第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

何军华

电子科技大学

一. 引 例

设矩阵$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$, 计算$A^{10}$.

回忆: 能快速计算哪些矩阵的方幂?

(1) 对角矩阵;

(2) 秩1矩阵:

$$A=\alpha^T\beta\Rightarrow A^k=\left(\alpha^T\beta\right)^k=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)^{k-1}\beta=\left(\beta\alpha^T\right)^{k-1}A$$

(3) 数学归纳法: $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$

解：

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}_{\Lambda}\underbrace{\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$A^{10}=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{10}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&-2&0\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{10}&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&0\\-1&-1&0\\-1&-2&1\end{pmatrix}$$

问题：(1) 对什么样的矩阵A有这样的P与Λ?

(2) 如何找出这样的P与Λ?

二．相似的定义与性质

相似： 设A与B都是n阶矩阵，若存在可逆矩阵P,使：

$$P^{-1}AP=B,$$

则称A与B相似，记为$A\sim B$

性质：

(1) 反身性：$A\sim A$

(2) 对称性：$A\sim B\Rightarrow B\sim A$

(3) 传递性：$A\sim B$ 且 $B\sim C\Rightarrow A\sim C$

证： (3)：$A=P^{-1}BP\quad B=Q^{-1}CQ$

$$\Rightarrow A=P^{-1}Q^{-1}C\underbrace{QP}_{D}=D^{-1}CD$$

例1. 设 $A \sim C, B \sim D$, 证明: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

证: $A \sim C, B \sim D \Rightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q, 使得

$$P^{-1}AP = C,\ Q^{-1}BQ = D$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

定理1. 相似矩阵有相同的特征值.

证: 设 $B = P^{-1}AP$,则:

$$
\begin{aligned}
|\lambda I - B| &= |\lambda I - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}\lambda IP - P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(\lambda I - A)P| \\
&= |P^{-1}| \cdot |\lambda I - A| \cdot |P| \\
&= |\lambda I - A|
\end{aligned}
$$

思考: 相似矩阵是否有相同的行列式? 秩? 反之如何?

定理2. $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵A的**全部特征值.**

证:

$$|\lambda I - \Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Lambda \text{的全部特征值是:} \lambda_1, \cdots, \lambda_n . \\ A \sim \Lambda \Rightarrow A \text{与} \Lambda \text{的特征值相同,} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$ 的全部特征值是$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

三．相似对角化的判定(1)

定理3. n阶矩阵A与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$

A有n个线性无关的特征向量

证：充分性 设A有n个线性无关的特征向量：$P_1, \cdots, P_n$.

$$AP_1 = \lambda_1 P_1, \cdots, AP_n = \lambda_n P_n$$

$$\begin{array}{c} (AP_1, \cdots, AP_n) \\ \| \\ A(P_1, \cdots, P_n) \end{array} = (\lambda_1 P_1, \cdots, \lambda_n P_n) = \underbrace{(P_1, \cdots, P_n)}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}}_{\Lambda}$$

$P_1, \cdots, P_n$线性无关$\Rightarrow P$可逆

$$\Rightarrow AP = P\Lambda, \quad P^{-1}AP = \Lambda \quad \Rightarrow A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

必要性： 设$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$

$\Rightarrow AP=P\Lambda.$ 设 $P=(P_1,\cdots,P_n)$,

$$\Rightarrow A(P_1,\cdots,P_n)=(P_1,\cdots,P_n)\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

$$=(\lambda_1P_1,\cdots,\lambda_nP_n)$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow AP_1=\lambda_1P_1,\cdots,AP_n=\lambda_nP_n \\ P\text{可逆}\Rightarrow P_1,\cdots,P_n\text{线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow P_1,\cdots,P_n$ 是A的n个线性无关的特征向量.

定理4. $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\cdots,A\alpha_m=\lambda_m\alpha_m,\ \alpha_i\neq 0\,(i=1,\cdots,m)$,

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 互异 $\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关.

证: 设$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$, 左乘$A^i\,(i=1,\cdots,m-1)$

$$A\alpha_j=\lambda_j\alpha_j\Rightarrow A^i\alpha_j=\lambda_j^i\alpha_j\,(j=1,\cdots,m)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0=k_1A^i\alpha_1+\cdots+k_mA^i\alpha_m=k_1\lambda_1^i\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m^i\alpha_m$$

$$\Rightarrow\begin{cases}k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0\\ k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m\alpha_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ k_1\lambda_1^{m-1}\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m^{m-1}\alpha_m=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0\\ k_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m\alpha_m=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ k_1\lambda_1^{m-1}\alpha_1+\cdots+k_m\lambda_m^{m-1}\alpha_m=0\end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\left(k_1\alpha_1,\cdots,k_m\alpha_m\right)\underbrace{\begin{pmatrix}1&\lambda_1&\cdots&\lambda_1^{m-1}\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ 1&\lambda_m&\cdots&\lambda_m^{m-1}\end{pmatrix}_{m\times m}}_{T}=(0,\cdots,0)\\ \lambda_1,\cdots,\lambda_m\text{互异}\Rightarrow T\text{可逆}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow\left(k_1\alpha_1,\cdots,k_m\alpha_m\right)=(0,\cdots,0)\\ \alpha_i\neq0\left(i=1,\cdots,m\right)\end{array}\right\}\Rightarrow k_1=\cdots=k_m=0$$

推论1. A 的特征值互异, 则 A 与对角矩阵相似.

证: 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是A的互异特征值,

$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 是它们对应的特征向量

则 $\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

$\Rightarrow A$与对角矩阵相似.

可以证明**推论2.**

设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵A的不同特征值.

$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 是λ_i的线性无关的特征向量.

$\Rightarrow \alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$ 线性无关

例2. 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A$, $3I-A$, $I-3A$ 均不可逆.

证明: (1) A 可逆; (2) A 与对角矩阵相似.

证: (1) $I+A$ 不可逆 $\Rightarrow |I+A|=0$

$$\Rightarrow |-I-A|=(-1)^3|I+A|=0 \Rightarrow \lambda_1=-1 \text{ 是 } A \text{ 特征值.}$$

$$3I-A \text{不可逆} \Rightarrow |3I-A|=0 \Rightarrow \lambda_2=3 \text{ 是 } A \text{ 的特征值.}$$

$$I-3A \text{不可逆} \Rightarrow |I-3A|=3^3\left|\frac{1}{3}I-A\right|=0$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{3}I-A\right|=0 \Rightarrow \lambda_3=\frac{1}{3} \text{ 是 } A \text{ 的特征值.}$$

A 的特征值均非零，故 A 可逆.

例2. 设 A 是 3 阶矩阵且 $I+A$, $3I-A$, $I-3A$均不可逆.

证明: (1) A可逆; (2) A与对角矩阵相似.

(2) 3阶方阵A有3个互异特征值,

故A与对角阵相似, 且

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 3 & \\ & & 1/3 \end{pmatrix}.$$

四．相似对角化的判定(2)

可以证明推论3:

n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ 任一特征值的代数重数 = 几何重数

$\Leftrightarrow$ 若 λ_i 是 A 的 k_i 重特征值，则 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的基础解系由 k_i 个解向量组成

$\Leftrightarrow R(\lambda_i I - A) = n - k_i$.

例3. 下列矩阵能否与对角矩阵相似？

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

解:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow A\sim \mathrm{diag}(1,-1,3)$$

$$|\lambda I-B|=\begin{vmatrix}\lambda-3 & 1 & 2\\ -2 & \lambda & 2\\ -2 & 1 & \lambda+1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0,\quad \lambda_2=1(\text{二重}).$$

$$\lambda_2 I-B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -1/2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(\lambda_2 I-B)=1$$

$$\Rightarrow B\sim \mathrm{diag}(0,1,1)$$

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda + 1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda + 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 1)^2 (\lambda + 2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, (\text{二重}) \quad \lambda_2 = -2,$$

$$R(\lambda_1 I - C) = 2,$$

$\Rightarrow C$不能与**对**角矩**阵**相似.

例4. 设 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \Lambda$ 为对角阵.

求 x 与 y 应满足的条件.

解:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & -1 \\ -x & \lambda-1 & -y \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1(\text{二重}), \lambda_2 = -1.$$

$A \sim$ 对角阵 $\Leftrightarrow R(\lambda_1 I - A) = 1$

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\lambda_1 I - A) = 1 \Leftrightarrow -x-y=0$$

$$\Leftrightarrow x+y=0$$

例5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量，

并指出A可相似对角化的条件.

分析：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & a \\ -2 & \lambda-a & 2 \\ a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-a & 2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-a & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-a-1 \end{vmatrix}=(\lambda+a-1)(\lambda-a)(\lambda-a-1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1-a,\ \lambda_2=a,\ \lambda_3=a+1 \qquad k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2a \\ 1 \end{pmatrix};\ k\begin{pmatrix} 2-a \\ -4a \\ a+2 \end{pmatrix};\ \boxed{k\neq 0}$$

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & -a\\ 2 & a & -2\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix},\quad \Rightarrow \lambda_1=1-a,\ \lambda_2=a,\ \lambda_3=a+1$$

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\quad k\begin{pmatrix}1\\1-2a\\1\end{pmatrix};\quad k\begin{pmatrix}2-a\\-4a\\a+2\end{pmatrix};$$

$\lambda_2 \neq \lambda_3 \Rightarrow 3$ 个特征值不全相等

$\boxed{\lambda_1=\lambda_2 \Rightarrow}$

$a=1/2 \Rightarrow$ 2 重特征值 $1/2$ 只有 1 个线性无关的特征向量

$\boxed{A\text{ 不能相似对角化}}$

$\boxed{\lambda_1=\lambda_3 \Rightarrow}$ $a=0 \Rightarrow$ 2 重特征值 1 只有 1 个线性无关的特征向量

$\boxed{A\text{ 不能相似对角化}}$

其它情形: 3个特征值互不相同, $\boxed{A\text{可以相似对角化}}$

例6. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是(　　)

$\boxed{(A)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};}$ (B) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; (C) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; (D) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

分析: 分别计算各矩阵的特征值:

(A) 1(2重)　(B) 1, 2　(C) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　(D) 0,3

选项(B)(C)(D)中,对应2阶矩阵A有两个不同的特征值,

都可对角化

选项(A)中,对2重特征值1 $R(1I-A)=1 \neq 2-2$

不能对角化.

五．矩阵方幂的计算

例7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{10}$.

解: $$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -6 & 0 \\ 3 & \lambda+5 & 0 \\ 3 & 6 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1=-2,\ \lambda_2=1\,(\text{二重}).$$

例7. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$，求$A^{10}$.

$\Rightarrow \lambda_1=-2$，$\lambda_2=1$（二重）.

$$(\lambda_1 I-A)=\begin{pmatrix}-6&-6&0\\3&3&0\\3&6&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-x_3\,,\\x_2=x_3\,,\end{cases}\Rightarrow \alpha_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2 + 0x_3 \Rightarrow \alpha_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

令 $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} = \Lambda$$

$$A = P\Lambda P^{-1}$$

$$A^{10} = P\Lambda^{10} P^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1024 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1022 & -2046 & 0 \\ 1023 & 2047 & 0 \\ 1023 & 2046 & 1 \end{pmatrix}$$

例8. 已知矩阵$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ a & 1 & a-2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$有3个线性无关的特征向量, 求$A$的值, 并求$A^n$.

分析: A有3个线性无关的特征向量

$\Rightarrow A$可以相似对角化

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & -2\\ -a & \lambda-1 & 2-a\\ 3 & 0 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1(2重),\lambda_2=2$$

对A的2重特征值1: $R(1I-A)=3-2=1$

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ a & 1 & a-2\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(1I-A)=3-2=1$$

$$I-A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -2\\ -a & 0 & 2-a\\ -3 & 0 & -3\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2-2a\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow a=1 \quad \Rightarrow A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ -3 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1:\ \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = 2 : \alpha_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

$$令 P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \Rightarrow A^n = \begin{pmatrix} 3-2^{n+1} & 0 & 2^{n+1}-2 \\ 2^n - 1 & 1 & 1-2^n \\ 3-3\cdot 2^n & 0 & 3\cdot 2^n - 2 \end{pmatrix}$$

六. 内容小结

相似: 设A与B都是n阶矩阵，若存在可逆矩阵P, 使:

$P^{-1}AP=B$, 则称 A与B相似，记为$A\sim B$

性质: 反身性, 对称性, 传递性

定理1. 相似矩阵有相同的特征值.

定理2. $A\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{pmatrix}\Rightarrow\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

是矩阵A的全部特征值.

定理3. n阶矩阵A与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$

A有n个线性无关的特征向量

定理4. $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\cdots,A\alpha_m=\lambda_m\alpha_m,\ \alpha_i\neq 0(i=1,\cdots,m)$,

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 互异 $\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关.

推论1. A 的特征值互异, 则 A 与对角矩阵相似.

推论2. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵A的不同特征值.

$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 是λ_i的线性无关的特征向量.

$\Rightarrow \alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$ 线性无关

设A是n阶矩阵，则：

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow$ A的k重特征值恰有k个无关的特征向量

A有n个互异的特征值

$\Leftrightarrow$ λ_i是A的k_i重特征值，则

$$R(\lambda_i I - A) = n - k_i$$