第五章 特征值与特征向量

5.2 矩阵的相似对角化

何军华

电子科技大学

一.引例

设矩阵$A=\begin{pmatrix}4&6&0\\-3&-5&0\\-3&-6&1\end{pmatrix}$, 计算$A^{10}$.

回忆: 能快速计算哪些矩阵的方幂?

(1) 对角矩阵;

(2) 秩1矩阵:

$$A=\alpha^T\beta\Rightarrow A^k=\left(\alpha^T\beta\right)^k=\alpha^T\left(\beta\alpha^T\right)^{k-1}\beta=\left(\beta\alpha^T\right)^{k-1}A$$

(3) 数学归纳法: $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix}1&k\\0&1\end{pmatrix}$

解:

$$A=\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{P}\underbrace{\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{\Lambda}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}}_{P^{-1}}$$

$$A^{10}=P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}\cdots P\Lambda P^{-1}P\Lambda P^{-1}=P\Lambda^{10}P^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(-2)^{10} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

问题: (1) 对什么样的矩阵A有这样的P与Λ?

(2) 如何找出这样的P与Λ?