三. 矩阵乘法的定义

例2. 某电子集团生产三种型号的彩电，第一季度各40万台, 20万台, 30万台, 第二季度各30万台, 10万台, 50万台, 每万台的利润分别是400万元, 300万元, 500万元, 第一,二季度各类产品的利润是多少？

解: 产量矩阵: $A = \begin{pmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 50 \end{pmatrix}$

单位利润矩阵: $B = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$

利润矩阵: $C = \begin{pmatrix} 40\times 400 + 20\times 300 + 30\times 500 \\ 30\times 400 + 10\times 300 + 50\times 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{37000} \\ \mathbf{40000} \end{pmatrix}$

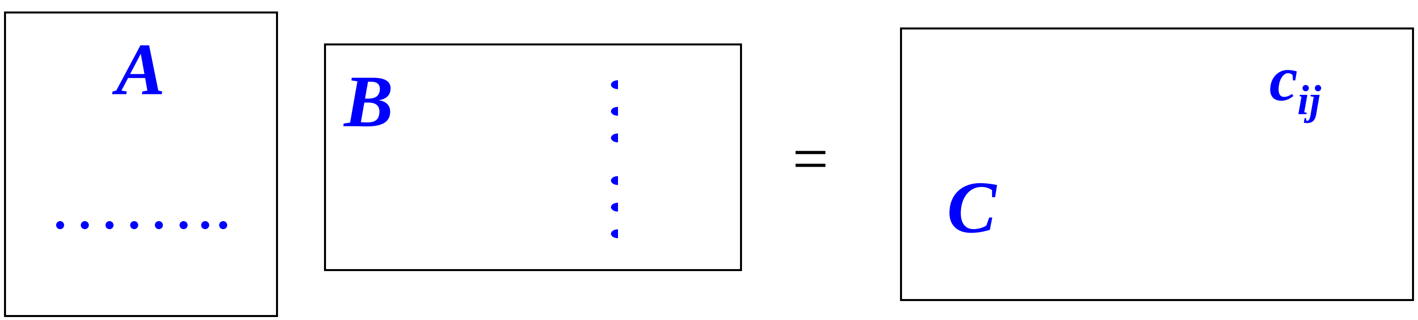
矩阵的乘法:

$$A_{m\times t}B_{t\times n}=C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$$

其中 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{it}b_{tj}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}$

$$(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$$

第i行



第j列

例3.

已知$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & -4\\ 1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，求$AB$, AC.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}0 & -5\\ 1 & 9\end{pmatrix},\qquad AC\text{无意义}$$

例4.

已知$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}, B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. 求$AB$, BA.

解：$AB=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix}_{n\times n}$

$$BA=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$$

一般的，$AB\neq BA$

例5. 已知$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. 求$AB, BA$.

解:

$AB=O$, $\quad BA=\begin{pmatrix}4 & *\\ * & *\end{pmatrix}$ $\quad AB\neq BA$. (不可交换)

且 $\quad AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

$$\left.\begin{aligned} AB&=AC\\ A&\neq O\end{aligned}\right\} \not\Rightarrow B=C$$

(矩阵乘法不适合消去律)

但是 $\quad IA=A=AI$

$$(kI)A=kA=A(kI)$$

例6.（线性方程组的矩阵形式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

令$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

方程组可写成：$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$

[结束]