§3.6 有理函数的积分

一、有理函数的积分法

二、三角函数有理式的积分

积分$\int \frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}dx$如何计算?

一、有理函数的积分法

有理函数:两个实系数多项式的商所表示的函数

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

其中m,n都是非负整数；$a_0,a_1,\cdots,a_n$及$b_0,b_1,\cdots,b_m$都是实数,且$a_0\neq 0,b_0\neq 0$.

假定分子和分母之间没有公因式,

(1) $n<m$,这有理函数叫真分式; (2) $n\geq m$,这有理函数叫假分式;

任意真分式都可以分解为若干个最简分式的和.

任意真分式都可以分解为若干个最简分式的和.

$$\frac{A}{x-a};\frac{A}{(x-a)^k};\quad \frac{Mx+q}{x^2+px+q};\frac{Mx+q}{(x^2+px+q)^k}\quad (k>1).$$

$$Q(x)=b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}.$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(x)}{b_0(x-a)^{\alpha}\cdots(x-b)^{\beta}(x^2+px+q)^{\lambda}\cdots(x^2+rx+s)^{\mu}}.$$

(1) 分母中若有因式$(x-a)^k$,则分解后为

$$\frac{A_1}{(x-a)^k}+\frac{A_2}{(x-a)^{k-1}}+\cdots+\frac{A_k}{x-a},$$

其中$A_1,A_2,\cdots A_k$都是常数. 特殊的: $k=1$分解后$\frac{A}{x-a}$;

(2) 分母中若有因式$(x^2+px+q)^k$,其中$p^2-4q<0$，则分解后为，

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^k}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^{k-1}}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{x^2+px+q};$$

其中M_i,N_i都是常数$(i=1,2,\cdots,k)$.特殊的:$k=1$分解后为$\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$.

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^\alpha}+\cdots+\frac{A_\alpha}{(x-a)}+\cdots+\frac{B_1}{(x-b)^\beta}+\frac{B_2}{(x-b)^{\beta-1}}+\cdots\frac{B_\beta}{(x-b)}+\cdots+$$

$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+px+q)^\lambda}+\cdots+\frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)}+\cdots+\frac{R_1x+S_1}{(x^2+rx+s)^\mu}+\cdots+\frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)}.$$

例1 计算积分$\int \frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}\mathrm{d}x.$

解 $\because \frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+2}+\frac{Dx+E}{(x^2+2)^2}$

$\therefore \frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}=\frac{(A+B)x^4+Cx^3+(4A+2B+D)x^2+(2C+E)x+4A}{x(x^2+2)^2}$

$\therefore A+B=0, C=1, 4A+2B+D=0, 2C+E=2, 4A=1.$ 比较系数法

$\therefore A=1, B=-1, C=1, D=-2, E=0.$ $\therefore \frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}=\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+2}-\frac{2x}{(x^2+2)^2}$

$\therefore \int \frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}\mathrm{d}x=\int [\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+2}-\frac{2x}{(x^2+2)^2}]\mathrm{d}x$

$$\int\frac{x^3+2x+4}{x(x^2+2)^2}\mathrm{d}x=\int[\frac{1}{x}-\frac{x-1}{x^2+2}-\frac{2x}{(x^2+2)^2}]\mathrm{d}x$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+2|+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(x^2+2)^2}+C.$$

例2 计算$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x$.

解 $\frac{x+3}{x^2-5x+6}=\frac{x+3}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}$

$\therefore x+3=A(x-3)+B(x-2)$, 取 $x=2$得$A=-5$,取 $x=3$得$B=6$. 赋值法

$$\int\frac{x+3}{x^2-5x+6}\mathrm{d}x=\int(\frac{-5}{x-2}+\frac{6}{x-3})\mathrm{d}x=-5\ln|x-2|+6\ln|x-3|+C.$$

§3.6 有理函数的积分

一、有理函数的积分法

二、三角函数有理式的积分

将有理函数化为部分分式之后,只会出现如下三种情况

(1)多项式; (2) $\dfrac{A}{(x-a)^n}$; (3) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$;

讨论积分$\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x.$

解 $\because$ $x^2+px+q=(x+\dfrac{p}{2})^2+q-\dfrac{p^2}{4}$, 令$x+\dfrac{p}{2}=t$ $a^2=q-\dfrac{p^2}{4}$,

则 $x^2+px+q=t^2+a^2, Mx+N=Mt+N-\dfrac{Mp}{2}$, $b=N-\dfrac{Mp}{2}$,

$$\therefore\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x=\int\frac{Mt+b}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t=\int\frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t+\int\frac{b}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t$$

$$\therefore \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = \int \frac{Mt}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t + \int \frac{b}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t$$

(1) $n=1$时，$\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\mathrm{d}x = \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \frac{b}{a}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{a} + C;$

(2) $n>1$时，$\displaystyle\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\mathrm{d}x = -\frac{M}{2(n-1)(t^2+a^2)^{n-1}} + b\int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t.$

$$I_n = \int \frac{1}{(t^2+a^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} - \int t\cdot\frac{-2nt}{(t^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{t^2+a^2-a^2}{(t^2+a^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{t}{(t^2+a^2)^n} + 2nI_n - 2a^2nI_{n+1} \qquad \therefore I_{n+1} = \frac{1}{2a^2n}\frac{t}{(t^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2a^2n}I_n.$$

有理函数积分的一般步骤:

(1)将有理函数表示为多项式与真分式之和;

(2)将真分式分解为最简分式之和;

(3)分别求出多项式与各最简分式的不定积分，相加即得该有理函数的不定积分.

缺点:(1)若分母$Q(x)$的次数较高时，因式分解在技术上是困难的;

(2)分解式中待定常数的个数较多时，计算量会变得比较大.

计算积分$\int \frac{2x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 1} \mathrm{d}x$

解 $\because \frac{2x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 1} = 2x - 1 + \frac{x}{x^3 - 1}$

$$\frac{x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} \Rightarrow A = \frac{1}{3}, B = -\frac{1}{3}, C = \frac{1}{3},$$

$$\therefore \int \frac{2x^4 - x^3 - x + 1}{x^3 - 1} \mathrm{d}x = \int \left(2x - 1 + \frac{1}{3}\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{3}\frac{1}{x^2 + x + 1}\right) \mathrm{d}x$$

$$= x^2 - x + \frac{1}{3}\ln|x - 1| - \frac{1}{6}\ln|x^2 + x + 1| + \frac{\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C.$$

§3.6 有理函数的积分

一、有理函数的积分法

二、三角函数有理式的积分

二、三角函数有理式的积分

三角有理函数：由基本三角函数和常数经过有限次四则运算构成的函数.

一般记为 $R(\sin x,\cos x)$.

$$\because \sin x=\frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\cos x=\frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}},\qquad 令u=\tan\frac{x}{2}$$

$$\therefore \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\qquad x=2\arctan u,\qquad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

$$\int R(\sin x,\cos x)\mathrm{d}x=\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u.$$

例3 求积分$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x$.

解 法一） 令$u=\tan\frac{x}{2}$, $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1+3u^2+3u^4+u^6}{8u^4}\mathrm{d}u=\frac{1}{8}[-\frac{1}{3u^3}-\frac{3}{u}+3u+\frac{u^3}{3}]+C$$

$$=-\frac{1}{24(\tan\frac{x}{2})^3}-\frac{3}{8\tan\frac{x}{2}}+\frac{3}{8}\tan\frac{x}{2}+\frac{1}{24}(\tan\frac{x}{2})^3+C.$$

法二） 修改万能公式,令$u=\tan x$, $\sin x=\frac{u}{\sqrt{1+u^2}}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u$,

$$\int \frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int \frac{1}{(\frac{u}{\sqrt{1+u^2}})^4}\cdot\frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int \frac{1+u^2}{u^4}\mathrm{d}u=\int \frac{1}{u^4}\mathrm{d}u+\int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\int\frac{1}{u^4}\mathrm{d}u+\int\frac{1}{u^2}\mathrm{d}u=-\frac{1}{3u^3}-\frac{1}{u}+C=-\frac{1}{3}\cot^3 x-\cot x+C.$$

法三） $\displaystyle\int\frac{1}{\sin^4 x}\mathrm{d}x=\int\csc^4 x\mathrm{d}x$

$$=\int\csc^2 x(1+\cot^2 x)\mathrm{d}x$$

$$=\int\csc^2 x\mathrm{d}x+\int\cot^2 x\csc^2 x\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x-\frac{1}{3}\cot^3 x+C.$$

结论：万能公式不一定是最佳的方法，故三角有理式的积分优先考虑其他方法，不得已采用万能置换公式.

几个不能计算的积分

$$\sin x^2, e^{x^2}, \frac{\sin x}{x}, \frac{x}{\ln x}, \sqrt{1+x^4}\text{等等}$$