第五章 特征值与特征向量

5.4 实对称矩阵的相似对角化

何军华

电子科技大学

本节目的:

讨论一类必可相似对角化的矩阵: **实对称矩阵**.

- 证明: 若A是n阶实对称矩阵, 则

  (1) A的特征值都是实数.

  (2) 互异特征值的特征向量必然彼此正交.

  (3) 存在n阶正交矩阵C使得

  $$C^{-1}AC = C^{T}AC \text{ 为对角阵.}$$

- 给出实对称矩阵正交对角化的方法.

一、共轭矩阵

复数及其性质：

$$\mathrm{i}^2=-1,\ \mathrm{i}:\text{虚单位}$$

$$z=a+b\mathrm{i},\ a:\text{实部},\ b:\text{虚部}$$

复数运算：加法，乘法

$$z_1=a_1+b_1\mathrm{i},\ z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$$

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},$$

$$z_1\bullet z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

复共轭，模

设 $z_1 = a_1 + b_1 \mathrm{i}, \ \cdots, z_n = a_n + b_n \mathrm{i}.$

复共轭：$\overline{z_1} = a_1 - b_1 \mathrm{i},$

$$\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}, \qquad \overline{z_1 \bullet \cdots \bullet z_n} = \overline{z_1} \bullet \cdots \bullet \overline{z_n}.$$

模：$|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \geq 0$

$$\overline{z_1} z_1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$$

$$\overline{z_1} \bullet z_1 + \cdots + \overline{z_n} \bullet z_n = 0 \Leftrightarrow \qquad z_1 = \cdots = z_n = 0$$

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $\alpha=\left(z_1,\cdots,z_n\right)^T$, $a_{ij}, z_i\in\mathbb{C}$.

$\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$ 称为A的**共轭矩阵**.

性质： (1) $\overline{A^T}=\overline{A}^T$ (2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$. (4) $\overline{\alpha^T}\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\left(0,\cdots,0\right)^T$

证明： (4) $0=\overline{\alpha^T}\alpha=\left(\overline{z_1},\cdots,\overline{z_n}\right)\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=\overline{z_1}z_1+\cdots+\overline{z_n}z_n$

$\Leftrightarrow z_1=\cdots=z_n=0$ $\Leftrightarrow\alpha=\left(0,\cdots,0\right)^T$