

设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 相似, 则 ()

- (A) $\lambda I - A = \lambda I - B$. (B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.
(C) A 与 B 都与对角矩阵相似. (D) 对任意常数 $t, tI - A$ 与 $tI - B$ 相似.

[解析] 选项(A) 错误.

若 $\lambda I - A = \lambda I - B \Rightarrow A = B$. 但是相似的矩阵未必相等, **矛盾!**

选项(B) 错误. 相似矩阵的特征向量未必相同:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = L = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_1 = (1, 0)^T : A\varepsilon_1 = 1\varepsilon_1, B\varepsilon_1 = (0, 1)^T \neq k\varepsilon_1$$

设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 相似, 则 ()

- (A) $\lambda I - A = \lambda I - B$. (B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.
(C) A 与 B 都与对角矩阵相似. (D) 对任意常数 $t, tI - A$ 与 $tI - B$ 相似.

选项(C) 错误. 令 $A = B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$:

A 与 B 相似, 但是不能与对角阵相似: $|\lambda I - A| = |\lambda I - B| = \lambda^2$

\Rightarrow 特征值0的代数重数 = 2
 $R(0I - A) = 1 \Rightarrow$ 特征值0的几何重数 = 1 $\left. \vphantom{\begin{matrix} \Rightarrow \text{特征值0的代数重数} = 2 \\ \Rightarrow \text{特征值0的几何重数} = 1 \end{matrix}} \right\} \Rightarrow A = B \text{ 不能对角化}$

设 A, B 为 n 阶矩阵, 且 A 与 B 相似, 则 ()

(A) $\lambda I - A = \lambda I - B$.

(B) A 与 B 有相同的特征值和特征向量.

(C) A 与 B 都与对角矩阵相似.

(D) 对任意常数 t , $tI - A$ 与 $tI - B$ 相似.

选项(D)正确.

$$\text{设 } B = P^{-1}AP \Rightarrow$$

$$P^{-1}(tI - A)P = tP^{-1}IP - P^{-1}AP = tI - P^{-1}AP = tI - B$$

$\Rightarrow tI - A$ 与 $tI - B$ 总是相似的.