第二章 一元函数微分学

导数
微分

定义 性质 计算 应用

第二章 一元函数微分学

§2.1 导数的概念

一、导数的定义

二、用定义求导数

三、导数的实际意义

四、单侧导数

五、函数可导与连续的关系

一、导数的定义

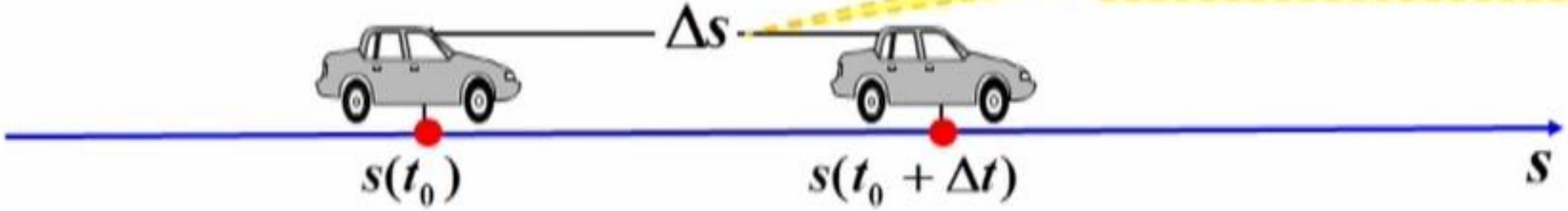
匀速直线运动$v=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

引例1 变速直线运动的瞬时速度问题

设一物体作变速直线运动，其运动规律为$s=s(t)$，其中$s(t_0)$为物体在时刻t_0离开起点的位移(即距离)，求在任一时刻t_0物体的瞬时速度.

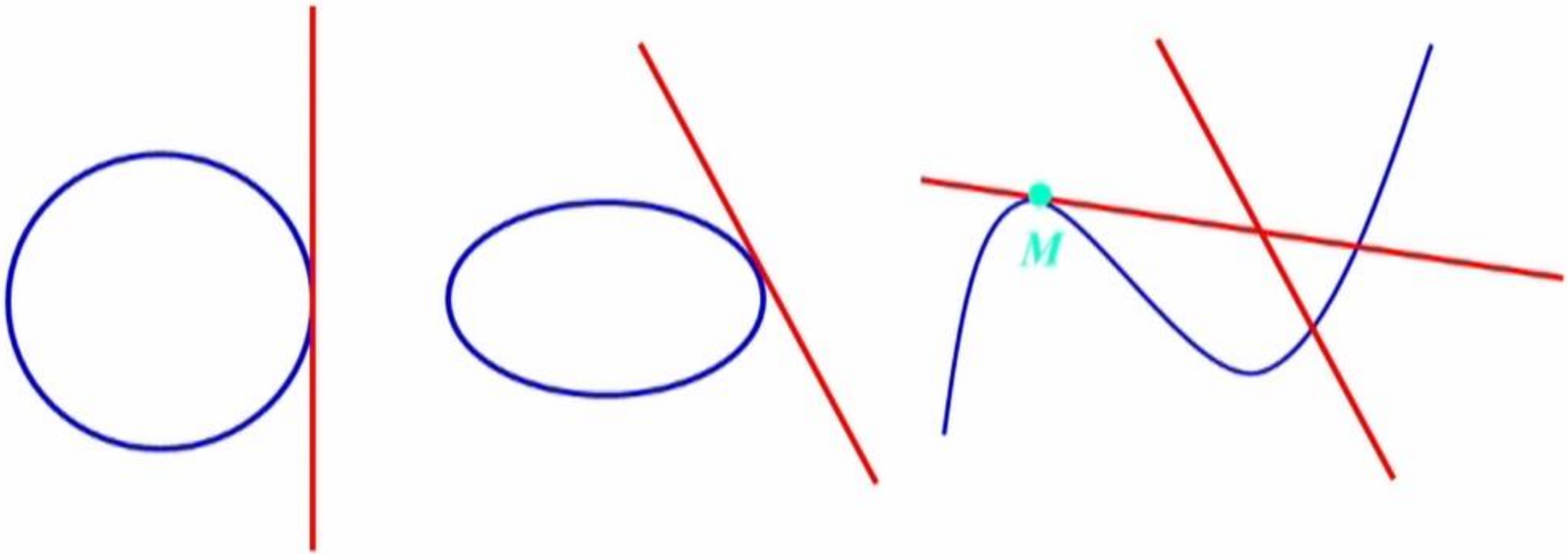
设在时刻t_0的位移为$s(t_0)$，任取从时刻t_0到$t_0+\Delta t$这样一个时间间隔Δt，物体的位移为：

$$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$$



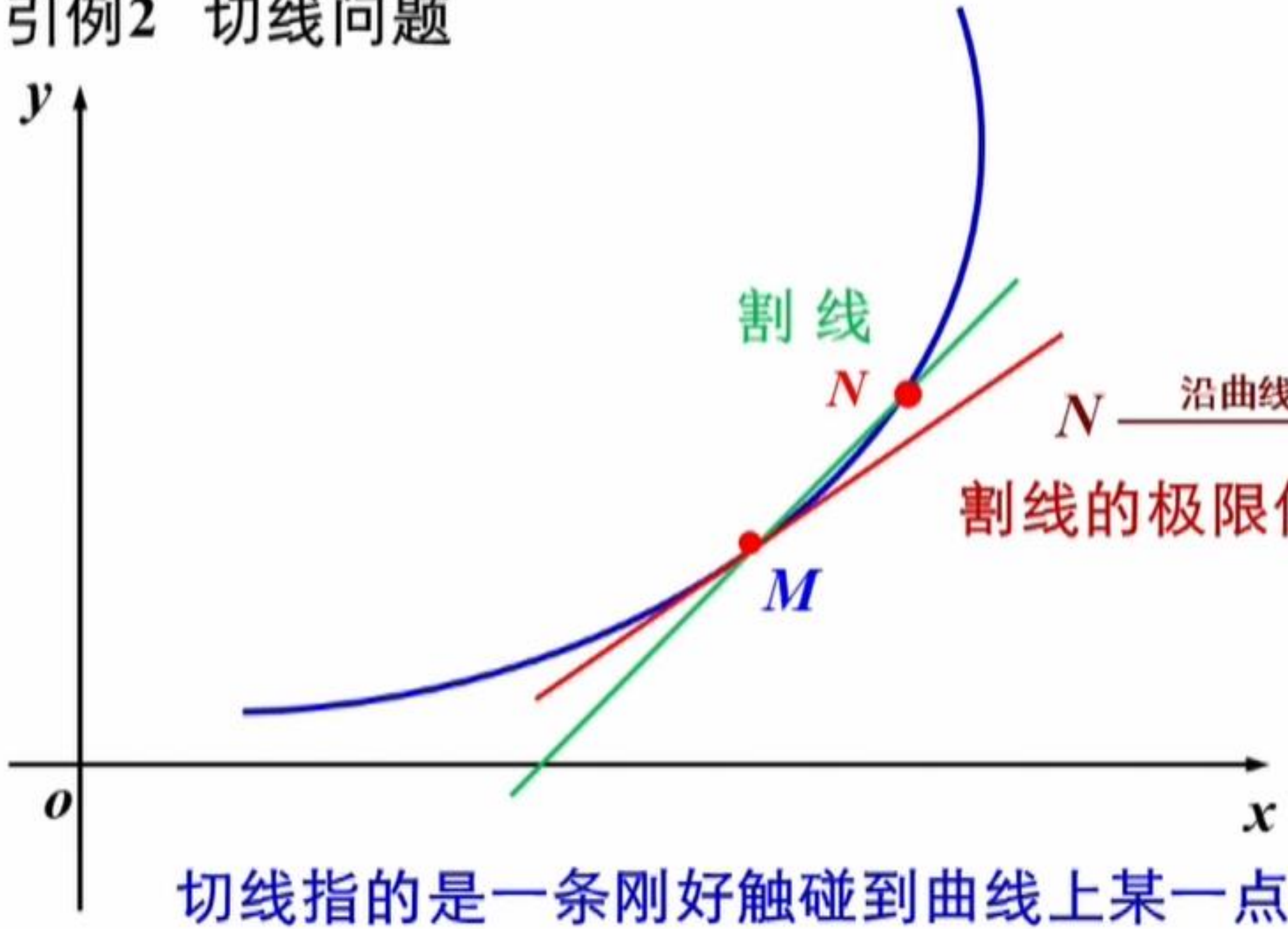
$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=\bar{v} \qquad \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}=v(t_0)$$

引例2 切线问题



切线指的是一条刚好触碰到曲线上某一点的直线

引例2 切线问题



$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M$

割线的极限位置——切线

切线指的是一条刚好触碰到曲线上某一点的直线

引例2　切线问题　　割线的极限位置——切线

设$M(x_0,y_0)$，$N(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$，

割线MN的斜率为

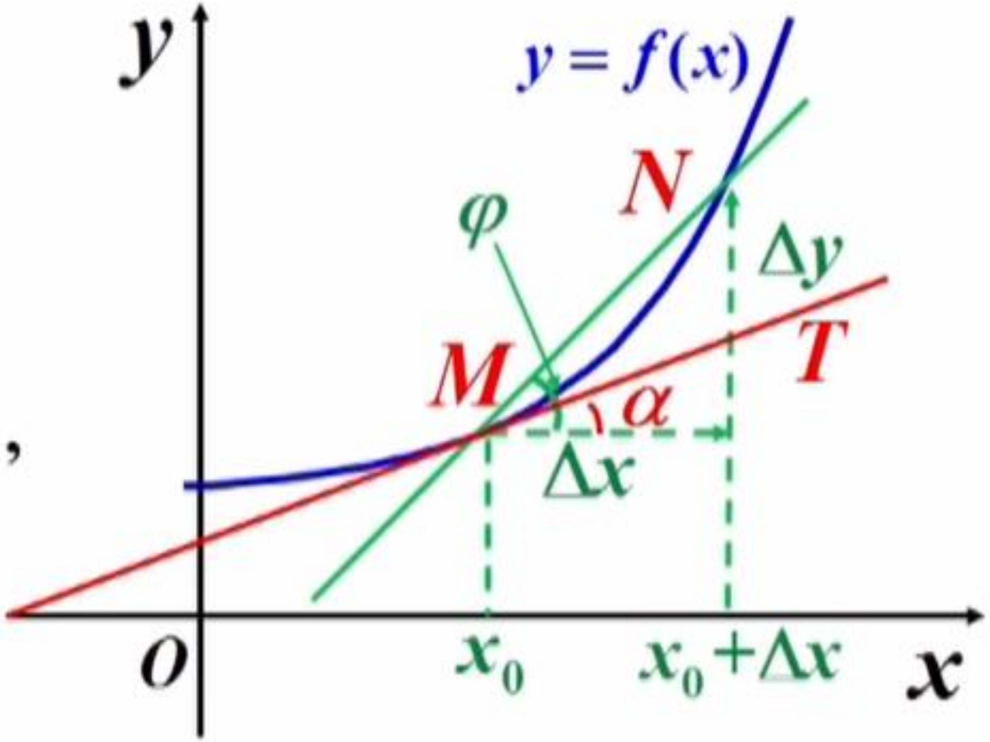
$$\tan\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

$$N \xrightarrow{\text{沿曲线}C} M,\quad \Delta x \to 0,\quad \varphi \to \alpha\ ,$$

$$k = \tan\alpha = \lim_{\varphi\to\alpha}\tan\varphi$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

切线斜率



切线斜率

$$k = \boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

瞬时速度

$$v(t_0) = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

定义:

设$y=f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义，当自变量x在x_0处取得增量Δx时，

函数y取得增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$

如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处可导，

并称此极限为$y=f(x)$在点x_0处的导数，

记为$f'(x_0)$，$y'\big|_{x=x_0}$，$\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}$，$\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

- 如果 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内每一点都可导，就称 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，

  记为：$f(x)\in D(a,b)$.

  此时导数值构成的新函数称为导函数.

  记作 y'，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$ 或 $\dfrac{df(x)}{dx}$.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

- $f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}$.

第二章 一元函数微分学

§2.1 导数的概念

一、导数的定义

二、用定义求导数

三、导数的实际意义

四、单侧导数

五、函数可导与连续的关系

二、用定义求导数

例1 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，在 $x=0$ 处的可导性.

解 在 $x=0$ 处有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(0+\Delta x)\sin\dfrac{1}{0+\Delta x}-0}{\Delta x}=\sin\frac{1}{\Delta x},$$

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 -1 和 1 之间振荡而极限不存在，

$\therefore\ f(x)$ 在 $x=0$ 处不可导.

例2 求函数 $f(x)=C$（C为常数)的导数.

解 $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{C-C}{\Delta x}=0.$

即 $(C)'=0$

例3 设函数 $f(x)=\sin x$，求 $(\sin x)'$ 及 $(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}$.

$$\frac{\Delta x}{2}$$

解 $$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\boxed{\sin\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos(x+\frac{\Delta x}{2})=\cos x.$$

$(\sin x)'=\cos x$　　　　$(\cos x)'=-\sin x$

$$(\sin x)'\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\cos x\Big|_{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例4 求函数 $y = x^n$ (n为正整数)的导数.

解 $(x^n)' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} x^{n-2} \Delta x + \cdots + (\Delta x)^{n-1}] = nx^{n-1}.$$

$(x^n)' = nx^{n-1}$ 更一般地 $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ $(\mu \in R)$

$(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.$ $(x^{-1})' = (-1)x^{-1-1} = -\dfrac{1}{x^2}.$

例5 求函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解 $(a^x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}$

$$=a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a.$$

$(a^x)'=a^x\ln a$ $\qquad$ $(e^x)'=e^x$

例6 求函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$的导数.

解 $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta x}{x}\cdot\frac{1}{\ln a}=\frac{1}{x\ln a}.$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}\qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

第二章 一元函数微分学

§2.1 导数的概念

一、导数的定义

二、用定义求导数

三、导数的实际意义

四、单侧导数

五、函数可导与连续的关系

三、导数的实际意义

几何意义

曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$的切线斜率：

$$k=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

例1 求双曲线$y=\dfrac{1}{x}$在点$(\dfrac{1}{2},2)$处的切线斜率，并写出曲线在该点处的切线方程和法线方程.

解 由导数的几何意义，切线斜率为：

$$k=y'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(\frac{1}{x})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=(x^{-1})'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=\frac{1}{2}}=-4,$$

所求切线方程为 $y-2=-4(x-\dfrac{1}{2})$， 即 $4x+y-4=0$,

法线方程为$y-2=\dfrac{1}{4}(x-\dfrac{1}{2})$， 即 $2x-8y+15=0$.

变速直线运动$s = s(t)$在t_0时刻的瞬时速度:

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

导数即函数的瞬时变化率，在不同的问题中有不同的实际意义

若电量为$q(t)$, $\dfrac{dq}{dt} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t}$ ---电流强度

若速度为$v(t)$, $\dfrac{dv}{dt} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$ ---加速度

线密度　功率　角速度　边际成本　……

例2 将原油精炼为汽油、柴油等不同产品时，需要对原油进行冷却和加热. 设在第$t(h)$时原油的温度为$f(t)=t^2-7t+15({}^0C)$，计算在第$2(h)$时和第$6(h)$时原油温度的变化速度. $f'(t)$

解 在第$2(h)$和第$6(h)$时，原油温度的变化速度分别是$f'(2)$和$f'(6)$，

$$f'(2)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(2+\Delta t)-f(2)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(2+\Delta t)^2-7(2+\Delta t)+15-(2^2-7\times 2+15)}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta t-3)=-3,$$

同理可得 $f'(6)=5.$

第二章 一元函数微分学

§2.1 导数的概念

一、导数的定义

二、用定义求导数

三、导数的实际意义

四、单侧导数

五、函数可导与连续的关系

四、单侧导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

左导数

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)$$

右导数

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$$

函数$f(x)$在点x_0可导$\Leftrightarrow$ $f_+'(x_0)$、$f_-'(x_0)$均存在且相等.

如果$f(x)$在(a,b)内可导，且$f'_+(a)$及$f'_-(b)$均存在，

则称$f(x)$在$[a,b]$上可导. 记为$f(x)\in D[a,b]$.

例 讨论函数$f(x)=|x|$在$x=0$处的可导性.

解 $$\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

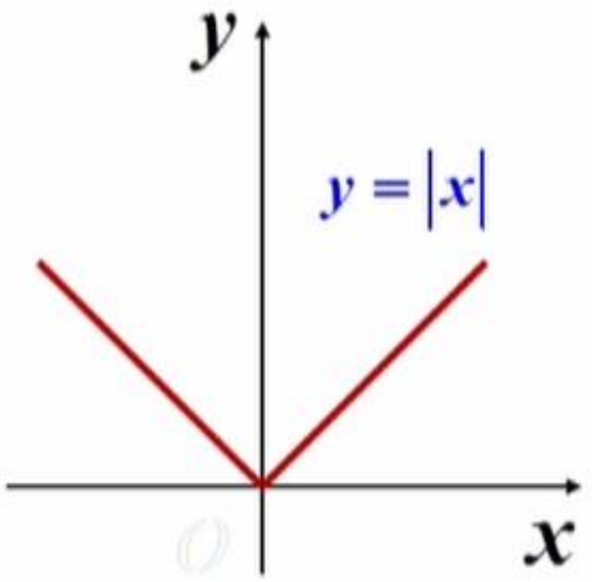
不可导一定没有切线吗?

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,$$

$$\Rightarrow f'_-(0)\neq f'_+(0),$$

$\therefore$ 函数$y=f(x)$在$x=0$点不可导.



五、可导与连续的关系

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,\ (\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0)$$

$$\Rightarrow \Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x,$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(x_0)\Delta x+\alpha\Delta x]=0$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$$

定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，则 $y=f(x)$ 在点 x_0 必连续.

（可导的必要条件）

例1 讨论函数 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 在 $x=0$ 点的连续性与可导性.

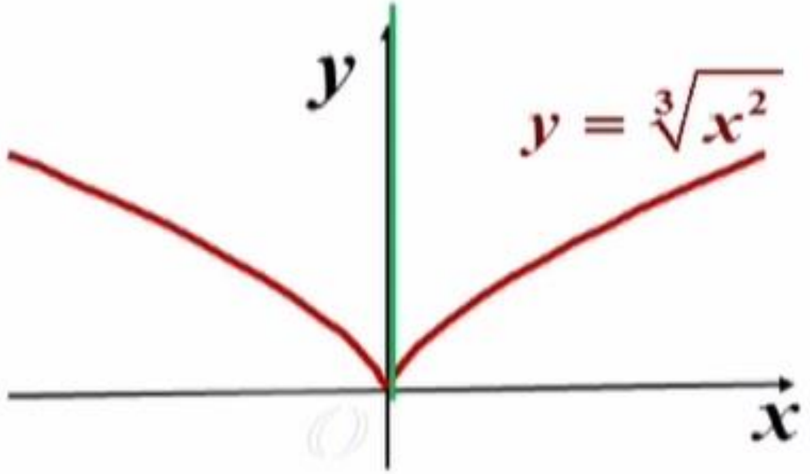
解 $\because \lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[3]{x^2}=0=f(0)$,

$\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 连续,

$$\because \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}-0}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}=\infty,$$

所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 不可导.



几何意义:

曲线 $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ 在点$(0,0)$的切线垂直于x轴.

例2 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}\ , & x>4\\ ax+b\ , & x\le 4\end{cases}$ 在$x=4$处可导，求常数a、b的值.

解 函数在$x=4$处可导必连续，从而有 $\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=f(4)$,

$\because\ \lim\limits_{x\to4^-}f(x)=4a+b,\quad \lim\limits_{x\to4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to4^+}\sqrt{x}=2,$

$\therefore\ 4a+b=2$

$$f'_-(4)=\lim_{x\to4^-}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^-}\frac{(ax+b)-(4a+b)}{x-4}=a,$$

$$f'_+(4)=\lim_{x\to4^+}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to4^+}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4},$$

由 $f'_-(4)=f'_+(4)$ 得 $a=\dfrac{1}{4}$, $\quad\Rightarrow b=2-4a=1.$