五、特征多项式

1. 特征多项式的定义和性质

给定n阶矩阵 A,

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22} & \cdots & -a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为矩阵 A **的特征多项式**.

$$\lambda\text{是}A\text{的特征值}\Leftrightarrow f_A(\lambda)=0$$

设 $f_A(\lambda)=|\lambda I-A|=(\lambda-1)(\lambda+2)^4$:

(1) $\lambda=1$: A 的单特征值

(2) $\lambda=-2$: A 的4重特征值

$$f_A(\lambda)=|\lambda I-A|$$

$$=\lambda^n-(a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn})\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n|A|$$

设A的特征值是:$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则:

$$f_A(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\cdots(\lambda-\lambda_n)$$

$$=\lambda^n-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n)\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

$$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}=\mathrm{Tr}(A)$$

$$\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=|A|$$

2. 特征值的代数重数与几何重数

设λ是n阶矩阵A的特征值, 则

(1) λ作为A特征多项式根的重数

称为λ的代数重数.

(2) λ相应的特征子空间的维数

$$\dim V_{\lambda} = n - R(\lambda I - A)$$

即属于该特征值线性无关向量的最大个数

称为λ的几何重数.

$1 \le$ 几何重数 $\le$ 代数重数

例6. 设 $A=\begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix}$，求$A$的特征值与特征向量.

解:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -a & \cdots & -a \\ -a & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & -a & \cdots & -a \\ 1 & \lambda-a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -a & \cdots & \lambda-a \end{vmatrix}=(\lambda-na)\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & & \cdots & \lambda \end{vmatrix}$$

$$=\lambda^{n-1}(\lambda-na)$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^{n-1}(\lambda - na)$$

若a=0: 则0是n重特征值, 任一非零向量都是A的特征向量.

下设$a \neq 0$:

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0(n-1\text{重}), \lambda_2 = na(1\text{重})$$

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -a & -a & \cdots & -a \\ -a & -a & \cdots & -a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & \cdots & -a \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 - \cdots - x_n$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_{n-1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

特征值0的全部特征向量:

$$X = k_1\alpha_1 + \cdots + k_{n-1}\alpha_{n-1}$$

$k_1, \cdots, k_{n-1}$不全为0

$\lambda_2 = na$:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & \cdots & a \\ a & a & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & \cdots & a \end{pmatrix},$$

$1 \le$ 几何重数 $\le$ 代数重数 ≤ 1

$\Rightarrow (\lambda_2 I - A)X = 0$ 的基础解系恰好含有1个解向量

显然$\alpha_n = (1,1,\cdots,1)^T$是$(\lambda_2 I - A)X = 0$的解

因此α_n是$(\lambda_2 I - A)X = 0$的基础解系.

特征值 n-1 的全部特征向量: $X = k_n\alpha_n, k_n \ne 0$