第六章 二次型与二次曲面

习题课2

➢ 范 例

电子科技大学 蒲和平

二、二次型的标准形

1\. 实对称阵$A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$的合同标准形是_____.

解 A的合同标准形，即是二次型X^TAX化为规范形所对应的系数矩阵.

$$f=X^TAX=x_1^2+x_2^2-2x_1x_2-x_3^2=(x_1-x_2)^2-x_3^2$$

令$\begin{cases}x_1-x_2=y_1\\x_3=y_2\\x_2=y_3\end{cases}$ 即$\begin{cases}x_1=y_1-y_3\\x_2=y_3\\x_3=y_2\end{cases}$ 得

$$f=y_1^2-y_2^2=(y_1y_2y_3)\begin{pmatrix}1&&\\&-1&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

注：也可由特征值的正、负、0确定其标准形.

2. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\alpha x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$

通过正交变换化为标准形 $f=5y_1^2+\beta y_2^2-4y_3^2$

求α,β的值以及所用的正交变换矩阵.

解 二次型及对应标准形的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & \alpha & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & & \\ & \beta & \\ & & -4\end{pmatrix}$$

设所用的正交变换矩阵为P, 则

$$B=P^{-1}AP=P^TAP$$

即: A与B相似, 由$\begin{cases}\operatorname{tr}A=\operatorname{tr}B\\ |A|=|B|\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=5\end{cases}$

$$\therefore A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -4\\ -2 & 4 & -2\\ -4 & -2 & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}5 & & \\ & 5 & \\ & & -4\end{pmatrix}$$

A的特征值为 $\lambda_1=5$（二重），$\lambda_2=-4$

$\lambda_1=5$ 的特征向量为$\alpha_1=(-1, 0, 1)^T$， $\alpha_2=(1, -4, 1)^T$

将其正交化,单位化得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,\ 0,\ 1)^T,\qquad \beta_2=\frac{1}{3\sqrt{2}}(1,\ -4,\ 1)^T$$

$\lambda_2=-4$ 的特征向量为$\alpha_3=(2, 1, 2)^T$，

单位化得 $\beta_3=\dfrac{1}{3}(2,\ 1,\ 2)^T.$

所用的正交变换矩阵为 $P=(\beta_1,\beta_2,\beta_3).$

三、正定二次型与正定矩阵

1．已知 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ a+b & 5 & a-b \\ c & 0 & d \end{pmatrix}$ 是正定矩阵，

则 a，b，c，d 分别为 $\underline{a=b=1, c=-1,\ d>5}$.

解 A正定 $\Rightarrow A^T=A\Rightarrow \begin{cases} a+b=2 \\ a-b=0 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow a=b=1, c=-1$

A正定 $\Rightarrow |A|>0$. $\because |A|=d-5$， $\therefore d>5$

2.设n阶实对称阵A的特征值分别为1, -2, 3,…,$(-1)^{n-1}n$

则当t $\underline{> n^2}$ 时，$tI - A^2$为正定矩阵.

解 设λ为A的特征值，则 $tI-A^2$ 的特征值为 $t-\lambda^2$,

故当 $t > n^2$时，对 $\lambda = 1,-2,\ldots,(-1)^{n-1}n$ 均有 $t-\lambda^2 > 0$.

3.下列矩阵正定的是 $\underline{(D)}$.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, (B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$,

(C) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$, (D) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

4. 二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^T AX$是正定二次型的充要条件是<u>（D）</u>.

(A)存在 n 维非零向量X，使$X^T AX > 0$;

$(B) |A| > 0$;

(C) f 的负惯性指数为0；

$(D) A^{-1}$正定；

解 $(A), (B)$仅是必要条件；

（C）需加条件R(A)=n才正确.

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

则当t_____时，f正定，当t_____时，f负定，

当$t=0$时其正惯性指数为_______.

解 f 的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & -1 \\ 1 & -1 & t \end{pmatrix}$$

求A的特征值

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-t & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-t & 1 \\ -1 & 1 & \lambda-t \end{vmatrix}=(\lambda-t-1)^2(\lambda-t+2)$$

$\lambda_{1,2}=t+1$(二重)$,\ \lambda_3=t-2$

5. 设 $f(x_1,x_2,x_3)=t(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2x_1x_2+2x_1x_3-2x_2x_3$

则当t >2 时，f正定，当t <-1 时，f负定，

当$t=0$时其正惯性指数为 2 .

解 $\lambda_{1,2}=t+1$(二重), $\lambda_3=t-2$

当$t>2$时， $\lambda_{1,2}>0, \lambda_3>0,$ f正定；

当$t<-1$时， $\lambda_{1,2}<0, \lambda_3<0,$ f负定；

当t=0时， $\lambda_{1,2}=1>0, \lambda_3=-2<0,$

f 的正惯性指数为2.

6. 设A是n阶正定矩阵，B是n阶实反对称矩阵，证明：$A-B^2$是正定阵.

证 A是正定矩阵，$\forall X\neq 0$, 有$X^TAX>0$,

因为B是实反对称矩阵

$\therefore A-B^2=A+B^TB$ 为实对称矩阵

$$\forall X\neq 0,\ X^T(A+B^TB)X=X^TAX+X^TB^TBX$$

$$=X^TAX+(BX)^T(BX)>0,$$

$\therefore A-B^2$正定.