第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

三、混合积

1.混合积的概念

定义 设已知三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$，数量 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ 称为这三个向量的混合积，记为$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]$.

坐标形式:

设 $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$, $\quad \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$,

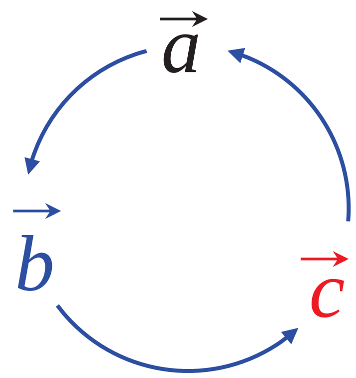
$\vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}$,

$$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot(c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k})$$

$$=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

即 $$[\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

2. 混合积的性质



(1) 轮换对称性：

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}] = [\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}] = [\vec{c}\ \vec{a}\ \vec{b}]$$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}.$

(2) 对任意实数 λ， μ， 有

$$[\vec{a}\ \vec{b}\ (\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})]=\lambda[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]+\mu[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{d}]$$

即 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\lambda\vec{c}+\mu\vec{d})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\mu(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d}$

例 已知$[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=2$，

计算$[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$.

解1 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{=0}+\vec{b}\times\vec{c}]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$$

$$=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c}}_{=0}$$

$$+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=0}+\underbrace{(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}}_{=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}$$

$$=2(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

解2 $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})]\cdot(\vec{c}+\vec{a})$

$$=[\vec{a}+\vec{b}\ \ \vec{b}+\vec{c}\ \ \vec{c}+\vec{a}]$$

$$=[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}$$

$$=2[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}]=4.$$

主要内容

混合积

1. 概念；　2. 性质.

<<　*　>>