第一章　函数 极限与连续(习题课)

一、数列极限的求法及典型例题

二、函数极限的求法及典型例题

三、 函数连续与间断的判定及典型例题

中国大学MOOC

一、数列极限的求法及典型例题

重点知识回顾

1. 数列极限的运算法则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n \pm by_n) = a\lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm b\lim\limits_{n\to\infty} y_n = aA \pm bB$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n = AB$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \dfrac{A}{B} \quad (B \neq 0)$

2．数列极限的存在准则

(1)夹逼准则：若 $y_n \le x_n \le z_n, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$

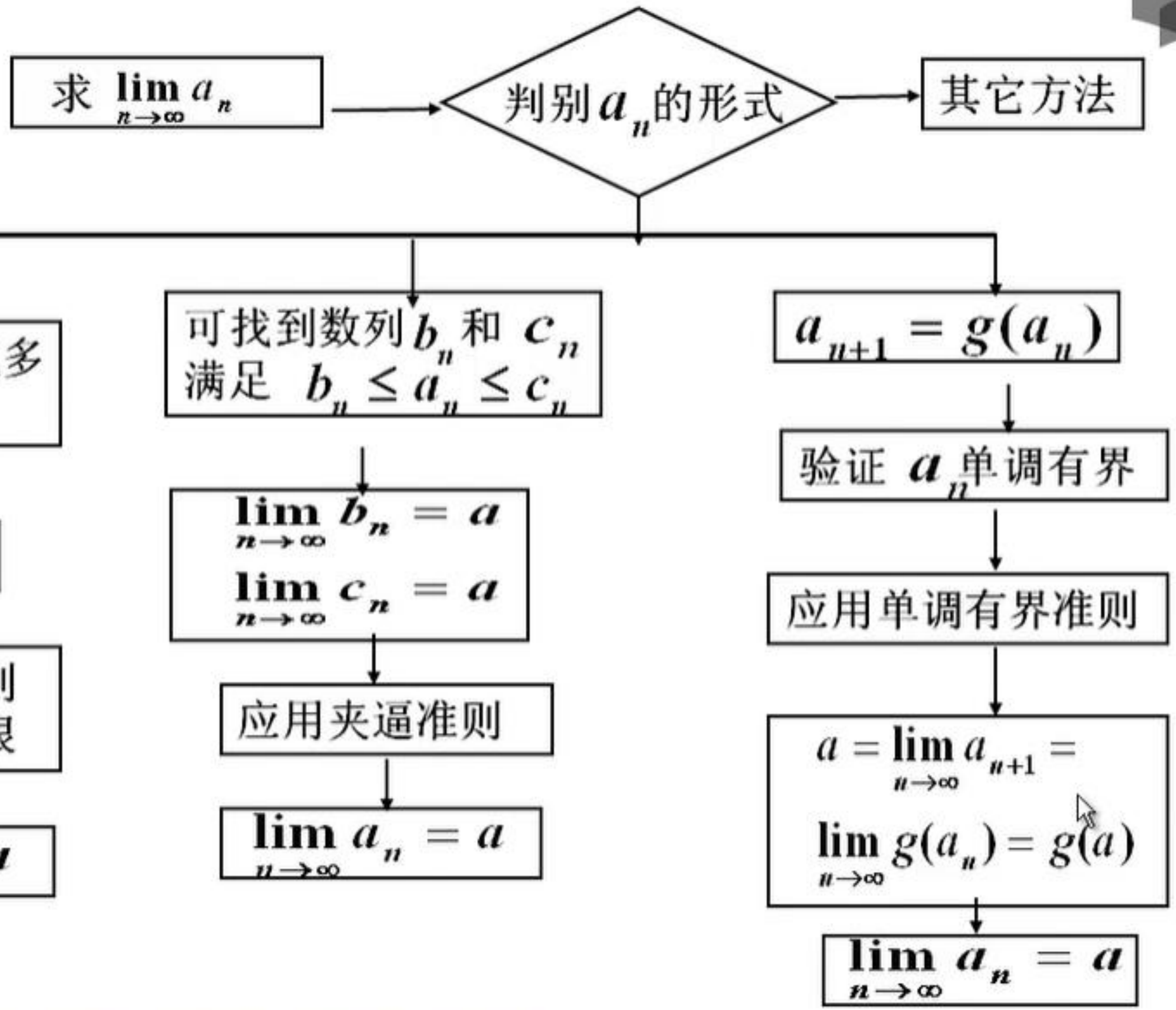
(2)单调有界收敛原理

$$x_n \le x_{n+1}, x_n \le M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A$$

$$x_n \ge x_{n+1}, x_n \ge m \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = A$$

中国大学MOOC

3. 数列极限解题方法流程图



中国大学MOOC

例1. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$

$$\boxed{\frac{1}{n\times(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}$$

解 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1-0=1$$

中国大学MOOC

例2. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\boxed{\cos\dfrac{x}{2^n}\sin\dfrac{x}{2^n}}}{\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$\to \dfrac{1}{2}\sin 2\cdot\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2^2}\cdots\boxed{\cos\dfrac{x}{2^{n-1}}\sin\dfrac{x}{2^{n-1}}}}{2\sin\dfrac{x}{2^n}}=\cdots=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\dfrac{x}{2}\sin\dfrac{x}{2}}{2^{n-1}\sin\dfrac{x}{2^n}}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\boxed{\sin\dfrac{x}{2^n}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin x}{2^n\dfrac{x}{2^n}}=\dfrac{\sin x}{x}$

$n\to\infty,\sin\dfrac{x}{2^n}\sim\dfrac{x}{2^n}$

中国大学MOOC

例3 当$|x|<1$时，

求$\lim\limits_{n\to\infty}(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})$.

解 将分子、分母同乘以因子$(1-x)$, 则

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^2)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n})}{1-x}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1-x^{2^n})(1+x^{2^n})}{1-x}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}=\frac{1}{1-x}.$$

$(\because$ 当$|x|<1$时, $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2^{n+1}}=0.)$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}q^n=0,(|q|<1)}$$

中国大学MOOC

例4 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

思考

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2+n+1}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+n+n}=0\ ?$$

例4 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$

分析：本题是求n项和的数列极限问题，从通项的形式上看，

可通过适当放缩以后，利用夹逼准则来计算.

解：$$\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}<\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}<\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+n}=\frac{1}{2}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+n+1}=\frac{1}{2}$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$

中国大学MOOC

例5 设 $x_1=10$, $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$ $(n=1, 2\cdots)$, 证明此数列极限存在,并求此极限.

证：由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=\sqrt{16}=4$ 知 $x_1>x_2$

设对某正整数 k 有 $x_k>x_{k+1}$, 则有:

$x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$, $\therefore$ 由归纳法知,

对一切正整数 n, 都有 $x_n>x_{n+1}$, 即 $\{x_n\}$ 单调减少.

又 $x_n>0$, $(n=1, 2\cdots)$ 即 $\{x_n\}$ 有下界, 根据准则II 知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

再设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, 则有 $a=\sqrt{6+a}$ $(n\to\infty)\Rightarrow$ $a=3$ 或 $a=-2$,

但 $\because x_n>0$ $(n=1, 2\cdots)$, $\therefore a=-2$ 舍去, 得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

中国大学MOOC

例6. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_n=1$ 求 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$

极限与无穷小的关系

解 $\because (2n+1)\,a_n=1+\alpha_n\ (\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0)$

$\lim f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha, \alpha\to 0$

$$\therefore a_n=\frac{1+\alpha_n}{2n+1}\Rightarrow na_n=\frac{n(1+\alpha_n)}{2n+1}=\frac{n}{2n+1}+\frac{n}{2n+1}\alpha_n\to\frac{1}{2}\,(n\to\infty).$$

另解 $\lim\limits_{n\to\infty}(2n+1)a_n=1\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})na_n=\ 2\lim\limits_{n\to\infty}na_n=1$

所以有: $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\frac{1}{2}$

中国大学MOOC

第一章　函数 极限与连续(习题课)

一、数列极限的求法及典型例题

二、函数极限的求法及典型例题

三、函数连续与间断的判定及典型例题

二、函数的极限典型例题分析

重点知识回顾

1. 函数极限的四则运算性质

定理 设 $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$,则

(1) $\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

(2) $\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

(3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, 其中 $B \neq 0$.

推论1 如果 $\lim f(x)$ 存在,而 c 为常数,则

$$\lim[cf(x)] = c\lim f(x).$$

推论2 如果 $\lim f(x)$ 存在，而 n 是正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n.$$

2. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ $\quad\lim\limits_{某过程}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}=1;$ $\quad\boxed{\lim\alpha=0}$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $\quad\lim\limits_{某过程}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e.$ $\boxed{1^\infty}$

3. 等价无穷小替换定理

设 $\alpha(x)\sim\alpha_1(x),\ \beta(x)\sim\beta_1(x)\ \left(\alpha_1(x)\neq 0,\beta_1(x)\neq 0\right),$

且 $\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=A$ 或 ∞，则 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}.$

中国大学MOOC

中国大学MOOC

4. 函数极限解题方法流程图

求 $\lim f(x)$ → 判别 $f(x)$ 的形式

(1) $f(x)=g(x)h(x)$

1. 恒等变形
2. 应用极限的四则运算法则求极限
3. $\lim f(x)=A$

(2) $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$

1. $g(x), h(x)$ 为无穷小，且 $g(x)\sim g_1(x)$，$h(x)\sim h_1(x)$
2. 应用等价无穷小代换
3. $\lim \dfrac{g(x)}{h(x)}=\lim \dfrac{g_1(x)}{h_1(x)}$

(3) $f(x)$ 为未定式

1. $\dfrac{0}{0}$，1^{∞}
2. 恒等变形或应用重要极限
3. $\lim f(x)=A$

(4) $f(x)$ 为复合函数 $f(x)=g(h(x))$

1. 应用连续函数的极限运算准则
2. $\lim g(h(x)) = g(\lim h(x)) = A$

中国大学MOOC

5. 函数求极限的常用方法

连续函数极限值等于函数值

1. 多项式与分式函数代入法求极限;

2. 消去零因子法求极限;分子或分母=0

有理函数因式分解约分;无理函数先有理化

3. 利用无穷小运算性质求极限;

无穷小×有界函数;等价无穷小的替换

4. 利用两个重要极限求极限;

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$$

5. 利用左右极限求分段函数极限.

例1计算 $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

分析：经过计算可得分子分母的极限都为零，说明分子分母都有致零因子，可以将分子分母的致零因子约去，再求极限。

解：
$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6} = \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)(x+2)}{(x-3)(x+2)}$$
$$= \lim_{x \to -2} \frac{x(x+1)}{x-3}$$
$$= -\frac{2}{5}$$

例2 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$

分析：由于函数中含有根式，可利用分子有理化变形，可变成 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的形式。

解：$\lim\limits_{x\to+\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{x})^2}+1}=\dfrac{1}{2}$

思考

如果改为：$x\to-\infty$ 结果如何？

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1}=\infty$$

中国大学MOOC

例3 讨论 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ 的极限

分析： 本题含 $e^{\frac{1}{x}}$，当 $x\to 0^+$ 与 (0^-) 时，有不同的结果，需要求左右极限。

解： $x\to 0^-$， $e^{\frac{1}{x}}\to 0, e^{\frac{2}{x}}\to 0$， $\therefore \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=2$

$x\to 0^+$， $e^{\frac{1}{x}}=u\to +\infty, e^{\frac{2}{x}}=u^2\to +\infty$，

$$\therefore \lim_{x\to 0^+}\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}=\lim_{u\to +\infty}\frac{2+u}{1+u^2}=\lim_{u\to +\infty}\frac{\frac{2}{u^2}+\frac{1}{u}}{\frac{1}{u^2}+1}=0$$

$\because \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}\neq \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$， 所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{2}{x}}}$ 不存在

例 4 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x\sqrt{1+\sin^2 x}-x}$

分母提出x，可以用等价无穷小替换，故此处使用分子有理化

中国大学MOOC

分析：由于函数中分子分母都含有根式，可利用分子分母有理化变形，可求出极限。

解：原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x})(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}\cdot\frac{1}{(\sqrt{1+\tan x}+\sqrt{1+\sin x})}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x\cdot(1-\cos x)}{x(\sqrt{1+\sin^2 x}-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot(\frac{1}{2}x^2)}{x(\frac{1}{2}\cancel{\sin}^2 x)}=\frac{1}{2}$$

例5　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.　(1^∞)

中国大学MOOC

解一：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\left[1+\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}$

$$=\lim_{x\to0}\left[1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right]^{\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\to0}\left\{\left[1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right]^{\frac{1+\sin x}{\tan x-\sin x}}\right\}^{\boxed{\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}}}$$

$$\because \lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{\boxed{(1+\sin x)}}\cdot\frac{1}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{(1+\sin x)x^3}$$

$$=\frac{1}{2}\qquad \therefore \text{原式}=e^{\frac{1}{2}}.$$

求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$.

中国大学MOOC

解法讨论

设 $\lim f(x)=0, \lim g(x)=\infty$, 则

ln(1+f(x))=f(x)

$$\lim[1+f(x)]^{g(x)}=\lim e^{g(x)\ln[1+f(x)]}=e^{\lim g(x)\ln[1+f(x)]}=e^{\lim g(x)f(x)}$$

注意g(x)、f(x)极限要存在

解二：

$$原式=\lim_{x\to 0}\left[1+\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}-1\right)\right]^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}\left[1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right]^{\frac{1}{x^3}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}}.$$

$$\because \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{1}{2}.\quad \therefore 原式=e^{\frac{1}{2}}.$$

中国大学MOOC

例 6 计算 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$

分析 这是 1^{∞}型未定式的极限，解决方法是利用重要极限，或利用变量替换法。

解法1：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{4}{2x+1}\right)^{x+1}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4(x+1)}{2x+1}}=e^{2}$

解法2：令 $\dfrac{2x+5}{2x+1}=1+\dfrac{1}{t}\Rightarrow x=2t-\dfrac{1}{4},x\to\infty\Rightarrow t\to\infty$

$$原式=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t+\frac{3}{4}}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}\cdot\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{4}}=e^{2}$$

例 7　设 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 极限存在且等于l，求a和l的值

解：由于 $\lim\limits_{x\to-1}(x+1)=0$，极限 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}$ 存在

故必有 $\lim\limits_{x\to-1}(x^3-ax^2-x+4)=0$ $\therefore\ a=4$

将 $a=4$ 代回原极限式有

$$\lim_{x\to-1}\frac{x^3-ax^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{x^3-4x^2-x+4}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x-4)(x-1)(x+1)}{x+1}$$

$$=\lim_{x\to-1}(x-4)(x-1)=10,\qquad \text{即}\ l=10$$

$$\therefore a=4, l=10.$$

中国大学MOOC

例8 已知当$x\to 0$时，$(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，求常数$\alpha$.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{(1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$$

$$\because (1+\alpha x^2)^{\frac{1}{3}}-1\sim\frac{1}{3}\alpha x^2,\quad \cos x-1\sim-\frac{1}{2}x^2$$

$$\therefore \text{原极限}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}\alpha x^2}{-\frac{1}{2}x^2}=-\frac{2}{3}\alpha=1\Rightarrow \alpha=-\frac{3}{2}$$

第一章 函数 极限与连续(习题课)

1. 数列极限的求法及典型例题

2. 函数极限的求法及典型例题

3. 函数连续与间断的判定及典型例题

三、函数连续与间断典型例题分析

重点知识回顾

1. 函数连续的定义

$f(x)$在 x_0点连续：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

$f(x)$ 在x_0点左连续：$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=f(x_0)$

右连续：$\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$

2. $f(x)$在 x_0连续的充要条件：$\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+} f(x)=f(x_0)$

中国大学MOOC

3．间断点的分类

左右极限都存在

间断点
- 第一类间断点
  - 可去间断点：$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$
  - 跳跃间断点：$\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$
- 第二类间断点
  - 无穷间断点：左右极限至少有一个是∞
  - 振荡间断点：$\sin\dfrac{1}{x}, x=0$

左右极限至少有一个不存在

4. 闭区间上连续函数的性质

$f(x)\in C[a,b]$

- **最值定理**：$\exists$最小值 m，最大值 M，$\forall x\in[a,b]$，有 $m\le f(x)\le M$
- **有界性定理**：$\exists M>0,\forall x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\le M$
- **介值定理**：$f(a)=A, f(b)=B$，$A<C<B$ $\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=C$
- **零点定理**：$f(a)\cdot f(b)<0$ $\Rightarrow$ $\exists\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$

中国大学MOOC

例1 讨论$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & |x|\le 1\\ |x-1| & |x|>1\end{cases}$的连续性.

解 将$f(x)$改写成

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & -1\le x\le 1\\ x-1 & x>1\\ 1-x & x<-1\end{cases}$$

显然$f(x)$在$(-\infty,-1)$,$(-1,1)$, $(1,+\infty)$ 内连续.

中国大学MOOC

$$f(x)=\begin{cases}\cos\dfrac{\pi}{2}x & -1\le x\le 1\\ x-1 & x>1\\ 1-x & x<-1\end{cases}$$

当$x=-1$时,

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}(1-x)=2$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\cos\frac{\pi x}{2}=0$$

$$\because \lim_{x\to -1^-} f(x)\neq \lim_{x\to -1^+} f(x)$$

故$f(x)$在$x=-1$间断,

且为第一类跳跃间断点

当$x=1$时,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\cos\frac{\pi x}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x-1)=0.$$

$$\because \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$$

故$f(x)$在$x=1$连续.

$\therefore f(x)$在$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$连续.

中国大学MOOC

例2 求 $f(x)=\dfrac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}$ 的间断点，并判定间断点类型。

解 $x=-1, x=1, x=0$ 是间断点，

$x=-1$, $\displaystyle\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(1+x)}\sin x}{|x|\cancel{(x+1)}(x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{\sin x}{|x|(x-1)}=\frac{1}{2}\sin 1$,

$x=-1$ 为第一类可去间断点

$x=1$, $\displaystyle\lim_{x\to 1}f(x)=\infty$，$x=1$ 为第二类无穷间断点

$x=0$ $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{(1+x)\sin x}{|x|(x+1)(x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x(x-1)}=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to 0^-}f(x)=1$,

$x=0$ 为第一类跳跃间断点

例3 设: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin ax}{\sqrt{1-\cos x}} & x<0 \\ b & x=0 \\ \dfrac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)] & x>0 \end{cases}$ a,b取什么值时, $f(x)$在$x=0$处连续。

解: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\cancel{\sin} ax}{\sqrt{1-\cos x}}=-a\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{1-\cos x}}=-a\sqrt{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}}}=-\sqrt{2}a$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}[\ln x-\ln(x^2+x)]=\lim_{x\to 0^+}\{-\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\}=-1$$

$$\because f(0)=b \quad \therefore -\sqrt{2}a=b=-1 \Rightarrow b=-1, a=+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

中国大学MOOC

例4　设函数$f(x)=\dfrac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}$有无穷间断点

$x=0$及可去间断点$x=1$,试确定常数a及b.

解 $\because$ $x=0$为无穷间断点, 所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-b}{(x-a)(x-1)}=\infty\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{(x-a)(x-1)}{e^x-b}=\frac{a}{1-b}=0$$

$$\Rightarrow a=0\ ,b\neq 1$$

$\because$ $x=1$为可去间断点,$\therefore$ $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-b}{x(x-1)}$ 极限存在

$$\Rightarrow\lim_{x\to 1}(e^x-b)=0\Rightarrow b=\lim_{x\to 1}e^x=e$$

中国大学MOOC

例5 证明方程 $x^7+4x^4-x=3$ 在区间 $(0,1)$ 内至少有一个根.

分析：如果令 $f(x)=x^7+4x^4-x-3$，那么证明方程 $x^7+4x^4-x=3$ 有根等价于 $f(x)$ 有零点，因此可用零点定理证明。

证明: 令 $f(x)=x^7+4x^4-x-3,$

则 $f(x)$在 $[0,1]$上连续， 又 $f(0)=-3<0,\ f(1)=1>0$

由零点定理，至少$\exists\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=0$

即 $\xi^7+4\xi^4-\xi=3.$

所以结论成立。

中国大学MOOC

例6 设 $f(x)\in C[0,1]$，且 $f(0)=f(1)$，证明存在

$\xi\in[0,1)$ 使得 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

$$\boxed{F(\xi)=f(\xi+\frac{1}{2})-f(\xi)=0\Leftrightarrow F(x)=0\text{有根}\xi.}$$

证明 令 $F(x)=f(x+\frac{1}{2})-f(x)$,

则 $F(x)$ 在 $[0,\frac{1}{2}]$ 上连续.

$\because F(0)=f(\frac{1}{2})-f(0)$,

$F(\frac{1}{2})=f(1)-f(\frac{1}{2})$,

讨论: 若 $F(0)=0$, 则 $\xi=0$,

若 $F(\frac{1}{2})=0$, 则 $\xi=\frac{1}{2}$,

若 $F(0)\neq 0, F(\frac{1}{2})\neq 0$, 则

$F(0)\cdot F(\frac{1}{2})=-[f(\frac{1}{2})-f(0)]^2<0$.

由零点定理知,

$\exists\xi\in(0,\frac{1}{2})$, 使 $F(\xi)=0$.

综上，存在

$\xi\in[0,1)$ 使得 $f(\xi+\frac{1}{2})=f(\xi)$.

中国大学MOOC

例7 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 且恒为正,

证明: 对任意的 $x_1, x_2 \in (a,b)$, $x_1 < x_2$, 必存在一点

$\xi \in [x_1, x_2]$, 使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

$$\boxed{\begin{array}{l} f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)} \Leftrightarrow \\ f^2(\xi) - f(x_1)f(x_2) = F(\xi) = 0 \end{array}}$$

证 当 $f(x_1) = f(x_2)$ 时, 取 $\xi = x_1$ 或 $\xi = x_2$,

当 $f(x_1) \neq f(x_2)$ 时,

令 $F(x) = f^2(x) - f(x_1)f(x_2)$, 则 $F(x) \in C[a,b]$

$F(x_1) \cdot F(x_2) = -f(x_1)f(x_2)\,[f(x_1) - f(x_2)]^2 < 0$

故由零点定理知, $\exists \xi \in (x_1, x_2)$, 使 $F(\xi) = 0$

综上, 即 $\exists \xi \in [x_1, x_2]$, 使 $f(\xi) = \sqrt{f(x_1)f(x_2)}$.

中国大学MOOC