电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

中国大学MOOC

函数作图

一、渐近线

二、函数作图的步骤

三、函数作图举例

电子科技大学数学科学学院

一、渐近线

定义：当曲线 $y=f(x)$ 上的一动点 P 沿着曲线移向无穷远点时如果点 P 到某定直线 L 的距离趋向于零，那么直线L就称为曲线 $y=f(x)$的 一条渐近线.

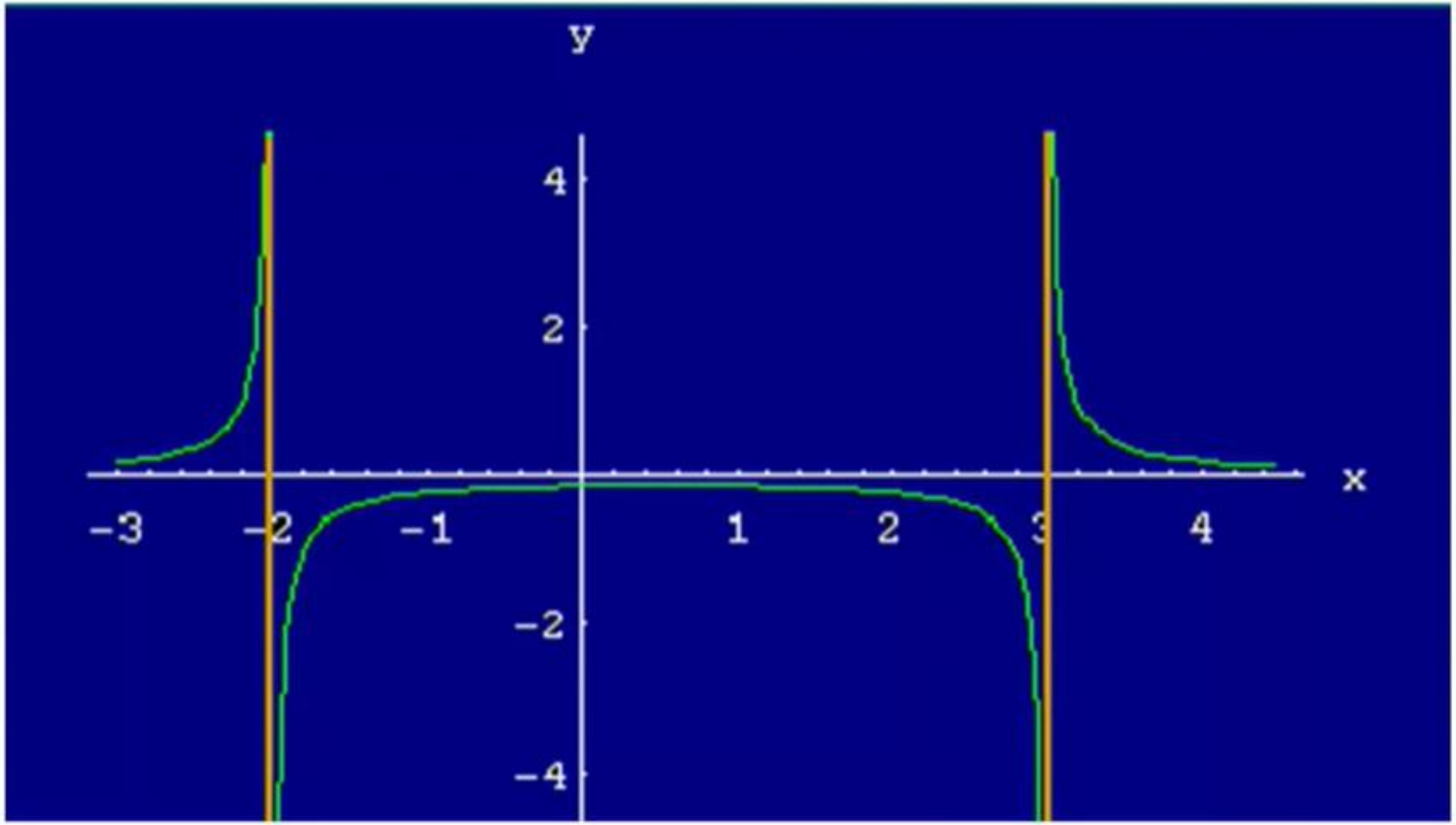
1. 垂直渐近线 **(垂直于 x 轴的渐近线)**

如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\infty$ **或** $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\infty$

那么 $x=x_0$ 就是 $y=f(x)$ 的一条垂直渐近线.

例如 $y=\dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$,

有垂直渐近线两条: $x=-2$, $x=3$.



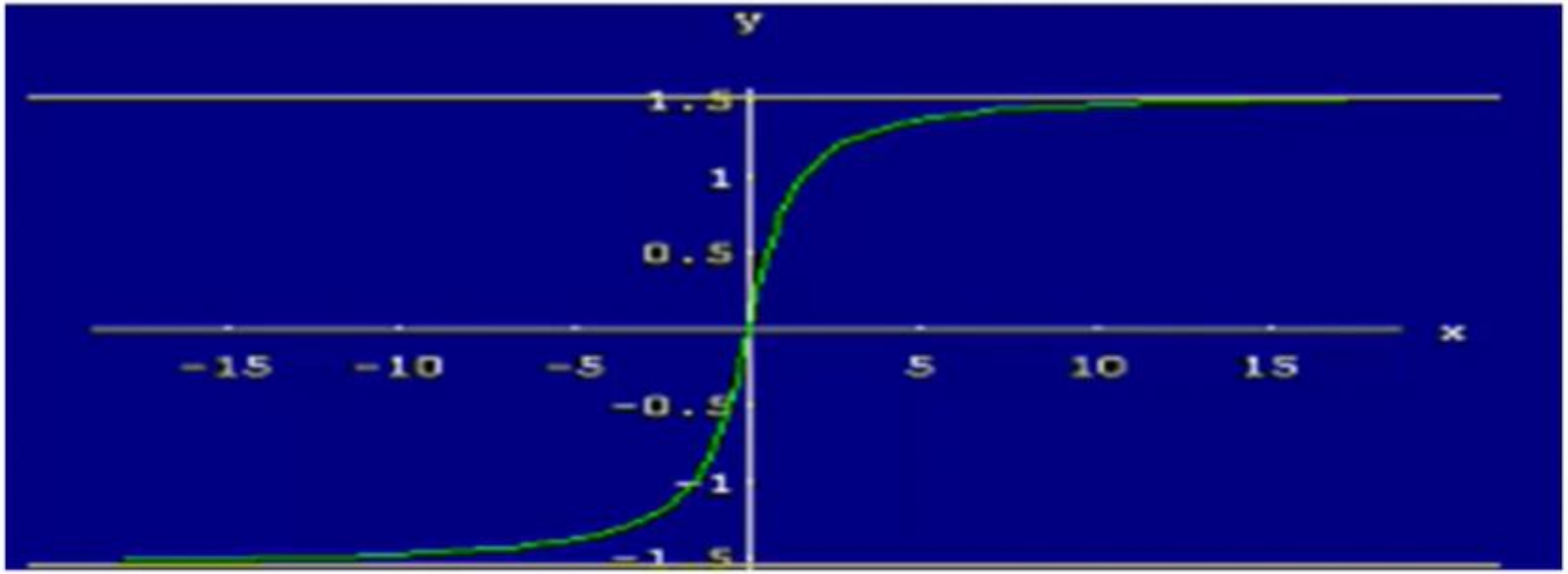
2. 水平渐近线 (平行于 x 轴的渐近线)

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=b$ 或 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=b$ (b 为常数)

那么 $y=b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线.

例如 $y=\arctan x$,

有水平渐近线两条: $y=\dfrac{\pi}{2}$, $y=-\dfrac{\pi}{2}$.



3. 斜渐近线

如果 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

或 $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ (a,b 为常数)

那么 $y=ax+b$ 就是 $y=f(x)$ 的一条斜渐近线.

其中:

$$a=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(\text{或}x\to-\infty)}}\frac{f(x)}{x}$$

$$b=\lim_{\substack{x\to+\infty\\(\text{或}x\to-\infty)}}\left[f(x)-ax\right]$$

直线$y=ax+b$是曲线$y=f(x)$当$x\to\pm\infty$时的渐近线的充要条件是:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\(\text{或}x\to-\infty)}}\left[f(x)-ax-b\right]=0.$$

证 由函数的极限与无穷小的关系可得:

$$f(x)=ax+b+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$$

因此, $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-b-\alpha(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax-\alpha(x)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$$

同理可证$x\to-\infty$时的情形。

若： (1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 不存在;

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$ 不存在,

可以断定 $y=f(x)$ 不存在斜渐近线.

例1 求 $f(x)=\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x-1}$ 的渐近线.

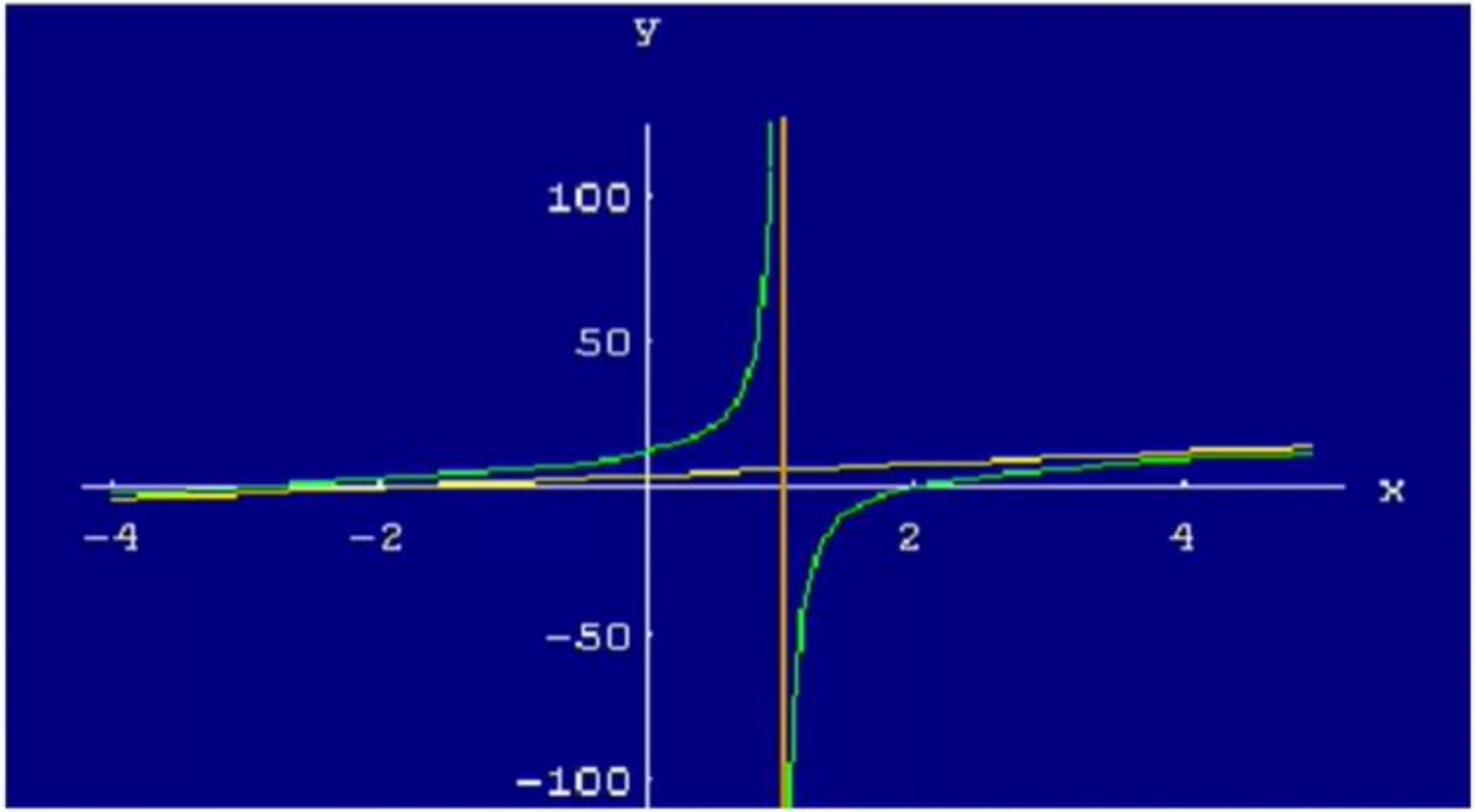
解 $D:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

$\because \lim\limits_{x\to1}f(x)=\infty$ $\therefore$ 有垂直渐近线 $x=1$

$\because \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2(x-2)(x+3)}{x(x-1)}=2$

$$\lim_{x\to\infty}[f(x)-ax]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2(x-2)(x+3)}{(x-1)}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{4x-12}{x-1}=4=b$$

$\therefore$ 有斜渐近线 $y=2x+4$



二、函数作图的步骤

利用函数特性描绘函数图形的步骤：

1. 确定函数$y=f(x)$的定义域,对函数进行奇偶性、周期性、曲线与坐标轴交点等性态的讨论，求出函数的一阶导数和二阶导数$f'(x)$ $f''(x)$;

2. 求出方程 $f'(x)=0$和$f''(x)=0$在函数定义域内的全部实根，用这些根同函数的间断点或导数不存在的点把函数的定义域划分成几个部分区间。

3. 确定在这些部分区间内 $f'(x)$和$f''(x)$ 的符号，并由此确定函数的增减性与极值及曲线的凸性与拐点（可列表进行讨论）；

4. 确定函数图形的水平、垂直渐近线、斜渐近线以及其他变化趋势；

5. 描出与方程$f'(x)=0$和$f''(x)=0$的根对应的曲线上的点，有时还需要补充一些点，再综合前四步讨论的结果画出函数的图形。

三、作图举例

例2 作函数 $f(x)=\dfrac{4(x+1)}{x^2}-2$ 的图形.

(1) 求定义域 $D: x\neq 0,$ 非奇非偶函数，且无对称性.

(2) $f'(x)=-\dfrac{4(x+2)}{x^3},\quad f''(x)=\dfrac{8(x+3)}{x^4}.$

令 $f'(x)=0,$ 得驻点 $x=-2,$

令 $f''(x)=0,$ 得点 $x=-3.$

(3)列表以确定单调性，极值，凸性，拐点.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$	不存在	$-$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$		$+$
$f(x)$		拐点 $(-3,-\frac{26}{9})$		极值点 -3		间断点	

(4) 渐近线

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=-2,$$ **得水平渐近线** $y=-2$;

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\left[\frac{4(x+1)}{x^2}-2\right]=+\infty,$$

得垂直渐近线 $x=0$.

（5）补充点并作图