第二章 行列式

§2.3 拉普拉斯展开定理

一. k阶子式、余子式、代数余子式

二. 拉普拉斯定理

电子科技大学 黄廷祝

一. k阶子式、余子式、代数余子式

k阶子式:

矩阵A中任取k行、k列，位于这k行、k列交点上的k^2个元按原来的相对位置组成的k阶行列式S, 称为A的一个k阶子式.

S的余子式:

在A中划去S所在的k行、k列，余下的元按原来的相对位置组成的n-k阶行列式M, 称为S的余子式.

S的代数余子式:

设S的各行位于A中第$i_1,\ldots,i_k$, S的各列位于A中第$j_1,\ldots,j_k$列，称

$$A=(-1)^{(i_1+\cdots i_k)+(j_1+\cdots j_k)}M$$

为S的代数余子式.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$S_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$M_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_1 = (-1)^{1+3+2+3} M_1 = -M_1,$$

$$S_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} \quad M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A_2 = (-1)^{1+3+4+2+3+5} M_2 = M_2.$$

例如，5阶行列式det$A$中，取子式 $S=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{24} \\ a_{52} & a_{54} \end{vmatrix}$

则其代数余子式为

$$(-1)^{(2+5)+(2+4)}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{15} \\ a_{31} & a_{33} & a_{35} \\ a_{41} & a_{43} & a_{45} \end{vmatrix}$$

[结束]