四. 初等矩阵

例7

$$\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&2\\1&2&6\\3&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&6\\2&5&2\\3&0&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&5&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&2\\1&2&6\\3&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&2\\5&10&30\\3&0&4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\5&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&5&2\\1&2&6\\3&0&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&5&2\\1&2&6\\13&25&14\end{pmatrix}$$

初等矩阵: 对单位矩阵作一次初等变换所得到的矩阵

三种初等矩阵:

$$
E_{ij}=\left(\begin{array}{ccccccccccc}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ \\ i\ \text{行} \\ \\ \\ \\ j\ \text{行} \\ \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
E_i(c)=\left(\begin{array}{ccccc}
1 &&&& \\
& \ddots &&& \\
&& c && \\
&&& \ddots & \\
&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ i\ \text{行} \\ \\ \\
\end{array}
(c \neq 0)
$$

$$
E_{ij}(c)=\left(\begin{array}{ccccccc}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&& \vdots & \ddots &&& \\
&& c & \cdots & 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ i\ \text{行} \\ \\ j\ \text{行} \\ \\ \\
\end{array}
$$

定理 对矩阵A作一次行（列）初等变换，相当于在A的左（右）边乘上相应的初等矩阵.

"左乘行，右乘列"

应用:

1.若矩阵B是A经有限次行初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$，使得

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

2.若矩阵B是A经有限次列初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$，使得

$$B = A E_1 E_2 \cdots E_k$$

3.若矩阵B是经有限次初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_t$使得

$$B = P_k \cdots P_1 A Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1$$

例8 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}+a_{32} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad P_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 则**B= (　　)**

$(1)\ P_2AP_3\quad (2)\ AP_1P_3\quad (3)\ AP_3P_1\quad (4)\ AP_2P_3$

答案 **(4)**

[结束]