二、齐次方程组求解实例

例1. 求方程组的通解：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \qquad\qquad + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 \qquad\quad = 0, \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

解：

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_5, \\ x_3 = \qquad - x_5, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_5, \\ x_3 = \qquad\quad - x_5, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

基础解系： (令某自由变元取 1, 其它自由变元均取 0)

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ 0 \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解：

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2,$$

$$k_1, k_2 \in R.$$

例2. 解方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+6x_2+10x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+7x_3=0, \\ x_1+2x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

解:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$, 因此原方程组只有零解.

例3. 证明：与$AX=0$基础解系等价的线性无关向量组也是该方程组的基础解系.

证： 设 I: $\xi_1, \ldots, \xi_s$ 是 $AX=0$ 的基础解系,

II: $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关, 且与 I 等价.

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\xi_1, \ldots, \xi_s$线性表出, 都是$AX=0$的解;

(2) 任取$AX=0$的解X, X 可由$\xi_1, \ldots, \xi_s$线性表出,

又$\xi_1, \ldots, \xi_s$可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性表出, 所以

X 可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表出;

(3) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关,

故 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$是 $AX=0$的基础解系.

例4. $A_{m\times n}, B_{n\times s}$ 满足 $AB=O$，证明：

$$\boxed{R(A)+R(B)\le n.}$$

证： 设 $B=(b_1,\dots,b_s)$, 则

$$AB=A(b_1,\dots,b_s)=(Ab_1,\dots,Ab_s)=(0,\dots,0)=O_{m\times s}$$

$$\Rightarrow Ab_1=\cdots=Ab_s=0$$

B的列向量组都是$AX=0$的解,

可由$AX=0$的基础解系线性表出.

$$\Rightarrow \quad \underset{\substack{\| \\ R(B)}}{R(b_1,\dots,b_s)} \le \underset{\substack{\| \\ n-R(A)}}{AX=0\text{基础解系中的解数}}$$