第一章 矩阵及其初等变换

§1.2 高斯消元法、矩阵的初等变换

一. 线性代数方程组与同解变换

二. 初等变换与高斯消元法

三. 矩阵等价

四. 初等矩阵

电子科技大学 黄廷祝

一. 线性代数方程组与同解变换

方程组 $AX=b$

其中 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$， $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$， $b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

就是 $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$

齐次方程组: $AX=0$;

非齐次方程组: $AX=b, \quad b\neq 0$
(b中至少有一分量不为零)

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ 为$AX=b$的解: 若$AX=b$.

即 $x_1,\ldots,x_n$ 使得方程组成立

问题: 方程组何时有解?

若有解，有多少解？如何求出其全部解?

例1. 考虑方程组的如下同解变换:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \end{cases} \qquad \bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} \qquad \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad + x_3 = -2 \\ \qquad x_2 - 3x_3 = 5 \end{cases} \qquad \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right)$$

行简化阶梯矩阵

得一般解(无穷多组解)

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 - 2 \\ x_2 = 3x_3 + 5 \end{cases}$$

自由未知量

例2. 若某方程组经同解变换化为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \qquad\quad x_2 - x_3 = -1 \\ \qquad\qquad\quad x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

$\boxed{\text{行阶梯形矩阵}}$

显然，有唯一解.

例3. 若某方程组经同解变换化为

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = -1 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\bar{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

即 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 \\ \quad\quad x_2 - x_3 = -1 \\ \quad\quad\quad 0x_3 = 6 \end{cases}$ 显然，无解.

[结束]

二. 初等变换与高斯消元法

矩阵的行（列）初等变换：

- 交换两行（列）的位置；
- 用一非零数乘某一行（列）的所有元；
- 把矩阵的某一行（列）的适当倍数加到另一行（列）上去.

高斯消元法: 对增广矩阵实施行初等变换化为

行（简化）阶梯形

行阶梯形矩阵:

(1) 后一行第一个非零元所在列在前一行的右方;

(2) 全零的行 在任一非零行的下方.

行简化阶梯形矩阵:

(1) 行阶梯形矩阵

(2) 每一行的第一个非零元素是**1**

(3) 每一行第一个非零元**1**所在列的其它元素均为**0**

例4. 是否为行(简化)阶梯形?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例5. 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

解:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

无解!

例6. 解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \qquad\qquad\quad + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + \ \ x_4 + \ 8x_5 = 2 \end{cases}$

解:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1\\0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1\\0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2\\0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1\\0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

$$\begin{cases}x_1 = 1 + x_2 - 7x_5\\x_3 = 2 - 4x_5\\x_4 = -1 + 3x_5\end{cases}\qquad x_2, x_5\text{任意(自由未知量)}$$

是方程组的全部解.

增广矩阵经行初等变换化为行（简化）阶梯形后，

阶梯形的形状与方程组解的关系：

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中非零行的行数<未知量个数

无穷多解

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中非零行的行数=未知量个数

唯一解

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

该数不为零，无解

问题: 对于齐次方程组 $AX = 0$?

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数<未知量个数

有非零解(无穷多解)

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数=未知量个数

只有零解(唯一解)

一般地，设线性方程组$AX=b$的增广矩阵为：

$$(A|b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{系列行初等变换}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & 1 & & & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,r+1} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{d_{r+1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1、$d_{r+1} \neq 0$，无解

2、$d_{r+1} = 0$，有解

1) $r = n$有唯一解：$x_1 = d_1$，$x_2 = d_2$，…，$x_n = d_n$

2) $r < n$：有无穷多组解

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + d_2 \\ \cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + d_r \end{cases}$$

x_{r+1} , x_{r+2} , $\cdots$, x_n ： 自由未知量

x_1 , x_2 , $\cdots$, x_r ： 受约束未知量

[结束]

三. 矩阵等价

A 与 B 等价：$A \xrightarrow{\text{初等变换}} B$.

记为 $A \cong B$

矩阵等价的性质:

(1) 反身性 $A \cong A$;

(2) 对称性 $A \cong B \Rightarrow B \cong A$;

(3) 传递性 $A \cong B$ 且 $B \cong C \Rightarrow A \cong C$

[结束]

四. 初等矩阵

例7

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & 10 & 30 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \\ 13 & 25 & 14 \end{pmatrix}$$

初等矩阵: 对单位矩阵作一次初等变换所得到的矩阵

三种初等矩阵:

$$E_{ij}=\begin{pmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 && \cdots && 1 &&& \\
&&&& 1 &&&&&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&&&&& 1 &&&& \\
&&& 1 && \cdots && 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E_i(c)=\begin{pmatrix}
1 &&&& \\
& \ddots &&& \\
&& c && \\
&&& \ddots & \\
&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行}(c \neq 0) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$E_{ij}(c)=\begin{pmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 &&&& \\
&& \vdots & \ddots &&& \\
&& c & \cdots & 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{pmatrix}
\begin{matrix} \\ \\ i\text{ 行} \\ \\ j\text{ 行} \\ \\ \\ \end{matrix}$$

定理 对矩阵A作一次行（列）初等变换，相当于在A的左（右）边乘上相应的初等矩阵.

“左乘行，右乘列”

应用:

1.若矩阵B是A经有限次行初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$，使得

$$B = E_k E_{k-1} \cdots E_1 A$$

2.若矩阵B是A经有限次列初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$，使得

$$B = A E_1 E_2 \cdots E_k$$

3.若矩阵B是经有限次初等变换得到的，则存在有限个初等矩阵$P_1, \ldots, P_k, Q_1, \ldots, Q_t$使得

$$B = P_k \cdots P_1 A Q_k Q_{k-1} \cdots Q_1$$

例8 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{11}+a_{12} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21}+a_{22} \\ a_{33} & a_{32} & a_{31}+a_{32} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ P_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ 则**B**= (　　)

$(1)\ P_2AP_3 \quad (2)\ AP_1P_3 \quad (3)\ AP_3P_1 \quad (4)\ AP_2P_3$

答案 **(4)**

[结束]