二. 克拉默法则

Cramer法则 设A可逆，则$AX=b$的唯一解为：

$$x_j = \frac{\det A_j}{\det A},\ (j=1,\dots,n)$$

$\det A_j$是用b代替$\det A$中的第j列得到的行列式.

说明：

$$|A_j| = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}$$

证. 解的唯一性（显然）

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}b=\underbrace{\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|A_1|\\ \vdots\\ |A_n|\end{pmatrix}$$

$$|A_j|=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

例3 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+ax_2+a^2x_3=1 \\ x_1+bx_2+b^2x_3=1 \end{cases}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix}=(b-a)(b-1)(a-1)$$

若 $b\neq a, b\neq 1, a\neq 1$，则 $|A|\neq 0$.

$$|A_1|=|A|,\quad |A_2|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix}=0,\quad |A_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix}=0,$$

$$x_1=\frac{|A_1|}{|A|}=1,\quad x_2=x_3=0.$$

例4. 求一个二次多项式 $f(x)$ 使得

$$f(1)=0,\quad f(2)=3,\quad f(-3)=28.$$

解 设所求的二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c,$

得一个关于未知数 a,b,c 的线性方程组,

$$\begin{cases} f(1)=a+b+c=0, \\ f(2)=4a+2b+c=3, \\ f(-3)=9a-3b+c=28, \end{cases}$$

又 $D=-20\neq 0,\ D_1=-40,\ D_2=60,\ D_3=-20.$

得 $a=D_1/D=2,\ b=D_2/D=-3,\quad c=D_3/D=1$

故所求多项式为 $f(x)=2x^2-3x+1.$

注意: 解方程组一般不用 Cramer法则(计算量太大), Cramer法则主要是理论上的意义. (如，给出了解的表达式)

[结束]