# 第三讲 平 面

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程
3. 截距式方程

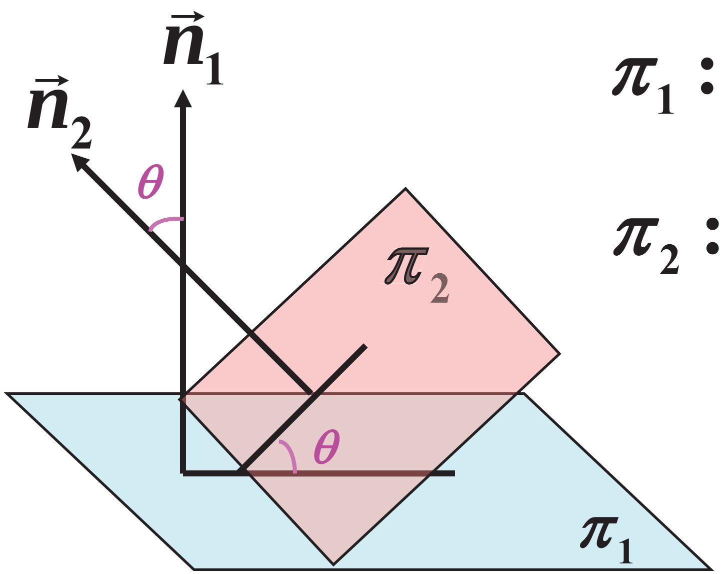
- 平面与平面的位置关系

内容小结

# 二、平面与平面的位置关系

## 1. 两平面的夹角

**定义** 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）




$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,$$

$$\vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1),$$

$$\vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2),$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

----------两平面夹角余弦公式

2. 两平面垂直与平行的充要条件:

(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \iff A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0;$

(2) $\pi_1 // \pi_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$

**例1** 讨论以下各组平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

**解** (1) $$\cos\theta=\frac{|-1\times 0+2\times 1-1\times 3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\frac{1}{\sqrt{60}}$$

两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}.$

(2) $$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=-\frac{1}{2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

所以，两平面平行但不重合.

(3) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=-\dfrac{1}{2}$

两平面重合.

**例2** 求过点$M_0(-1,3,2)$且与平面$2x - y + 3z - 4 = 0$和$x + 2y + 2z - 1 = 0$都垂直的平面$\pi$的方程.

**解** 两个已知平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 3), \quad \vec{n}_2 = (1, 2, 2),$$

故平面$\pi$的法向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

故平面$\pi$的方程为

$$-8(x+1) - (y-3) + 5(z-2) = 0,$$

即 $$8x + y - 5z + 15 = 0.$$

主要内容

## 平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角

2. 两平面的平行与垂直

## 练习

求过点 $(1,1,1)$ 且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

答案： $2x+3y+z-6=0$