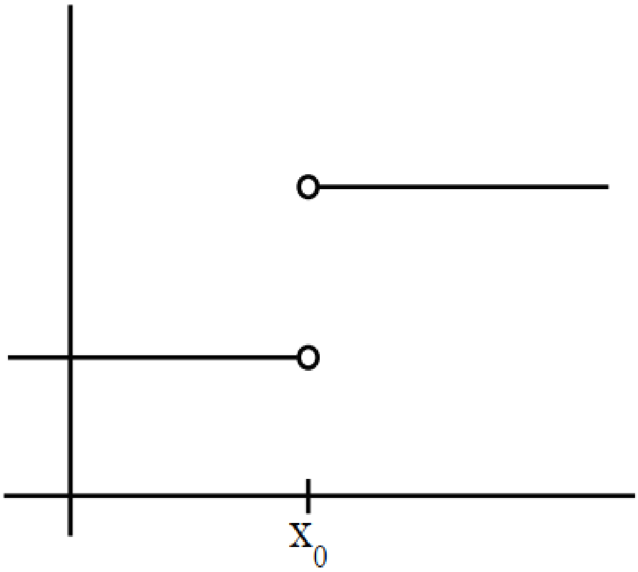
可去间断点(Removable Discontinuity)



定义：函数f(x)在x_0处的**无定义**，但$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x)$。

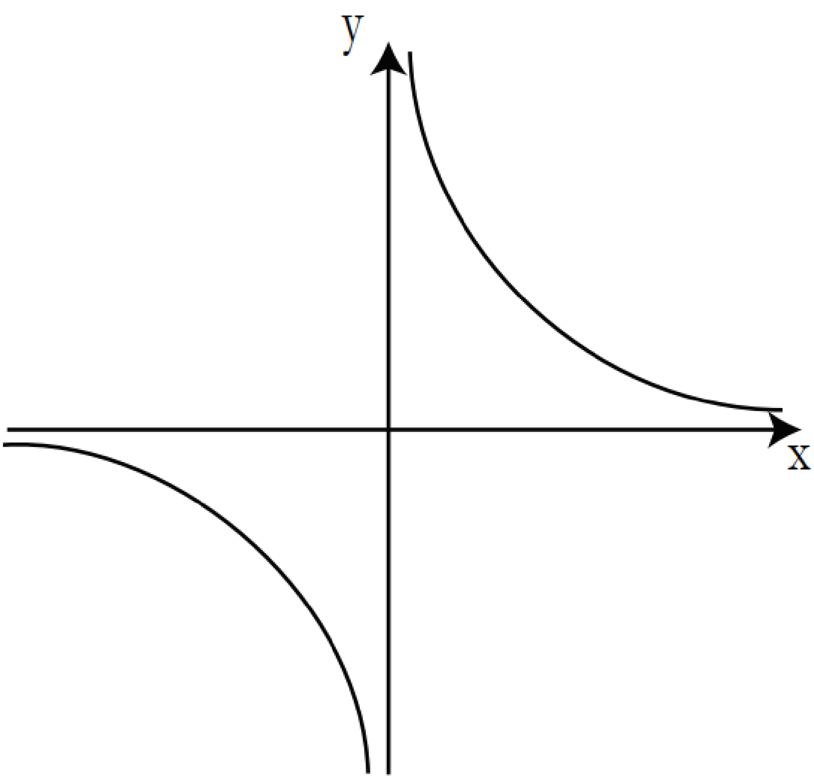
例如：$\frac{sinx}{x}$在x=0处，无定义，但是$\lim_{x \to x_0} \frac{sinx}{x} = 0$

跳跃间断点(Dump Discontinuity)



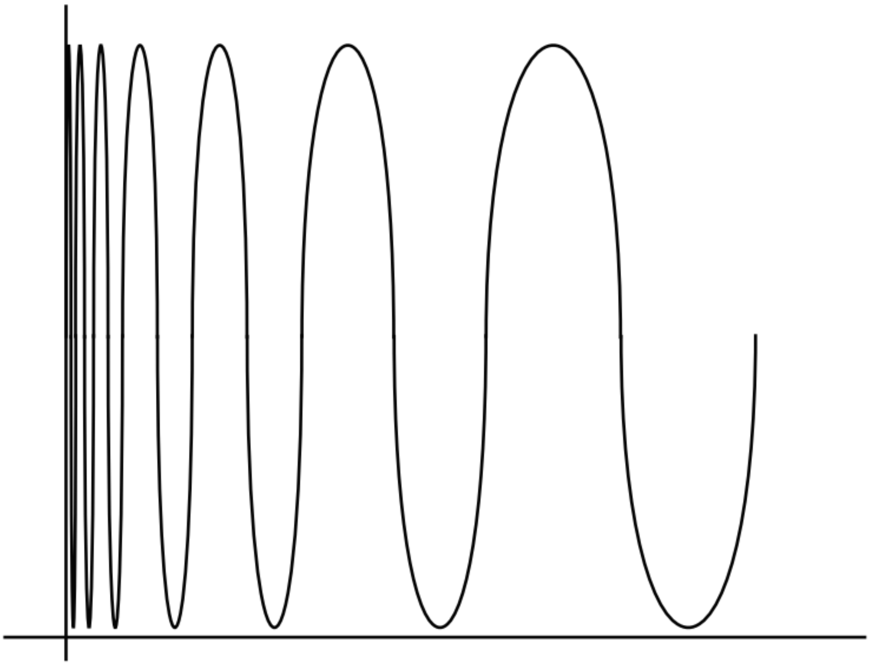
定义：函数f(x)在x_0处存在$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$，$\lim_{x\to x_0^-} f(x)$，但$\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$

无穷间断点



$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$，$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty$

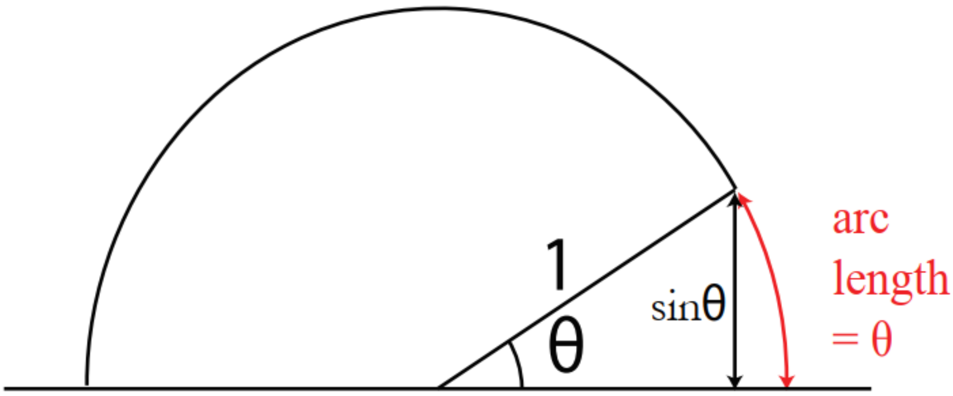
其他类型的间断点(Other Discontinuity)

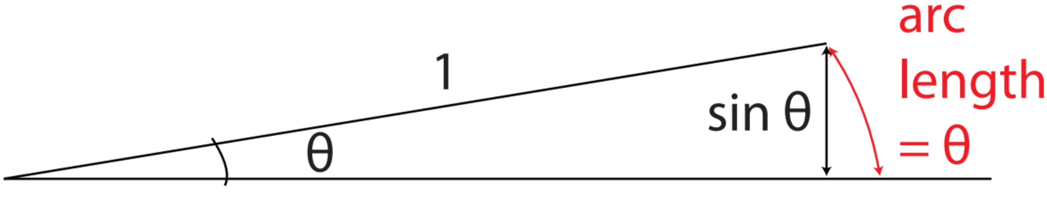


两个三角极限的证明

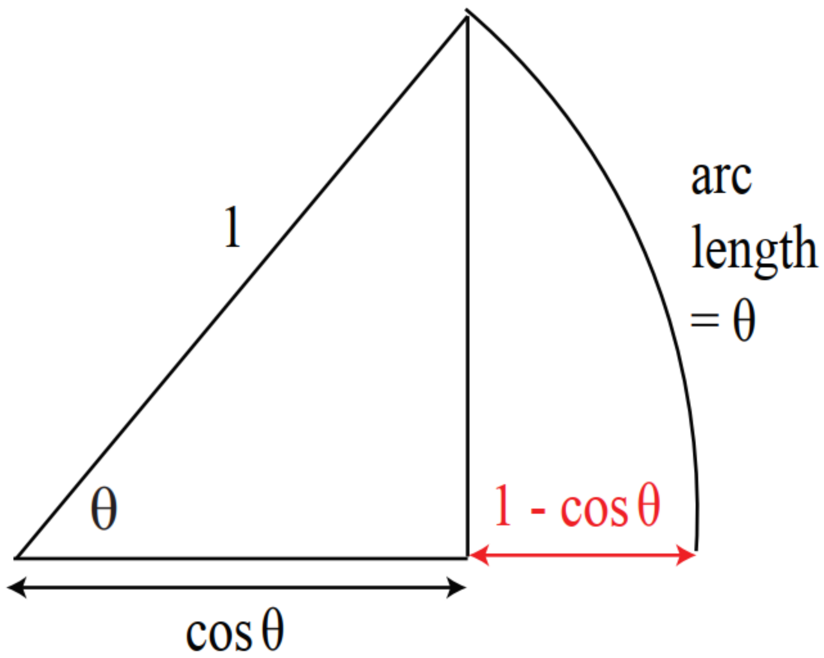
$$\lim_{\theta \to 0} \frac{sin\theta}{\theta} = 1; \quad \lim_{\theta \to 0} \frac{1 - cos\theta}{\theta} = 0$$

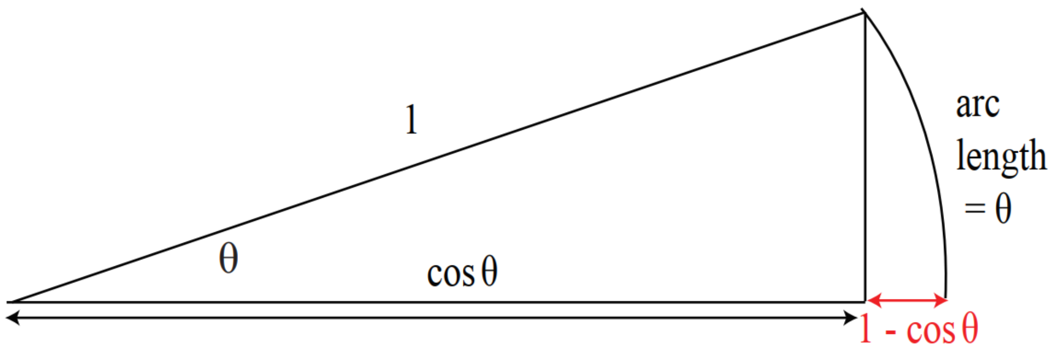
其 中， θ为 弧 度 而 不 是 角 度





由上图可以看出当$\theta \to 0$时，$sin\theta \to \theta$，证明完毕。





由上图，我们可以看出$\theta \rightarrow 0$时，$1-cos\theta \rightarrow 0$， 但是$1-cos\theta \rightarrow 0$的速度比$\theta \rightarrow 0$还要快，证明完毕。

可导一定连续，连续不一定可导

设函数f(x)在x处可导，即存在.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$$

由极限与无穷小的关系可知.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$$ （α为$\Delta x\to 0$时的无穷小）

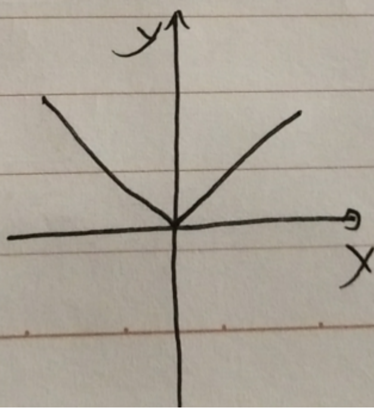
则 $\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x$

当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$

所以，函数f(x)在某点可导，则必连续.

注意，可导$\Rightarrow$连续，连续$\nRightarrow$可导，如下.

$f(x)=|x|$



函数是连续，但在(0,0)处不可导.

函数的求导法则

函数的和，差，积，商的求导法则。

函数的和、差、积、商的求导法则

设$u=u(x)$，$v=v(x)$都可导，则

（1） $(u\pm v)'=u'\pm v'$ （2） $(Cu)'=Cu'$（C是常数）

（3） $(uv)'=u'v+uv'$ （4） $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

DATE： NO：

证明1：$[u(x)\pm v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x)]-[u(x)\pm v(x)]}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)$$

$$=u'(x)\pm v'(x)$$

证明2：$[u(x)v(x)]'$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)+u(x+\Delta x)v(x)-u(x+\Delta x)v(x}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left[v(x)\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}+u(x+\Delta x)\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right]$$

$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

证明了: $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v} - \frac{u}{v}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}\left(\frac{\Delta u v - u\Delta v}{(v+\Delta v)v}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta u}{\Delta x}v - \frac{u\Delta v}{\Delta x}}{(v+\Delta v)v}$$

$$= \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{u'(x)v - uv'(x)}{v^2(x)}$$

乘积求导的几何解释:

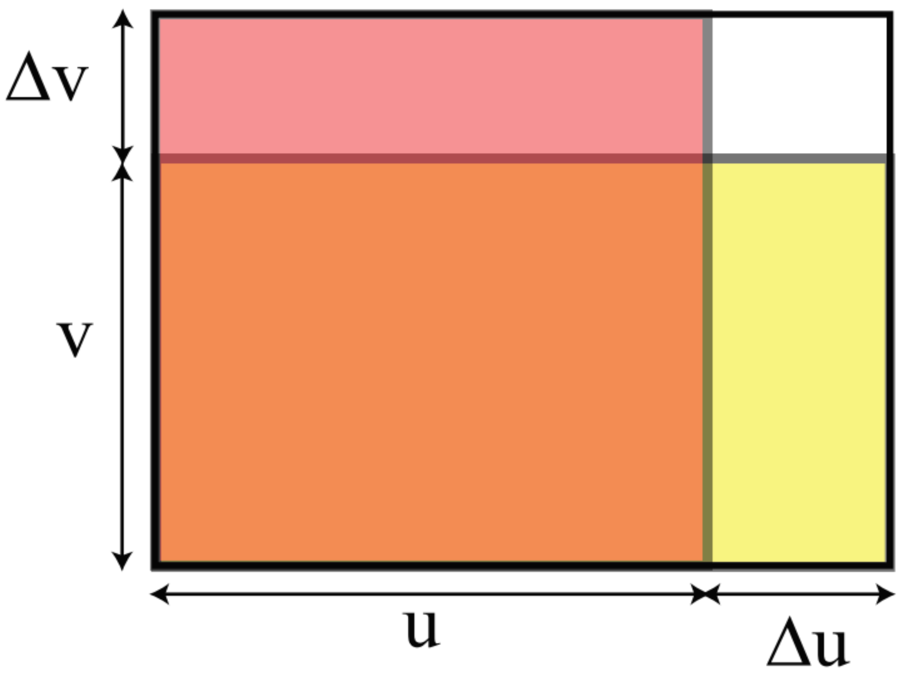


Figure 1: A graphical “proof” of the product rule

Δuv为最外面的矩形面积减去里面橙色矩形的面积。

由图我们可以得到$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\Delta v$。当$\Delta u, \Delta v \to 0$时，$\Delta u\Delta v$相比于$u\Delta v, v\Delta u$更微不足道，所以化简得$\Delta(uv) = u\Delta v + v\Delta u$

例子:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\sin x &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\cos x\sin\Delta x-\sin(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\sin x(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}+\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x}\right]\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\sin x\left(\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\left(\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

复合函数求导法则（Chain Rule）

如果u = g(x) 在点x处可导，而f(u) 在u = g(x)可导，那么复合函数f[g(x)] 在点x处可导，其导数为：

$\frac{dy}{dx}=f^{'}(u)\times g^{'}(x)$或 $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

证：由 $y=f(u)$ 在点 u 处可导，因此

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)$$

由极限与无穷小关系得.

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha(\Delta u)$$ （$\alpha(\Delta u)$为$\Delta u\to 0$的无穷小）

则 $\Delta y=\Delta u f'(u)+\Delta u\,\alpha(\Delta u)$

则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}f'(u)+\frac{\Delta u}{\Delta x}\alpha(\Delta u)$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}f'(u)+\frac{\Delta u}{\Delta x}\alpha(\Delta u)\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}f'(u)\right)$$

$$=g'(x)f'(u)$$

相关例题：

Example 1. $y = f(x) = \sin x, x = g(t) = t^2$.
So, $y = f(g(t)) = \sin(t^2)$. To find $\frac{dy}{dt}$, write

$t_0 = t_0$	$t = t_0 + \Delta t$
$x_0 = g(t_0)$	$x = x_0 + \Delta x$
$y_0 = f(x_0)$	$y = y_0 + \Delta y$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

As $\Delta t \to 0$, $\Delta x \to 0$ too, because of continuity. So we get:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} \leftarrow \textbf{The Chain Rule!}$$

In the example, $\frac{dx}{dt} = 2t$ and $\frac{dy}{dx} = \cos x$.

$$\begin{aligned} \text{So,} \quad \frac{d}{dt}\left(\sin(t^2)\right) &= (\frac{dy}{dx})(\frac{dx}{dt}) \\ &= (\cos x)(2t) \\ &= (2t)\left(\cos(t^2)\right) \end{aligned}$$

Example 2. $\frac{d}{dx}\cos\left(\frac{1}{x}\right) = ?$

Let $u = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} \\ \frac{dy}{du} &= -\sin(u); \qquad \frac{du}{dx} = -\frac{1}{x^2} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\sin(u)}{x^2} = (-\sin u)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} \end{aligned}$$

Example 3. $\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right) = ?$

There are two ways to proceed. $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n$, or $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

1. $\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right)^n = n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -nx^{-(n-1)}x^{-2} = -nx^{-n-1}$
2. $\frac{d}{dx}\left(x^{-n}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = nx^{n-1}\left(\frac{-1}{x^{2n}}\right) = -nx^{-n-1}$ (Think of x^n as u)

反函数求导法则

反函数(inverse function):

形如，y = f(x), g(y) = x的函数。

($x = g(y) = f^{-1}(y)$)

反函数的性质

关于y=x对称。

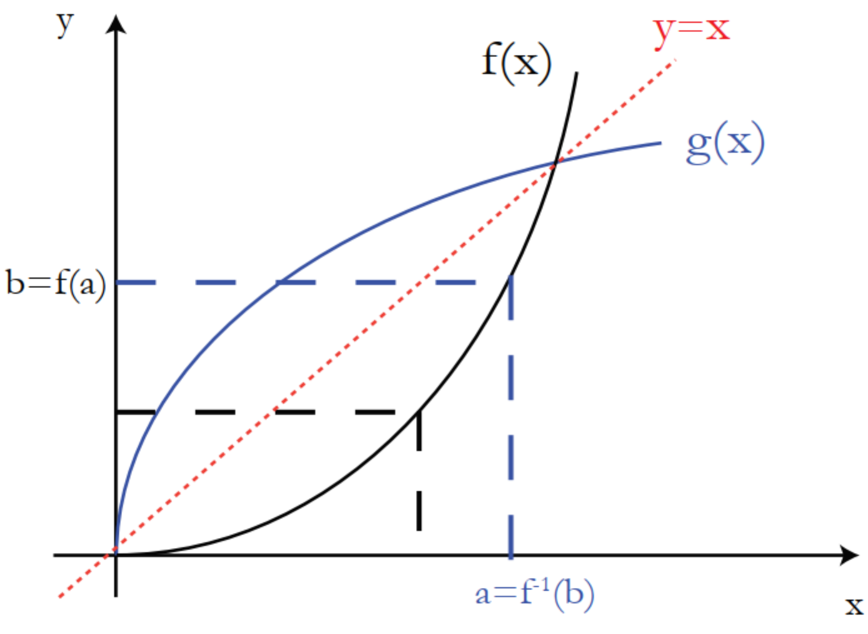


Figure 2: You can think about f^{-1} as the graph of f reflected about the line $y = x$

反函数的导数

如果函数x = f(y) 在区间I_y内单调、可导且$f^{'}(y) \neq 0$，那么它的反函数$y = f^{-1}(x)$在区间$I_x = \{x|x = f(y), y \in I_y\}$内也可导，且$[f^{-1}(x)]^{'} = \frac{1}{f^{'}(y)}$或$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$

证明:

$$y = f(x)$$
$$f^{-1}(y) = x$$
$$\frac{d}{dx}(f^{-1}(y)) = \frac{d}{dx}x = 1$$
$$chainrule : \frac{d}{dy}(f^{-1}(y))\frac{dy}{dx} = 1$$
$$\frac{d}{dy}f^{-1}(y) = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

简而言之：反函数的导数 = 1/原函数的导数

相关例子

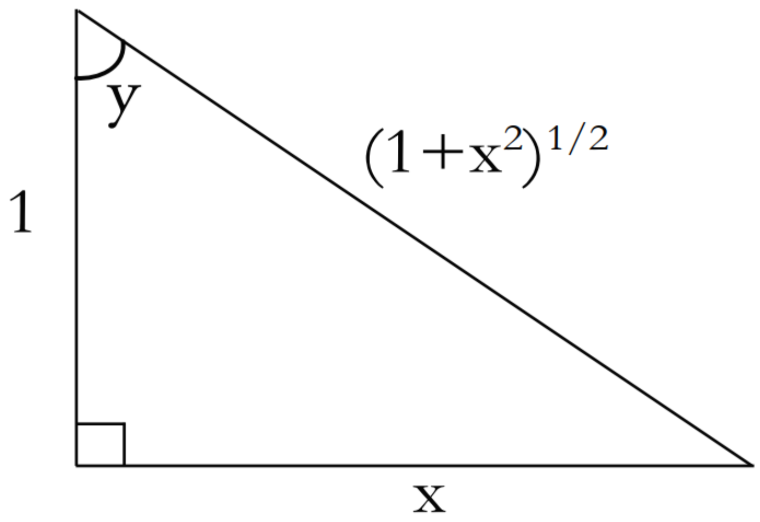
example 1:

求y = arctan(x)的导数。

Example. $y = \arctan(x)$

$$\begin{aligned}
\tan y &= x \\
\frac{d}{dx}[\tan(y)] &= \frac{dx}{dx} = 1 \\
\frac{d}{dy}[\tan(y)]\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\left(\frac{1}{\cos^2(y)}\right)\frac{dy}{dx} &= 1 \\
\frac{dy}{dx} &= \cos^2(y) = \cos^2(\arctan(x))
\end{aligned}$$

This form is messy. Let us use some geometry to simplify it.



In this triangle, $\tan(y) = x$ so

$$\arctan(x) = y$$

The Pythagorian theorem tells us the length of the hypotenuse:

$$h = \sqrt{1+x^2}$$

From this, we can find

$$\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

From this, we get

$$\cos^2(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2 = \frac{1}{1+x^2}$$

So,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

In other words,

$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

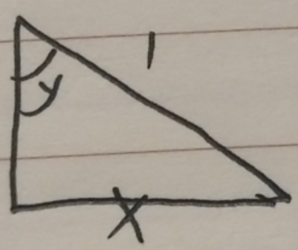
example 2：

求y = arcsinx 导数

$$y = \arcsin x$$

$$\Rightarrow \sin y = x$$

$$y' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$



$$\cos y = \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

高阶导数(Higher derivatives)

Higher Derivatives

Higher derivatives are derivatives of derivatives. For instance, if $g = f'$, then $h = g'$ is the second derivative of f. We write $h = (f')' = f''$.

Notations

$f'(x)$	Df	$\frac{df}{dx}$
$f''(x)$	$D^2 f$	$\frac{d^2 f}{dx^2}$
$f'''(x)$	$D^3 f$	$\frac{d^3 f}{dx^3}$
$f^{(n)}(x)$	$D^n f$	$\frac{d^n f}{dx^n}$

Higher derivatives are pretty straightforward — just keep taking the derivative!

Example. $D^n x^n = ?$
Start small and look for a pattern.

$$\begin{aligned}
Dx &= 1 \\
D^2x^2 &= D(2x) = 2 \quad (= 1 \cdot 2) \\
D^3x^3 &= D^2(3x^2) = D(6x) = 6 \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3) \\
D^4x^4 &= D^3(4x^3) = D^2(12x^2) = D(24x) = 24 \quad (= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4) \\
D^nx^n &= n! \leftarrow \text{we guess, based on the pattern we're seeing here.}
\end{aligned}$$

Example 2:

求出 y = sin x 的n阶导数。

$$y = sinx$$

$$y^{(1)} = cosx = sin(x + 1 \times \frac{\pi}{2})$$

$$y^{(2)} = -sinx = sin(x + 2 \times \frac{\pi}{2})$$

$$y^{(3)} = -cosx = sin(x + 3 \times \frac{\pi}{2})$$

$$y^{(4)} = sinx = sin(x + 4 \times \frac{\pi}{2})$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = sin(x + n \times \frac{\pi}{2})$$

Example 3:

求出$y = \ln \frac{1}{1+x}$的n阶导数。

$$y^{(1)} = \frac{1}{1+x} = \frac{(-1)^0 \cdot 0!}{(1+x)^1}$$

$$y^{(2)} = -\frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(-1)^1 \cdot 1!}{(1+x)^2}$$

$$y^{(3)} = \frac{2}{(1+x)^3} = \frac{(-1)^2 \cdot 2!}{(1+x)^3}$$

$$y^{(4)} = -\frac{6}{(1+x)^4} = \frac{(-1)^3 \cdot 3!}{(1+x)^4}$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^{(n-1)} \cdot (n-1)!}{(1+x)^n}$$

和、乘积公式

和公式：$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

乘积公式：(类似于二项式展开)

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v^{(1)} + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v^{(2)} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

隐函数求导(Implicit Derivatives)

隐函数求导的原理是chain rule

例如：求出$x = e^y$的导数$\frac{dy}{dx}$

两边同时对x求导数：

$$\frac{d}{dx}x = \frac{d}{dx}e^y$$
$$1 = \frac{d}{dy}e^y\frac{dy}{dx}$$
$$1 = e^y\frac{dy}{dx}$$
$$\frac{dy}{dx} = e^{-y}$$

相关例子:

Example 1:

求$y = x^{\frac{m}{n}}$的导数

$$y^n = x^m$$
$$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{m}{n}\left(\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}}\right) \\
&= \frac{m}{n}\left(\frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}}\right) \\
&= \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{x^{m(n-1)/n}} \\
&= \frac{m}{n}x^{(m-1)-\frac{m(n-1)}{n}} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{n(m-1)-m(n-1)}{n}} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{nm-n-nm+m}{n}} \\
&= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-\frac{n}{n}} \\
\text{So,}\quad \frac{dy}{dx} &= \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}
\end{aligned}
$$

参数方程的求导。

已知：

$$f(x)=\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

求 $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\psi^{'}(t)}{\varphi^{'}(t)}$$

$$\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})=\frac{d}{dt}(\frac{\psi^{'}(t)}{\varphi^{'}(t)})\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{d}{dt}(\frac{\psi^{'}(t)}{\varphi^{'}(t)})\cdot\frac{1}{\varphi^{'}(t)}$$

指数，对数求导以及双曲函数

(Exponential and Log, Logarithmic Differentiation, Hyperbolic Functions)

引例：求出$\frac{d}{dx}a^x$

由定义可得：

$$\frac{d}{dx}a^x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$$

Let:

$$M(a) \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

so:

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x M(a)$$

but, we don't yet know what $M(a)$ is.

Indeed,

$$M(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{0+\Delta x} - a^0}{\Delta x} = \frac{d}{dx} a^x|_{x=0}$$

Geometrically, M(a) is the slope of the graph $y = a^x$ at x=0.

We define a natural number **e** which satisfies $M(e) = 1$.

How we to find the number of **e**.

We can notice that when the base *a* is increase, the graph a^x gets steeper.

so we can increase the base *a* slowly until we find **M(a) = 1**

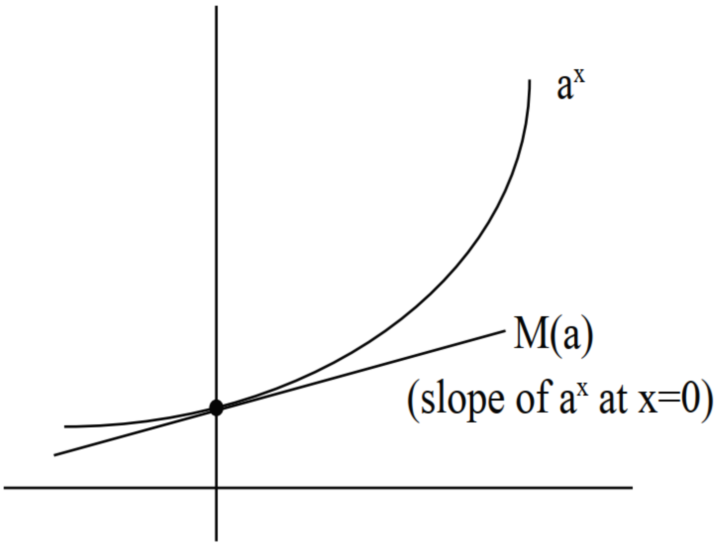


Figure 1: Geometric definition of $M(a)$

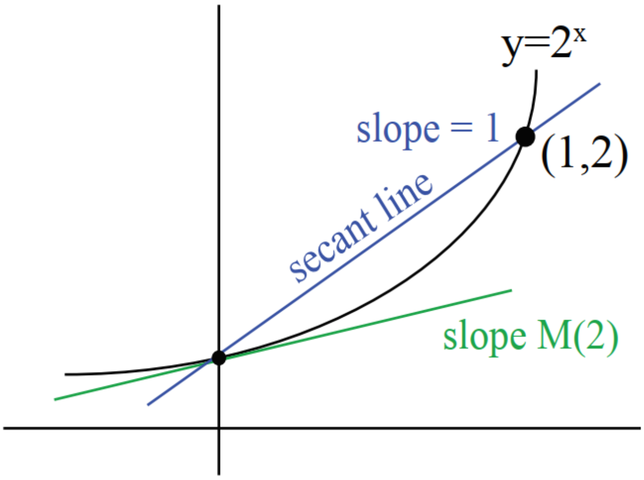


Figure 2: Slope $M(2) < 1$

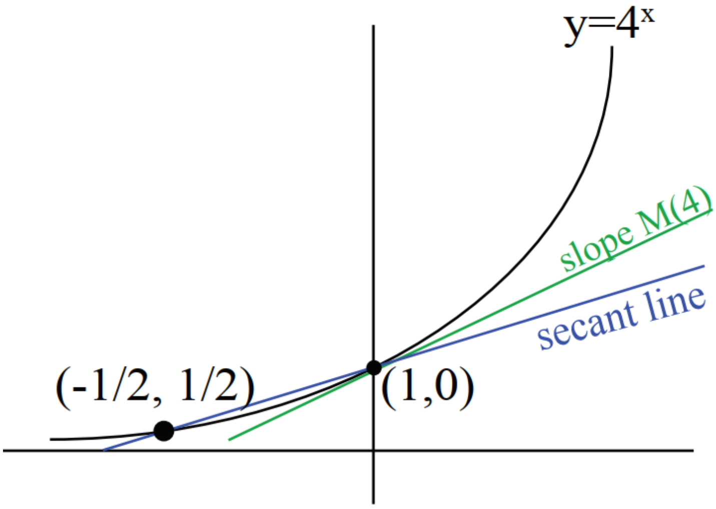


Figure 3: Slope $M(4) > 1$

Thus:

$M(e) = 1$

$M(e) = \lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$

or,

$\frac{d}{dx}(e^x) = 1 \; at \; x = 1$

so,

$\frac{d}{dx} e^x = e^x$

rewrite a^x,

$a^x = e^{xlna}$

so,

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{xlna} = lna \cdot e^{xlna} = a^x lna$$

对数微分法

如果我们想算出$\frac{d}{dx}f(x)$，我们可以先通过算出$\frac{d}{dx}ln(f(x))$，具体步骤如下：

让，$u = f(x)$

则，$\frac{d}{dx}ln(u) = \frac{dln(u)}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}(\frac{du}{dx})$

因为，$u = f, \frac{du}{dx} = f'$

所以，$(lnf)' = \frac{f'}{f} \Rightarrow f' = f(lnf)'$

相关例子

Example 1. $\frac{d}{dx}(x^x) = ?$

With variable ("moving") exponents, you should use either base e or logarithmic differentiation. In this example, we will use the latter.

$$\begin{aligned} f &= x^x \\ \ln f &= x \ln x \\ (\ln f)' &= 1 \cdot (\ln x) + x\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x) + 1 \\ (\ln f)' &= \frac{f'}{f} \end{aligned}$$

Therefore,

$$f' = f(\ln f)' = x^x (\ln(x) + 1)$$

Example 2. Use logs to evaluate $\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$.

Because the exponent k changes, it is better to find the limit of the logarithm.

$$\lim_{k\to\infty} \ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right]$$

We know that

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right] = k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$$

This expression has two competing parts, which balance: $k \to \infty$ while $\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \to 0$.

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right] = k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\frac{1}{k}} = \frac{\ln(1+h)}{h} \quad (\text{with } h = \frac{1}{k})$$

Next, because $\ln 1 = 0$

$$\ln\left[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k\right] = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h}$$

Take the limit: $h=\frac{1}{k}\to 0$ as $k\to\infty$, so that

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\frac{d}{dx}\ln(x)\Big|_{x=1}=1$$

In all,

$$\lim_{k\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=1.$$

We have just found that $a_k=\ln[\left(1+\frac{1}{k}\right)^k]\to 1$ as $k\to\infty$.

If $b_k=\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, then $b_k=e^{a_k}\to e^1$ as $k\to\infty$. In other words, we have evaluated the limit we wanted:

$$\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k=e$$

双曲函数（hyperbolic function）

双曲正弦(hyperbolic sine)： $sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

双曲余弦(hyperbolic cosine)：$cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

$\frac{d}{dx}sinh(x)=cosh(x)$

$\frac{d}{dx}cosh(x)=sinh(x)$

重要等式:

$sinh^2(x)+cosh^2(x)=1$

函数的微分

定义:

设函数$y=f(x)$在某区间内有定义，x_0以及$x_0+\Delta x$在该区间内，如果函数的增量: $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$, 其中A 为不依赖于$\Delta x$的常数，则称函数y = f(x)在$x_0$处可微，$A\Delta x$叫做函数y=f(x)在$x_0$处的微分，记作：$dy=A\Delta x$

可微于可导是关系

由$\frac{\Delta y}{\Delta x}=A+\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}$

得$A=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{'}(x)$

所以，可微一定可导。

由极限与无穷小的关系得:

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f^{'}(x)+\alpha$，其中，$\alpha\to 0\ \ when\ \Delta x\to 0$

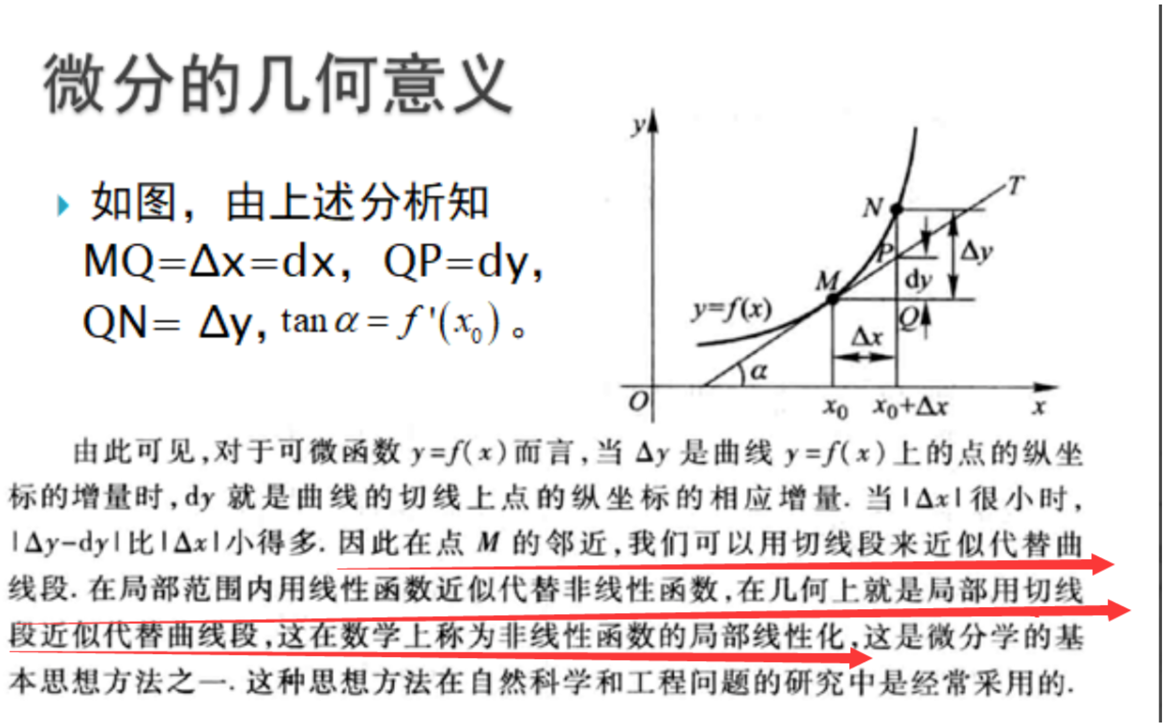
$\Delta y=f^{'}(x)\Delta x+\alpha\Delta x$

由于$f^{'}(x)$不依赖于Δx，

所以，可导也是可微。

综上，可导⇔可微

微分的几何意义



由此可见，对于可微函数 $y=f(x)$ 而言，当 Δy 是曲线 $y=f(x)$ 上的点的纵坐标的增量时，dy 就是曲线的切线上点的纵坐标的相应增量. 当 $|\Delta x|$ 很小时，$|\Delta y-dy|$ 比 $|\Delta x|$ 小得多. 因此在点 M 的邻近，我们可以用切线段来近似代替曲线段. 在局部范围内用线性函数近似代替非线性函数，在几何上就是局部用切线段近似代替曲线段，这在数学上称为非线性函数的局部线性化，这是微分学的基本思想方法之一. 这种思想方法在自然科学和工程问题的研究中是经常采用的.

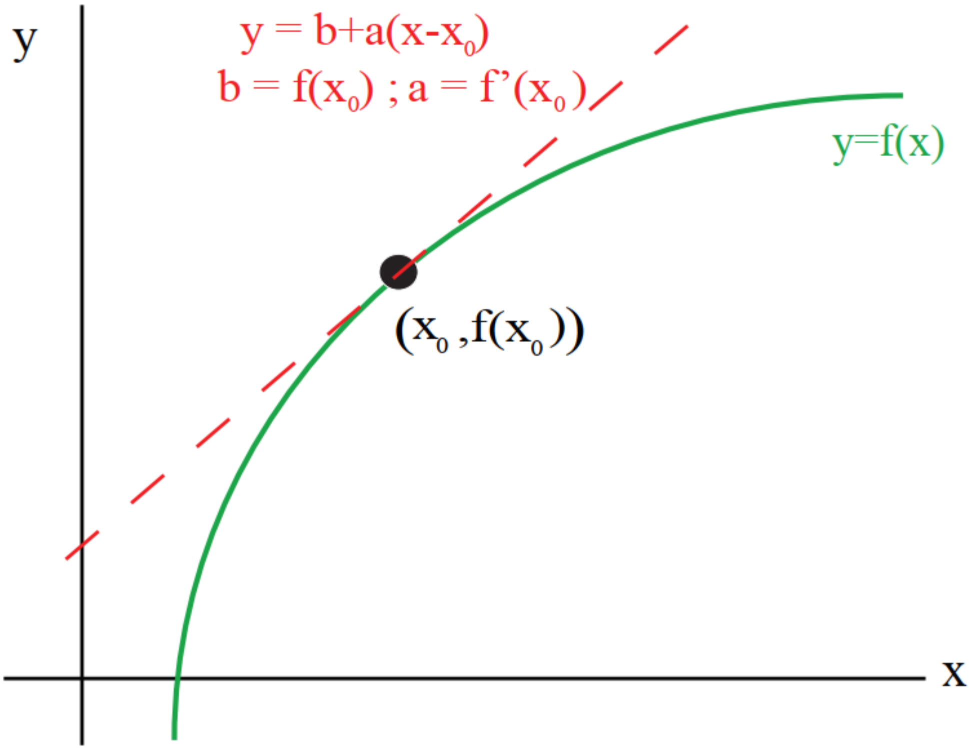
微分公式以及微分运算法则

函数的微分表达式：$dy=f^{'}(x)dx$

运算法则与导数运算法则一致(和、积、商、链式法则等)，只需把导数换成微分形式。

微分在计算上的近似应用

1. 线性近似



由图像可知，我们想计算函数在某一点的值，我们可以用函数在该点的切线近似。通过点斜式，我们可以得到近似公式为：$f(x) \approx f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$

相关例子：

Example 1: $f(x) = lnx, \quad x_0 = 1(basepoint)$

$f(x) = 0, \quad f^{'}(1) = \frac{1}{x}|_{x=1} = 1$

$lnx \approx f(1) + f^{'}(1)(x-1) = 0 + 1(x-1) = x - 1$

如果我们改变基点：

$x = 1 + \mu \quad u = x - 1$

$ln(1+u) = u$

线性近似列表：（在$x_0 = 0, \quad |x| << 1$时的近似）

$sinx \approx x$
$cosx \approx 1$
$e^x \approx 1 + x$
$ln(1+x) \approx x$
$(1+x)^r \approx 1 + rx$

Proofs

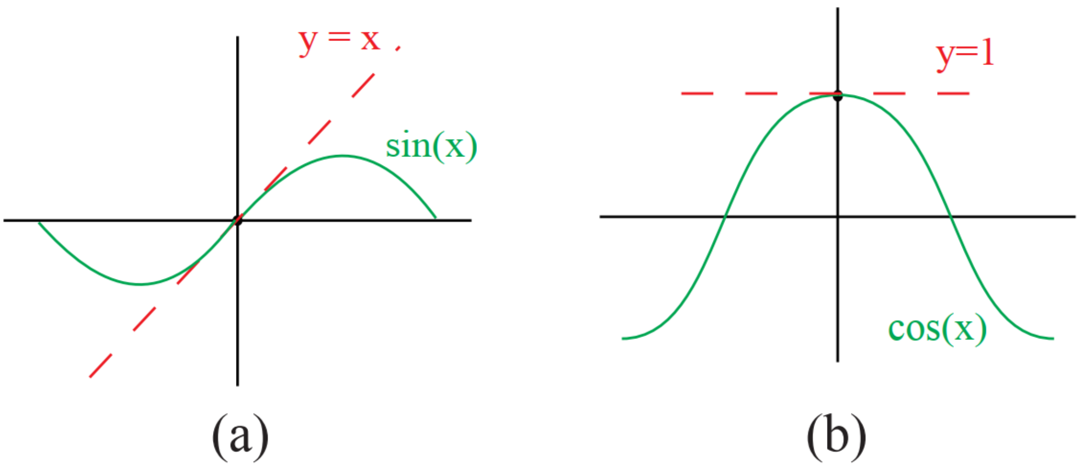
Proof of 1: Take $f(x) = \sin x$, then $f'(x) = \cos x$ and $f(0) = 0$

$$f'(0) = 1, f(x) \approx f(0) + f'(0)(x-0) = 0 + 1.x$$

So using basepoint $x_0 = 0, f(x) = x$. (The proofs of 2, 3 are similar. We already proved 4 above.)

Proof of 5:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^r; \qquad f(0) = 1 \\ f'(0) &= \frac{d}{dx}(1+x)^r|_{x=0} = r(1+x)^{r-1}|_{x=0} = r \\ f(x) &= f(0) + f'(0)x \ = 1 + rx \end{aligned}$$



Example 2:

Find the linear approximation of $f(x) = \dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x}}$; $near\ x = 0$

由上述可得$e^{-2x} \approx 1 + (-2x) = 1 - 2x$

$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x$

把两个近似公式结合在一起可以得到：

$\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x}} \approx (1-2x)(1+\frac{1}{2}x)^{-1}$

而$(1+\frac{1}{2}x)^{-1} \approx 1 - \frac{1}{2}x$

从而得到：$\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x}} \approx (1-2x)(1-\frac{1}{2}x) = 1 - \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}x^2$

忽视高阶无穷小量x^2，得到最终结果为

$\dfrac{e^{-2x}}{\sqrt{1+x}} \approx 1 - \frac{5}{2}x$

Example 3: 计算$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+2x)^{10}-1}{x}$

way1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{10}-1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+2x)^{10}-(1+2\cdot 0)^{10}}{x-0} = 20(1+2x)|_{x=0} = 20$$

way2:

由于$(1+2x)^{10}\approx 1+10(2x)=1+20x$，代入可以得

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)^{10}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1+20x-1}{x}=20$$

2. 二项式近似(quadratic approximation)

$$f(x)\approx f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2}(x-x_0)^2 \quad x\approx x_0$$

二项式近似列表($x\approx 0,\ \ |x|<<1$)

$$1.\ \sin x\approx x \qquad (\text{if } x\approx 0)$$

$$2.\ \cos x\approx 1-\frac{x^2}{2} \qquad (\text{if } x\approx 0)$$

$$3.\ e^x\approx 1+x+\frac{1}{2}x^2 \qquad (\text{if } x\approx 0)$$

$$4.\ \ln(1+x)\approx x-\frac{1}{2}x^2 \qquad (\text{if } x\approx 0)$$

$$5.\ (1+x)^r\approx 1+rx+\frac{r(r-1)}{2}x^2 \qquad (\text{if } x\approx 0)$$

误差估计

如果某个量的精确值(测量值)为A， 它的近似值为μ，则，

绝对误差：$|A-\mu|$

相对误差：$|\frac{A-\mu}{\mu}|\leq\delta_A$， 其中$\delta_A$为误差上限

Example 1:

设测得圆钢截面的直径$D=60.03mm$， 测量D的绝对误差限$\delta_D=0.05mm$。利用公式$A=\frac{\pi}{4}D^2$计算圆钢的截面积时，试估计面积差时的误差。

如果我们把测量D时产生的误差记作ΔD，利用公式$A=\frac{\pi}{4}D^2$产生的误差记作ΔA，则当$|\Delta D|$很小时，ΔA可用dA近似替代，即：$\Delta A\approx dy=\frac{\pi}{2}D\Delta D$

由于$|\Delta D|\leq\delta_D=0.05$

而$\Delta A\approx dy=\frac{\pi}{2}D\Delta D\leq\frac{\pi}{2}D\cdot\delta_D$

从而得到：$\delta_A=\frac{\pi}{2}\cdot 60.03\cdot 0.05\approx 4.712$

A的相对误差为： $\frac{\delta_A}{A}=\frac{\frac{\pi}{2}D\Delta D}{\frac{\pi}{4}D^2}=2\cdot\frac{\delta_D}{d}=2\cdot\frac{0.05}{60.03}$