第二章 一元函数微分学

§2.3 隐函数和参数式函数的导数

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、参数式函数的导数

四、相关变化率

一、隐函数的导数

$y = f(x)$ ⟶ 显函数

若由方程$F(x, y) = 0$可以确定一个函数$y = y(x)$，则称其为隐函数.

如：$x^2 + e^x + y = 0$，　$xy - e^x + e^y = 0.$

⬇　　　　不能显化

$y = -x^2 - e^x$

问题：隐函数不易显化或不能显化如何求导数？

隐函数求导方法：

$$F(x, y) = 0 \xrightarrow[\text{两边对 } x \text{ 求导}]{} \boxed{\frac{d}{dx}F(x, y) = 0}$$

含有y'的方程

注意将y视为x的函数$y = y(x)$

例1 求由$xy - e^x + e^y = 0$确定的隐函数$y = y(x)$的导数$\frac{dy}{dx}$，$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

注意将y视为x的函数$y = y(x)$

解 方程两边对x求导

$$y + x\frac{dy}{dx} - e^x + e^y\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - y}{x + e^y},$$

由原方程知 $x = 0,\ y = 0,$ $\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \left.\frac{e^x - y}{x + e^y}\right|_{\substack{x=0\\y=0}} = 1.$

例2 曲线C的方程为$x^3+y^3=3xy$，求过C上点$(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$的切线方程，并证明曲线$C$在该点的法线过原点.

注意将y视为x的函数$y=y(x)$

解 方程两边对x求导

$$3x^2+3y^2y'=3y+3xy'$$

$$\Rightarrow y'=\frac{y-x^2}{y^2-x}, \qquad \Rightarrow y'\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=\frac{y-x^2}{y^2-x}\Big|_{(\frac{3}{2},\frac{3}{2})}=-1,$$

所求切线方程为 $y-\frac{3}{2}=-(x-\frac{3}{2})$， 即 $x+y-3=0$，

法线方程为 $y-\frac{3}{2}=x-\frac{3}{2}$， 即 $y=x$， 显然法线过原点.

例3 设方程$x^2+x^3=y+y^4$确定了函数$x=x(y)$，求$\dfrac{dx}{dy}$.

注意将x视为y的函数$x=x(y)$

解 方程两边对y求导

$$2x\frac{dx}{dy}+3x^2\frac{dx}{dy}=1+4y^3,$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{1+4y^3}{2x+3x^2}.$$

第二章 一元函数微分学

§2.3 隐函数和参数式函数的导数

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、参数式函数的导数

四、相关变化率

二、对数求导法

$$y=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x},\quad y=x^{\sin x}=e^{\sin x\cdot\ln x}$$

如何求导?

$$\ln(ab)=\ln a+\ln b,\quad \ln\frac{a}{b}=\ln a-\ln b,\quad \ln a^b=b\ln a$$

先在等号两边取对数，然后利用隐函数的求导方法求出导数.

--------对数求导法

例4 设 $y=\dfrac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}$，求 y'.

解 两边取对数得

$$\ln y=\ln(x+1)+\frac{1}{3}\ln(x-1)-2\ln(x+4)-x,$$

上式两边对x求导得

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1,$$

$$\Rightarrow y'=\frac{(x+1)\sqrt[3]{x-1}}{(x+4)^2e^x}[\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3(x-1)}-\frac{2}{x+4}-1].$$

例5 设函数 $y = x^{\sin x}(x>0)$，求 y'.

解 两边取对数得

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

上式两边对x求导得

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x},$$

$$y' = y(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

另解 $\because\ y = e^{\sin x \ln x}$,

$$\therefore\ y' = e^{\sin x \ln x}(\sin x \ln x)'$$

$$= e^{\sin x \ln x}(\cos x \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$= x^{\sin x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}).$$

例6 设方程$x^y = y^x$确定函数$y=y(x)$，求y'.

解1 两边取对数得

$$y\ln x = x\ln y$$

上式两边对x求导得

$$y'\ln x + \frac{y}{x} = \ln y + \frac{x}{y}\cdot y'$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}.$$

解2 由 $x^y = y^x$，$\Rightarrow e^{y\ln x} = e^{x\ln y}$，

上式两边对x求导得

$$e^{y\ln x}(y\ln x)' = e^{x\ln y}(x\ln y)'$$

$$\underline{e^{y\ln x}}(y'\ln x + \frac{y}{x}) = \underline{e^{x\ln y}}(\ln y + x\cdot\frac{y'}{y})$$

$$\cancel{x^y}(y'\ln x + \frac{y}{x}) = \cancel{y^x}(\ln y + x\cdot\frac{y'}{y})$$

$$\Rightarrow y' = \frac{y(x\ln y - y)}{x(y\ln x - x)}.$$

第二章 一元函数微分学

§2.3 隐函数和参数式函数的导数

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、参数式函数的导数

四、相关变化率

三、参数式函数的导数

若参数方程$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$确定$y$与$x$间的函数关系，称此函数为参数式函数.

例如$\begin{cases} x = 2t \\ y = t^2 \end{cases}$ $\longrightarrow$ $t = \dfrac{x}{2}$， 消去参数t $\longrightarrow$ $y = t^2 = \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{4}$，

$\longrightarrow$ $y' = \dfrac{1}{2}x.$

问题: 消参困难或无法消参如何求导?

设$x = x(t)$，$y = y(t)$可导，$x'(t) \neq 0$，且$x = x(t)$存在可导的反函数$t = t(x)$

$$\Rightarrow t = t(x) \Rightarrow y = y[t(x)]$$

由复合函数及反函数的求导法则得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'(t)}{x'(t)}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \left.\frac{y'(t)}{x'(t)}\right|_{x=x_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}$$ 其中$t_0 = t(x_0)$.

例1 求摆线$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{2}$处的切线方程.

解 当$t = \dfrac{\pi}{2}$时, $x = a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$, $y = a$,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a \sin t}{a - a \cos t} = \frac{\sin t}{1 - \cos t},$$

$$\Rightarrow k = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x = a(\frac{\pi}{2} - 1)} = \left.\frac{\sin t}{1 - \cos t}\right|_{t = \frac{\pi}{2}} = \frac{\sin\frac{\pi}{2}}{1 - \cos\frac{\pi}{2}} = 1,$$

切线方程为 $y - a = x - a(\dfrac{\pi}{2} - 1)$ 即 $y = x + a(2 - \dfrac{\pi}{2})$.

例2 不计空气的阻力，以初速度v_0，发射角α发射炮弹，

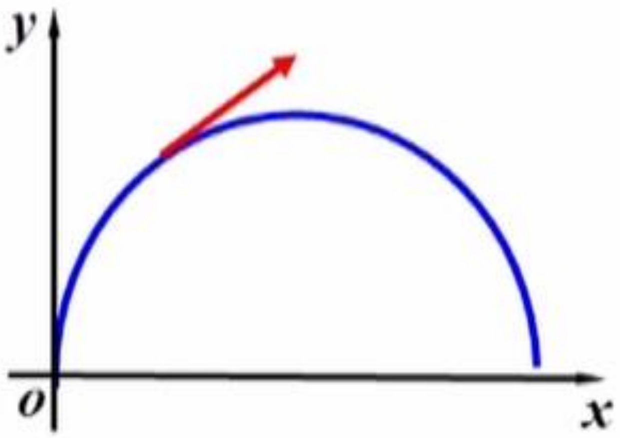
其运动方程为：$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$

求 (1) 炮弹在时刻t_0的运动方向； (2) 炮弹在时刻t_0的速度大小.

解(1) 在t_0时刻的运动方向即轨迹在t_0时刻的切线方向，

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)'}{(v_0 t\cos\alpha)'} = \frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha},$$

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0} = \frac{v_0\sin\alpha - gt_0}{v_0\cos\alpha}.$$



例2 不计空气的阻力，以初速度v_0，发射角α发射炮弹，

其运动方程为：$\begin{cases} x = v_0 t\cos\alpha, \\ y = v_0 t\sin\alpha - \dfrac{1}{2}gt^2, \end{cases}$

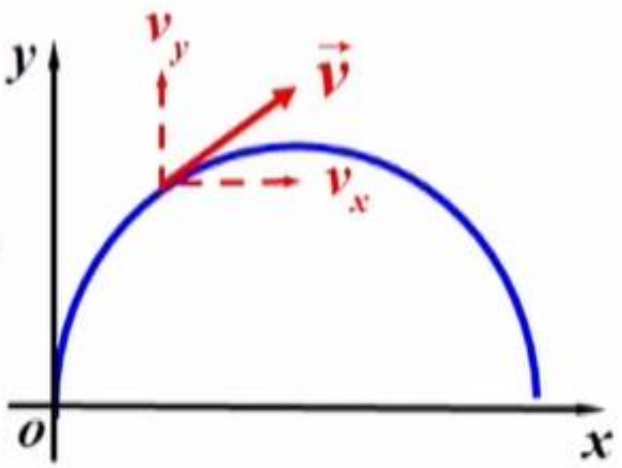
求 (1) 炮弹在时刻t_0的运动方向； (2) 炮弹在时刻t_0的速度大小.

解(2) 设炮弹在t_0时刻的速度为$\vec{v} = (v_x, v_y)$,

$$v_x = \frac{dx}{dt}\bigg|_{t=t_0} = (v_0 t\cos\alpha)'\big|_{t=t_0} = v_0\cos\alpha,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt}\bigg|_{t=t_0} = (v_0 t\sin\alpha - \frac{1}{2}gt^2)'\big|_{t=t_0} = v_0\sin\alpha - gt_0,$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t_0 \sin\alpha + g^2 t_0^2}.$$



$x = x(t)$

例3 设函数$y = y(x)$由$\begin{cases} xe^t + t\cos x = \pi \\ y = \sin t + \cos^2 t \end{cases}$所确定，求$\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} \quad 其中 t_0 = t(x_0)$$

解 两式分别对t求导，

$$\begin{cases} x'(t)e^t + xe^t + \cos x - t\sin x \cdot x'(t) = 0 \\ y'(t) = \cos t - 2\cos t \sin t \end{cases}$$

当$x = 0$时，由$xe^t + t\cos x = \pi$，得$t = \pi$，代入上面两式

得 $x'(\pi) = e^{-\pi}$，$y'(\pi) = -1$，

$$\Rightarrow \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = \frac{y'(\pi)}{x'(\pi)} = \frac{-1}{e^{-\pi}} = -e^{\pi}.$$

第二章 一元函数微分学

§2.3 隐函数和参数式函数的导数

一、隐函数的导数

二、对数求导法

三、参数式函数的导数

四、相关变化率

四、相关变化率

x、y满足$F(x,y)=0$， $x=x(t)$、$y=y(t)$均可导，

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{dx}{dt}、\dfrac{dy}{dt}}$相互关联

$\Downarrow$

相关变化率

已知其中一个变化率时如何求出另一个变化率？

变量x、y之间的关系：

$F(x,y)=0$ $\xrightarrow{\text{对}t\text{求导}}$ $\dfrac{dx}{dt}$、$\dfrac{dy}{dt}$满足的关系式

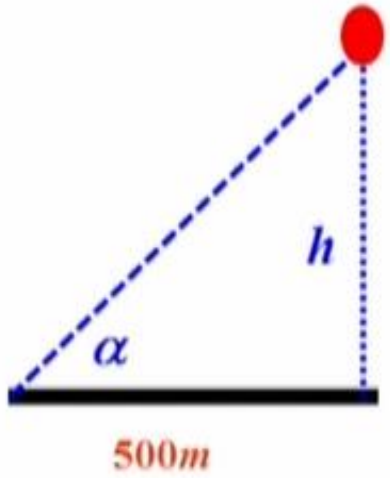
$\Rightarrow$ 解出未知变化率

例1 汽球从离开观察员500m处离地面铅直上升，速率为140$m/\min$. 当气球高度为500m时，观察员视线的仰角增加率是多少？

解 设气球上升t min后，其高度为h，观察员视线的仰角为α,

由题意 $\tan\alpha = \dfrac{h}{500}$,

上式两边对t求导得 $\sec^2\alpha \cdot \dfrac{d\alpha}{dt} = \dfrac{1}{500} \cdot \dfrac{dh}{dt}$



$\because \dfrac{dh}{dt} = 140m/\min$, 当$h = 500m$时, $\sec^2\alpha = 2$,

已知$\dfrac{dh}{dt}$，求$\dfrac{d\alpha}{dt}$

$\therefore \dfrac{d\alpha}{dt} = 0.14$(弧度/分).

例2 一个高为4米底半径为2米的圆锥形容器. 假设以$2m^3/min$的速率将水注入该容器, 求水深3米时水面上升的速率.

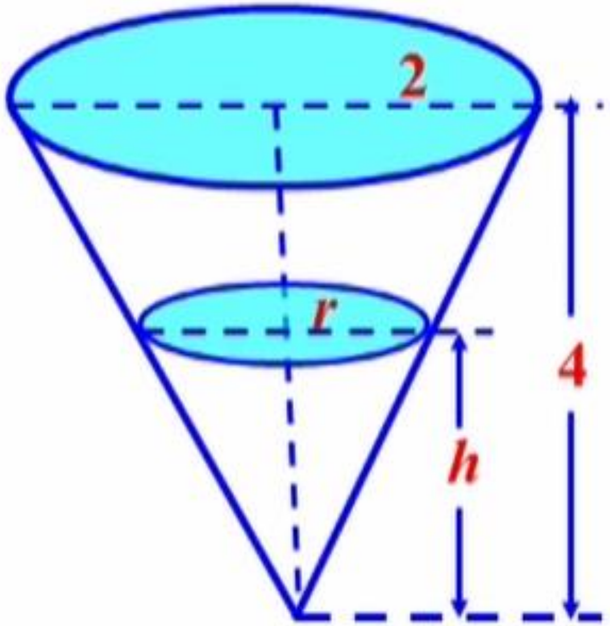
解 设t时刻水的体积、深度与水面半径分别为V、h、r,

由题意 $\dfrac{r}{h}=\dfrac{2}{4}$, 即$r=\dfrac{1}{2}h$,

$$\Rightarrow V=\frac{1}{3}\pi r^2 h=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h=\frac{\pi}{12}h^3,$$

上式两边对t求导得 $\dfrac{dV}{dt}=\dfrac{\pi}{4}h^2\dfrac{dh}{dt}$,

$$\Rightarrow \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=3}=\frac{8}{9\pi}m/min.$$



已知$\dfrac{dV}{dt}=2$, 求$\left.\dfrac{dh}{dt}\right|_{h=3}$