第四章 n维向量空间

习题课

何军华

电子科技大学

一、线性相关性及重要结论

设$A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则如下条件彼此等价:

- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ **线性相关**，即:

  存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得

  $$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_n\alpha_n=0.$$

- 存在某个向量可由其余向量线性表出;
- 零向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$非零的线性表出;
- 齐次方程组$AX=0$有**非零解**;
- **秩** $R(A)<n$;

$m=n$时: ◆ **行列式**为0 ◆ A**不可逆**.

已知向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关:

因为向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关,所以存在不全为0的数$k_1,\cdots,k_n$使得: $k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0.$

证明某个向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关:

设法找出不全为0的数$k_1,\cdots,k_n$使得:

$$k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0.$$

通常利用秩,行列式等证明$AX=0$有非零解.

涉及“线性相关”的重要结论:

- 向量个数>分量个数, 向量组线性相关;

  6个3维向量必然线性相关;
- 部分相关, 则整体相关;
- 向量组相关, 去掉一些分量后仍然线性相关;
- 行列式为0, 则列(行)向量组线性相关;
- 多组由少组线性表出, 则多组线性相关;
- 向量个数 > 向量组的秩, 则线性相关;
- $AX=0$有非零解, 则A的列组线性相关.

例1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关, 向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 而向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 则对任意的常数$k$, 必有(　　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关;

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关;

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关;

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关.

例2. 设向量组α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则(　　)

(A) α必可由β,γ,δ线性表出；

(B) β必不可由α,γ,δ线性表出；

(C) $\boxed{\delta\text{必可由}\alpha,\beta,\gamma\text{线性表出；}}$

(D) δ必不可由α,β,γ线性表出；

分析：

$$\left.\begin{array}{r}\alpha,\beta,\gamma\text{线性无关}\Rightarrow\alpha,\beta\text{线性无关}\\ \alpha,\beta,\delta\text{线性相关}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\delta$可由α,β线性表出$\Rightarrow$ δ可由α,β,γ线性表出

例2. 设向量组α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则(　　)

(A) α必可由β,γ,δ线性表出；

(B) β必不可由α,γ,δ线性表出；

(C) δ必可由α,β,γ线性表出；

(D) δ必不可由α,β,γ线性表出；

特殊值:

令$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　　$\delta=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

排除(A)(B)(D)

二. 向量组之间的线性表出

- 组 I 可由组 II **线性表出**, 则: $R(\mathrm{I}) \le R(\mathrm{II})$
- 组 I 与组 II **等价**, 则: $R(\mathrm{I}) = R(\mathrm{II})$
- **同型矩阵** A, B 的**行向量组等价**, 则: A, B 等价

A, B 等价 $\not\Rightarrow$ A, B 的行向量组等价.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A 与 I 等价 $\Rightarrow \exists C, s.t. CA = I$

$\Rightarrow$ A 与 I 的行向量组等价.

◆ 已知线性无关的n维向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)C_{r\times s}$$

(1) $\mathrm{R}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=\mathrm{R}(C)$;

(2) $r=s$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow |C|\neq 0 \Leftrightarrow C$可逆

证：$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)}_{A}C_{r\times s} \Rightarrow B_{n\times s}=A_{n\times r}C_{r\times s}$

$\Rightarrow R(B)\le R(C)$

$$\left.\begin{array}{r} R(A_{n\times r})=r\Rightarrow \exists D_{r\times n},\ s.t.\ DA=I_r \\ B=AC \end{array}\right\}\Rightarrow DB=DAC=C$$

$\Rightarrow R(B)\ge R(C)$

例1. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关, 则如下向量组中线性相关的是(　　)

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$; (B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$;

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$; (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$;

分析: 对应矩阵的行列式为0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9$$

例1. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则如下向量组中线性相关的是(　　)

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$;

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$;　(D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$;

特殊值法: 令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

问题转化为：判断4个具体向量组的线性无关问题，

计算各向量组相应矩阵行列式即可.

例2. 设向量组 α,β,γ 与数 k,l,m 满足 $k\alpha+l\beta+m\gamma=0$

$km\neq 0$, 则( )

(A) α,β 与 α,γ 等价　　(B) α,β 与 β,γ 等价

(C) α,γ 与 β,γ 等价　　(D) α 与 β 等价

分析:

- 向量组I, II等价 $\Leftrightarrow$ I, II能相互线性表出
- α_i 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

$$\alpha_i = 0\alpha_1+\cdots+0\,\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\,\alpha_{i+1}+\cdots+0\,\alpha_r$$

- $$\left.\begin{array}{r} k_1\alpha_1+\cdots+k_i\alpha_i+\cdots+k_r\alpha_r=0 \\ k_i\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

α_i 可由其余向量线性表示

例2. 设向量组 α,β,γ 与数 k,l,m 满足 $\boxed{k\alpha+l\beta+m\gamma=0}$

$\boxed{km\neq 0,}$ 则(　　　)

(A) α,β 与 α,γ 等价　　　　(B) α,β 与 β,γ 等价

(C) α,γ 与 β,γ 等价　　　　(D) α 与 β 等价

分析:

$$\left.\begin{array}{r} k\alpha+l\beta+m\gamma=0 \\ km\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \text{ 可由 } \beta,\gamma \text{ 线性表示} \\ \beta \text{ 可由 } \beta,\gamma \text{ 线性表示} \\ \gamma \text{ 可由 } \alpha,\beta \text{ 线性表示} \end{array}\right\}$$

β 可由 α,β 线性表示

$\Rightarrow \alpha,\beta$ 与 β,γ 等价

例3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s\ge 3)$ 线性无关, 且向量组

$$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+t\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+t\alpha_1$$

线性相关, 求 s 和 t 满足的条件.

解:

$$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&&&&t\\t&1&&&\\&t&\ddots&&\\&&\ddots&1&\\&&&t&1\end{pmatrix}}_{C}$$

$$|C|=1+(-1)^{s+1}t^s\begin{cases}=0, & s\text{为偶且}t=\pm1\\=0, & s\text{为奇且}t=-1\\\ne 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性相关 $\Leftrightarrow |C|=0$

$\Leftrightarrow [s\text{为偶且}t=\pm1]$ 或 $[s\text{为奇且}t=-1]$

三. $AB = O$ 与 $AB=I$

设A是m行n列矩阵, 则如下条件彼此等价:

- 存在非零矩阵 B 使得 $AB = O$;
- $AX = 0$ 有非零解;
- $R(A) < n$.

$$A_{m\times n}B_{n\times s} = O \Rightarrow A(b_1,\cdots,b_s) = (0,\cdots,0)$$

- B的列向量都是 $AX = O$ 的解;
- $R(A) + R(B) \leq n$;

例1. 设A, B为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A的列向量组线性相关, B的行向量组线性相关;

(B) A的列向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

(C) A的行向量组线性相关, B的行向量组线性相关.

(D) A的行向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

分析: $A_{m\times n}B_{n\times s}=O \Rightarrow R(A)+R(B)\le n$

$$A, B \text{ 非零} \Rightarrow 0<R(A_{m\times n}), R(B_{n\times s})<n$$

例2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & -3 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$，如果3阶矩阵$B$满足$AB=O$，且 $B^* \neq O$，求 A^{2015}.

分析:

$$AB=O \Rightarrow \left.\begin{array}{r} R(A)\geq 1 \\ R(A)+R(B)\leq 3 \end{array}\right\} \Rightarrow R(B)\leq 2$$

$$\left.\begin{array}{r} R(B)\leq 2 \\ B^* \neq O \Rightarrow R(B)\geq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow R(B)=2 \\ R(A)+R(B)\leq 3 \\ R(A)\geq 1 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A)=1$$

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\a&b&-3\\4&-2&c\end{pmatrix}$，如果3阶矩阵$B$满足$AB=O$，且 $B^*\neq O$，求 A^{2015}.

$$R(A)=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}(2,-1,3)=\alpha^T\beta$$

$$A^{2015}=\left[\alpha^T\beta\right]^{2015}=\alpha^T\left[\beta\alpha^T\right]^{2014}\beta=9^{2014}\alpha^T\beta$$

$$=9^{2014}A \qquad =9^{2014}\begin{pmatrix}2&-1&3\\-2&1&-3\\4&-2&6\end{pmatrix}$$

例3. $R\left(B_{m\times n}\right)=n\Rightarrow\exists A_{n\times m},\ s.t.\ AB=I_n$

列满秩矩阵左可逆.

证: $\boxed{R\left(B_{m\times n}\right)=n\Rightarrow}$ 存在可逆阵 P,Q 使得 $PBQ=\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$

$$\Rightarrow\left(I_n,O\right)_{n\times m}PBQ=\left(I_n,O\right)_{n\times m}\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}=I_n$$

$$\Rightarrow\left(I_n,O\right)_{n\times m}PB=Q^{-1}\ \Rightarrow\underbrace{Q\left(I_n,O\right)_{n\times m}P}_{A}B=I_n$$

$$\Rightarrow\exists A=Q\left(I_n,O\right)P,\ s.t.\ AB=I_n$$

$$\boxed{R\left(B_{m\times n}\right)=m\Rightarrow\exists C_{n\times m},\ s.t.\ BC=I_m}$$

例4. $A_{n\times m}B_{m\times n}=I_n \Rightarrow R(A)=R(B)=n$

两矩阵乘积是单位阵，则：矩阵的秩 = 单位阵的阶数.

证： $\boxed{A_{n\times m}B_{m\times n}=I_n \Rightarrow}$ $n=R(I_n)\le \min\left(R(A),R(B)\right)$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow R(A)\ge n,\ R(B)\ge n\\ R(A_{n\times m})\le n, R(B_{m\times n})\le n\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow R(A)=R(B)=n}$$

四. 两个向量组的线性相关性

设 $A_{n\times r}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, $B_{n\times s}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$, 则如下叙述等价:

- $\beta_1,\cdots,\beta_s$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表出
- $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)X_{r\times s}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$有解
- $R(A)=R(A,B)$

如下叙述等价:

- $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\cdots,\beta_s$等价
- $R(A)=R(A,B)=R(B)$

例1. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$

β_1可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，$\beta_2$不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，求$a$.

分析： $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&3&a+2&3&-1\\1&a&-2&4&a\end{pmatrix}$

$$\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&a&1&-3\\0&a-2&-3&3&a-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&a&1&-3\\0&0&a^2-2a-3&a+1&-2a+5\end{pmatrix}$$

β_2不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出$\Leftrightarrow a^2-2a-3=0$且$-2a+5\neq 0$

β_1可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出$\Rightarrow\ a+1=0$

$\boxed{\Rightarrow a=-1}$

例2. 设A, B都是n阶方阵, P, Q是n阶可逆矩阵.

下列命题不正确的是(　　).

(A) 若$B=AQ$, 则A的列向量组与B的列向量组等价;

(B) 若$B=PA$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(C) 若$B=PAQ$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(D) 若A的行向量组与B的行向量组等价, 则A与B等价.

分析:
$$B = AQ \Rightarrow (\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Q$$
$$\Rightarrow (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Q^{-1}$$

因此A的列向量组与B的列向量组可以相互线性表出,

是彼此等价的; 因此选项(A)正确;

同理选项(B)正确.

例2. 设A, B都是n阶方阵, P, Q是n阶可逆矩阵.

下列命题不正确的是(   ).

(A) 若$B=AQ$, 则A的列向量组与B的列向量组等价;

(B) 若$B=PA$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(C) 若$B=PAQ$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(D) 若A的行向量组与B的行向量组等价, 则A与B等价.

(C): 令 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ A, B的行向量组不等价

选项(C)错误.

(D): 向量组等价, 则向量组同秩,

于是A, B同秩, $\Rightarrow$ 同型矩阵A, B等价 选项(D) 正确.

例3. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\2\\a+2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$

中任两个向量都可由另外两个向量线性表出, 求a.

分析: 任两个向量都可由另外两个向量线性表出

$$\Rightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 2$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&4&2&1\\-1&2&4&a\\0&a+2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&6&6&a+1\\0&a+2&3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&6&6&a+1\\0&0&\boxed{1-a}&\boxed{1-(a+2)(a+1)/6}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=1}$$

五. 齐次线性方程组

给定齐次线性方程组: $A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$

定理1: 设$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$, 则如下叙述等价:

(1) $AX=0$ 有非零解;

(2) 秩$R(A)<n$;

(3) A的列组线性相关;

$m=n$时: (4) 行列式$\left|A\right|=0$;

(5) A不可逆;

定理2: 设$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$有非零解.则:

(1) 所有解构成非零的**解空间:**

$$V_A=\left\{X\in \mathbf{R}^n \middle| AX=0\right\}.$$

(2) 解空间的基(最大无关组)称为**基础解系**;

[1] 解; [2] 线性无关; [3] 任一解可由其表出;

(3) **基础解系**一定存在,解数恰为自由变元数:

基础解系中**解数**$=n-R(A)$.

(4) 若基础解系中含k个解,

则 **任意k个无关的解** 都是基础解系.

基础解系的判定

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_k \in \mathbf{R}^n$是齐次方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\mathbf{0}_{m\times 1}$的解，则如下叙述等价：

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是基础解系；

即$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关，且任一解都可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性表出.

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关且$R(A)=n-k$.

(3) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关且基础解系中含k个解.

(4) 任一解可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$惟一线性表出.

例1. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 系数矩阵 A 的秩为r, 则 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是(　　)

(A) $r = n$.　　　　(B) $r < n$.

(C) $r \geq n$.　　　　(D) $r > n$.

分析: n元齐次方程组 $AX=0$ 解的两种情况:

(1) $R(A) < n \Leftrightarrow$ 存在自由变元 $\Leftrightarrow$ 非零解

(2) $R(A) = n \Leftrightarrow$ 不存在自由变元 $\Leftrightarrow$ 只有零解

例2. 已知 $A_{5\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若

$$\eta_1=(3,1,-2,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$$

是方程组 $AX=0$ 的基础解系,那么如下命题:

(1) α_1,α_3 线性无关;　　(2) α_1 可由 α_2,α_3 线性表出;

(3) α_3,α_4 线性无关;　　(4) 秩 $R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$.

中正确的是(　　)

(A) (1)(3).　　(B)(2)(4).　　(C) (2)(3).　　(D) (1)(4).

分析:

$$\left.\begin{array}{r}4\text{个变元}\\ \text{基础解系中含2个解向量}\end{array}\right\}\Rightarrow R(A)=2$$

(1)不正确

$$\left.\begin{array}{ll}A\eta_1=0\Rightarrow & 3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0\\ A\eta_2=0\Rightarrow & \alpha_2+\alpha_4=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3\alpha_1-2\alpha_3=0$$

(2)正确

例2. 已知 $A_{5\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若

$$\eta_1=(3,1,-2,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$$

是方程组 $AX=0$ 的基础解系，那么如下命题：

(1) α_1,α_3线性无关；　(2) α_1可由α_2,α_3线性表出；

(3) α_3,α_4线性无关；　(4) 秩$R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$.

中正确的是(　　)

分析： $R(A)=2$　$3\alpha_1-2\alpha_3=0$　$\alpha_2+\alpha_4=0$

若(3)不正确：

$$\begin{cases}\alpha_3=0\Rightarrow\alpha_1=\alpha_3=0,\alpha_2=-\alpha_4 & \Rightarrow R(A)\le1\\ \alpha_3\ne0\Rightarrow\alpha_4=k\alpha_3,\ \alpha_1=(2/3)\alpha_3,\alpha_2=-k\alpha_3 & \Rightarrow R(A)\le1\end{cases}$$

矛盾！　　因此(3)正确

例2. 已知 $A_{5\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若

$$\eta_1=(3,1,-2,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$$

是方程组 $AX=0$ 的基础解系，那么如下命题:

(1) α_1,α_3线性无关；　(2) α_1可由α_2,α_3线性表出；

(3) α_3,α_4线性无关；　(4) 秩$R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$.

中正确的是(　　)

(A) (1)(3).　(B)(2)(4).　(C) (2)(3).　(D) (1)(4).

(4)不正确:

$$(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)\le R(A)=2$$

例3. 设
$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0.$$

试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和b满足何种关系时:

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解? 此时求方程组的一个基础解系.

分析: $$|A|=(a_1+\cdots+a_n+b)b^{n-1}=b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i+b\right)$$

(1) 方程组仅有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$$\Leftrightarrow b\neq 0 \text{ 且} \sum_{i=1}^{n} a_i+b\neq 0$$

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0.$$

(2) 方程组有非零解? 此时求方程组的一个基础解系.

(2) 方程组有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow b=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$

$b=0$ 时：不妨设 $a_1\neq 0$.

此时系数阵各行相同, 基础解系：$\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_3\\ 0\\ a_1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-a_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ a_1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases} \qquad \sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0.$$

(2) 方程组有非零解 $\Leftrightarrow b=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$

$\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$ 时:

若 $a_i\neq 0$, 此时系数矩阵中 a_{ii} 的余子式不为0

$$\Rightarrow R(A)=n-1$$

此时系数矩阵各行元之和均为0, 基础解系为: $\begin{pmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{pmatrix}$

六. 非齐次方程组

给定非齐次方程组：$A_{m\times n}X_{n\times 1}=b_{m\times 1}\quad (b\neq 0)$

定理3: 设$\overline{A}=(A,b)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,b)$，则：

(1) $AX=b$无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\overline{A})$;

(2) $AX=b$有唯一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=n$;

(3) $AX=b$有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<n$;

(4) $AX=b$有解 $\Leftrightarrow b$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出

非齐次方程组求解过程

对增广矩阵初等行变换,化为阶梯型:

$$(1)\ R(A) \neq R(\overline{A}) \Rightarrow$$ 无解!

$$(2)\ R(A) = R(\overline{A}) \Rightarrow$$ 有解!

有解时继续化为行简化阶梯型,回写方程组;

[1] 所有自由变元取0,得特解 η_0;

[2] 去掉常数列,依次令某自由变元取1,其它取0,得导出组基础解系: $\xi_1,\cdots,\xi_r\ \ (r = n - R(A))$

通解: $\eta_0 + k_1\xi_1 + \cdots + k_r\xi_r,\ k_1,\cdots,k_r \in \mathrm{R}$

对方程组题设条件的理解

给定方程组$AX=\beta$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

(1) $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4=0 \Rightarrow$ $(1,1,0,2)^T$ 是$AX=0$的解

(2) $\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 \Rightarrow$ $(1,-1,2,0)^T$ 是特解

(3) $AX=\beta$有两个不同的解 $\Rightarrow$ $\gamma-\delta$是$AX=0$的解

(4) 非零矩阵B使得$AB=O \Rightarrow$

B的非零列是$AX=0$的非零解

例1. 设A为4×3非零矩阵，η_1,η_2,η_3是非齐次方程组$AX=\beta$的3个线性无关的解，则$AX=\beta$的通解为(　　)

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k(\eta_2-\eta_1)$;　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k(\eta_2-\eta_1)$;

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$;

(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$;

分析： $AX=\beta$有3个线性无关的解$\eta_1,\eta_2,\eta_3\Rightarrow$

$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是$AX=0$线性无关的解

$$A\left(\frac{\eta_2+\eta_3}{2}\right)=\frac{1}{2}A\eta_2+\frac{1}{2}A\eta_3=b,\ A\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)=\frac{1}{2}A\eta_2-\frac{1}{2}A\eta_1=0$$

方程数=变元数: 首先考虑利用**行列式**.

例2. 已知方程组$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$有无穷多解, 求$\lambda$的值.

分析:

方程组有无穷多解$\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<3$

用初等行变换求秩? 可能出现分数, 先求行列式!

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(1-\lambda)^2(\lambda-10)\ \Rightarrow \lambda=1\ or\ 10$$

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$$ 有无穷多解，求λ的值.

$R(A)=R(\overline{A})<3 \Rightarrow \lambda=1 \ or\ 10$

$$\lambda=1:\ \overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda=10:\overline{A}=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\rightarrow\cdots\rightarrow\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

此时原方程组无解！ $\boxed{\Rightarrow \lambda=1}$

例3. 已知4阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $AX=\beta$ 的通解为

$$(2,1,0,3)^T+k(1,-1,2,0)^T,k\in\mathbb{R}.$$

试问: (1) α_1能否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出? 为什么?

(2) α_4能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出? 为什么?

分析:

$$\left.\begin{aligned}\beta=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_4\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$$

$$\boxed{\Rightarrow\alpha_1=1\alpha_2-2\alpha_3+0\alpha_4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{设}\alpha_4\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\\ &\alpha_1\text{可由}\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\alpha_4\text{可由}\alpha_2,\alpha_3\text{表出}$$

$\Rightarrow R(A)\le 2$ 矛盾于导出组基础解系中解数为1!

$$\boxed{\Rightarrow\alpha_4\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{表出}}$$

七. 方程组有解的判定

线性方程组的**解数** $\Leftrightarrow$ **秩**的(不等式)关系

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$$

有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$

只有零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=b_{m\times 1}\left(b\neq 0\right)$$

无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\overline{A})$

无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<n$

惟一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=n$

例1. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\end{pmatrix}$，其中 a,b,c,d 是互异实数，

那么如下结论中一定成立的是(　　　)

(A) $AX=0$只有零解；　　(B) $A^TX=0$有非零解；

(C) $A^TAX=0$有非零解；　　(D) $AA^TX=0$有非零解；

分析： $C_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R\left(C_{m\times n}\right)<n$

a,b,c,d 互异 $\Rightarrow R(A)=R\left(A^T\right)=R\left(AA^T\right)=R\left(A^TA\right)=3$

$A_{3\times4}$　　$A^T_{4\times3}$　　$\left(A^TA\right)_{4\times4}$　　$\left(AA^T\right)_{3\times3}$

例2. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 中未知量的个数为 n, 方程的个数为 m, 系数矩阵 A 的秩为 r, 则(　　)

(A) $r=m$时, 方程组 $AX=b$ 有解;

(B) $r=n$时, 方程组 $AX=b$ 有惟一解;

(C) $m=n$时, 方程组 $AX=b$ 有惟一解;

(D) $r<n$时, 方程组 $AX=b$ 有无穷多解;

分析:

$(A)\quad R(A_{m\times n})=m \Rightarrow R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)$

$(B)\quad R(A_{m\times n})=n \Rightarrow R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)=n$

$(C)\quad m=n \Rightarrow \quad R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)=n$

$(D)\quad R(A_{m\times n})<n \Rightarrow R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)<n$

例3. 设A, A^*都是3阶非零矩阵且$AA^* = O$，则 $A^*X = 0$ 的基础解系含有______个解向量.

分析：

$$\left.\begin{array}{l} AA^* = O \Rightarrow R(A) + R(A^*) \le 3 \\ R(A^*) = \begin{cases} 3, & R(A) = 3, \\ 1, & R(A) = 2, \\ 0, & R(A) \le 1. \end{cases} \\ A \ne O, A^* \ne O \Rightarrow R(A), R(A^*) \ge 1 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A^*) = 1$$

$\Rightarrow 3 - R(A^*) = 2 \Rightarrow A^*X = 0$的基础解系含有 2个 解向量