Chapter 3: 信道与信道容量

Xuan

2020 年 9 月 17 日

1 信道的基本概念

1.1 二进制离散信道 (BSC)

该信道模型的输入和输出信号的符号数都是 2，即 $X \in A = 0\ 1$ 和 $Y \in B = 0,1$，转移概率为

$$\begin{aligned} p(Y=0|X=1) = p(Y=1|X=0) = p \\ p(Y=1|X=1) = p(Y=0|X=0) = 1-p \end{aligned} \tag{1}$$

1.2 加性高斯白噪声信道 (AWGN)

$$Y = X + G$$

G 是一个零均值、方差为 σ^2 的高斯随机变量，当 $X = a_i$ 给定后，Y 是一个均值为 a_i、方差为 σ^2 的高斯随机变量

$$p_Y(y|a_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(y-a_i)^2/2\sigma^2}$$

2 信道

信道可以看成是转移概率

对于信息 $M \in \mathcal{M}$，传输速率 $R = \frac{log(\mathcal{M})}{n}$，信道传输的过程即可表示为：

$$M \to x^n(M) \xrightarrow{p(y|x)} y^n \to \hat{M}$$

1. 设计一个方案，该方案可以达到某传输概率

2. 证明超出该传输速率无法传输 $\iff$ 能够传输的都不超过这个速率

2.1 1. 设计方案

2.1.1 典型序列

Define: x^n is (n, ε) typical, when $|N(x|x^n) - p(x)| < \varepsilon n$, for all $x \in \mathcal{X}$, where $N(x|x^n)$ is the empirical distribution.

$Pr(x^n istypical) \to 1$, when n $\to \infty$, which can be proved by Law of Large Numbers

2.2 典型集

Set $T(n, \varepsilon)$ 为典型序列的集合

1. $Pr(x^n \in T(n, \varepsilon)) \to 1$

2. $|T(n, \varepsilon)| \approx 2^{nH(x)}$

   2.1 $x^n \in T(\varepsilon, n), p(X^n = x^n) \approx 2^{-nH(x)}$

2.2.1 Proof

$$p(x^n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) = \prod_{x \in \mathcal{X}} p(x)^{N(x|x^n)n} (*)$$

$\Rightarrow$ 所有典型序列的概率都差不多大

$$log(*) = \sum_{x \in \mathcal{X}} nN(x|x^n) logp(x) \approx n \sum_{x \in \mathcal{X}} p(x) logp(x) = -nH(x)$$

Pr(x^n: x^n is typical) = * $\approx 2^{-nH(x)}$

2.3 典型集和散度的关系

$Pr(x^n \in T(n,\varepsilon)) =?$

$x^n \in T(n,\varepsilon), N(x|x^n)\ p(x)$

$$\begin{aligned} Pr(x^n) &= \prod q(x)^{nN(x|x^n)} \\ &\approx \prod q(x)^{np(x)} \\ &= 2^{log \prod q(x)^{np(x)}} \\ &= 2^{np(x) \sum logq(x)} \\ &= 2^{-np(x)log\frac{1}{q(x)}} \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} Pr(T(n,\varepsilon)) &= \sum_{x^n \in T(\varepsilon,n)} Pr(x^n) \\ &\approx 2^{-np(x)logp(x)} * 2^{-np(x)log\frac{1}{q(x)}} \\ &= 2^{-nD(p||q)} \end{aligned} \tag{3}$$

2.4 条件典型集

典型条件集的大小：$2^{nH(Y|X)}$