第二讲 向量的乘法

- 内　积
  1.内积的概念与性质
  2.内积的坐标形式
- 外　积
  1.外积的概念与性质
  2.外积的坐标形式
- 混合积
  1.混合积的概念与性质
  2.混合积的几何意义
- 内容小结

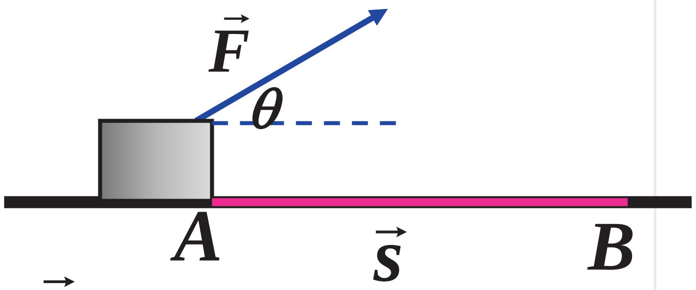
第二讲 向量的乘法

- 内　积
  - 1.内积的概念与性质
  - 2.内积的坐标形式
- 外　积
  - 1.外积的概念与性质
  - 2.外积的坐标形式
- 混合积
  - 1.混合积的概念与性质
  - 2.混合积的几何意义
- 内容小结

一、内积

1. 内积的概念与性质

引例. 一质点在力 $\vec{F}$ 的作用下从点 A 移动到 B，力所做的功.



记 $\vec{s}=\overrightarrow{AB}$，则

$$W=\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{F}\|\cos\theta=\|\vec{s}\|\cdot \mathrm{Prj}_{\vec{s}}\,\vec{F}$$

定义 设向量 $\vec{a},\vec{b}$ 的夹角为 θ，称

$$\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的内积 (数量积、点积).

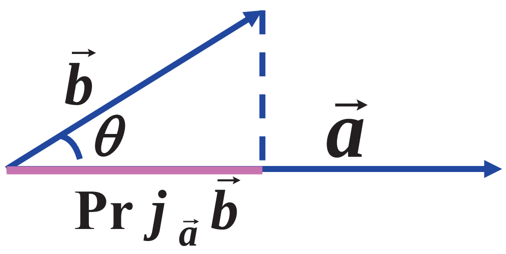
<< * >>

内积的意义：

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$

$$=\|\vec{a}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

即有 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{b}\cdot\vec{e}_a$



(2) $\vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$

(3) 若$\vec{a}\neq 0$，$\vec{b}\neq 0$，则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$

特别：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

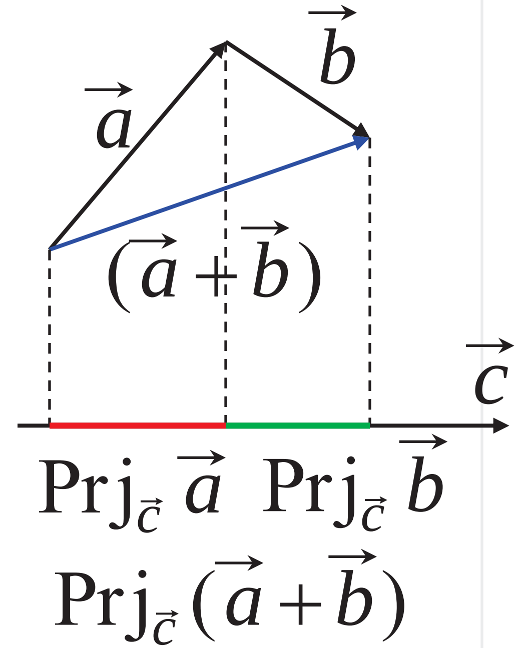
内积的运算律:

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 (λ为实数)

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$



证 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立; 当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\|\vec{c}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\|\vec{c}\|(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b})$$

$$=\|\vec{c}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{a}+\|\vec{c}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\,\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

例1 设 $\|\vec{a}\| = 11, \|\vec{b}\| = 23, \|\vec{a} - \vec{b}\| = 30$, 求 $\|\vec{a} + \vec{b}\|$.

解 $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 650 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 650 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$2\vec{a} \cdot \vec{b} = -250,$$

$$\therefore \|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = 650 - 250 = 400$$

$$\Rightarrow \|\vec{a} + \vec{b}\| = 20.$$

主要
内容

内积的概念与性质

1. 内积的意义； 2. 内积的运算律.

练习 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直，且 $\|\vec{a}\|=1,\|\vec{b}\|=2,\|\vec{c}\|=3$，求 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度与它和 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的夹角.

答案： $\|\vec{s}\|=\sqrt{14},\langle\vec{s},\vec{a}\rangle=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}$

第二讲 向量的乘法

复习:

(1)内积的概念

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$$

$$\Rightarrow \cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|},\qquad \mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{b}\cdot\vec{e}_a$$

(2)运算律

交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

结合律 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$

分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

2.内积的坐标形式

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ ，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$ ，则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

两向量的夹角公式

$$\cos\left\langle\vec{a},\vec{b}\right\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

特别：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$

例 1. 已知 $\vec{a}=(1,1,-4)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, 求(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;
(2) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角；(3) $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影.

解 (1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot 1+1\cdot(-2)+(-4)\cdot 2=-9.$

(2) $$\cos\theta=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \therefore \theta=\frac{3\pi}{4}.$$

(3) $\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\,\vec{a}=\vec{a}\cdot\vec{e}_b=-3.$

两个重要不等式

(1) 柯西—许瓦兹不等式(*Cauchy-Schwarz inequality*)

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\le\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\| \quad 或 \quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2\le\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2 .$$

$$(\because \vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta)$$

(2) 三角不等式

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$$

证 $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}$

<< * >>

$$\le \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2|\vec{a}\cdot\vec{b}|$$

$$\le \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|$$

$$= (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$$

所以 $\|\vec{a}+\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

同理可证: $\|\vec{a}-\vec{b}\| \le \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$

主要内容

内积的坐标形式

1. 运算；　2. 两个不等式.

练习 1. 设 $\vec{a}=(-2,2,1)$, $\vec{b}=(1,3,-3)$, $\vec{c}=(3,-4,12)$, $\vec{d}=-2\vec{b}+(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$, 则 $\operatorname{Pr} j_{\vec{a}}\vec{d}=$ ______

答案：$\operatorname{Pr} j_{\vec{a}}\vec{d}=\vec{d}\cdot\vec{e}_a=-\dfrac{4}{3}$.

2. 设 $\vec{a}=(3,5,-2)$, $\vec{b}=(2,1,4)$, 若 $(\lambda\vec{a}+\vec{b})\perp z$轴，则 $\lambda=$ ____.

答案：　2

<< * >>

第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

➤ 外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

二、外积

1. 外积的概念

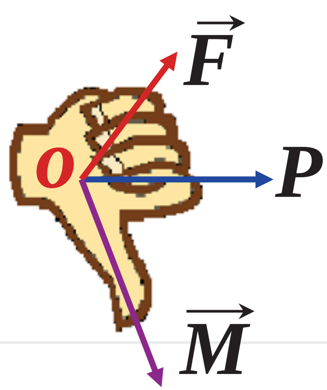
引例. 设O 为杠杆L 的支点，有一个与杠杆夹角为θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P点上，则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩是一个向量 $\vec{M}$：

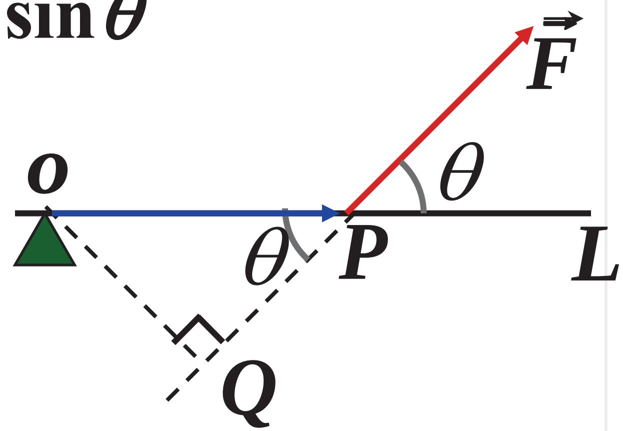
$$\|\vec{M}\| = \|\overrightarrow{OQ}\| \cdot \|\vec{F}\| = \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \|\vec{F}\| \sin\theta$$

$\overrightarrow{OP} \to \vec{F} \to \vec{M}$ 符合右手规则

$\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{M} \perp \overrightarrow{F}$



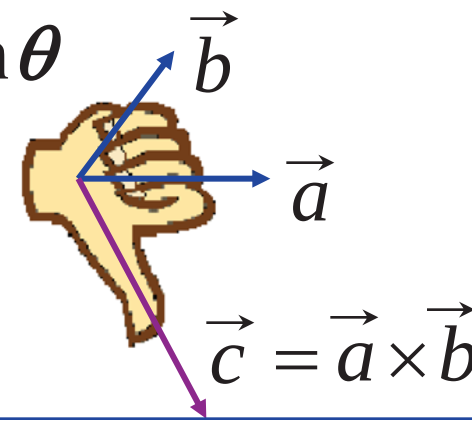


$$\|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP}\| \sin\theta$$

<< * >>

定义 设$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，定义

$$\text{向量 } \vec{c} \begin{cases} \text{方向}: \vec{c} \perp \vec{a},\ \vec{c} \perp \vec{b} \text{ 且符合右手规则} \\ \text{模}: \|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \sin\theta \end{cases}$$

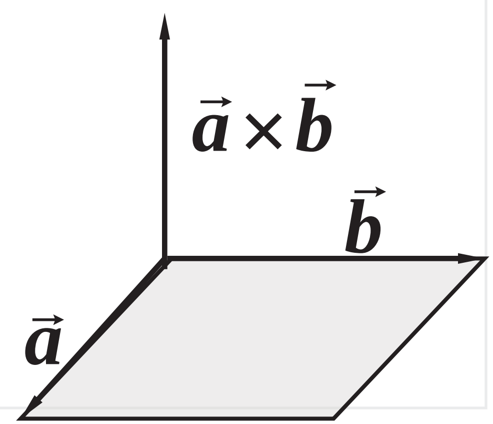


称 $\vec{c}$ 为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的 **外积**. 记作

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

外积又称为**向量积**（**或叉积**）.

引例中的力矩 $\overrightarrow{M} = \overrightarrow{OP} \times \overrightarrow{F}$



2. 外积的性质

(1) $\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$，特别 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\ \vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;

(3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

(4) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

例1 设 $\|\vec{a}\|=3, \|\vec{b}\|=4$,且 $\vec{a}\perp\vec{b}$，求 $\|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\|$.

解 $(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=(\vec{a}\times\vec{a})-(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{a})-(\vec{b}\times\vec{b})$

$$=2(\vec{b}\times\vec{a})$$

$\therefore\ \|(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})\|=\|2(\vec{b}\times\vec{a})\|=2\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|\sin\langle\vec{b},\vec{a}\rangle$

$=2\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|=2\cdot4\cdot3=24.$

<< * >>

几何意义

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$$

$$= \|\vec{a}\| h$$

= 以 $\vec{a},\vec{b}$为邻边的平行四边形面积.

<< * >>

主要
内容

外积（向量积）

1. 概念；　2. 性质.

练习　设向量$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且$\|\vec{m}\| = 4$，$\|\vec{n}\| = 2$，$\|\vec{p}\| = 3$，计算$(\vec{m} \times \vec{n}) \cdot \vec{p}$.

答案：　24.

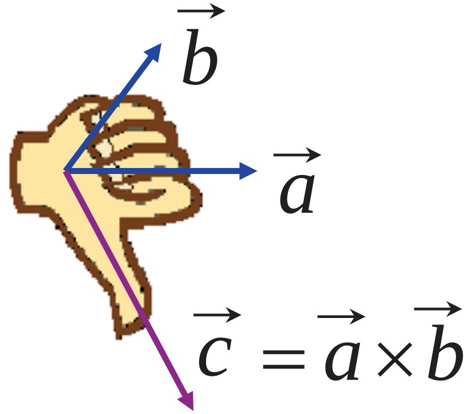
第二讲 向量的乘法

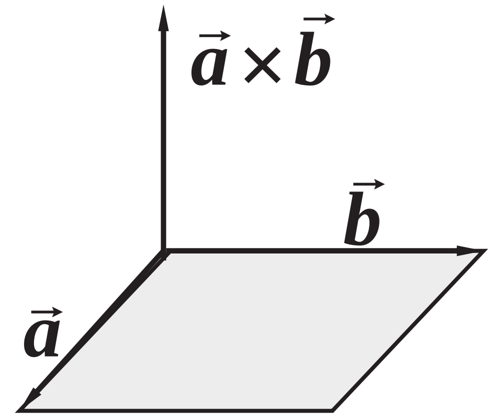
- 内　积
  1.内积的概念与性质
  2.内积的坐标形式
- 外　积
  1.外积的概念与性质
  2.外积的坐标形式
- 混合积
  1.混合积的概念与性质
  2.混合积的几何意义
- 内容小结

复习:

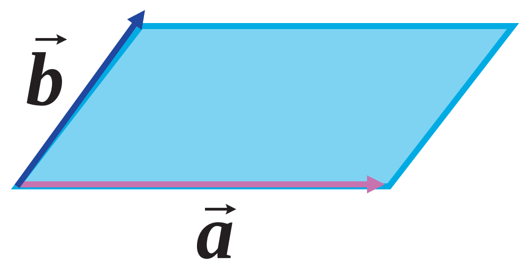
1. 外积的概念

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$





$$\|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$$



2. 外积的性质

(1) $\vec{a}/\!/\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$，特别 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;

(3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

(4) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

3. 外积的坐标形式

由定义易得：基向量的外积

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

即 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

由上式可推出

$$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \quad (\text{当}b_i=0\text{时，有}a_i=0)$$

<< * >>

例 1 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

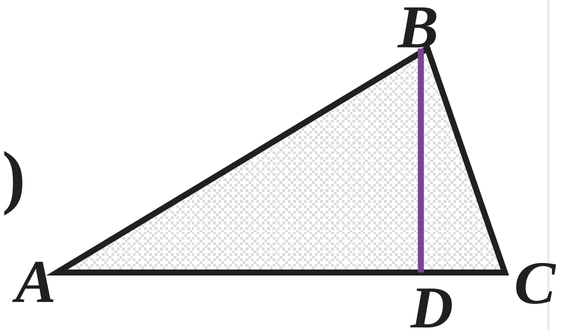
$$\therefore \vec{e}_c=\pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

<< * >>

例 2 在顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC边上的高BD.

解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=(15,12,16)$$



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|$$

$$\Rightarrow\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\|\overrightarrow{BD}\|,\qquad \therefore\quad \|\overrightarrow{BD}\|=5.$$

主要内容

外积的坐标形式

练习 1. 设 $A_i=(x_i,y_i,z_i),(i=1,2,3)$为平面上的三个点，用外积表示这三个点共线的充要条件.

答案： $\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=0$

2. 设单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点. 求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

答案： $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-7,-3,10)$.

第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

➤ 混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

三、混合积

1.混合积的概念

定义 设已知三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，数量 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为这三个向量的混合积，记为$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

坐标形式:

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

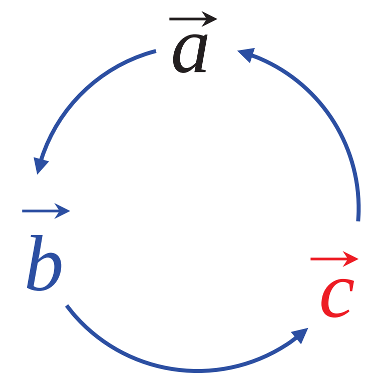
$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

即 $$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. 混合积的性质



(1) 轮换对称性：

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$.

(2) 对任意实数 λ, μ, 有

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})]=\lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+\mu[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]$$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\mu(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}$

例 已知$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解1 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=0}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

解2 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{c}+\vec{a}]$$

$$=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

主要内容

混合积

1. 概念； 2. 性质.

<< * >>

第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

三、混合积

1.混合积的概念

定义 设已知三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$，数量 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为这三个向量的混合积，记为$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

坐标形式:

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

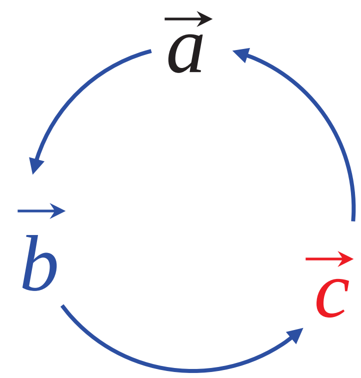
$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\bullet(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$
= \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}
$$

即 $$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. 混合积的性质



(1) 轮换对称性：

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

(2) 对任意实数 λ, μ, 有

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})]=\lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+\mu[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]$$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\mu(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}$

例 已知$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解1 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=0}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

解2 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{c}+\vec{a}]$$

$$=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

主要
内容

混合积

1. 概念； 2. 性质.

<< * >>

第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

复习：

1.混合积的概念

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

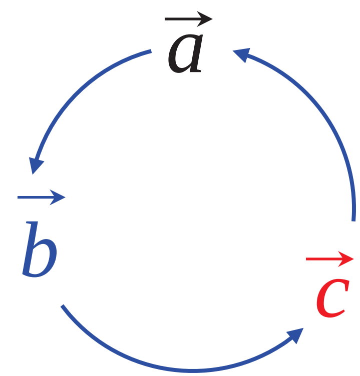
$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. 混合积的性质

(1) 轮换对称性：

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\,]=[\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}\,]=[\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}\,]$$



即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$.

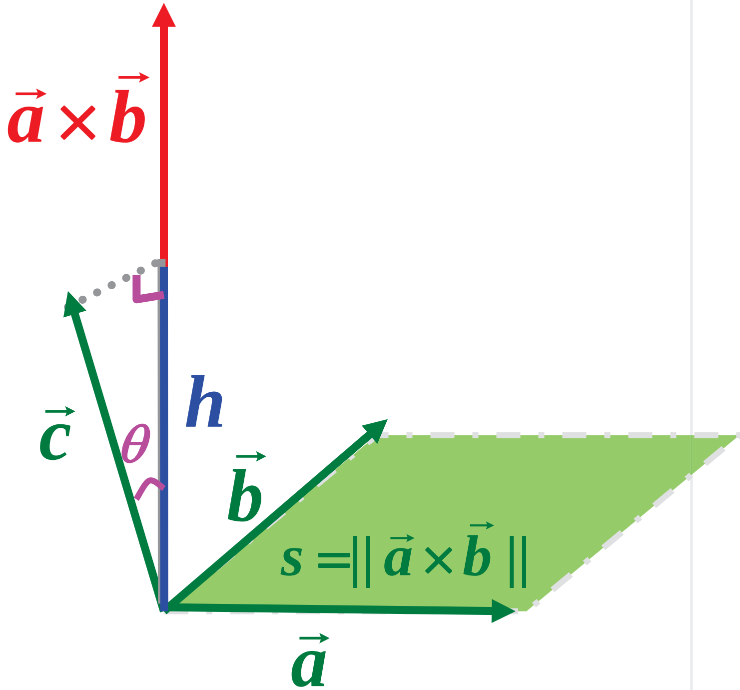
(2) 线性性 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\mu(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}$

3. 混合积的几何意义

$$|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot|\mathrm{Prj}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}|$$

$$= S\,h = V$$



<< * >>

3. 混合积的几何意义

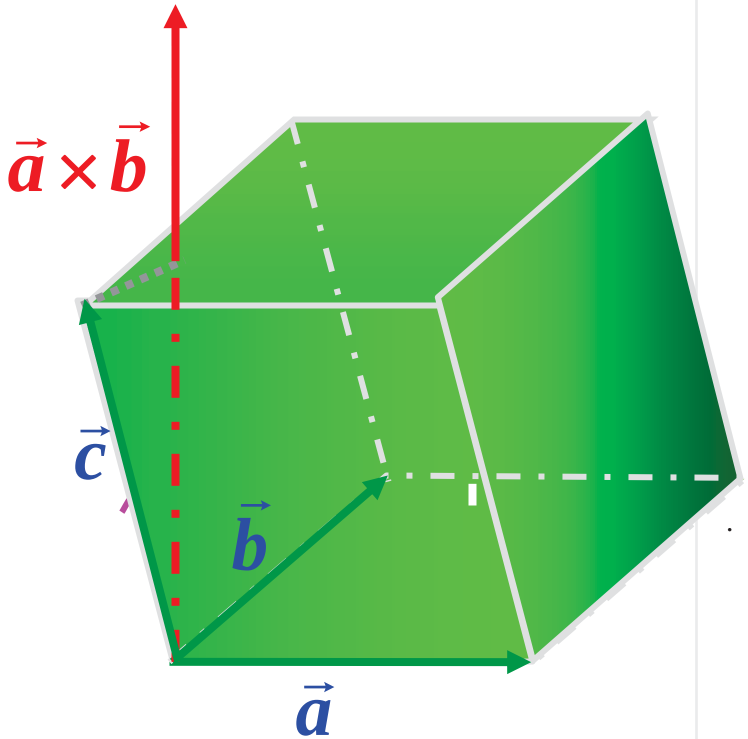
$$|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]| = |(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$$

$$= \|\vec{a}\times\vec{b}\|\cdot|\mathrm{Prj}_{\vec{a}\times\vec{b}}\,\vec{c}|$$

$$= Sh = V$$

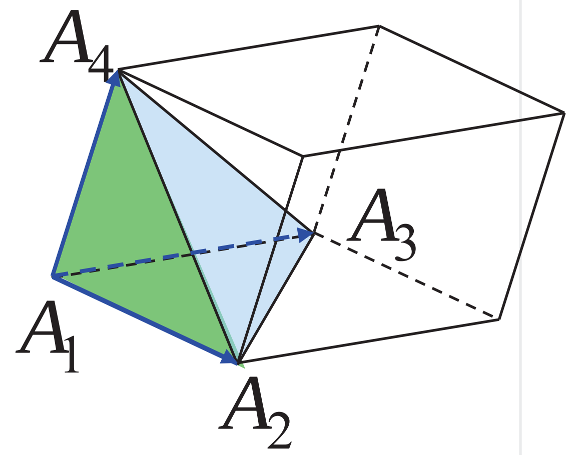
三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面

$$\Leftrightarrow\ [\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = 0.$$



例 已知一四面体的顶点 $A_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k=1,2,3,4)$ 求该四面体体积 .

解 已知四面体的体积等于以向量 $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1A_3}, \overrightarrow{A_1A_4}$ 为棱的平行六面体体积的 $\frac{1}{6}$, 故



$$V = \frac{1}{6}\left| [\overrightarrow{A_1A_2}\ \overrightarrow{A_1A_3}\ \overrightarrow{A_1A_4}] \right|$$

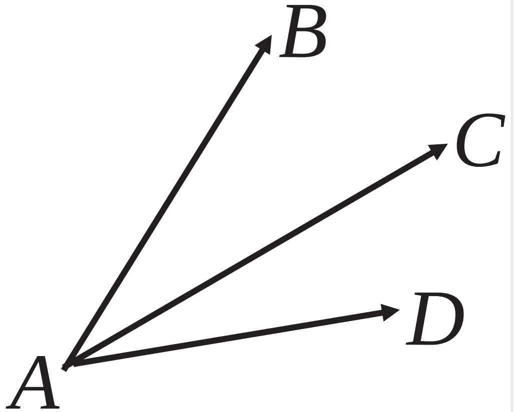
$$= \frac{1}{6}\left| \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} \right|$$

<< * >>

主要内容

混合积的几何意义

练习. 证明四点 $A(1,1,1), B(4,5,6), C(2,3,3),$ $D(10,15,17)$共面.



解 因

$$[\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \\ 9 & 14 & 16 \end{vmatrix} = 0$$

故 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$ 四点共面.

第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

➤ 内容小结

内容小结

1. 向量的数量积（结果是一个数量）

$$\vec{a}=(a_1, a_2, a_3),\quad \vec{b}=(b_1, b_2, b_3).$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$$

$$=\|\vec{a}\|\,\mathrm{Pr}\,j_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\,\mathrm{Pr}\,j_{\vec{b}}\vec{a}.$$

(1) $$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

(2) $$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0.$$

(3) $\mathrm{Pr}\,j_{\vec{a}}\vec{b} = \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \vec{b}\cdot\vec{e}_a$

运算性质:

1^0 $\vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2;$

2^0 $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a};$

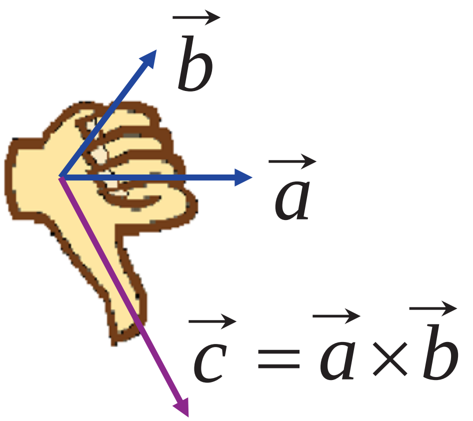
3^0 $(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b}),\ \lambda,\in\mathbb{R};$

4^0 $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$

2. 向量的向量积（结果是一个向量）

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\quad\begin{cases}\text{方向}:\vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}\ \text{且符合右手规则}\\ \text{模}:\|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta\end{cases}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$



$\|\vec{a}\times\vec{b}\|=$ 以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积.

性质:

1^0 $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$

2^0 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$， 特别 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\ \vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;

3^0 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

4^0 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

3. 向量的混合积（结果是一个数量）

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质:

(1) $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=[\vec{b}\,\vec{c}\,\vec{a}]=[\vec{c}\,\vec{a}\,\vec{b}]$

(2) 对任意实数 λ, μ, 有

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})]=\lambda[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]+\mu[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{d}]$$

几何意义: $|[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]|=S\,h=V$ （平行六面体体积）

三向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$共面 $\Leftrightarrow$ $[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=0.$