第二讲 正定二次型

正定二次型的概念

正定二次型的性质（1）

正定二次型的性质（2）

➤ 二次型的其它类型

内容小结

四、二次型的其它类型

复习：

1. 正定二次型的概念

$f(X)=X^TAX$正定 $\Leftrightarrow \forall X\neq 0$，都有 $f(X)>0.$

2. 正定矩阵的充要条件

定理3 对于实对称矩阵 A，以下命题等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A的特征值全为正实数；

(3) A与单位矩阵合同；

(4) A的各阶顺序主子式全大于零.

定义 对于二次型 $f(X)=X^TAX$ 及任意非零实向量 X，

(1) 如果 $f(x)=X^TAX<0$，则称 $f(X)$ 是负定二次型；

(2) 如果 $f(x)=X^TAX\geq 0$，则称 $f(X)$ 是半正定二次型；

(3) 如果 $f(x)=X^TAX\leq 0$，则称 $f(X)$ 是半负定二次型；

(4) 不是正定, 半正定, 负定, 半负定的二次型称为不定二次型.

对应的矩阵分别称为

(1) A负定矩阵；　(2) A半正定矩阵；

(3) A半负定矩阵；(4) A不定矩阵.

由定义知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 是半正定二次型，

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$$ 是不定二次型.

与正定矩阵对应，负定矩阵有如下定理：

定理4 对于实对称矩阵A，下列命题等价：

(1) A是负定矩阵；

(2) A的特征值全为负实数；

(3) A与$-I$合同；

(4) A的顺序主子式负正相间：

$$(-1)^k P_k > 0,\ (k = 1,2,\cdots,\ n)$$

证 $\because$ A负定$\Leftrightarrow -A$正定.

由定理3 可得以上结论.

例 求参数 t 的范围,使下面二次型是负定二次型.

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+2tx_1x_2+2tx_1x_3+2x_2x_3$$

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-2 & t & t\\ t & -2 & 1\\ t & 1 & -2\end{pmatrix}$$

A的各阶顺序主子式为

$$P_1=-2,\quad P_2=4-t^2,\quad P_3=6(t^2-1),$$

二次型负定的充要条件为 $P_1<0, P_2>0, P_3<0$

即为$-1<t<1.$

主要内容

1.二次型的其它类型；

2. 负定二次型的判定.

练习

设A是n阶负定矩阵，P是n阶方阵，$B = P^{T}AP$，试问：B是何种类型的矩阵？

答案 若P可逆，则B是负定矩阵；

若P不可逆，则B是半负定矩阵.