第四章 n 维向量空间

典型例题

例 1 n阶矩阵A的秩为$n-1$且矩阵A的各行元素之和为 0, 齐次线性方程组$AX=0$的通解为__________________.

分析 $AX=0$的基础解系解向量的个数为 1, 由题设知$A(1,1,\cdots,1)^T=0$, 故$(1,1,\cdots 1)^T$为$AX=0$一个线性无关的解, 所以通解为$k(1,1,\cdots 1)^T$, 其中k为任意常数.

例 2 设$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\4&t&3\\3&-1&1\end{pmatrix}$, B为三阶非零矩阵, 且$AB=0$, 则$t=$________.

分析 由$AB=0$, 知$R(A)+R(B)\le 3$,且$R(B)\ge 1$, 故$R(A)\le 2$, 因此

$$|A|=7t+21=0, \text{故} t=-3.$$

例 3 设向量组α,β,γ线性无关, α,β,δ线性相关, 则（　　）.

(A) α必可由β,δ,γ线性表示; (B) β必可由α,δ,γ线性表示;

(C) δ必可由β,α,γ线性表示; (D) δ必不可由β,α,γ线性表示.

分析 由于α,β,δ线性相关, 则$\alpha,\beta,\gamma,\delta$线性相关.又因$\alpha,\beta,\gamma$线性无关, 故$\delta$必可由$\beta,\alpha,\gamma$线性表示.答案为 C.

例 4 设线性方程组$AX=b$有n个未知量, m个方程, 且$R(A)=r$, 则此方程（　　）.

（A）$r=m$时, 有解;　　　　（B）$r=n$时, 有惟一解;

（C）$m=n$时, 有惟一解;　　（D）$r<n$时, 有无穷解.

分析 已知A是$m\times n$矩阵.

（A）若$R(A)=m$, 则必有m阶子式不为零, 而$\overline{A}$中不存在$m+1$阶子式, 所以$R(\overline{A})=m$, 故方程组必有解.且若$r=m=n$, 方程组有惟一解;若$r=m<n$, 方程组有无穷多解.所以A正确.

（B）若 $R(A)=n$，自然有 $m\geq n$.

若 $m=n$，则 A 是 n 阶可逆矩阵，由克拉默法则，方程组有惟一解.

若 $m>n$，且 $R(\overline{A})=n=R(A)$，则因 A 的列向量线性无关，此时方程组有惟一解.

但若 $m>n$，且 $R(\overline{A})>n$ 时，方程组就无解.例如:

$$\begin{cases} x_1+x_2=1, \\ x_1-x_2=0, \\ x_1+x_2=3. \end{cases}$$

所以（B）不正确.要注意 $R(A)=n$ 时，不能保证 $R(\overline{A})=n$ 必成立.所以答案为（A）.

例 5 已知 $Q=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,$P$ 为 3 阶非零矩阵，且满足 $PQ=0$，则（　　）.

（A）$t=6$ 时 P 的秩必为 1;　　（B）$t=6$ 时 P 的秩必为 2;

（C）$t\neq 6$ 时 P 的秩必为 1;　　（D）$t\neq 6$ 时 P 的秩必为 2.

分析　显然 $t\neq 6$ 时，$R(Q)=2$;由于 $PQ=0$，故 $R(Q)+R(P)\leq 3$，因此 $R(P)\leq 1$.再者，由于 P 为非零矩阵，应有 $R(P)\geq 1$，所以 $R(P)=1$.答案为（C）.

例 6 设向量组 I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则（　　）.

(A) 当 $r<s$ 时，向量组 II 线性相关;

(B) 当 $r>s$ 时，向量组 II 线性相关;

(C) 当 $r<s$ 时，向量组 I 线性相关;

(D)、 当 $r>s$ 时，向量组 I 线性相关.

分析 I: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由向量组 II: $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的秩不超过向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩，而向量组 II 的秩不超过 $s,r>s$，所以向量组 I 的秩小于向量组向量的个数，故向量组 I 线性相关. 答案为（D）.

例 7 设 A, B 为满足 $AB=0$ 的任意两个非零矩阵，则必有（　）.

(A)　A 的列向量线性相关, B 的行向量线性相关;

(B)　A 的列向量线性相关, B 的列向量线性相关;

(C) A 的行向量线性相关, B 的行向量线性相关;

(D) A 的行向量线性相关, B 的列向量线性相关.

分析　设 A 是 $m\times s$ 型矩阵, B 是 $s\times n$ 型矩阵.把矩阵按列分块 $B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$,

由题设得 $AB=A(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)=(A\beta_1,A\beta_2,\cdots,A\beta_n)=0$,即

$$A\beta_i=0\,(i=1,2,\cdots,n).$$

$\beta_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 为线性方程组 $AX=0$ 的解.由 A,B 为两个非零矩阵, 故 $AX=0$ 的基础解系的向量个数大于等于 1 小于 A 的列秩, 即矩阵 B 的秩小于 s, 所以 B 的行向量线性相关.而 A 的列秩小于 s, 所以 A 的列向量线性相关.答案为（ A ）.

例 8 已知 4 阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4),\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$,, 若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$, 求线性方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

解 设 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,

即 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3+x_4\alpha_4=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$,将 $\alpha_1=2\alpha_2-\alpha_3$, 代入, 因 $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关, 可得 $x=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-2\\1\\0\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意实数.

例 9 p,t 取何值时, 方程组 $\begin{cases}x_1+x_2-2x_3+3x_4=0,\\2x_1+x_2-6x_3+4x_4=-1,\\3x_1+2x_2+px_3+7x_4=-1,\\x_1-x_2-6x_3-x_4=t\end{cases}$ 无解？有惟一解或有无穷多解？并在有无穷多解时, 求出方程组的通解.

解　设方程组的系数矩阵的为 A, 增广矩阵为 $\overline{A}$, 对 $\overline{A}$ 作行初等变换得

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\2&1&-6&4&-1\\3&2&p&7&-1\\1&-1&-6&-1&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&-1&p+6&-2&-1\\0&-2&-4&-4&t\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&-2&3&0\\0&1&2&2&1\\0&0&p+8&0&0\\0&0&0&0&t+2\end{pmatrix},$$

所以当$t \neq -2$方程组无解;

$t=-2$时，（1） $p=-8$时，$\begin{cases} x_1=-1+4k_1-k_2, \\ x_2=1-2k_1-2k_2, \\ x_3=k_1, \\ x_4=k_2. \end{cases}$;

（2） $p \neq -8$时，$\begin{cases} x_1=-1-k, \\ x_2=1-2k, \\ x_3=0, \\ x_4=k. \end{cases}$.

例 10 已知向量组(I): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$; ($II$): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$;(III): $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$.如果它们的秩分别为$R(I)=R(II)=3, R(III)=4$，求$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)$.

分析 由于$R(I)=R(II)=3,$，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，则$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$的秩至少为 3, 能否为 4, 关键是看$\alpha_5-\alpha_4$能否用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，或看向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$是线性相关的还是线性无关的.

解 由$R(I)=R(II)=3,$知$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性相关，，故$\alpha_4$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，设$\alpha_4=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3$.

若$\alpha_5-\alpha_4$能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，设为$\alpha_5-\alpha_4=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，于是

$\alpha_5=(k_1+x_1)\alpha_1+(k_2+x_2)\alpha_2+(k_3+x_3)\alpha_3$，即$\alpha_5$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$R(III)=3$，与已知矛盾.按最大无关组的定义知$R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)=4$.

例 11 设有齐次线性方程组$\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0, \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0, \\ \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0, \end{cases}$ $(n \geq 2)$

问a取何值时，该方程组有非零解，并求出其非零解.

分析 这是n个方程n个未知数的齐次线性方程组，系数矩阵A为n阶矩阵，含有参数a，可以用初等行变换的方法找出方程组的有非零解的条件，也可以计算矩阵A的行列式算出a的值，再求解.

解 $A=\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 2 & 2+a & 2 & \cdots & 2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ n & n & n & \cdots & n+a\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2a & a & 0 & \cdots & 0\\ -3a & 0 & a & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -na & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}$,

当$a=0$时，$R(A)=1<n$，方程组有非零解，基础解系含$n-1$个解向量.

同解方程组为$x_1+x_2+\cdots+x_n=0$，基础解系为

$$\eta_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\eta_{n-1}=\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}.$$

此时通解为$X=k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_{n-1}\eta_{n-1}\quad(k_1,k_2,\cdots,k_{n-1}$为任意常数）.

当$a\neq0$时，进一步有

$$A\to\begin{pmatrix}1+a & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a+\dfrac{n(n+1)}{2} & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

当$a=-\dfrac{n(n+1)}{2}$时，$R(A)=n-1<n$，方程组也有非零解，基础解系含 1 个解向量.同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=x_1,\\ x_2=2x_1,\\ \quad\vdots\\ x_n=nx_1,\end{cases}$$

基础解系为$\eta=\begin{pmatrix}1\\2\\\vdots\\n\end{pmatrix}$. 此时通解为$X=k\eta$, k为任意常数.

例 12 设A为$n\times n$方阵，则$A^2=A$的充要条件为秩(A)＋秩$(A-I)=n$.

证 构造矩阵$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}$，则可以对矩阵$\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A-I\end{pmatrix}$作一系列的块初等变换:

$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A-I \end{pmatrix}$ 第一行加到第二行 $\to \begin{pmatrix} A & 0 \\ A & A-I \end{pmatrix}$ 第二列的 -1 倍加到第一列 $\to \begin{pmatrix} A & 0 \\ E & A-I \end{pmatrix}$ 第二行的 $-A$ 倍加到第一行 $\to \begin{pmatrix} 0 & -A(A-I) \\ E & A-I \end{pmatrix}$ 第一列的 $-(A-I)$ 倍加到第二列 $\to \begin{pmatrix} 0 & -A(A-I) \\ I & 0 \end{pmatrix}$.由于初等变换不改变矩阵的秩，故

$$R(A)+R(A-I)=R(A^2-A)+n,$$

即

$$R(A)+R(A-I)=n \Leftrightarrow R(A^2-A)=0 \Leftrightarrow A^2-A=0 \Leftrightarrow A^2=A.$$

例 13 设 A 是 $n\times m$ 矩阵，B 是 $m\times n$ 矩阵,其中 $m>n$, I 为 n 阶单位矩阵,若 $AB=I$,证明 B 的列向量组线性无关.

证 设 B 的列向量组线性相关，而且把矩阵 B 按列分块得 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则存在不全为零得数 $k_1,k_2,\cdots,k_n$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n=0$，即

$$k_1A\alpha_1+k_2A\alpha_2+\cdots+k_nA\alpha_n=0.\text{（1）}$$

由于 $AB=I$，得 $(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=I=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$，即 $A\alpha_i=\varepsilon_i\ \ (i=1,2,\cdots n)$.代入（1）式得 $k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+\cdots+k_n\varepsilon_n=0$，矛盾.故 B 的列向量组线性无关.

例 14 设 A 为 $m\times n$ 型实矩阵，证明：秩 $(AA^T)=$ 秩 $(A^TA)=$ 秩 (A).

证 若向量 X 满足方程组 $AX=0$，则 $A^TAX=0$，所以 $AX=0$ 的解也是 $A^TAX=0$ 的解.另一方面，若向量 X 满足方程组 $A^TAX=0$，则 $X^TA^TAX=0$，即 $(AX)^T(AX)=0$，所以有 $AX=0$，即 $A^TAX=0$ 也是 $AX=0$ 的解.故 $A^TAX=0$ 与 $AX=0$ 同解，从而

$$\text{秩}(A^TA)=\text{秩}(A).$$

同理可证

$$\text{秩}(AA^T)=\text{秩}（A^T）=\text{秩}(A),$$

所以

$$\text{秩}(AA^T)=\text{秩}(A^TA)=\text{秩}(A).$$

例 15 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，向量$\beta_1$可以由这组向量线性表示，而$\beta_2$不能由这组向量线性表示，证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,l\beta_1+\beta_2$必线性无关，其中$l$为任意常数.

证 若向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,l\beta_1+\beta_2$线性相关，则存在一组不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_{n+1}$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n+k_{n+1}(l\beta_1+\beta_2)=0,$$

由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性无关，所以$k_{n+1}\neq 0$.故

$$\beta_2=-\frac{k_1}{k_{n+1}}\alpha_1-\frac{k_2}{k_{n+1}}\alpha_2-\cdots-\frac{k_n}{k_{n+1}}\alpha_n-l\beta_1, \tag{1}$$

因为β_1可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，所以由（1）式$\beta_2$可以由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$线性表示，矛盾.故向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,l\beta_1+\beta_2$必线性无关.

例 16 设A,B为$n\times n$矩阵，$AB=0$，证明:

(1) 秩$(A)+$秩$(B)\le n$;

(2) 对给定矩阵A，必存在矩阵B，使得$R(A+B)=k$，其中k满足秩$(A)\le k\le n$.

证(1) 把B按列分块得$B=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，由题设

$$AB=A(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=(A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_n)=0\Rightarrow A\alpha_i=0\ \ (i=1,2,\cdots,n),$$

即$\alpha_i\ \ (i=1,2,\cdots,n)$为线性方程组$AX=0$的解.故秩$(A)+$秩$(B)\le n$.

(2) 设矩阵A的秩为r，则存在可逆矩阵P,Q，使得$A=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q$.令$B=P\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{k-r}\end{pmatrix}Q$，则

$$A+B=P\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}Q+P\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{k-r}\end{pmatrix}Q=P\left(\begin{pmatrix} I_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_{k-r}\end{pmatrix}\right)Q$$

由此可得$R(A+B)=k$.