三、实对称矩阵

***n* 阶实对称矩阵 *A*:**

- 特征值都是实的;
- 必可正交对角化;
- 不同特征值的实特征向量彼此正交
- 秩为k的n阶矩阵 $\Rightarrow$ 0是$n-k$重特征值
- k 重特征值 $\mu \Rightarrow R(\mu I - A) = n - k$

实对称矩阵特征值的判定.

给定n阶实对称矩阵 A:

$$R(A)=k<n \quad \Rightarrow 0\text{是}A\text{的}\ n-k\ \text{重特征值}$$

实对称矩阵特征向量的判定.

设$A_{3\times 3}$实对称, 其特征值

(1) $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$互异, α_1,α_2分别是 λ_1,λ_2的特征向量, 则

与α_1,α_2正交的非零向量一定是λ_3的特征向量

(2) $\lambda_1(1\text{重}),\lambda_3(2\text{重})$, α_1是λ_1的特征向量, 则

与α_1正交的非零向量一定是λ_3的特征向量

例9. 设4阶实对称矩阵A满足：

$$A^4 + A^3 - A^2 + A - 2I = O,$$

若秩 $R(A-I)=1$, 则矩阵 A 的特征值为 $\underline{1, 1, 1, -2}$.

分析： $A^4 + A^3 - A^2 + A - 2I = O \Rightarrow$

$$0 = \lambda^4 + \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 1)(\lambda + 2)(\lambda^2 + 1)$$

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow \lambda = 1, -2, \pm i \\ A\text{实对称} \Rightarrow \text{特征值都是实的} \\ \left.\begin{array}{r} 1 = R(A - I) = R(1I - A) \\ A\text{实对称} \end{array}\right\} \Rightarrow 1\text{是 } 4-1=3 \text{ 重特征值} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

例10. $A=\begin{pmatrix}1&a&1\\a&b&a\\1&a&1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2&&\\&b&\\&&0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件是(　　)

(A) $a=0, b=2$;　　(B) $a=0$, b为任意常数;

(C) $a=2, b=0$;　　(D) $a=2$, b为任意常数.

分析： $a=0$时：$A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&b&0\\1&0&1\end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-b&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)\Rightarrow\lambda=2,b,0$$

A实对称 $\Rightarrow A\sim\mathrm{diag}(2,b,0)=B$

例10. $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$与$B=\begin{pmatrix}2 & & \\ & b & \\ & & 0\end{pmatrix}$相似的充分必要条件是(　　)

(A) $a=0, b=2$;

(B) $a=0$, b为任意常数;

(C) $a=2, b=0$;

(D) $a=2$, b为任意常数.

$a=2$时: $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & -1\\ -2 & \lambda-b & -2\\ -1 & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -1\\ 0 & \lambda-b & -2\\ -\lambda & -2 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\lambda\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & \lambda-b & -2\\ 0 & -4 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda\left[\lambda^2-(b+2)\lambda+(2b-8)\right]$$

$$=\lambda(\lambda-b)(\lambda-2)$$

$\Rightarrow 2b=2b-8 \Rightarrow$ 无解!