四. 相似对角化的判定(2)

可以证明**推论3:**

n 阶矩阵 A 与对角矩阵相似

$\Leftrightarrow$ 任一特征值的代数重数 = 几何重数

$\Leftrightarrow$ 若 λ_i 是 A 的 k_i 重特征值，则 $(\lambda_i I - A)X = 0$ 的基础解系由 k_i 个解向量组成

$\Leftrightarrow R(\lambda_i I - A) = n - k_i$.

例3. 下列矩阵能否与对角矩阵相似？

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\-2&-2&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}3&-1&-2\\2&0&-2\\2&-1&-1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}3&1&0\\-4&-1&0\\4&-8&-2\end{pmatrix}$$

解：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&2\\2&2&\lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-3)$$

$$\Rightarrow A\sim \mathrm{diag}(1,-1,3)$$

$$|\lambda I - B| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ -2 & \lambda & 2 \\ -2 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 1(\text{二重}).$$

$$\lambda_2 I - B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(\lambda_2 I - B) = 1$$

$$\Rightarrow B \sim \mathrm{diag}(0,1,1)$$

$$|\lambda I - C| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & 0 \\ 4 & \lambda+1 & 0 \\ -4 & 8 & \lambda+2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda+2)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1, (\text{二重}) \quad \lambda_2 = -2,$$

$$R(\lambda_1 I - C) = 2,$$

$\Rightarrow C$不能与**对**角矩**阵**相似.

例4. 设 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\x&1&y\\1&0&0\end{pmatrix}\sim\Lambda$ 为对角阵.

求 x 与 y 应满足的条件.

解:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda&0&-1\\-x&\lambda-1&-y\\-1&0&\lambda\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$$

$$\Rightarrow\lambda_1=1(\text{二重}),\lambda_2=-1.$$

$$A\sim\text{对角阵}\Leftrightarrow R(\lambda_1 I-A)=1$$

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -x & 0 & -y \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -x-y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R(\lambda_1 I - A) = 1 \Leftrightarrow -x - y = 0$$

$$\Leftrightarrow x + y = 0$$

例5. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -a \\ 2 & a & -2 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$，求$A$的特征值和特征向量，

并指出A可相似对角化的条件.

分析：

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & 1 & a \\ -2 & \lambda-a & 2 \\ a & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda+a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-a & 2 \\ 1 & 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda+a-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 0 & \lambda-a & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-a-1 \end{vmatrix}=(\lambda+a-1)(\lambda-a)(\lambda-a-1)$$

$$\Rightarrow \lambda_1=1-a, \lambda_2=a, \lambda_3=a+1 \qquad k\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ k\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2a \\ 1 \end{pmatrix};\ k\begin{pmatrix} 2-a \\ -4a \\ a+2 \end{pmatrix};\ \boxed{k\neq 0}$$

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-a\\2&a&-2\\-a&-1&1\end{pmatrix},\quad \Rightarrow \lambda_1=1-a,\lambda_2=a,\lambda_3=a+1$$

$$k\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix};\quad k\begin{pmatrix}1\\1-2a\\1\end{pmatrix};\quad k\begin{pmatrix}2-a\\-4a\\a+2\end{pmatrix};$$

$\lambda_2\neq\lambda_3\Rightarrow 3$ 个特征值不全相等

$\boxed{\lambda_1=\lambda_2\Rightarrow}$

$a=1/2\Rightarrow$ 2 重特征值 $1/2$ 只有 1 个线性无关的特征向量

$\boxed{A\text{ 不能相似对角化}}$

$\boxed{\lambda_1=\lambda_3\Rightarrow}$ $a=0\Rightarrow$ 2 重特征值 1 只有 1 个线性无关的特征向量

$\boxed{A\text{ 不能相似对角化}}$

$\boxed{\text{其它情形:}}$ 3个特征值互不相同, $\boxed{A\text{可以相似对角化}}$

例6. 下列矩阵中不能相似于对角矩阵的是(　　)

$$\boxed{(A)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix};}\quad (B)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix};\quad (C)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix};\quad (D)\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}.$$

分析：分别计算各矩阵的特征值：

(A) 1(2重)　(B) 1, 2　(C) $\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$　(D) 0,3

选项(B)(C)(D)中,对应2阶矩阵A有两个不同的特征值,

都可对角化

选项(A)中,对2重特征值1 $R(1I-A)=1 \neq 2-2$

不能对角化.