第二讲 向量的乘法

内　积

1.内积的概念与性质

2.内积的坐标形式

外　积

1.外积的概念与性质

2.外积的坐标形式

混合积

1.混合积的概念与性质

2.混合积的几何意义

内容小结

二、外积

1. 外积的概念

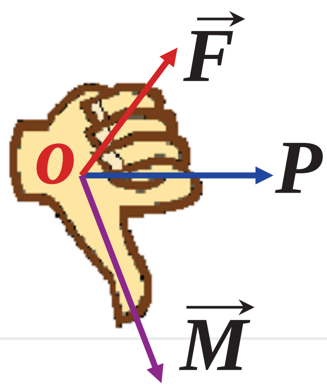
引例. 设 O 为杠杆 L 的支点，有一个与杠杆夹角为 θ 的力 $\vec{F}$ 作用在杠杆的 P 点上，则力 $\vec{F}$ 作用在杠杆上的力矩是一个向量 $\vec{M}$：

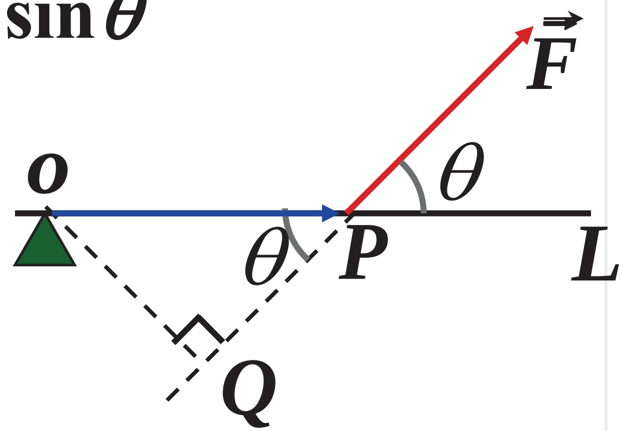
$$\|\vec{M}\| = \|\overrightarrow{OQ}\| \cdot \|\vec{F}\| = \|\overrightarrow{OP}\| \cdot \|\vec{F}\| \sin\theta$$

$\overrightarrow{OP} \to \vec{F} \to \vec{M}$ 符合右手规则

$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP}$

$\vec{M} \perp \vec{F}$





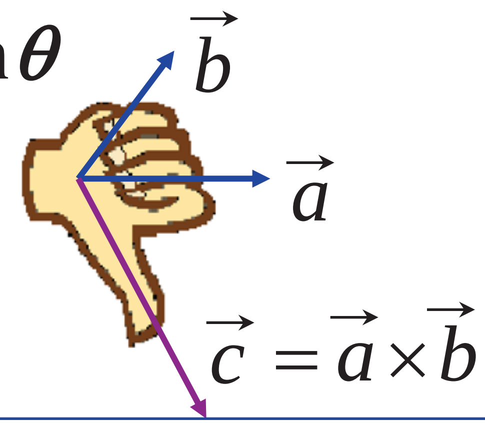
$$\|\overrightarrow{OQ}\| = \|\overrightarrow{OP}\| \sin\theta$$

定义 设$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ，定义

$$\text{向量 }\vec{c}\begin{cases}\text{方向}: \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}\text{ 且符合右手规则}\\ \text{模}: \|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta\end{cases}$$

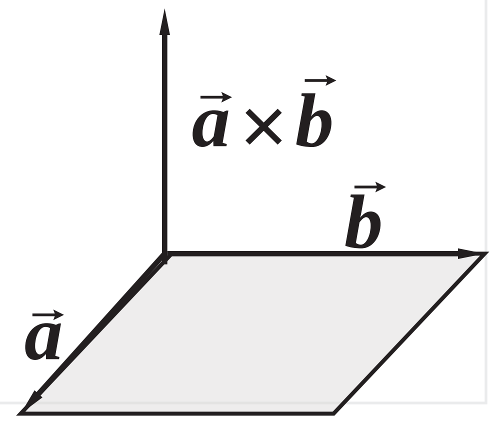
称 $\vec{c}$ 为向量$\vec{a}$与$\vec{b}$的 **外积**. 记作

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$



外积又称为**向量积（或叉积）**.

引例中的力矩 $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{OP}\times\overrightarrow{F}$



2. 外积的性质

(1) $\vec{a} // \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$;

(2) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$，特别 $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$, $\vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}$;

(3) $(\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$;

(4) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.

例1 设 $\|\vec{a}\| = 3, \|\vec{b}\| = 4$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$，求 $\|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\|$.

解 $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) = (\vec{a} \times \vec{a}) - (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{b} \times \vec{b})$

$$= 2(\vec{b} \times \vec{a})$$

$\therefore \quad \|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})\| = \|2(\vec{b} \times \vec{a})\| = 2\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| \sin\langle \vec{b}, \vec{a} \rangle$

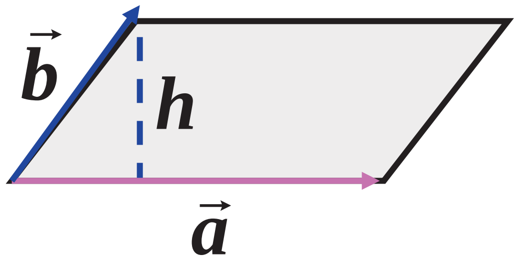
$= 2\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{a}\| = 2 \cdot 4 \cdot 3 = 24.$

几何意义

$$\|\vec{a}\times\vec{b}\| = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sin<\vec{a},\vec{b}>$$

$$= \|\vec{a}\| h$$

= 以 $\vec{a},\vec{b}$ 为邻边的平行四边形面积.



主要
内容

外积（向量积）

1. 概念；　2. 性质.

练习　设向量$\vec{m}, \vec{n}, \vec{p}$两两垂直，符合右手规则，且$\|\vec{m}\|=4$，$\|\vec{n}\|=2$，$\|\vec{p}\|=3$，计算$(\vec{m}\times\vec{n})\cdot\vec{p}$.

答案：　24.