

第三讲 平面

- 平面的方程
 1. 点法式方程
 2. 一般式方程
 3. 截距式方程
- 平面与平面的位置关系
- 内容小结

第三讲 平面

► 平面的方程

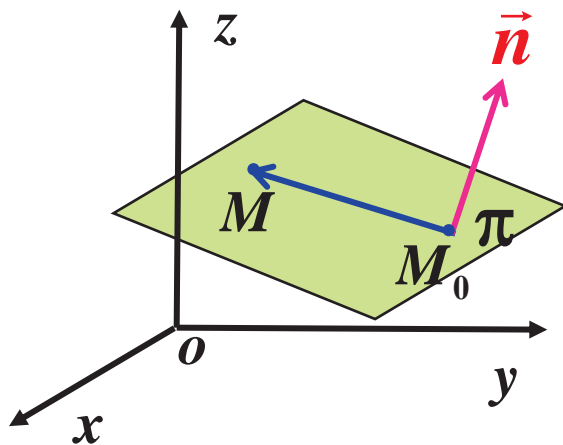
1. 点法式方程
2. 一般式方程
3. 截距式方程

平面与平面的位置关系
内容小结

一、平面方程

1. 点法式方程

平面 π 可由 π 上任意一点和垂直于 π 的任一向量完全确定.
垂直于 π 的任一非零向量称为 π 的**法线向量**.



法线向量的特征： 垂直于平面内的任一向量.

设 $\vec{n} = (A, B, C)$, $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \pi$

$M(x, y, z)$ 为平面 π 上的任一点,

必有 $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$

$$\because \overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0),$$

$$\therefore A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1)$$

方程(1)称为平面的点法式方程.

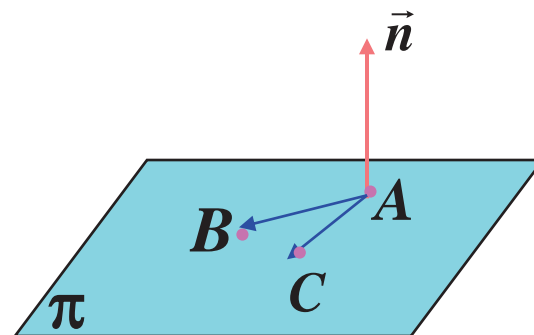
其中法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$, (x_0, y_0, z_0) 是已知点.

平面上的点都满足方程(1), 满足方程(1)的点都在平面上.

例 1 求过三点 $A(2,-1,4)$ 、 $B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

解 $\overrightarrow{AB} = (-3, 4, -6)$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, 3, -1)$$



取 $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (14, 9, -1)$,

所求平面方程为 $14(x-2) + 9(y+1) - (z-4) = 0$,

化简得 $14x + 9y - z - 15 = 0$.

说明：此平面的三点式方程也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况：过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ ($k=1, 2, 3$) 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2. 一般式方程

由平面的点法式方程

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$$

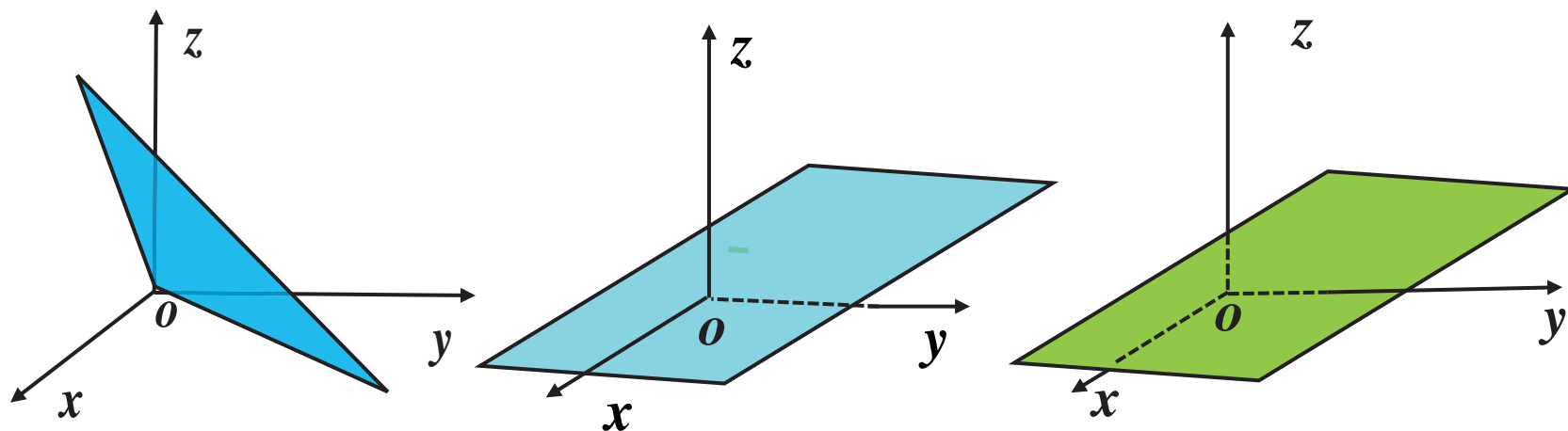
$= D$

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad \text{----平面的一般式方程}$$

法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$.

平面一般方程的几种特殊情况：

(1) $D = 0$, 平面 $Ax + By + Cz = 0$ 通过坐标原点;



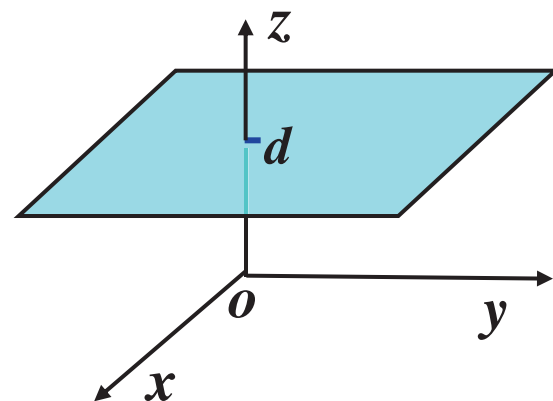
(2) $A = 0$, $\begin{cases} D = 0, & \text{平面 } By + Cz = 0 \text{ 通过 } x \text{ 轴;} \\ D \neq 0, & \text{平面 } By + Cz + D = 0 \text{ 平行于 } x \text{ 轴;} \end{cases}$

类似地可讨论 $B = 0, C = 0$ 情形.

(3) $A = B = 0$, 平面 $Cz + D = 0$ 或 $z = d \parallel xoy$ 面

类似地可讨论 $A = C = 0$

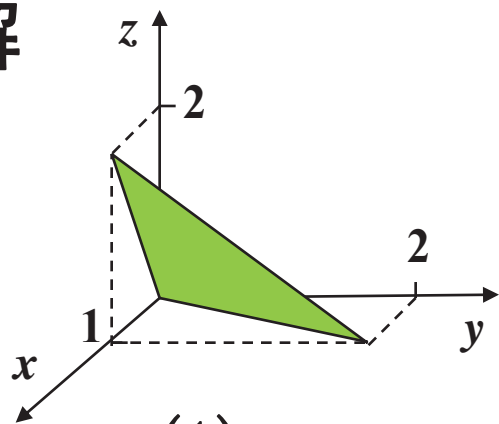
与 $B = C = 0$ 的情况.



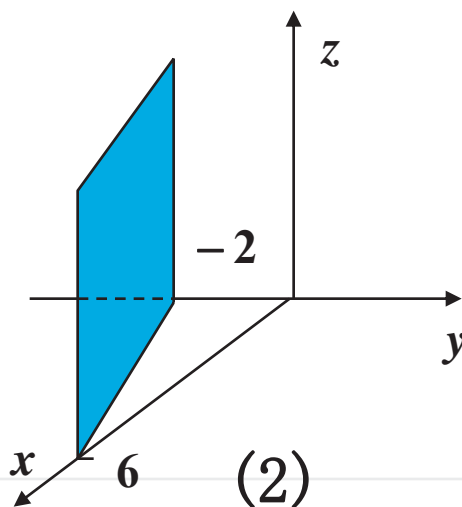
例2 画出下列图形:

(1) $2x - y - z = 0$; (2) $-x + 3y + 6 = 0$; (3) $3z - 7 = 0$;

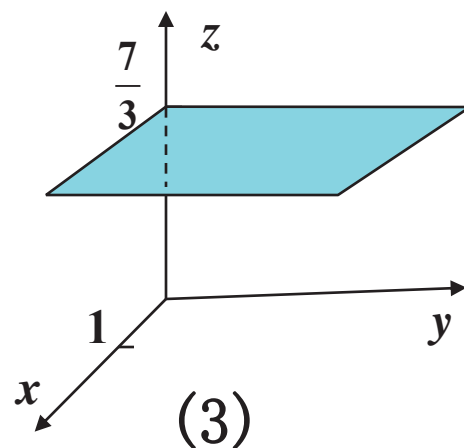
解



(1)



(2)



(3)

例 3 设平面过原点及点 $(6, -3, 2)$, 且与平面 $4x - y + 2z = 8$ 垂直, 求此平面方程.

解 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

由平面过原点知 $D = 0$. 法向量 $\vec{n} = (A, B, C)$

由平面过点 $(6, -3, 2)$ 知 $6A - 3B + 2C = 0$

$$\because \vec{n} \perp (4, -1, 2), \quad \therefore 4A - B + 2C = 0$$

$$\Rightarrow A = B = -\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x + 2y - 3z = 0$.

思考: 还有其它方法计算吗?

主要内容

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程

练习 1.下面方程在平面与空间中各表示什么图形？

方程	xoy 平面	$o-xyz$ 空间
$x = 2$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$y = x + 1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

2. 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

答案: $y - 3z = 0$