四. 线性相关性的判定

基本问题:

(1) 如何有效判断向量组的线性相关性?

(2) 线性相关性与线性方程组求解有何关系?

(3) 线性相关性与矩阵的秩, 行列式有何关系?

定理2. 设 $A_{m\times n}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关;

(2) $AX=0$有非零解;

(3) $R(A)<n$.

证: (1) $\Leftrightarrow$ (2):

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 有不全为零的数 $k_1, \ldots, k_n$使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$,

$\Leftrightarrow$ 有不全为零的数 $k_1, \ldots, k_n$使

$$\underbrace{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}}_{K}=0, \quad \Leftrightarrow \quad AX=0\text{有非零解}K=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}.$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 设 $\mathrm{R}(A)=r$,

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} \\ & O & & & \end{pmatrix} = B.$$

则 $AX=0$ 与 $BX=0$ 同解.

$AX=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow BX=0$ 有非零解

$\Leftrightarrow r<n$

向量个数 = 向量维数:

推论1. 设 $A_{m\times n}=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) $AX=0$只有零解;

(3) $\mathrm{R}(A)=n$;

(4) $\det A \neq 0$;

(5) A 可逆.

几何应用:

在 R^3中, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

$$\Leftrightarrow \det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 共面.}$$

推论2. 向量个数 >向量维数 的向量组必线性相关.

证: 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{m\times n}$, $n>m$, 则

$$R(A)\le m<n,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关.

特别的: 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

任意4个3维向量必线性相关.

例4. 判断向量组$\alpha_1=(0,1,1)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(1,1,0)$ 的线性相关性：

分析：3个3维向量的相关性判定 $\begin{cases} \text{行列式}=0? \\ \text{矩阵秩}<3? \end{cases}$

解1:

$$\left|\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

解2:

$$A=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T\right)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$, 所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

例5. 设 $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关}}$，证明：

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2,\ \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3,\ \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1 \text{ 线性无关.}$$

证1: 设 $x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + x_3\beta_3 = 0$,

即 $x_1(\alpha_1+\alpha_2) + x_2(\alpha_2+\alpha_3) + x_3(\alpha_3+\alpha_1) = 0.$

即 $(x_1+x_3)\alpha_1 + (x_1+x_2)\alpha_2 + (x_2+x_3)\alpha_3 = 0.$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以：

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \quad (*) \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以 $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例5. 设$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关，证明：

$\boxed{\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1}$线性无关.

证2: 不妨设给定的都是列向量组.

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{K} \qquad \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow K\text{可逆} \Rightarrow R(B)=R(A)\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性无关}\Rightarrow R(A)=3\end{array}\right\}\Rightarrow R(B)=3$$

故$\beta_1, \beta_2, \beta_3$线性无关.

推论3. 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$经由一系列初等行变换

变成矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 则向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \text{ 与 } \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$$

有相同的线性相关性.

即：初等行变换不改变列向量组的线性相关性, 所以可用初等行变换判断列向量组线性相关性.

说明: 定理及其推论描述了线性相关性、线性表出、方程组求解以及矩阵秩之间的联系