第三章 几何空间

习题课2

➤ 范 例

电子科技大学 蒲和平

二、平面

1. 设平面π过z轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，

求平面π的方程.

解　平面过z轴，故可设其方程为 $Ax+By=0$

其法向量$\vec{n}=(A,B,0)$与已知平面的法向量

$\vec{n_0}=(2,1,-\sqrt{5})$所夹锐角为$\dfrac{\pi}{3}$，

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n_0}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n_0}\|}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore 6A^2+16AB-6B^2=0,\text{即}A=\frac{1}{3}B\text{或}-3B$$

$\therefore$ 平面$x+3y=0$或$3x-y=0$为所求.

2. 求过点$P(-1,1,2)$及直线$l: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{0}$ 的平面方程.

解1 在 l 上取点 $Q(2,1,-2)$，$\overrightarrow{PQ}=(3,0,-4)$，所求平面法向量

$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{PQ}=(3,-2,0)\times(3,0,-4)=(4,6,3)$$

由点法式可得平面方程 $4x+6y+3z-8=0.$

解2 $l:\begin{cases}-2x-3y+7=0\\ z+2=0\end{cases}$，过$l$ 的平面束方程为

$$2x+3y-7+\lambda(z+2)=0 \qquad (1)$$

将P的坐标代入的得 $\lambda=3/2$

代入(1)得平面方程 $4x+6y+3z-8=0$

3. 平面π与平面π': $5x-y+3z-2=0$垂直,并与π'的交线落在xoy面上,求平面π的方程.

解 设平面π'与xoy面的交线为l

过l的平面束方程为：$(5x-y+3z-2)+\lambda z=0$

即 $5x-y+(3+\lambda)z-2=0$ （*）

当该平面与平面π'垂直，有

$$(5,-1,3+\lambda)\cdot(5,-1,3)=25+1+9+3\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{35}{3}$$

代入（*）得所求平面方程为 $5x-y-\dfrac{26}{3}z-2=0.$

三、空间直线

1. 求点$M(3,1,-4)$关于直线$l:\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$的对称点.

解 直线的方向向量为

$$\vec{S}=(1,-1,-4)\times(2,1,-2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(6,-6,3)//(2,-2,1)$$

过点M且与l垂直的平面的方程为

$$\pi:\quad 2(x-3)-2(y-1)+(z+4)=0$$

即 $2x-2y+z=0$

π与l的交点坐标满足$\begin{cases} x - y - 4z + 12 = 0 \\ 2x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$

解得：$x = \dfrac{1}{3},\ y = \dfrac{5}{3},\ z = \dfrac{8}{3}$ （注：直线方程用参数式求交点较简）

令对称点的坐标为(a,b,c)则

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{2} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{c-4}{2} = \dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{7}{3} \\ b = \dfrac{7}{3} \\ c = \dfrac{28}{3} \end{cases}$$

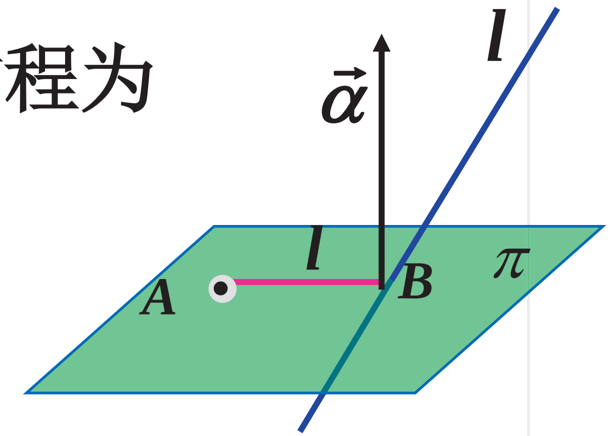
对称点为 $\left(-\dfrac{7}{3}, \dfrac{7}{3}, \dfrac{28}{3}\right)$

2. 求过点$A(-1,2,3)$与向量$\vec{\alpha}=(4,3,1)$垂直,并与

直线$l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$相交的直方程.

解1 过点A且与向量$\vec{\alpha}$垂直的平面方程为

$$4(x+1)+3(y-2)+(z-3)=0$$



此平面与l的交点满足:

$$\begin{cases}4(x+1)+3(y-2)+(z-3)=0\\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1}\end{cases}$$

求得交点 $B(\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{10}{3})$

$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(8,-11,1)$,所求直线方程为:$\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-2}{-11}=\dfrac{z-3}{1}$.

解2 设待求之交点为$(1+2t,-2+t,3+t)$,此交点与A的连线与向量$\vec{\alpha}$垂直

$$\therefore (2+2t,-4+t,t)\cdot(4,3,1)=0$$

$$\Rightarrow 4(2+2t)+3(-4+t)+t=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{交点为}(\frac{5}{3},-\frac{5}{3},\frac{10}{3})$$

故待求直线方程为: $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-2}{-11}=\dfrac{z-3}{1}$.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$$