第五章 特征值与特征向量

习题课

何军华

电子科技大学

一. 特征值与特征向量的判定

特征值的判定.

给定n阶矩阵 A, 则

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Uparrow$ $\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 α;

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

$\Uparrow$

A各行元之和为λ $\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

特征向量的判定.

给定n阶矩阵 A, α是非零列向量

α是A的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha$ 对某个数λ

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

A各行元之和为 λ,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I - A)X = 0$ 的非零解

特征值、特征向量的计算步骤.

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0;$

α是λ的特征向量 $\Leftrightarrow \alpha$是$(\lambda I - A)X = 0$的非零解

(1) 求$|\lambda I - A| = 0$的根：$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一λ_i，求$(\lambda_i I - A)X = 0$的一组基础解系：

$$\alpha_{i1}, \cdots, \alpha_{ir_i}$$

则A的属于特征值λ_i的全部特征向量为：

$$k_1\alpha_{i1} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{ir_i},\ k_1, \cdots, k_{r_i}\text{不全为}0.$$

特征值的计算技巧.

如何有效计算3阶数字型矩阵A的特征值?

目标: 不只是算出特征多项式,需要求出3个根!

思路: 计算过程中尽可能提取关于λ的一次因式

手段: 观察$|\lambda I - A|$ 各行元之和,两行元的和或者差

各列元之和,两列元的和或者差

效果: 若第1行提取了λ的一次因式,则新第1行全数字,列的倍加使第1行仅有一个非零元,按第1行展开!

检查: 特征值之和 = 对角元之和?

设 A 是 n 阶方阵，$f(x)$是一元多项式，则

α 是特征值 λ 的特征向量 $\Rightarrow$

- α是A^{k+1}的特征值λ^{k+1}的特征向量.
- α是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.
- $P^{-1}\alpha$ 是$P^{-1}AP$的特征值 λ 的特征向量.

A 可逆时:

- α 是 A^{-1}的特征值λ^{-1}的特征向量.
- α 是 A^* 的特征值$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

$f(A)=O$时:

- $f(A)=O \Rightarrow f(\lambda)=0$

例1. 设4阶矩阵A满足：$|3I+A|=0,\ AA^T=2I,\ |A|<0$，

求A^*的一个特征值.

解： $|3I+A|=0 \Rightarrow |-3I-A|=0 \Rightarrow -3$是$A$的特征值

设非零向量α是A的特征值-3的一个特征向量，则

$$A\alpha=-3\alpha \Rightarrow A^*A\alpha=-3A^*\alpha \Rightarrow A^*\alpha=-\frac{1}{3}|A|\alpha=\frac{4}{3}\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r} AA^T=2I \Rightarrow |A|^2=|2I|=2^4=16 \\ |A|<0 \end{array}\right\} \Rightarrow |A|=-4$$

$\Rightarrow A^*$有一个特征值$\dfrac{4}{3}$.

例2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&3&2\\2&2&3\end{pmatrix}, P=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}, B=P^{-1}A^{*}P$

求 $B+2I$ 的特征值. **9, 9, 3**

分析: 设α是矩阵A的特征值λ的一个特征向量,则:

$$A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow A^{*}\alpha=\frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}A^{*}P\right)\left(P^{-1}\alpha\right)=\frac{|A|}{\lambda}\left(P^{-1}\alpha\right)$$

$$\Rightarrow\left(P^{-1}A^{*}P+2I\right)\left(P^{-1}\alpha\right)=\left(\frac{|A|}{\lambda}+2\right)\left(P^{-1}\alpha\right)$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-7)(\lambda-1)^{2}\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=7,|A|=7$$

例3. 已知A是3阶矩阵，列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，满足

$$A\alpha_1=-\alpha_1-3\alpha_2-3\alpha_3,\ A\alpha_2=4\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3,\ A\alpha_3=-2\alpha_1+3\alpha_3.$$

求矩阵A的特征值和特征向量；

分析： 将已知向量等式写成矩阵形式：

$$A\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{P}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-1&4&-2\\-3&4&0\\-3&1&3\end{pmatrix}}_{B}$$

$\Rightarrow A=PBP^{-1}\Rightarrow$ A,B具有相同的特征值.

$$B\alpha=\lambda\alpha\Rightarrow A(P\alpha)=\left(PBP^{-1}\right)P\alpha$$

$$=PB\alpha=P(\lambda\alpha)=\lambda(P\alpha)$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ \boxed{3} & \lambda-4 & 0 \\ \boxed{3} & -1 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -4 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ \boxed{0 \quad -1 \quad 1} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda+1 & -2 & 2 \\ 3 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$$

计算可得:

$$\lambda_1 = 1 : \beta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \ \lambda_2 = 2 : \beta_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}; \ \lambda_3 = 2 : \beta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$A=PBP^{-1}$与B有相同的特征值：

$$\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$$

相应的全部特征向量:

$$\lambda_1=1:\ k\left(P\beta_1\right)=k\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right),k\neq 0;$$

$$\lambda_2=2:k\left(P\beta_2\right)=k\left(2\alpha_1+3\alpha_2+3\alpha_3\right),k\neq 0;$$

$$\lambda_3=3:k\left(P\beta_3\right)=k\left(\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3\right),k\neq 0;$$

例4. 设3阶矩阵A的特征值为 $2, -2, 1,$

$B = A^2 + A + I$, 则行列式 $|B| =$ ____________.

法1: A 的特征值$\lambda \Rightarrow B$ 的特征值$\lambda^2 + \lambda + 1$

A 的特征值$2, -2, 1 \Rightarrow B$ 的特征值$7, 3, 3$

$$\Rightarrow |B| = 7 \bullet 3 \bullet 3 = 63$$

法2:

令$A = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & -2 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 7 & & \\ & 3 & \\ & & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |B| = 7 \bullet 3 \bullet 3 = 63$