四. 用行初等变换求逆矩阵

设A可逆，所以存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$，使得

$$\underline{E_k E_{k-1} \cdots E_1} A = I$$

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 = \underline{E_k E_{k-1} \cdots E_1} I$$

当A经系列初等行变换化为I时，

I经相同的初等行变换化为A^{-1}！

方法:

$$\boxed{(A \mid I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \mid A^{-1})}$$

例6. 求A的逆矩阵：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}$.

解:

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-4&-5&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例7. 求A的逆矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

解

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

故A不可逆

为什么？

例8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$

求：(1) $(A+2I)^{-1}(A^2-4I)$, (2) $(A+2I)^{-1}(A-2I)$

解：$(A+2I)^{-1}(A^2-4I)=(A+2I)^{-1}(A+2I)(A-2I)$

$$=A-2I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

(2) $(A+2I)^{-1}(A-2I)=?$

例9 解矩阵方程：(1) $AX=B$， (2) $XA=B$.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

其他类型的矩阵方程:

(1) $AXB=C$，且 A 与 B 可逆，那么

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1},\quad X=A^{-1}CB^{-1}.$$

(2) $AX+B=C$， 且 A 可逆，那么

$$AX=C-B,\quad X=A^{-1}(C-B).$$

(3) 如果 A 不可逆，如何求解方程：

$$AX=B?$$

令 $X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$，由 $AX=B$ 联立得9元方程组，求解之！

例10. 设三阶方阵A, B满足关系:

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B$$

解:

$$A^{-1}BA - BA = 6A$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1} - I\right)BA = 6A \Rightarrow \left(A^{-1} - I\right)B = 6I$$

$$\Rightarrow B = 6\left(A^{-1} - I\right)^{-1}.$$

$$\boldsymbol{B} = 6\left(\boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{I}\right)^{-1}$$

$$= 6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例11 设四阶矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

且矩阵满足关系式：$A(I-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=I$ 求矩阵**A**

解

$$I=A[C(I-C^{-1}B)]^{\mathrm{T}}=A(C-CC^{-1}B)^{\mathrm{T}}=A(C-B)^{\mathrm{T}}$$

$$(C-B)^{\mathrm{T}}=\left(\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

易知$(C-B)^{\mathrm{T}}$可逆，所以：$A=[(C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

[结束]