三. 矩阵秩的计算

例1. 求矩阵的秩：$A=\begin{pmatrix}2 & -5 & 0 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5\\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

有三阶子式 $\begin{vmatrix}2 & -5 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}\neq 0$

所有四阶子式全为零，所以 $R(A)=3$.

对于行阶梯形矩阵A, $R(A) = A$的非零行的行数.

定理1. 初等变换不改变矩阵的秩.

例2 求矩阵的秩: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 2 & 4 & 8 & 2\\ 3 & 6 & 2 & 0\end{pmatrix}$

解

$$A\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -10 & -3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & 4 & 1\\ 0 & 0 & -10 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以 $R(A)=2$.

$R(A)=r\Leftrightarrow$ 经行初等变换能将A化为具有r个非零行的行阶梯形矩阵.

例3. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}, b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

求矩阵A及矩阵$B=(A|b)$的秩.

解

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&4&2&0\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2,\quad R(B)=3.$$

推论. 对任意矩阵A,

$$R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A)\text{ ,}$$

其中P, Q分别为可逆矩阵.

证. 因为Q可逆，存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_t$使得

$$Q= E_1 \cdots E_t\text{ ,}$$

$$AQ =A E_1 \cdots E_t\text{ ,}$$

即 AQ 为A经列初等变换所得. 故 $R(AQ)= R(A)$.

同理可证其他.

[结束]