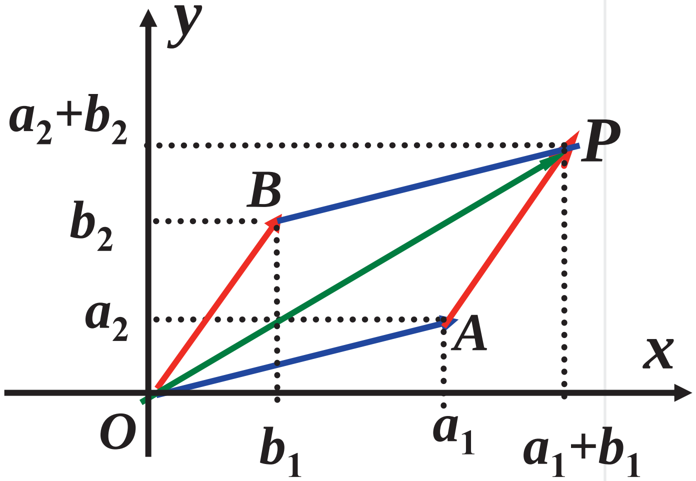
第一讲 空间直角坐标系与向量

四、向量线性运算的几何意义

1. 加法的几何意义

设 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2)$, 则

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(a_1+b_1,a_2+b_2)=\overrightarrow{OP},$$



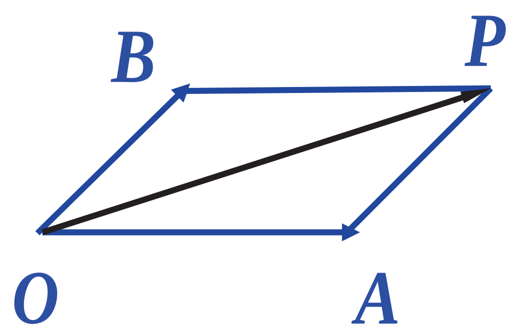
$$\mathrm{Prj}_{ox}\overrightarrow{BP}=a_1+b_1-b_1=a_1$$

$$\mathrm{Prj}_{oy}\overrightarrow{BP}=a_2+b_2-b_2=a_2$$

故 $\overline{BP}$ 经平行移动后可与 $\overrightarrow{OA}$ 重合.

即 $\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{OA}$， 所以，$OAPB$是平行四边形.

平行四边形法则:

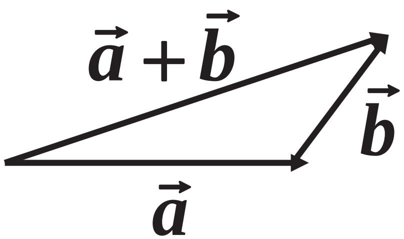


$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP},$$

$\overrightarrow{OP}$ 是以 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 为边的平行四边形的对角线.

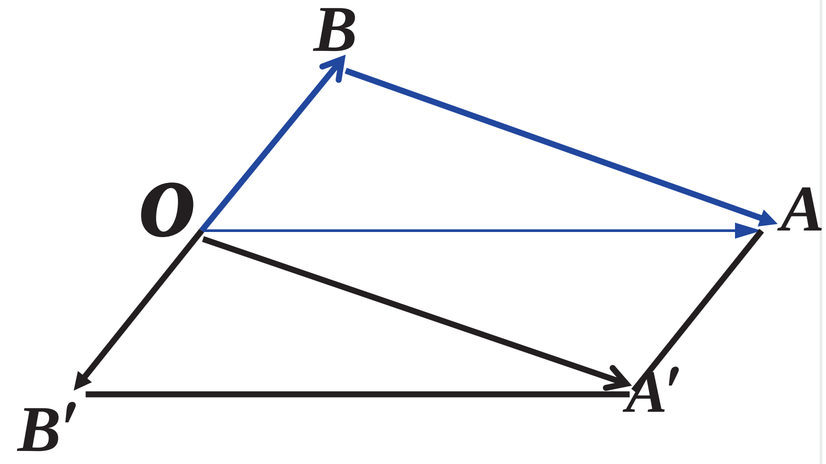
$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}.$$

平行四边形法则也可表示为三角形法则:

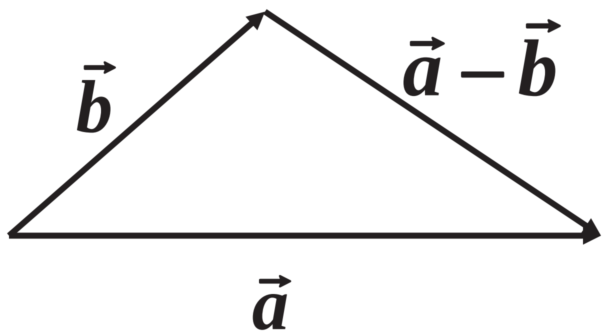


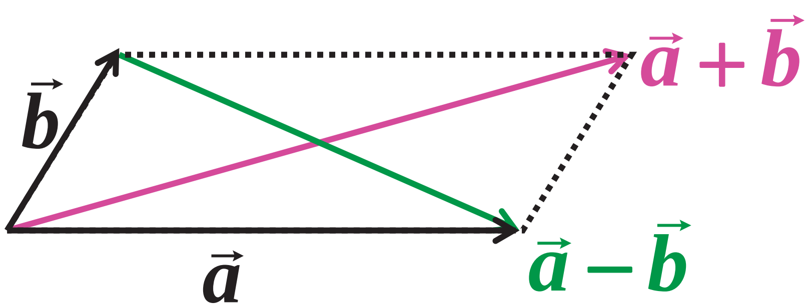
向量减法的几何意义:

$$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB'}$$
$$=\overrightarrow{OA'}$$
$$=\overrightarrow{BA}$$



三角形法则:





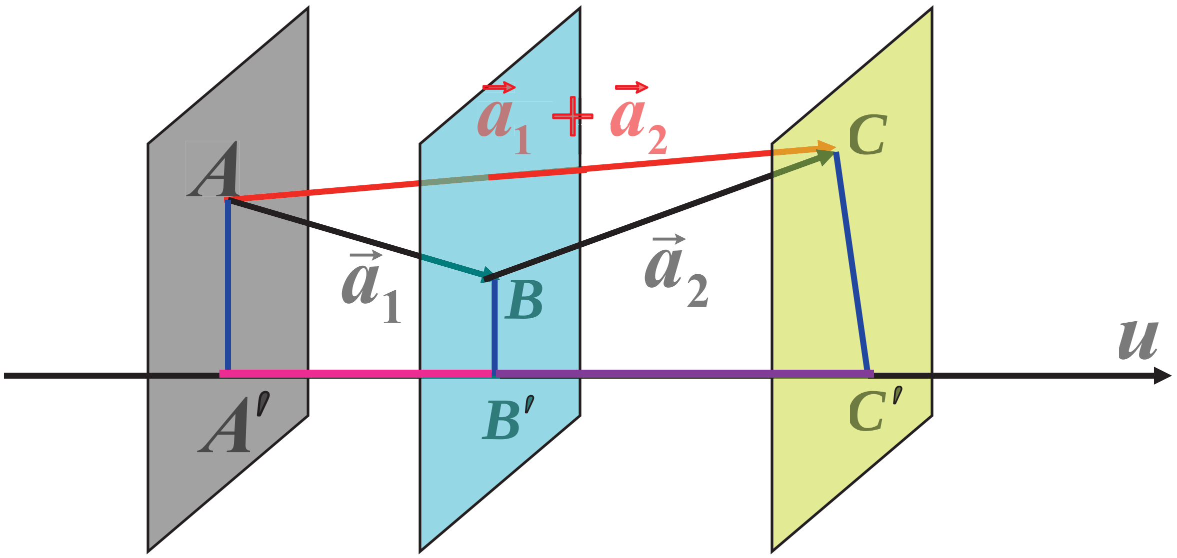
显然:

$$\|\vec{a}\pm\vec{b}\|\le\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$$

投影性质

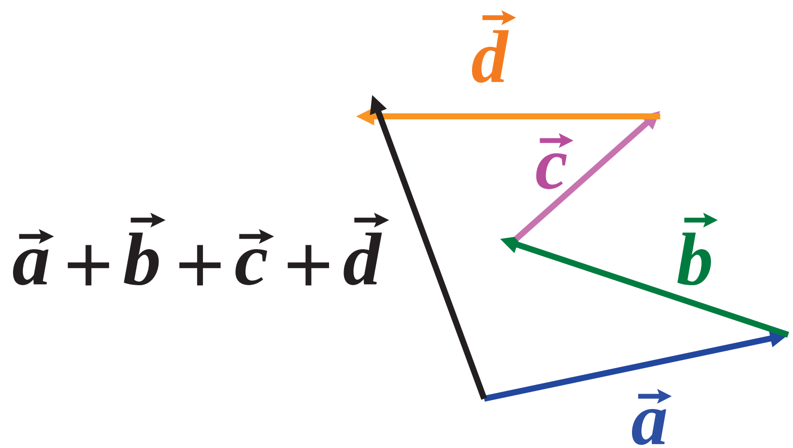
$$\Pr\mathrm{j}_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr\mathrm{j}_u\vec{a}_1+\Pr\mathrm{j}_u\vec{a}_2.$$

的几何意义



思考：

(1) 向量加法的三角形法则可推广到多个向量和的情况. 称为多边形法则. 按向量和的几何意义，画出向量$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$的几何图形.



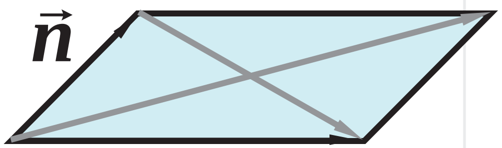
(2) 四向量$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$能构成一空间四边形的充要条件是什么？

$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$$

例1 设$\vec{m}=\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{n}=-2\vec{j}+\vec{k}$，求以向量$\vec{m},\vec{n}$为边的平行四边形的对角线的长度.

解 对角线的长为 $\|\vec{m}+\vec{n}\|,\|\vec{m}-\vec{n}\|,$

$\because \vec{m}+\vec{n}=(1,-1,1),\quad \vec{m}-\vec{n}=(1,3,-1)$



$\therefore \|\vec{m}+\vec{n}\|=\sqrt{3},\qquad \|\vec{m}-\vec{n}\|=\sqrt{11},$

平行四边形的对角线的长度各为$\sqrt{3},\sqrt{11}$.

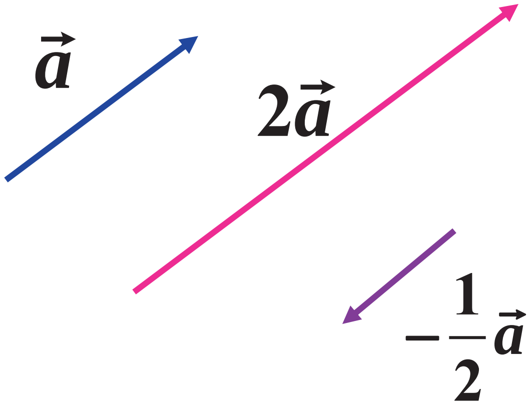
2. 数乘的几何意义

$$\vec{b}=\lambda\vec{a}$$

(1) $\lambda>0$, $\vec{b}$ 与 $\vec{a}$ 同向.

(2) $\lambda=0$, $\vec{b}=0$.

(3) $\lambda<0$, $\vec{b}$与$\vec{a}$反向.



$$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)=\lambda(a_1,a_2,a_3)=\lambda\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \vec{b}=\lambda\vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}=\frac{b_3}{a_3}.$$

(若$a_i=0$, 则 $b_i=0$).

例2 非零向量单位化.

设向量 $\vec{a} \neq 0$

令 $\vec{e}_a = \dfrac{1}{\|\vec{a}\|}\vec{a}$, 则

$$\|\vec{e}_a\| = \left|\frac{1}{\|\vec{a}\|}\right| \cdot \|\vec{a}\| = \frac{1}{\|\vec{a}\|}\|\vec{a}\| = 1$$

$\vec{e}_a$是与$\vec{a}$同方向的单位向量(也称为$\vec{a}$的单位向量).

显然: $\vec{a} = \|\vec{a}\|\vec{e}_a$.

$\vec{a}$的单位向量又记为$\vec{a}^0$.

例3 证明：三角形的中位线平行于底边且等于底边的一半.

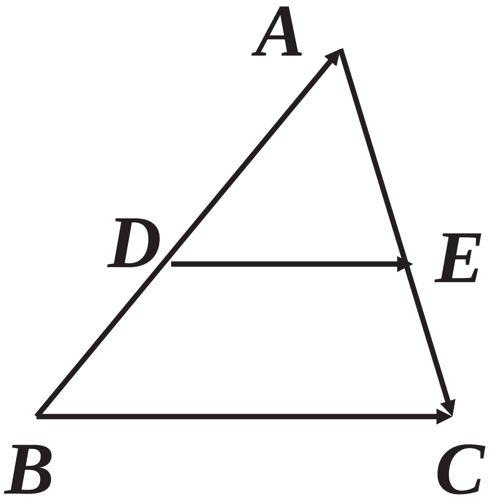
证 (如图) 设DE是中位线，则

$$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AE}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC})$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}.$$



例4 证明四面体对边中点连线交于一点，而且相互平分。

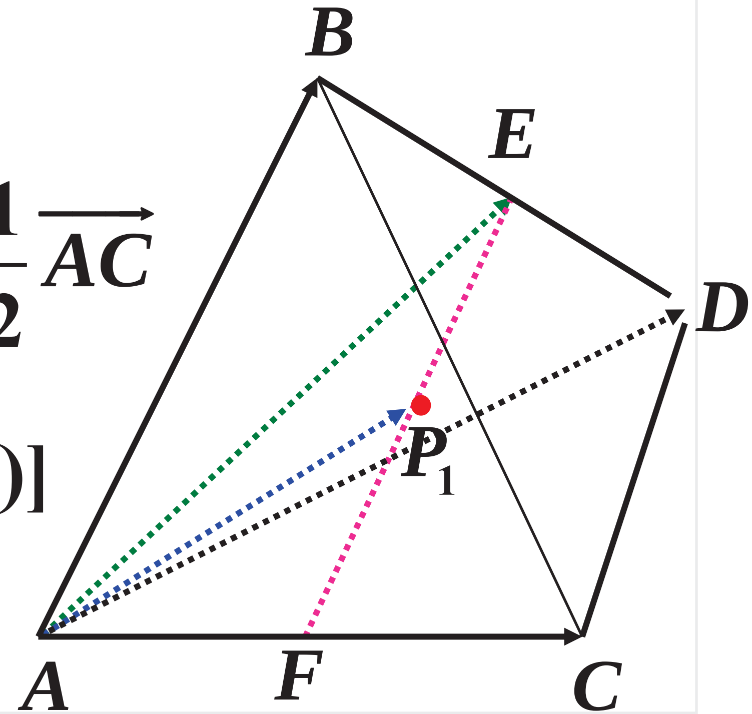
证(如图)设EF是一组对边中点的连线，P_1为其中点，其余两组对边的中点分别为P_2,P_3,则

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}),$$

$$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}),\quad \overrightarrow{AF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{2}[\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})]$$

$$=\frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}]$$



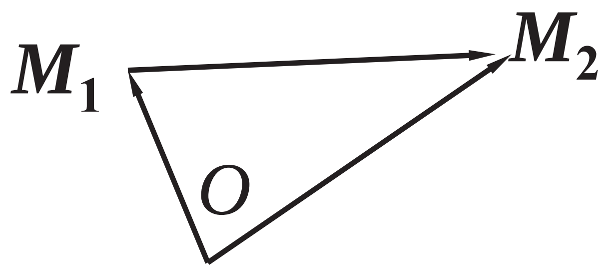
同理$\overrightarrow{AP_2} = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}]$,

$$\overrightarrow{AP_3} = \frac{1}{4}[\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}],$$

所以P_1, P_2, P_3重合。

例5 设$M_1(x_1, y_1, z_1)$，$M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间二点.

(1) 求 $\|\overrightarrow{M_1M_2}\|$;



解 $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$

$$= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

这就是空间两点间的距离公式.

特殊地：若两点分别为 $M(x, y, z)$, $O(0,0,0)$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(2) 设M为线段M_1M_2上一点，$\dfrac{\|\overrightarrow{M_1M}\|}{\|\overrightarrow{MM_2}\|}=\lambda$，求 M 的坐标.

解

由题意知 $\overrightarrow{M_1M}=\lambda\overrightarrow{MM_2}$，设 M 的坐标为(x, y, z)，

则 $(x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\lambda(x_2-x, y_2-y, z_2-z)$

有 $x-x_1=\lambda(x_2-x), y-y_1=\lambda(y_2-y), z-z_1=\lambda(z_2-z)$，

解出 $x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$， $y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$， $z=\dfrac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}$.

若 M 为 M_1M_2 的中点，则 M 的坐标为

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right).$$

主要内容

向量线性运算的几何意义

1. 向量加法、数乘的几何意义；

2. 两点间的距离公式、定比分的公式.

练习　1. 在yoz面上，求与三个已知点$A(3,1,2)$，$B(4,-2,-2)$和$C(0,5,1)$等距离的点　.

答案：(0,1,-2).

2. 若直线段落AB被点$C(2,0,2)$及点$D(5,-2,0)$内分为3等分，则端点A的坐标为__________，端点B的坐标为__________　.

答案：$A(-1,2,4)$，$B(8,-4,-2)$.