

第三讲 曲面与空间曲线

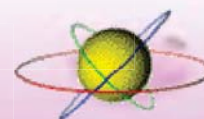
曲面方程

1. 柱面
2. 旋转曲面

空间曲线

1. 一般式方程
2. 参数式方程
- ▶ 3. 空间曲线在坐标面上的投影

内容小结

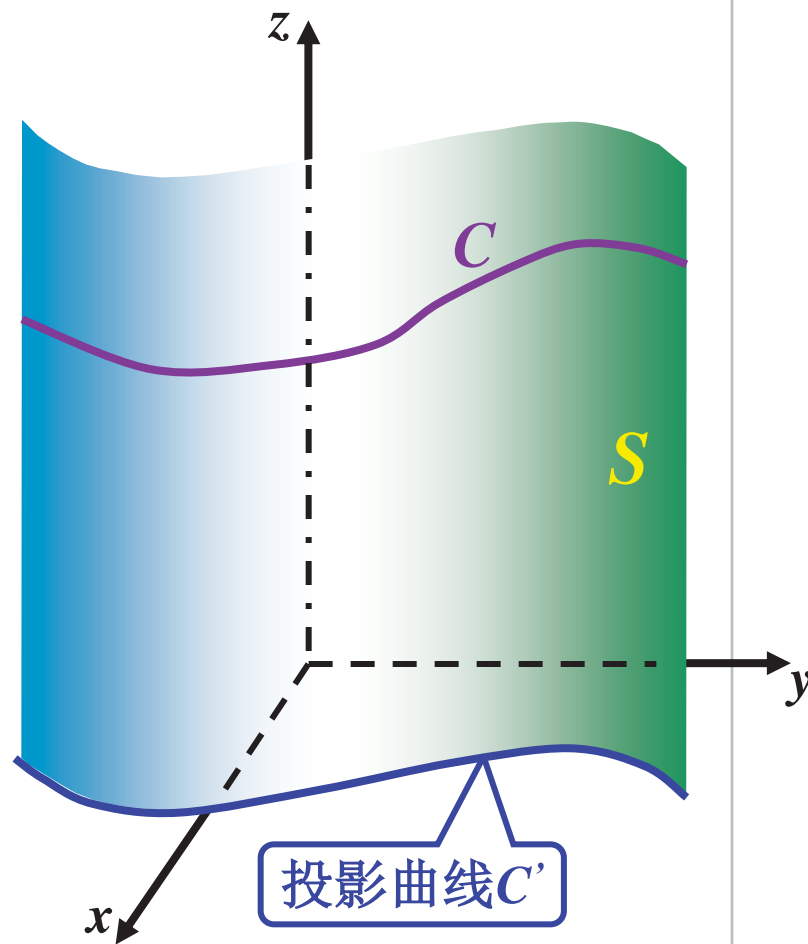


3. 空间曲线在坐标面上的投影

C : 空间曲线

S : 以 C 为准线, 母线与 z 轴平行的曲面, 称为**投影柱面**.

C' : 柱面 S 与 xoy 平面的交线, 称为 C 在 xoy 平面上的**投影曲线**.



设空间曲线的一般方程:

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

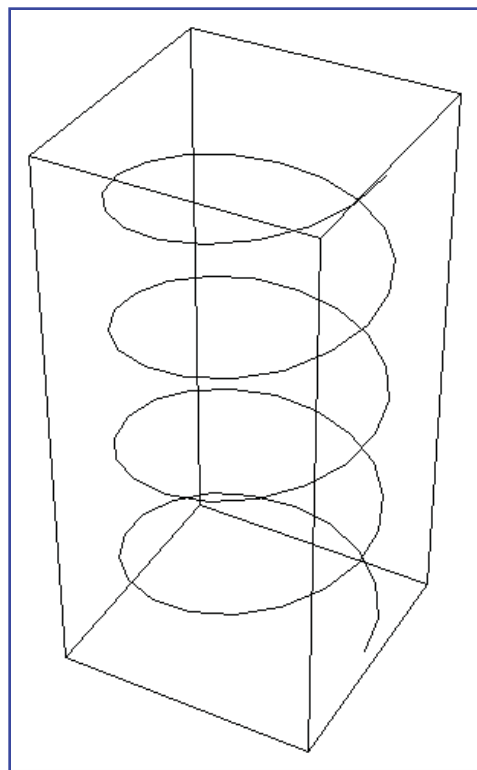
确定 C 在 xoy 面上的投影的一般过程为:

(1) 在(*)式中消去 z , 得投影柱面方程

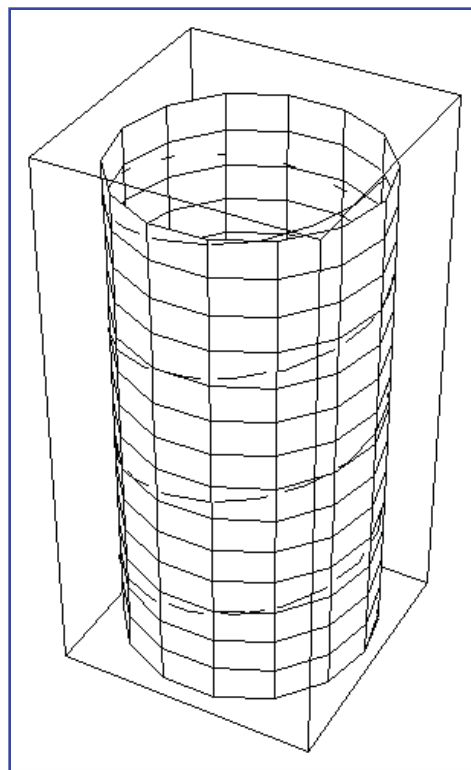
$$H(x, y) = 0$$

(2) $C': \begin{cases} H(x, y) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 就是 C 在 xoy 面上的投影方程.

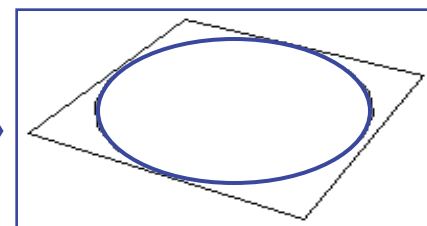
投影曲线的研究过程可用下面的几何图形表示：



空间曲线



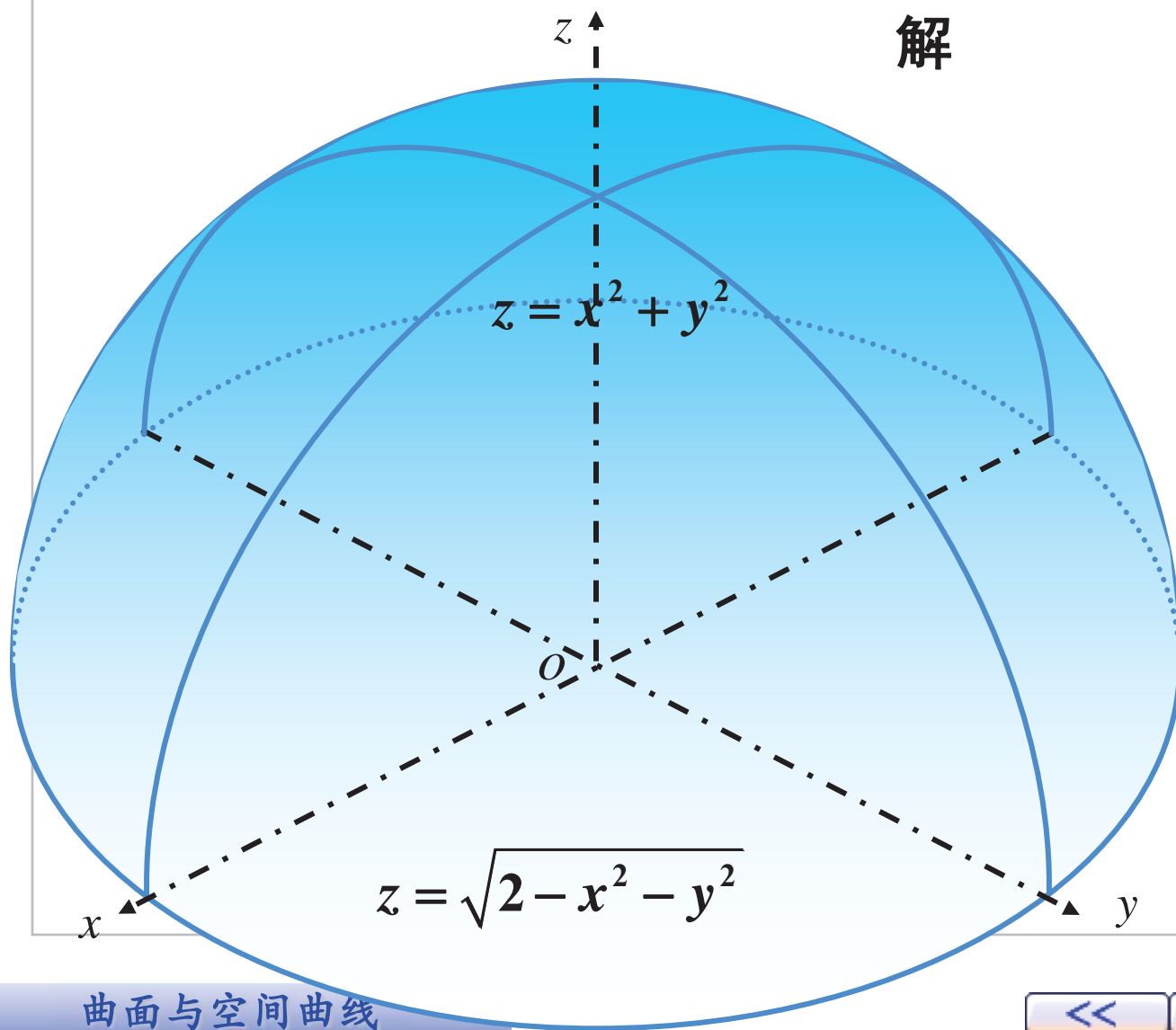
投影柱面



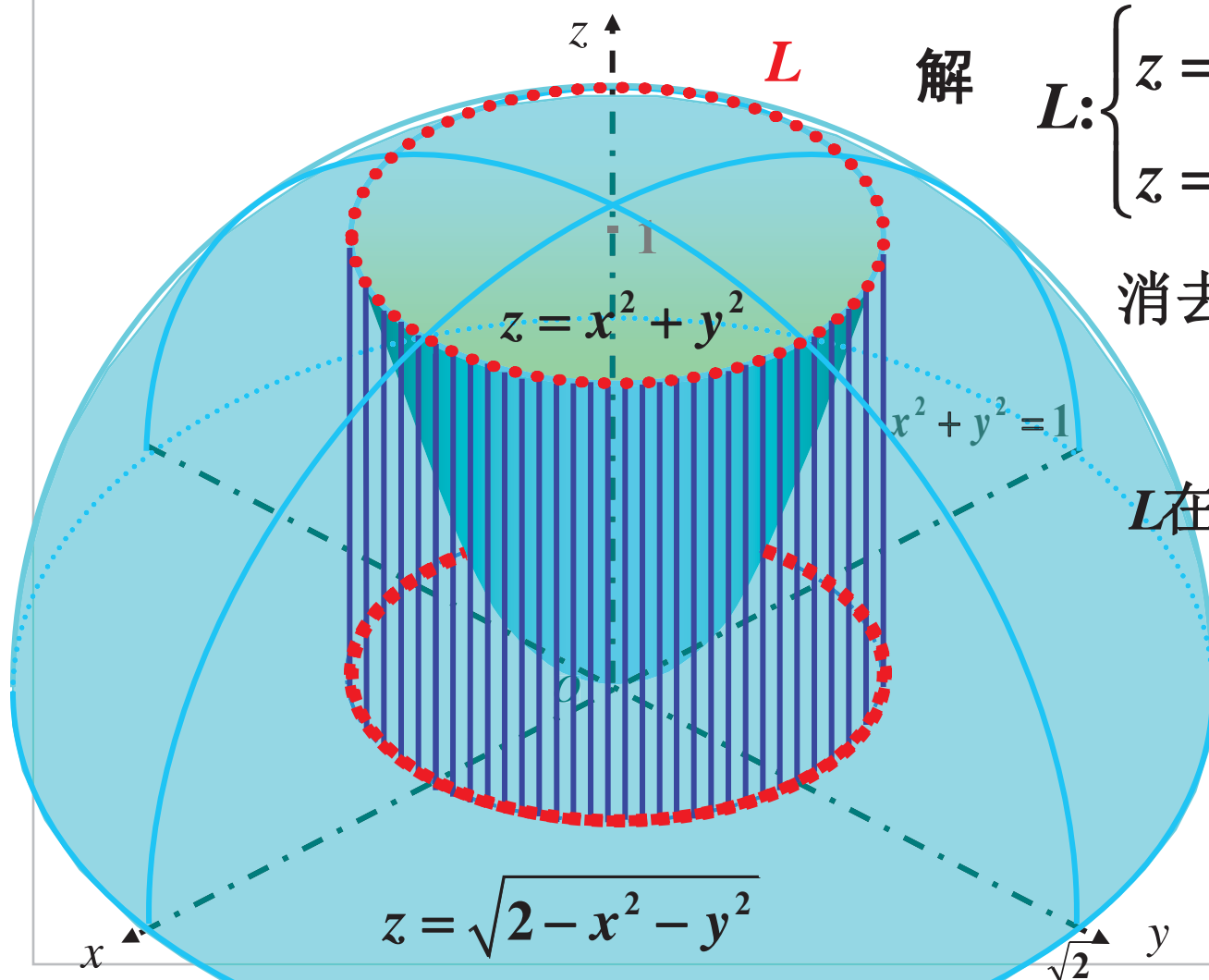
投影曲线

例1 求 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 的交线 L 在 xoy 面的投影.

解



例1 求 $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ 及 $z = x^2 + y^2$ 的交线 L 在 xoy 面的投影.



解

$$L: \begin{cases} z = \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$$

消去 z 得投影柱面

$$x^2 + y^2 = 1$$

L 在 xoy 面的投影为:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

例2 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$

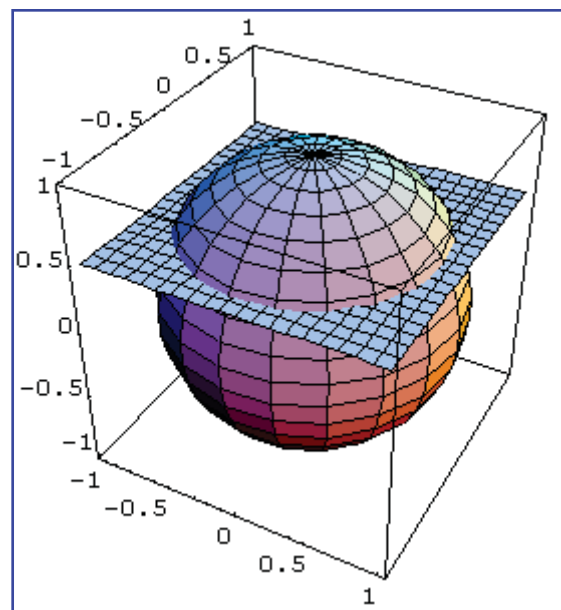
在坐标面上的投影.

解 (1) 消去变量 z 后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{3}{4} \\ z = 0 \end{cases}$$



(2) 因为曲线在平面 $z = \frac{1}{2}$ 上,

$z = \frac{1}{2}$ 即为投影柱面,

所以曲线在 xoz 面上的投影为线段:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, \\ y = 0 \end{cases} \quad |x| \leq \frac{\sqrt{3}}{2};$$

(3) 同理在 yoz 面上的投影也为线段:

$$\begin{cases} z = \frac{1}{2}, \\ x = 0 \end{cases} \quad |y| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

主要内容

空间曲线在坐标面上的投影

(1) 投影柱面 (2) 投影曲线

练习 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

(1) 消去 z 得曲线在 xoy 面的投影
$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 4xy - x = 0, \\ z = 0 \end{cases},$$

(2) 消去 y 得曲线在 xoz 面的投影
$$\begin{cases} x^2 + 5z^2 - 2xz - 4x = 0, \\ y = 0 \end{cases},$$

(3) 消去 x 得曲线在 yoz 面的投影
$$\begin{cases} y^2 + z^2 + 2y - z = 0, \\ x = 0 \end{cases}.$$