

# 第三讲 曲面与空间曲线

---

## 曲 面

1.柱面

► 2.旋转曲面

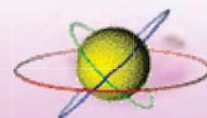
## 空间曲线

1.一般式方程

2.参数式方程

3.空间曲线在坐标面上的投影

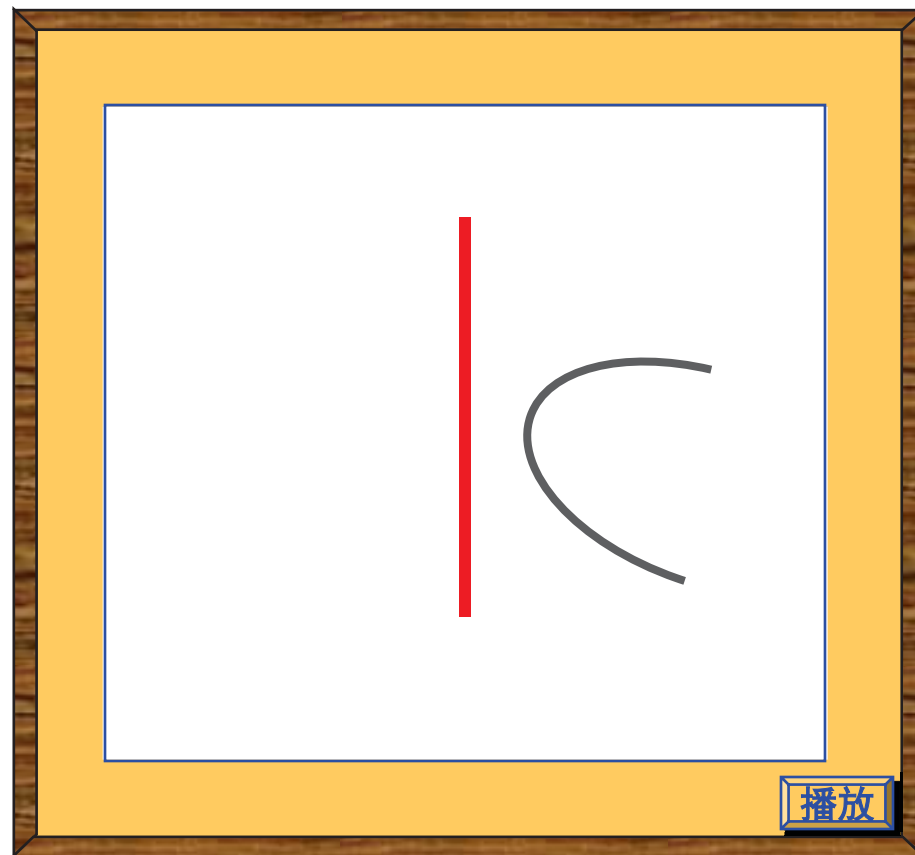
内容小结



## 2. 旋转曲面

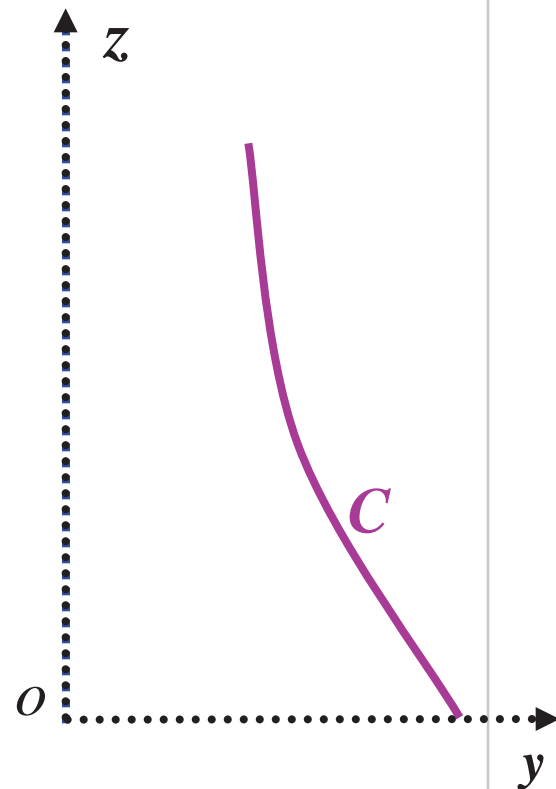
**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 以坐标轴为转轴的旋转面方程

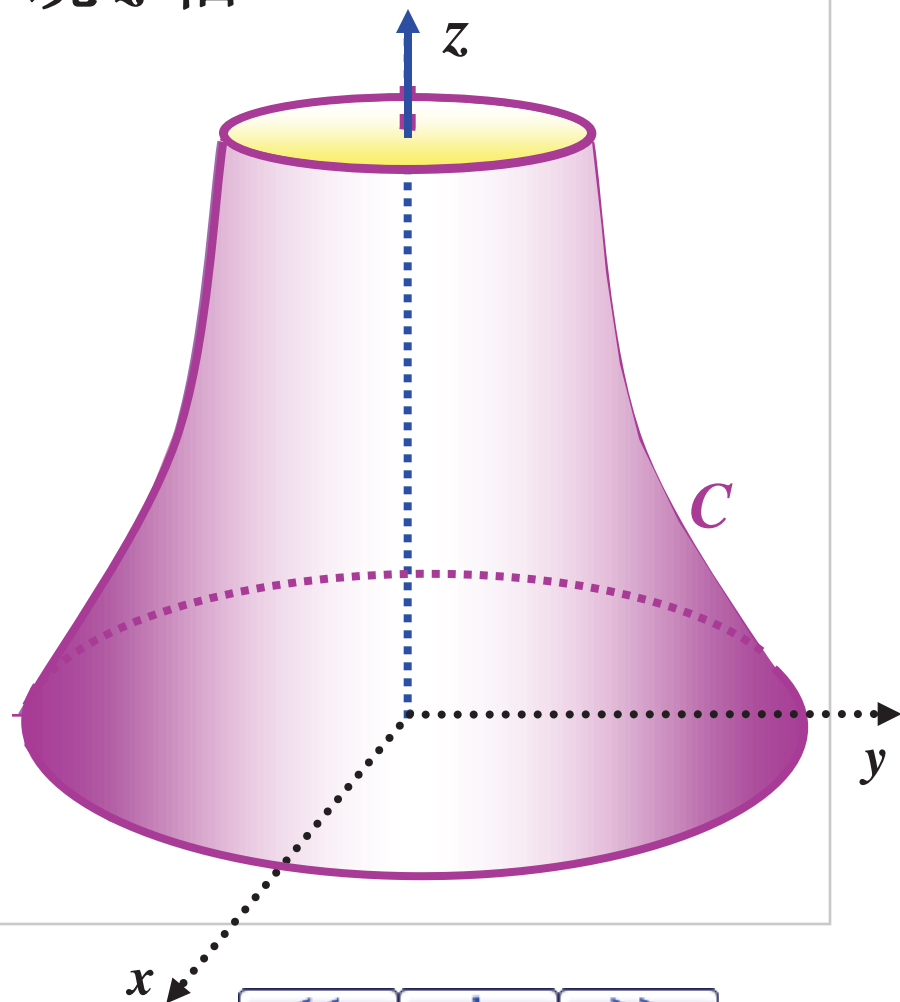
曲线  $C: \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴



## 以坐标轴为转轴的旋转面方程

曲线  $C: \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴

旋转一周得旋转曲面  $S$



## 以坐标轴为转轴的旋转面方程

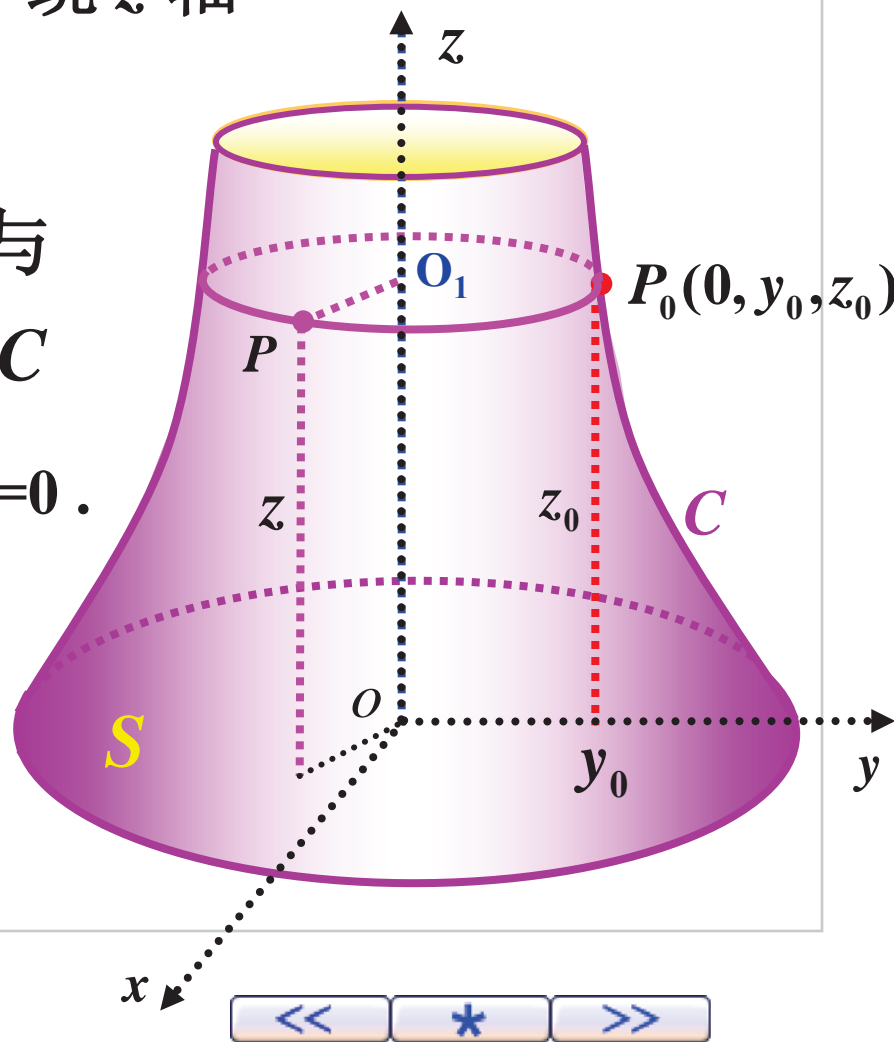
曲线  $C: \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴

旋转一周得旋转曲面  $S$

$\forall P(x, y, z) \in S$ , 过点  $P$  作与  $xoy$  面平行的平面交曲线  $C$  于点  $P_0(y_0, z_0)$ , 则  $f(y_0, z_0) = 0$ .

由于  $z_0 = z$ ,

$$|y_0| = |\overline{PO_1}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



## 以坐标轴为转轴的旋转面方程

曲线  $C: \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴

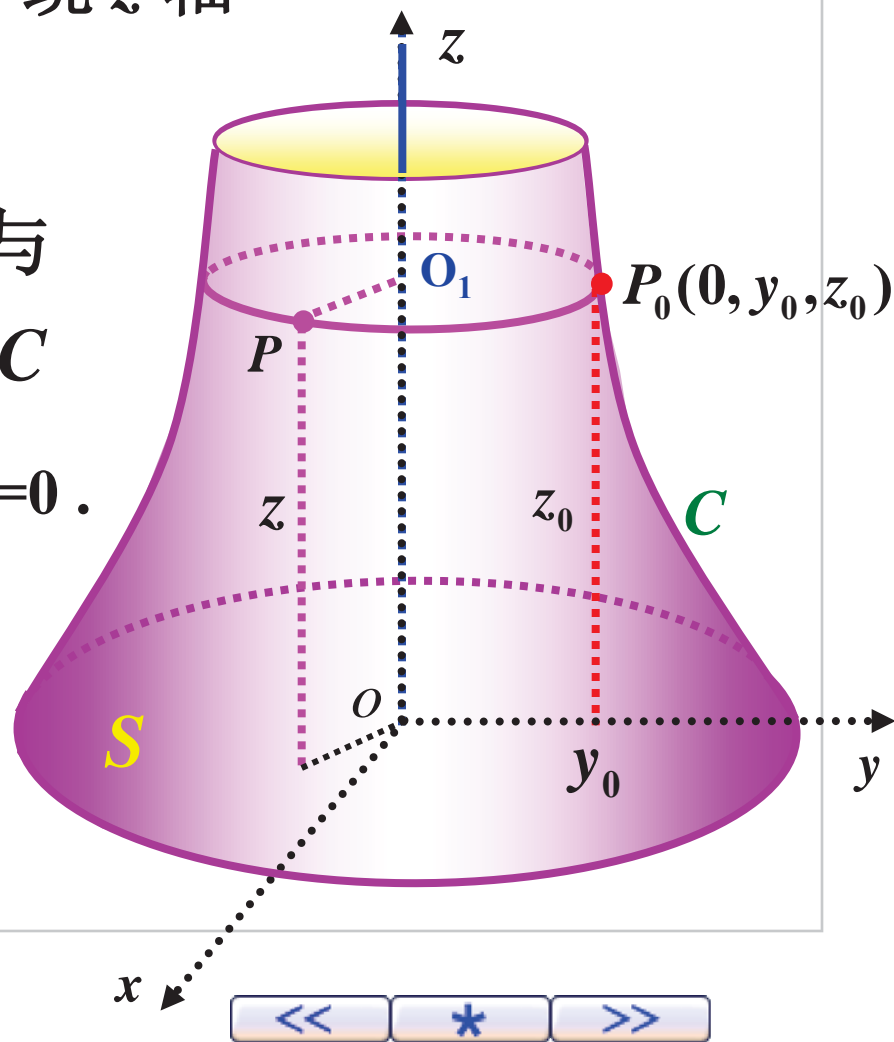
旋转一周得旋转曲面  $S$

$\forall P(x, y, z) \in S$ , 过点  $P$  作与  $xoy$  面平行的平面交曲线  $C$  于点  $P_0(y_0, z_0)$ , 则  $f(y_0, z_0) = 0$ .

由于  $z_0 = z$ ,

$$|y_0| = |\overline{PO_1}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$S: f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$



同理：曲线  $C: \begin{cases} f(y, z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $y$  轴旋转一周的曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0.$$

类似有：平面曲线  $L: \begin{cases} f(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

1° 绕  $x$  轴旋转，得旋转曲面  $f(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ ;

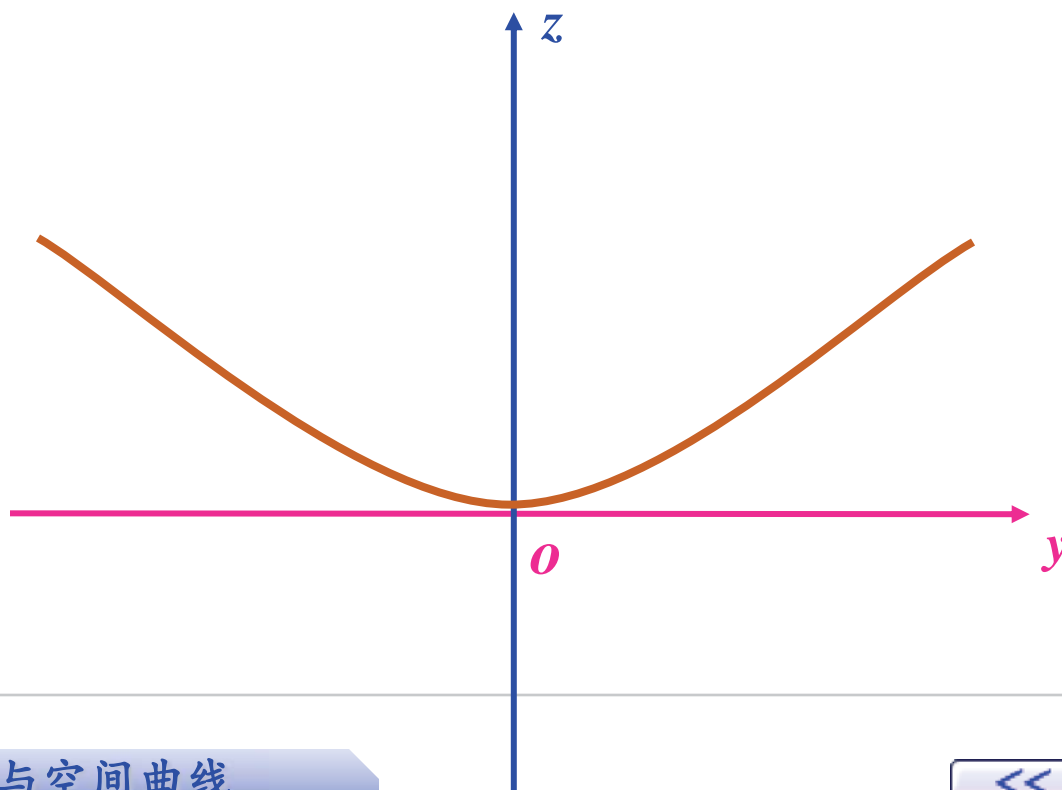
2° 绕  $y$  轴旋转，得旋转曲面  $f(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$ .

同样可讨论平面曲线  $\Gamma: \begin{cases} f(x, z) = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

绕  $x$  轴或  $z$  轴旋转所成的曲面方程.

## 例4 旋转抛物面

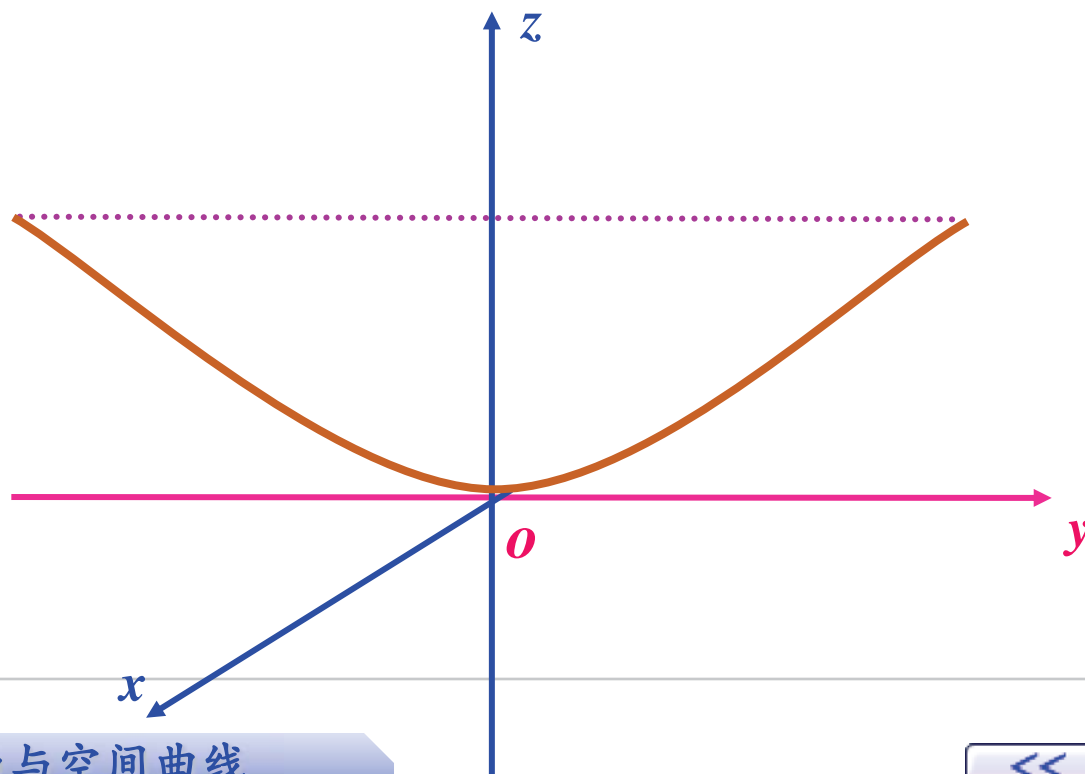
抛物线  $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴一周,





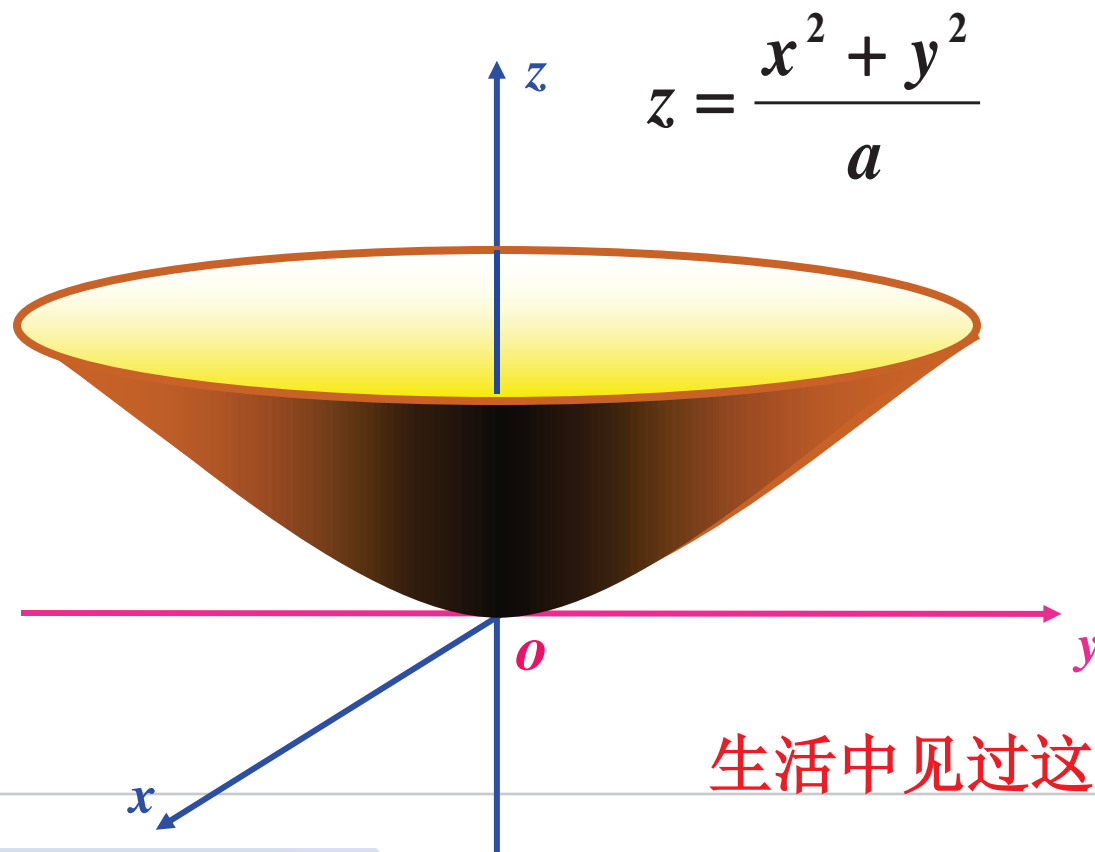
## 例4 旋转抛物面

抛物线  $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴一周,



## 例4 旋转抛物面

抛物线  $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$  绕  $z$  轴一周, 得旋转抛物面



生活中见过这个曲面吗?

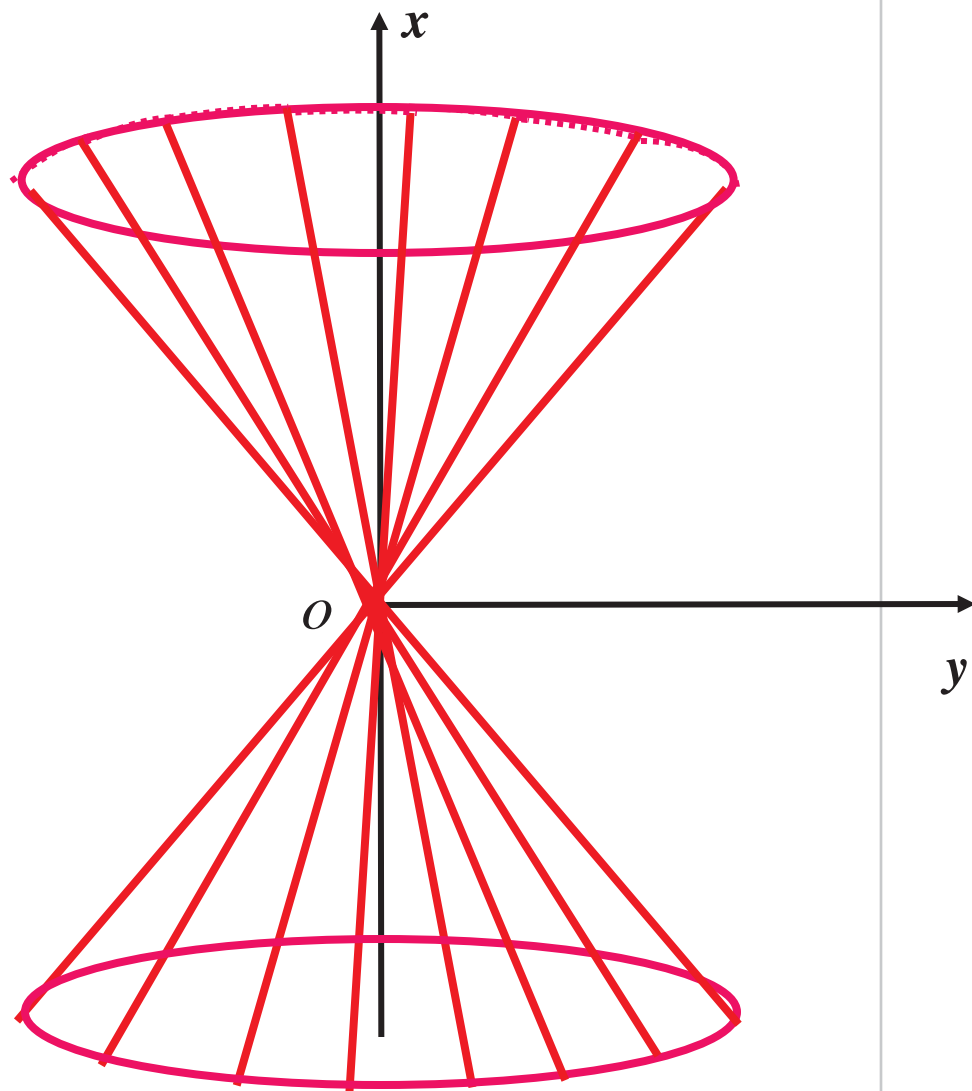


## 例5 旋转锥面

$xoy$ 平面上的直线

$$\begin{cases} y = kx \\ z = 0 \end{cases}$$

绕  $x$  轴一周

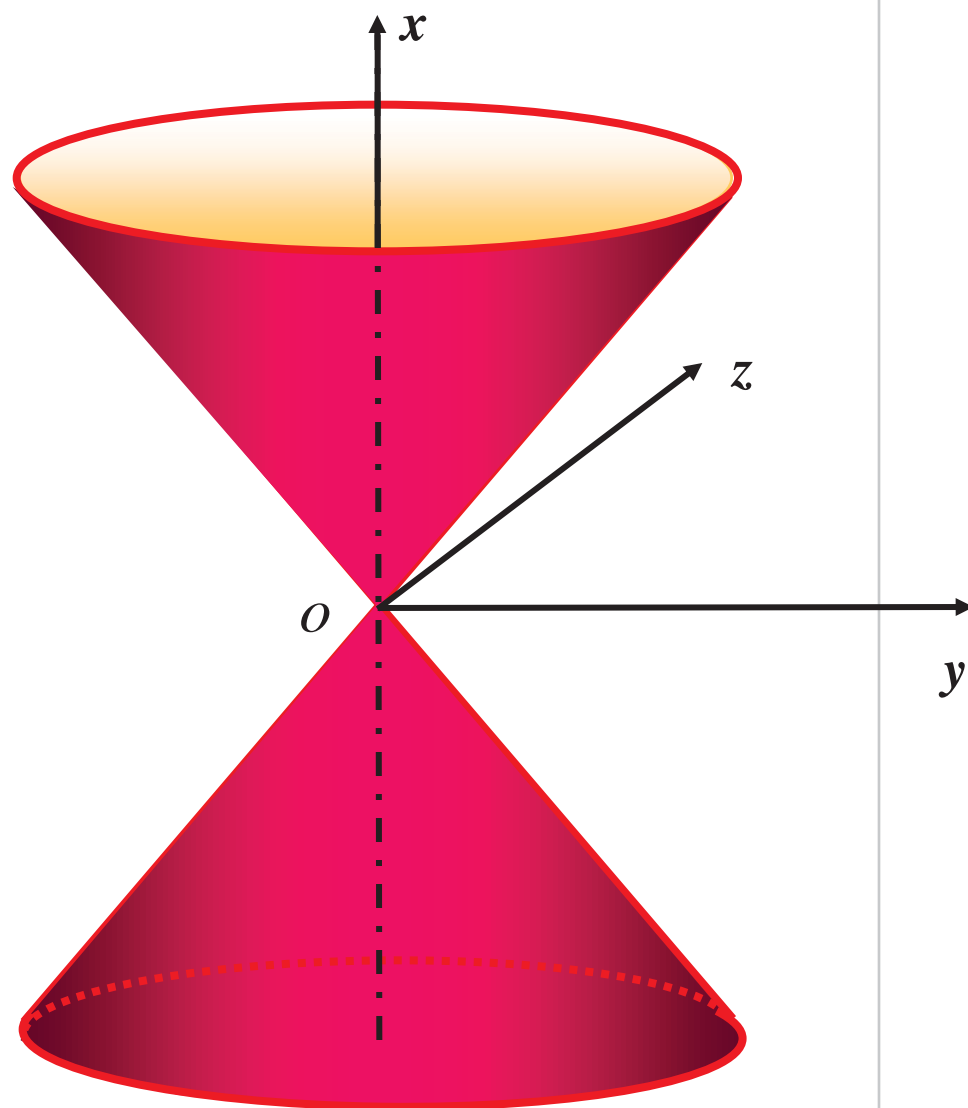


## 例5 旋转锥面

$xoy$ 平面上的直线

$$\begin{cases} y = kx \\ z = 0 \end{cases}$$

绕  $x$  轴一周



## 例5 旋转锥面

$xoy$ 平面上的直线

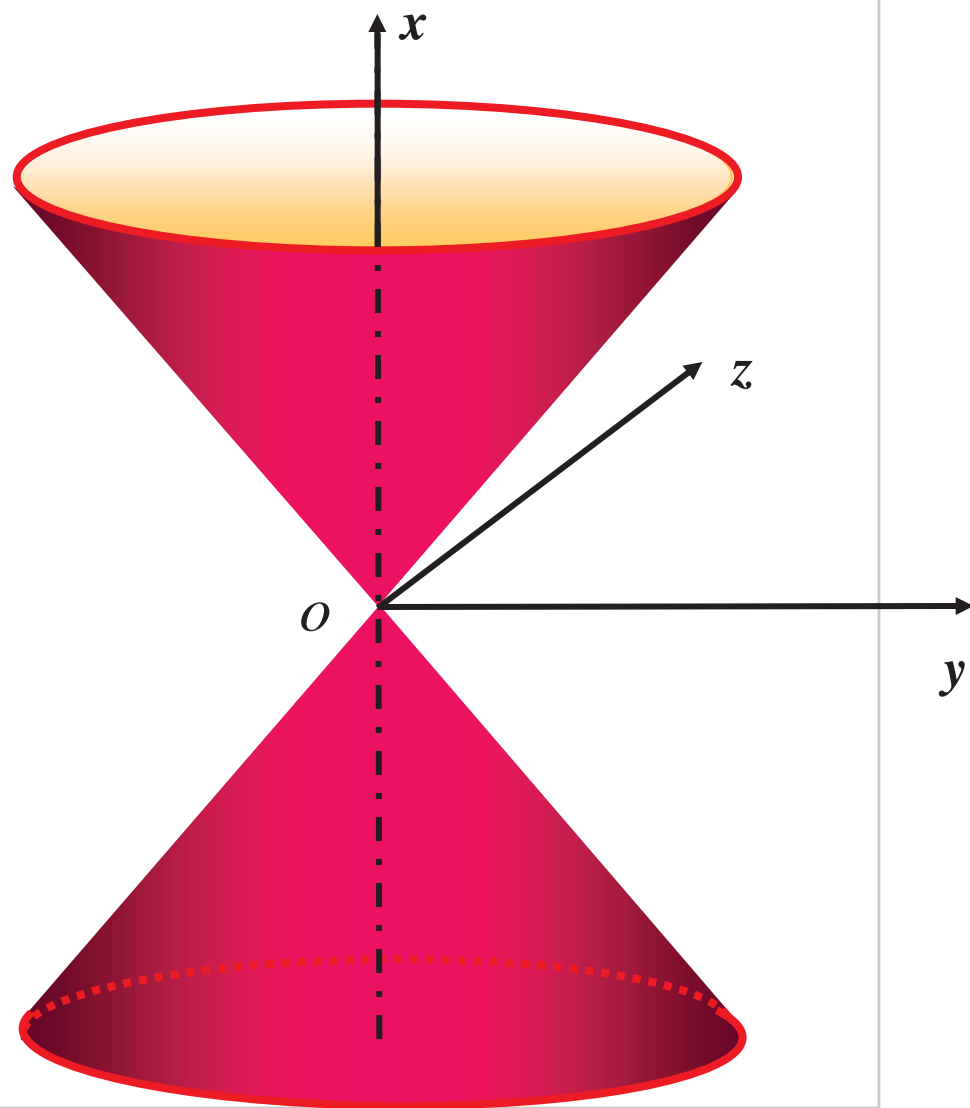
$$\begin{cases} y = kx \\ z = 0 \end{cases}$$

绕  $x$  轴一周  
得旋转锥面

$$\pm\sqrt{y^2 + z^2} = kx$$

$$\text{即 } y^2 + z^2 = k^2 x^2$$

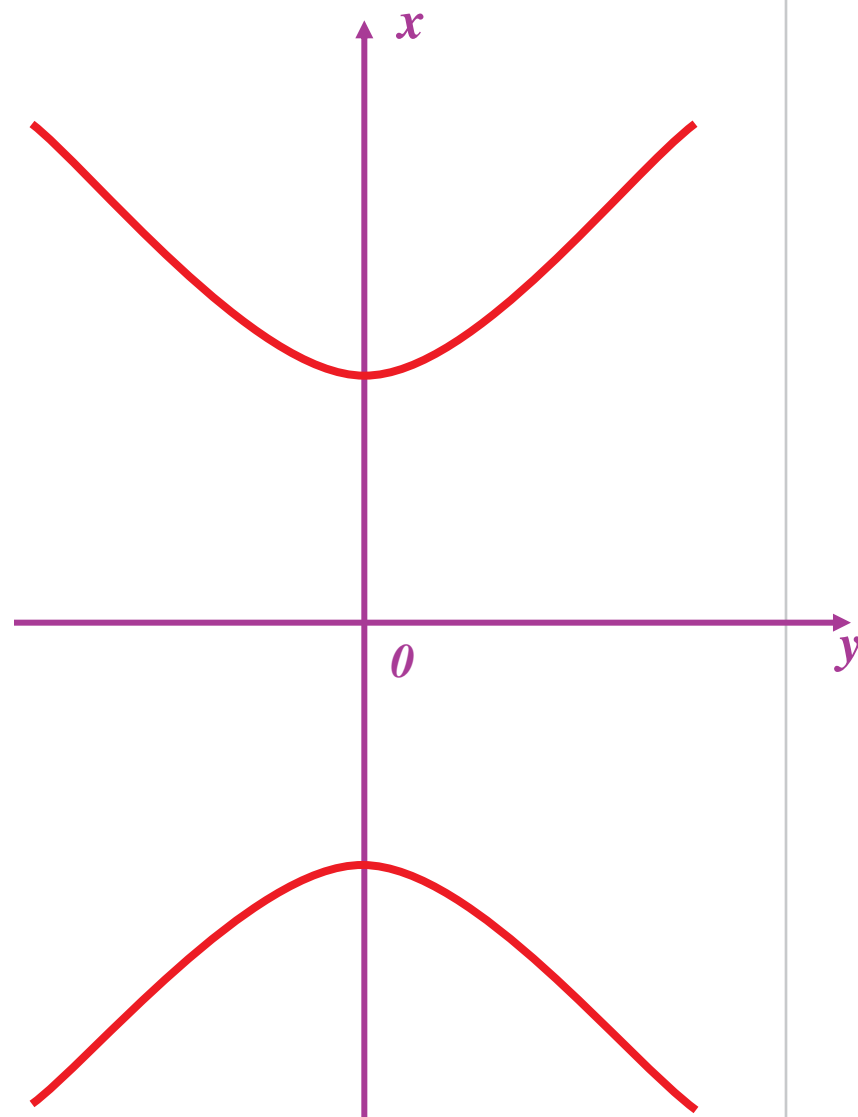
(齐次方程)



## 例6 双叶旋转双曲面

双曲线 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

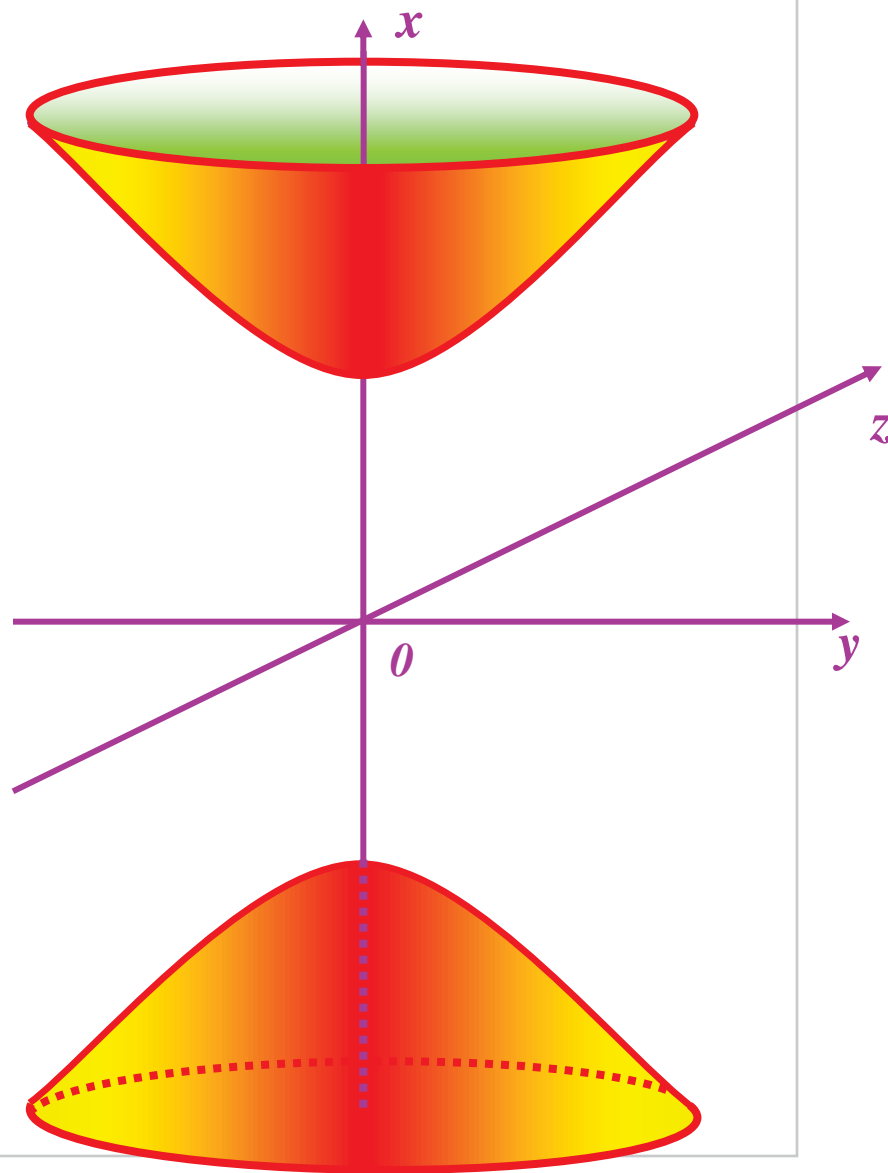
绕  $x$  轴一周



## 例6 双叶旋转双曲面

双曲线  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕  $x$  轴一周





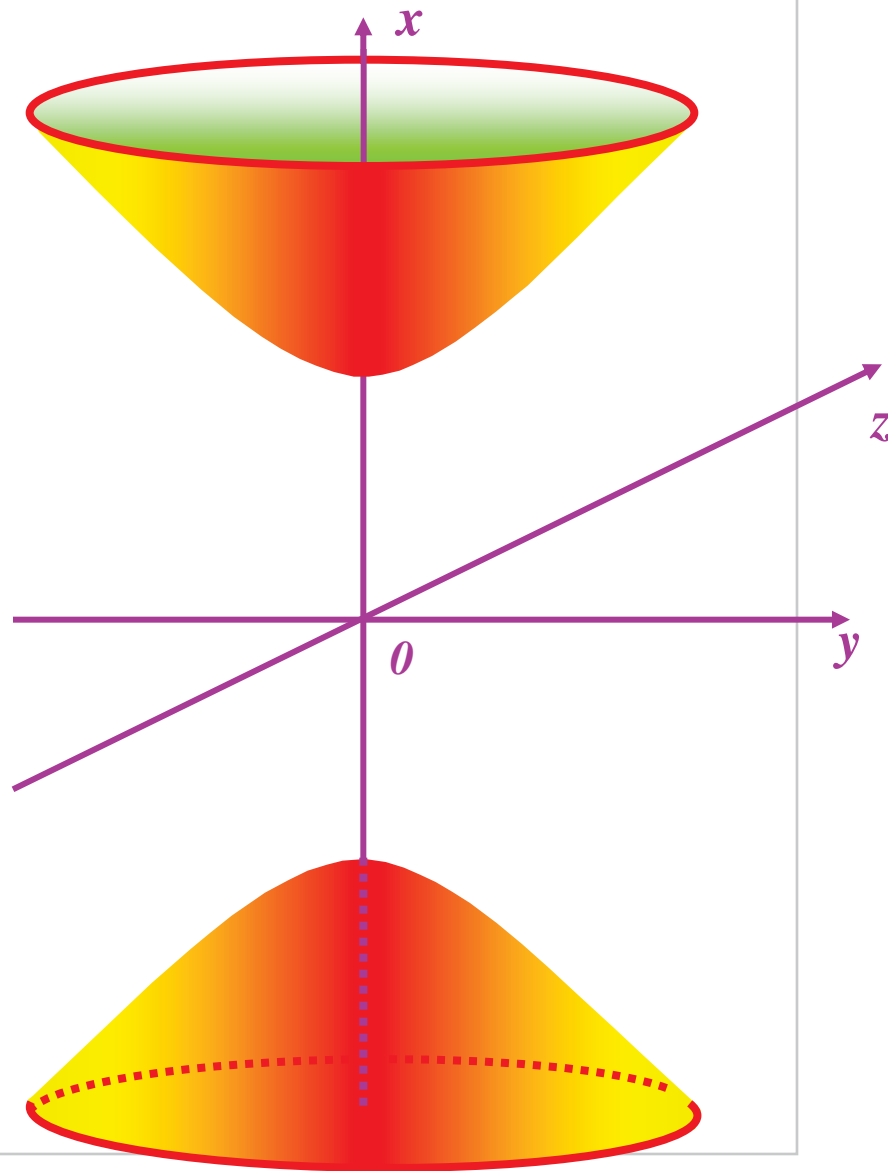
## 例6 双叶旋转双曲面

双曲线 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

绕  $x$  轴一周

得双叶旋转双曲面

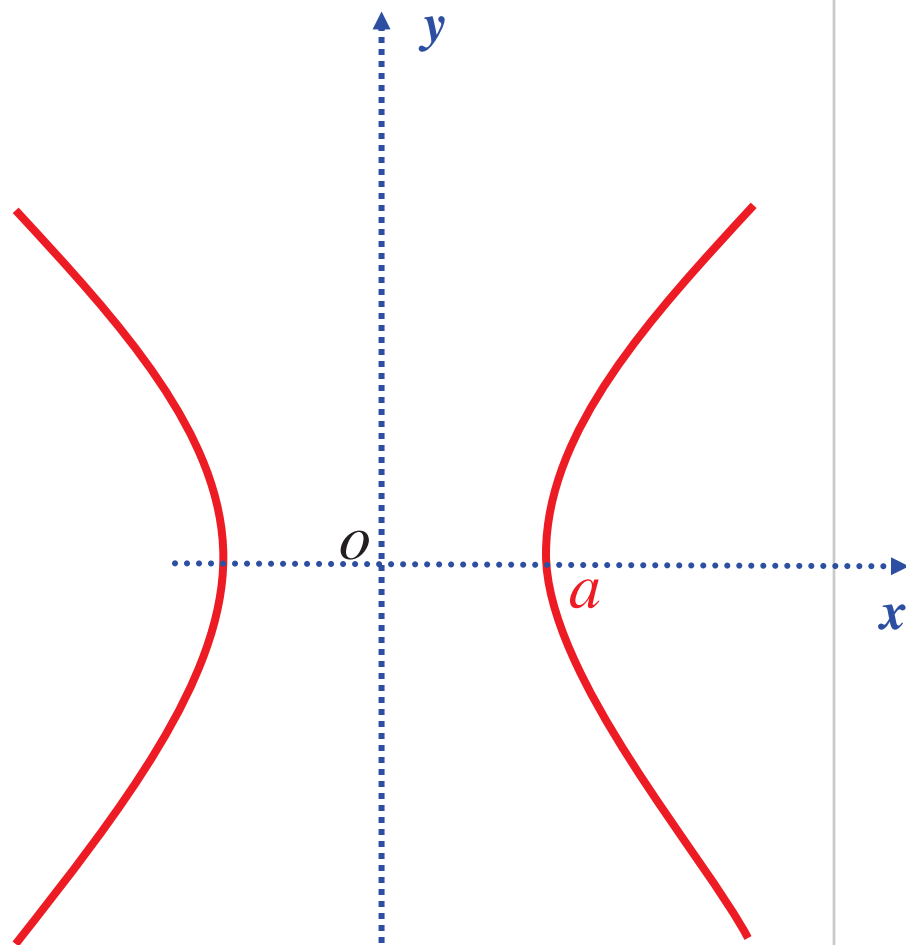
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$



## 例7 单叶旋转双曲面

上题双曲线 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

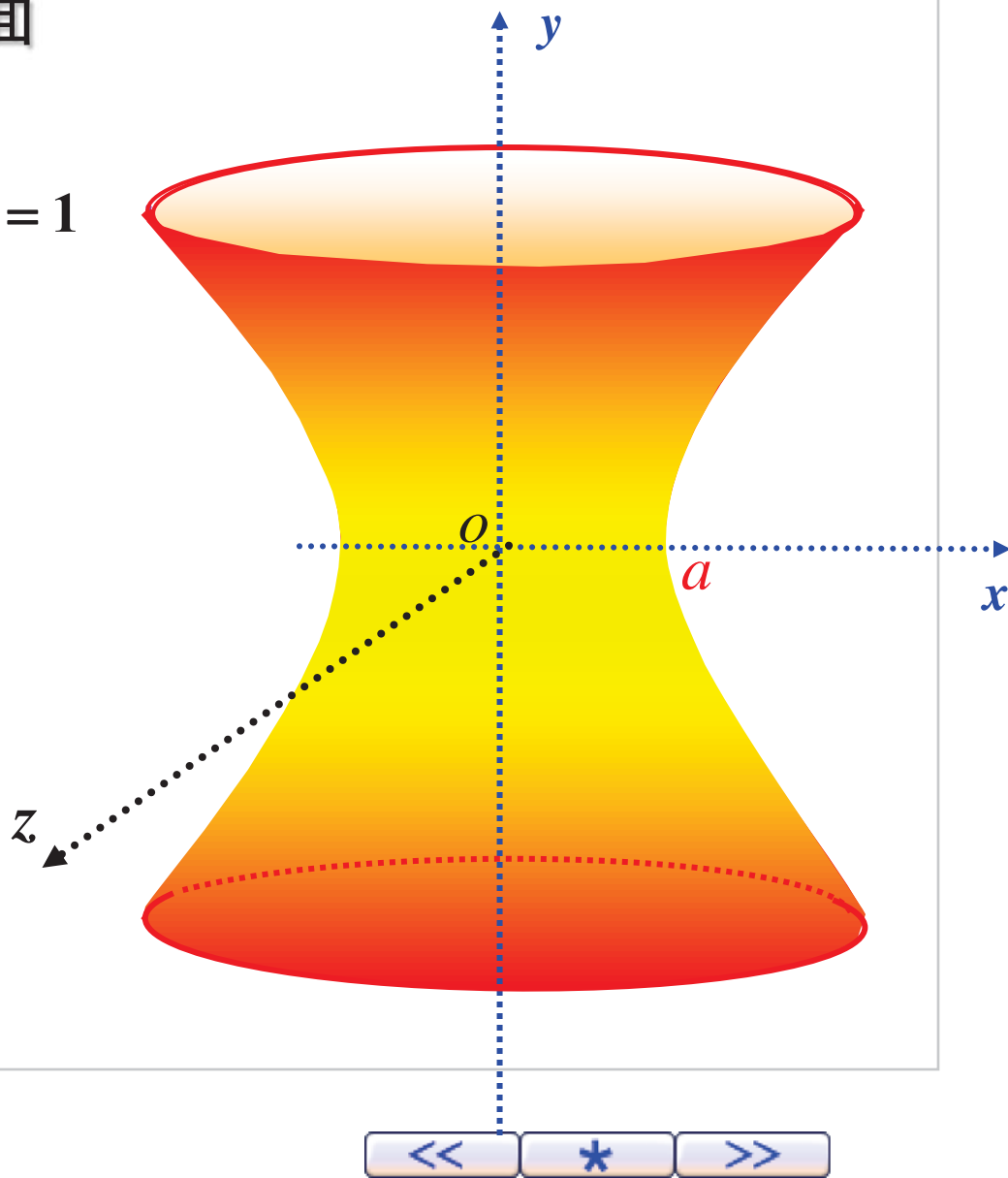
绕  $y$  轴一周



## 例7 单叶旋转双曲面

上题双曲线  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕  $y$  轴一周



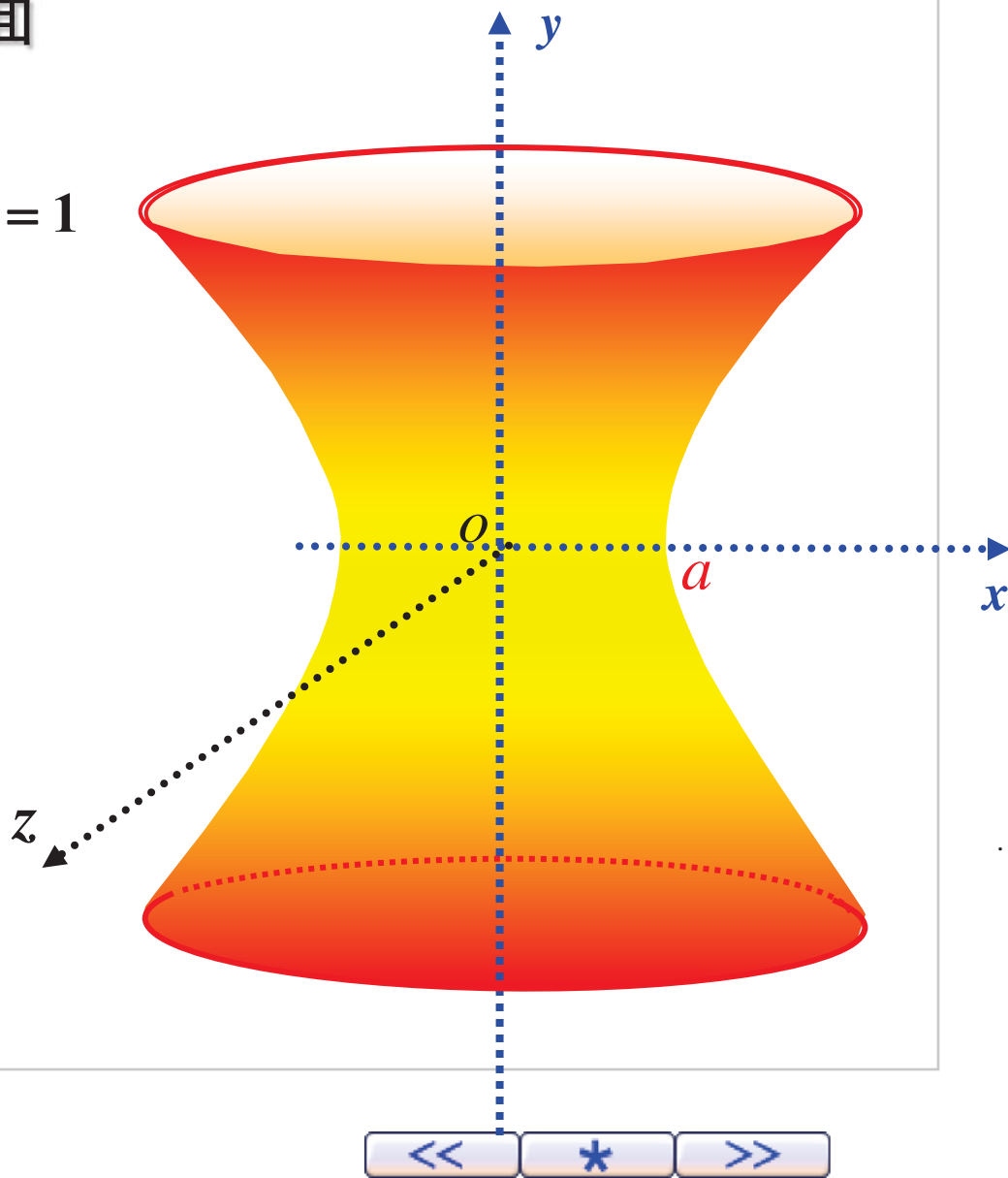
## 例7 单叶旋转双曲面

上题双曲线  $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕  $y$  轴一周

得单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



注意区别:

$$z = k(x^2 + y^2)$$

旋转抛物面

$$z^2 = k(x^2 + y^2), (k > 0).$$

旋转锥面

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

双叶旋转双曲面

主要内容

1. 旋转曲面的概念;
2. 平面曲线绕坐标轴旋转的曲面方程.

**练习:** 指出下列方程所表示曲面的名称; 若是旋转曲面指出它的一条母线与旋转轴.

(1)  $x^2 - y^2 = 1$       双曲柱面, 母线// $z$ 轴;

(2)  $y^2 - 4y + 3 = 0$       柱面, 或一对平行平面  $y=1, y=3$ ;

(3)  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$       圆锥面, 顶点 $(0,0,1)$ , 旋转轴:  $z$ 轴

(4)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$       双叶旋转双曲面,

母线  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$  绕  $x$  轴旋转而成.

母线:  $\begin{cases} z = 1 - x \\ y = 0 \end{cases} (z \leq 1)$ , 或  $\begin{cases} z = 1 - y \\ x = 0 \end{cases} (z \leq 1)$ ;

3. 指出下列方程所表示曲面的名称；若是旋转曲面指出它的一条母线与旋转轴.

(1)  $x^2 - y^2 = 1$  双曲柱面, 母线//z轴;

(2)  $y^2 - 4y + 3 = 0$  柱面, 或一对平行平面  $y=1, y=3$ ;

(3)  $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$  圆锥面, 顶点(0,0,1), 旋转轴: z轴

(4)  $x^2 - y^2 - z^2 = 1$  双叶旋转双曲面,

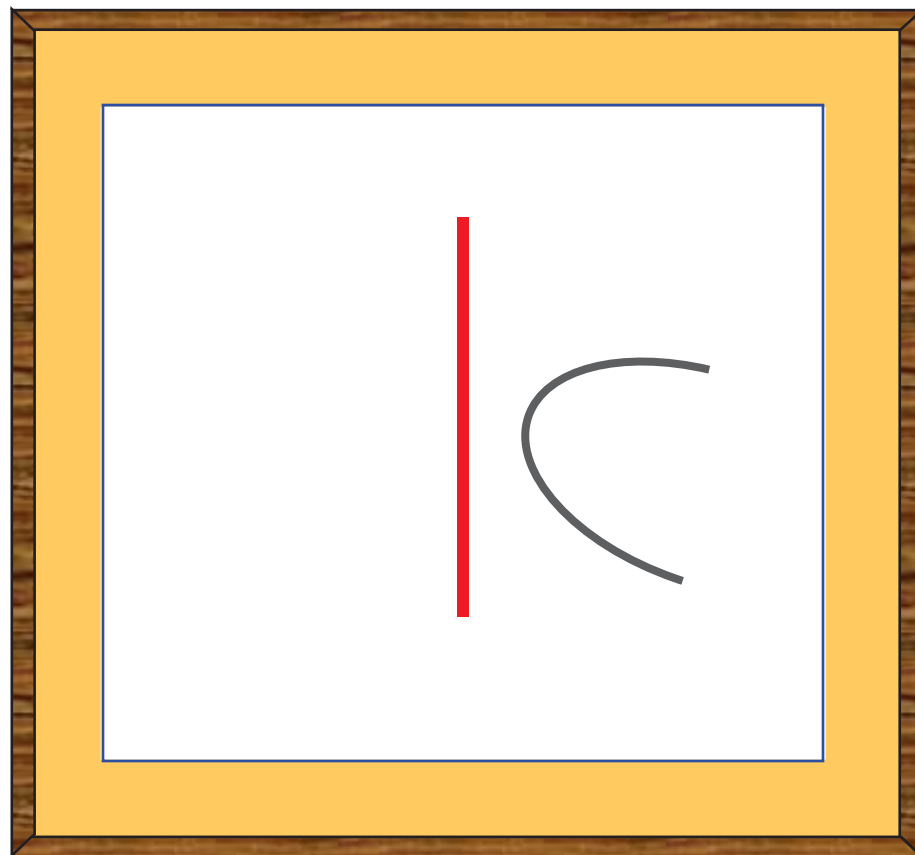
母线  $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  或  $\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$  绕x轴旋转而成.

母线:  $\begin{cases} z = 1 - x \\ y = 0 \end{cases} (z \leq 1)$ , 或  $\begin{cases} z = 1 - y \\ x = 0 \end{cases} (z \leq 1)$ ;

## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.

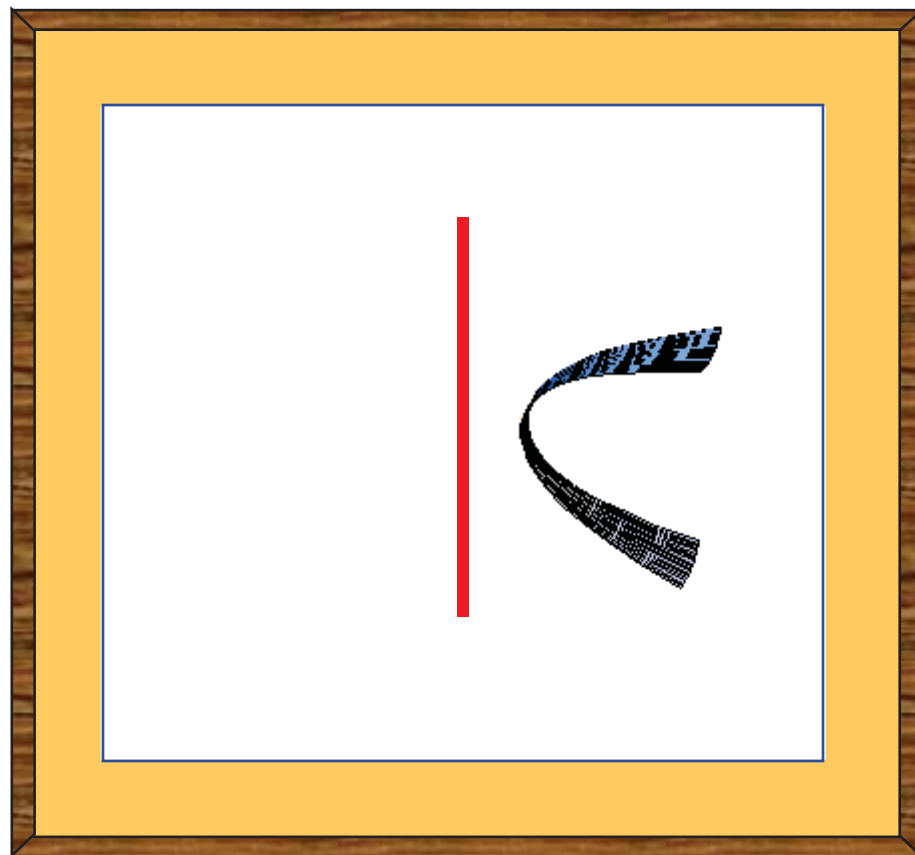




## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

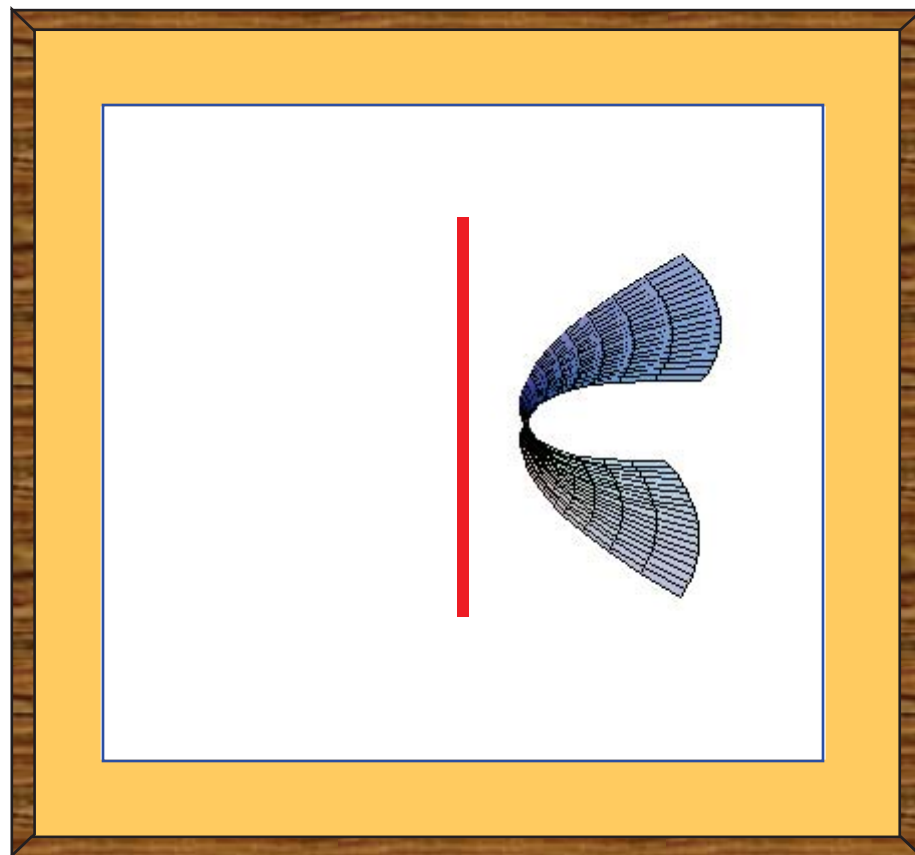
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

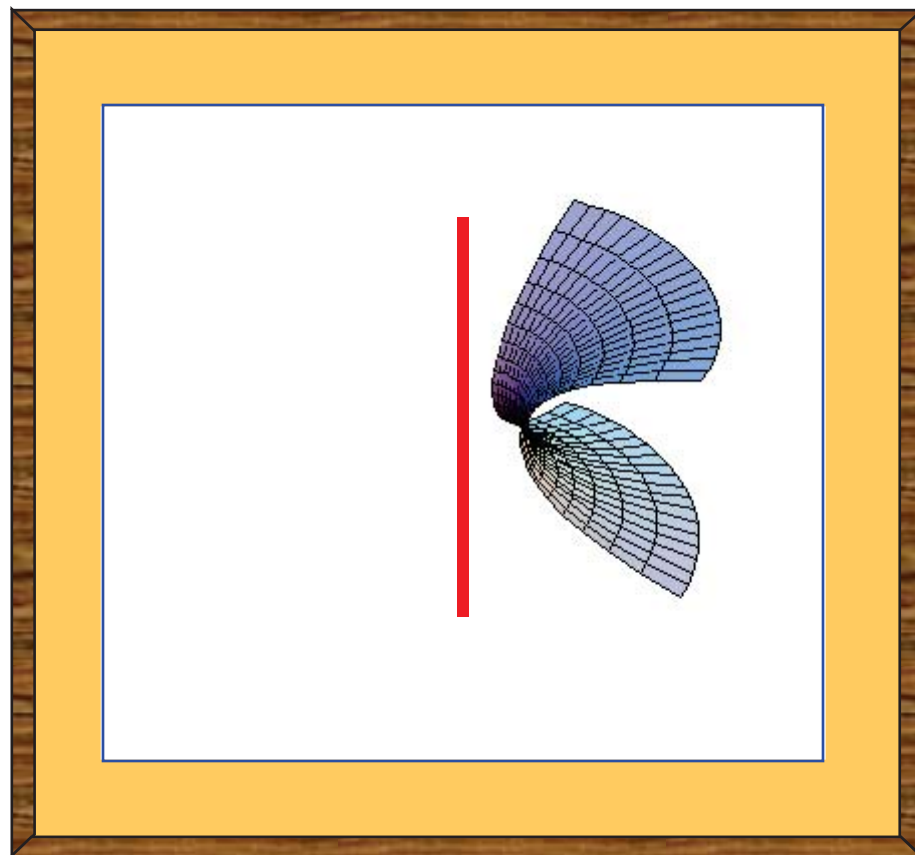
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

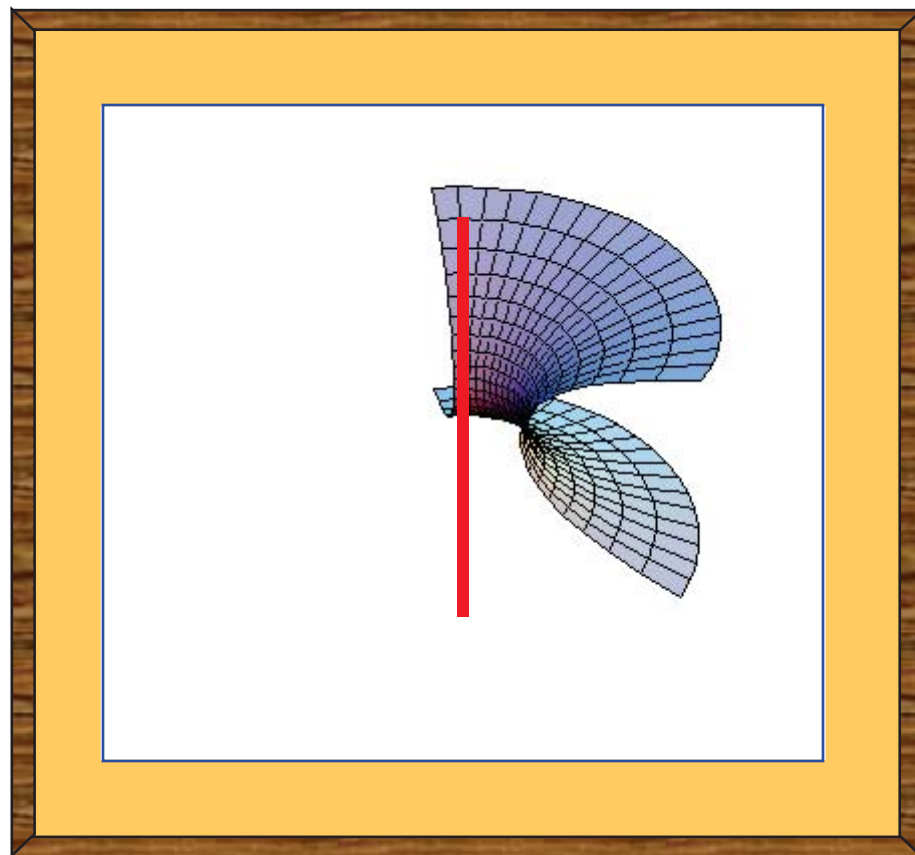
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

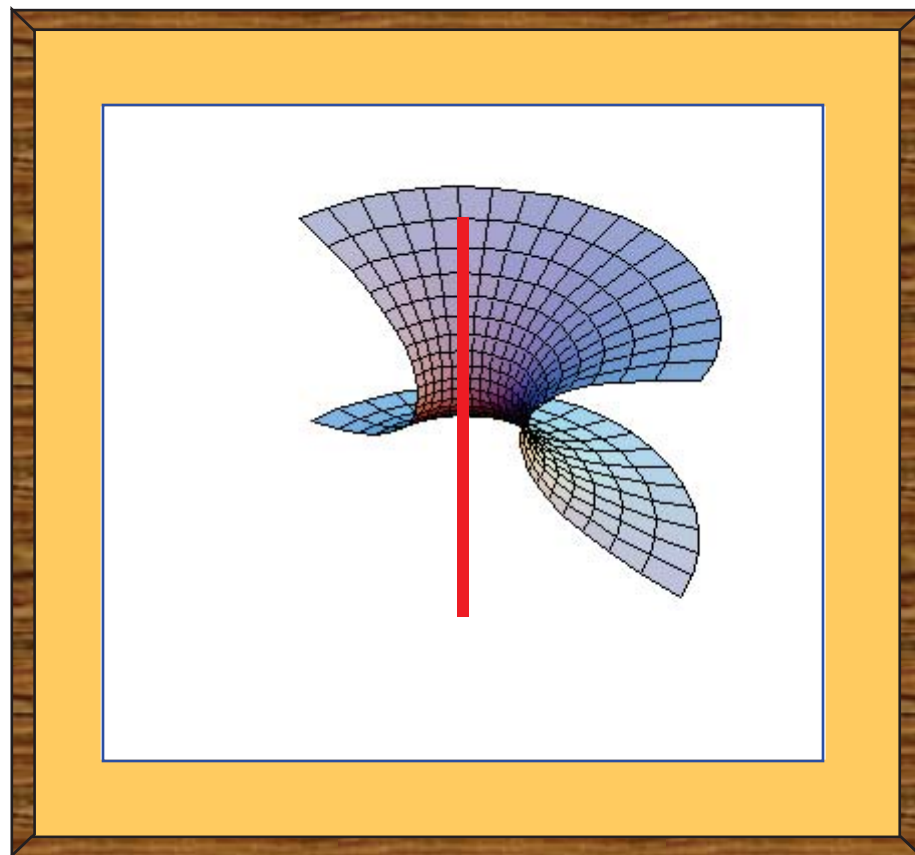
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

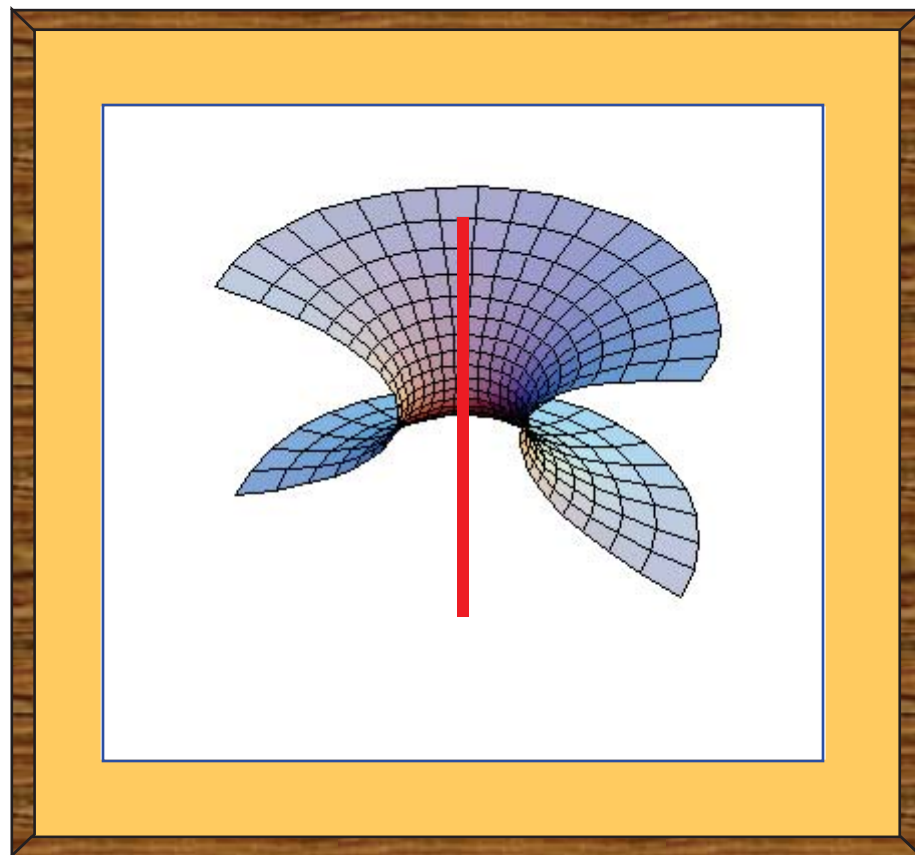
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.

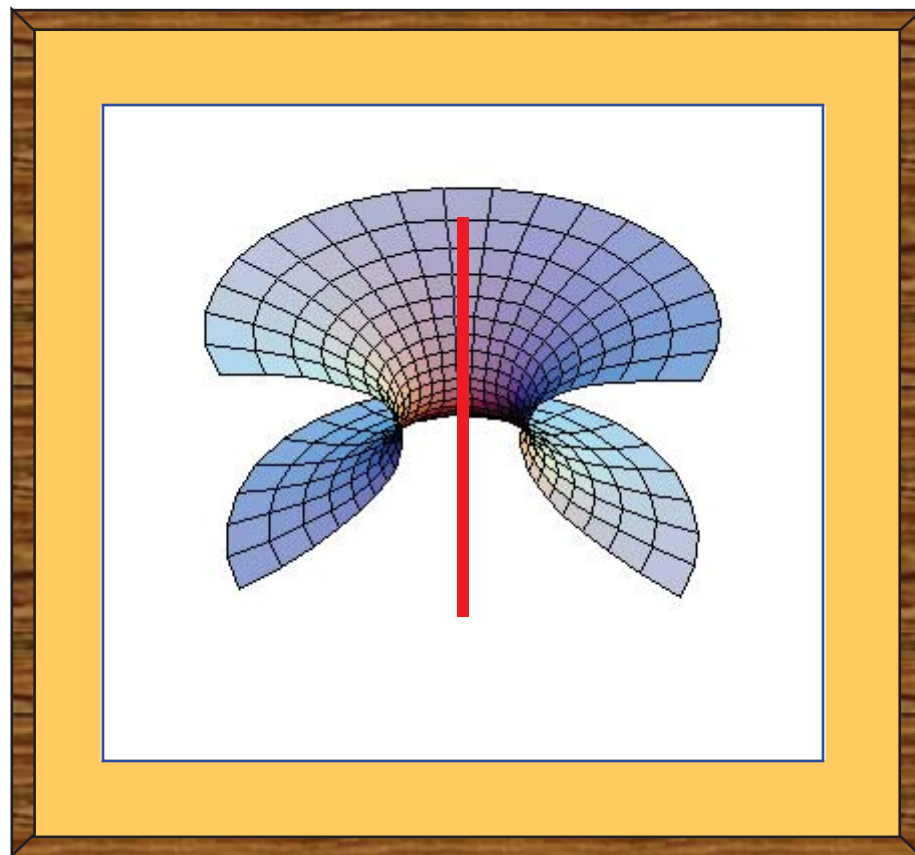




## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

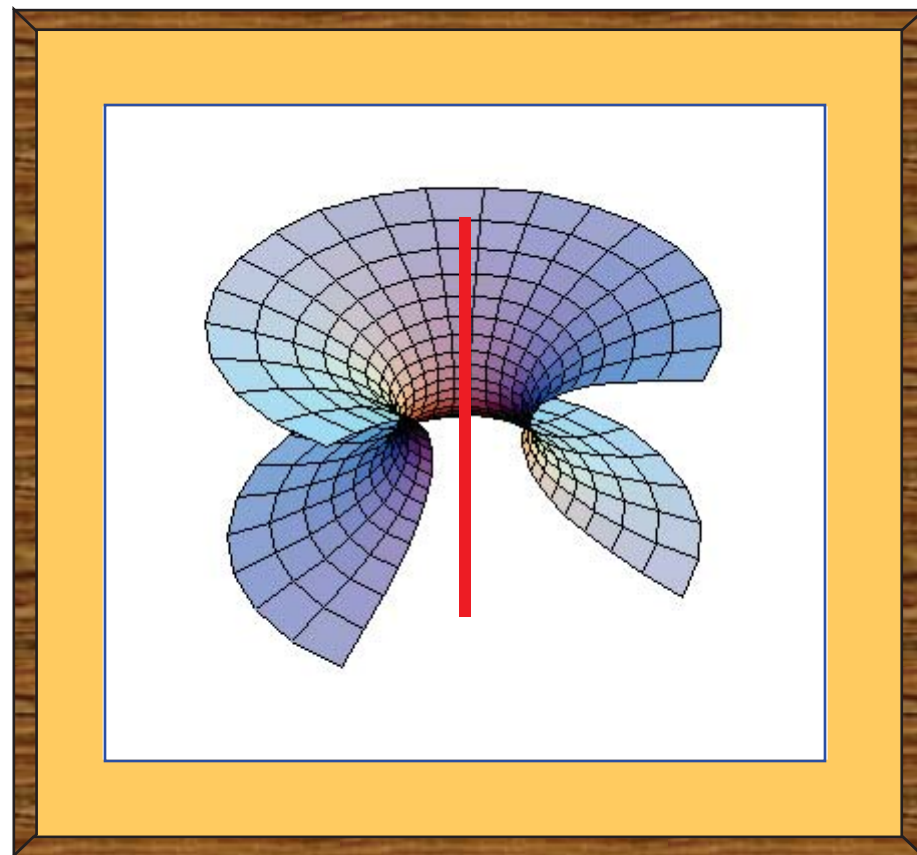
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.

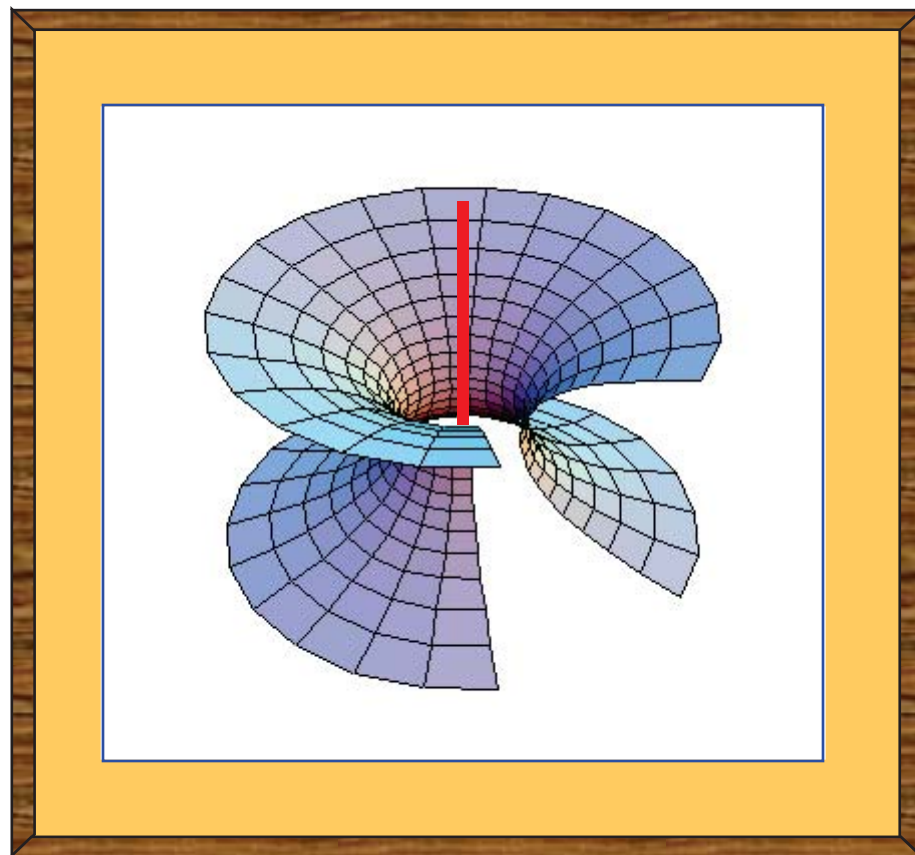




## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

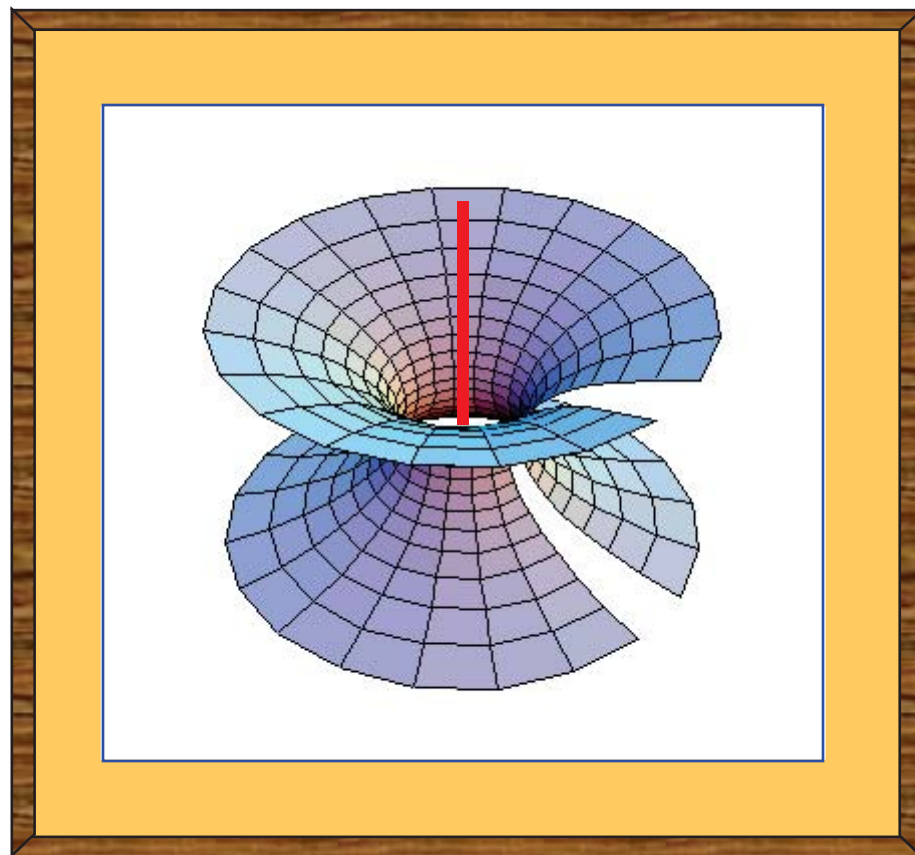
这条定直线叫**旋转曲面的轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫**旋转曲面的轴**.



## 2. 旋转曲面

**定义** 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.

