第五章 特征值与特征向量

5.3 n维向量空间的正交性

何军华

电子科技大学

回顾

在三维几何空间$\mathbb{R}^3$中：

向量的内积 $\Rightarrow$ 向量的长度

向量的夹角

正交的概念

本节目的

将$\mathbb{R}^3$中的概念推广到$\mathbb{R}^n$中

*Schmidt*正交化方法

正交矩阵

一. 内 积

内积: 设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in\mathbb{R}^n$,

规定 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha\beta^T$,

称为α与β的**内积**.

性质: (1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

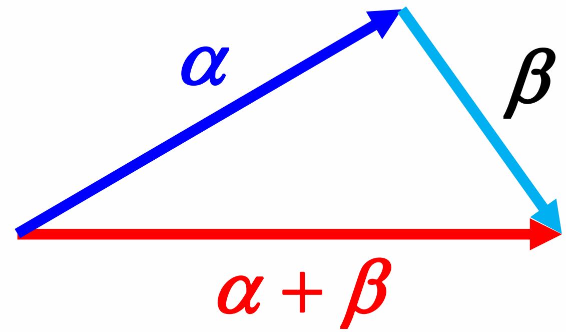
(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$, $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(2′) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$, $(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当$\alpha=0$时等号成立.

长度: $$\|\alpha\| = \sqrt{a_1^{\,2} + a_2^{\,2} + \cdots + a_n^{\,2}} = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$$

性质:



1^o 非负性 $\|\alpha\| \geq 0$;

2^o 齐次性 $\|k\alpha\| = |k| \cdot \|\alpha\|$;

3^o 三角不等式(*Minkowski*不等式)

$$\|\alpha + \beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

H. Minkowski (1864-1909), 德国数学家

在数论与代数学领域有重要贡献;

为广义相对论奠定了数学基础.

单位向量: $\|\alpha\|=1$: α称为单位向量.

设$\alpha\neq 0$, 令$\alpha_e=\dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$,则:

$$\|\alpha_e\|=\sqrt{(\alpha_e,\alpha_e)}=\sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha,\alpha)}=1.$$

夹角:

$$\langle\alpha,\beta\rangle=\arccos\frac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$: α与β的夹角.

问题: $\left|\dfrac{(\alpha,\beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}\right|\leq 1$?

二. Cauchy-Schwarz不等式:

$\left|(\alpha,\beta)\right| \le \|\alpha\|\|\beta\|$，当且仅当$\alpha$与$\beta$线性相关时等号成立.

分量形式的*Cauchy*不等式:

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

积分不等式:

$$f(x),g(x)\in C[a,b] \Rightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Cauchy, A. (1789-1857)，法国数学家.

789篇论文;

微积分的严密化;

在复变函数论, 几何学,代数学, 几何学,

误差理论, 天体力学, 光学, 弹性力学,

微分方程等学科均有重要贡献.

Schwarz, H. A. (1843-1921)，德国数学家.

对复变函数, 微分方程, 变分学, 初等几何

有重要贡献;

补救了*Riemann*映射定理的缺陷;

证明同体积的几何体中表面积最小的是球.

结论: 三角不等式 $\Leftrightarrow$ Cauchy不等式

$$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow |(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|, \forall \alpha,\beta \in \mathbb{R}^n$$

证:

$$\|\alpha+\beta\| \le \|\alpha\| + \|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow \|\alpha+\beta\|^2 \le \left(\|\alpha\| + \|\beta\|\right)^2 = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 + 2\|\alpha\|\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta,\alpha+\beta) \le (\alpha,\alpha) + (\beta,\beta) + 2\|\alpha\|\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha,\beta) \le 2\|\alpha\|\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta) \le \|\alpha\|\|\beta\| \quad \Leftarrow \quad |(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$$

Cauchy不等式: $$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|,$$

当且仅当α,β线性相关时等号成立.

证: (1) 若α,β线性无关, 则: $\forall t\in\mathbb{R}$, $t\alpha+\beta\neq 0$,

$$\Rightarrow (t\alpha+\beta,t\alpha+\beta)=t^2(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+(\beta,\beta)>0,$$

$$\Rightarrow [2(\alpha,\beta)]^2-4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta)<0$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta)^2<\|\alpha\|^2\|\beta\|^2 \qquad \Rightarrow |(\alpha,\beta)|<\|\alpha\|\|\beta\|$$

(2) 设α,β线性相关, 不妨设$\beta=k\alpha$:

$$(\alpha,\beta)^2=(\alpha,k\alpha)^2=k^2(\alpha,\alpha)^2=(\alpha,\alpha)(k\alpha,k\alpha)=\|\alpha\|^2\|\beta\|^2$$

$$\Rightarrow |(\alpha,\beta)|=\|\alpha\|\|\beta\|.$$

综合(1)(2)知, 等号成立当且仅当α,β线性相关.

三. 正交向量组与标准正交基

正交向量组:

α与β正交$:(\alpha,\beta)=0$.

正交向量组$:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$

两两正交且不含零向量.

如$:\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(-1,2,-1),\alpha_3=(-1,0,1)$

$$(\alpha_1,\alpha_2)=(\alpha_1,\alpha_3)=(\alpha_2,\alpha_3)=0$$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$:正交向量组

例1. 设 A 是 n 阶反对称矩阵, x 是 n 维列向量,

且 $Ax = y$. 证明: x 与 y 正交.

分析: A反对称 $\Rightarrow A^T = -A$

x 与 y 正交? $\Leftrightarrow (x, y) = 0$?

证: $(x, y) = x^T y = x^T Ax$

两端同取转置

$$(x, y) = x^T A^T x = -x^T Ax = -x^T y = -(x, y)$$

$$\Rightarrow (x, y) = 0$$

定理1. 正交向量组必然线性无关.

证: 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 是正交向量组, 且

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha_1, k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_s\alpha_s)$$

$$= k_1(\alpha_1, \alpha_1) + k_2(\alpha_1, \alpha_2) + \cdots + k_s(\alpha_1, \alpha_s)$$

$$= k_1(\alpha_1, \alpha_1) = 0,$$

$\because \quad (\alpha_1, \alpha_1) > 0, \quad \therefore \quad k_1 = 0,$

同理: $k_2 = k_3 = \cdots = k_s = 0,$

$\therefore \quad \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ 线性无关

线性无关向量组未必是正交向量组.

如：$\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$

例2. 设 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,-2,1)$,

求 α_3, 使 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为正交向量组.

解: 设 $\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)$, 则:

$$(\alpha_1,\alpha_3)=x_1+x_2+x_3=0$$

$$(\alpha_2,\alpha_3)=x_1-2x_2+x_3=0$$

$$\alpha_3=(1,0,-1).$$

标准正交向量组

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 满足：

(1) $(\alpha_i,\alpha_j)=0,(i\neq j,\alpha_i\neq 0,\alpha_j\neq 0)$

(2) $\|\alpha_i\|=1,(i=1,2,\cdots,s)$

则称 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 是标准(规范)正交向量组.

如 $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$

是$\mathbb{R}^n$的标准正交基.

$$\alpha_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\alpha_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\alpha_3=(0,1,0)$$

是$\mathbb{R}^3$的标准正交基.

四. Gram-Schmidt 正交化方法

已知 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，试求正交向量组 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 使得 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 与 $\beta_1,\cdots,\beta_i$ 等价?

思路：归纳法 令 $\beta_1=\alpha_1$

令 $\beta_2=\alpha_2+k\beta_1$，选取适当的 k 使得 $(\beta_2,\beta_1)=0$，

$$(\alpha_2+k\beta_1,\beta_1)=(\alpha_2,\beta_1)+k(\beta_1,\beta_1)=0,$$

$$\Rightarrow k=-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)},\quad \beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1.$$

令 $\beta_3=\alpha_3+k_1\beta_1+k_2\beta_2$,

求k_1, k_2 使得 $(\beta_1,\beta_3)=(\beta_2,\beta_3)=0$

$$0=(\beta_1,\beta_3)=(\beta_1,\alpha_3)+k_1(\beta_1,\beta_1)\Rightarrow k_1=-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)},$$

$$0=(\beta_2,\beta_3)=(\beta_2,\alpha_3)+k_2(\beta_2,\beta_2)\Rightarrow k_2=-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}$$

$$\Rightarrow \beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\ \beta_1)}{(\beta_1,\ \beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\ \beta_2)}{(\beta_2,\ \beta_2)}\beta_2$$

一般的，类似可得

$$\beta_s=\alpha_s-\frac{(\alpha_s,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_s,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2-\cdots-\frac{(\alpha_s,\beta_{s-1})}{(\beta_{s-1},\beta_{s-1})}\beta_{s-1}.$$

$$s=2,\cdots,n$$

进而，再令 $\gamma_i=\frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$，

则 $\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_s$ 是规范正交组，并且

$\alpha_1,\cdots,\alpha_i$ 与 $\gamma_1,\cdots,\gamma_i$ 等价.

$$\beta_1 = \alpha_1$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\beta_s = \alpha_s - \frac{(\alpha_s, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_s, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2 - \cdots - \frac{(\alpha_s, \beta_{s-1})}{(\beta_{s-1}, \beta_{s-1})}\beta_{s-1} .$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\gamma_i = \frac{1}{\|\beta_i\|}\beta_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

例3. 将 $\alpha_1=(1,1,1),\alpha_2=(1,2,1),\alpha_3=(0,-1,1)$ 规范正交化.

解: (1) 正交化

$$\beta_1=\alpha_1=(1,1,1),$$

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(1,2,1)-\frac{4}{3}(1,1,1)=\frac{1}{3}(-1,2,-1),$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\cdots=\frac{1}{2}(-1,0,1),$$

$$\beta_1=(1,1,1),\ \beta_2=\frac{1}{3}(-1,2,-1),\ \beta_3=\frac{1}{2}(-1,0,1).$$

(2) 单位化

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2=\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\beta_3\|}\beta_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1).$$

注意：将 $\beta=\frac{1}{k}\alpha$ 单位化，只需将 α 单位化即可. 为什么？

五. 正交矩阵

将例3中的$\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$作为列向量组构造矩阵$A$:

$$A=(\gamma_1\quad\gamma_2\quad\gamma_3)=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$AA^T=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=I$$

若实矩阵 A 满足 $AA^T=A^TA=I$，则称 A 为正交矩阵.

性质:

(1) $A^{-1}=A^T$,

(2) $|A|=\pm 1$,

(3) 正交矩阵的乘积也是正交矩阵.

设 $A^TA=AA^T=I \quad B^TB=BB^T=I$，则:

$$(AB)^T(AB)=B^TA^TAB=B^TB=I.$$

(4) A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行(列)向量组都是规范正交向量组.

思考: $A^*, A^{-1}, A^T, A+B, A-B$ 是正交矩阵吗?

(4) A 为正交矩阵 $\Leftrightarrow$ A 的行(列)向量组都是规范正交向量组.

证明: 设 $A=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, A^T=\left(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T\right)$, 则

$$AA^T=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_1^T & \alpha_1\alpha_2^T & \cdots & \alpha_1\alpha_n^T\\ \alpha_2\alpha_1^T & \alpha_2\alpha_2^T & \cdots & \alpha_2\alpha_n^T\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \alpha_n\alpha_1^T & \alpha_n\alpha_2^T & \cdots & \alpha_n\alpha_n^T\end{pmatrix}=I$$

$$\Leftrightarrow \alpha_i\alpha_i^T=1,\quad \alpha_i\alpha_j^T=0\,(i\neq j).$$

$$\Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_i)=1,\quad (\alpha_i,\alpha_j)=0\,(i\neq j).$$

例4. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为正交矩阵，

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\quad \beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3),$$

证明：$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$是正交矩阵.

方法1: 证明 $(\beta_i,\beta_j)=0\,(i\neq j)$， $\|\beta_i\|=1,(i=1,2,3)$.

$$(\beta_1,\beta_1)=\frac{1}{9}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3)=\frac{1}{9}(4+4+1)=1$$

$$(\beta_1,\beta_2)=\frac{1}{9}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3,2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3)=\frac{1}{9}(4-2-2)=0$$

$$(\beta_1,\beta_3)=\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

例4. 设$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为正交矩阵,

$$\beta_1=\frac{1}{3}(2\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3),\quad \beta_2=\frac{1}{3}(2\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3),$$

$$\beta_3=\frac{1}{3}(\alpha_1-2\alpha_2-2\alpha_3),$$

证明:$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$是正交矩阵.

方法2: 证明$B^TB=I$即可:

$$B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=\frac{1}{3}\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}2&2&1\\2&-1&-2\\-1&2&-2\end{pmatrix}}_{C}=\frac{1}{3}AC$$

$$B^TB=\frac{1}{9}(AC)^T(AC)=\frac{1}{9}C^TA^TAC=\frac{1}{9}C^TC=I$$

例5. 设$A=(a_{ij})_{3\times 3}$是3阶正交矩阵, $a_{11}=1, b=(1,0,0)^T$,

求线性方程组 $AX=b$ 的解.

证明:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}&=1 \\ a_{11}^2+a_{12}^2+a_{13}^2&=1 \\ a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2&=1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$$

$$\Rightarrow AX=b: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{有解} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A正交 $\Rightarrow$ A可逆 $\Rightarrow$ $AX=b$有唯一解 $\Rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

例6. 设 A 是奇数阶正交矩阵且 $\det A=1$.

证明：1 是 A 的特征值.

分析: A正交 $\Rightarrow A^TA=I$　　$|I-A|=0?$

$$|I-A| = |A^TA-A| = |(A^T-I)A|$$

$$= |A^T-I|\cdot|A| = |A^T-I^T|$$

$$= |(A-I)^T| = |A-I|$$

$$= (-1)^n|I-A| = -|I-A|$$

$\Rightarrow |I-A|=0$　　所以 1 是 A 的特征值.