第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

内容小结

小　结

1. 空间直线的方程

(1) 点向式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

点：$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向：$\vec{s}=(m,n,p)$.

(2) 参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

点　方向向量

(3) 一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad \vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

2. 点到直线的距离

点$M_1(x_1, y_1, z_1)$到直线 $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

的距离: $$d=\frac{\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|}{\|\vec{s}\|}$$

其中$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{s}=(m,n,p)$.

3. 直线与直线的位置关系

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad \vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1)$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \qquad \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

点: $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

(1) l_1与l_2平行 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 \not\parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

(2) l_1与l_2重合 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$

(3) l_1与l_2相交 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$且$[\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}]=0$;

(4) l_1与l_2异面 $\Leftrightarrow [\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$;

(1)---(3)均属于两直线共面的情况.

设两直线的夹角为α，则

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\|\cdot\|\vec{s}_2\|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0\ \ (m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0)$$

4. 直线与平面的位置关系

$$l:\ \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\qquad \vec{s}=(m,\ n,\ p),$$

$$\pi:Ax+By+cz+D=0\qquad \vec{n}=(A,\ B,\ C).$$

(1) l与π平行$\Leftrightarrow$ $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$但$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$；

(2) $l\subset\pi\Leftrightarrow$ $\vec{s}\cdot\vec{n}=0$且$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$；

(3) l 与 π 相交 $\Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}\neq 0$.

l 与 π 的夹角:

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

5. 平面束

$$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

经过直线 l 的所有平面:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$