第二章 行列式

§2.4 克拉默法则

一. 逆矩阵的一个简明表达式

二. 克拉默法则

电子科技大学 黄廷祝

一. 逆矩阵的一个简明表达式

引理1. 设$A=(a_{ij})_{n,n}$，则

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

证.

$$i\neq j:\ a_{i1}A_{j1}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{array}{c}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}=0$$

引理2. 设A为n阶矩阵，则：$AA^* = A^*A = (\det A)I$,

其中：

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

（A的伴随矩阵）

证.

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{diag}(\det A, \det A, \ldots, \det A) = (\det A)I$$

定理1. 方阵A可逆$\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

当A可逆时， $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{*}$.

证.

$$\left.\begin{aligned} &A\text{可逆，故}\det A \neq 0 \\ &AA^{*} = (\det A)I \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\det A}A^{*}\right) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{*}$$

例1 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$是否可逆？若可逆求$A^{-1}$.

解 $\det A=6\neq 0$,所以A可逆.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-3&-3\\0&3&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

例2. 设 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 $(A^*)^{-1}$

解. $AA^*=(\det A)I$， A^{-1}存在，所以$\det A\neq 0$，

$$\left(\frac{1}{\det A}\right)AA^*=I\Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A\Rightarrow \frac{1}{\det A}=\det A^{-1}=2$$

$$A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\det A^{-1}}\left(A^{-1}\right)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A=2A=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

[结束]