设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$ 的行列式为-1, A^*有一个特征值λ_0, 属于λ_0的一个特征向量为$\alpha=(-1,-1,1)^T$, 求a,b,c和λ_0的值.

[解析]　A^*有一个特征值$\lambda_0 \Rightarrow A^*\alpha=\lambda_0\alpha$

左乘A:　$AA^*\alpha=\lambda_0 A\alpha \Rightarrow \lambda_0 A\alpha=|A|\alpha=-\alpha$

$|A|=-1\Rightarrow A$可逆, A^*可逆, $\lambda_0\neq 0$

$\Rightarrow A\alpha=-\dfrac{1}{\lambda_0}\alpha$

$$A\alpha=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-a+c \\ -2-b \\ c-1-a \end{pmatrix}=-\frac{1}{\lambda_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$ 的行列式为 -1, A^* 有一个特征值 λ_0, 属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,-1,1)^T$, 求 a,b,c 和 λ_0 的值.

[解析] $A\alpha=\begin{pmatrix} 1-a+c \\ -2-b \\ c-1-a \end{pmatrix}=-\dfrac{1}{\lambda_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1-a+c=-2-b, \\ 1-a+c=a+1-c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3 \\ a=c \end{cases}$

$\Rightarrow A\alpha=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=-\dfrac{1}{\lambda_0}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_0=-1$

$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ 5 & -3 & 3 \\ 1-a & 0 & -a \end{vmatrix}=\text{L}=\begin{vmatrix} a & a-1 & a \\ 5 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-3a+5=-1 \Rightarrow a=2$

$\boxed{\Rightarrow a=c=2, b=-3, \lambda_0=-1}$