四、非齐次方程组求解实例

例1. 求方程组的通解：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

解:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$R(\overline{A}) = R(A) = 2 < 3$ （变元数）

原方程组有无穷多解，

同解方程组：$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 \\ x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases}$

例1. 求方程组的通解：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

同解方程组：$\begin{cases} x_1 = \boxed{3} + x_3 \\ x_2 = \boxed{2} - 2x_3 \end{cases}$

(1) 求非齐次组的特解：取x_3=0, 得 $\eta_0 = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) 求导出组的基础解系：

取x_3=1, 得 $\xi = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$

通解：

$X = \eta_0 + k\xi,\ k \in \mathrm{R}$

例2. 解 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

解:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$R\left(\overline{A}\right) = 3 \neq 2 = R(A)$$ 无解!

例3. 解方程组：$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

解:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2+\lambda-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda)\end{array}\right)$$

◆ $\lambda=1$时： $R(A)=R(\overline{A})=1<3$，有无穷多解.

$$\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

得同解方程组 $x_1 = 1- x_2 - x_3$

导出组基础解系： $\xi_1 =(-1, 1, 0)^T$， $\xi_2 =(-1, 0, 1)^T$

非齐次组的特解： $\eta_0 =(1, 0, 0)^T$

原方程组的通解： $X = \eta_0 + k_1\xi_1 + k_2\xi_2 , k_1 , k_2 \in R$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

◆ $\lambda=-2$时： $R(A)=2\neq 3=R(\overline{A})$, 无解

◆ $\lambda\neq 1,-2$时： $R(A)=R(\overline{A})=3$, 惟一解：

$$\begin{cases} x_1=\frac{-\lambda-1}{\lambda+2}, \\ x_2=\frac{1}{\lambda+2}, \\ x_3=\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}. \end{cases}$$

例4. 判断方程组有无解：$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ ax_1+bx_2=c \\ a^2x_1+b^2x_2=c^2 \end{cases}$ $(a, b, c$互异$)$

解： 方程组有解 $\Leftrightarrow R(\overline{A})=R(A)$

$$\det\overline{A}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(b-a)(c-a)(c-b)\neq 0$$

$$\Rightarrow\begin{cases} R(\overline{A})=3 \\ R(A)=2 \end{cases}$$

$R(\overline{A})\neq R(A)$, 原方程组无解

为什么？

例5. 设A是 $m\times 3$ 矩阵, 且 $R(A)=1$. 如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个解向量 η_1,η_2,η_3 满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$ 的通解.

法1:

$$Ax=b\text{ 的通解?}\begin{cases}\text{特解: 解出}\eta_1,\eta_2,\eta_3\text{即可;}\\ \text{导出组基础解系?}\end{cases}$$

基础解系中解数: 变元数 - 系数矩阵A的秩 = $3-1=2$

由η_1,η_2,η_3得$AX=0$两个线性无关解即可!

$$\eta_1=\frac{1}{2}\left[(\eta_1+\eta_2)+(\eta_3+\eta_1)-(\eta_2+\eta_3)\right]=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\eta_2=\frac{1}{2}\left[(\eta_1+\eta_2)+(\eta_2+\eta_3)-(\eta_3+\eta_1)\right]=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix}$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}\left[(\eta_2+\eta_3)+(\eta_3+\eta_1)-(\eta_1+\eta_2)\right]=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix}$$

$$\xi_1=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\ \xi_2=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},$$

$$X=\eta_1+k_1\xi_1+k_2\xi_2,k_1,k_2\in\mathbf{R}$$

法2:

$Ax=b$ 的通解? $\begin{cases} \text{特解}: \eta_0=\dfrac{1}{2}(\eta_1+\eta_2)=\begin{pmatrix}1/2\\1\\3/2\end{pmatrix} \\ \text{导出组基础解系?} \end{cases}$

基础解系中解数：变元数 - 系数矩阵A的秩 = $3-1=2$

得$AX=0$两个线性无关解即可！

$$\tau_1=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_2+\eta_3)=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},\ \tau_2=(\eta_1+\eta_2)-(\eta_3+\eta_1)=\begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$$

线性无关，是$AX=0$的基础解系.

$$X=\eta_0+k_1\tau_1+k_2\tau_2,k_1,k_2\in \mathrm{R}$$

例6. 设A是5×4的矩阵，b是5维列向量，$b\neq0, R(A)=R(\overline{A})=2$

已知 $\eta_1=(2,-1,1,1)^T, \eta_2=(1,-1,0,1)^T, \eta_3=(1,-3,0,1)^T$

都是 $Ax=b$ 的解，写出 $Ax=b$ 的通解.

解： $n-\mathrm{R}(A)=2,$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \eta_2-\eta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$ 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解向量

$\Rightarrow AX=b$的通解为：$X=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, k_1,k_2\in\mathrm{R}$

例7. 设A为n阶方阵，则

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$

证： 若$R(A)=n-1$，则 $|A|=0$，且 $R(A^*)\geq 1$

$$|A|=0\Rightarrow AA^*=|A|I=O$$

$$\Rightarrow R(A^*)\leq n-R(A)=1$$

$$\Rightarrow R(A^*)=1$$

其它情形前面的章节已经证明.