二、相似与对角化

设A是n阶矩阵，则：

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow$ A的k重特征值恰有

A有n个互异的特征值

k个无关的特征向量

$\Leftrightarrow$ λ_i是A的$k_i(>1)$重特征值，则

$$R(\lambda_i I - A) = n - k_i$$

即：任一特征值的代数重数 = 几何重数

3阶矩阵的相似对角化

- 3阶矩阵A有一个1重特征值a, 一个2重特征值b.

$$A\text{可以相似对角化} \Leftrightarrow R(bI-A)=3-2=1$$

- 3阶矩阵A有3个互异特征值，必可相似对角化

- 3阶矩阵A有1个3重特征值a,

$$A\text{可以相似对角化} \Leftrightarrow R(aI-A)=3-3=0$$

$$\Leftrightarrow A=aI$$

例5. 设α_1,α_2分别是n阶矩阵A互异特征值λ_1,λ_2的特征向量

证明$\alpha_1+\alpha_2$不是A的特征向量.

分析： $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1, A\alpha_2=\lambda_2\alpha_2, \alpha_1\neq 0, \alpha_2\neq 0$

反证 设$A(\alpha_1+\alpha_2)=k(\alpha_1+\alpha_2)$

$$\Rightarrow k(\alpha_1+\alpha_2)=A(\alpha_1+\alpha_2)$$

$$=A\alpha_1+A\alpha_2=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow(k-\lambda_1)\alpha_1+(k-\lambda_2)\alpha_2=0\\ \lambda_1\neq\lambda_2\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2\text{ 线性相关,}$$

$\boxed{\text{矛盾!}}$

例6. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ -k & -1 & k\\ 4 & 2 & -3\end{pmatrix}$, 当$k$为何值时, 存在可逆矩阵$P$, 使得$P^{-1}AP$为对角矩阵?

分析:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -2 & 2\\ \boxed{k} & \lambda+1 & \boxed{-k}\\ -4 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 2\\ 0 & \lambda+1 & -k\\ \lambda-1 & -2 & \lambda+3\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

A与对角阵相似 $\Leftrightarrow R(-I-A)=1$

$$I-A=\begin{pmatrix}-4 & -2 & 2\\ k & 0 & k\\ -4 & -2 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ k & 0 & -k\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow k=0$

例7. 证明n阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&\cdots&1\\1&1&\cdots&1\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&1&\cdots&1\end{pmatrix}\text{与}B=\begin{pmatrix}0&\cdots&0&1\\0&\cdots&0&2\\\vdots&&\vdots&\vdots\\0&\cdots&0&n\end{pmatrix}\text{相似.}$$

分析: A实对称,必与对角阵相似,

证明A,B与同一对角阵相似即可!

$$\left.\begin{aligned}\left.\begin{aligned}|\lambda I-A|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)\\ A\text{实对称}\end{aligned}\right\}&\Rightarrow A\sim\operatorname{diag}(n,0,\cdots,0)\\ \left.\begin{aligned}|\lambda I-B|=\lambda^{n-1}(\lambda-n)\\ R(0I-B)=1\end{aligned}\right\}&\Rightarrow B\sim\operatorname{diag}(n,0,\cdots,0)\end{aligned}\right\}\Rightarrow A\sim B$$

例8. 设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}, \alpha=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是A的特征值-2的特征向量.

(1) 求a, b; (2) 求可逆矩阵P和对角矩阵Q, 使得 $P^{-1}AP=Q$.

分析: α 是A的特征值-2的特征向量

$$\Rightarrow A\alpha=\begin{pmatrix} a & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -a+2 \\ 2 \\ -1-b \end{pmatrix}=-2\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2=2, \\ -1-b=-2. \end{cases}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=0, b=1}$$

$$\Rightarrow a=0, b=1$$

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ 1 & \lambda & -1 \\ -1 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)^2(\lambda+2) \quad \Rightarrow \lambda = 1,1,-2$$

$$\lambda=1: \alpha_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \lambda=-2: \alpha_3=\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ Q=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow P^{-1}AP=Q$$