第二讲 正定二次型

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的性质（1）
- 正定二次型的性质（2）
- 二次型的其它类型
- 内容小结

电子科技大学 蒲和平

第二讲 正定二次型

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的性质（1）
- 正定二次型的性质（2）
- 二次型的其它类型
- 内容小结

一、正定二次型的概念

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$\forall\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0,\quad a_i \in \mathrm{R},$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0.$$

定义 如果任一非零实向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 都有 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型 $f(X)$ 为**正定二次型**，$f(X)$的矩阵A 称为**正定矩阵**.

正定矩阵 A 首先是一个实对称矩阵.

$$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX \text{ 为正定二次型} \Leftrightarrow A \text{ 为正定矩阵.}$$

例1 设A, B都是n阶正定矩阵. 证明：$kA+lB$也是正定矩阵 $(k>0, l>0)$.

证 $\because$ A, B都是n阶正定矩阵

$\therefore$ $\forall X \in \mathrm{R}^n, X \neq 0$, 有 $X^{\mathrm{T}}AX>0$, $X^{\mathrm{T}}BX>0$

$\therefore$ $X^{\mathrm{T}}(kA+lB)X=kX^{\mathrm{T}}AX+lX^{\mathrm{T}}BX>0$

$\therefore kA+lB$为正定矩阵.

例2 判定二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$$

是否为正定二次型.

解 利用配方法化二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2$$

可见，对 $\forall X=(x_1,x_2,x_3)^T\neq 0$

都有 $f(x_1,x_2,x_3)>0$，所以 f 是正定二次型.

主要
内容

正定二次型（矩阵）的概念

练习

设P是可逆矩阵，$A=P^{\mathrm{T}}P$，证明：A是正定矩阵.

证 $\because\ \forall X\in\mathbf{R}^n, X\neq 0$，有

$$X^{\mathrm{T}}AX=X^{\mathrm{T}}P^{\mathrm{T}}PX=(PX)^{\mathrm{T}}(PX)=\|PX\|^2>0$$

$\therefore A$ 为正定矩阵.