四、最大无关组的性质、等价叙述

- 设含有 r 个向量的 S 是 T 的一个部分向量组,
  为说明S是T的一个最大无关组, 根据定义需要:

  (1) S 线性无关;

  (2) T 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

- 为说明某向量组T 的秩为 r, 根据定义需要:

  (1) 找出含有 r个线性无关向量的部分向量组;

  (2) 证明 T 中任意 $r+1$个向量都线性相关.

问题: 能否研究性质找出更好的判别法?

最大无关组 是 满足一定条件的部分无关组，

如何判断部分无关组恰为最大无关组？

性质2. 设向量组$S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是向量组$T$的部分无关组，则如下条件等价：

(1) S是T的最大无关组； (2) T与S等价；

(3) T可由S线性表示；

(4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha$线性相关，$\forall\alpha\in T$.

证： $(1)\Rightarrow(2)$：即性质1. $(2)\Rightarrow(3)$：显然.

$(3)\Rightarrow(4)$：T可由S线性表出 $\Rightarrow T$中向量α可由S线性表出

$\Rightarrow\alpha$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示 $\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha$线性相关.

性质2. 设向量组$S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是向量组$T$的部分无关组，则如下条件等价:

(1) S是T的最大无关组；　　(2) T与S等价；

(3) T可由S线性表示；

(4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha$线性相关，$\forall\alpha\in T$.

证明: $(4)\Rightarrow(1)$ 从T中任取$s+1$个向量: $\beta_1,\cdots,\beta_{s+1}$

$$\left.\begin{array}{r}\text{任取}\beta_i:\ \text{由(4)},\ \alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_i\ \text{线性相关}\\ S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s\ \text{线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\beta_i$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出

$\Rightarrow\underbrace{\beta_1,\cdots,\beta_{s+1}}_{s+1\text{个向量}}$可由$\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}_{s\text{个向量}}$线性表出$\Rightarrow$ $\beta_1,\cdots,\beta_{s+1}$线性相关.

例5. 证明: R^n的秩为 n, 且R^n中任意 n 个线性无关的向量都是R^n 的最大无关组.

证: $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 是R^n 的n个线性无关的向量.

且R^n 中任意 $n+1$个向量, 都是 n 维向量, 线性相关.

$\Rightarrow \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$\mathrm{R}^n$的最大无关组 $\Rightarrow$ 秩$\mathrm{R}^n=$向量数n.

设$T:\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$是$\mathrm{R}^n$中线性无关的向量组,

因R^n 中任意 $n+1$个向量都线性相关, T是R^n的最大无关组.

例6. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表出，求 a的值.

解: 某3维向量不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出

$\Rightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$不是$\mathrm{R}^3$的最大无关组

$\Rightarrow R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$

$$\Rightarrow 0=\left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}\Rightarrow a=5$$

例7. 设A, B分别为$m\times r$, $r\times s$矩阵，证明

$$R(AB)\le \min\{R(A), R(B)\}.$$

证：将$A_{m\times r}B_{r\times s}=C_{m\times s}$ 写成分块矩阵形式：

$$(a_1,a_2,\cdots,a_r)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$$

表明乘积C的列组可由A的列组线性表出

$\Rightarrow$ 秩C的列组$\le$秩A的列组 $\Rightarrow R(AB)\le R(A)$

类似的，乘积C的行组可由B的行组线性表出

$\Rightarrow$ 秩C的行组$\le$秩B的行组 $\Rightarrow R(AB)\le R(B)$

$\Rightarrow$