设 A 是 $n\geq 2$ 阶实矩阵, 则如下哪一个不是A正交的充分必要条件 (　　)

(A) $A^TA=I$

(B) A^{-1} 是正交矩阵

(C) 存在正交矩阵 B 使得 $A=B^TB$

(D) A^* 是正交矩阵

[解析] 选项(A)错误:

$$A\text{正交}\Leftrightarrow A^TA=I=AA^T\Leftrightarrow A^TA=I$$

选项(B)错误: A 正交 $\Leftrightarrow I=A^TA\Leftrightarrow I^{-1}=\left(A^TA\right)^{-1}\Leftrightarrow I=A^{-1}\left(A^{-1}\right)^T$

$\Leftrightarrow A^{-1}$正交

设 A 是 $n\geq 2$ 阶实矩阵，则如下哪一个不是A正交的充分必要条件（　　）

(A) $A^TA=I$　　(B) A^{-1} 是正交矩阵

(C) 存在正交矩阵 B 使得 $A=B^TB$　　(D) A^* 是正交矩阵

[解析] 选项(C)正确：

若正交矩阵 B 使得 $A=B^TB$，则A 作为两个正交矩阵的乘积是正交的.

另一方面，对 2 阶正交矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$，若存在正交矩阵$B$使得 $A=B^TB$，则

$$-1=\det(A)=\det(B^TB)=\det(B)^2=1\Rightarrow 矛盾！$$

因此(C)选项的条件仅为A正交的充分条件，不是必要条件.

设 A 是 $n\geq 2$ 阶实矩阵，则如下哪一个不是A正交的充分必要条件（　　）

(A) $A^TA=I$

(B) A^{-1} 是正交矩阵

(C) 存在正交矩阵 B 使得 $A=B^TB$

(D) A^* 是正交矩阵

[解析] 选项(D)错误：

$$\left.\begin{aligned} A\text{ 正交} \Rightarrow |A| = \pm 1 \\ AA^* = |A|I \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^* = \pm A^{-1} \quad \Rightarrow A^*\text{正交}$$

$$\left.\begin{aligned} A^*\text{正交} \Rightarrow \pm 1 = |A^*| = |A|^{n-1} \Rightarrow A\text{ 可逆且 } |A| = \pm 1 \\ AA^* = |A|I \end{aligned}\right\} \Rightarrow A^{-1} = \pm A^*\text{ 正交}$$

$$\Rightarrow A\text{ 正交}$$