二. 初等变换与高斯消元法

矩阵的行（列）初等变换：

- 交换两行（列）的位置；
- 用一非零数乘某一行（列）的所有元；
- 把矩阵的某一行（列）的适当倍数加到另一行（列）上去.

高斯消元法: 对增广矩阵实施行初等变换化为

行（简化）阶梯形

行阶梯形矩阵:

(1) 后一行第一个非零元所在列在前一行的右方;

(2) 全零的行 在任一非零行的下方.

行简化阶梯形矩阵:

(1) 行阶梯形矩阵

(2) 每一行的第一个非零元素是1

(3) 每一行第一个非零元1所在列的其它元素均为0

例4. 是否为行(简化)阶梯形?

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

例5. 解方程组 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 5 \end{cases}$

解:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

无解!

例6. 解方程组 $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 3x_5 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -2 \\ 3x_1 - 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 5x_5 = -3 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 8x_5 = 2 \end{cases}$

解:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccccc|c} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 8 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 5 & 3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 1 + x_2 - 7x_5 \\ x_3 = 2 - 4x_5 \\ x_4 = -1 + 3x_5 \end{cases}$$

x_2, x_5任意(自由未知量)

是方程组的全部解.

增广矩阵经行初等变换化为行（简化）阶梯形后，

阶梯形的形状与方程组解的关系：

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数<未知量个数

无穷多解

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数=未知量个数

唯一解

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

该数不为零，无解

<< >>

问题: 对于齐次方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ ？

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数<未知量个数

有非零解(无穷多解)

$$\overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

行（简化）阶梯形中
非零行的行数=未知量个数

只有零解(唯一解)

一般地，设线性方程组$AX=b$的增广矩阵为：

$$
(A|b)=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{系列行初等变换}}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & & c_{1,r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ & 1 & & & c_{2,r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ & & \ddots & & & \ddots & & \\ & & & 1 & c_{r,r+1} & \cdots & c_{r,r+1} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \underline{d_{r+1}} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

1、$d_{r+1} \neq 0$，无解

2、$d_{r+1} = 0$，有解

1) $r=n$有唯一解：$x_1=d_1$，$x_2=d_2$，…，$x_n=d_n$

2) $r<n$：有无穷多组解

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n + d_1 \\ x_2 = -c_{2,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n + d_2 \\ \quad \cdots\cdots \\ x_r = -c_{r,r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n + d_r \end{cases}$$

x_{r+1} , x_{r+2} , ⋯ , x_n ：　　自由未知量

x_1 , x_2 , ⋯ , x_r ：　　受约束未知量

[结束]