第二章 一元函数微分学

§2.4 高 阶 导 数

一、高阶导数的定义

二、高阶导数的求法

一、高阶导数的定义

问题：如何计算变速直线运动$s=f(t)$在t时刻的加速度？

由导数的定义，瞬时速度为$v(t)=f'(t)$,

$\because$ 加速度a是速度v对时间t的变化率,

$\therefore a(t)=v'(t)=[f'(t)]'$.

定义：如果函数$f(x)$的导数$f'(x)$在点x处可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称为函数$f(x)$在点x处的二阶导数.

记作 $f''(x)$, y'', $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ 或 $\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}$.

类似地，二阶导数的导数称为三阶导数，

依次类推，$n-1$阶导数的导数称为n阶导数，

分别记为：

$$y''',\quad y^{(4)},\quad \cdots,\quad y^{(n)}$$

或 $$\frac{d^3y}{dx^3},\quad \frac{d^4y}{dx^4},\quad \cdots,\quad \frac{d^ny}{dx^n},$$

或 $$f'''(x),\quad f^{(4)}(x),\quad \cdots,\quad f^{(n)}(x),$$

二阶和二阶以上的导数统称为高阶导数.

一般地，n阶导数的定义为：

$$f^{(n)}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x+\Delta x)-f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}$$

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x},$$

或 $$f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}.$$

第二章 一元函数微分学

§2.4 高 阶 导 数

一、高阶导数的定义

二、高阶导数的求法

二、高阶导数的求法

1. 直接法：由高阶导数的定义逐步求高阶导数.

例1　设 $y = \arctan x$，求 $y''(0)$，$y'''(0)$.

解　$y' = \dfrac{1}{1+x^2}$，$y'' = \left(\dfrac{1}{1+x^2}\right)' = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$，

$$y''' = \left[\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\right]' = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3},$$

$$y''(0) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=0} = 0,\quad y'''(0) = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}\bigg|_{x=0} = -2.$$

例2 设 $f(x)=x^3+2x|x|$，求 $f''(x)$.

解 $f(x)=\begin{cases} x^3-2x^2, & x<0 \\ x^3+2x^2, & x\geq 0 \end{cases}$

当$x<0$时，$f'(x)=3x^2-4x$， 当$x>0$时，$f'(x)=3x^2+4x$，

当$x=0$时， $f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^3-2x^2-0}{x}=0$,

$f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^3+2x^2-0}{x}=0$,

$$\Rightarrow f'(0)=0, \quad \therefore f'(x)=\begin{cases} 3x^2-4x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 3x^2+4x, & x>0 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2-4x, & x<0\\ 0, & x=0\\ 3x^2+4x, & x>0\end{cases}$$

当$x<0$时，$f''(x)=6x-4$;　当$x>0$时，$f''(x)=6x+4$;

当$x=0$时，$f''_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{3x^2-4x-0}{x}=-4,$

$$f''_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{3x^2+4x-0}{x}=4,$$

$\because\ f''_-(0)\neq f''_+(0),$

$\therefore\ f''(0)$不存在，　$\Rightarrow f''(x)=\begin{cases}6x-4, & x<0\\ 6x+4, & x>0.\end{cases}$

例3　求方程 $y=1+xe^{y}$ 确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 y''.

解　方程两边对x求导数，有

$$y'=e^{y}+xe^{y}y',\quad \Rightarrow y'=\frac{e^{y}}{1-xe^{y}}=\frac{e^{y}}{2-y},$$

上式两端再对x求导

$$y''=e^{y}y'+e^{y}y'+xe^{y}(y')^{2}+xe^{y}y''$$

将 $y'=\dfrac{e^{y}}{2-y}$ 代入上式，并解出 y'' 可得 $y''=\dfrac{e^{2y}(3-y)}{(2-y)^{3}}$.

例4 求由方程 $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ 表示的函数y的二阶导数.

解 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{3a\sin^2 t\cos t}{3a\cos^2 t(-\sin t)} = -\tan t,$

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ \dfrac{dy}{dx} = \tan t \end{cases}$$

$$\boxed{\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{x'(t)}} = \frac{(-\tan t)'}{x'(t)}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{d^2 y}{dx^2})}{x'(t)}$$

$$= \frac{-\sec^2 t}{-3a\cos^2 t\sin t} = \frac{\sec^4 t}{3a\sin t}.$$

3. 高阶导数运算法则

设函数u和v具有n阶导数，则

(1) $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$

(2) $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$

(3) $$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)}v + \frac{n}{1!}u^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''$$

$$\cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

莱布尼兹公式

第二章 一元函数微分学

§ 2.4 高 阶 导 数

一、高阶导数的定义

二、高阶导数的求法

间接法

4. 间接法：利用已知的高阶导数公式，通过四则运算，变量代换等方法，求函数的n阶导数.

例1 设$y=\dfrac{1}{x^2-1}$，求$y^{(5)}$.

$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{(n)}=(-1)^n\frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

解 $\because\ y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$,

$$\therefore\ y^{(5)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)^{(5)}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(5)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(5)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-5!}{(x-1)^6}-\frac{-5!}{(x+1)^6}\right]=60\left[\frac{1}{(x+1)^6}-\frac{1}{(x-1)^6}\right].$$

例2 设 $y = x^2 e^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u = e^{2x}$，$v = x^2$，则由莱布尼兹公式得 $(e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$

$$y^{(20)} = (e^{2x})^{(20)} \cdot x^2 + 20(e^{2x})^{(19)} \cdot (x^2)' + \frac{20(20-1)}{2!}(e^{2x})^{(18)} \cdot (x^2)'' + 0$$

$$= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2$$

$$= 2^{20} e^{2x}(x^2 + 20x + 95).$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} v + \frac{n}{1!} u^{(n-1)} v' + \frac{n(n-1)}{2!} u^{(n-2)} v'' + \cdots + u v^{(n)}$$

例3 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$, 求 $y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\cdot\frac{1-\cos 4x}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x,$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cdot\cos(4x+n\cdot\frac{\pi}{2}).$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$(\cos bx)^{(n)}=b^n\cos(bx+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

常用的高阶导数公式

编辑

$$(e^x)^{(n)} = e^x \qquad (e^{ax})^{(n)} = a^n e^{ax}$$

$$(a^x)^{(n)} = a^x (lna)^n$$

$$(sinx)^{(n)} = sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$(cosx)^{(n)} = cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \qquad (\cos bx)^{(n)} = b^n \cos(bx + n \cdot \frac{\pi}{2})$$

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$(x^a)^{(n)} = [\prod_{k=0}^{n-1} (a-k)]x^{a-n} = a(a-1)(a-2)...(a-n+1)x^{a-n}$$

$$(\ln x)^{(n)} = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$$

$$(Cf)^{(n)} = Cf^{(n)}$$

$$(\frac{1}{x+a})^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{(x+a)^{n+1}}$$

$$[u(ax+b)]^{(n)} = a^n \cdot u^{(n)}(ax+b)$$

$$[u(x) \pm v(x)]^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x)$$