《线性代数与空间解析几何》

# 第六章 二次型与二次曲面



电子科技大学 蒲和平

# 第一讲 实二次型及其标准形

- 二次型及其矩阵表示
- 矩阵的合同
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形
- 内容小结

# 一、二次型及其矩阵表示

## 1. 二次型的概念

**定义** $n$元二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + \underline{2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n}$$
$$+ a_{22}x_2^2 + \underline{2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n}$$
$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ a_{nn}x_n^2$$

称为$n$元二次型，简称为二次型.

例如 $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_1x_2 - 5x_1x_3 - x_3^2$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - ix_1x_2$$

若$a_{ij}$为复数，称为复二次型；
若$a_{ij}$为实数，称为实二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}\quad(i,\ j=1,2,\cdots,\ n)$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=&\ a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n\\
&+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n\\
&+\cdots\cdots\\
&+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boxed{x_i}x_j=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)
$$

$$
=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j = 0\\ \sum_{j=1}^{n}a_{2j}x_j = 0\\ \cdots\\ \sum_{j=1}^{n}a_{nj}x_j = 0\end{pmatrix} = X^TAX
$$

其中 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij}=a_{ji}$,

即有

$$f(X)=X^T AX \qquad (A^T=A)$$

对称矩阵$A$称为二次型 $f(X)$ 的矩阵.

$A$ 的秩称为二次型 $f(X)$的秩. $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(f)$.

例如，$f(x_1, x_2)=x_1^2+4x_1x_2+x_2^2$

$$=(x_1, x_2)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$$

其对应的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \mathrm{R}(A)=2$$

则 $f(x_1, x_2)$的秩为2.

记 $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$，易验证，仍有 $f=(x_1,x_2)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}$

但 $B^T \neq B$, 故 $B$ 不是 $f(x_1, x_2)$ 的矩阵.

二次型与其矩阵是一一对应的，因此可借助实对称矩阵来研究实二次型.

例1 求下列二次型的矩阵与秩

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$

解（1）二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R(A) = 2.$$

（2）二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad R(A) = 3.$$

## 2. 二次型的化简

二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2=1$$ 圆？椭圆？双曲线？

$$\Leftrightarrow (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1,$$ 记为 $X^TAX=1$

作坐标变换(正交变换) $X=CY$

即 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, 方程为 $(CY)^TA(CY)=1$

即 $Y^T(C^TAC)Y=1$

若 $C^TAC=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 则方程化为 $\lambda_1 x'^2+\lambda_2 y'^2=1$

此时很容易判断二次曲线的类型.

对于$n$元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$

作线性变换

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$ 记为 $X=CY$，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

有 $f(X)=(CY)^TA(CY)=Y^T\underbrace{(C^TAC)}_{B}Y=Y^TBY\triangleq g(Y)$

即 $f(X)=X^TAX \xrightarrow{X=CY} g(Y)=Y^TBY$

其中 $B=C^TAC$，若$C$可逆，称 $X=CY$ 为可逆线性变换，并称$A$与$B$合同.

主要
内容

1. 二次型的矩阵，二次型的秩；

2. 可逆线性变换对二次型的矩阵的影响.

**练习** 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$$

的秩.

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&k-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&k-5&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$k=5, \mathrm{R}(A)=2$； $k\neq 5, \mathrm{R}(A)=3.$

# 第一讲 实二次型及其标准形

- 二次型及其矩阵表示
- 矩阵的合同
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形
- 小结

## 二、矩阵的合同

**复习:**

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经可逆线性变换

$X=CY$，有

$$f(X)=(CY)^TA(CY)=Y^T\underbrace{(C^TAC)}_{B}Y=Y^TBY\triangleq g(Y)$$

其中 $B=C^TAC$，称$A$与$B$合同.

## 1. 矩阵合同的概念

**定义** 对$n$阶矩阵$A$, $B$, 若存在可逆矩阵$C$, 使

$$C^TAC = B$$

则称 $A$与 $B$合同.

回顾：$A$与$B$等价$\Leftrightarrow PAQ = B$, ($P$, $Q$ 可逆);

$A$与$B$相似$\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$，（ $P$ 可逆）.

思考：矩阵合同与等价、相似有何关系？

答案：两矩阵合同则一定等价，但不一定相似；

特别，若 $P$ 为正交矩阵，则 $B= P^TAP = P^{-1}AP$，此时合同与相似是一样的.

## 2. 矩阵合同的性质

(1) 反身性：矩阵$A$与自身合同；

(2) 对称性：若$A$与$B$合同，则$B$与$A$合同；

(3) 传递性：若$A$与$B$合同，且$B$与$C$合同，则$A$与$C$合同.

证 (1) $A = I^T A I$

(2) 若$B = P^T AP$ ($P$可逆), 则 $A = (P^{-1})^T BP^{-1}$. 即$B$与$A$合同.

(3) 若 $B = P^T AP$, $C = Q^T BQ$ ($P,Q$可逆)

$$\Rightarrow C = Q^T (P^T AP)Q \Rightarrow C = (PQ)^T A(PQ),$$

即$A$与$C$合同.

**定理** 二次型经可逆线性变换前后的矩阵是合同的；可逆线性变换不改变二次型的秩.

可逆线性变换 $X=CY$， 又称为**非退化线性变换.**

**问题：** 1.与对称矩阵合同的矩阵的最简形式(标准形)是什么？ 即在可逆线性变换下二次型的最简形式(标准形)是什么？

2. 如何将二次型化为标准形？ 标准形是否唯一？

主要内容

1. 矩阵合同的概念；

2. 矩阵合同的性质.

## 练习

设$A, B$ 均是$n$阶实对称矩阵，则有（　　）.

（A）若 $A$与$B$等价，则 $A$与$B$相似；

（B）若$A$ 与$B$相似，则 $A$与$B$合同；

（C）若$A$ 与$B$合同，则 $A$与$B$相似；

（D）若 $A$与$B$等价，则 $A$与$B$合同.

**分析** 矩阵$A$与$B$相似的充分必要条件为存在正交矩阵$P$，使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$

因此，若两个同形矩阵相似则必定合同，反之不一定.

比如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ 是合同的，因为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

但$A$与$B$不相似．否则，有

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

矛盾！

答案：选(B).

# 第一讲 实二次型及其标准形

二次型及其矩阵表示

矩阵的合同

➤ 用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形

小结

## 三、用配方法化二次型为标准形

形如 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_ny_n^2$ 的$n$元二次型，称为标准二次型，简称**标准形.**

由配方法，可得以下结论：

**定理1** 任何一个$n$ 元二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形：

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ry_r^2 \quad (r\le n,\ d_i\neq 0)$$

$r$为二次型的秩.

**思考：** 如何用矩阵的语言来描述定理1？

——对称矩阵都合同于对角矩阵.

## 用配方法(凑平方)化二次型为标准形:

### 1. 二次型中含有平方项

例1 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$ 为标准形.

解

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \underline{x_1^2 + 4x_1x_2} + x_2^2 \\ &= \underline{(x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2} + x_2^2 \\ &= (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2 \end{aligned}$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

得标准形 $f = y_1^2 - 3y_2^2$

进一步的，令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \sqrt{3} y_2 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

则 $f = z_1^2 - z_2^2$ —— 规范形

可见，二次型的标准形不唯一.

此时，总的线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

即 $\begin{cases} x_1 = z_1 - \frac{2}{\sqrt{3}} z_2 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} z_2 \end{cases}$

## 2. 二次型中不含平方项

**例2** 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形.

**解** 作线性变换 $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad \boxed{y_3} \end{cases}$ $y_1?$

则

$$f=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2+\underline{2y_1y_3}+\underline{2y_2y_3}-\underline{6y_1y_3}+\underline{6y_2y_3}$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3) - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 8y_3^2 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

则 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$ —— 标准形

如果再令 $\begin{cases} t_1 = \sqrt{2} z_1 \\ t_2 = \sqrt{6} z_3 \\ t_3 = \sqrt{2} z_2 \end{cases}$

则 $f = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$ —— 规范形

规范形是特殊的标准形，其形式如下：

$$\underbrace{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2}_{\text{正系数项}} - \underbrace{y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2}_{\text{负系数项}} \quad (r \le n)$$

$p$称为$f$ 的正惯性指数；$r-p$叫负惯性指数；

$p-(r-p) = 2p-r$ 叫符号差.

**定理2 (惯性定理)** 实二次型都可经可逆线性变换化为规范形，规范形是唯一的.

**定理的矩阵表述：**

若 $A$ 是实对称矩阵，则必存在可逆矩阵C,使

$$C^T AC = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

$A$的合同标准形

**推论：** 两同型实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的正、负惯性指数.

**例3** 设二次型

$$f = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2ax_1x_3$$

的正负惯性指数都是1，求 $f$ 的规范型及常数 $a$.

**解** 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 $f$ 的正负惯性指数都是1，所以 $f$ 的秩为2.

即有 $\mathrm{R}(A) = 2.$

$$\because A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & a-1\\ 0 & 0 & (a-1)(a+2)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时, $\mathrm{R}(A)=2$;

$f$ 的规范型为 $y_1^2-y_2^2$

主要内容

1.用配方法化二次型为标准形;

① 含有平方项;　② 不含平方项.

2.惯性定理.

**练习** 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$$

的正负惯性指数.

答案：正惯性指数 $p=1$, 负惯性指数 $q=2$.

# 第一讲 实二次型及其标准形

- 二次型及其矩阵表示
- 矩阵的合同
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形
- 小结

# 四、用正交变换化二次型为标准形

若线性变换 $X=CY$ 中 $C$ 为正交矩阵，则称之为**正交变换**.

由实对称矩阵一定可相似对角化的性质知：

**定理3** 任一 $n$ 元实二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 都可用正交变换 $X=CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$$

其中 $\lambda_1$， $\lambda_2$， …， $\lambda_n$ 是 $A$ 的特征值.

**证** 因$A$为$n$阶实对称矩阵，所以存在正交矩阵$C$，

使 $C^{\mathrm{T}}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

令 $X = CY$, 则

$f(X) = Y^T C^{\mathrm{T}}ACY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

---

**用正交变换化二次型为标准形的方法:**

（1）写出二次型$f(X)$的矩阵$A$;

（2）求$A$的特征值与特征向量;

（3）将同一特征值的特征向量正交、单位化;

（4）以(3)中的标准正交向量组为列做正交矩阵$C$;

(5) 做正交变换$X = CY$, 则 $f(X)=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$.

**例** 用正交变换化二次型为标准形

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

**解** $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$$

特征值：$\lambda_1 = 2$（二重特征值），$\lambda_2 = -7$.

求$\lambda_1=2$的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组 $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

特征向量：$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$，$\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

将$\alpha_1, \alpha_2$正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2,\ 4,\ 5)^T$$

求$\lambda_2$= -7 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组 $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2}x_3, \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ 特征向量：$\alpha_3 = (1, 2, -2)^T$，

将 $\beta_1, \beta_2$ , $\alpha_3$ 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\ 1,\ 0)^T,\quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2,\ 4,\ 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1,\ 2,\ -2)^T.$$

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$

则 $X=CY$ 为正交变换，且

$$f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$$

**练习** 用正交变换，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

化为标准形.

**解** 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}5 & -1 & 3\\ -1 & 5 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{pmatrix}$,

可求得 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$,

于是$A$的特征值为 $\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=9$,

对应特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix},p_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},p_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

将其单位化得

$$q_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad q_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\quad q_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

故正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

化二次型为 $f=4y_2^2+9y_3^2.$

# 第一讲 实二次型及其标准形

二次型及其矩阵表示

矩阵的合同

用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形

- 内容小结

# 内容小结

## 1. 二次型及相关概念

(1) 二次型：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \overset{a_{ij}=a_{ji}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX \triangleq f(X)$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称阵，

$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(f)$ 称为二次型的秩.

(2 )矩阵的合同： $C^TAC=B$ ($C$可逆)

## 2. 性质

(1) 二次型 $f(X)=X^TAX$ 在可逆变换 $X=CY$ 下的矩阵是合同的，即

$$f(X)=X^TAX \underset{|C|\neq 0}{\overset{X=CY}{=}} Y(C^TAC)Y \triangleq Y^TBY$$

则 $B=C^TAC.$

(2) 惯性定理

二次型 $f=X^TAX$ 总可经过可逆线性变换化为标准形

$$f \overset{X=CY}{=} d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

其中 $d_i > 0\,(i=1,2,\cdots,r)$， $r=\mathrm{R}(A)$ 为 $f$ 的秩，

$p$叫 $f$ 的正惯性指数， $r-p$ 叫负惯性指数，

$p-(r-p)=2p-r$ 叫符号差，标准形不唯一，但 $p$与$r$是唯一的。

$f$ 的规范形 $f=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$ 是唯一的。

### 3. 化二次型为标准形的方法

(1) 配方法

① 含有平方项； ② 不含平方项.

## (2) 正交变换法

$1^0$ 写出二次型的矩阵$A$，并求$A$的特征值与$n$个线性无关的特征向量；

$2^0$ 将重特征根所对应的线性无关的特征向量正交化，再将全部特征向量单位化，以它们为列作矩阵$Q$；

$3^0$ 作正交变换 $X = QY$, 得二次型的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

$\lambda_i$ 是Q中第$i$个列向量所对应的特征值.