第一章 矩阵及其初等变换

§1.2 高斯消元法、矩阵的初等变换

一. 线性代数方程组与同解变换

二. 初等变换与高斯消元法

三. 矩阵等价

四. 初等矩阵

电子科技大学 黄廷祝

一. 线性代数方程组与同解变换

方程组 $AX=b$

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

就是 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

齐次方程组: $AX = 0$;

非齐次方程组: $AX = b, \quad b \neq 0$
(b中至少有一分量不为零)

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 为$AX = b$的解: 若$AX = b$.

即 $x_1, \ldots, x_n$ 使得方程组成立

问题: 方程组何时有解?

若有解，有多少解？如何求出其全部解?

例1. 考虑方程组的如下同解变换:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \end{cases} \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \qquad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases} \qquad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

行简化阶梯矩阵

得一般解(无穷多组解)

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2 \\ x_2 = 3x_3 + 5 \end{cases}$$

自由未知量

例2. 若某方程组经同解变换化为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\ \ x_2 - x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\ \ x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

行阶梯形矩阵

显然，有唯一解.

例3. 若某方程组经同解变换化为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

即 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 0x_3 = 6 \end{cases}$ 显然，无解.

[结束]