三. 实对称矩阵的相似对角化

定理3: 对任一实对称矩阵A, 均存在正交矩阵C, 使

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵A的特征值.

推论: 设A是实对称矩阵, λ是A的k重特征值, 则:

λ恰有k个线性无关的特征向量.

求正交矩阵 C 与对角矩阵 Λ 的计算步骤：

(1) 求 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的根：$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$；

(2) 求 $(\lambda_i I-A)X=0$ 的基础解系：

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i};$$

(3) 将 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 正交化后再单位化得：

$$\gamma_{i1},\gamma_{i2},\cdots,\gamma_{ir_i}$$

(4) 令 $C=\left(\gamma_{11},\cdots\gamma_{1r_1},\cdots,\gamma_{k1},\cdots\gamma_{kr_k}\right)$,则 C 为正交矩阵且

$$C^T AC=C^{-1}AC=\Lambda=\mathrm{diag}\left(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\right).$$

例1. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵$C$与对角矩阵$\Lambda$，使

$$C^T AC = C^{-1}AC = \Lambda .$$

解:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1(\text{二重}), \lambda_2 = 10 .$$

求 $\lambda_1 = 1$ 的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 + 2x_3\,,\quad \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,\quad \alpha_2 = (2, 0, 1)^T\,.$$

将 α_1, α_2 正交化：$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2, 4, 5)^T.$$

再将 β_1, β_2 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2, 1, 0)^T,\quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2, 4, 5)^T.$$

求$\lambda_2=10$ 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_3, \quad x_2 = -x_3,$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = (1, 2, -2)^T.$$

将α_3单位化： $\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T.$

令 $C=(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$,

则C为正交矩阵且：

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

例2. 实对称矩阵 A 与 B 相似

$\Leftrightarrow$ A与B有相同的特征值 .

证明: "$\Rightarrow$" 相似矩阵有相同的特征值.

$\Leftarrow$: 设$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是A与B的特征值,由A, B实对称知

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim B,$$

由矩阵相似的传递性得: $A \sim B$.