第五章 特征值与特征向量

5.1 特征值与特征向量的概念与计算

何军华

电子科技大学

一. 特征值和特征向量的定义

例1. 矩阵

$$A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix},\qquad \alpha=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\ \gamma=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$A\alpha=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=2\alpha,\qquad A\beta=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}=4\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}=4\beta,$$

$$A\gamma=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\neq k\gamma,\ \forall k$$

定义: 设 A 是 n 阶方阵, $0\neq\alpha\in C^n,\lambda\in C$ 使得

$$A\alpha=\lambda\alpha$$

(1) 称 λ 是矩阵 A 的一个**特征值**;

(2) 称 α 是矩阵 A 相应于特征值 λ 的一个**特征向量**.

给定矩阵 A:

λ 是A 的特征值 $\Leftrightarrow \exists\alpha\neq 0,\ s.t.\ A\alpha=\lambda\alpha$

α 是A 的特征向量 $\Leftrightarrow \alpha\neq 0$ 且 $A\alpha=\lambda\alpha$

对某个数 λ 成立

例2. (1) 任一非零向量都是单位矩阵 I 的特征向量，

对应特征值为1;

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow I\alpha = \alpha = 1 \bullet \alpha$$

(2) 单位矩阵 I 的特征值必为1;

$$I\beta = k\beta, \beta \neq 0 \Rightarrow (k-1)\beta = 0, \beta \neq 0 \Rightarrow \ k = 1$$

(3) 对数量矩阵 $A = kI$，结论如何?

给定矩阵 A:

(1) A的每个特征向量相应的特征值惟一;

(2) A的每个特征值相应的特征向量不惟一.

二. 特征子空间

给定n阶矩阵 A, 规定 $V_\lambda=\{\alpha\in \mathrm{C}^n \mid A\alpha=\lambda\alpha\}$

(1) V_λ 非空： $0\in V_\lambda$

(2) V_λ 对加法封闭：

$$\alpha,\beta\in V_\lambda \Rightarrow A\alpha=\lambda\alpha,\ A\beta=\lambda\beta$$

$$\Rightarrow A(\alpha+\beta)=\lambda(\alpha+\beta) \Rightarrow \alpha+\beta\in V_\lambda$$

(3) V_λ 对数乘封闭：

$$\alpha\in V_\lambda \Rightarrow A\alpha=\lambda\alpha$$

$$\Rightarrow A(k\alpha)=k(A\alpha)=k(\lambda\alpha)=\lambda(k\alpha) \Rightarrow k\alpha\in V_\lambda$$

给定n阶矩阵 A, 规定

$$V_\lambda = \left\{\alpha \in \mathbf{C}^n \,\middle|\, A\alpha = \lambda\alpha\right\}$$

(4) $\alpha_1, \cdots, \alpha_s \in V_\lambda \Rightarrow k_1\alpha_1 + \cdots + k_s\alpha_s \in V_\lambda,\ k_i \in \mathbf{C}$

(5) V_λ是n维复向量空间的子空间.

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow V_\lambda \neq \{0\}$

V_λ 称为A的特征值λ的特征子空间

问题： 给定n阶矩阵 A:

(1) 如何判断数λ是否为A的特征值？

(2) 如何判断向量 α是否为A的特征向量？

(3) 如何求出矩阵A的所有特征值？

(4) 如何求出矩阵A的所有特征向量？

(5) 特征值和特征向量有何性质？

(6) 如何应用矩阵的特征值、特征向量？

三. 特征值与特征向量的判定

1. 特征值的判定.

给定n阶矩阵 A, 则

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Uparrow$ $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ (\lambda I - A)\alpha = 0$

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda \\ \vdots \\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 α;

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

A各行元之和为λ

$\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

例3.

A满足的条件	A有特征值
◆ $2I+3A$ 不可逆	$-2/3$
◆ $\lvert 3I+4A \rvert = 0$	$-3/4$
◆ $\mathrm{R}(4I+5A) < n$	$-4/5$
◆ $(5I+6A)X=0$ 有非零解	$-5/6$
◆ $(6I+7A)X=b$ 有两个互异解	$-6/7$
◆ 非零矩阵B使得$(7I+8A)B=0$	$-7/8$
◆ A 各行元之和为9	9

例4. 设矩阵A满足 $A^T A = I$, $|A| = -1$,

证明: $\lambda = -1$ 是A的特征值.

证:

$$|-I - A| = |-A^T A - A| = |(-A^T - I)A|$$

$$= -|-A^T - I| = -|-A^T - I^T|$$

$$= -|(-A - I)^T|$$

$$= -|-A - I| \Rightarrow |-I - A| = 0$$

$\Rightarrow \lambda = -1$ 是A的特征值.

2. 特征向量的判定.

给定n阶矩阵 A, α是非零列向量

α是A的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha$ 对某个数λ

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

A各行元之和为 λ,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I - A)X = 0$ 的非零解

四. 特征值与特征向量的计算

λ是A的特征值　　$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0;$

α是λ的特征向量　　$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I- A)X = 0$ 的非零解

(1) 求$|\lambda I - A| = 0$ 的根：　$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一λ_i，求$\left(\lambda_i I - A\right)X = 0$ 的一组基础解系：

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$$

则A的属于特征值λ_i的全部特征向量为：

$$k_1\alpha_{i1} + k_2\alpha_{i2} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{ir_i}$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 不全为0.

例5. 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ -2 & -2 & 4\\ 2 & 4 & -2\end{pmatrix}$，求 A 的特征值和特征向量.

解: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4 & -2\\ 2 & \lambda+6 & -4\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1 & 4\\ 2 & \lambda+6\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\left(\lambda^2+5\lambda-14\right)=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$\Rightarrow \lambda_1=2$(二重)，$\lambda_2=-7$.

求 $\lambda_1=2$ 的特征向量：即 $(\lambda_1 I-A)X=0$ 的非零解：

$$\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\2&4&-4\\-2&-4&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1=-2x_2+2x_3$$

基础解系为： $\alpha_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$

A属于特征值2的全部特征向量为：

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$，k_1,k_2 不全为0

求$\lambda_2=-7$的特征向量:

$$\lambda_2 I - A=\begin{pmatrix}-8 & 2 & -2\\ 2 & -5 & -4\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ -8 & 2 & -2\\ -2 & -4 & -5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & -18 & -18\\ 0 & -9 & -9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2 & -5 & -4\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\ x_2=-x_3\end{cases}$$ 基础解系为: $\alpha_3=(1,2,-2)^T$

特征值 −7 的全部特征向量为: $k_3\alpha_3, k_3\neq 0$

五、特征多项式

1. 特征多项式的定义和性质

给定n阶矩阵 A,

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为矩阵 A **的特征多项式**.

$$\lambda\text{是}A\text{的特征值} \Leftrightarrow f_A(\lambda)=0$$

设 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+2)^4$:

(1) $\lambda=1$: A 的单特征值

(2) $\lambda=-2$: A 的4重特征值

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

设A的特征值是：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则：

$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{Tr}(A)$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

2. 特征值的代数重数与几何重数

设λ是n阶矩阵A的特征值，则

(1) λ作为A特征多项式根的重数

称为λ的代数重数.

(2) λ相应的特征子空间的维数

$$\dim V_\lambda = n - R(\lambda I - A)$$

即属于该特征值线性无关向量的最大个数

称为λ的几何重数.

$$1 \le 几何重数 \le 代数重数$$

例6. 设 $A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量.

解: $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & -a & \cdots & -a \\ 1 & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-na)$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^{n-1}(\lambda - na)$$

若$a=0$: 则0是n重特征值, 任一非零向量都是A的特征向量.

下设$a \neq 0$:

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0(n-1\text{重}), \lambda_2 = na(1\text{重})$$

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 - \cdots - x_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

特征值0的全部特征向量:

$$X = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$$

$k_1,\cdots,k_{n-1}$不全为0

$\lambda_2 = na$: $A = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$,

$1 \le$ 几何重数 $\le$ 代数重数 ≤ 1

$\Rightarrow (\lambda_2 I - A)X = 0$ 的基础解系恰好含有1个解向量

显然$\alpha_n = (1,1,\cdots,1)^T$是$(\lambda_2 I - A)X = 0$的解

因此α_n是$(\lambda_2 I - A)X = 0$的基础解系.

特征值 n-1 的全部特征向量: $X = k_n\alpha_n, k_n \ne 0$

六、$f(A), A^{-1}, A^*$的特征值与特征向量

例6. 设 A 是 n 阶方阵, α是特征值λ的特征向量:

$$A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$$

$\Rightarrow \alpha$是A^2的特征值λ^2的特征向量.

一般的, 设 $A^k\alpha=\lambda^k\alpha$

$$\Rightarrow A^{k+1}\alpha=A(A^k\alpha)=A(\lambda^k\alpha)=\lambda^k A\alpha=\lambda^{k+1}\alpha$$

$\Rightarrow \alpha$是A^{k+1}的特征值λ^{k+1}的特征向量.

$f(x)$是一元多项式, 则

$\Rightarrow \alpha$是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.

$f(x)$是一元多项式，α是特征值λ的特征向量.

$\Rightarrow \alpha$是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.

设$f(x)=a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_1 x+a_0$

$$\Rightarrow f(A)=a_k A^k + a_{k-1}A^{k-1}+\cdots+a_1 A+a_0 I$$

$$\Rightarrow f(A)\alpha = a_k A^k\alpha + a_{k-1}A^{k-1}\alpha+\cdots+a_1 A\alpha+a_0 I\alpha$$

$$= a_k \lambda^k\alpha + a_{k-1}\lambda^{k-1}\alpha+\cdots+a_1 \lambda\alpha+a_0 \alpha$$

$$= \left(a_k \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1}+\cdots+a_1 \lambda+a_0\right)\alpha$$

$$= f(\lambda)\alpha$$

$f(x)$是一元多项式，α是特征值λ的特征向量.

$$\Rightarrow f(A)\alpha = f(\lambda)\alpha$$

结论: 设 n 阶方阵 A 满足 $f(A)=O$, 则A的特征值λ满足:

$$f(\lambda)=0.$$

证: 设α是特征值λ的特征向量, 则:

$$\left.\begin{array}{r} A\alpha=\lambda\alpha \Rightarrow 0=f(A)\alpha=f(\lambda)\alpha \\ \alpha\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\lambda)=0.$$

例7. 设方阵 A 满足 $A^2=A$, 则A的特征值为0或者1.

例8. 设 A 是 n 阶可逆方阵, α是特征值λ的特征向量:

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow \alpha = A^{-1}(\lambda\alpha) = \lambda(A^{-1}\alpha) \\ A\text{可逆} \quad \Rightarrow \lambda \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow A^{-1}\alpha = \frac{1}{\lambda}\alpha$$

$\Rightarrow \alpha$是A^{-1}的特征值λ^{-1}的特征向量.

$$A\alpha = \lambda\alpha$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow A^*A\alpha = \lambda A^*\alpha \Rightarrow |A|\alpha = \lambda A^*\alpha \\ A\text{可逆} \quad \Rightarrow \lambda \neq 0\end{array}\right\} \Rightarrow A^*\alpha = \frac{|A|}{\lambda}\alpha$$

$\Rightarrow \alpha$是A^*的特征值$\dfrac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

七、思考和小结

特征值特征向量:

设 A 是 n 阶方阵, $0 \neq \alpha \in \mathrm{C}^n, \lambda \in \mathrm{C}$ 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$

(1) 称 λ 是矩阵 A 的一个**特征值**;

(2) 称 α 是矩阵 A 相应于特征值 λ 的一个**特征向量**.

特征值子空间:

$$V_\lambda = \left\{ \alpha \in \mathrm{C}^n \,\middle|\, A\alpha = \lambda\alpha \right\}$$

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow V_\lambda \neq \{0\}$

V_λ 称为A的**特征值λ的特征子空间**

特征值的判定.

给定n阶矩阵 A, 则

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 α;

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

$\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

$\Uparrow$

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Uparrow$

A各行元之和为λ

特征向量的判定.

给定n阶矩阵 A, α是非零列向量

α是A的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha=\lambda\alpha$ 对某个数λ

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

A各行元之和为 λ,

$$\alpha=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I-A)X=0$ 的非零解

特征值、特征向量的计算.

(1) 求 $|\lambda I - A| = 0$ 的根：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一 λ_i，求出 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的一组基础解系

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{r_i}}$$

则 A 的对应于 λ_i 的特征向量为：

$$k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{r_i}$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 不全为零

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$$

代数重数：λ作为A特征多项式根的重数

几何重数：特征子空间V_λ的维数$n-R(\lambda I-A)$

$1\le$几何重数$\le$代数重数

α是A的特征值λ的特征向量$\Rightarrow$

(1) α是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.

(2) $f(A)=O\Rightarrow f(\lambda)=0.$

A可逆时: (3) α是A^{-1}的特征值λ^{-1}的特征向量.

(4) α是A^*的特征值$\frac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

思考题:

1. 是否任一数λ_0都是某矩阵A的特征值?

是.比如,

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_0 & & \\ & 0 & \\ & & 0\end{pmatrix}$$

2. 是否任一列向量 α 都是某矩阵 A 的特征向量?

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow I\alpha = 1\alpha$$