第一章 矩阵及其初等变换

§1.1 矩阵及其运算

一. 矩阵的概念

二. 矩阵的线性运算

三. 矩阵乘法的定义

四. 矩阵乘法的运算规律

五. 方阵的幂与多项式

六. 矩阵的转置

七. 对称矩阵、反对称矩阵

电子科技大学 黄廷祝

§1.1 矩阵及其运算

一. 矩阵的概念

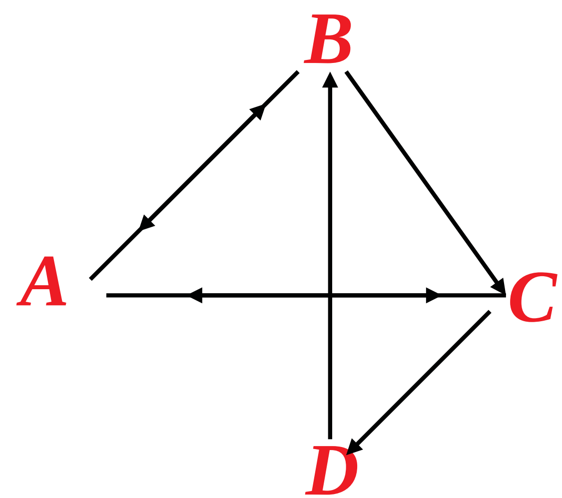
$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 4x-5y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2=1 \\ 4x_1-5x_2=0 \end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

某航空公司在A,B,C,D四城市之间开辟了若干航线，如图所示表示了四城市间的航班图.



如果从A到B有航班, 则用带箭头的线连接 A 与B.

到站

发站	A	B	C	D
A		√	√	
B	√		√	
C	√			√
D		√		

0	1	1	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	0	0

矩阵就是一个数表

由 $m \times n$ 个数排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列的**矩阵**，简称 $m \times n$ 矩阵

a_{ij} 　矩阵第 i 行 j 列的元素

常记为$A_{m\times n}$或$A=(a_{ij})_{m\times n}$，如：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=(1\ \ 2\ \ 4)$$

零矩阵 如

$$\boldsymbol{O}_{2\times 2}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{O}_{2\times 1}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}.$$

$m=n$时，称A为n阶矩阵（方阵）

行矩阵、列矩阵

$$(1\quad 0\quad -1\quad 2),\quad \begin{pmatrix}6\\ 4\\ 3\end{pmatrix}$$

对角矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\dots,a_{nn})$$

a_{ii}称为对角元

单位矩阵:

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}=\operatorname{diag}(1,1,\dots,1)$$

上三角形矩阵、下三角形矩阵：

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

线性方程组与矩阵的对应关系:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \end{cases} \qquad (*)$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ 方程组(*)的系数矩阵

$$\overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$ 方程组(*)的增广矩阵

[结束]

二. 矩阵的线性运算

同型矩阵: $A_{m\times n}$与$B_{r\times s}$同型 $\Leftrightarrow m = r$且$n = s$

A与B相等:

$$\left.\begin{array}{l} A=(a_{ij})\text{与}B=(b_{ij})\text{同型} \\ a_{ij}=b_{ij},\ i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n \end{array}\right\}\Leftrightarrow A=B$$

矩阵的加法:

A与B同型， $A + B = \left(a_{ij} + b_{ij}\right)$

不同型的矩阵不能相加！

例1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ y & 1 & z \end{pmatrix},$$

已知 $A = B$,求 x, y, z

解: $\because A = B$,

$\therefore x = 2,\ y = 3,\ z = 2.$

注意:

同型矩阵才能相等(可以相加)

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\text{与}B=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\text{不能相加}$$

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$$

负矩阵: $-\boldsymbol{A} = (-\boldsymbol{a}_{ij})$

$$\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$$

减法: $A - B = A + (-B)$ 对应元素相减

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} \Leftrightarrow \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{O}$$

数乘: $\boldsymbol{kA} = (\boldsymbol{ka}_{ij})$

例. $-A = (-1)A = (-a_{ij})$, $2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

矩阵的线性运算：加法、数乘

矩阵的线性运算满足如下八条性质：

1^o $A + B = B + A$ 加法交换律

2^o $(A+B)+C = A+(B+C)$ 加法结合律

3^o $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = 0_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}$ 零矩阵

4^o $A+(-A)=0$ 负矩阵

5^o $1A = A$ 数乘 1

6^o $k(lA)=(kl)A$ 数乘的结合

7^o $k\bullet(A+B)=kA+kB$

8^o $(k+l)A = kA + lA$

数乘,加法的分配律

[结束]

三. 矩阵乘法的定义

例2. 某电子集团生产三种型号的彩电，第一季度各40万台，20万台，30万台，第二季度各30万台，10万台，50万台，每万台的利润分别是400万元，300万元，500万元，第一，二季度各类产品的利润是多少？

解: 产量矩阵: $A=\begin{pmatrix} 40 & 20 & 30 \\ 30 & 10 & 50 \end{pmatrix}$

单位利润矩阵: $B=\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 500 \end{pmatrix}$

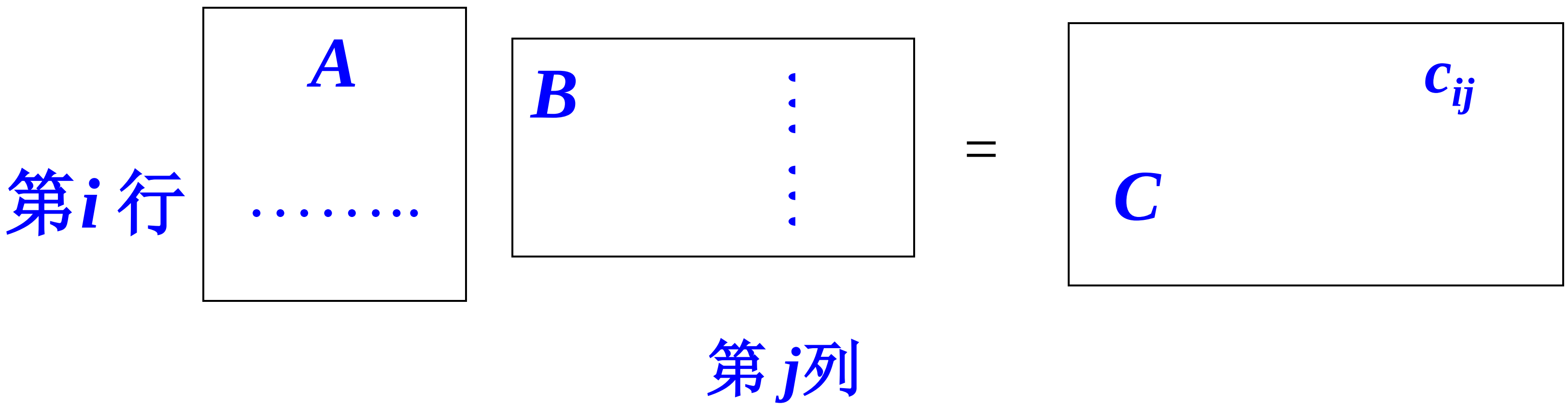
利润矩阵: $C=\begin{pmatrix} 40\times 400+20\times 300+30\times 500 \\ 30\times 400+10\times 300+50\times 500 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{37000} \\ \mathbf{40000} \end{pmatrix}$

矩阵的乘法:

$$A_{m\times t}B_{t\times n}=C_{m\times n}=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$$

其中 $$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{it}b_{tj}=\sum_{k=1}^{t}a_{ik}b_{kj}$$

$$(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)$$



例3. 已知$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&-4\\1&2\\0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\2&1\end{pmatrix}$, 求$AB$, AC.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}0&-5\\1&9\end{pmatrix},\qquad AC\text{无意义}$$

例4. 已知$A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}$, $B=(b_1,b_2,\dots,b_n)$. 求AB, BA.

解: $$AB=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}(b_1,b_2,\ldots,b_n)=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n\\a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n\end{pmatrix}_{n\times n}$$

$$BA=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}=b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_na_n$$

一般的，$AB\neq BA$

例5. 已知$A=\begin{pmatrix}-1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. 求$AB, BA$.

解:

$AB=O$，$BA=\begin{pmatrix}4 & *\\ * & *\end{pmatrix}$ $AB \neq BA$. (不可交换)

且 $AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$

$$\left.\begin{matrix}AB=AC\\ A\neq O\end{matrix}\right\} \not\Rightarrow B=C$$

(矩阵乘法不适合消去律)

但是 $IA=A=AI$

$$(kI)A=kA=A(kI)$$

例6.（线性方程组的矩阵形式）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

令$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

方程组可写成：$AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} = b$

[结束]

四. 矩阵乘法的运算规律

- $(AB)C = A(BC)$
- $k(AB) = (kA)B = A(kB)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(B + C)A = BA + CA$

证明: $(AB)C = A(BC)$

证: 设$A_{m\times n}, B_{n\times p}, C_{p\times s}$.

$$((AB)C)_{ij} = \sum_{k=1}^{p}\left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}\right)c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

$$\left(A\left(BC\right)\right)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\left(\sum_{k=1}^{p} b_{lk}c_{kj}\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} a_{il}b_{lk}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lk}c_{kj}$$

所以，$(AB)C = A(BC)$

[结束]

五. 方阵的幂与多项式

设A是n阶方阵, k是正整数, 规定:

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^{k+1} = A^k A, \ \ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

若m, k是正整数, 显然:

$$A^m A^k = A^{m+k}$$

$$(A^m)^k = A^{mk}$$

一般的, $(AB)^k \neq A^k B^k$

方阵的多项式

若 $f(x)=a_k x^k+\cdots a_1 x+a_0$

是x的多项式, A是n阶方阵, 称:

$$f(A)=a_k A^k+\cdots a_1 A+a_0 I$$

是**方阵A的k次多项式**

设有多项式 $f(x)$, $g(x)$, A, B 为n阶方阵, 则

$$f(A)\,g(A)=g(A)\,f(A)$$

但是，一般的，$f(A)f(B)\neq f(B)f(A)$!

如，$(A-I)(2A+I)=(2A+I)(A-I)$

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$
$$\neq A^2+2AB+B^2$$

何时等号成立？

但是

$$(A+I)^2=A^2+2A+I$$

为什么？

[结束]

六. 矩阵的转置

已知$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$，规定$A$的转置矩阵为：

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \Rightarrow (A^T)_{n\times m}$$

例7.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},$$

$$B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

性质:

1) $(A^T)^T = A$

2) $(A+B)^T = A^T+B^T$

3) $(kA)^T = kA^T$

4) $(AB)^T = B^T A^T$

$$(A_1A_2\ldots A_k)^T = A^T{}_k\, A^T{}_{k-1}\ldots A^T{}_1$$

证明 $(AB)^T = B^T A^T$:

令 $A = (a_{ij})_{m\times n}$， $B = (b_{ij})_{n\times s}$

$(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 均 s 行 m 列，同型

$$((AB)^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}\ ,\quad (B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

所以，$(AB)^T = B^T A^T$

例8. 已知$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, 求$AB$, B^TA^T.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -3\\ 5 & -1\\ 8 & 4\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=(AB)^T=\begin{pmatrix}3 & 5 & 8\\ -3 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

计算准则: 先化简，后计算

[结束]

七. 对称矩阵、反对称矩阵

对称矩阵: $A^T = A$

即 $a_{ij} = a_{ji}, \ \forall i, j$

反对称矩阵: $A^T = -A$

即 $a_{ii} = 0, \ a_{ij} = -a_{ji}, \ \forall i \neq j$

例9. 下列矩阵是否对称矩阵，反对称矩阵？

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

问题: 数乘对称矩阵是否仍为对称矩阵?

同阶对称矩阵之和是否仍为对称矩阵?

同阶对称矩阵的乘积是否仍为对称矩阵?

例 $$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

例10. 设A, B均为n阶对称阵, 则: AB对称 $\Leftrightarrow$ $AB = BA$.

证: $\Leftarrow$: $$(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$$

$\Rightarrow$: $(AB)^T = AB$

所以 $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$

结论: 对任意矩阵 A，AA^T和 A^TA都是对称矩阵.

证： $(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$

思考:

设A, B是同阶方阵,其中A对称(反对称), B对称(反对称), 则$A+B(A-B, AB)$如何?

思考: 设A为实矩阵. 证明: 若$A^TA=O$, 则$A = O$.

设A为实对称阵. 证明: 若$A^2=O$, 则$A = O$.

[结束]