第三章 几何空间

平面解析几何

$\downarrow$ 推广

空间解析几何

工具:向量

主要内容:向量代数；空间平面与直线.

电子科技大学 蒲和平

第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系
- 向量及其线性运算
- 向量在轴上的投影
- 向量线性运算的几何意义
- 向量的方向余弦
- 内容小结

第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系

  向量及其线性运算

  向量在轴上的投影

  向量线性运算的几何意义

  向量的方向余弦

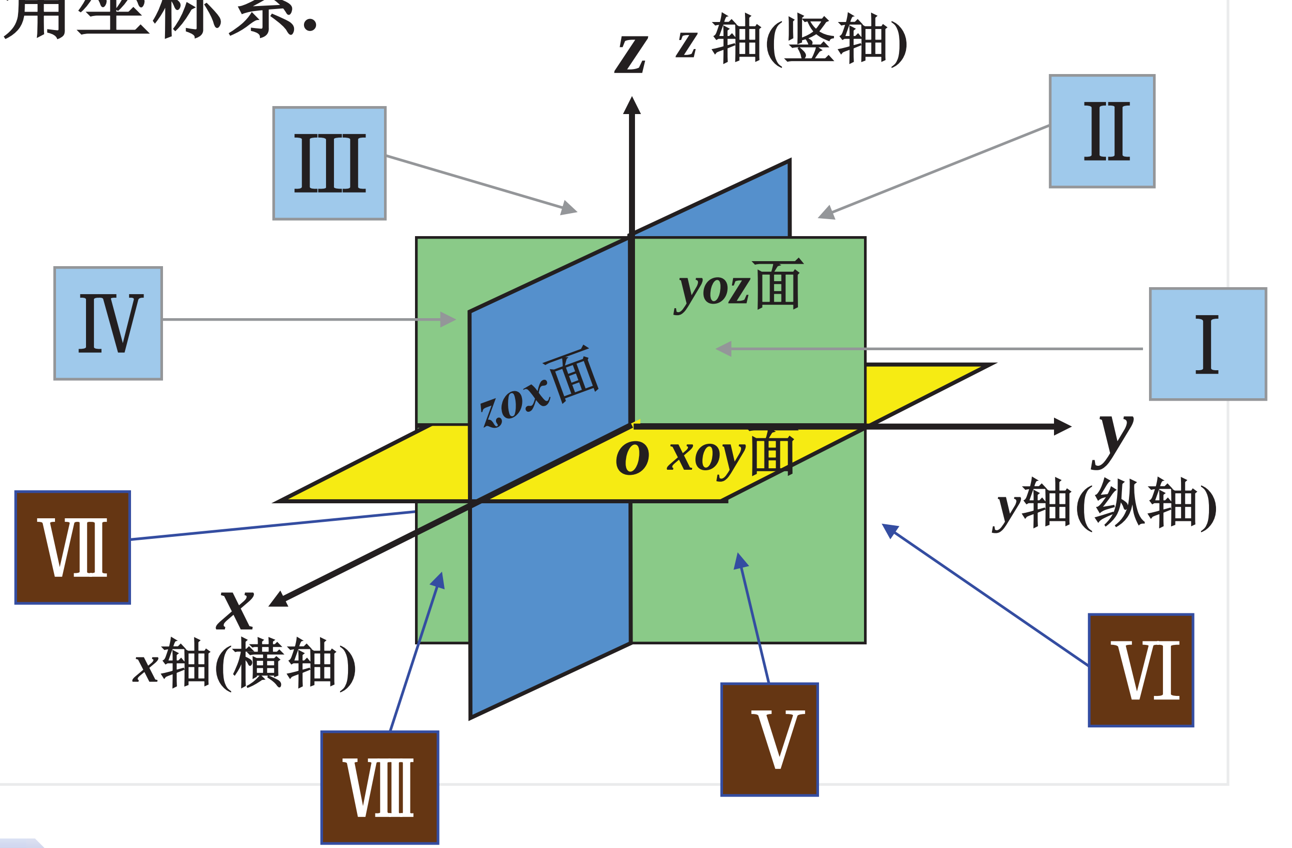
  内容小结

一、空间直角坐标系

1. 空间直角坐标系的概念

过空间一定点 o ,由三条互相垂直的数轴按右手规则组成一个空间直角坐标系.

- 坐标原点
- 坐标轴
- 坐标面
- 卦限(八个)

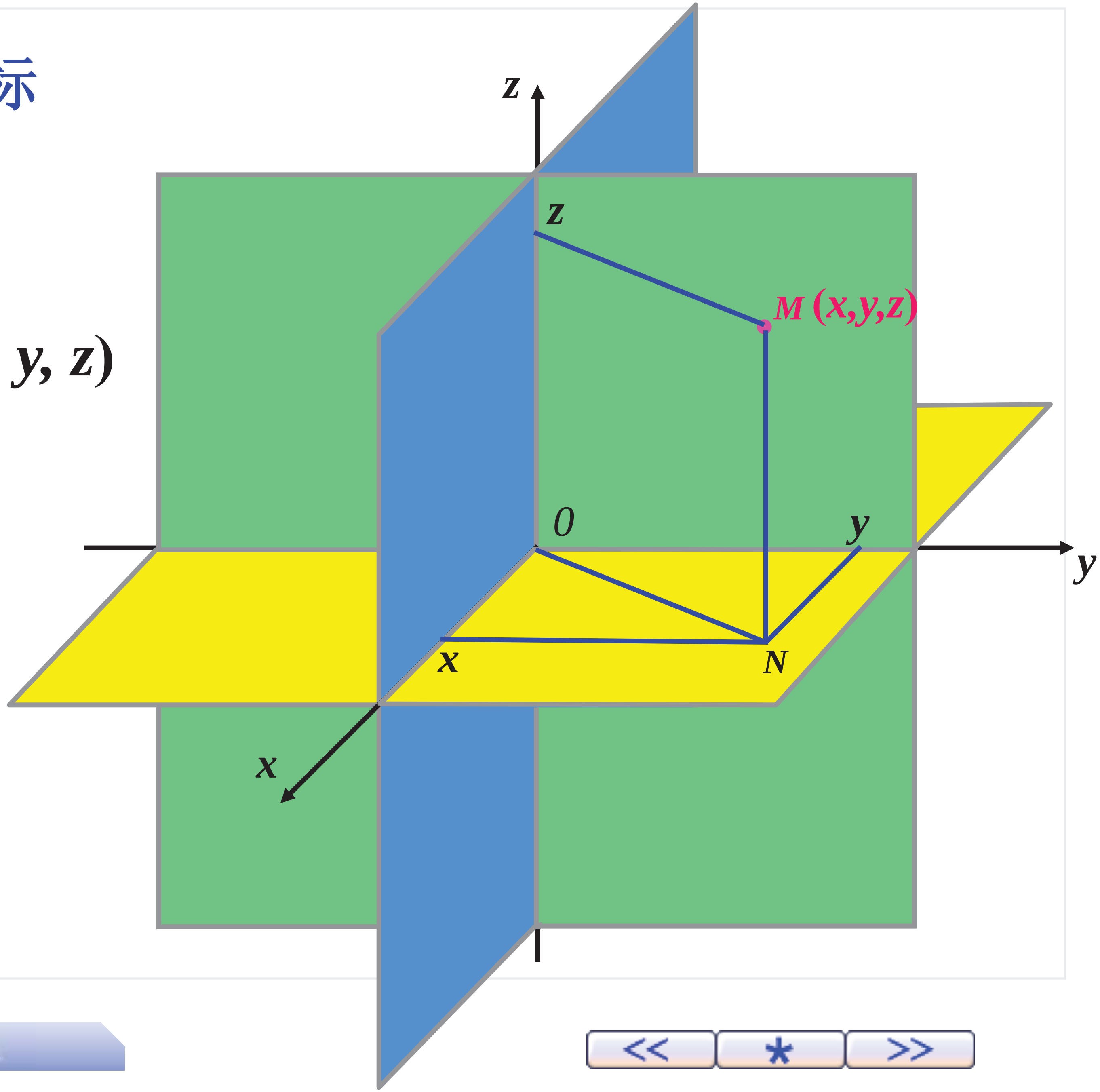


2. 点的坐标

空间的点

$$\xleftrightarrow{\ 1\text{--}1\ }$$

有序数组(x, y, z)



特殊对称点:

关于xoy面:

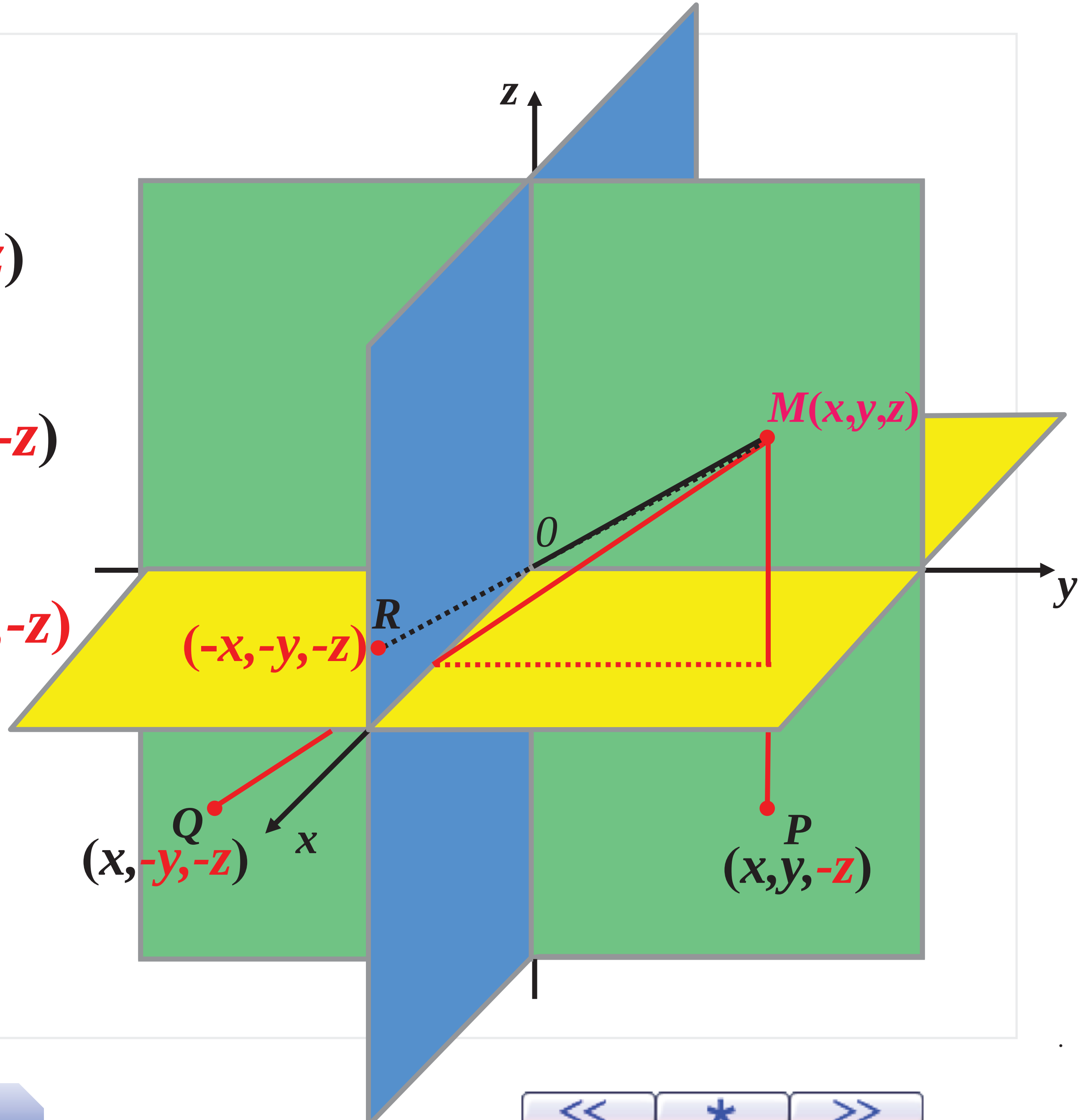
$(x,y,z) \leftrightarrow (x,y,-z)$

关于x轴:

$(x,y,z) \leftrightarrow (x,-y,-z)$

关于原点:

$(x,y,z) \leftrightarrow (-x,-y,-z)$



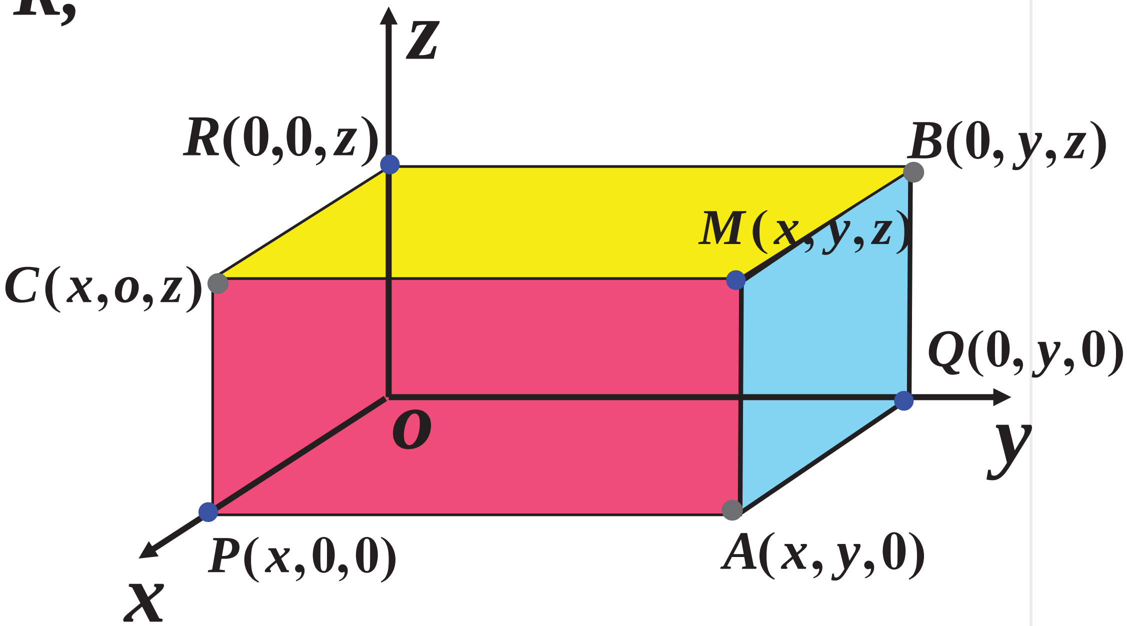
坐标轴与坐标面上的点:

坐标轴上的点P, Q , R,

$$x\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

$$y\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x=0 \end{cases}$$

$$z\text{轴} \leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$



$$xoy\text{面} \leftrightarrow z=0$$

$$yoz\text{面} \leftrightarrow x=0$$

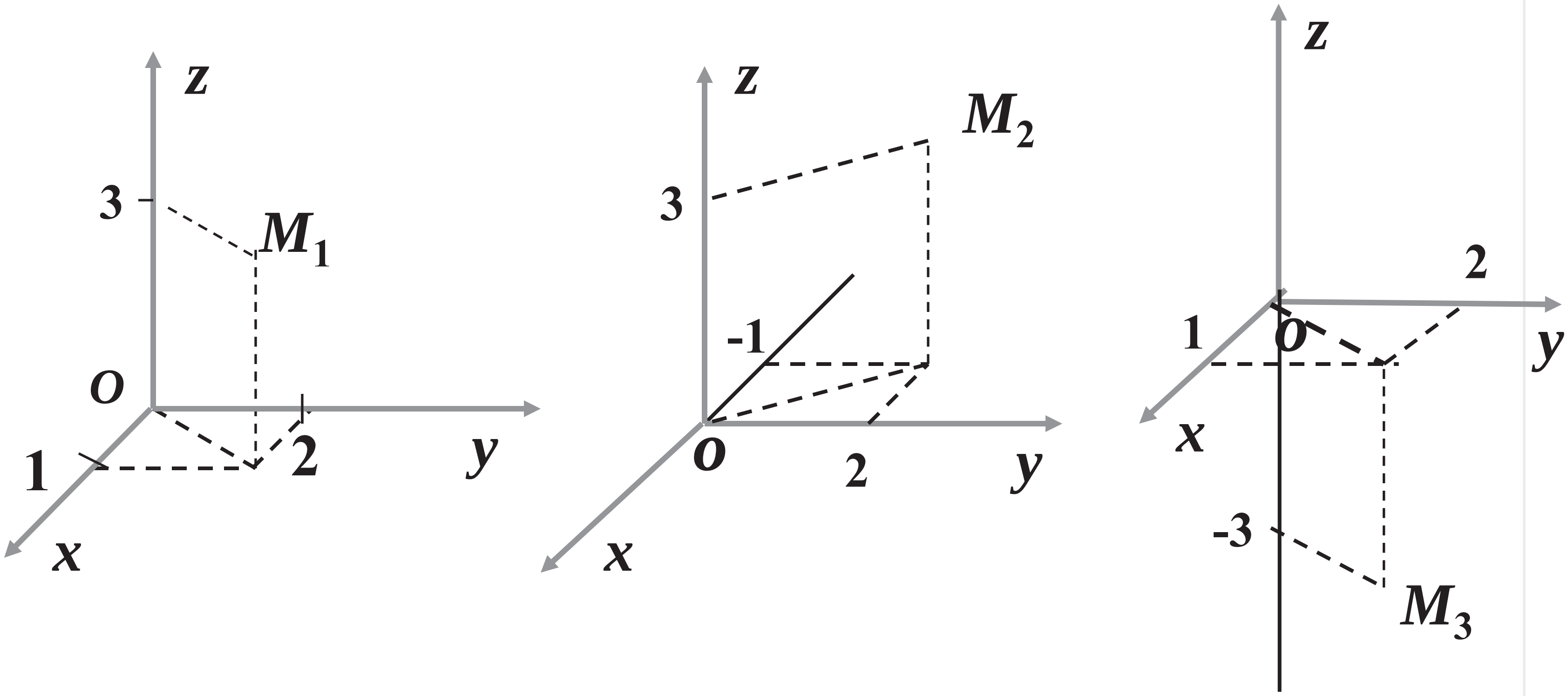
$$zox\text{面} \leftrightarrow y=0$$

坐标面上的点A, B, C,

原点$O(0,0,0)$

例 在 *o—xyz* 坐标系中表示以下三个点：

$$M_1(1, 2, 3),\ M_2(-1, 2, 3),\ M_3(1, 2, -3).$$



主要内容

1. 空间直角坐标系的概念;

2. 点的坐标.

练习

1. 已知空间直角坐标系下，立方体的 4 个顶点为 $A(-a,-a,-a)$，$B(a,-a,-a)$，$C(-a,a,-a)$和 $D(a,a,a)$，则其余顶点分别为__________，__________，__________，__________；

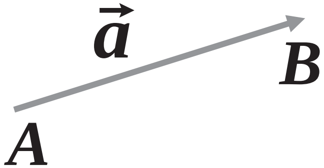
答案: $(a,a,-a)$, $(-a,a,a)$,$(-a,-a,a)$,$(a,-a,a)$

第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系
- 向量及其线性运算
- 向量在轴上的投影
- 向量线性运算的几何意义
- 向量的方向余弦
- 内容小结

二、向量及其线性运算

1. 向量的概念



向量：既有大小又有方向的量.

向量的表示：以A为起点，B为终点的有向线段.

记为 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$.

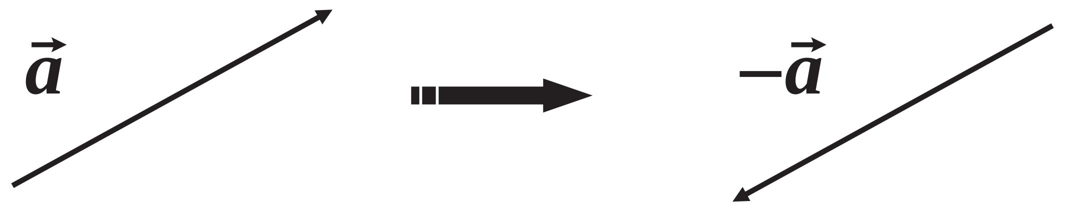
向量的模：向量的大小. 记为 $\|\vec{a}\|$ 或 $\|\overrightarrow{AB}\|$

（模又称为**长度**或**范数**）.

单位向量：模为1的向量.

零向量：模为0的向量 $\vec{0}$. 零向量没有确定的方向.

负向量：与$\vec{a}$的模相同而方向相反的向量称为$\vec{a}$的负（反）向量，记为$-\vec{a}$.



显然 $-(-\vec{a})=\vec{a}$.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量为$\overrightarrow{BA}$, 即: $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

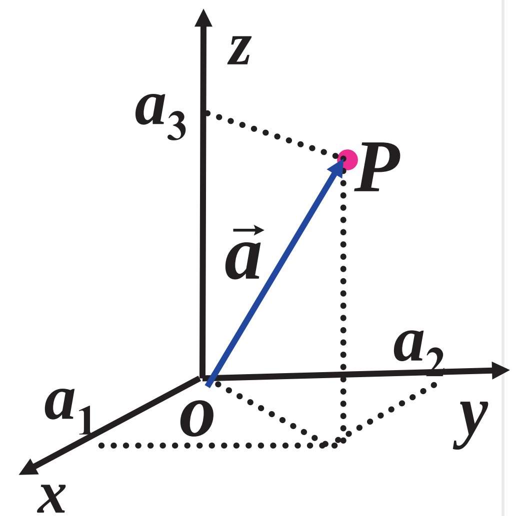
相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

向量由其模和方向确定，与它的位置无关，称为**自由向量**. 以原点为起点的向量称为**径向量**(径矢、向径).

2.向量的坐标表示

对空间向量 $\vec{a}$ 作平移，使其起点与原点重合，设终点为P，则 $\vec{a}$ 确定了点 P. 反之，空间中任一点 P 也确定一向量 $\overrightarrow{OP}$.

$$\text{点}P \xleftrightarrow{\text{1–1对应}} \overrightarrow{OP}$$



向量的坐标：设$\vec{a}$对应的向径为$\overrightarrow{OP}$，点P的坐标为(a_1, a_2, a_3)，称 a_1, a_2, a_3为向量 $\vec{a}$ 的**坐标**或**分量**.

记为 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

零向量记为 $\vec{0}=(0,0,0)$，有时简记为0.

$\vec{a}$ 的负向量 $-\vec{a}=(-a_1, -a_2, -a_3)$.

$$(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3.$$

3. 向量的线性运算

定义 向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$与$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$的加法规定为

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$\vec{a}$与数k的乘法(简称**数乘**)规定为

$$k\cdot\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$$

加法与数乘统称为**线性运算**.

减法： $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

或 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

八条运算规则:

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

加法

(5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(6) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

数乘

(7) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

(8) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

加法与数乘

例1. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2),\ \vec{b}=(-1,1,-2).$

解 2×① −3×②，得

$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

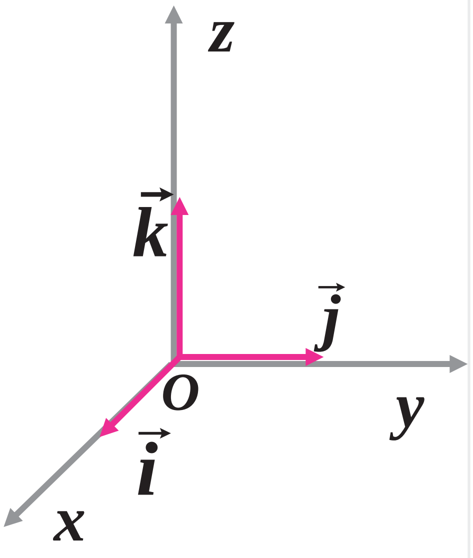
$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

4. 基向量及向量的线性表示

在 x, y, z 轴上分别取单位向量

$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)$$

称为基向量.



则 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$= (a_1, 0,0) + (0, a_2, 0) + (0, 0, a_3)$$

$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

称 $\vec{a}$ 可由 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 线性表出(示).

即：任一向量均可由基向量组线性表出. 表出的系数就是向量的坐标.

主要内容

向量及其线性运算

1. 向量的概念与坐标表示;
2. 向量的线性运算法则.

练习 已知向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$及$\vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, 则$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=$____________;

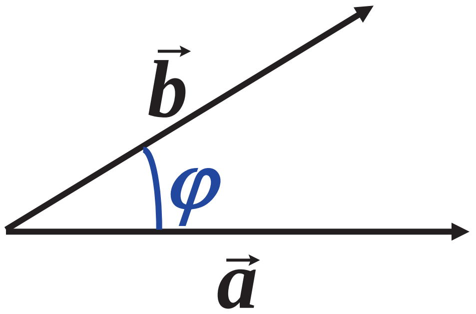
答案: $10\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系
- 向量及其线性运算
- ➤ 向量在轴上的投影
- 向量线性运算的几何意义
- 向量的方向余弦
- 内容小结

三、向量在轴上的投影

1. 空间两向量的夹角



设 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$,

向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角:

$$\varphi = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

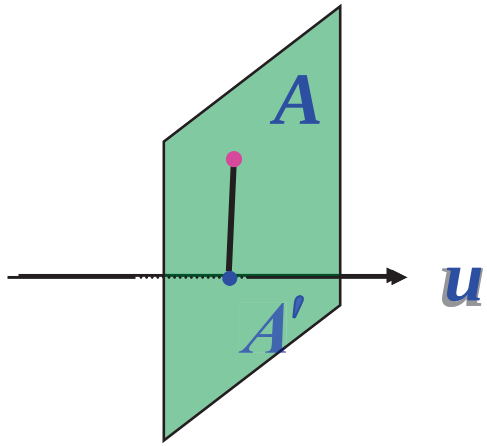
类似地，可定义向量与数轴, 数轴与数轴的夹角.

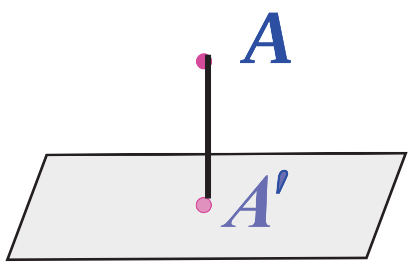
特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与 π 之间任意取值.

2. 空间一点在轴(平面)上的投影(射影)

过点A作u轴的垂直平面，交点A'即为点A在
(平面) (直线)

u轴上的投影.
(平面)

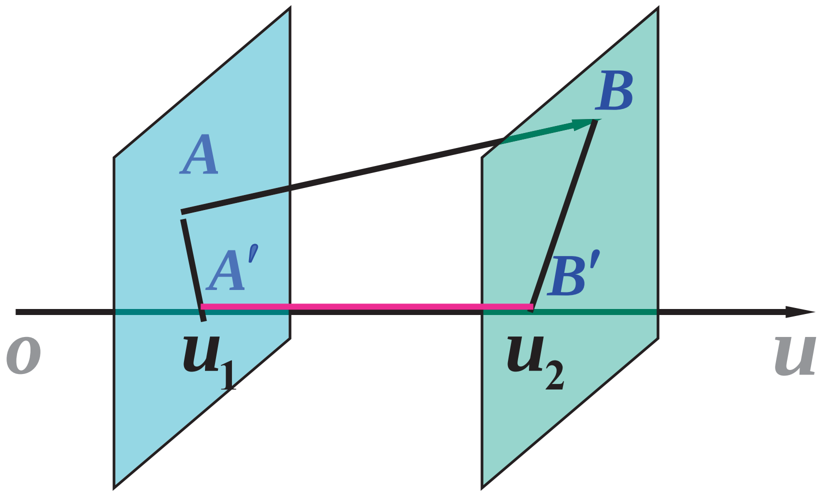




练习：$A(-4,3,5)$在xoy平面上的投影点为(-4,3,0)，在yoz面上的投影点为(0,3,5)，在y轴上的投影点为(0, 3, 0)，在z轴上的投影点为(0, 0, 5)；

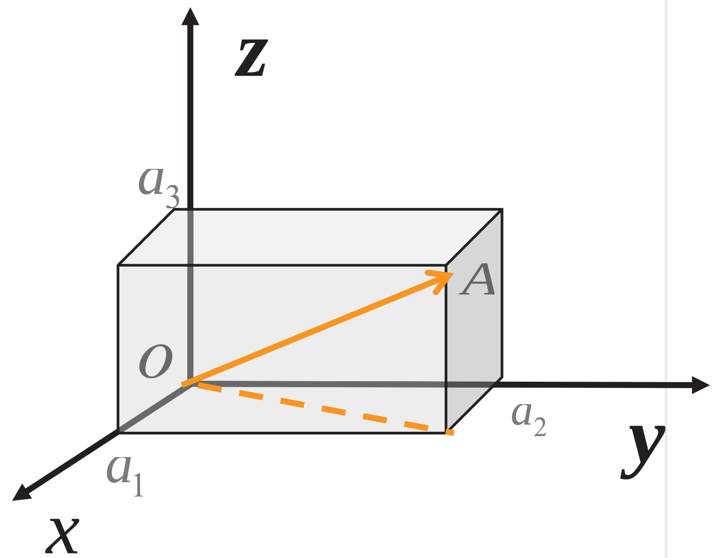
3. 向量在轴上的投影

设点A, B分别在 u 轴上的投影点为 A', B'，A', B' 在u轴上的坐标分别为u_1, u_2，向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的投影定义为



$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = u_2 - u_1 = \begin{cases} \|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } u \text{ 轴同向;} \\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } u \text{ 轴反向.} \end{cases}$$

设 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$，则 a_1, a_2, a_3分别是 $\overrightarrow{OA}$ 在三个坐标轴上的投影.



利用勾股定理从图中可得

$$\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

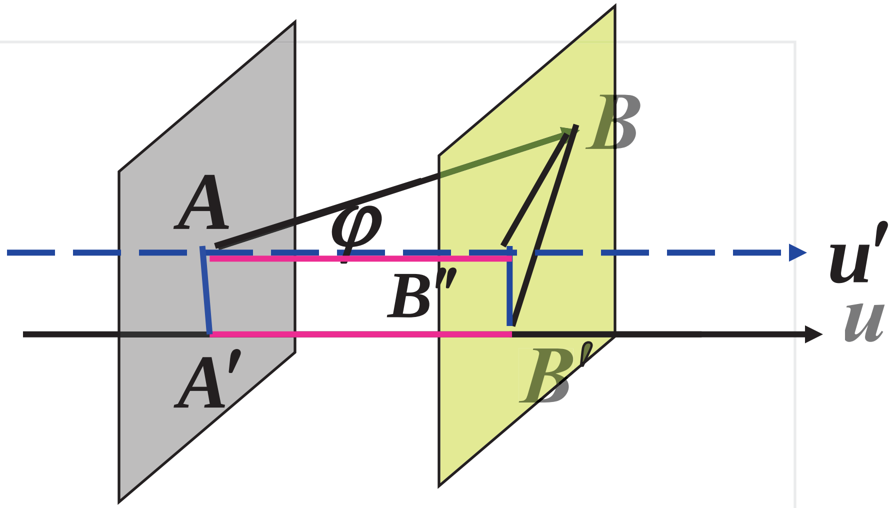
------向量的模.

$$\|k\cdot\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{(k\cdot a_1)^2+(k\cdot a_2)^2+(k\cdot a_3)^2}$$

$$=|k|\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

$$=|k|\cdot\|\overrightarrow{OA}\|$$

4. 投影的性质



（1） $\text{Pr j}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi$，

$$\varphi = \langle \overrightarrow{AB}, u \rangle.$$

(2) $\text{Pr j}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \text{Pr j}_u \vec{a}_1 + \text{Pr j}_u \vec{a}_2.$

该性质可推广到有限多个和的情形.

练习： 设 $\vec{a} = (3,5,8)$, $\vec{b} = (2,-4,-7)$, $\vec{c} = (5,1,-4)$,

则向量 $4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ 在 y 轴上的投影为 __7__； 在

x轴上的投影为 __13__ .

$\because\ 4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (13, 7, 15)$

主要内容

向量在轴上的投影

1. 向量在轴上投影的概念；

2. 向量在轴上投影的性质.

第一讲 空间直角坐标系与向量

空间直角坐标系

向量及其线性运算

向量在轴上的投影

- 向量线性运算的几何意义

向量的方向余弦

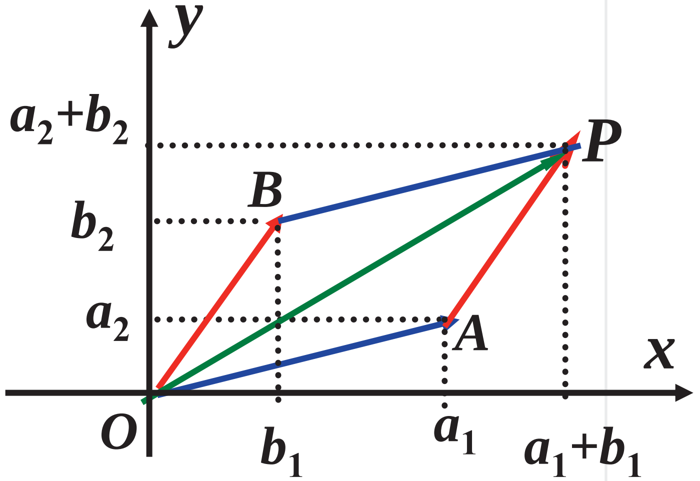
内容小结

四、向量线性运算的几何意义

1. 加法的几何意义

设 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$, 则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=\overrightarrow{OP},$$



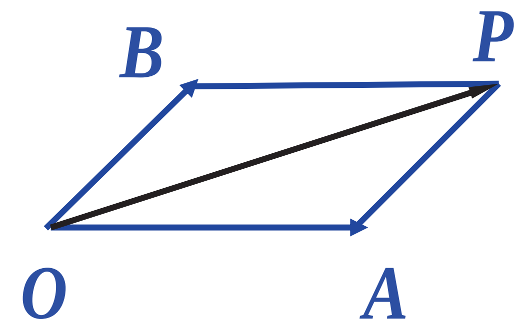
$$\mathrm{Pr\,j}_{ox}\overrightarrow{BP}=a_1+b_1-b_1=a_1$$

$$\mathrm{Pr\,j}_{oy}\overrightarrow{BP}=a_2+b_2-b_2=a_2$$

故 $\overline{BP}$ 经平行移动后可与 $\overrightarrow{OA}$ 重合.

即 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}$， 所以，$OAPB$是平行四边形.

平行四边形法则:

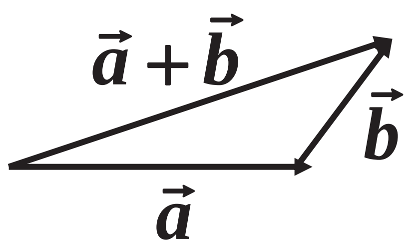


$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}$,

$\overrightarrow{OP}$ 是以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为边的平行四边形的对角线.

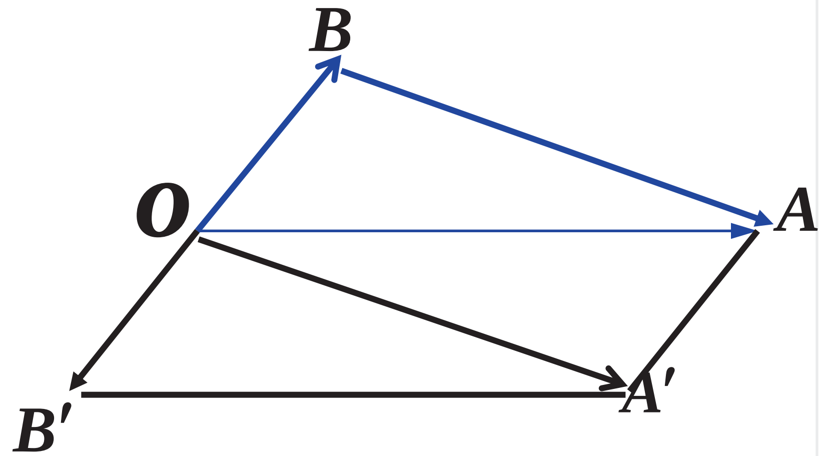
$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}$.

平行四边形法则也可表示为三角形法则:

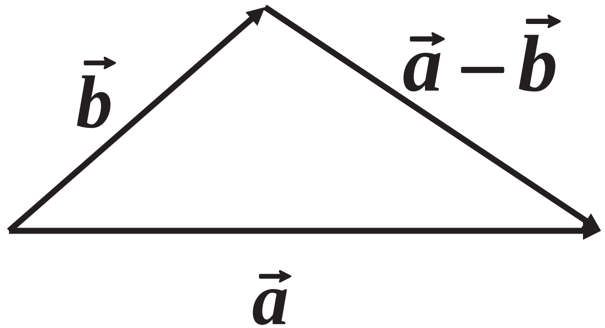


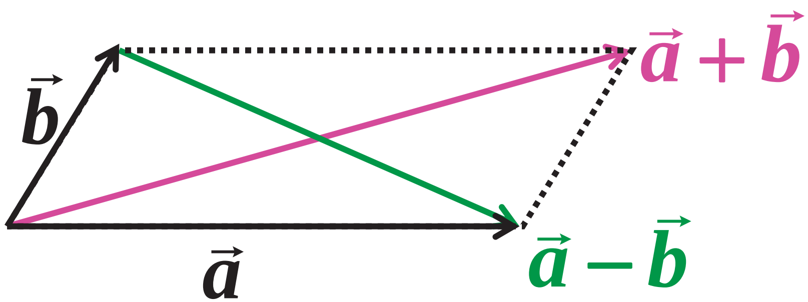
向量减法的几何意义:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$$
$$=\overrightarrow{OA'}$$
$$=\overrightarrow{BA}$$



三角形法则:





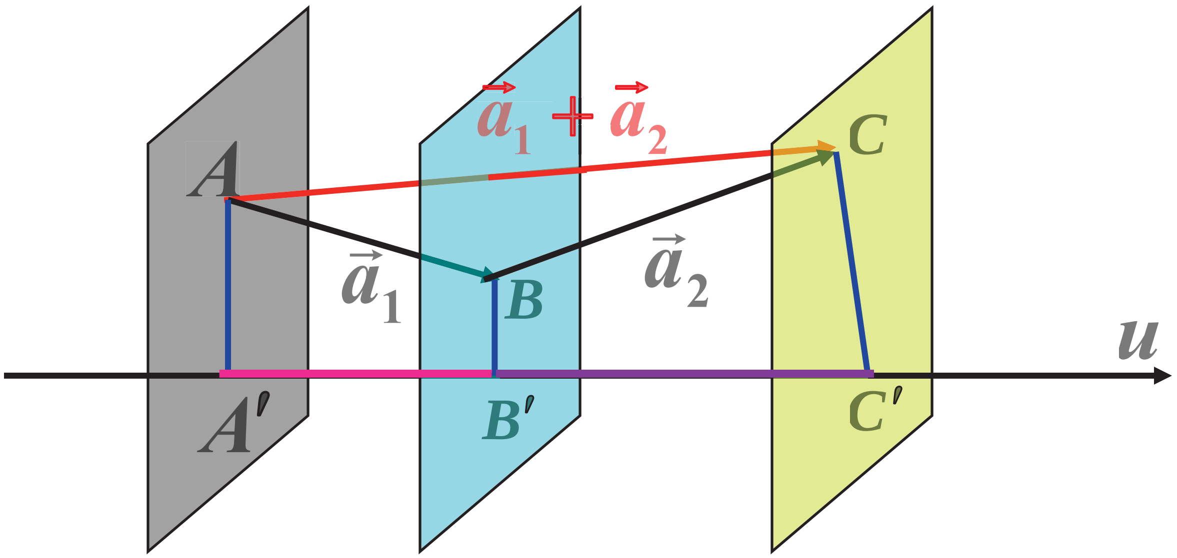
显然:

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$$

投影性质

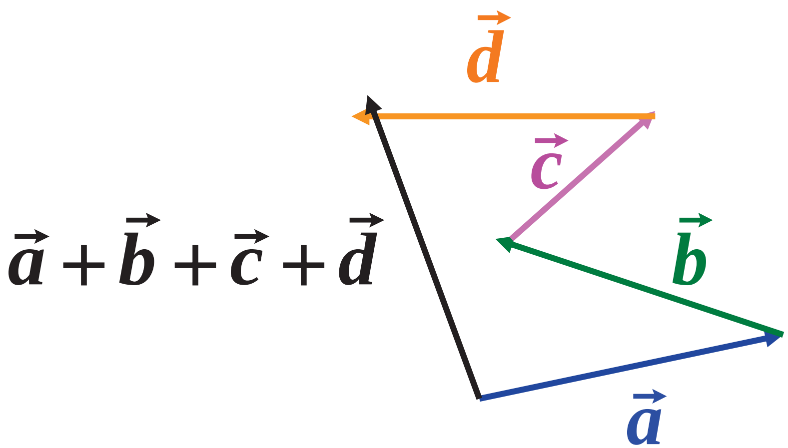
$$\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\mathrm{Prj}_u\vec{a}_1+\mathrm{Prj}_u\vec{a}_2.$$

的几何意义



思考：

(1) 向量加法的三角形法则可推广到多个向量和的情况. 称为**多边形法则**. 按向量和的几何意义，画出向量 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ 的几何图形.



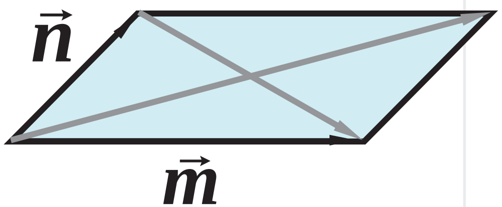
(2) 四向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ 能构成一空间四边形的充要条件是什么？

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

例1　设$\vec{m}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$，求以向量$\vec{m},\vec{n}$为边的平行四边形的对角线的长度.

解　对角线的长为 $\|\vec{m}+\vec{n}\|, \|\vec{m}-\vec{n}\|$,

$\because \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1)$,　$\vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$



$\therefore \|\vec{m}+\vec{n}\|=\sqrt{3}$,　$\|\vec{m}-\vec{n}\|=\sqrt{11}$,

平行四边形的对角线的长度各为$\sqrt{3}, \sqrt{11}$.

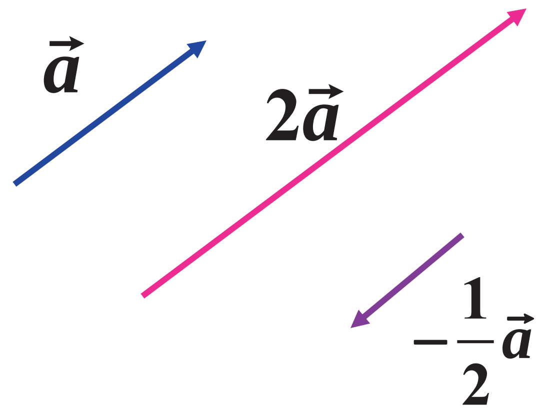
2. 数乘的几何意义

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}$$

(1) $\lambda > 0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向.

(2) $\lambda = 0$, $\vec{b} = 0$.

(3) $\lambda < 0$, $\vec{b}$与$\vec{a}$反向.



$$\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = \lambda(a_1, a_2, a_3) = \lambda \vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}.$$

(若$a_i = 0$, 则 $b_i = 0$).

例2 非零向量单位化.

设向量 $\vec{a} \neq 0$

令 $\vec{e}_a = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$, 则

$$\|\vec{e}_a\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\vec{e}_a$是与$\vec{a}$同方向的单位向量(也称为$\vec{a}$的单位向量).

显然：$\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{e}_a$.

$\vec{a}$的单位向量又记为$\vec{a}^0$.

例3　证明：三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

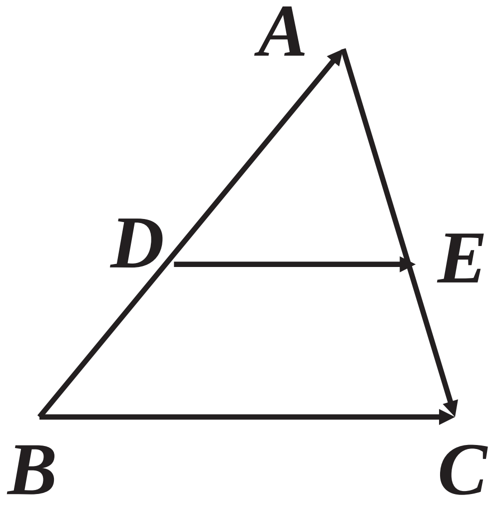
证　(如图) 设DE是中位线，则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$



例4 证明四面体对边中点连线交于一点，而且相互平分。

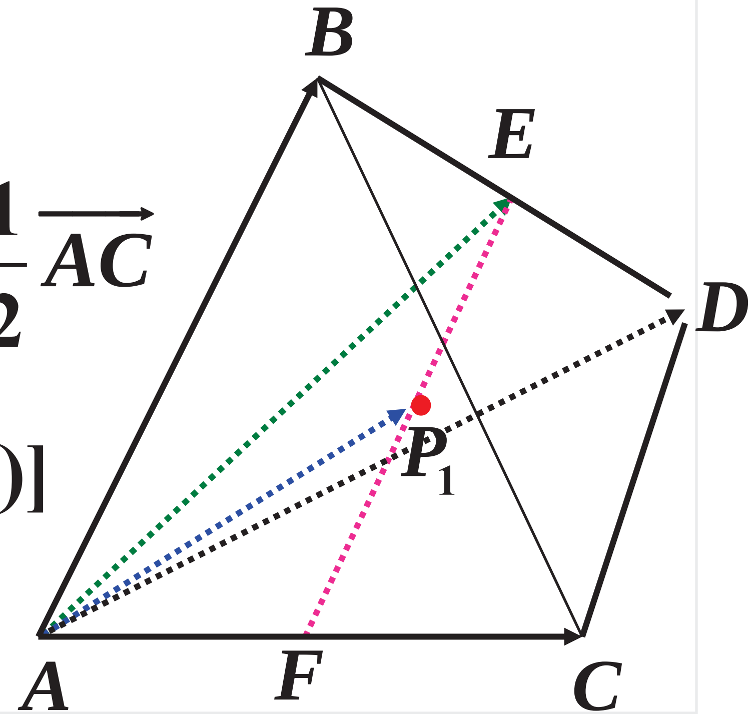
证 (如图)设EF是一组对边中点的连线，P_1为其中点，其余两组对边的中点分别为 P_2, P_3,则

$$\overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}),$$

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}), \quad \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{AP_1} = \frac{1}{2}[\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})]$$

$$= \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}]$$



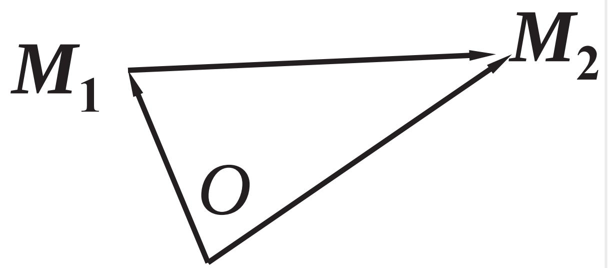
同理$\overrightarrow{AP_2}=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}]$,

$$\overrightarrow{AP_3}=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}],$$

所以P_1,P_2,P_3重合。

例5 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

(1) 求 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$;



解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地：若两点分别为 $M(x, y, z)$, $O(0, 0, 0)$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(2) 设M为线段M_1M_2上一点，$\dfrac{\|\overrightarrow{M_1M}\|}{\|\overrightarrow{MM_2}\|}=\lambda$，求 M 的坐标.

解

由题意知 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，设 M 的坐标为(x, y, z)，

则 $$(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$$

有 $x-x_1=\lambda(x_2-x), y-y_1=\lambda(y_2-y), z-z_1=\lambda(z_2-z)$，

解出 $$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

若 M 为 M_1M_2 的中点，则 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

主要内容

向量线性运算的几何意义

1. 向量加法、数乘的几何意义；

2. 两点间的距离公式、定比分的公式.

练习　1. 在 yoz 面上，求与三个已知点 $A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$ 和 $C(0,5,1)$ 等距离的点 .

答案：(0,1,-2).

2. 若直线段落 AB 被点 $C(2,0,2)$ 及点 $D(5,-2,0)$ 内分为3等分，则端点 A 的坐标为__________，端点 B 的坐标为__________ .

答案：$A(-1,2,4)$，$B(8,-4,-2)$.

第一讲 空间直角坐标系与向量

空间直角坐标系

向量及其线性运算

向量在轴上的投影

向量线性运算的几何意义

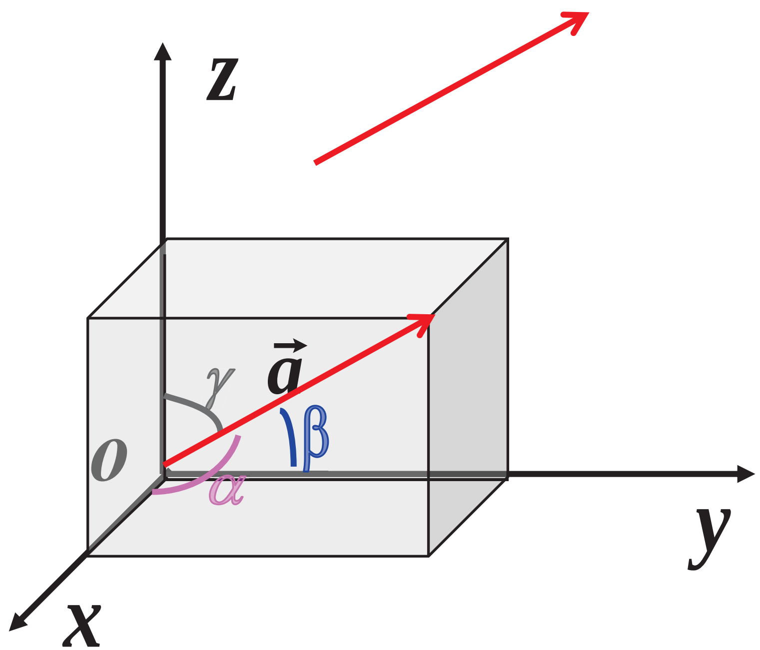
➤ 向量的方向余弦

内容小结

五、向量的方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为**方向角**.

$$\alpha = <\vec{a}, \vec{i}>, \ \beta = <\vec{a}, \vec{j}>, \ \gamma = <\vec{a}, \vec{k}>,$$



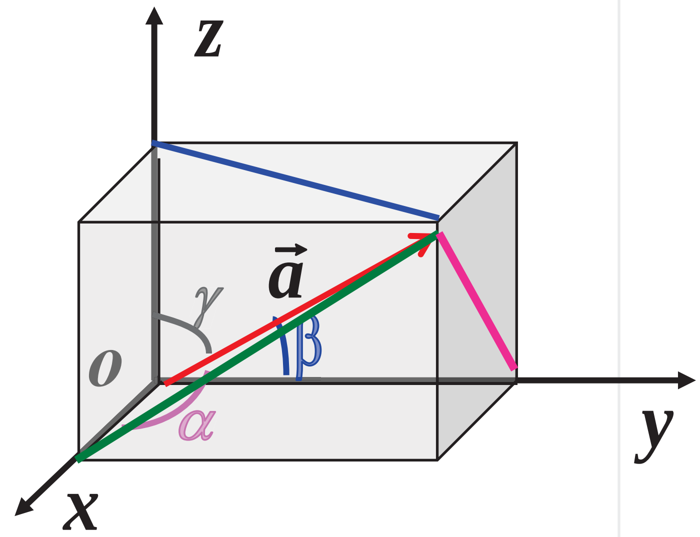
$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$

由图示可知



$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}=\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}=\frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}}=\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

由此可得

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (\cos\alpha,\ \ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

或 $\vec{a} = \|\vec{a}\|(\cos\alpha,\ \ \cos\beta,\ \cos\gamma).$

方向余弦的性质:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

例 1 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = 2$，它与 x 轴和y轴的夹角分别为 $\frac{\pi}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$，如果 P_1的坐标为(1,0,3)，求P_2的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为α、β、γ

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

设P_2的坐标为(x,y,z),

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1,\ y-0,\ z-3)$$

$$=\|\overrightarrow{P_1P_2}\|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=(1,\sqrt{2},\pm 1)$$

$\therefore\ x=2,\ y=\sqrt{2},\ z=4$ 或 2

$\therefore\ P_2(2,\sqrt{2},4)$ 或 $(2,\sqrt{2},2)$.

例2 设$\overrightarrow{OA}$与三坐标轴的夹角相等，且$\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{3}$，点$B$是点$M(1,-3,2)$关于点$N(-1,2,1)$的对称点，求$\overrightarrow{AB}$.

解 设$\overrightarrow{OA}=\sqrt{3}(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

由$\overrightarrow{OA}$与三坐标轴的夹角相等，得

$\cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma$ 又 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$

$$\Rightarrow \cos\alpha=\cos\beta=\cos\gamma=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA}=\pm(1,1,1)$$

设B点的坐标为(x,y,z)，由题意知N是$\overline{MB}$的中点，则

$$-1=\frac{1+x}{2},\quad 2=\frac{-3+y}{2},\quad 1=\frac{2+z}{2}$$

$$\Rightarrow x=-3,\ y=7,\ z=0.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB}=(-3,7,0)$$

(1) 若 $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,7,0)-(1,1,1)=(-4,6,-1);$$

(2) 若 $\overrightarrow{OA}=-(1,1,1)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,7,0)+(1,1,1)=(-2,8,1).$$

主要内容

向量的方向余弦

1. 方向余弦的计算；

2. 方向余弦的性质.

练习 已知点$A(1,2,-1)$与点$B(0,1,3)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量为________________

答案: $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}(1,1,-4)$

第一讲 空间直角坐标系与向量

空间直角坐标系

向量及其线性运算

向量在轴上的投影

向量线性运算的几何意义

向量的方向余弦

➤ 内容小结

内容小结

1. 空间直角坐标系

2. 向量 $\vec{a}=\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$

模(长度): $\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

方向: $\cos\alpha=\dfrac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}=\dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|}$

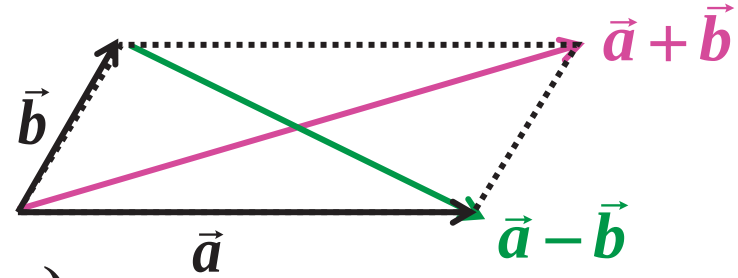
$$\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}=\frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}}=\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

单位向量：$\vec{e}_a=\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma).$

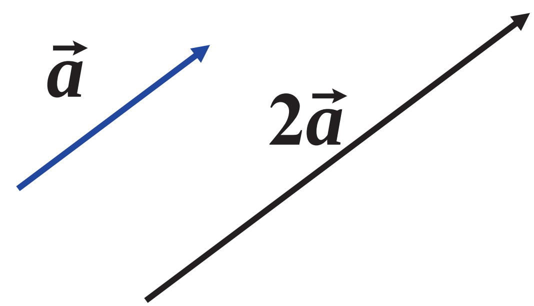
$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

3. 向量的线性运算



$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$$k\cdot\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$$



几个相关结果：

(1) $\|\vec{a}\pm\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$;

(2) $\|k\cdot\vec{a}\|=|k|\cdot\|a\|$;