第四章 n维向量空间

4.4 线性方程组的解的结构

何军华

电子科技大学

一、齐次方程组解的性质和基础解系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

即 $AX = 0$,

平凡解：$X = 0$(零解)

相关结论回顾:

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

(1) $AX = 0$有非零解;

(2) $\mathrm{R}(A) < n$;

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

1. 解的性质，基础解系的定义：

设$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_r$是$AX=0$的解，$k_1,k_2,\cdots k_r\in\mathbf{R}$，则：

(1) 两解之和是解： $\xi_1+\xi_2$是$AX=0$ 的解；

$$A\left(\xi_1+\xi_2\right)=A\xi_1+A\xi_2=0$$

(2) 数乘解是解： $k_1\xi_1$ 是$AX=0$ 的解；

$$A\left(k_1\xi_1\right)=k_1\left(A\xi_1\right)=0$$

(3) 解的线性组合是解：

$$A\left(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r\right)$$

$$=A\left(k_1\xi_1\right)+A\left(k_2\xi_2\right)+\cdots+A\left(k_r\xi_r\right)=0+0+\cdots+0=0$$

给定齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$, 令

$$S=\left\{\xi\in\mathbf{R}^{n}\,\middle|\,A\xi=0\right\}$$

表示$AX=0$ 全部解构成的集合, 则:

(1) $0\in S$, 即$AX=0$总有一个平凡解 $X=0$;

(2) S对线性运算是封闭的, 即

$$\xi_1,\xi_2\in S,\,k_1,k_2\in\mathbf{R}\Rightarrow\ k_1\xi_1+k_2\xi_2\in S.$$

S的最大无关组称为$AX=0$的基础解系.

设$\xi_1,\cdots,\xi_r$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系, 则

$$X=k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t\left(k_1,\cdots,k_t\in\mathbf{R}\right)$$

是方程组 $AX=0$ 的全部解, 称为 $AX=0$ 的通解.

基础解系的等价定义:

已知齐次线性方程组$A_{m\times n}X=0$,若$\xi_1,\cdots,\xi_t\in \mathbf{R}^n$满足:

(1) $\xi_1,\ldots,\xi_t$是$AX=0$线性无关的解;

(2) $AX=0$的任一解均可由$\xi_1,\ldots,\xi_t$线性表出.

则称$\xi_1,\ldots,\xi_t$为$AX=0$的一个基础解系.

问题: 给定齐次线性方程组$AX=0$,

(1) 基础解系是否存在,惟一? 一般存在,不惟一

(2) 如何有效计算基础解系? 初等行变换

(3) 意义何在? 有限个解表示无穷解

2. 基础解系的存在性与计算

定理1. 设方程组 $A_{m\times n}X=0$有非零解(即R(A)<n), 则:

(1) 基础解系一定存在; (2) 基础解系中解数为 $n-\mathrm{R}(A)$.

证. 设R(A) = r, 不妨设A的前r 个列向量线性无关, 则

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r}\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & \cdots & 1 & b_{r1} & \cdots & b_{r,n-r}\\ & & & O & & \end{pmatrix}$$

得同解方程组:
$$\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}$$

等号右端变元称为**自由变元**，左端变元称为**受约束变元**.

分别取
$$\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$
得 $AX=0$ 的 $n-r$ 个解:

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是$AX=0$ 的基础解系：

(1) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关：

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\text{线性无关}$$

为什么？

$$\Rightarrow \xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}\text{ 线性无关}$$

(2) $AX=0$的任一解都可由 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性表出：

任取$AX=0$的解$\xi=\left(c_1,c_2,\cdots,c_{r+1},\cdots,c_n\right)^T$，可以证明：

$$\xi=c_{r+1}\xi_1+\cdots+c_n\xi_{n-r}.$$