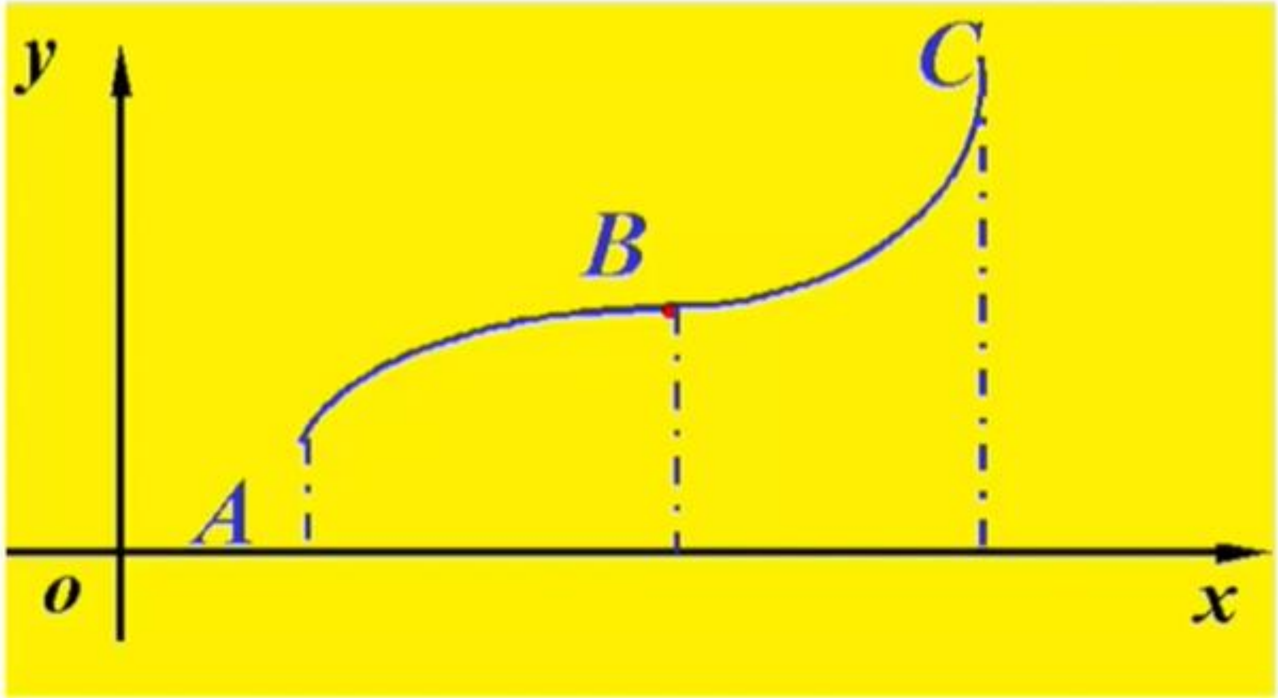
函数的凸性

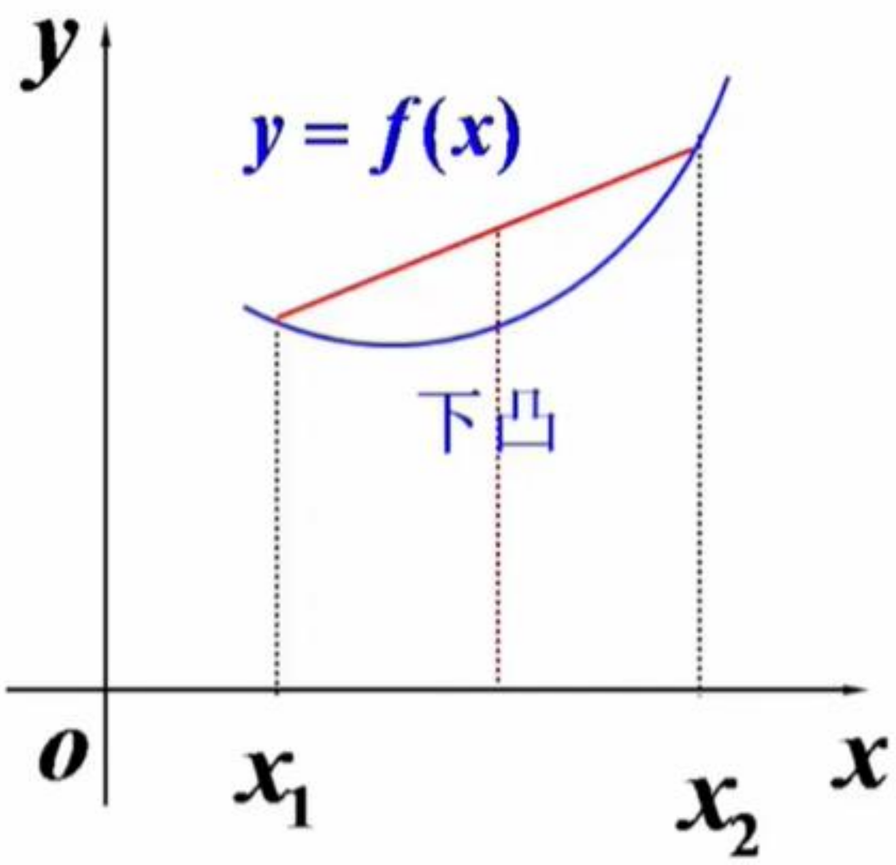
一、函数凸性的定义

二、函数凸性的判别法

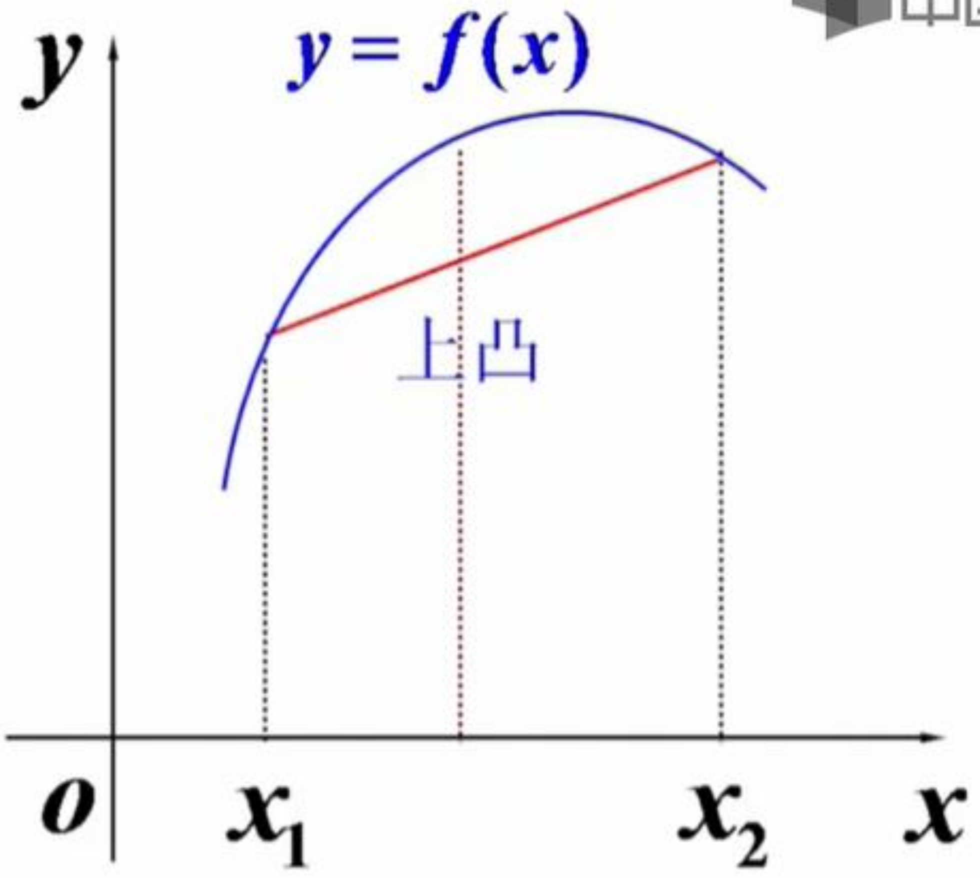
一、函数凸性的定义

问题:如何研究曲线的弯曲方向?



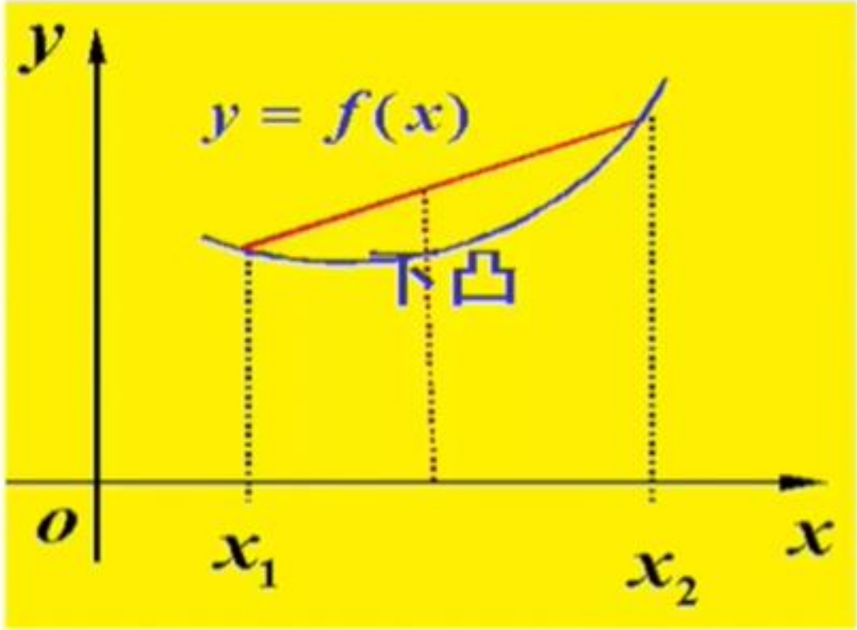


图形上任意弧段位
于所张弦的下方



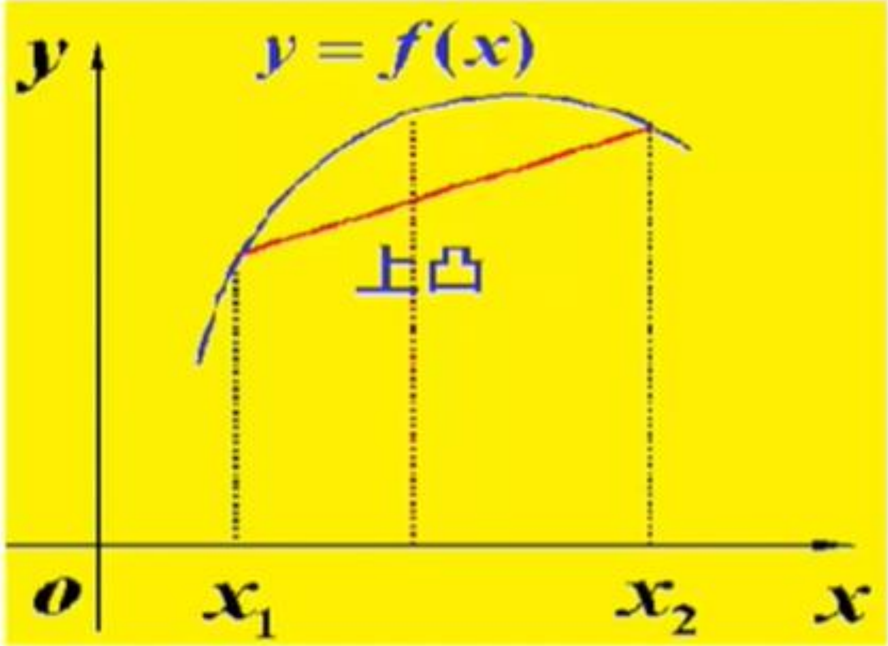
图形上任意弧段位
于所张弦的上方

定义 设$f(x)\in C[a,b]$,若对$\forall x_1,x_2\in(a,b)(x_1\neq x_2)$,$\forall t_1,t_2>0$,且$t_1+t_2=1$,有



若 $f(t_1x_1+t_2x_2)<t_1f(x_1)+t_2f(x_2)$,

则称$f(x)$在(a,b)内为下凸;



若 $f(t_1x_1+t_2x_2)>t_1f(x_1)+t_2f(x_2)$,

则称$f(x)$在(a,b)内为上凸.

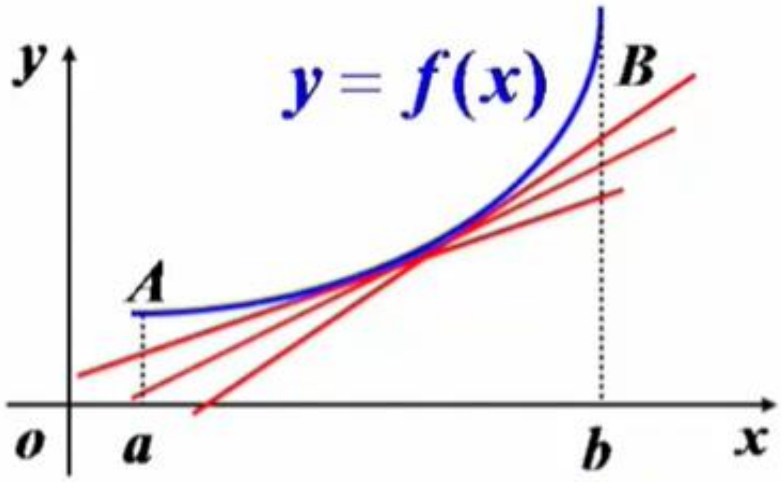
在不等式中若令 $t_1 = t_2 = \frac{1}{2}$，则分别有

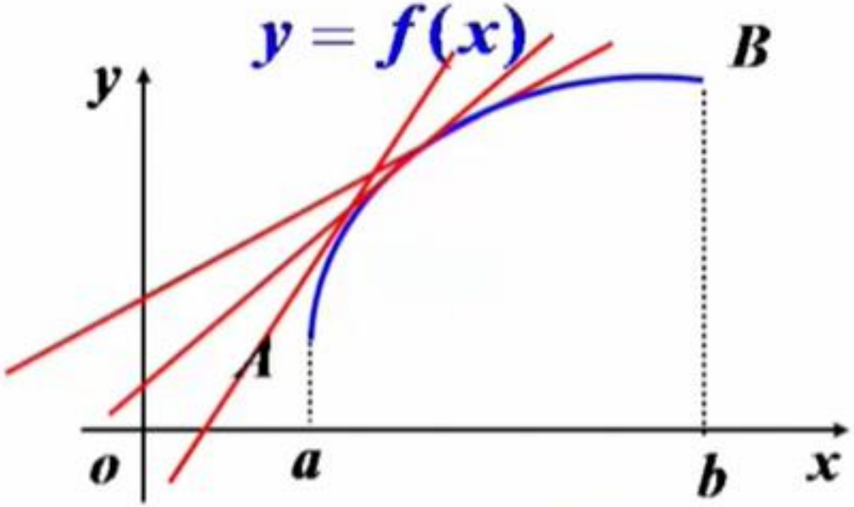
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \text{与}$$ 下凸

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$ 上凸

有时也用这两个不等式来定义函数上凸、下凸.

二、函数凸性的判别法





定理1 设 $f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，

(1)若 $f''(x)>0$，则 $f(x)$在(a,b)内为下凸；

(2)若 $f''(x)<0$，则 $f(x)$在(a,b)内为上凸.

证明：不妨设$f''(x)>0$，对$\forall x_1,x_2\in(a,b)(x_1<x_2)$及$\forall t_1,t_2\in(0,1),t_1+t_2=1$,

记$x_0=t_1x_1+t_2x_2$.显然$x_0\in(a,b)$，将$f(x)$在x_0展开为一阶泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-x_0)^2$$

（ξ介于x_0与x之间）

分别取$x=x_1$和x_2，有

$$f(x_1)=f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(x_1-x_0)^2$$

（ξ_1介于x_0与x_1之间）

$$f(x_2)=f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(x_2-x_0)^2$$

（ξ_2介于x_0与x_2之间）

因为在(a,b)内有$f''(x)>0$,所以

$$f(x_1)>f(x_0)+f'(x_0)(x_1-x_0) \qquad f(x_2)>f(x_0)+f'(x_0)(x_2-x_0)$$

所以

$$\begin{aligned}t_1f(x_1)+t_2f(x_2)&>f(x_0)+f'(x_0)[t_1(x_1-x_0)+t_2(x_2-x_0)]\\&=f(x_0)+f'(x_0)[t_1x_1+t_2x_2-x_0(t_1+t_2)]\\&=f(x_0)\\&=f(t_1x_1+t_2x_2)\end{aligned}$$

故$f(x)$在(a,b)内为下凸。

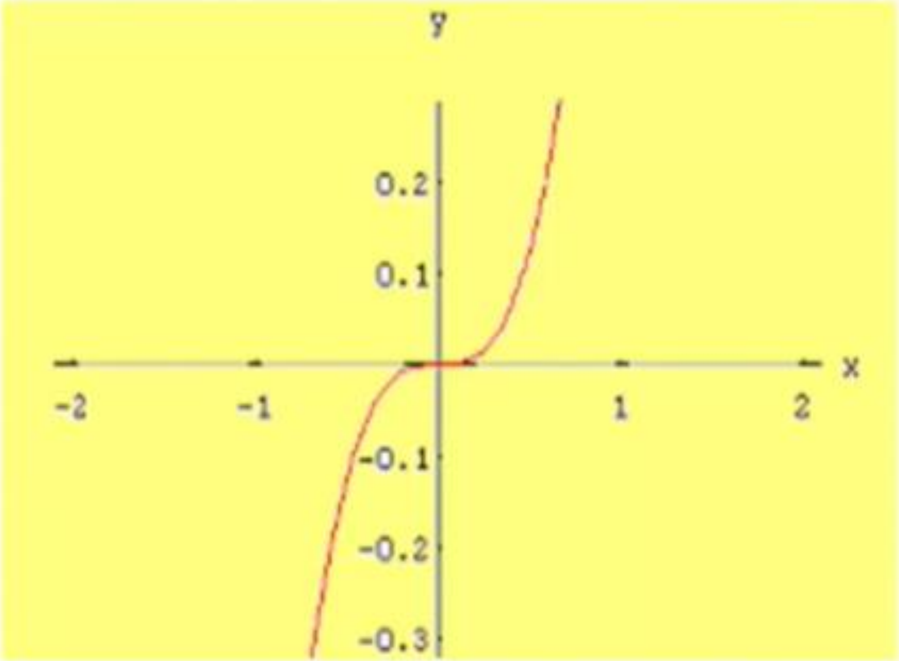
同理可以证明：若$f''(x)<0$,则$f(x)$在(a,b)内为上凸。

例1 判断函数 $y = x^3$ 的凸性.

解 $\because y' = 3x^2$, $y'' = 6x$,

当$x < 0$时, $y'' < 0$,

$\therefore$ 曲线 在$(-\infty, 0]$为上凸的;



当$x > 0$时, $y'' > 0$, $\therefore$ 曲线 在$[0, +\infty)$为下凸的;

注意到: **点$(0, 0)$是曲线由上凸变下凸的分界点.**

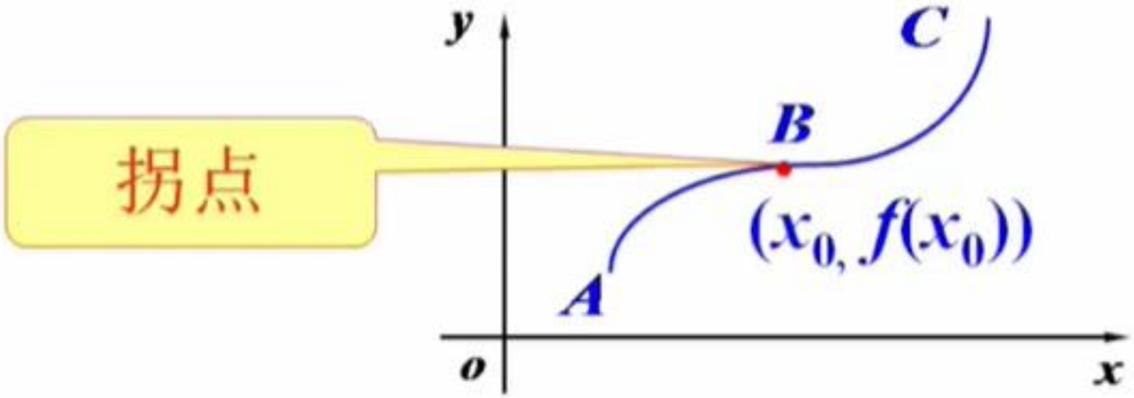
曲线的拐点

一、曲线拐点的定义

二、曲线拐点的求法

一、曲线拐点的定义

定义　设 $f(x)$ 在点x_0附近连续，若 $f(x)$ 在点x_0的左右两侧凸性相反，则称曲线上的点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.



注意:

(1)拐点$(x_0, f(x_0))$在曲线上,必满足曲线方程;

(2)拐点$(x_0, f(x_0))$是两个坐标,与 $f(x)$的极值点不同.

二、拐点的求法

定理2　如果$f(x)$在$(x_0-\delta, x_0+\delta)$内存在二阶导数，点$(x_0, f(x_0))$是拐点，则有：$f''(x_0)=0$

注意：

$f''(x_0)=0$只是$(x_0, f(x_0))$为$f(x)$的拐点的必要条件而不是充分条件。

例　$y=x^4$有$y''(0)=0$，但$(0, y(0))=(0,0)$却不是曲线的拐点.

定理3(拐点的充分条件)

设$f(x)$在(a,b)内二阶可导，$x_0 \in (a,b)$，$f''(x_0)=0$.

(1)、若在点x_0的两侧$f''(x)$异号，则点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点.

(2)、若在点x_0的两侧$f''(x)$保持同号，则点$(x_0, f(x_0))$为不是曲线$y=f(x)$的拐点.

注意: 若 $f''(x_0)$ 不存在,点 $(x_0, f(x_0))$ 也可能是连续曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

例2 求曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 的拐点.

解 当$x\neq 0$时，$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, $y''=-\frac{4}{9}x^{-\frac{5}{3}}$,

$x=0$是不可导点, y', y''均不存在.

但在$(-\infty,0)$内, $y''>0$, 曲线在$(-\infty,0]$上是下凸的;

在$(0,+\infty)$内, $y''<0$, 曲线在$[0,+\infty)$上是上凸的.

$\therefore$ 点$(0,0)$是曲线 $y=\sqrt[3]{x}$的拐点.

中国大学MOOC

综上所述可归纳出求曲线拐点的步骤:

(1)求出函数$f(x)$的二阶导数$f''(x)$;

(2)求解$f''(x)=0$的根;

(3)求出$f''(x)$不存在的点;

(4)将(2)和(3)中求出的点分别讨论它们左右两侧附近$f''(x)$的符号,

如果$f''(x)$的符号相异

则$(x_0, f(x_0))$是拐点,否则不是拐点.

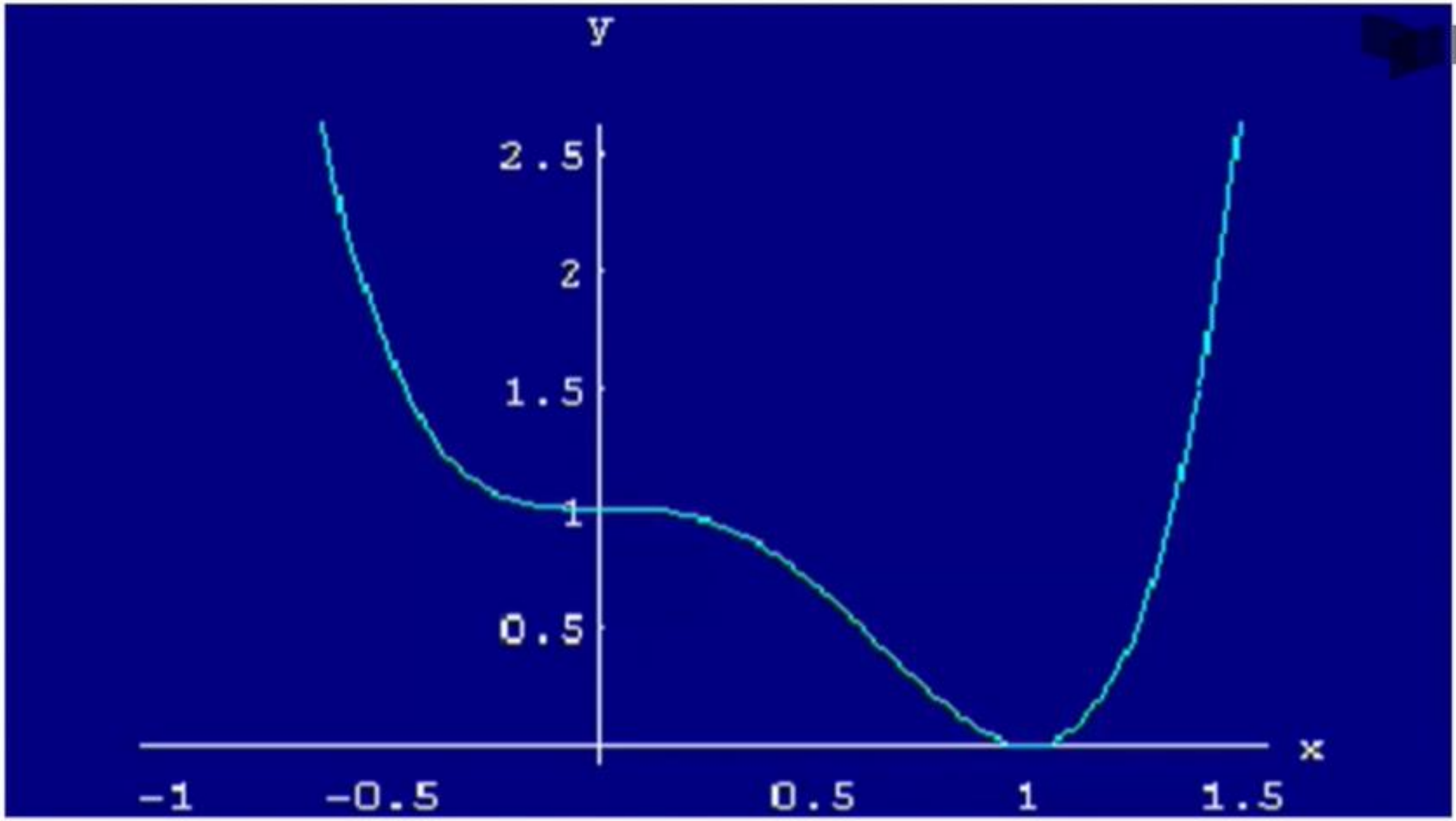
例3 求曲线 $y=3x^4-4x^3+1$ 的拐点及上(下)凸区间.

解 $\because D=(-\infty,+\infty)$

$$y'=12x^3-12x^2,\quad y''=36x(x-\frac{2}{3}).$$

令 $y''=0$，得 $x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3},+\infty)$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	下凸	拐点 $(0,1)$	上凸	拐点 $(\frac{2}{3},\frac{11}{27})$	下凸



$(-\infty,0]$下凸，$\left[0,\frac{2}{3}\right]$上凸，$\left[\frac{2}{3},+\infty\right]$下凸.

定理4 设函数$f(x)$在x_0的领域内三阶可导，且$f''(x_0)=0$,而$f'''(x_0)\neq 0$

那么,$(x_0,f(x_0))$是曲线$y=f(x)$的拐点.

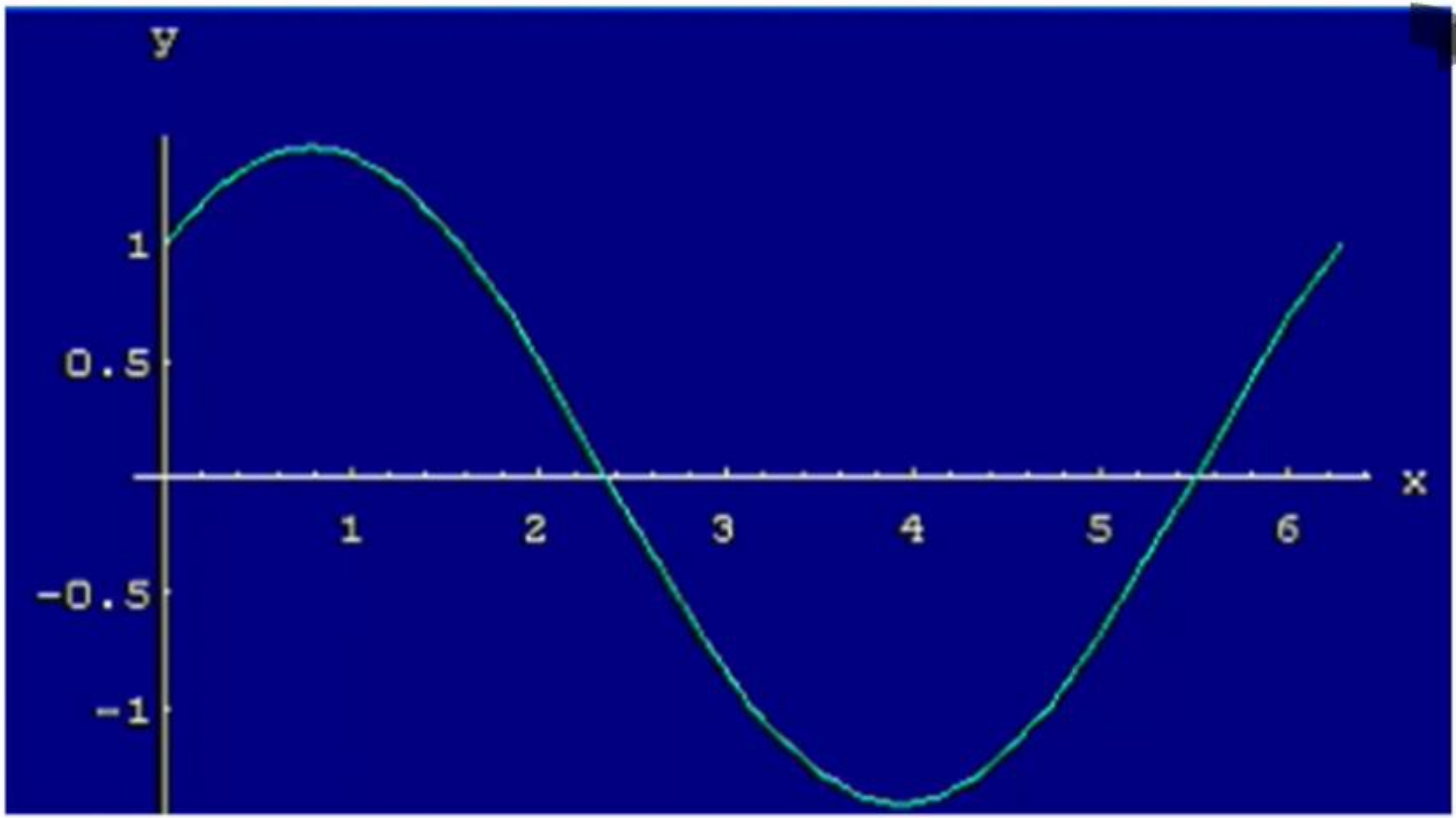
例4 **求曲线 $y=\sin x+\cos x$ 在$[0,2\pi]$内的拐点.**

解 $y'=\cos x-\sin x$, $y''=-\sin x-\cos x$,

$y'''=-\cos x+\sin x$.

令 $y''=0$, 得 $x_1=\dfrac{3\pi}{4}$, $x_2=\dfrac{7\pi}{4}$.

$f'''(\dfrac{3\pi}{4})=\sqrt{2}\neq 0$, $f'''(\dfrac{7\pi}{4})=-\sqrt{2}$


y
1
0.5
-0.5
-1
x
1
2
3
4
5
6