极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋向有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

三、数列的极限

观察数列 $\{1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\}$ **当** $n\to\infty$ **时的变化趋势.**

问题：当 n 无限增大时, x_n 是否无限接近于某一

确定的数值?如果是, 如何确定?

当 n **无限增大时,** $x_n=1+\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ **无限接近于** 1**.**

下面让我们进一步考察以下数列当 $n\to\infty$**时的变化趋势：**

中国大学MOOC

(1) $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}: 1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{8}, \cdots, \dfrac{1}{2^{n-1}}, \cdots. \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

(2) $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}: \quad 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}, \cdots. \xrightarrow{n\to\infty} 1.$

(3) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}: -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{5}, \cdots, \dfrac{(-1)^n}{n}, \cdots. \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

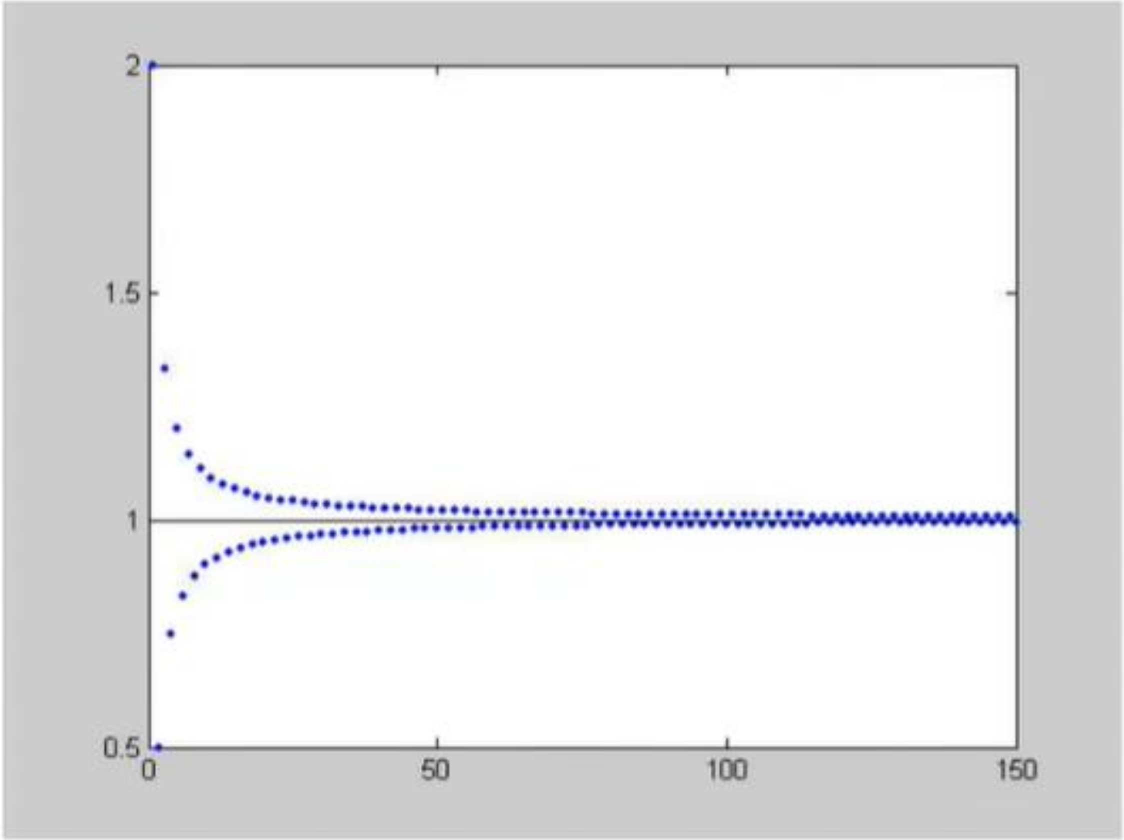
在0的两侧来回跳跃

(4) $\{(-1)^n\}: -1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots. \xrightarrow{n\to\infty}$ 不确定.

(5) $\{2^n\}: 2, 4, 8, 16, \cdots, 2^n, \cdots. \xrightarrow{n\to\infty}$ 不确定.

下面我们分析：

当 n 无限增大时，数列 $x_n = 1 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ 怎样无限接近于 1.



中国大学MOOC

给定 $\dfrac{1}{100}$, 由 $\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{100}$, 只要 $n>100$时, 有 $\left|x_n-1\right|<\dfrac{1}{100}$,

给定 $\dfrac{1}{1000}$, 只要 $n>1000$时, 有 $\left|x_n-1\right|<\dfrac{1}{1000}$,

给定 $\dfrac{1}{10000}$, 只要 $n>10000$时, 有 $\left|x_n-1\right|<\dfrac{1}{10000}$,

给定 $\varepsilon>0$, 只要 $n>N\left(=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]\right)$时, 有 $\left|x_n-1\right|<\varepsilon$成立.

中国大学MOOC

定义 如果对于$\forall \varepsilon > 0$，总存在一个正整数N，当$n > N$时，$|x_n - a| < \varepsilon$恒成立，则称当n趋于无穷大时，数列x_n以常数a为极限.

记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 或 $x_n \to a\,(n\to\infty)$

如果数列没有极限，就说数列是发散的.

注意 1. 该定义是极限为a的充要条件；

2. N一般随ε的缩小而变大，可以记作$N(\varepsilon)$，但不能看作ε的函数，因为ε确定时，N可以不唯一；

3. 数列前方增减有限项，不影响数列的极限；

4. 该定义没有给出求极限方法，但给出了判断方法。

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋向有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

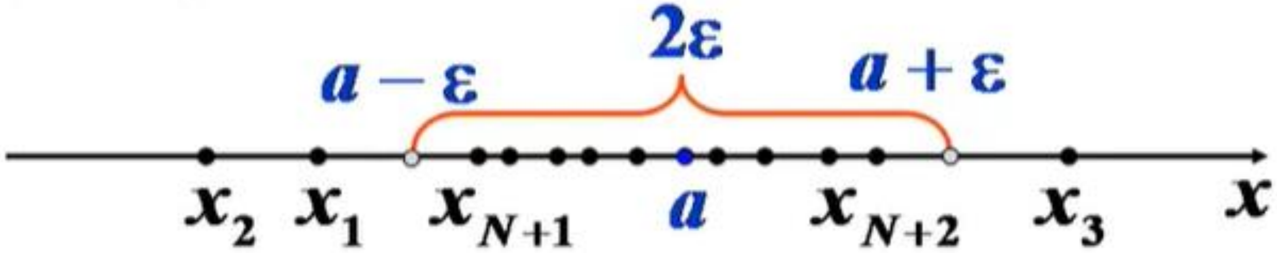
中国大学MOOC

$\varepsilon - N$定义：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0$,使$n > N$时,恒有$|x_n - a| < \varepsilon$.

其中 $\forall$:每一个或任给的; $\exists$:至少有一个或存在.

几何解释:



当$n > N$时, 所有的点 x_n都落在 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ 内,
只有有限个 (至多只有N个) 落在其外.

例1　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}=1.$

证　$\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-a|=\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon$ 成立.

即 $\left|\dfrac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|=\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，只需 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$，可取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，

所以　$\forall\varepsilon>0,\exists N>0$，当 $n>N$ 时有

$$|x_n-a|=\left|\frac{n+(-1)^{n-1}}{n}-1\right|<\varepsilon \text{ 成立.}$$

中国大学MOOC

例2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,其中$|q|<1$.

证 任给$\varepsilon>0$, 若$q=0$, 则$\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$;

若$0<|q|<1$, 要使 $|x_n - 0| = |q^n| < \varepsilon$, 即 $n\ln|q| < \ln\varepsilon$,

$\ln|q|<0$

$\therefore n > \dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}$, 取$N = \left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln|q|}\right]$, 则当$n>N$时,

就有$|q^n - 0| < \varepsilon$, $\therefore \lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0.$

中国大学MOOC

例3　设$x_n > 0$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$，

求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

证　任给$\varepsilon > 0$，$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，

$\therefore$ $\exists N$使得当$n > N$时恒有$|x_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$，

从而有$\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}\right| = \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} < \dfrac{\sqrt{a}\varepsilon}{\sqrt{a}} = \varepsilon$

故$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋向有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

例4　若$s_n=\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}\right)$,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{3}$.

中国大学MOOC

证　$\forall\varepsilon>0$, 要使$\left|s_n-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$成立

即$\left|\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}\right)-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}\right|<\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$,

放大法

只需　$n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$,　取$N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$.

所以　$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$,当$n>N$时,

有　$\left|s_n-\dfrac{1}{3}\right|=\left|\dfrac{1}{3}-\left(\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{6n^2}\right)-\dfrac{1}{3}\right|<\varepsilon$.　故　$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=\dfrac{1}{3}$.

例5 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$,证明

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = a + b.$$

证明 $\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N_1$,当 $n > N_1$ 时,有 $|x_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (1)成立.

$\exists N_2$,当 $n > N_2$ 时,有 $|y_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (2)成立.

取 $N = \max\{N_1, N_2\}$,当 $n > N$ 时有(1),(2)同时成立.

$\therefore \forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\{N_1, N_2\}$,当 $n > N$ 时

有 $|(x_n + y_n) - (a + b)| \le |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon$ 成立

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋向有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

中国大学MOOC

四、数列极限的性质

有界性

定理1　收敛的数列必定有界.

证　**设** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$　由定义,　**取** $\varepsilon = 1,$

则 $\exists N,$ **使得当** $n > N$ **时恒有** $|x_n - a| < 1,$

即有 $a-1 < x_n < a+1.$

记 $M = \max\{|x_1|,\cdots,|x_N|,|a-1|,|a+1|\},$

则对一切自然数 $n,$ **皆有** $|x_n| \le M,$

推论　无界数列必定发散.

唯一性

定理2　每个收敛的数列只有一个极限.

证　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$,又$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 由定义,

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$.使得当$n > N_1$时恒有$|x_n - a| < \varepsilon$;

当$n > N_2$时恒有$|x_n - b| < \varepsilon$;取$N = \max\{N_1, N_2\}$,

则当$n > N$时有 $|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)|$

$$\le |x_n - b| + |x_n - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

上式仅当$a = b$时才能成立.

定理3(保号性)

(1)设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$ 则$\exists N > 0$,当$n > N$时有$x_n > 0$.

(2)设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a < 0$ 则$\exists N > 0$,当$n > N$时有$x_n < 0$.

证 (1)$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

由定义 对$\forall \varepsilon, \exists N$,当$n > N$时,有$|x_n - a| < \varepsilon$成立

取$\varepsilon = \dfrac{a}{2} > 0$,则$\exists N$,当$n > N$时,有$|x_n - a| < \dfrac{a}{2}$成立

即 $$a - \frac{a}{2} < x_n < a + \frac{a}{2} \qquad \therefore x_n > \frac{a}{2} > 0.$$

中国大学MOOC

定理4 设$x_n \ge 0 \quad (x_n \le 0)(n=1,2,3,\cdots)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0 \quad \left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le 0\right)$.

证 (用反证法) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < 0$,

由定理3, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, 当$n > N$时, 有$x_n < 0$.

这与条件$x_n \ge 0$矛盾.

注: 若$x_n > 0$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在 $\not\longrightarrow$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$.

例 $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$ 有$x_n > 0$. 但$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

结论:

若$x_n > 0\ (x_n < 0)$, 且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \ge 0\ (\le 0)$

中国大学MOOC

中国大学MOOC

定理5 设 $\{x_n\}$ 极限存在, 则 $\{x_n\}$ 的所有子数列 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 极限均存在, 且

$$\lim_{n\to\infty} x_{n_k} = \lim_{n\to\infty} x_n$$

例 $\left\{(-1)^n\right\}$: $-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1\ \cdots$

取奇数项 $x_{2k-1}: -1, -1, -1, -1, \cdots$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} = -1.$

取偶数项 $x_{2k}:\ 1,\ 1,\ 1,\ \cdots$. $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2k} = 1$

$\because \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k-1} \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_{2k}$ $\quad\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left\{(-1)^n\right\}$不存在

中国大学MOOC

极限的运算性质：

定理 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$，均存在，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} cx_n = c\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ （c为常数）

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋向有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

一、当自变量趋于无穷大时函数的极限

中国大学MOOC

1. $x \to +\infty$时的情形

定义1 设$f(x)$是定义在$[a,+\infty)$上的函数，A是常数.

若对于任意给定的正数ε，总存在正数X，使得

对任何 $x > X$，都有 $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$，

则称A为当x趋于正无穷大时$f(x)$的极限，记为

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A.$$

ε-X: $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$，当$x > X$时，有$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$

中国大学MOOC

类似地可定义 $x \to -\infty$ 时的情形

2. $x \to -\infty$ 时的情形

定义2 $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0$,当$x < -X$时,有$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$,

则称A为 $f(x)$当x趋于负无穷大时的极限,记为

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$$

中国大学MOOC

3. $x \to \infty$时的情形

定义3 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数X，使得对于适合不等式$|x| > X$的一切x，所对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x) - A| < \varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x \to \infty$时的极限，记作

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad 或 \quad f(x) \to A(当x \to \infty时)$$

ε-X: $\forall \varepsilon > 0, \exists X > 0,$ 当$|x| > X$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$

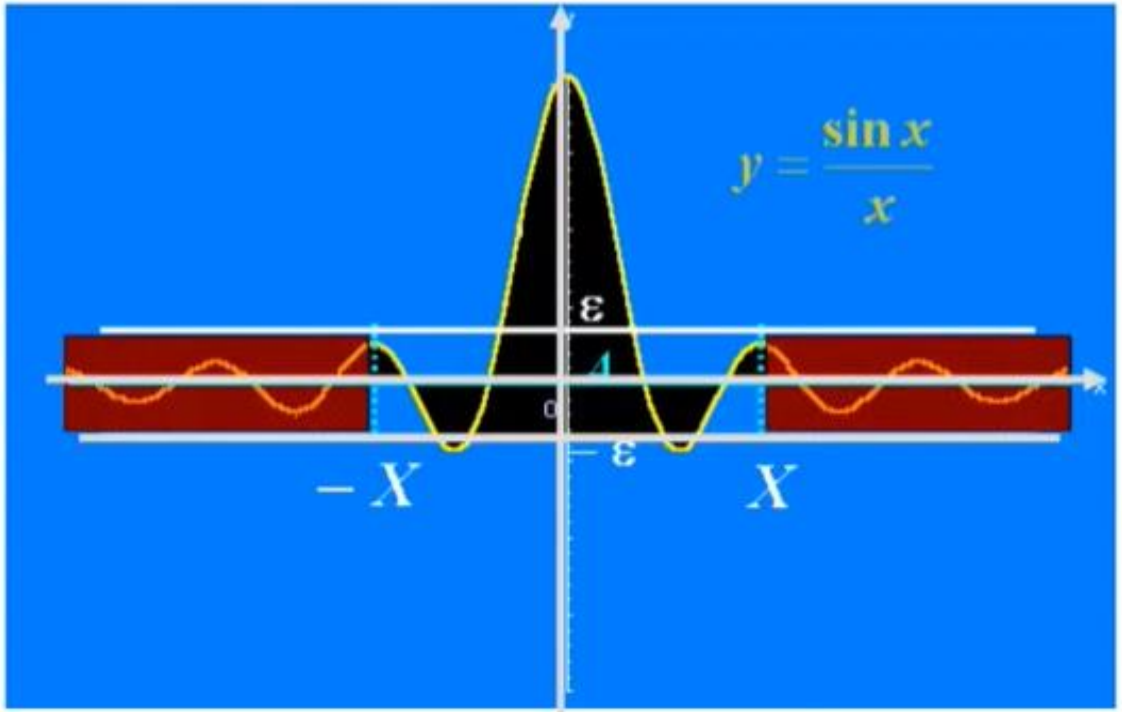
定理: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A.$

中国大学MOOC

几何解释:

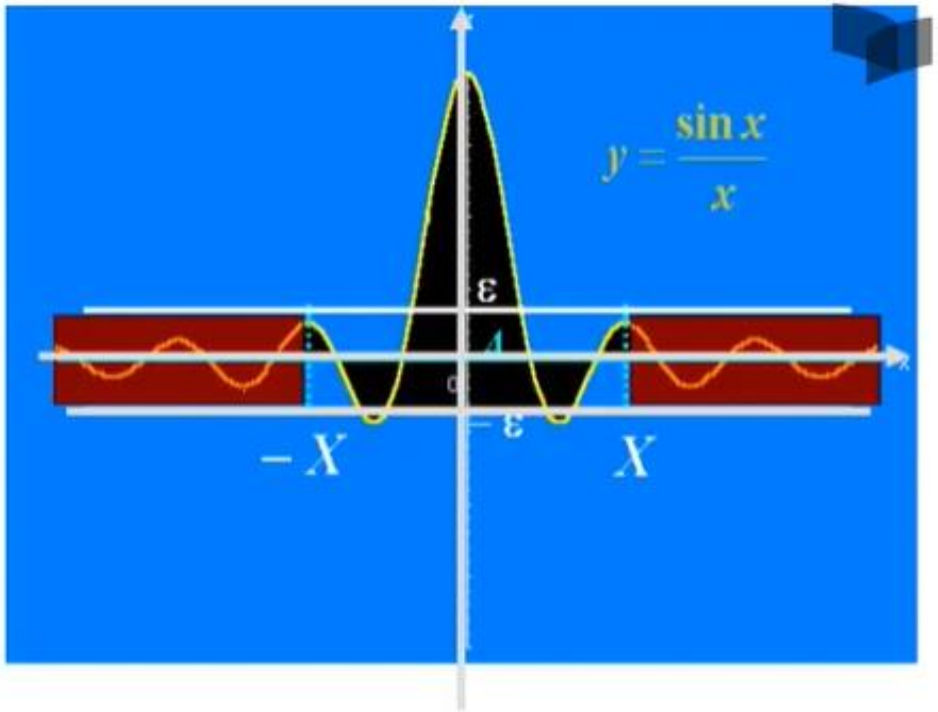
当$x<-X$或$x>X$时, 函数$y=f(x)$图形完全落在以

直线$y=A$为中心线, 宽为2ε的带形区域内.



中国大学MOOC

例1 证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$



证 $\forall\varepsilon>0,$

要使 $\left|\dfrac{\sin\ x}{x}-0\right|=\left|\dfrac{\sin\ x}{x}\right|$

$$<\frac{1}{|x|}<\varepsilon$$

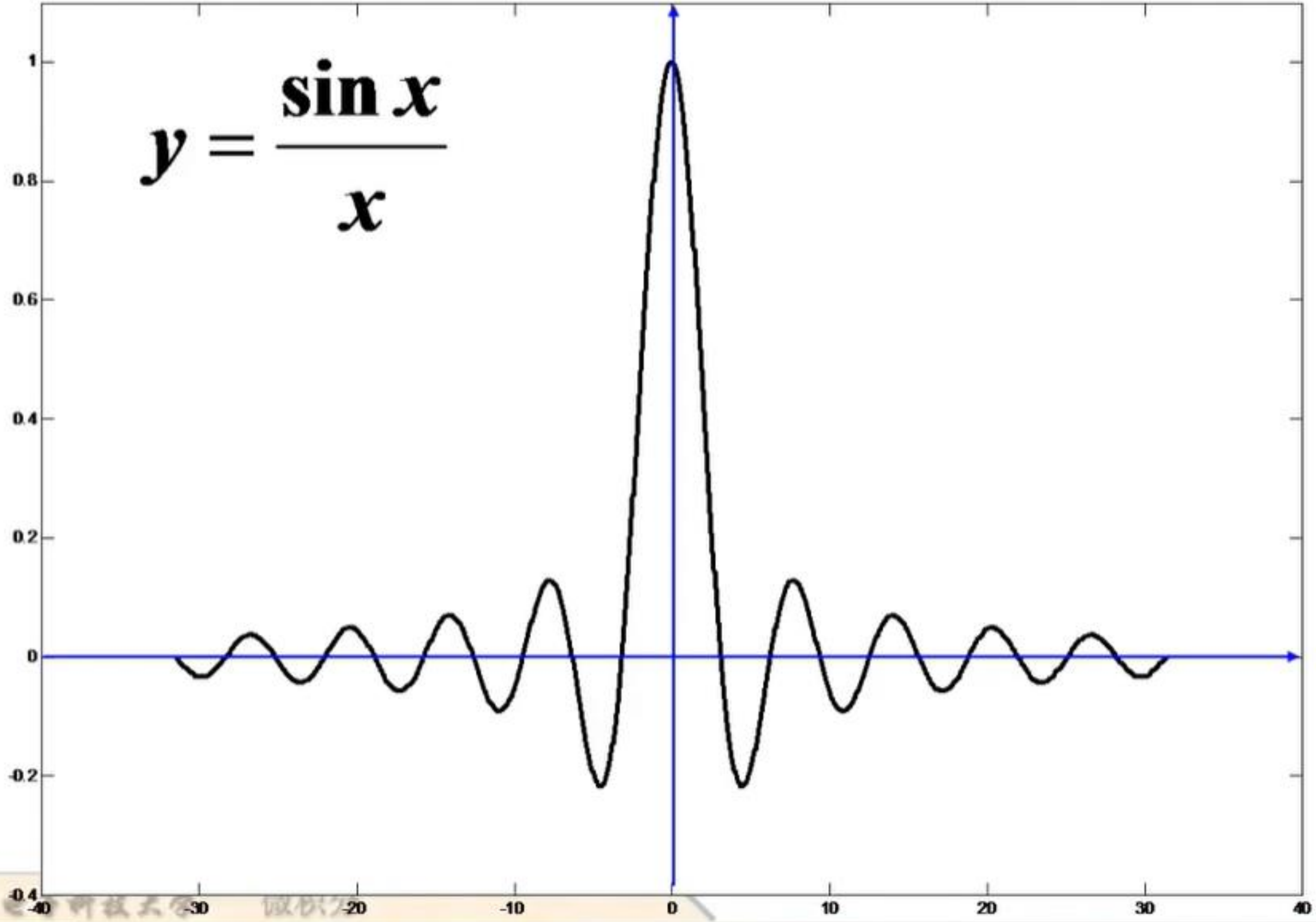
只需 $|x|>\dfrac{1}{\varepsilon},$ 取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon},$ 则当 $|x|>X$ 时恒有

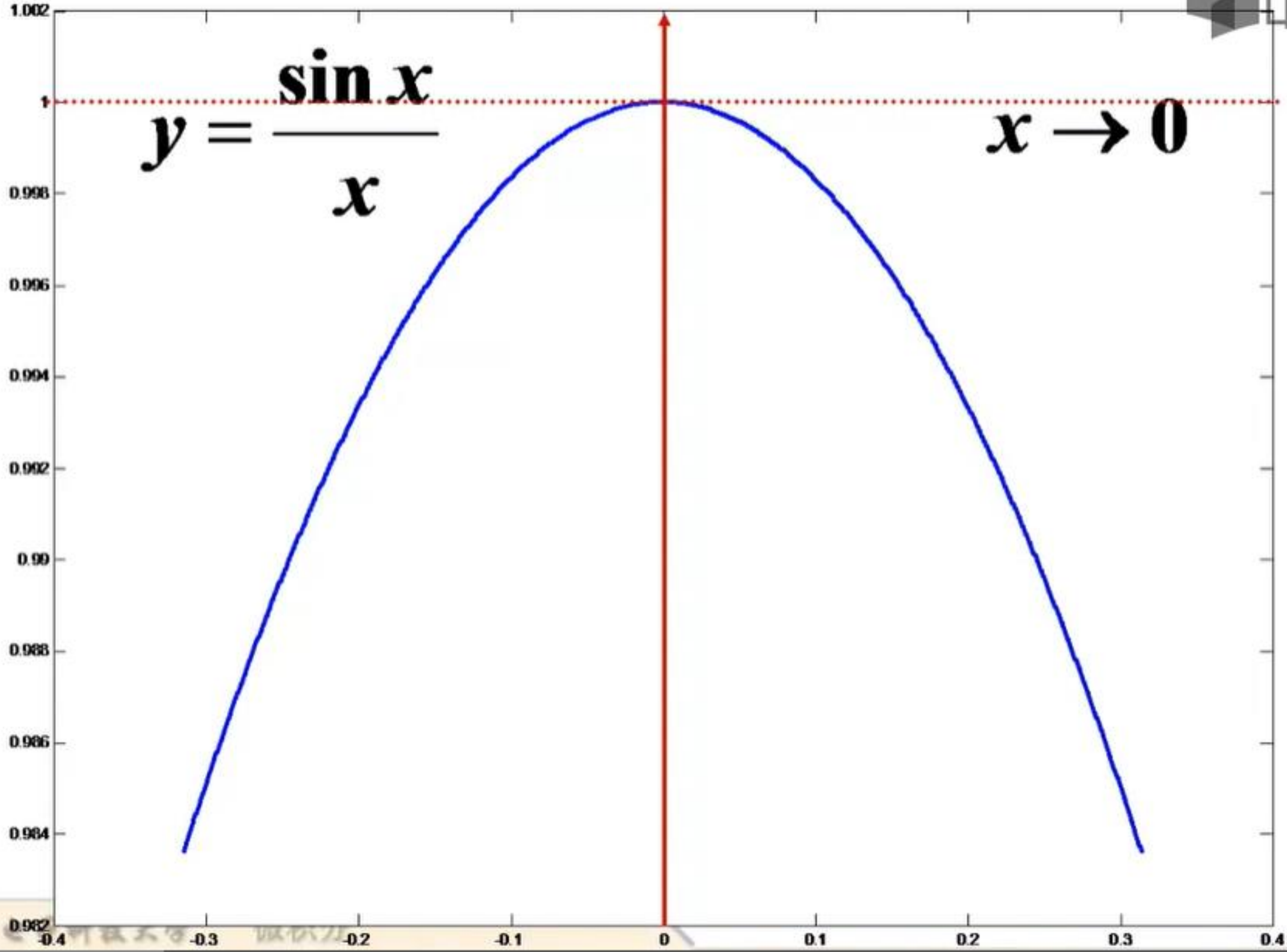
$\left|\dfrac{\sin x}{x}-0\right|<\varepsilon,$ 故 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0.$

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋于有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

二、自变量趋向有限值时函数的极限





$y = \frac{\sin x}{x}$
$x \to 0$
1.002
1
0.998
0.996
0.994
0.992
0.99
0.988
0.986
0.984
0.982
-0.4
-0.3
-0.2
-0.1
0
0.1
0.2
0.3
0.4

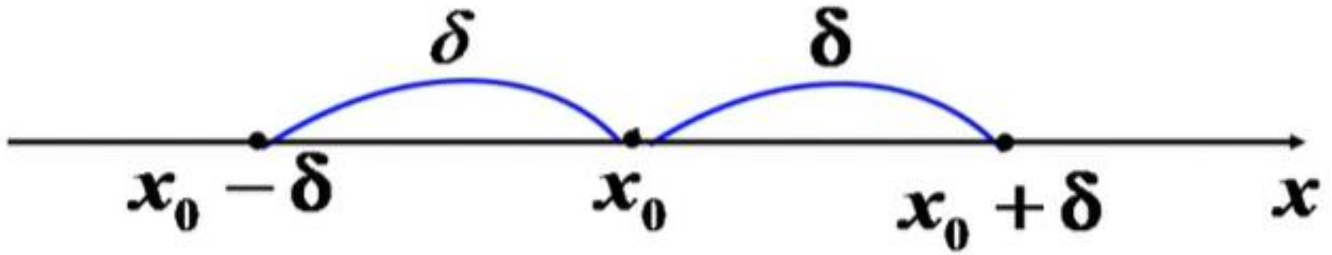
中国大学MOOC

中国大学MOOC

如何描述函数 $f(x)$在 $x \to x_0$ 的过程中, 对应函数值 $f(x)$无限趋近于确定值A.

$|f(x)-A|<\varepsilon$ 表示$|f(x)-A|$任意小;

$0<|x-x_0|<\delta$ 表示$x \to x_0$过程中的某一时刻之后 .



δ体现x接近x_0程度.

1. 定义：("$\varepsilon-\delta$"定义)

定义4 如果对于任意给定的正数ε(不论它多么小)，总存在正数δ，使得对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切x，对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$，则称常数A为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \quad \text{或} \quad f(x)\to A(\text{当}x\to x_0\text{时})$$

即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 使当$0<|x-x_0|<\delta$时，

恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

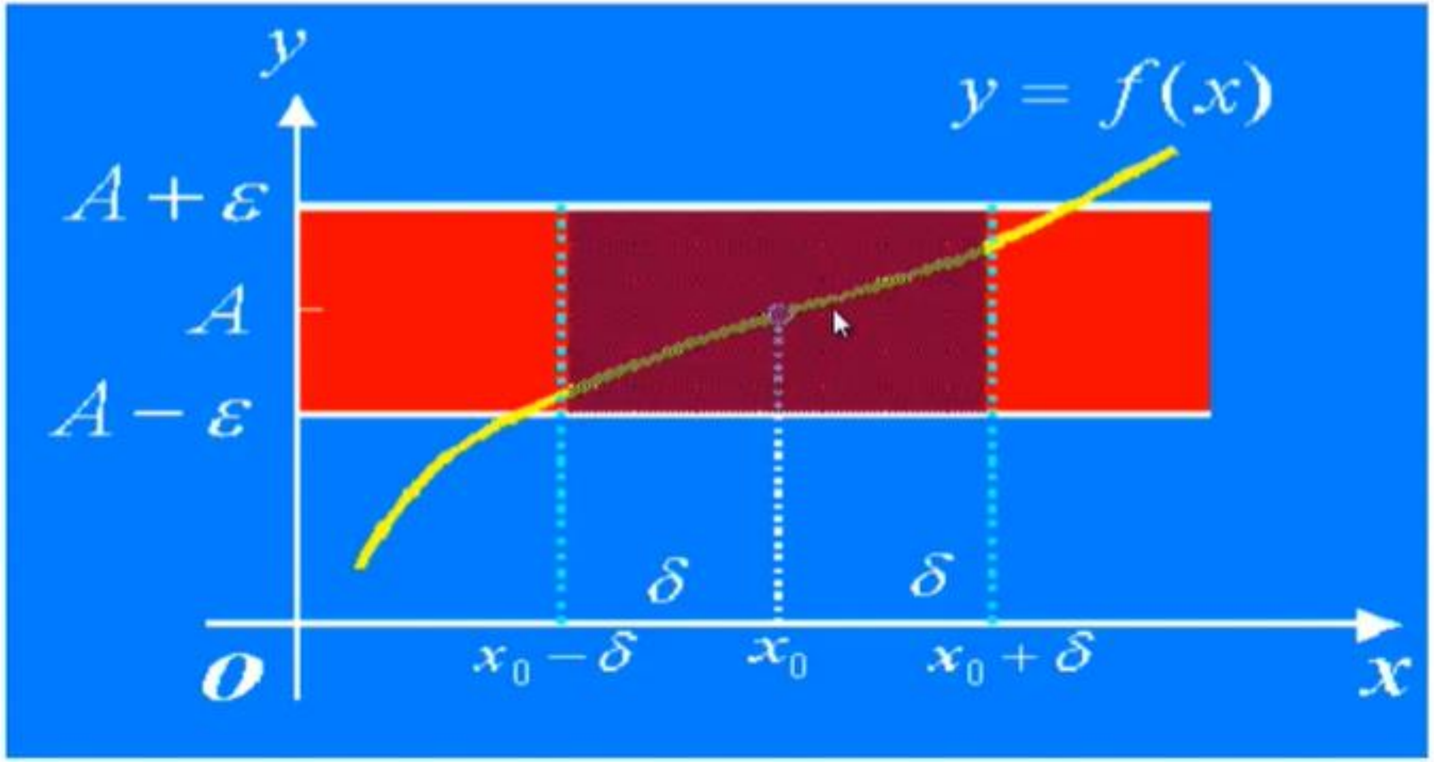
中国大学MOOC

中国大学MOOC

2.几何解释:

当x在x_0的去心δ邻域时,函数$y=f(x)$图形完全落

在以直线$y=A$为中心线,宽为2ε的带形区域内.



如何证明函数极限?

例2 证明 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2.$

证 函数在点 $x=1$ 处没有定义.

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|f(x) - A| = \left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| = |x-1| < \varepsilon$

只需 $|x-1| < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon$,

当 $0 < |x-1| < \delta$ 时, 就有 $\left| \frac{x^2-1}{x-1} - 2 \right| < \varepsilon$,

中国大学MOOC

例3 证明：当$x_0 > 0$时，$\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$.

证 $\forall \varepsilon > 0$,

要使$|f(x) - A| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = \left|\dfrac{x - x_0}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}}\right| \le \dfrac{|x - x_0|}{\sqrt{x_0}} < \varepsilon$

只要$|x - x_0| < \sqrt{x_0}\,\varepsilon$且不取负值. 取$\delta = \min\{x_0, \sqrt{x_0}\,\varepsilon\}$,

当$0 < |x - x_0| < \delta$时， 就有$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$,

$$\therefore \lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋于有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

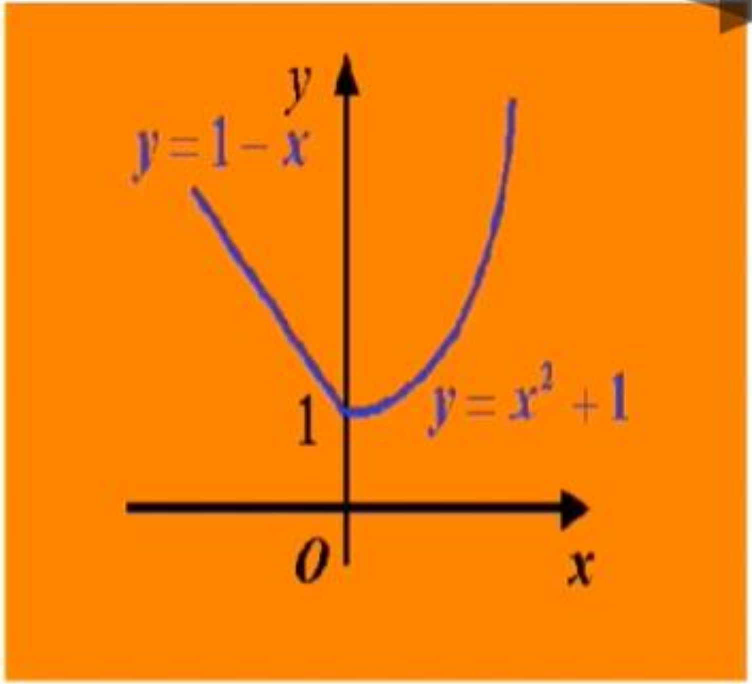
中国大学MOOC

3. 左右极限:

例如:

设 $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<0\\ x^2+1, & x\geq 0\end{cases}$

证明$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1.$



分$x>0$和$x<0$两种情况分别讨论

x从左侧无限趋近 x_0, 记作$x\to x_0-0$或$(x\to x_0^-)$;

x从右侧无限趋近 x_0, 记作$x\to x_0+0$ 或$(x\to x_0^+)$;

中国大学MOOC

左极限　　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 - \delta < x < x_0$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$

右极限　　$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时,

恒有 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

定理: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$.

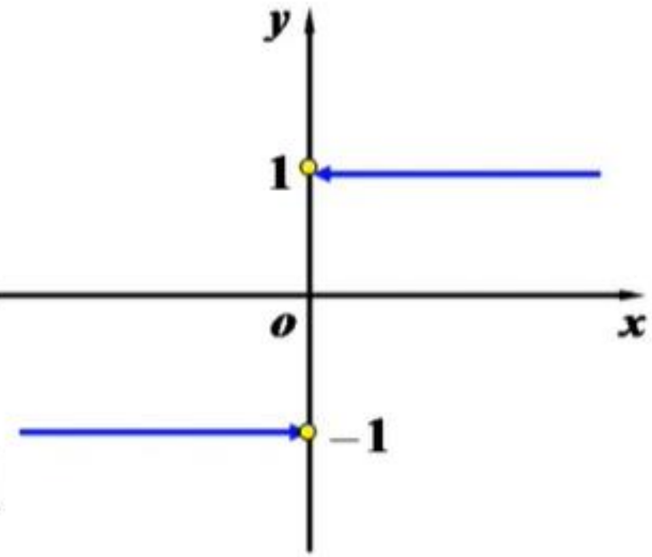
中国大学MOOC

例4 验证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x}$ 不存在.

证 $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0^-}(-1)=-1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=\lim_{x\to 0^+}1=1$$



$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{|x|}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|}{x}$ $\quad\therefore \lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

例5 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x>0 \\ 10, & x=0 \\ 5+x^2, & x<0 \end{cases}$ 在$x=0$处的左、右极限是否存在？当$x\to 0$时，$f(x)$的极限是否存在？

解：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(5+x^2)=5,$ 左极限存在，

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0,$ 右极限存在，

$\because \lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ $\quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

中国大学MOOC

中国大学MOOC

例6 设 $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x>1, \\ x-1, & x<1, \end{cases}$ 求在$x=1$处的左、右极限和极限.

解 $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(x-1)=0$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\left(x^2-1\right)=0$$

$$\because \lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^-} f(x)=0$$

$$\therefore \lim_{x\to1} f(x)=0$$

极限的概念

一、数列的定义
二、数列的简单性态
三、数列的极限
四、数列极限的性质
五、自变量趋于无穷大时函数的极限
六、自变量趋于有限值时函数的极限
七、函数极限的性质

中国大学MOOC

三、函数极限的性质

1. 有界性

定理 若在某个过程中，$f(x)$有极限，则存在过程的一个时刻，在此时刻以后$f(x)$有界.

2. 唯一性

定理 若在x的某个变化过程中$f(x)$的极限存在，则必惟一.

3. 不等式性质

定理(保序性)

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$

若$\exists\delta>0, \forall x\in U^0(x_0,\delta)$,有$f(x)\le g(x)$,则$A\le B$.

推论：设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$, 且$A<B$

则$\exists\delta>0$, $\forall x\in U^0(x_0,\delta)$, 有 $f(x)<g(x)$.

中国大学MOOC

定理（局部保号性） 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $A>0$（或 $A<0$），

则 $\exists\delta>0$，当 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时，$f(x)>0$（或 $f(x)<0$）.

推论: 若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$, 且 $\exists\delta>0$, 当 $x\in U^0(x_0,\delta)$ 时,

$f(x)\geq 0$（或 $f(x)\leq 0$），则 $A\geq 0$（或 $A\leq 0$）.

中国大学MOOC

4. 函数极限与数列极限的关系

定理 设$f(x)$在x_0的某去心邻域$U^0(x_0,\delta)$有定义，

则$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$的充分必要条件是：

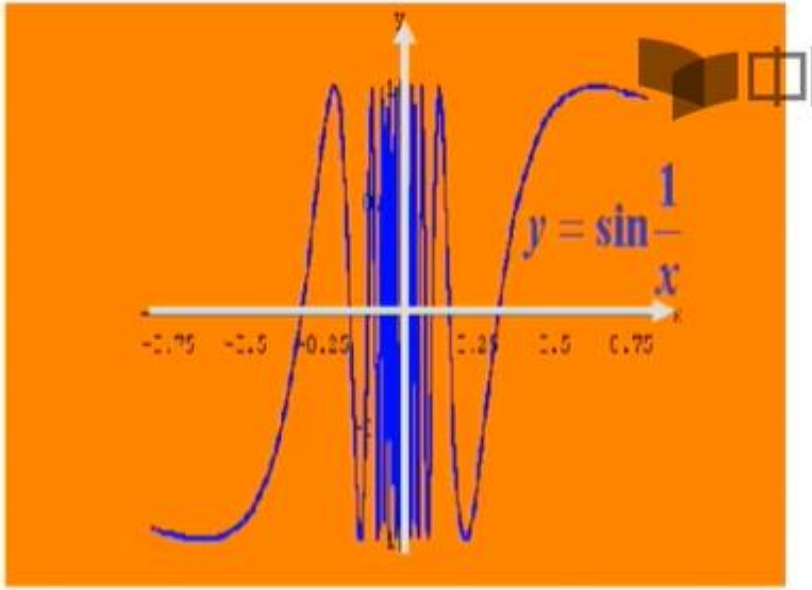
对任何以x_0为极限，且含于此空心邻域的数列

$\{x_n\}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=A.$$

$$\left(\quad (1)x_n\in U^0(x_0,\delta); \qquad (2)\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \right).$$

例7 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.



证 取 $\{x_n\}=\left\{\dfrac{1}{n\pi}\right\}$,

$x_n\neq 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0.$

取 $\{x_n'\}=\left\{\dfrac{1}{\frac{4n+1}{2}\pi}\right\}$, $x_n'\neq 0$; $\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=0.$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n'}=\lim_{n\to\infty}\sin\frac{4n+1}{2}\pi=\lim_{n\to\infty}1=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sin n\pi=0,$$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

例8 证明$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-2}=-2.$

证：$\forall\varepsilon>0$， $\left|\dfrac{x+1}{x-2}-(-2)\right|=3\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|<\varepsilon$

注意到邻域半径δ的形式应为$|x-1|<\delta$，因此上式中$|x-1|$应保留，其余部分应适当放大。

限制$|x-1|<\dfrac{1}{2}$，则$|x-2|>1-|x-1|>\dfrac{1}{2}$

只须$3\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|<6|x-1|<\varepsilon$，取$\delta=\min\left\{\dfrac{1}{2},\dfrac{\varepsilon}{6}\right\}$

则当$|x-1|<\delta$时，有$\left|\dfrac{x+1}{x-2}-(-2)\right|<\varepsilon$

中国大学MOOC