三. 行列式的计算

例7. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -3 \\ -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$，求 $\det A$.

解.

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & -2 & 23 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 7 \\ 0 & 10 & -17 \\ 0 & 0 & \frac{196}{10} \end{vmatrix}=196$$

例8. 计算 $D=\begin{vmatrix}1&4&-1&4\\2&1&4&3\\4&2&3&11\\3&0&9&2\end{vmatrix}$

解.

$$D=\begin{vmatrix}-7&0&-17&-8\\2&1&4&3\\0&0&-5&5\\3&0&9&2\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-7&-17&-8\\0&-5&5\\3&9&2\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}-7&-25&-8\\0&0&5\\3&11&2\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}-7&-25\\3&11\end{vmatrix}=10$$

例9. 计算 $D_n=\begin{vmatrix} x & y & \cdots & y \\ y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y & y & \cdots & x \end{vmatrix}$

解（逐列相加）

$$D_n=\begin{vmatrix} x+(n-1)y & y & \cdots & y \\ x+(n-1)y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x+(n-1)y & y & \cdots & x \end{vmatrix}=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 1 & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & y & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$=(x+(n-1)y)\begin{vmatrix} 1 & y & \cdots & y \\ 0 & x-y & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-y \end{vmatrix}=\left[x+\left(n-1\right)y\right]\left(x-y\right)^{n\text{-}1}$$

例10. 证明范德蒙行列式($n\geq 2$)

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i - x_j),$$

证 $n = 2$: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = x_2 - x_1$, 结论成立

设对于n-1阶结论成立，对于n阶：

$$V_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}x_2-x_1 & x_3-x_1 & \cdots & x_n-x_1\\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_2^{n-2}(x_2-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1)\end{vmatrix}$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2}\end{vmatrix}$$

n-1阶范德蒙行列式

$$V_n=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\cdots(x_n-x_1)\prod_{2\le j<i\le n}(x_i-x_j)=\prod_{1\le j<i\le n}(x_i-x_j)$$

例11

$$D=\begin{vmatrix} a & a^2 & a^3 & a^4 \\ b & b^2 & b^3 & b^4 \\ c & c^2 & c^3 & c^4 \\ d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix} = abcd\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

$$=abcd\quad(d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

例12. 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$

解. 加边法

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}a_i & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1+\sum_{i=1}^{n}a_i
$$

其它方法

$$
\begin{vmatrix} 1+a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & 1+a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}
$$

拆边法

逐行（列）相加法

先猜测，后归纳

[结束]