曲线的曲率

一、弧微分及其计算

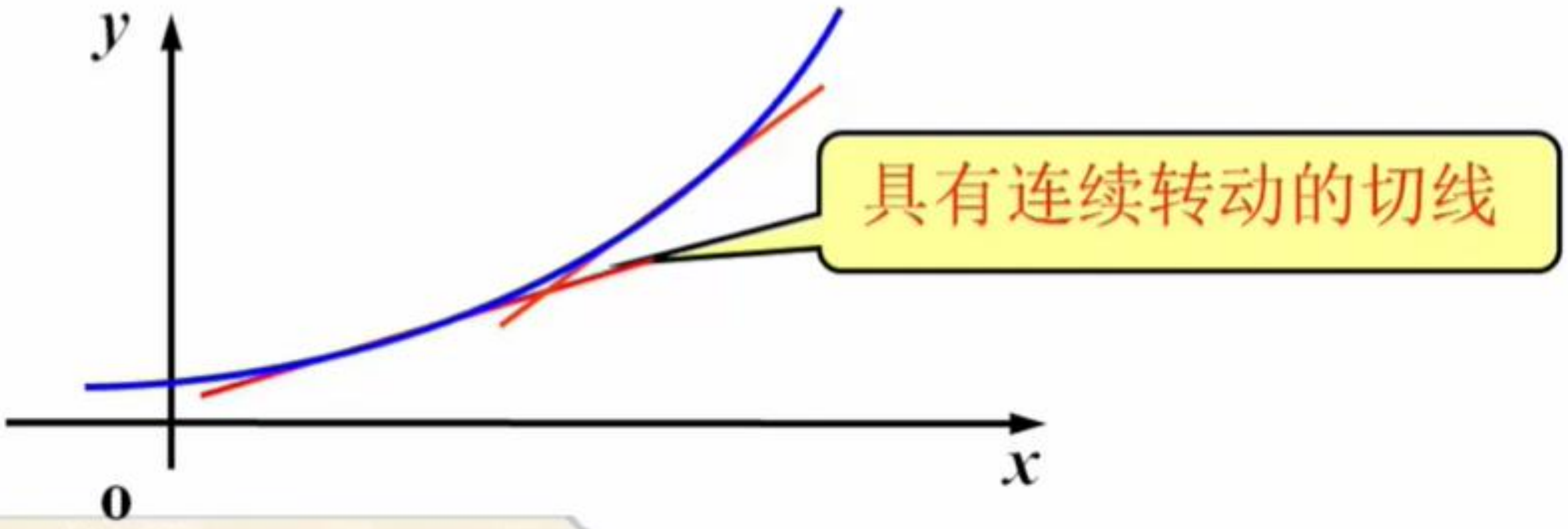
二、曲率及其计算公式

三、曲率圆和曲率半径

一、弧微分及其计算

曲线弧长的微分称为弧微分.

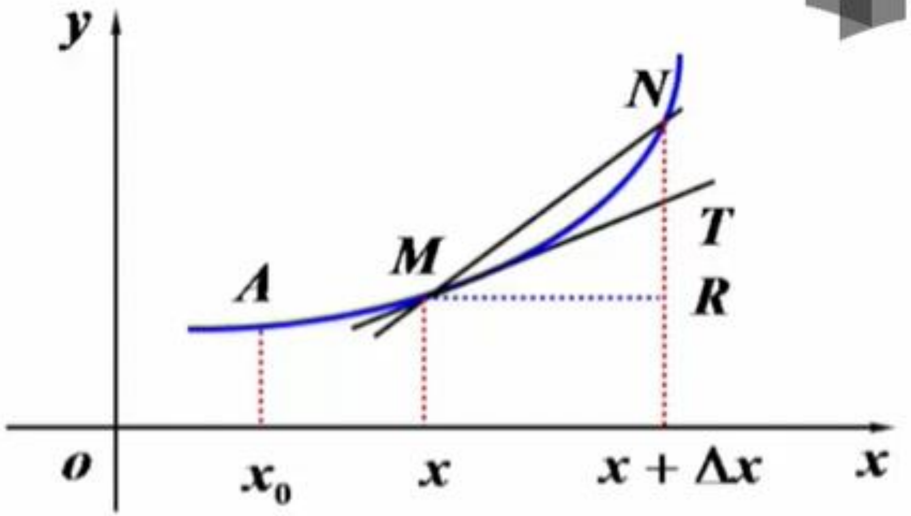
设曲线$y=f(x)$在区间(a, b)内具有连续导数，则称曲线$y=f(x)$在区间(a, b)内为光滑曲线.



设函数$f(x)$在区间(a,b)内具有连续导数.

基点：$A(x_0, y_0)$,

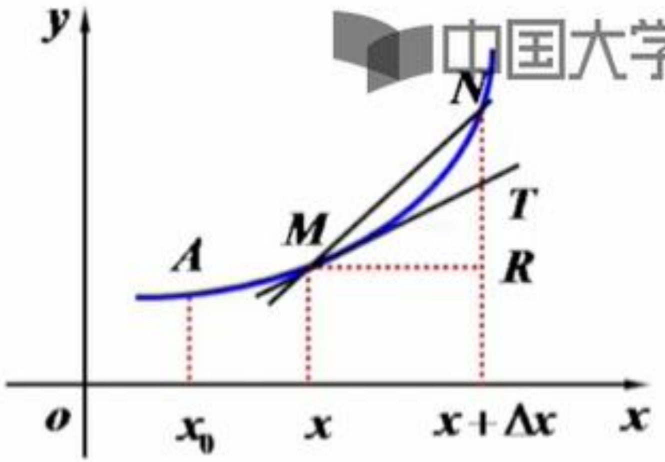
$M(x,y)$为任意一点,



规定：(1) x增大的方向规定为曲线的**正方向**;

(2) s为有向弧段的值. 当$\overset{\frown}{AM}$的方向与曲线正向一致时,s取正号,相反时,s取负号.

1.直角坐标系下的弧 微分



设$N(x+\Delta x, y+\Delta y)$， 如图，

$|MN| < \overset{\frown}{MN} < |MT| + |NT|$ 当$\Delta x \to 0$时，

$$|MN| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{1 + (\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}|\Delta x| \to \sqrt{1+y'^2}|dx|,$$

$$\overset{\frown}{MN} = |\Delta s| \to |ds|, \quad |MT| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1+y'^2}|dx|,$$

$$|NT| = |\Delta y - dy| \to 0, \quad 故\ |ds| = \sqrt{1+y'^2}|dx|.$$

记住弧微分公式

$\because s = s(x)$为单调增函数， $\begin{cases} ds = \sqrt{1+y'^2}\ dx \\ ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} \end{cases}$

2.曲线 为参数方程式的弧微分

若 L: $\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases} \quad t_1 \le t \le t_2,$

则 $ds=\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

或 $ds=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt$

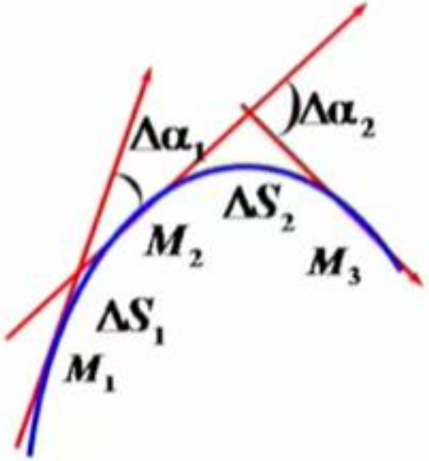
3.曲线 为极坐标形式：$r=r(\theta), \qquad \alpha \le \theta \le \beta.$

$$\begin{cases} x=r(\theta)\cos\theta, \\ y=r(\theta)\sin\theta. \end{cases} \Rightarrow ds=\sqrt{r^2(\theta)+r'^2(\theta)}\,d\theta.$$

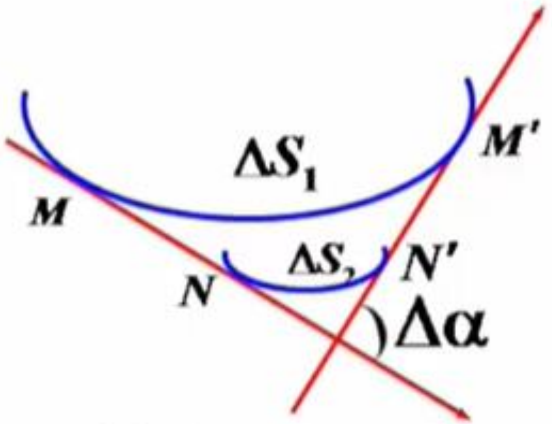
二、曲率及其计算公式

1.曲率的定义

曲率是描述曲线局部性质（弯曲程度）的量。



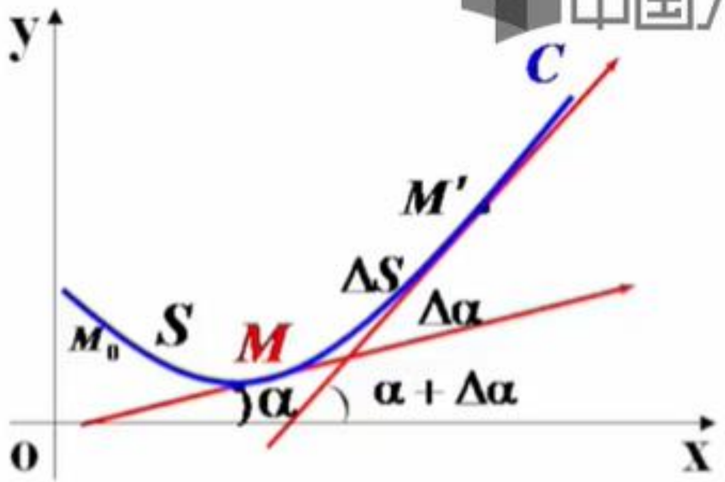
弧段弯曲程度
越大转角越大



转角相同弧段越
短弯曲程度越大

设曲线C是光滑的，M_0 是基点.

$|\overset{\frown}{MM'}| = |\Delta s|$, $M \to M'$ 切线转角为 $|\Delta\alpha|$.



定义

弧段$\overset{\frown}{MM'}$的平均曲率为 $\bar{K} = \left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$.

曲线C在点M处的曲率 $K = \lim\limits_{\Delta s \to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$

在 $\lim\limits_{\Delta s \to 0}\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \dfrac{d\alpha}{ds}$ 存在的条件下，$K = \left|\dfrac{d\alpha}{ds}\right|$.

注意：(1) 直线的曲率处处为零；

(2) 圆上各点处的曲率等于半径的倒数，且半径越小，曲率越大。

2.曲率的计算公式

设 $y = f(x)$ 二阶可导，$\because \tan\alpha = y'$，

有 $\alpha = \arctan y'$，$d\alpha = \dfrac{y''}{1+y'^2}dx$，

$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx$. $\therefore k = \dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$.

例1 抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 上哪一点的曲率最大？

解 $y' = 2ax + b$, $y'' = 2a$,

$$\therefore k = \frac{|2a|}{[1 + (2ax + b)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

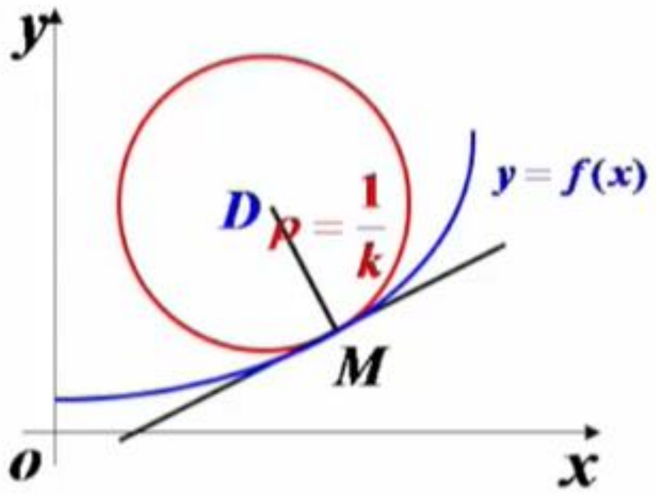
显然，当 $x = -\dfrac{b}{2a}$ 时，k 最大.

又 $\because (-\dfrac{b}{2a}, -\dfrac{b^2 - 4ac}{4a})$ 为抛物线的顶点,

$\therefore$ 抛物线在顶点处的曲率 最大.

三、曲率圆与曲率半径

定义 设曲线 $y=f(x)$ 在点 $M(x,y)$ 处的曲率为 $k(k\neq 0)$. 在点 M 处的曲线的法线上, 在凸的一侧取一点 D,



使 $|DM|=\dfrac{1}{k}=\rho$. 以 D 为圆心, ρ 为半径作圆(如图), 称此圆为曲线在点 M 处的曲率圆.

D ---曲率中心, ρ ---曲率半径.

注意:

1. 曲线上一点处的曲率半径与曲线在该点处的曲率互为倒数。

$$\text{即 } \rho=\frac{1}{k}, k=\frac{1}{\rho}.$$

2. 曲线上一点处的曲率半径越大，曲线在该点处的曲率越小；曲率半径越小，曲率越大。

3. 曲线上一点处的曲率圆弧可近似代替该点附件曲线弧（称为曲线在该点附近的二次近似）.