第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

➤ 内容小结

内容小结

1. 向量的数量积（结果是一个数量）

$$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3),\ \ \vec{b}=(b_1, b_2, b_3).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$$

$$=\|\vec{a}\|\operatorname{Pr}j_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\operatorname{Pr}j_{\vec{b}}\vec{a}.$$

$$(1)\ \cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$(2)\quad \vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

$$(3)\quad \mathrm{Pr}\,j_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{b}\cdot\vec{e}_a$$

运算性质:

$1^0\quad \vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2;$

$2^0\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a};$

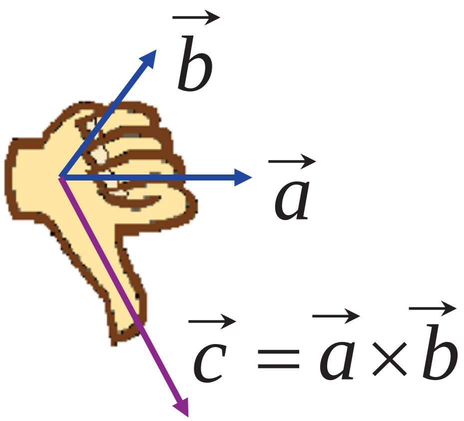
$3^0\quad (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}),\ \lambda,\in\mathbb{R};$

$4^0\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$

2. 向量的向量积（结果是一个向量）

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \quad \begin{cases} \text{方向}: \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{模}: \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta \end{cases}$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$



$\|\vec{a} \times \vec{b}\| =$ 以 $\vec{a}, \vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

性质:

1^0 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$

2^0 $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$， 特别 $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$;

3^0 $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda (\vec{a} \times \vec{b})$;

4^0 $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

3. 向量的混合积（结果是一个数量）

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质:

(1) $[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$

(2) 对任意实数 λ, μ, 有

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c} + \mu\vec{d})] = \lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] + \mu[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]$$

几何意义: $|[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]| = S\,h = V$ （平行六面体体积）

三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow [\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = 0.$