电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

中国大学MOOC

第四章 常微分方程

第6讲 可降阶的高阶微分方程

电子科技大学数学科学学院

一、$y^{(n)}=f(x)$型微分方程及其降阶法

中国大学MOOC

解法：微分方程$y^{(n)}=f(x)$的右端仅含有自变量x,每积分一次方程降一阶. 因此, 采用逐次积分, 逐次降阶, 就得到

$$y^{(n-1)}=\int f(x)dx+C_1$$

$$y^{(n-2)}=\int\left(\int f(x)dx+C_1\right)dx$$

$$=\int\left(\int f(x)dx\right)dx+C_1x+C_2, \qquad \cdots$$

$$y=\int\left[\cdots\int\left(\int f(x)dx\right)dx\cdots\right]dx+\tilde{C}_1x^{n-1}$$

$$+\tilde{C}_2x^{n-2}+\cdots+\tilde{C}_n,$$

其中$\tilde{C}_1,\tilde{C}_2,\cdots\tilde{C}_n$均为任意常数.

例1　求微分方程$y''' = e^x + \sin x$的通解.

解　对给定的方程连续积分三次得

$$y'' = e^x - \cos x + C_1$$

$$y' = e^x - \sin x + C_1 x + C_2$$

$$y = e^x + \cos x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$$

$$= e^x + \cos x + \tilde{C}_1 x^2 + \tilde{C}_2 x + \tilde{C}_3$$

其中$\tilde{C}_1 = \frac{1}{2}C_1, \tilde{C}_2 = C_2, \tilde{C}_3 = C_3$是三个独立的任意常数,

这就是所给方程的通解.

例2　求方程$xy^{(5)}-y^{(4)}=0$ 的通解.

中国大学MOOC

解　设$y^{(4)}=P(x), y^{(5)}=P'(x)$,代入原方程

$$xP'(x)-P(x)=0 \quad (P(x)\neq 0)$$

解线性方程得

$$P(x)=C_1x \quad 即 \quad y^{(4)}=C_1x,$$

两端积分得

$$y'''=\frac{1}{2}C_1x^2+C_2 \quad \cdots \quad \cdots$$

$$y=\frac{C_1}{120}x^5+\frac{C_2}{6}x^3+\frac{C_3}{2}x^2+C_4x+C_5$$

原方程通解为$y=\tilde{C}_1x^5+\tilde{C}_2x^3+\tilde{C}_3x^2+\tilde{C}_4x+\tilde{C}_5$.

二、$y''=f(x,y')$型微分方程及其降阶法

解法：二阶微分方程$y''=f(x,y')$的右端不显含未知函数y，可作代换 $y'=p(x)$，则上述方程变为

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p(x)) \xrightarrow{\text{通解为}} p(x)=\varphi(x,C_1)$$

$$\text{又}\ p(x)=\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\varphi(x,C_1)$$

$\xrightarrow{\text{将其积分}} y=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$，其中$C_1,C_2$为任意常数.

中国大学MOOC

例3　求微分方程$xy'' = y'\ln y'$满足初始条件$y(1) = 0, y'(1) = e$的特解.

解　令$y' = P(x)$,则$y'' = \dfrac{dp}{dx}$,代入原方程有

$$x\frac{dp}{dx} = p\ln p$$

这是可分离变量方程,其通解为

$$p = e^{C_1 x}, 即 y' = e^{C_1 x},$$

由$y'(1) = e$得$C_1 = 1$,所以$y' = e^x$，积分得$y = e^x + C_2$,

中国大学MOOC

例4　求微分方程$x^2y''+xy'=1$满足初始条件$y(1)=0, y'(1)=1$的特解.

解　此方程不显含y,作代换$y'=p(x)$ $\Rightarrow x^2p'(x)+xp(x)=1$,

其通解为

$$p(x)=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left(\int\frac{1}{x^2}e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+C_1\right)=\frac{C_1}{x}+\frac{1}{x}\ln|x|$$

又$y'(1)=1$,代入上式得$C_1=1$.

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\ln|x| \xrightarrow{\text{积分}} y=\ln|x|+\frac{1}{2}(\ln|x|)^2+C_2$$

$\xrightarrow{y(1)=0\to C_2=0}$ 得方程特解为$y=\ln|x|+\frac{1}{2}(\ln|x|)^2$.

三、$y''=f(y,y')$型微分方程及其降阶法

中国大学MOOC

解法：二阶微分方程$y''=f(y,y')$的右端不显含未知函数x，可作代换$y'=p(y)$，将p看作是y的函数$p=p(y)$，用复合函数的求导法,即可把y''化为p对y的导数,即得

$$y''=\frac{dy'}{dx}=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$$

代入方程得$p\dfrac{dp}{dy}=f(y,p)\quad\Rightarrow p=\varphi(y,C_1)$即$\dfrac{dy}{dx}=\varphi(y,C_1)$，

$$\xrightarrow{\text{原方程的通解}}\int\frac{dy}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2.$$

中国大学MOOC

例5 求方程$yy''-y'^2=0$的通解.

解法一 设$y'=p(y)$,则$y''=p\dfrac{dp}{dy}$,代入原方程得$y\cdot p\dfrac{dp}{dy}-p^2=0$,

当$y\neq 0, p\neq 0$时,约去p并分离变量得$\dfrac{dp}{p}=\dfrac{dy}{y}$,

两边积分并化简得$p=C_1y$,即$\dfrac{dy}{dx}=C_1y$,分离变量得

$$\frac{dy}{y}=C_1dx \Rightarrow y=C_2e^{C_1x}$$

当$y=0, p=0$时,$\dfrac{dy}{dx}=0\Rightarrow y=C$也是原方程的解.但在通解

$y=C_2e^{C_1x}$中,显然$C_1=0$时,给出了$y=C_2$,又再当$C_2=0$时,

包含了$y=0$. 因此,$y=0$和$y=C$都包含在了通解$y=C_2e^{C_1x}$中.

解法二 当$y \neq 0$时,方程两端除以y^2,得

$$\frac{yy'' - (y')^2}{y^2} = 0 \quad \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{y}\right) = 0$$

积分得

$$\frac{y'}{y} = C_1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y$$

分离变量后积分得

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

显然$y = 0$是微分方程的解,它包含在通解中.