第四章 n维向量空间

4.2 向量组的线性相关性

何军华

电子科技大学

一、向量组的线性组合

1. 向量组与矩阵

向量组 同维数的向量所组成的集合.

$A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 有n个m维列向量

$$A=\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_j & & \alpha_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 称为矩阵A的列向量组

对称地，矩阵 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ 有m个n维行向量

$$A=\begin{pmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \beta_i \\ \\ \beta_m \end{matrix}$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_m$ 称为矩阵A的行向量组.

反之，给定行(列)向量组，也可构造矩阵A使得:

A的行(列)向量组恰为给定向量组.

2.线性组合、线性表出的概念

设给定向量β，向量组$\alpha_1, \dots, \alpha_m$, 若存在数 $k_1, \dots, k_m$使得

$$\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m,$$

则称向量β为向量组$\alpha_1, \alpha_2, \dots,\ \alpha_m$的线性组合,

也称β可由$\alpha_1, \alpha_2, \dots,\ \alpha_m$线性表出.

问题: (1) 如何判断向量β可否由某个向量组线性表出?

(2) 如何计算向量β被某向量组线性表出的关系式?

例1.

(1) 零向量是任一向量组的线性组合.

$$0 = 0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \cdots + 0\alpha_m.$$

(2) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 中任一向量

都可由该向量组自身线性表出.

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \cdots + 0\alpha_{i-1} + 1\alpha_i + 0\alpha_{i+1} + \cdots + 0\alpha_m.$$

(3) 3维几何空间中任一向量可以由 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 线性表出.

$$(a, b, c) = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$$

$L(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$:　$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 线性组合的全体.

$$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)=\{k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m \mid k_1,\cdots,k_m\in\mathbf{R}\}$$

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$;

(2) $L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间;　$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)\neq\varnothing$

$$\forall k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m,\ l_1\alpha_1+\cdots+l_m\alpha_m\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),\ c\in\mathbf{R}$$

$$\Rightarrow (k_1+l_1)\alpha_1+\cdots+(k_m+l_m)\alpha_m\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m),$$

$$ck_1\alpha_1+\cdots+ck_m\alpha_m\in L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m).$$

$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$称为$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$生成的子空间.

(4) $\mathbf{R}^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$，其中

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \varepsilon_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \cdots,\ \varepsilon_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

即，任一n维向量均可由$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$线性表出：

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \cdots + x_n\varepsilon_n.$$

3. 线性表出的充要条件和计算

定理1. 设 $A=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$，则如下条件等价：

(1) $b\in L(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ (2) $AX=b$ 有解； (3) $R(A)=R(\overline{A})$.

证： $(1)\Leftrightarrow(2)$ $b\in L(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$

$$\Updownarrow$$

有数 $x_1,\dots,x_n$ 使得 $\boxed{x_1\alpha_1+\cdots+x_n\alpha_n=b}$

$$\Updownarrow$$

有数 $x_1,x_2,\dots,x_n$ 使得 $\boxed{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=b,}$

$$\Updownarrow$$

$AX=b$ 有解

定理1. 设 $A=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$，则如下条件等价：

(1) $b \in L(a_1, \dots, a_n)$ (2) $AX=b$ 有解； (3) $R(A)=R(\overline{A})$.

(2)⇔(3)

设 $R(A)=r$,

$$\overline{A}=(A\,|\,b)\xrightarrow{\text{行初等变换}}\left(\begin{array}{ccccc|c} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ & & & & 0 & d_{r+1} \\ & & O & & & \\ & & & & & \end{array}\right)=(B\,|\,d).$$

$AX=b$ 与 $BX=d$ 同解，所以

$$AX=b\text{有解} \Leftrightarrow d_{r+1}=0 \Leftrightarrow R(B\,|\,d)=R(B)=r$$

$$\Leftrightarrow R(\overline{A})=R(A)$$

例2. 将$b=\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$用$\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$线性表出.

解:

$$(A|b)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|b)=\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&1&1\\1&0&1&0\\1&1&0&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\1&1&0&-4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&1&-1&-4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&1\\0&0&-2&-5\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&-\frac{5}{2}\\0&1&0&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{5}{2}\end{array}\right)$$

$$\Rightarrow b=-\frac{5}{2}\alpha_1-\frac{3}{2}\alpha_2+\frac{5}{2}\alpha_3$$

二、向量组之间的线性表出

1. 定义与性质

向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$； II: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$；

若组I中每一个向量都可由组II中的向量线性表出，

则称组I可由组II线性表出.

若组I与组 II可以互相线性表出，则称组I与组II等价.

向量组等价的性质：

反身性：每一向量组都与自身等价；

对称性： I与II等价，则II与I等价；

传递性： I与II等价，II与III等价，则I与III等价.

2. 向量组线性表出的矩阵形式:

设向量组II: $b_1, \ldots, b_s$ 可由I: $a_1, \ldots, a_r$线性表出, 则:

$$b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{r1}a_r$$

$$b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{r2}a_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_s = k_{1s}a_1 + k_{2s}a_2 + \cdots + k_{rs}a_r$$

$$\Rightarrow (b_1, b_2, \cdots, b_s) = (a_1, a_2, \cdots, a_r)\underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rs} \end{pmatrix}}_{K_{r\times s}}$$

线性表出的系数矩阵

3. 矩阵乘积导出的线性表出

设 $A_{m\times r}B_{r\times s}=C_{m\times s}$, 写成分块矩阵形式:

$$(a_1,a_2,\cdots,a_r)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$$

$$\Rightarrow c_1=b_{11}a_1+b_{21}a_2+\cdots+b_{r1}a_r$$

$$c_2=b_{12}a_1+b_{22}a_2+\cdots+b_{r2}a_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_s=b_{1s}a_1+b_{2s}a_2+\cdots+b_{rs}a_r$$

因此，乘积C的列向量组可由A的列向量组线性表出.

对称的，乘积C的行向量组可由B的行向量组线性表出.

三、线性相关性的概念

考虑线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, & (1) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, & (2) \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. & (3) \end{cases}$$

观察: $2\times(1)+(2)=(3)$

解释: ◆ 方程(3)可由方程(1)(2)线性表出;

◆ 方程(3)在方程组中"多余",去掉该方程不影响方程组的求解.

问题: 能否用数学概念描述方程组中存在多余的方程?

定义: 给定向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$,

若存在**不全为零**的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0,$$

则称$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ **线性相关**; 否则, 称 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ **线性无关.**

特殊情形:

(1) 单个向量α:

α 线性相关 (无关) $\Leftrightarrow$ $\alpha = 0$ ($\alpha \neq 0$) ;

(2) 两个向量α_1, α_2 :

α_1, α_2线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ 对应分量(不)成比例.

例1. n维单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证: 设$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=0,$

$$\Rightarrow x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ $\Rightarrow \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证明向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性无关的方法:

设 $x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$, 设法证明 $x_1=\ldots=x_m=0$.

例2. 含有零向量的向量组线性相关.

证: 存在不全为0的数1, 0, ..., 0, 使得

$$1\,\mathbf{0} + 0\alpha_1 + \ldots + 0\alpha_m = 0.$$

例3. 含有重复向量的向量组线性相关.

证: 设给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta, \beta$

存在不全为0的数0, 0, ..., 0, 1, −1 使得:

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \ldots + 0\alpha_m + 1\beta + (-1)\beta = 0.$$

四. 线性相关性的判定

基本问题:

(1) 如何有效判断向量组的线性相关性?

(2) 线性相关性与线性方程组求解有何关系?

(3) 线性相关性与矩阵的秩, 行列式有何关系?

定理2. 设 $A_{m\times n}=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关;

(2) $AX=0$有非零解;

(3) $R(A)<n$.

证: (1) $\Leftrightarrow$ (2):

$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 有不全为零的数 $k_1, \ldots, k_n$使 $k_1\alpha_1+\cdots+k_n\alpha_n=0$,

$\Leftrightarrow$ 有不全为零的数 $k_1, \ldots, k_n$使

$$\underbrace{(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}}_{K}=0, \quad \Leftrightarrow \quad AX=0\text{有非零解}K=\begin{pmatrix}k_1\\ \vdots\\ k_n\end{pmatrix}.$$

(2) $\Leftrightarrow$ (3): 设 $\mathrm{R}(A)=r$,

$$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1s} & \cdots & c_{1n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ & & c_{rs} & \cdots & c_{rn} \\ & O & & & \end{pmatrix} = B.$$

则$AX=0$与$BX=0$ 同解.

$AX=0$有非零解

$\Leftrightarrow BX=0$有非零解

$\Leftrightarrow r<n$

向量个数 = 向量维数:

推论1. 设 $A_{m\times n}=(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) $AX=0$ 只有零解;

(3) $\mathrm{R}(A)=n$;

(4) $\det A \neq 0$;

(5) A 可逆.

几何应用:

在 R^3 中, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关

$\Leftrightarrow \det(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)=0$

$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 共面.

推论2. 向量个数 >向量维数 的向量组必线性相关.

证: 设 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{m\times n}$, $n>m$, 则

$$R(A)\le m<n,$$

所以 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性相关.

特别的: 任意 $n+1$ 个 n 维向量必线性相关.

任意4个3维向量必线性相关.

例4. 判断向量组$\alpha_1=(0,1,1)$, $\alpha_2=(1,0,1)$, $\alpha_3=(1,1,0)$的线性相关性：

分析：3个3维向量的相关性判定 $\begin{cases} \text{行列式}=0? \\ \text{矩阵秩}<3? \end{cases}$

解1:

$$\left|\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T\right| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

解2:

$$A = \left(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$，所以$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

例5. 设 $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ 线性无关}}$, 证明:

$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_3 + \alpha_1$ 线性无关.

证1: 设 $x_1 \beta_1 + x_2 \beta_2 + x_3 \beta_3 = 0,$

即 $x_1 (\alpha_1 + \alpha_2) + x_2 (\alpha_2 + \alpha_3) + x_3 (\alpha_3 + \alpha_1) = 0.$

即 $(x_1 + x_3) \alpha_1 + (x_1 + x_2) \alpha_2 + (x_2 + x_3) \alpha_3 = 0.$

因为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，所以:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \quad (*) \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \qquad \because \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0,$$

所以 $x_1 = x_2 = x_3 = 0.$ 故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

例5. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，证明：

$\boxed{\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1}$ 线性无关.

证2: 不妨设给定的都是列向量组.

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2, \beta_2=\alpha_2+\alpha_3, \beta_3=\alpha_3+\alpha_1 \Rightarrow$$

$$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\beta_3)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}}_{K} \qquad \begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow K\text{可逆} \Rightarrow R(B)=R(A)\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性无关} \Rightarrow R(A)=3\end{array}\right\} \Rightarrow R(B)=3$$

故 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性无关.

推论3. 设矩阵$A=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$经由一系列初等行变换

变成矩阵$B=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)$, 则向量组

$$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n \text{ 与 } \beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$$

有相同的线性相关性.

即：初等行变换不改变列向量组的线性相关性, 所以

可用初等行变换判断列向量组线性相关性.

说明： 定理及其推论描述了线性相关性、线性表出、方程组求解以及矩阵秩之间的联系

五. 线性相关基本定理

$$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0 \Leftrightarrow k_1\alpha_1^T+\cdots+k_m\alpha_m^T=0$$

行向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 与列向量组 $\alpha_1{}^T, \ldots, \alpha_m{}^T$

具有相同的线性相关性

结论: 只需讨论列向量组的线性相关性.

问题:

(1) 线性相关性与线性表出有何关系?

(2) 线性相关性的具体意义何在?

定理3. 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性相关，

则$\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_n$线性相关.

证： $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性相关，

存在不全为零的数$k_1, \ldots, k_m$使得

$$k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m = 0.$$

$$\Rightarrow k_1\alpha_1 + \ldots + k_m\alpha_m + 0\alpha_{m+1} + \ldots + 0\alpha_n = 0.$$

$k_1, \ldots, k_m, 0, \ldots, 0$不全为零，故$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$线性相关.

部分相关，则整体相关
整体无关，则部分无关

定理4. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 某个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

证: " $\Leftarrow$ " 不妨设 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出

$$\Rightarrow \exists k_2, \cdots, k_m,\ s.t.$$

$$\alpha_1 = k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$$

$$\Rightarrow -1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m = 0$$

$-1, k_2, \cdots, k_m$ 不全为零

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关.

定理4. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 某个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

"$\Rightarrow$" 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关,

则有不全为零的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得:

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_m\alpha_m = 0.$$

不妨设 $k_1 \neq 0$, 则:

$$\alpha_1 = -\frac{k_2}{k_1}\alpha_2 - \cdots - \frac{k_m}{k_1}\alpha_m,$$

即 α_1 可由 $\alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表出.

定理4. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关

$\Leftrightarrow$ 某个向量可由其余 $m-1$ 个向量线性表出.

逆否命题:

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关 $\Leftrightarrow$

任一向量都不能由其余向量线性表出.

线性相关的意义:

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性相关 $\Leftrightarrow$ 某个向量多余.

$\alpha_1, \ldots, \alpha_m\ (m\geq 2)$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 任一向量都不多余.

定理5. 若$\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ 线性无关},}$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 线性相关,

则β可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$惟一线性表出.

证: **可表出性:** 因$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$线性相关,

有不全为零的数 $k_1, k_2, \ldots, k_m, k$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m + k\beta = 0.$$

若$k=0$, 则 $\left.\begin{array}{r} k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \ldots + k_m\alpha_m = 0 \\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ 线性无关} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$$k = k_1 = k_2 = \ldots = k_m = 0, \text{ 矛盾!}$$

所以$k \neq 0$, $\Rightarrow \beta = -\dfrac{k_1}{k}\alpha_1 - \dfrac{k_2}{k}\alpha_2 - \cdots - \dfrac{k_m}{k}\alpha_m.$

定理5. 若 $\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \text{ 线性无关,}}$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$ 线性相关,

则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 惟一线性表出.

惟一性: 设 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_m\alpha_m$,

$$\beta = l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m,$$

$\boxed{k_i = l_i\,?}$

$$\Rightarrow 0 = (k_1 - l_1)\alpha_1 + (k_2 - l_2)\alpha_2 + \cdots + (k_m - l_m)\alpha_m,$$

因 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ 线性无关, 所以

$$k_1 - l_1 = k_2 - l_2 = \cdots = k_m - l_m = 0,$$

$\Rightarrow k_1 = l_1, \cdots, k_m = l_m$. 故表式惟一.

例6. 设$\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性相关}}$，$\boxed{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{线性无关}}$，证明：

(1) α_1可由α_2, α_3线性表出；

(2) α_4不可由$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性表出.

证：(1)

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{线性无关} \Rightarrow \alpha_2, \alpha_3 \text{线性无关} \\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性相关} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_1 \text{可由} \alpha_2, \alpha_3 \text{线性表出.}}$$

(2) 反证：

$$\left.\begin{array}{r} \text{设} \alpha_4 \text{可由} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性表出} \\ \alpha_1 \text{可由} \alpha_2, \alpha_3 \text{线性表出} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \alpha_4 \text{可由} \alpha_2, \alpha_3 \text{线性表出} \\ \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \text{线性无关} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{矛盾！}$$

$$\boxed{\text{故} \alpha_4 \text{不可由} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{线性表出！}}$$