

三、非齐次方程组解的性质

[illegible]

记 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, 则 $AX=b$ 的向量形式为:

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_n\alpha_n = b,$$

$$AX=b \text{ 有解} \Leftrightarrow b \text{ 可由 } \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \text{ 线性表出}$$

$$\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A)$$

$AX=0$ 称为 $AX=b$ 对应的齐次线性方程组(导出组).

◆ η_1, η_2 为 $AX = b$ 的解,

则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应齐次方程组的解.

证: $A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0.$

◆ η 为 $AX = b$ 的解, ξ 为 $AX = 0$ 的解,

则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证: $A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + 0 = b.$

$AX = b$ 的特解: $AX = b$ 的任一解.

◆ 设 η_0 为 $AX = b$ 的一个特解,

则 $AX = b$ 的任一解 η 可表为:

$$\eta = \eta_0 + \xi, \quad (\xi \text{ 为 } AX = 0 \text{ 的一个解})$$

证:

$$\eta = \eta_0 + \underline{(\eta - \eta_0)}$$

$AX = 0$ 的解, 设为 ξ

取 $AX = b$ 的任一特解 η_0 , 当 ξ 取遍导出组的全部解时,

$$\eta = \eta_0 + \xi$$

就得到 $AX = b$ 的全部解.

求 $AX=b$ 的通解(全部解), 需求:

(1) 一个特解 η_0 ;

(2) 对应导出组的全部解:

设 η_0 为 $AX=b$ 的一个特解,

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 为其导出组的一个基础解系,

则 $AX=b$ 的通解:

$$X = \eta_0 + k_1 \xi_1 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r}, \quad k_1, \dots, k_{n-r} \in R$$