第二章 行列式

§2.4 克拉默法则

一. 逆矩阵的一个简明表达式

二. 克拉默法则

电子科技大学 黄廷祝

一. 逆矩阵的一个简明表达式

引理1. 设$A=(a_{ij})_{n,n}$，则

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

证.

$$i\neq j:\ a_{i1}A_{j1}+\cdots a_{in}A_{jn}=\begin{array}{l}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i1} & \cdots & a_{in}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}=0$$

引理2. 设A为n阶矩阵，则: $AA^* = A^*A = (\det A)I$,

其中：
$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
（A的伴随矩阵）

证.
$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$
$$= \mathrm{diag}(\det A, \det A, \ldots, \det A) = (\det A)I$$

定理1. **方阵A可逆 $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.**

当A可逆时， $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} A^{*}.$

证.

$$\left.\begin{aligned} &A\text{可逆，故}\det A \neq 0 \\ &AA^{*} = (\det A)I \end{aligned}\right\} \Rightarrow A\left(\frac{1}{\det A}A^{*}\right) = I$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A}A^{*}$$

例1 $A=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&2&1\\0&0&3\end{pmatrix}$是否可逆？若可逆求$A^{-1}$.

解 $\det A = 6 \neq 0$, 所以A可逆.

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}6&-3&-3\\0&3&-1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

例2. 设

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix},\text{ 求}(A^*)^{-1}$$

解. $AA^*=(\det A)I$， A^{-1}存在，所以$\det A\neq 0$，

$$\left(\frac{1}{\det A}\right)AA^*=I\Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A\Rightarrow\frac{1}{\det A}=\det A^{-1}=2$$

$$A=\left(A^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{\det A^{-1}}\left(A^{-1}\right)^*=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

$$(A^*)^{-1}=\frac{1}{\det A}A=2A=\begin{pmatrix}5&-2&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$$

[结束]

二. 克拉默法则

Cramer法则 设A可逆，则$AX=b$的唯一解为：

$$x_j=\frac{\det A_j}{\det A},\ (j=1,\dots,n)$$

$\det A_j$是用b代替$\det A$中的第j列得到的行列式.

说明：

$$|A_j|=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

证. 解的唯一性（显然）

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=A^{-1}b=\frac{1}{|A|}\underbrace{\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\ A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\ \cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\ A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}}_{A^{-1}}\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}|A_1|\\ \vdots\\ |A_n|\end{pmatrix}$$

$$|A_j|=b_1A_{1j}+b_2A_{2j}+\cdots+b_nA_{nj}$$

例3 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + a x_2 + a^2 x_3 = 1 \\ x_1 + b x_2 + b^2 x_3 = 1 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b \\ 1 & a^2 & b^2 \end{vmatrix} = (b-a)(b-1)(a-1)$$

若 $b \neq a, b \neq 1, a \neq 1$，则 $|A| \neq 0$.

$$|A_1| = |A|, \quad |A_2| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a^2 \\ 1 & 1 & b^2 \end{vmatrix} = 0, \quad |A_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|} = 1, \quad x_2 = x_3 = 0.$$

例4. 求一个二次多项式 $f(x)$ 使得

$$f(1)=0,\quad f(2)=3,\quad f(-3)=28.$$

解 设所求的二次多项式为 $f(x)=ax^2+bx+c$,

得一个关于未知数 a,b,c 的线性方程组,

$$f(1)=a+b+c=0,$$
$$f(2)=4a+2b+c=3,$$
$$f(-3)=9a-3b+c=28,$$

又 $D=-20\neq 0,\ D_1=-40,\ D_2=60,\ D_3=-20.$

得 $a=D_1/D=2,\ b=D_2/D=-3,\quad c=D_3/D=1$

故所求多项式为 $f(x)=2x^2-3x+1.$

注意: 解方程组一般不用 Cramer法则(计算量太大), Cramer法则主要是理论上的意义. (如，给出了解的表达式)

[结束]