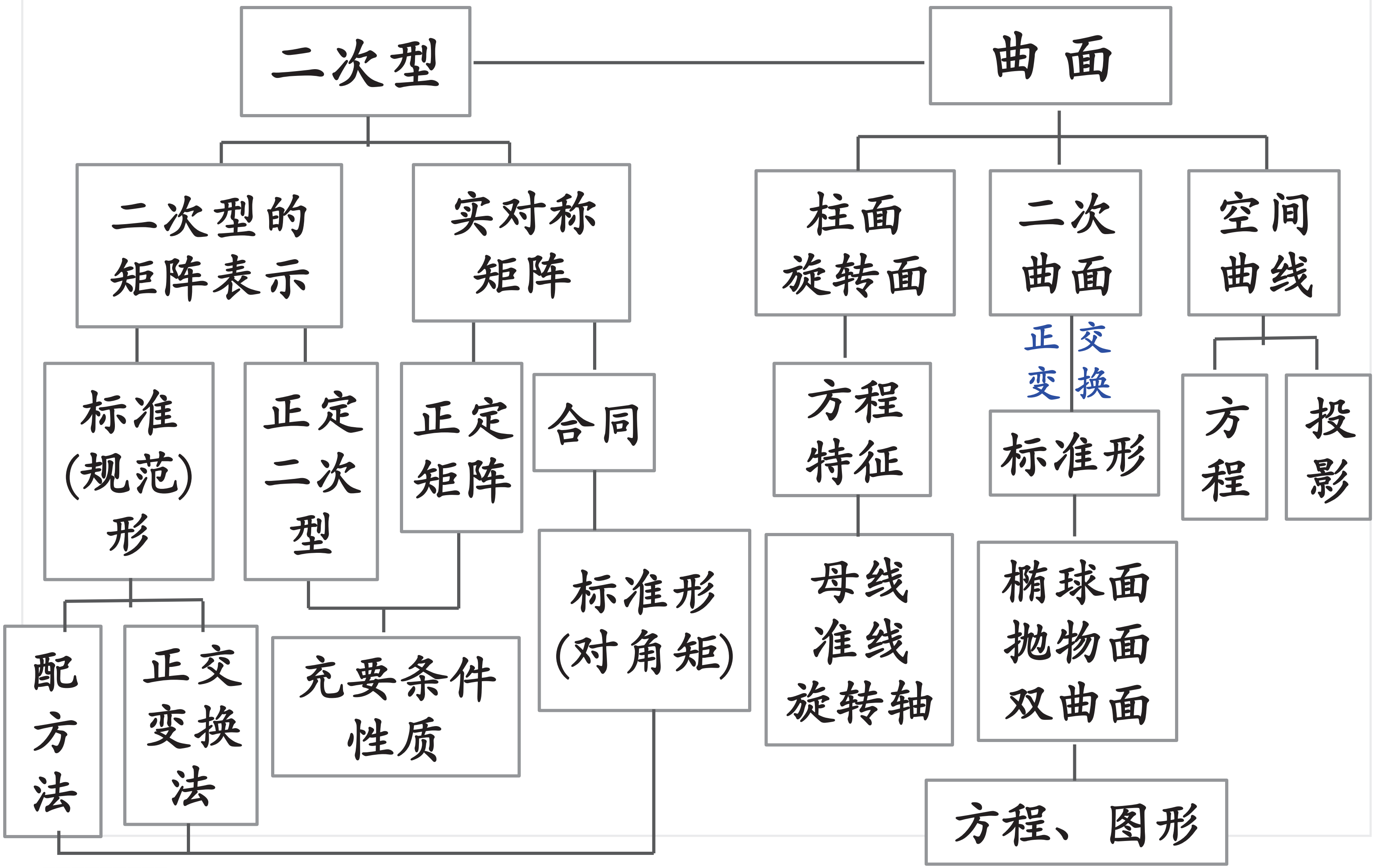
# 第六章 二次型与二次曲面

## 习题课1

- 内容结构
- 范 例

电子科技大学 蒲和平

# 内容结构



二次型
曲面
二次型的矩阵表示
实对称矩阵
标准(规范)形
正定二次型
正定矩阵
合同
配方法
正交变换法
充要条件性质
标准形(对角矩)
柱面旋转面
方程特征
母线准线旋转轴
二次曲面
正交变换
标准形
椭球面抛物面双曲面
方程、图形
空间曲线
方程
投影

# 范　例

## 一、二次型的相关概念与合同矩阵

1\. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

则二次型的矩阵是______，的秩为_______。

**解** 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix},\ \mathrm{R}(A)=3$$

2. 设$A,B$均为$n$阶实对称矩阵，则$A$与$B$合同的充要条件为（ C ）.

(A) $A$与$B$有相同的特征值;

(B) $A$与$B$有相同的秩;

(C) $A$与$B$有相同的正、负惯性指数;

(D) $A$，$B$均是可逆阵。

**解** (A)是充分条件.

$A$，$B$ 实对称, 且$\lambda_i$相同，则存在正交矩阵$P, Q$ 使

$$P^{-1}AP = P^{T}AP = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

$$Q^{-1}BQ = Q^{T}BQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$$

$$\therefore A \simeq \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n) \simeq B$$

反之不一定正确.

如 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$均是实对称矩阵，并且合同

$$\because \begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$$

但$A,B$ 具有不同的特征值.

(B)是必要条件但不充分;

(D)既不充分也不必要.

3. 设$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$,$B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$则$A$与$B$ __A__ .

（A）合同且相似；（B）合同但不相似；

（C）不合同但相似；（D）不合同且不相似.

**解**　因为$A,B$都是实对称矩阵，如果它们相似则一定合同. 由于实对称矩阵一定能相似对角化，故只须判定它们是否有相同的特征值.

显然 $R(A)=R(B)=1$, $A$与$B$均有二重0特征值，又

$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda=3$是$A$与$B$的唯一非零特征值.

4. 设二次型

$$f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正负惯性指数是1，求 $f$ 的规范型及常数 $a$.

**解** 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}$

因为 $f$ 的正负惯性指数都是1，所以 $f$ 的秩为2.

即有 $\mathrm{R}(A)=2.$

$$\because A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & a-1\\ 0 & 0 & (a-1)(a+2)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时, $\mathrm{R}(A)=2$; $f$ 的规范型为 $y_1^2-y_2^2$

# 第六章 二次型与二次曲面

## 习题课2

➤ 范 例

电子科技大学 蒲和平

## 二、二次型的标准形

1. 实对称阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$的合同标准形是_____.

**解** $A$的合同标准形，即是二次型$X^TAX$化为规范形所对应的系数矩阵.

$$f=X^TAX=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-x_3^2=(x_1-x_2)^2-x_3^2$$

令$\begin{cases}x_1-x_2=y_1\\x_3=y_2\\x_2=y_3\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=y_1-y_3\\x_2=y_3\\x_3=y_2\end{cases}$ 得

$$f=y_1^2-y_2^2=(y_1y_2y_3)\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

注：也可由特征值的正、负、0确定其标准形.

2. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\alpha x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$

通过正交变换化为标准形 $f=5y_1^2+\beta y_2^2-4y_3^2$

求$\alpha,\beta$的值以及所用的正交变换矩阵.

**解** 二次型及对应标准形的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & \alpha & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & & \\ & \beta & \\ & & -4\end{pmatrix}$$

设所用的正交变换矩阵为$P$, 则

$$B=P^{-1}AP=P^TAP$$

即: $A$与$B$相似, 由$\begin{cases}\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B\\ |A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=5\end{cases}$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1&-2&-4\\-2&4&-2\\-4&-2&1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5&&\\&5&\\&&-4\end{pmatrix}$$

A的特征值为 $\lambda_1=5$（二重），$\lambda_2=-4$

$\lambda_1=5$ 的特征向量为$\alpha_1=(-1, 0, 1)^T$， $\alpha_2=(1, -4, 1)^T$

将其正交化,单位化得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ 1)^T,\qquad \beta_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,\ -4,\ 1)^T$$

$\lambda_2=-4$ 的特征向量为$\alpha_3=(2, 1, 2)^T$，

单位化得 $\beta_3=\dfrac{1}{3}(2,\ 1,\ 2)^T.$

所用的正交变换矩阵为 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$

# 三、正定二次型与正定矩阵

1. 已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a+b & 5 & a-b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，

则 $a$，$b$，$c$，$d$ 分别为 $\underline{a=b=1, c=-1,\ d>5}$.

解 $A$正定 $\Rightarrow A^T=A \Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow a=b=1, c=-1$

$A$正定 $\Rightarrow |A|>0$. $\because |A|=d-5$，$\therefore d>5$

2.设$n$阶实对称阵$A$的特征值分别为1, -2, 3,…,$(-1)^{n-1}n$

则当$t$ $\underline{> n^2}$ 时，$tI-A^2$为正定矩阵.

**解** 设$\lambda$为$A$的特征值，则 $tI-A^2$ 的特征值为 $t-\lambda^2$,

故当 $t>n^2$时，对 $\lambda=1,-2,\ldots,(-1)^{n-1}n$ 均有 $t-\lambda^2>0$.

3.下列矩阵正定的是 $\underline{\text{（D）}}$.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$是正定二次型的充要条件是<u>（D）</u>.

(A)存在 $n$ 维非零向量$X$，使$X^T AX > 0$;

(B) $|A| > 0$;

(C) $f$ 的负惯性指数为0;

(D) $A^{-1}$正定;

**解** (A), (B)仅是必要条件;

（C）需加条件R(A)=$n$才正确.

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

则当$t$____时，$f$正定，当$t$____时，$f$负定，

当$t=0$时其正惯性指数为______.

**解** $f$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

求$A$的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-t & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-t & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-t \end{vmatrix}=(\lambda-t-1)^2(\lambda-t+2)$$

$\lambda_{1,2}=t+1$(二重), $\lambda_3=t-2$

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

则当$t$ >2 时，$f$正定，当$t$ <-1 时，$f$负定，

当$t=0$时其正惯性指数为 2 .

**解** $\lambda_{1,2}=t+1$(二重), $\lambda_3=t-2$

当$t>2$时，$\lambda_{1,2}>0, \lambda_3>0$，　$f$正定；

当$t<-1$时，$\lambda_{1,2}<0, \lambda_3<0$，　$f$负定；

当$t=0$时，　$\lambda_{1,2}=1>0, \lambda_3=-2<0$，

$f$ 的正惯性指数为2.

6. 设$A$是$n$阶正定矩阵，$B$是$n$阶实反对称矩阵，证明：$A-B^2$是正定阵.

证 $A$是正定矩阵，$\forall X \neq 0$, 有$X^TAX>0$,

因为$B$是实反对称矩阵

$\therefore A-B^2=A+B^TB$为实对称矩阵

$$\forall X \neq 0,\ X^T(A+B^TB)X = X^TAX + X^TB^TBX$$

$$= X^TAX + (BX)^T(BX) > 0,$$

$\therefore A-B^2$正定.

# 第六章 二次型与二次曲面

## 习题课3

- 范 例

电子科技大学 蒲和平

# 四、曲面与空间曲线

1. 若柱面的母线平行于z轴，则柱面方程的特点是 <u>不含变量z</u>.

2. 设曲面方程为$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，当$a=b$时，曲面可由曲线$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$绕 <u>$z$</u> 轴旋转而成；或由曲线$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$绕 <u>$z$</u> 轴旋转而成.

3.曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在$xoy$面的投影曲线为$\underline{\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}}$.

在$yoz$面的投影曲线为$\underline{\begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases}}$ $(|y|\le 1)$.

**解** 由曲线方程消去$x$得

$$z^2+z+2=0 \quad \Rightarrow (z-1)(z+2)=0$$

$$\Rightarrow z=1 \text{或} z=-2\,(\text{舍去})$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1$$

4. 求直线$l: \frac{x}{a}=\frac{y-b}{0}=\frac{z}{1}$绕$z$轴旋转一周所得旋转曲面的方程,并指出方程表示什么曲面.

**解** 设$P(x,y,z)$为旋转曲面上的任一点，过P点作$z$轴的垂平面，该平面交直线$l$于点$P_0(x_0,y_0,z_0)$

由$P$与$P_0$到$z$轴的距离相等得

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

由$P_0\in l \Rightarrow \frac{x_0}{a}=\frac{y_0-b}{0}=\frac{z_0}{1}$ 将以上三式联立消去$x_0,y_0,z_0$，得到旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2$$

$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2$$

曲面类型：

(1) $a=b=0$, 方程为 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, 这是z轴，不构成曲面；

(2) $a=0, b\neq 0$, 方程为 $x^2+y^2=b^2$，是圆柱面；

(3) $a\neq 0, b=0$, 方程为 $x^2+y^2=a^2z^2$，是圆锥面；

(4) $a\neq 0, b\neq 0$, 方程为 $x^2+y^2-a^2z^2=b^2$

是单叶旋转双曲面.

5. 将方程 $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$

化为标准形，并说明它表示什么曲面。

解　$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

特征值：$\lambda_1=1$（二重特征值），$\lambda_2=10$，

求$\lambda_1=1$ 的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组　$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

特征向量：$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，　$\alpha_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

将$\alpha_1, \alpha_2$ 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2,\ 4,\ 5)^T$$

求$\lambda_2$=10 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，特征向量：$\alpha_3 = (1, 2, -2)^T$

将 $\beta_1, \beta_2$ , $\alpha_3$ 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\ 1,\ 0)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,\ 4,\ 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1,\ 2,\ -2)^T.$$

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$

$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$

作正交变换 $X=CY$，则曲面化为标准形

$$y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1$$ 曲面是椭球面.