二、矩阵的列秩和行秩

例3. 求行最简形矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩，

行秩(即行向量组的秩)和列秩(即列向量组的秩).

解: $R(A)=$ 行最简形中非零行的行数 $=2$.

A的行向量组:

$$\alpha_1=(1,2,0,4),\alpha_2=(0,0,1,3),\alpha_3=(0,0,0,0)$$

显然α_1,α_2线性无关, A的行向量组可由α_1,α_2线性表示,

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$是行向量组的一个最大无关组 $\Rightarrow$ A的行秩 $=2$

例3. 求行最简形矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$的秩，行秩和列秩.

解:

A的列向量组: $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$

显然β_1,β_2线性无关，其它列都可由β_1,β_2线性表示:

$$\beta_2=2\beta_1,\ \beta_4=4\beta_1+3\beta_2.$$

$\Rightarrow\beta_1,\beta_2$是$A$列组的一个最大无关组$\Rightarrow$ A的列秩$=2$

问题: 对一般的矩阵，秩=列秩=行秩?

设 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B$, $1 \le k \le n$

任取 A 的 k 列, 构成子矩阵 A_k,

相应选取 B 中相同的 k 个列, 构成子矩阵 B_k. 则:

$$A_k \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B_k,$$

行变换是方程组的同解变换, $A_kX=0$ 与 $B_kX=0$ 同解.

因此:

$$\begin{array}{ccc} A_kX=0\text{有非零解} & \Leftrightarrow & B_kX=0\text{有非零解} \\ \Updownarrow & & \Updownarrow \\ A_k\text{的列向量组线性相关} & \Leftrightarrow & B_k\text{的列向量组线性相关} \end{array}$$

逆否命题:

A_k 的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ B_k 的列向量组线性无关

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B, \quad A_k \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B_k,$$

A_k的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow B_k$的列向量组线性相关

逆否命题:

A_k的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow B_k$的列向量组线性无关

进而: A_k的列组是A列组的最大无关组

$\Leftrightarrow B_k$的列组是B列组的最大无关组

A的列秩 $= k \Leftrightarrow A$的列秩 $= k$

初等行变换不改变:

方程组的**解**, **列向量间的线性表出关系式**,

线性相关性, **最大无关组**, **列秩.**

定理2. 任一矩阵的秩, 行秩和列秩相等.

证: 设 $\mathrm{R}(A)=r$, A经由初等行变换化为行最简形 B:

$$A\to\cdots\to B=\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \boxed{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & e \\ \cdots & \cdots & O & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

B非零行首元1对应的 r 个列向量, 恰为向量$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$, 线性无关, 显然$B$的其它列可由这些列线性表示.

是B列组的最大无关组.

A中与B的这 r 个列对应的列是A列组的最大无关组.

$$A\text{的列秩}=B\text{的列秩}=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A)=r$$

$$A\text{的行秩}=A^T\text{的列秩}=\mathrm{R}(A^T)=\mathrm{R}(A)=r$$

例4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

试求A列向量组的秩和一个最大无关组,

并将其它列向量用最大无关组线性表示.

分析: 初等行变换不改变列组的秩, 最大无关组,

也不改变列组间的线性表示式,

将A经初等行变换化为行最简形B,

观察 B 的列向量组即可.

解:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$$\begin{array}{ccccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccccc}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{array}$$

显然，$\beta_1=\varepsilon_1,\beta_2=\varepsilon_2,\beta_4=\varepsilon_3$ 是矩阵B列组的最大无关组，

且B的其它列向量可由这3个列线性表示为：

$$\beta_3=-\beta_1-\beta_2,\ \beta_5=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_4.$$

因此A的列秩为3，$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是A列组的一个最大无关组，

$$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4.$$