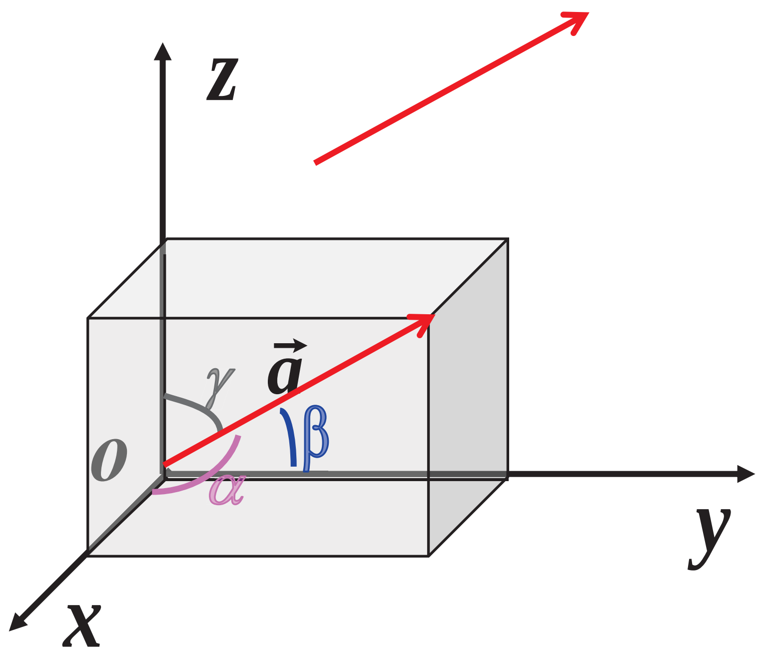
第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系
- 向量及其线性运算
- 向量在轴上的投影
- 向量线性运算的几何意义
- ➤ 向量的方向余弦
- 内容小结

五、向量的方向余弦

非零向量 $\vec{a}$ 与三条坐标轴的正向的夹角称为**方向角**.

$$\alpha = <\vec{a}, \vec{i}>, \ \beta = <\vec{a}, \vec{j}>, \ \gamma = <\vec{a}, \vec{k}>,$$

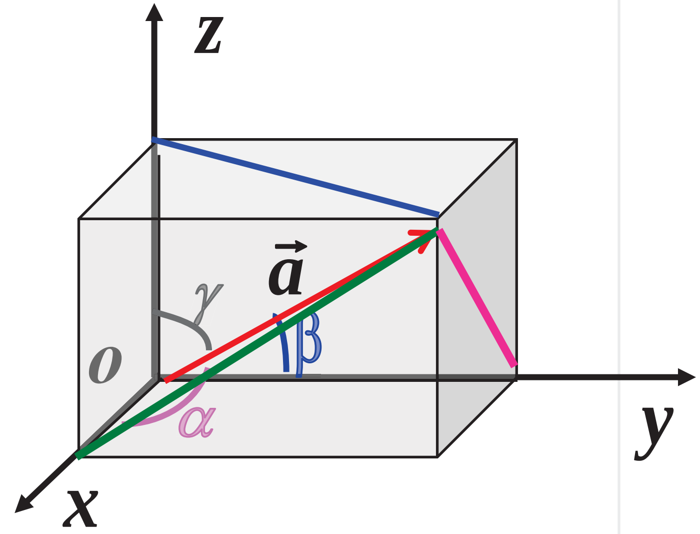


$$0 \le \alpha \le \pi,$$

$$0 \le \beta \le \pi,$$

$$0 \le \gamma \le \pi.$$

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$



由图示可知

$$\cos\alpha=\frac{a_1}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}=\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\beta=\frac{a_2}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}=\frac{a_2}{\|\vec{a}\|}$$

$$\cos\gamma=\frac{a_3}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}}=\frac{a_1}{\|\vec{a}\|}$$

$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 称为向量 $\vec{a}$ 的方向余弦.

由此可得

$$\vec{e}_a = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = (\cos\alpha,\ \ \cos\beta,\ \cos\gamma).$$

或 $\vec{a} = \|\vec{a}\|(\cos\alpha,\ \ \cos\beta,\ \cos\gamma).$

方向余弦的性质:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

例 1 设有向量$\overrightarrow{P_1P_2}$，已知 $\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = 2$，它与 x 轴和 y 轴的夹角分别为 $\dfrac{\pi}{3}$ 和 $\dfrac{\pi}{4}$，如果 P_1 的坐标为(1,0,3)，求 P_2 的坐标.

解 设向量$\overrightarrow{P_1P_2}$的方向角为 α、β、γ

$$\alpha = \frac{\pi}{3}, \quad \cos\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{\pi}{4}, \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\because \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \quad \therefore \cos\gamma = \pm\frac{1}{2}.$$

设P_2的坐标为(x,y,z),

$$\overrightarrow{P_1P_2}=(x-1,\ y-0,\ z-3)$$

$$=\|\overrightarrow{P_1P_2}\|(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$$

$$=2\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},\pm\frac{1}{2}\right)=(1,\sqrt{2},\pm 1)$$

$\therefore\ x=2,\ y=\sqrt{2},\ z=4$ 或 2

$\therefore\ P_2(2,\sqrt{2},4)$ 或 $(2,\sqrt{2},2)$.

例2 设 $\overrightarrow{OA}$ 与三坐标轴的夹角相等，且 $\|\overrightarrow{OA}\| = \sqrt{3}$，点 B 是点 $M(1,-3,2)$ 关于点 $N(-1,2,1)$ 的对称点，求 $\overrightarrow{AB}$.

解 设 $\overrightarrow{OA} = \sqrt{3}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

由 $\overrightarrow{OA}$ 与三坐标轴的夹角相等，得

$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ 又 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = \pm(1,1,1)$$

设 B 点的坐标为 (x, y, z)，由题意知 N 是 $\overline{MB}$ 的中点，则

$$-1=\frac{1+x}{2},\quad 2=\frac{-3+y}{2},\quad 1=\frac{2+z}{2}$$

$$\Rightarrow x=-3,\ y=7,\ z=0.$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OB}=(-3,7,0)$$

(1) 若 $\overrightarrow{OA}=(1,1,1)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,7,0)-(1,1,1)=(-4,6,-1);$$

(2) 若 $\overrightarrow{OA}=-(1,1,1)$, 则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-3,7,0)+(1,1,1)=(-2,8,1).$$

主要内容

向量的方向余弦

1. 方向余弦的计算；

2. 方向余弦的性质.

练习　已知点$A(1,2,-1)$与点$B(0,1,3)$, 则与向量 $\overrightarrow{AB}$ 平行的单位向量为________________

答案: $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{6}(1,1,-4)$