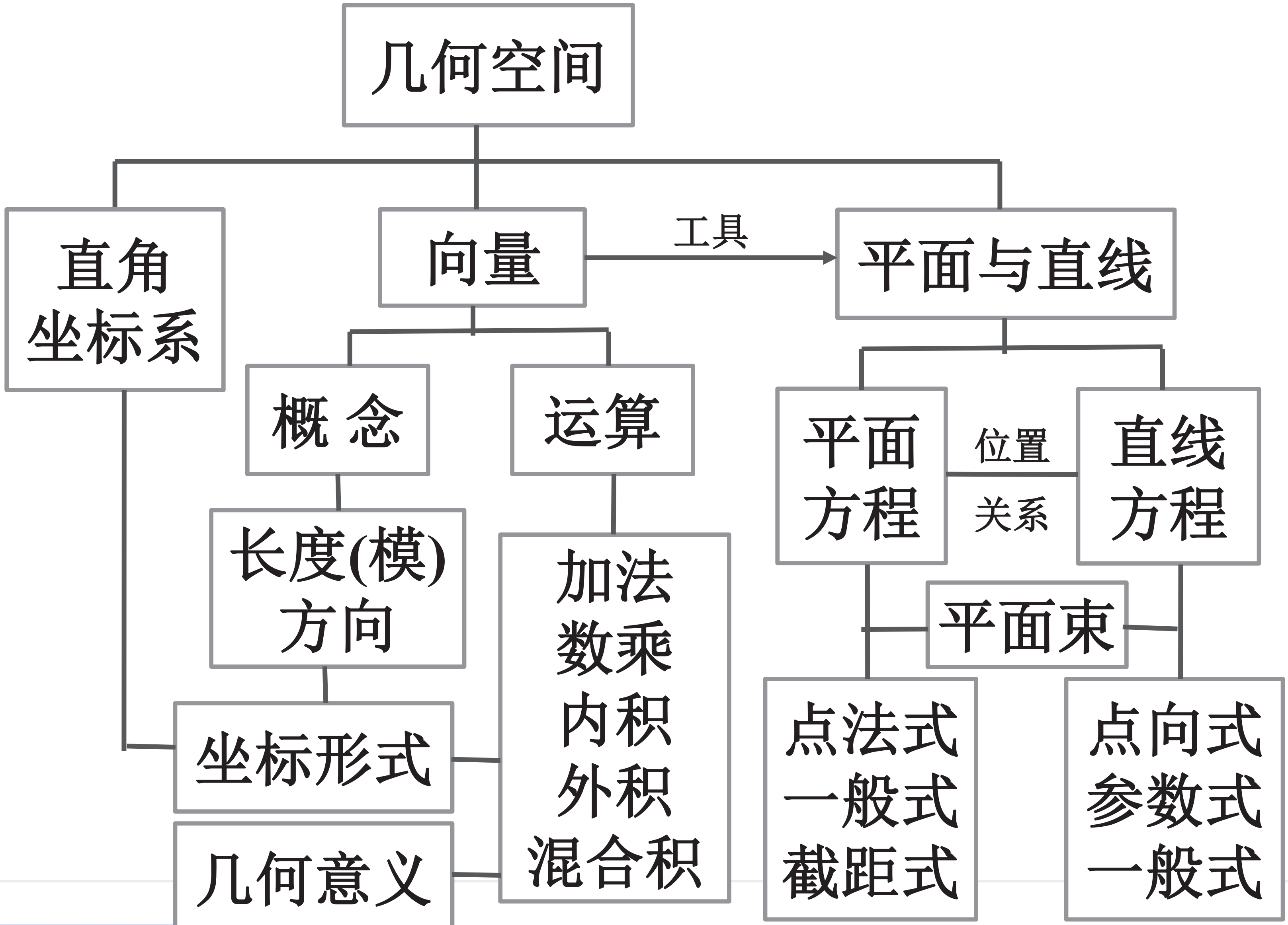
第三章 几何空间

习题课 1

- 内容结构
- 范 例

电子科技大学 蒲和平

内容结构


几何空间
直角坐标系
向量
工具
平面与直线
概 念
运算
长度(模)
方向
加法
数乘
内积
外积
混合积
坐标形式
几何意义
平面方程
位置
关系
直线方程
平面束
点法式
一般式
截距式
点向式
参数式
一般式

范　例

一、向量及其运算

1.设π为不共线的三点A,B,C的平面,O为原点,$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{\gamma}$,$\vec{n}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$,则有(B).

(A) $\vec{n}\parallel\pi$; (B) $\vec{n}\perp\pi$; (C) $<\vec{n},\pi>=\pi/4$; (D) $<\vec{n},\pi>=\pi/3$.

解

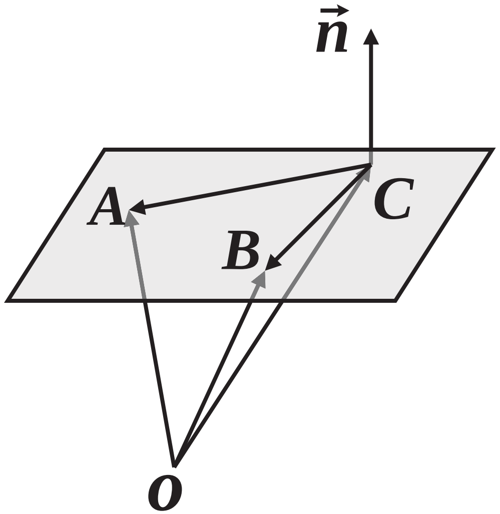
$$\vec{n}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}-\vec{\gamma}\times\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\times\vec{\gamma}$$

$$=(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\times\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})$$

$$=\overrightarrow{CA}\times\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\overrightarrow{CA}$$

$$=\overrightarrow{CA}\times(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$$



$$\Rightarrow\vec{n}\perp\pi.$$

2. 已知$\|\vec{\alpha}\|=2, \|\vec{\beta}\|=3, \langle\vec{\alpha},\vec{\beta}\rangle=\frac{\pi}{3}$，以$3\vec{\alpha}-4\vec{\beta}$和$\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$为邻边是平行四边形的周长为 $\underline{2(\sqrt{108}+\sqrt{28})}$，面积为 $\underline{6\sqrt{3}}$.

解 $\|3\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\|^2=(3\vec{\alpha}-4\vec{\beta})^2=9\|\vec{\alpha}\|^2+16\|\vec{\beta}\|^2-24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$$=9\|\vec{\alpha}\|^2+16\|\vec{\beta}\|^2-24\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|\cos\frac{\pi}{3}=108$$

$\Rightarrow\|3\vec{\alpha}-4\vec{\beta}\|=\sqrt{108}$， 类似可得 $\|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\|=\sqrt{28}$

周长$=2(\sqrt{108}+\sqrt{28})$

面积 $S=\|(3\vec{\alpha}-4\vec{\beta})\times(\vec{\alpha}-2\vec{\beta})\|=2\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\|=6\sqrt{3}$

3. 设单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点. 求 $\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$ 在$\overrightarrow{MN}$方向上的投影.

解 设α, β, γ是$\overrightarrow{OA}$ 的方向角，则

$\overrightarrow{OA}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 由 $\alpha=\beta=\gamma$可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=3\cos^2\alpha=1 \Rightarrow \cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overrightarrow{OA}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

设点B的坐标是(x, y, z), 则点N是MB的中点，且

$$\frac{x+1}{2}=-1,\ \frac{y-3}{2}=2,\ \frac{z+2}{2}=1.$$

$\therefore \quad x=-3,\ y=7,\ z=0. \qquad \overrightarrow{OB}=(-3,\ 7,\ 0),$

又 $\overrightarrow{MN}=(-2,5,-1)$

$$\therefore\ \mathrm{Pr}\,j_{\overrightarrow{MN}}\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})}{\|\overrightarrow{MN}\|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 5 & -1\\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\\ -3 & 7 & 0\end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{11}{3\sqrt{10}}.$$

<< * >>