# 三. 特征值与特征向量的判定

## 1. 特征值的判定.

给定$n$阶矩阵 $A$, 则

$\lambda$是$A$的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ (\lambda I - A)\alpha = 0$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 $\alpha$;

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

$\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

$\Uparrow$

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\ \vdots\\ \lambda\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$$

$\Uparrow$

$A$各行元之和为$\lambda$

**例3.**

| $A$满足的条件 | $A$ 有特征值 |
|---|---|
| ◆ $2I+3A$ 不可逆 | $-2/3$ |
| ◆ $\lvert 3I+4A \rvert = 0$ | $-3/4$ |
| ◆ $\mathrm{R}(4I+5A) < n$ | $-4/5$ |
| ◆ $(5I+6A)X=0$ 有非零解 | $-5/6$ |
| ◆ $(6I+7A)X=b$ 有两个互异解 | $-6/7$ |
| ◆ 非零矩阵$B$使得$(7I+8A)B=0$ | $-7/8$ |
| ◆ $A$ 各行元之和为9 | 9 |

**例4.** 设矩阵$A$满足 $A^T A = I$, $|A| = -1$,

证明: $\lambda = -1$ 是$A$的特征值.

**证:** $|-I - A| = |-A^T A - A| = |(-A^T - I)A|$

$= -|-A^T - I| = -|-A^T - I^T|$

$= -|(-A - I)^T|$

$= -|-A - I| \Rightarrow |-I - A| = 0$

$\Rightarrow \lambda = -1$ 是$A$的特征值.

## 2. 特征向量的判定.

给定$n$阶矩阵 $A$, $\alpha$是非零列向量

$\alpha$是$A$的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha$ 对某个数$\lambda$

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

$A$各行元之和为 $\lambda$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I - A)X = 0$ 的非零解