第二讲 向量的乘法

内 积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外 积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

复习:

(1)内积的概念

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}, \qquad \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{b}\cdot\vec{e}_a$$

(2)运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}) = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$

2.内积的坐标形式

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ ，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ ，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$\Big\downarrow\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

两向量的夹角公式

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

特别：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$

例 1. 已知$\vec{a}=(1,1,-4)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, 求(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；(2) $\vec{a}$与 $\vec{b}$ 的夹角；(3) $\vec{a}$在 $\vec{b}$ 上的投影.

解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}},\qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{e}_b=-3.$

两个重要不等式

(1) 柯西—许瓦兹不等式(*Cauchy-Schwarz inequality*)

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \quad 或 \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \le \|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 .$$

$$(\because \vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta\,)$$

(2) 三角不等式

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$$

证 $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

$$\leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

$$\leq \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$$

$$= (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

所以 $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

同理可证: $\|\vec{a}-\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

主要
内容

内积的坐标形式

1. 运算；　2. 两个不等式.

练习 1. 设 $\vec{a}=(-2,2,1)$, $\vec{b}=(1,3,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,12)$, $\vec{d}=-2\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$, 则 $\mathrm{Pr}\,j_{\vec{a}}\vec{d}=$ ________

答案：$\mathrm{Pr}\,j_{\vec{a}}\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{e}_a=-\dfrac{4}{3}$.

2. 设 $\vec{a}=(3,5,-2)$, $\vec{b}=(2,1,4)$, 若 $(\lambda\vec{a}+\vec{b})\perp z$轴，则 $\lambda=$ ____.

答案：　2

<<　*　>>