第五章 特征值与特征向量

习题课

何军华

电子科技大学

一. 特征值与特征向量的判定

特征值的判定.

给定n阶矩阵A, 则

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 α;

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda \\ \vdots \\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

$\Uparrow$

A各行元之和为λ $\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

特征向量的判定.

给定n阶矩阵 A, α是非零列向量

α是A的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha=\lambda\alpha$ 对某个数λ

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

A各行元之和为 λ,

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I-A)X=0$ 的非零解

特征值、特征向量的计算步骤.

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0;$

α是λ的特征向量 $\Leftrightarrow \alpha$是$(\lambda I - A)X = 0$的非零解

(1) 求$|\lambda I - A| = 0$的根： $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一λ_i, 求$(\lambda_i I - A)X = 0$的一组基础解系：

$$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$$

则A的属于特征值λ_i的全部特征向量为：

$$k_1\alpha_{i1} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{ir_i},\ k_1, \cdots, k_{r_i} \text{不全为} 0.$$

特征值的计算技巧.

如何有效计算3阶数字型矩阵A的特征值?

目标: 不只是算出特征多项式,需要求出3个根!

思路: 计算过程中尽可能提取关于λ的一次因式

手段: 观察$|\lambda I - A|$ 各行元之和,两行元的和或者差

各列元之和,两列元的和或者差

效果: 若第1行提取了λ的一次因式,则新第1行全数字,

列的倍加使第1行仅有一个非零元,按第1行展开!

检查: 特征值之和 = 对角元之和?

设 A 是 n 阶方阵，$f(x)$是一元多项式，则

α 是特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow$

- α是A^{k+1}的特征值λ^{k+1}的特征向量.
- α是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.
- $P^{-1}\alpha$ 是$P^{-1}AP$的特征值 λ 的特征向量.

A 可逆时:

- α 是 A^{-1}的特征值λ^{-1}的特征向量.
- α 是 A^{*} 的特征值$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

$f(A)=O$时:

- $f(A)=O \Rightarrow f(\lambda)=0$

例1. 设4阶矩阵A满足：$|3I+A|=0,\ AA^T=2I,\ |A|<0$，求$A^*$的一个特征值.

解： $|3I+A|=0 \Rightarrow |-3I-A|=0 \Rightarrow -3$是$A$的特征值

设非零向量α是A的特征值-3的一个特征向量，则

$$A\alpha=-3\alpha \Rightarrow A^*A\alpha=-3A^*\alpha \Rightarrow A^*\alpha=-\frac{1}{3}|A|\alpha=\frac{4}{3}\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r} AA^T=2I \Rightarrow |A|^2=|2I|=2^4=16 \\ |A|<0 \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=-4$$

$\Rightarrow A^*$有一个特征值$\dfrac{4}{3}$.

例2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}$, $P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=P^{-1}A^{*}P$

求 $B+2I$ 的特征值.　　**9, 9, 3**

分析: 设α是矩阵A的特征值λ的一个特征向量,则:

$$A\alpha=\lambda\alpha \ \Rightarrow A^{*}\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}A^{*}P\right)\left(P^{-1}\alpha\right)=\frac{|A|}{\lambda}\left(P^{-1}\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}A^{*}P+2I\right)\left(P^{-1}\alpha\right)=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)\left(P^{-1}\alpha\right)$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-7)(\lambda-1)^{2}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7,|A|=7$$

例3. 已知A是3阶矩阵, 列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 满足

$$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,\ A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3.$$

求矩阵A的特征值和特征向量;

分析: 将已知向量等式写成矩阵形式:

$$A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 4 & -2\\ -3 & 4 & 0\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}}_{B}$$

$$\Rightarrow A=PBP^{-1}\Rightarrow\ A,B\text{具有相同的特征值.}$$

$$B\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A(P\alpha)=(PBP^{-1})P\alpha$$

$$=PB\alpha=P(\lambda\alpha)=\lambda(P\alpha)$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 3 & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

计算可得:

$$\lambda_1 = 1 : \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2 : \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 2 : \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$A=PBP^{-1}$与B有相同的特征值：

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

相应的全部特征向量:

$$\lambda_1=1:\ k\left(P\beta_1\right)=k\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right),k\neq 0;$$

$$\lambda_2=2:k\left(P\beta_2\right)=k\left(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3\right),k\neq 0;$$

$$\lambda_3=3:k\left(P\beta_3\right)=k\left(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\right),k\neq 0;$$

例4. 设3阶矩阵A的特征值为 $2, -2, 1,$

$B = A^2 + A + I$, 则行列式 $|B| =$ ________.

法1: A 的特征值$\lambda \Rightarrow B$ 的特征值$\lambda^2 + \lambda + 1$

A 的特征值$2, -2, 1 \Rightarrow B$ 的特征值$7, 3, 3$

$$\Rightarrow |B| = 7 \bullet 3 \bullet 3 = 63$$

法2:

$$令A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 7 \bullet 3 \bullet 3 = 63$$

二、相似与对角化

设A是n阶矩阵，则：

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow$ A的k重特征值恰有k个无关的特征向量

A有n个互异的特征值

$\Leftrightarrow$ λ_i是A的$k_i(>1)$重特征值，则

$$R(\lambda_i I - A) = n - k_i$$

即：任一特征值的代数重数 = 几何重数

3阶矩阵的相似对角化

- 3阶矩阵A有一个1重特征值a, 一个2重特征值b.

$$A\text{可以相似对角化} \Leftrightarrow R(bI-A)=3-2=1$$

- 3阶矩阵A有3个互异特征值, 必可相似对角化

- 3阶矩阵A有1个3重特征值a,

$$A\text{可以相似对角化} \Leftrightarrow R(aI-A)=3-3=0$$

$$\Leftrightarrow A=aI$$

例5. 设α_1,α_2分别是n阶矩阵A互异特征值λ_1,λ_2的特征向量

证明$\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量.

分析： $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, \alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$

反证 设$A(\alpha_1+\alpha_2)=k(\alpha_1+\alpha_2)$

$$\Rightarrow k(\alpha_1+\alpha_2)=A(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow (k-\lambda_1)\alpha_1+(k-\lambda_2)\alpha_2=0 \\ \lambda_1\neq\lambda_2\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2 \text{ 线性相关,}$$

矛盾!

例6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\-k&-1&k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，当$k$为何值时，存在可逆矩阵$P$，使得$P^{-1}AP$为对角矩阵？

分析：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\ \boxed{k}&\lambda+1&\boxed{-k}\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

A与对角阵相似 $\Leftrightarrow R(-I-A)=1$

$$I-A=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&1&-1\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k=0$

例7. 证明n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\text{与}B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}\text{相似.}$$

分析: A实对称,必与对角阵相似,

证明A, B与同一对角阵相似即可!

$$\left.\begin{array}{r}|\lambda I-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)\\ A\text{实对称}\end{array}\right\}\Rightarrow A\sim \mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$$

$$\left.\begin{array}{r}|\lambda I-B|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)\\ R(0I-B)=1\end{array}\right\}\Rightarrow B\sim \mathrm{diag}(n,0,\cdots,0)$$

$$\Rightarrow A\sim B$$

例8. 设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是A的特征值-2的特征向量.

(1) 求a, b; (2) 求可逆矩阵P和对角矩阵Q, 使得 $P^{-1}AP=Q$.

分析: α 是A的特征值-2的特征向量

$$\Rightarrow A\alpha=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+2 \\ 2 \\ -1-b \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2=2, \\ -1-b=-2. \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=0, b=1}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=0, b=1}$$

$$A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}\Rightarrow|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\1&\lambda&-1\\-1&-1&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&\lambda&-1\\0&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2)\quad\Rightarrow\lambda=1,1,-2$$

$$\lambda=1:\alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\qquad\lambda=-2:\alpha_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix}-1&1&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix},\ Q=\begin{pmatrix}1&&\\&1&\\&&-2\end{pmatrix}\Rightarrow P^{-1}AP=Q$$

三、实对称矩阵

n 阶实对称矩阵 A:

- 特征值都是实的;
- 必可正交对角化;
- 不同特征值的实特征向量彼此正交
- 秩为k的n阶矩阵 $\Rightarrow$ 0是$n-k$重特征值
- k 重特征值 $\mu \Rightarrow R(\mu I - A) = n - k$

实对称矩阵特征值的判定.

给定n阶实对称矩阵 A:

$$\mathrm{R}(A)=k<n \Rightarrow 0\text{是}A\text{的}\, n-k\,\text{重特征值}$$

实对称矩阵特征向量的判定.

设$A_{3\times3}$实对称, 其特征值

(1) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互异, α_1,α_2分别是 λ_1,λ_2的特征向量, 则

与α_1,α_2正交的非零向量一定是λ_3的特征向量

(2) $\lambda_1(1\text{重}),\lambda_3(2\text{重})$, α_1是λ_1的特征向量, 则

与α_1正交的非零向量一定是λ_3的特征向量

例9. 设4阶实对称矩阵A满足:

$$A^4 + A^3 - A^2 + A - 2I = O,$$

若秩 $R(A-I)=1$, 则矩阵 A 的特征值为 <u>1, 1, 1, −2</u>.

分析: $A^4 + A^3 - A^2 + A - 2I = O \Rightarrow$

$$0 = \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \lambda = 1, -2, \pm i \\ A\text{实对称} \Rightarrow \text{特征值都是实的} \\ \left.\begin{array}{r} 1 = R(A - I) = R(1I - A) \\ A\text{实对称} \end{array}\right\} \Rightarrow 1\text{是 } 4-1=3 \text{ 重特征值} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

例10. $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件是(　　)

(A) $a=0, b=2$;　　(B) $a=0$, b为任意常数;

(C) $a=2, b=0$;　　(D) $a=2$, b为任意常数.

分析： $a=0$时：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&b&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-b&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)\Rightarrow\lambda=2,b,0$$

$$A\text{实对称}\ \Rightarrow A\sim\operatorname{diag}(2,b,0)=B$$

例10. $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & b & \\ & & 0\end{pmatrix}$ 相似的充分必要条件是(　　)

(A) $a=0, b=2$;

(B) $a=0$, b为任意常数;

(C) $a=2, b=0$;

(D) $a=2$, b为任意常数.

$a=2$时: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ -2 & \lambda-b & -2\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 0 & \lambda-b & -2\\ -\lambda & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\lambda\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & \lambda-b & -2\\ 0 & -4 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\left[\lambda^2-(b+2)\lambda+(2b-8)\right]$$

$$=\lambda(\lambda-b)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow 2b=2b-8 \Rightarrow$ 无解!