§1.3 无穷小量　无穷大量

一、无穷小的概念

二、无穷小与函数极限的关系

一、无穷小

1. 定义: 极限为零的变量称为无穷小.

例如, $\because \lim_{x\to 0}\sin x = 0,$ $\therefore$ 函数 $\sin x$ 是当 $x \to 0$ 时的无穷小.

$\because \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0,$ $\therefore$ 函数 $\frac{1}{x}$ 是当 $x \to \infty$ 时的无穷小.

$\because \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n} = 0,$ $\therefore$ 数列 $\{\frac{(-1)^n}{n}\}$ 是当 $n \to \infty$ 时的无穷小.

无穷小的$\varepsilon-\delta$定义

$\varepsilon-\delta$定义$(x \to x_0)$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x) - 0| < \varepsilon$成立.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$. 称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷小.

$\varepsilon-\delta$定义$(x \to \infty)$：

$\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$, 当$|x| > X$时，有$|f(x) - 0| < \varepsilon$成立.

$\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$. 称$f(x)$当$x \to \infty$时为无穷小.

二. 无穷小与函数极限的关系:

定理1 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ 其中 $\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小.

证 **必要性** 设 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,

则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当时 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记 $\alpha(x) = f(x) - A \Rightarrow |\alpha(x)| < \varepsilon \Rightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$,

因此 $f(x) = A + \alpha(x)$.

充分性 设 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$,

则 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|\alpha(x)|<\varepsilon$,

由 $\alpha(x)=f(x)-A$，所以 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

思考题

下面这些变量是否为无穷小?

1. $\lim_{x\to 1}(x^3-3)$

2. $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2})$

3. $\lim_{x\to\infty}(e^{-x})$

1.3 无穷小量　无穷大量（续）

一、无穷大的概念

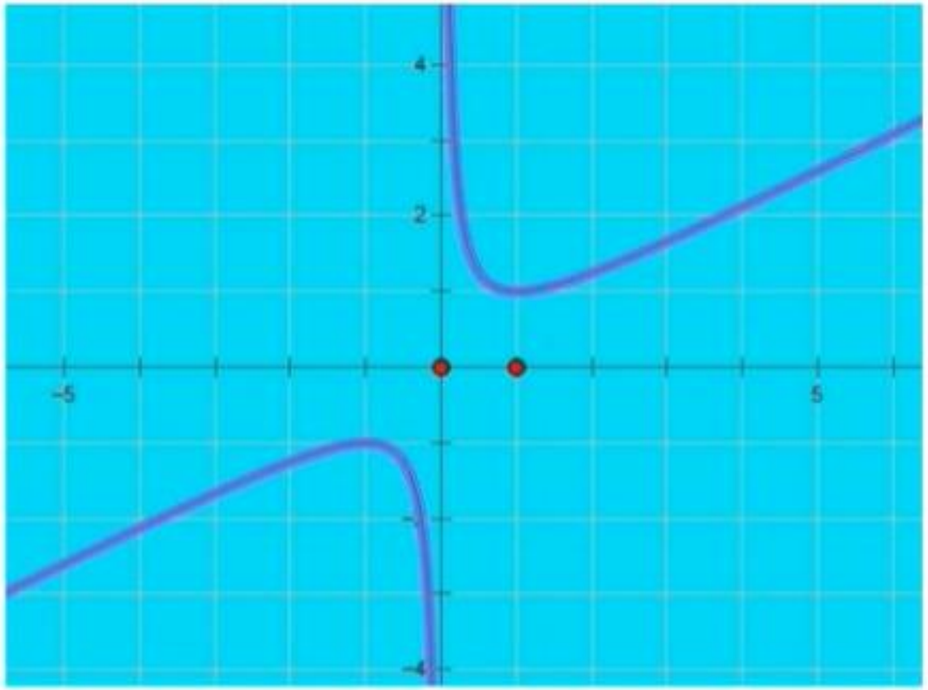
二、无穷小与无穷大的关系

一、无穷大

无穷大的$M-\delta$定义$(x \to x_0)$：

定义1： $\forall M > 0, \exists \delta > 0$，当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有$|f(x)| > M$成立，

则称$f(x)$当$x \to x_0$时为无穷大，记为$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.



无穷大的$M-\delta$定义$(x \to \infty)$：

定义2： $\forall M > 0, \exists X > 0$，当$|x| > X$时，有$|f(x)| > M$成立，

则称$f(x)$当$x \to \infty$时为无穷大，记为$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty \Leftrightarrow$ 若$\forall M>0, \exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，

  有$f(x)>M$，则称$f(x)$当$x\to x_0$时为正无穷大.

- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty \Leftrightarrow$ 若$\forall M>0, \exists\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，

  有$f(x)<-M$，则称$f(x)$当$x\to x_0$时为负无穷大.

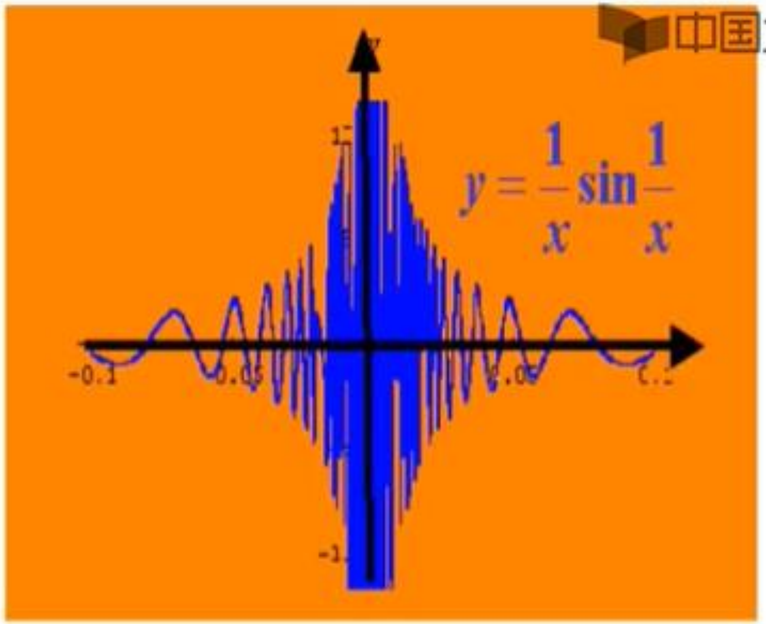
注: 1.无穷大是变量, 不能与很大的数混淆;

2.切勿将$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$认为极限存在.

3.无穷大是一种特殊的无界变量, 但是无界变量未必是无穷大.

例如， 当$x \to 0$时，$y = \dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$

是一个无界变量,但不是无穷大.



(1) 取$x_k = \dfrac{1}{2k\pi + \dfrac{\pi}{2}}$ $(k = 0,1,2,\cdots)$

$y(x_k) = 2k\pi + \dfrac{\pi}{2}$, 当$k$充分大时, $y(x_k) > M$.

无界

(2) 取 $x_k = \dfrac{1}{2k\pi}$ $(k = 0,1,2,3,\cdots)$

当k充分大时, $x_k < \delta$,

但 $y(x_k) = 2k\pi \sin 2k\pi \; = 0 < M$.

不是无穷大

二、无穷小与无穷大的关系

定理 在同一过程中，无穷大的倒数为无穷小； 恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

证 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty.$ $\therefore \forall\varepsilon>0,$ 由 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty,$ 令 $M=\dfrac{1}{\varepsilon},$

$\exists\delta>0,$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|>M=\dfrac{1}{\varepsilon},$

即 $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon.\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0.$ $\therefore$ 当 $x\to x_0$ 时，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小.

同理可证 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, f(x)\neq 0,$ 则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty.$

思考题

下面这些变量是否为无穷大?

1. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2})$ 3. $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x)$