二. Cauchy-Schwarz不等式:

$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|$，当且仅当$\alpha$与$\beta$线性相关时等号成立.

分量形式的Cauchy不等式:

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

积分不等式:

$$f(x),g(x)\in C[a,b] \Rightarrow$$

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx\right)^2 \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)\left(\int_a^b g^2(x)dx\right)$$

Cauchy, A. (1789-1857)，法国数学家.

789篇论文;

微积分的严密化;

在复变函数论, 几何学,代数学, 几何学,

误差理论, 天体力学, 光学, 弹性力学,

微分方程等学科均有重要贡献.

Schwarz, H. A. (1843-1921)，德国数学家.

对复变函数, 微分方程, 变分学, 初等几何

有重要贡献;

补救了*Riemann*映射定理的缺陷;

证明同体积的几何体中表面积最小的是球.

结论: 三角不等式 $\Leftrightarrow$ Cauchy不等式

$$\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n \Leftrightarrow |(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\|\beta\|,\forall\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$$

证:

$$\|\alpha+\beta\|\le\|\alpha\|+\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow \|\alpha+\beta\|^2\le(\|\alpha\|+\|\beta\|)^2=\|\alpha\|^2+\|\beta\|^2+2\|\alpha\|\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta,\alpha+\beta)\le(\alpha,\alpha)+(\beta,\beta)+2\|\alpha\|\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha,\beta)\le 2\|\alpha\|\|\beta\|$$

$$\Leftrightarrow (\alpha,\beta)\le\|\alpha\|\|\beta\| \quad \Leftarrow \quad |(\alpha,\beta)|\le\|\alpha\|\|\beta\|$$

Cauchy不等式: $$|(\alpha,\beta)| \le \|\alpha\|\|\beta\|,$$

当且仅当α,β线性相关时等号成立.

证: (1) 若α,β线性无关, 则: $\forall t \in \mathbb{R}$, $t\alpha+\beta \ne 0$,

$$\Rightarrow (t\alpha+\beta, t\alpha+\beta) = t^2(\alpha,\alpha)+2t(\alpha,\beta)+(\beta,\beta) > 0,$$

$$\Rightarrow [2(\alpha,\beta)]^2 - 4(\alpha,\alpha)(\beta,\beta) < 0$$

$$\Rightarrow (\alpha,\beta)^2 < \|\alpha\|^2\|\beta\|^2 \qquad \Rightarrow |(\alpha,\beta)| < \|\alpha\|\|\beta\|$$

(2) 设α,β线性相关, 不妨设$\beta=k\alpha$:

$$(\alpha,\beta)^2 = (\alpha,k\alpha)^2 = k^2(\alpha,\alpha)^2 = (\alpha,\alpha)(k\alpha,k\alpha) = \|\alpha\|^2\|\beta\|^2$$

$$\Rightarrow |(\alpha,\beta)| = \|\alpha\|\|\beta\|.$$

综合(1)(2)知, 等号成立当且仅当α,β线性相关.