计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ \underline{a^4} & \underline{b^4} & \underline{c^4} & \underline{d^4} \end{vmatrix}$.

[解析]

方法一: 按第4行展开，化为4个3阶范德蒙行列式.

$$D=-a^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}+b^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & c & d \\ a^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}-c^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & d \\ a^2 & b^2 & d^2 \end{vmatrix}+d^4\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$

$$=-a^4(c-b)(d-b)(d-c)+b^4(c-a)(d-a)(d-c)-c^4(b-a)(d-a)(d-b)$$

$$+d^4(b-a)(c-a)(c-b)$$

$$=\boxed{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)}$$

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

[解析]

方法二：加边，将该行列式转化为范德蒙行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 & x^3 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 & x^4 \end{vmatrix} = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + l_3 x^3 + l_4 x^4 = P_4(x)$$

$$=(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)\boxed{(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}$$

注意到 $(-1)^{3+4}D = l_3 = \boxed{-(a+b+c+d)}(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)$

$$\therefore D = \boxed{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)}$$

计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

[解析]

方法三: 通过初等行变换降阶, 利用原始的求解范德蒙行列式的思想.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} \overset{\substack{-a^2r_3+r_4 \\ -ar_2+r_3}}{\underset{-ar_1+r_2}{=}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a) \\ 0 & b^2(b^2-a^2) & c^2(c^2-a^2) & d^2(d^2-a^2) \end{vmatrix}$$

计算行列式$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix}$.

[解析]

方法三: 通过初等行变换降阶, 利用原始的求解范德蒙行列式的思想.

$$D=(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2(b+a) & c^2(c+a) & d^2(d+a) \end{vmatrix}$$

$$\underset{-br_1+r_2}{\overset{-b(b+a)r_2+r_3}{=}}(b-a)(c-a)(d-a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & x & y \end{vmatrix}$$

其中

$$x=c^2(c+a)-(bc)(b+a)=c(c^2+ac-b^2-ab)=c(a+b+c)(c-b)$$

$$y=d^2(d+a)-(bd)(b+a)=d(d^2+ad-b^2-ab)=d(a+b+d)(d-b)$$

计算行列式$D=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\a&b&c&d\\a^2&b^2&c^2&d^2\\a^4&b^4&c^4&d^4\end{vmatrix}$.

[解析]

方法三：通过初等行变换降阶,利用原始的求解范德蒙行列式的思想.

$$\begin{vmatrix}c-b&d-b\\x&y\end{vmatrix}=(c-b)(d-b)\begin{vmatrix}1&1\\c(a+b+c)&d(a+b+d)\end{vmatrix}$$

$$=(c-b)(d-b)[c(a+b+c)-d(a+b+d)]$$

$$=(c-b)(d-b)[(d-c)(a+b)+d^2-c^2]$$

$$=\boxed{(b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c)(a+b+c+d)}$$