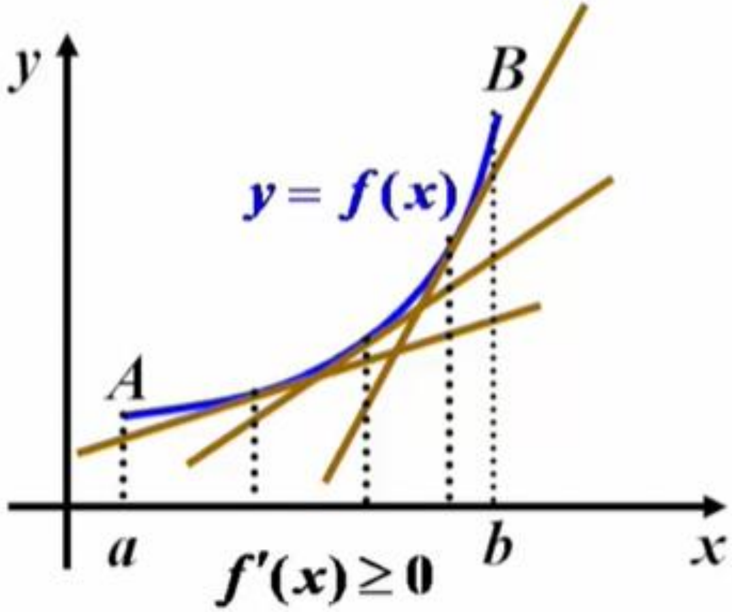
函数的单调性

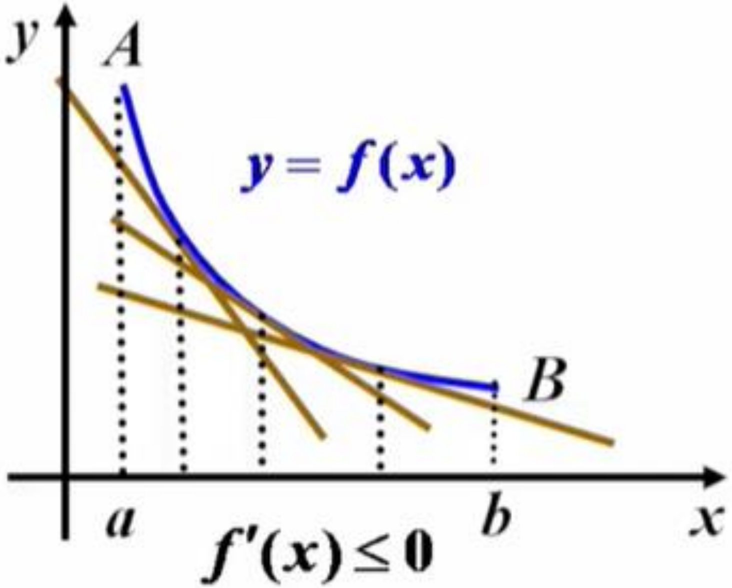
一、单调性的判别法

二、单调区间求法

三、利用单调性证明不等式

一、函数单调性的判定法





定理 设函数 $y=f(x)$在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b)内可导 .

（1）如果在(a,b)内$f'(x)>0$，那末函数 $y=f(x)$

在 $[a,b]$ 上单调增加；

(2) 如果在(a,b)内$f'(x)<0$,那末函数$y=f(x)$

在 $[a,b]$ 上单调减少.

证 $\forall\, x_1,x_2\in[a,b]$, 且 $x_1<x_2$, 应用拉氏定理,得

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)\qquad(x_1<\xi<x_2)$$

$\because x_2-x_1>0$, 若在(a,b)内，$f'(x)>0$, 则 $f'(\xi)>0$,

$\therefore f(x_2)>f(x_1)$.

$\therefore\ y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加.

若在(a,b)内，$f'(x)<0$, 则 $f'(\xi)<0$,

$\therefore f(x_2)<f(x_1)$. $\therefore\ y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

注意：（1）定理的条件是一个充分条件. 有时函数$f(x)$可以在个别孤立点x_0处 $f'(x_0)=0$, 只要孤立点不形成区间而其他点 $f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)也能断定$f(x)$的单调性。

例如：$y=x^3$在 $x=0$点处 $f'(0)=0$而当 $x\neq 0$时,有

$f'(x)>0$.所以$y=f(x)=x^3$在区间$(-\infty,+\infty)$单调增加.

若函数在其定义域的某个区间内是单调的, 则该区间称为函数的单调区间.

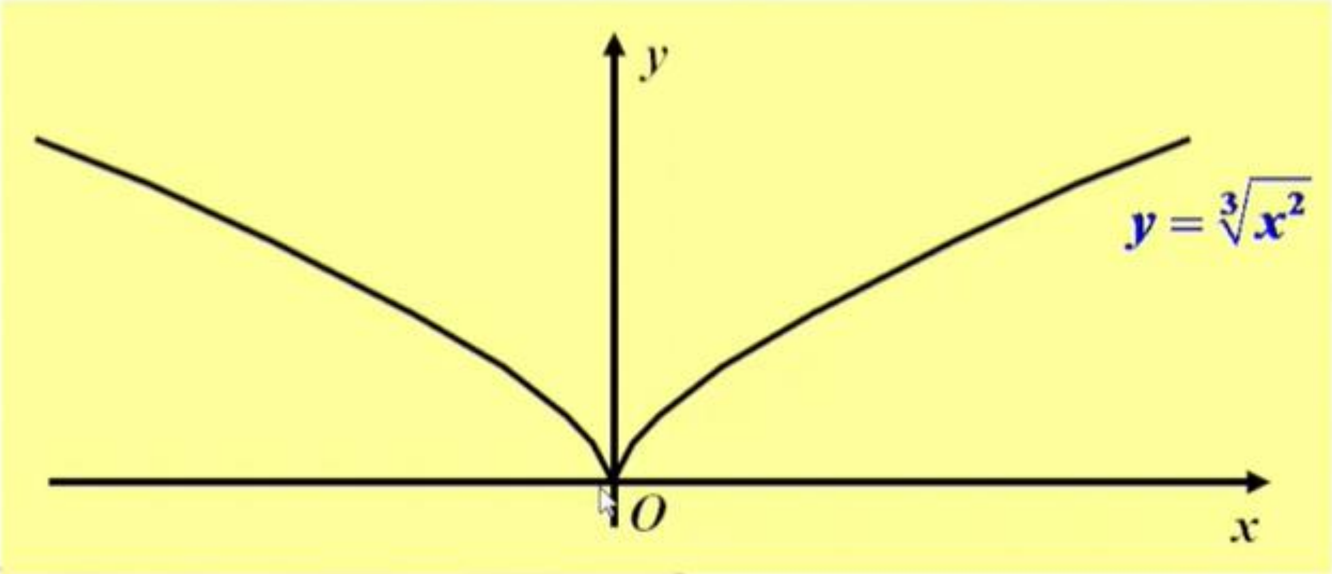
（2）该定理对（ ），[），（]，（-∞，+∞）均成立.

(2) 一阶导数为零的点和一阶导数不存在的点是函数单调区间可能的分界点.

例如 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$, $f'(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$,

当$x=0$时, $f'(0)$不存在 $x>0$时, $f'(x)>0$; $x<0$时, $f'(x)<0$

所以 $f(x)$分别在（$-\infty$，$0]$及（0，$+\infty$）单调减少和单调增加.



2、单调区间求法

(1)用方程$f'(x)=0$的根及$f'(x)$不存在的点来划函数$f(x)$的定义区间;

(2)判断区间内导数的符号，从而决定 $f(x)$在该区间的单调性.

例1 确定函数 $f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$ 的单调区间.

解 $\because D=(-\infty,+\infty)$. $f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$

解方程 $f'(x)=0$ 得，$x_1=1,x_2=2$.

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↑		↓		↑

$\therefore$ 在 $(-\infty,1]$ 上单调增加； 在 $[1,2]$ 上单调减少；在 $[2,+\infty)$ 上单调增加；

3、利用单调性证明不等式

推论： 设$f(x)$在以x、x_0为端点的闭区间上连续，开区间内可导

(1)当$x > x_0$时，若$f'(x) > 0$，则$f(x) > f(x_0)$；

若$f'(x) < 0$，则$f(x) < f(x_0)$.

(2)当$x < x_0$时，若$f'(x) > 0$，则$f(x) < f(x_0)$；

若$f'(x) < 0$，则$f(x) > f(x_0)$.

例2　当$x>0$时,试证$x>\ln(1+x)$成立.

证　设 $f(x)=x-\ln(1+x)$, 则 $f'(x)=\dfrac{x}{1+x}$.

$\because$ $f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$(0,+\infty)$内可导.

且 $f(0)=0$，$f'(x)>0$

$\therefore$当$x>0$时，$f(x)>f(0)$

即 $x-\ln(1+x)>0$，$\therefore$ $x>\ln(1+x)$.

例3 证明 当$x>0$时, $x>\arctan x>x-\frac{x^3}{3}$.

证 左端 $x>\arctan x$

$\Rightarrow$ 令$f(x)=x-\arctan x$

当$x>0$时, $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}>0$

$\therefore x>0$时, $f(x)>f(0)=0 \Rightarrow f(x)>0$,

即 $x-\arctan x>0 \Rightarrow x>\arctan x$

右端 $\arctan x>x-\frac{x^3}{3}$

$\Rightarrow$ 令$g(x)=\arctan x-(x-\frac{x^3}{3})$,

$$g'(x)=\frac{1}{1+x^2}-1+x^2$$

$$=\frac{x^4}{1+x^2}>0 \quad (x>0)$$

$\therefore$ 当$x>0$时, $g(x)>g(0)=0$

$\Rightarrow g(x)>0$,

$\Rightarrow \arctan x>x-\frac{x^3}{3}$

综上所述: $x>\arctan x>x-\frac{x^3}{3}$.

例4 证明方程$x^3-3x+1=0$在$(0,1)$内有惟一的根.

证明 令 $f(x)=x^3-3x+1.$

(1) 存在性: 因为$f(x)=x^3-3x+1$在$[0,1]$上连续,

$$f(0)=1>0, f(1)=-1<0,$$

由闭区间上连续函数零点存在定理知:

$$\exists \xi \in (0,1) 使 f(\xi)=0.$$

(2)惟一性:

在$(0,1)$内, $f'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)<0.$

$\therefore$ $f(x)$在$(0,1)$内单调减少.

故在$(0,1)$内方程有惟一的根.

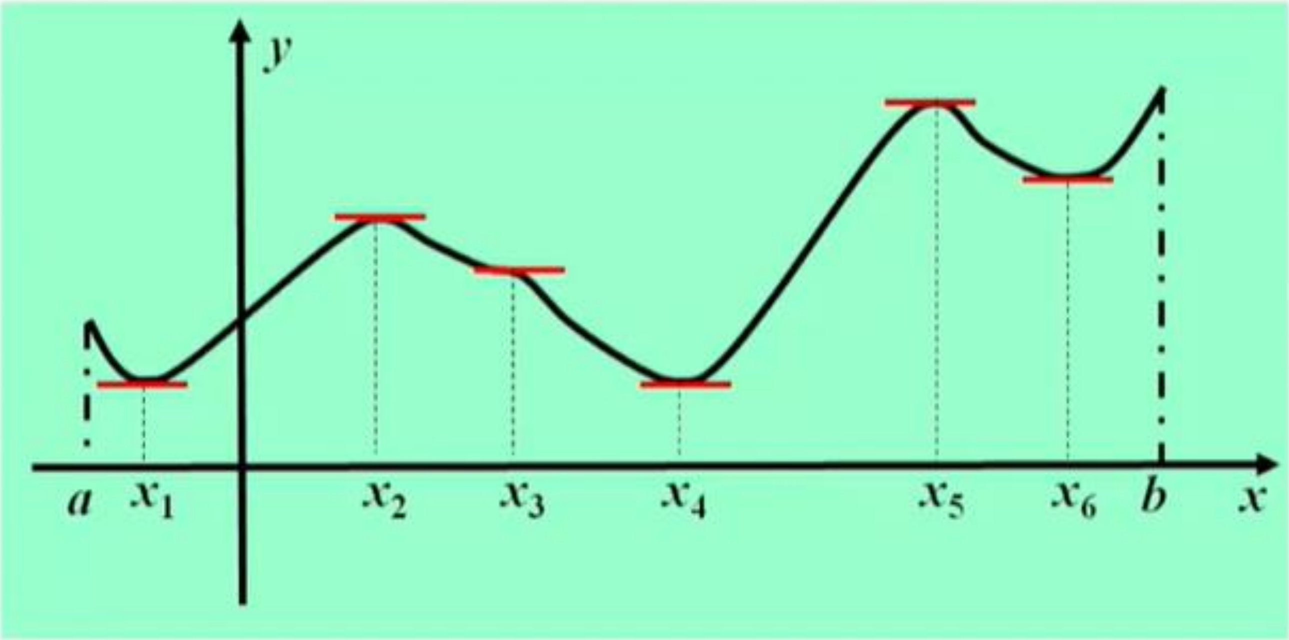
函数的极值与最值

一、函数的极值

二、函数极值的求法

三、函数的最值

一、函数的极值



二、函数极值的求法

定理1 设$f(x)$在点x_0处具有导数，且在x_0取得极值，那么必有$f'(x_0)=0$.

定义：使导数为零的点(即方程$f'(x)=0$的实根)叫做函数$f(x)$的驻点。

注意：

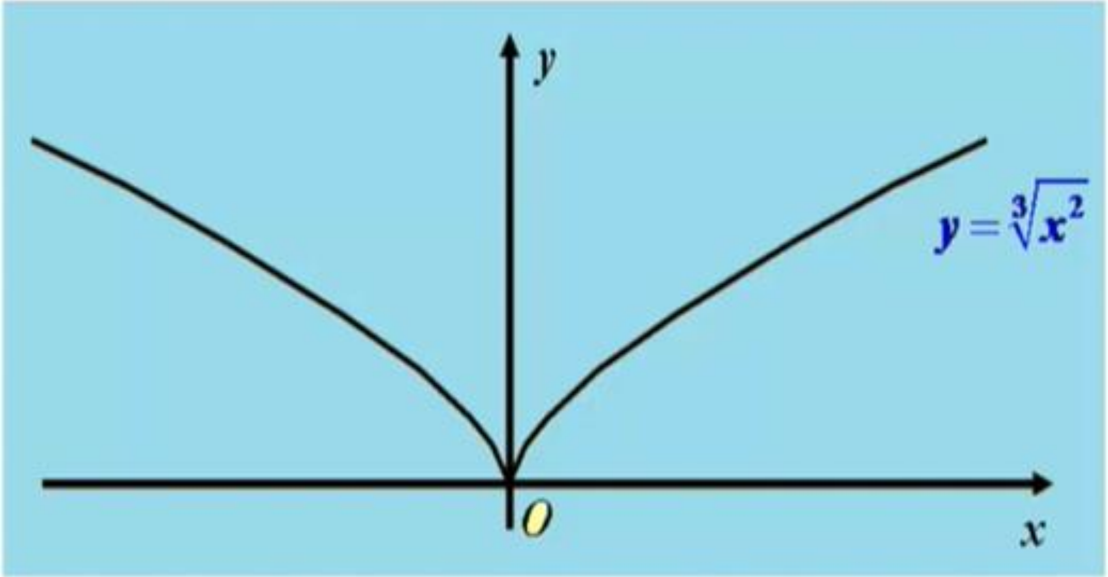
可导函数$f(x)$的极值点必定是它的驻点，但驻点不一定是极值点。

例如：$y=x^3$，$y'\big|_{x=0}=0$，但是$x=0$不是极值点。

注：导数不存在的点也可能是函数的极值点。

例如函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 在$x=0$点处$f'(0)$不存在.

但$x=0$为函数的极小值点.



使函数$f(x)$连续，

但导数 $f'(x)$不存在的点称为函数$f(x)$的奇点.

函数的驻点与奇点统称为函数的临界点.

定理2（函数极值的第一充分条件）

中国大学MOOC

设 $f(x)$在临界点x_0连续，在$U^0(x_0,\delta)$可导.

(1)如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$，有$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$

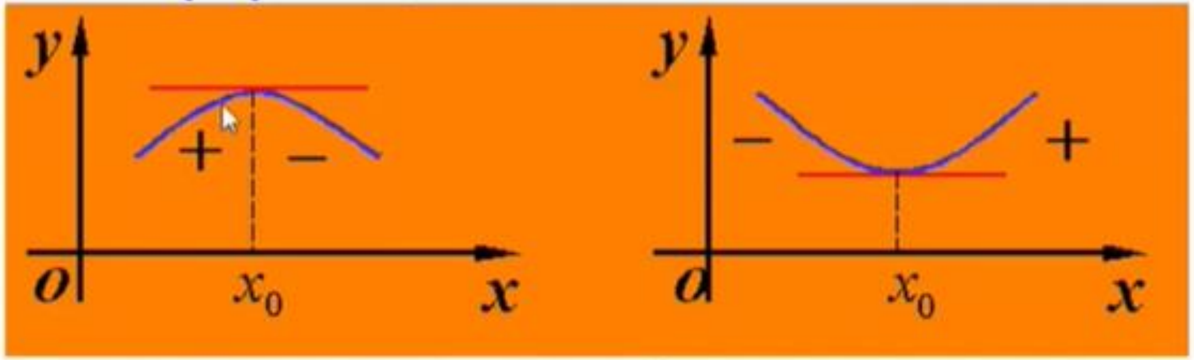
有$f'(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值.

(2)如果$x\in(x_0-\delta,x_0)$，有$f'(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$

有$f'(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.

(3)如果当$x\in(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)$的符号

相同，则$f(x)$在x_0处无极值.



例1 **求出函数 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的极值.**

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x+1)(x-3)$ 令 $f'(x)=0$,

得驻点 $x_1=-1, x_2=3$. 列表讨论

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$	极大值	$\downarrow$	极小值	$\uparrow$

极大值 $f(-1)=10$, 极小值 $f(3)=-22$.

定理3 (第二充分条件) 设$f(x)$在x_0处具有二阶导数，$f'(x_0)=0, f''(x_0)\neq 0$,则

(1)当$f''(x_0)<0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极大值;

(2)当$f''(x_0)>0$时，函数$f(x)$在x_0处取得极小值。

证 (1) $\because f''(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}<0,$

故$f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)$与Δx异号，

当$\Delta x<0$时，有$f'(x_0+\Delta x)>f'(x_0)=0,$

当$\Delta x>0$时，有$f'(x_0+\Delta x)<f'(x_0)=0,$

$\therefore f(x)$在x_0处取得极大值

同理可以证明(2)的结论。

例2 求出函数 $f(x)=x^3+3x^2-24x-20$ 的极值.

解 $f'(x)=3x^2+6x-24=3(x+4)(x-2)$

令 $f'(x)=0$，得驻点 $x_1=-4$，$x_2=2$.

$\because$ $f''(x)=6x+6$,

$\because$ $f''(-4)=-18<0$, 故极大值 $f(-4)=60$,

$f''(2)=18>0$, 故极小值 $f(2)=-48$.

定理4 若函数$f(x)$在驻点x_0处的n阶导数存在，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{n-1}(x_0)=0 \quad f^{(n)}(x_0)\neq 0.$$

(1)当n为偶数时, 则 $f(x)$在点x_0取得极值.

当$f^{(n)}(x_0)>0$时, $f(x)$在点x_0取得极小值;

当$f^{(n)}(x_0)<0$时, $f(x)$在点x_0取得极大值;

(2)当n为奇数时, 则点x_0不是$f(x)$的极值.

三、函数的最值

1、设$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，

求函数最值的方法：

（1）求驻点和不可导点；

（2）求区间端点及驻点和不可导点的函数值，

（3）比较大小，最大者就是最大值，最小者就是最小值；

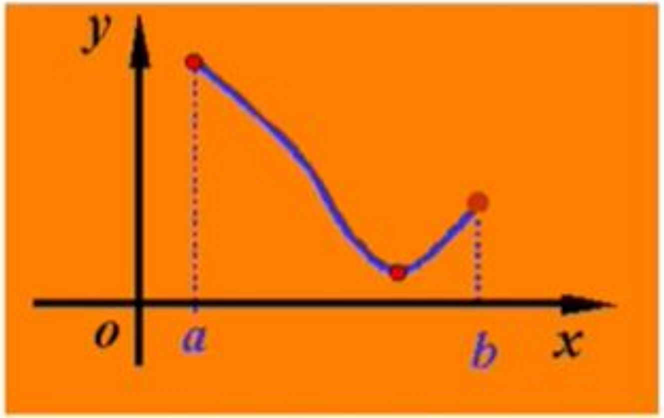
2、若$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f'(x)>0$,

则，$f_{\max}(x)=f(b), f_{\min}(x)=f(a)$.

同理，若在(a,b)内，有$f'(x)<0$, 则，$f_{\max}(x)=f(a), f_{\min}(x)=f(b)$.

3、若$f(x)$在(a,b)内只有一个极值，则这个唯一的

极大(小)值就是$f(x)$在 $[a,b]$上的最大(小)值.



例3 求函数$f(x)=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}$在[0,3]上的最大值和最小值

解 $f(x)$在$[0,3]$上连续.

$$f'(x)=\frac{3}{4}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2-2x}}.$$

令 $f'(x)=0$,得驻点$x=1$.奇点$x=2$.

计算区间端点与临界点处的函数值有

$f(0)=0, f(1)=1, f(2)=0, f(3)=\sqrt[3]{9}.$

$f_{\max}=f(3)=\sqrt[3]{9}, f_{\min}=f(0)=f(2)=0.$