四. 矩阵的标准形（分解）

定理2 对任意矩阵$A_{m\times n}$，都存在可逆矩阵$P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q, \quad R(A) = r$$

其中$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$称为$A$的标准形. 即任何矩阵都等价于其标准形.

(问：矩阵等价的充要条件是什么？)

(A与B等价$\Leftrightarrow$存在可逆的P,Q使得$A=PBQ$)

即，存在可逆矩阵K,S使得 $KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$，$R(A) = r$

证. $A \xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 简化行阶梯型 $\xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$r = R(A)$. **（为什么？）**

存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_k; F_1, \ldots, F_s$使得

$$(E_k \cdots E_1)A(F_1 \cdots F_s) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

存在可逆矩阵$K = E_1, \ldots, E_k; S = F_1, \ldots, F_s$使得

$$KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

推论. 同型矩阵A与B等价的充要条件是R(A)=R(B).

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\3&6&2&0\end{pmatrix}$, 求$A$的标准形.

解

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&0&0\\0&0&-10&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&-10&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}, R(A)=2.$$

标准形为$\begin{pmatrix}I_2&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

[结束]