第六讲　习题课

一.习题1

二.习题2

习题2

例1 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} k & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{pmatrix}$ 且 $R(A)=3$, 求 k.

$R(A)=3<4$
$\Rightarrow |A|=0.$

$|A|=0$
$\Leftrightarrow R(A)<4$

解： $|A| \xlongequal[i=2,3,4]{r_i+r_1} (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & 1 & k \end{vmatrix}$

$$\xlongequal[i=2,3,4]{-c_1+c_i} (k+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k-1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & k-1 \end{vmatrix} = (k+3)(k-1)^3$$

(1) $|A|=0 \Rightarrow k=-3$或$k=1.$

(2) $k=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=1.$

这与秩$R(A)=3$相矛盾！　故$k=-3.$

例2 λ,μ取何值时,线性方程组$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+\mu x_2+x_3=0\\ x_1+2\mu x_2+x_3=0\end{cases}$

有非零解?当$\mu=1$时,求其全部非零解.

$Ax=0(x\neq 0)$

$\Leftrightarrow |A|=0.$

解: (1) $|A|=\begin{vmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 1 & \mu & 1\\ 1 & 2\mu & 1\end{vmatrix}=\mu-\mu\lambda=\mu(1-\lambda)=0$

即$\mu=0$或$\lambda=1$时齐次线性方程组有非零解.

(2) $\mu=1$时,要有非零解,只能$\lambda=1$. 此时

$$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},$$

同解方程组为:

$$\begin{cases}x_1+x_3=0\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\\ x_2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=-k\\ x_2=0\\ x_3=k\end{cases},(k\neq 0).$$

例3 若一元n次方程

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

有$n+1$个不同的根，证明：

$$p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n\equiv 0$$

$$\boxed{\text{分析：}\ p(x)\equiv 0 \Leftrightarrow a_0=a_1=a_2=\cdots=a_n=0}$$

证： 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}$ 为其$n+1$个不同的根，即

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\cdots+a_nx_1^n=0 \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\cdots+a_nx_2^n=0 \\ \qquad\vdots \\ a_0+a_1x_{n+1}+a_2x_{n+1}^2+\cdots+a_nx_{n+1}^n=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \\ 1 & x_{n+1} & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$V = \prod_{1 \le j < i \le n+1} (x_i - x_j) \neq 0 \Rightarrow a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0$$

$$\Rightarrow a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \equiv 0$$

例4 设n阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

求第一行各元素的代数余子式之和:

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n}.$$

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + \cdots + 1 \cdot A_{1n}$$

解: 第一行各元素的代数余子式之和可以表示成

$$A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + \cdots + 1 \cdot A_{1n}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j} & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\left(1 - \sum_{j=2}^{n} \frac{1}{j}\right).$$

例5 设A,B为n阶可逆矩阵，证明：$\begin{cases}(1)\quad (AB)^*=B^*A^* \\ (2)\,(A^*)^{-1}=(A^{-1})^*\end{cases}$

$$\boxed{(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}}$$

证：$AA^*=(\det A)I \Rightarrow A^*=(\det A)A^{-1}$

$$\Rightarrow (AB)^*=(\det(AB))(AB)^{-1}=(\det A)(\det B)B^{-1}A^{-1}$$

$$=(\det B)B^{-1}(\det A)A^{-1} \;=B^*A^*$$

$$\Rightarrow I= I^*= (AA^{-1})^*=(A^{-1})^*A^* \Rightarrow (A^*)^{-1}=(A^{-1})^*$$

$$\boxed{I^*=(\det I)I^{-1}=I}$$