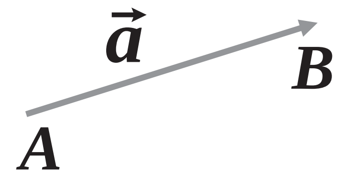
第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系
- 向量及其线性运算
- 向量在轴上的投影
- 向量线性运算的几何意义
- 向量的方向余弦
- 内容小结

二、向量及其线性运算

1. 向量的概念



向量：既有大小又有方向的量.

向量的表示：以A为起点，B为终点的有向线段.

记为 $\overrightarrow{AB}$ 或 $\vec{a}$.

向量的模：向量的大小. 记为$\|\vec{a}\|$或 $\|\overrightarrow{AB}\|$

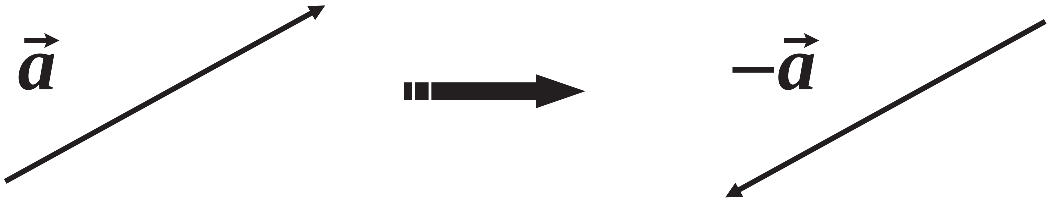
（模又称为**长度**或**范数**）.

单位向量：模为1的向量.

零向量：模为0的向量 $\vec{0}$. 零向量没有确定的方向.

<< * >>

负向量： 与 $\vec{a}$ 的模相同而方向相反的向量称为 $\vec{a}$ 的负（反）向量，记为 $-\vec{a}$.



显然 $-(-\vec{a})=\vec{a}$.

向量 $\overrightarrow{AB}$ 的负向量为 $\overrightarrow{BA}$，即：$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

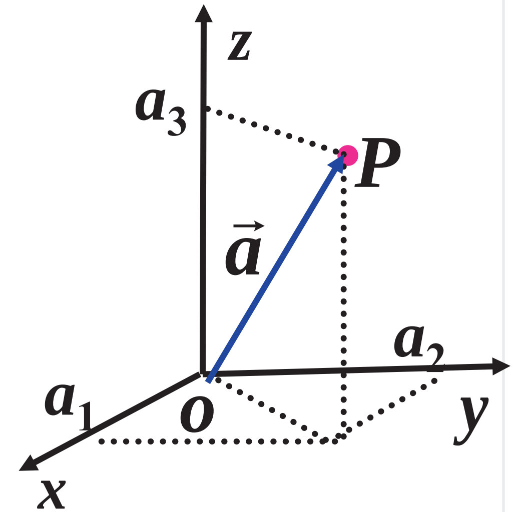
相等向量： 大小相等且方向相同的向量.

向量由其模和方向确定，与它的位置无关，称为**自由向量**. 以原点为起点的向量称为**径向量**（径矢、向径）.

2.向量的坐标表示

对空间向量 $\vec{a}$ 作平移，使其起点与原点重合，设终点为P，则 $\vec{a}$ 确定了点 P. 反之，空间中任一点 P 也确定一向量 $\overrightarrow{OP}$.

$$\text{点}P \xleftrightarrow{1-1\text{对应}} \overrightarrow{OP}$$



向量的坐标：设$\vec{a}$对应的向径为$\overrightarrow{OP}$，点P的坐标为(a_1, a_2, a_3)，称 a_1, a_2, a_3为向量 $\vec{a}$ 的坐标或分量.

记为 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$.

零向量记为 $\vec{0}=(0,0,0)$，有时简记为0.

$\vec{a}$ 的负向量 $-\vec{a}=(-a_1, -a_2, -a_3)$.

$$(a_1,a_2,a_3)=(b_1,b_2,b_3)\Leftrightarrow a_1=b_1,a_2=b_2,a_3=b_3.$$

3. 向量的线性运算

定义 向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$与$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$的加法规定为

$$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$$

$\vec{a}$与数k的乘法(简称数乘)规定为

$$k\cdot\vec{a}=(ka_1,ka_2,ka_3)$$

加法与数乘统称为线性运算.

减法：$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

或 $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$

八条运算规则:

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

(3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

(4) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$

加法

(5) $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$

(6) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

数乘

(7) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$

(8) $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

加法与数乘

例1. 求解以向量为未知元的线性方程组

$$\begin{cases} 5\vec{x}-3\vec{y}=\vec{a} & ① \\ 3\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b} & ② \end{cases}$$

其中 $\vec{a}=(2,1,2),\ \vec{b}=(-1,1,-2).$

解 2×① −3×②，得

$$\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}=(7,-1,10)$$

代入②得

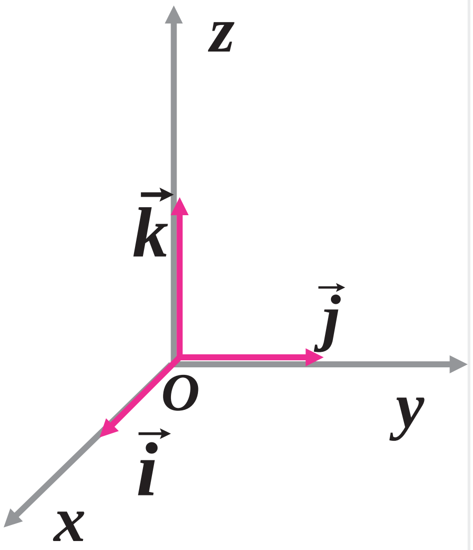
$$\vec{y}=\frac{1}{2}(3\vec{x}-\vec{b})=(11,-2,16)$$

4. 基向量及向量的线性表示

在 x, y, z 轴上分别取单位向量

$$\vec{i} = (1,0,0),\ \vec{j} = (0,1,0),\ \vec{k} = (0,0,1)$$

称为基向量.



则 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$= (a_1, 0,0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)$$

$$= a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

称 $\vec{a}$ 可由 $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ 线性表出(示).

即：任一向量均可由基向量组线性表出. 表出的系数就是向量的坐标.

主要内容

向量及其线性运算

1. 向量的概念与坐标表示;
2. 向量的线性运算法则.

练习 已知向量$\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$及$\vec{c}=-2\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, 则$2\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}=$________________;

答案: $10\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$