1.4 极限运算法则(I)

一、极限运算法则

二、求极限方法举例

一、极限运算法则

定理 设 $\lim f(x)=A, \lim g(x)=B$,则

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$, 其中$B\neq 0$.

证 $\because \lim f(x)=A,\ \lim g(x)=B.$

$\therefore\ f(x)=A+\alpha,\ g(x)=B+\beta,$

其中$\alpha\to 0, \beta\to 0.$

$[f(x)\pm g(x)]=$

$(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$

$(\alpha\pm\beta)\to 0.\ \therefore$ (1)成立.

$[f(x)\cdot g(x)]=(A+\alpha)(B+\beta)$

$=AB+[(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta]$

$[(A\beta+B\alpha)+\alpha\beta]\to 0.$

$\therefore$ (2)成立.

推论1 如果$\lim f(x)$存在，而c为常数， 则 $\lim[c\,f(x)] = c\lim f(x)$.

常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果$\lim f(x)$存在，而n是正整数， 则 $\lim[f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$.

二、求极限方法举例

例1 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$

$=\lim\limits_{x\to 2}x^2-\lim\limits_{x\to 2}3x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=(\lim\limits_{x\to 2}x)^2-3\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}5$

$=2^2-3\cdot 2+5 \quad =3\neq 0,$

$\therefore \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-1}{x^2-3x+5}$

$=\dfrac{\lim\limits_{x\to 2}x^3-\lim\limits_{x\to 2}1}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)}$

$=\dfrac{2^3-1}{3} \quad =\dfrac{7}{3}.$

注：1. 设$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$,则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a_0(\lim_{x\to x_0} x)^n+a_1(\lim_{x\to x_0} x)^{n-1}+\cdots+a_n$$

$$=a_0x_0^{\ n}+a_1x_0^{\ n-1}+\cdots+a_n=f(x_0).$$

2. 设 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 且$Q(x_0)\neq 0$, 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} P(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} Q(x)}=\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}=f(x_0).$$

若$Q(x_0)=0$, 则商的法则不能应用.

例2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}$.

解 $\because \lim\limits_{x\to1}(x^2+2x-3)=0,$

又 $\because \lim\limits_{x\to1}(4x-1)=3\neq0,$

$$\therefore \lim_{x\to1}\frac{x^2+2x-3}{4x-1}=\frac{0}{3}=0.$$

由无穷小与无穷大的关系,

得 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-1}{x^2+2x-3}=\infty.$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{7+\dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{x^3}}$

$$=\frac{2}{7}.$$

中国大学MOOC

注:

当$a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, m$和$n$为非负整数时有

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} = \begin{cases} \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{当} n = m, \\ 0, & \text{当} n > m, \\ \infty, & \text{当} n < m, \end{cases}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{7x^3} = \frac{2}{7}.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2}{7x^3} = 0.$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^3}{7x^2} = \infty.$$

思考题

求下面问题的极限

1. $\lim\limits_{x \to 0}(\dfrac{x+1}{x^3-3})$

2. $\lim\limits_{x \to \infty}(\dfrac{x^2+3x}{2x^2+1})$

电子科技大学

University of Electronic Science and Technology of China

中国大学MOOC

1.4 极限运算法则(II)

一、复合函数运算法则

电子科技大学数学科学学院

定理（复合函数运算法则）

设函数$u=\varphi(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$，但在点$x_0$的某去心邻域内

$u=\varphi(x)\neq a$，又$\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$，则复合函数 $f[\varphi(x)]$当$x\to x_0$时

的极限也存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=A$.

即 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

注：1.定理中将

$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a \quad \text{改为} \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty \quad \text{或} \lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$$

而 $\lim\limits_{u\to a} f(u)=A$ 改为 $\lim\limits_{u\to\infty} f(u)=A$,可得类似结论.

2.定理表明：满足定理的条件：

$$\text{即} \quad \lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=\lim_{u\to a} f(u)=A$$

这就是常用的变量代换法

例 1 设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A>0$，证明：

$$\lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{\varphi(x)}=\sqrt[n]{A}\ (n\in N).$$

证 令 $u=\varphi(x)$, $f(u)=\sqrt[n]{u}$,

根据假设 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A.$

则由定理可得

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=\lim_{u\to A}f(u)$$

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\sqrt[n]{\varphi(x)}=\lim_{u\to A}\sqrt[n]{u}$$

$$=\sqrt[n]{A}.\ (n\in N)$$

例2 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x.$

解 令 $u=\sin x$,

则 $x\to\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow u\to 1$,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=\lim_{u\to 1}\ln u$$

$$=\ln 1=0.$$

思考题

求下面问题的极限

1. $\lim\limits_{x \to 1}(x-2)^2$

2. $\lim\limits_{x \to 1}(\ln(\frac{1}{x-1}))$