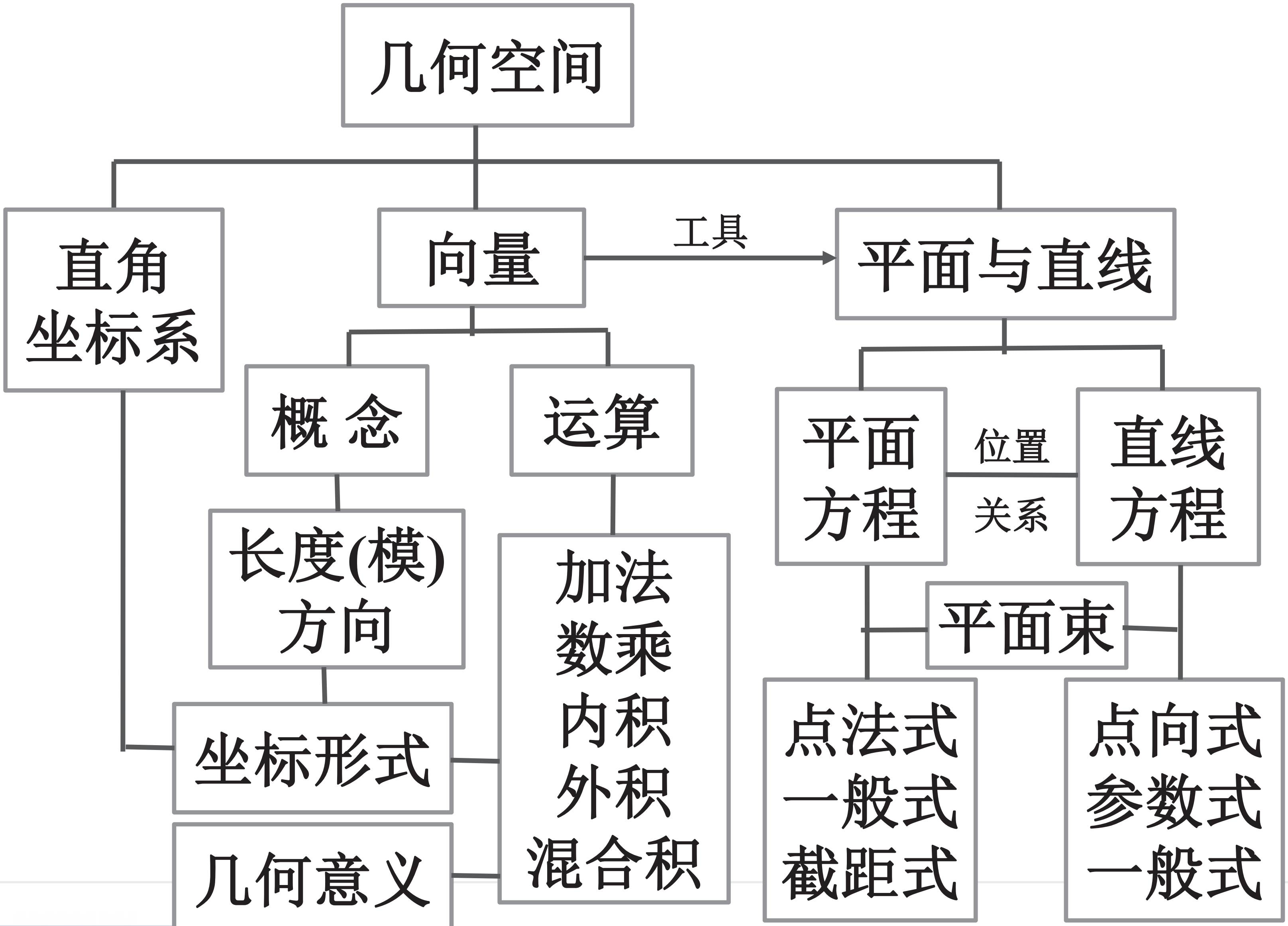
第三章 几何空间

习题课 1

- 内容结构
- 范 例

电子科技大学 蒲和平

内容结构


几何空间
直角坐标系
向量
工具
平面与直线
概 念
运算
平面方程
位置关系
直线方程
长度(模)方向
加法
数乘
内积
外积
混合积
平面束
坐标形式
几何意义
点法式
一般式
截距式
点向式
参数式
一般式

范　例

一、向量及其运算

1.设π为不共线的三点A,B,C的平面,O为原点,$\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{\gamma}$,$\vec{n}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$,则有(B).

(A) $\vec{n}\,/\!/\,\pi$; (B) $\vec{n}\perp\pi$; (C) $<\vec{n},\pi>=\pi/4$; (D) $<\vec{n},\pi>=\pi/3$.

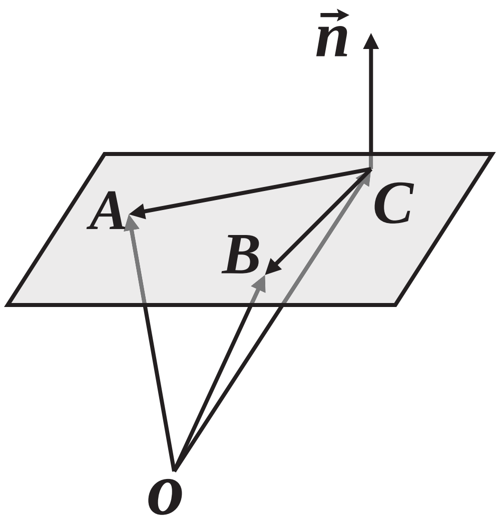
解　$\vec{n}=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}+\vec{\beta}\times\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}$

$$=\vec{\alpha}\times\vec{\beta}-\vec{\gamma}\times\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\vec{\alpha}-\vec{\gamma}\times\vec{\gamma}$$

$$=(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})\times\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})$$

$$=\overrightarrow{CA}\times\vec{\beta}+\vec{\gamma}\times\overrightarrow{CA}$$

$$=\overrightarrow{CA}\times(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{CB}$$



$$\Rightarrow\vec{n}\perp\pi.$$

2. 已知$\|\vec{\alpha}\| = 2, \|\vec{\beta}\| = 3, \langle\vec{\alpha}, \vec{\beta}\rangle = \dfrac{\pi}{3}$，以$3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$和$\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$为邻边是平行四边形的周长为______，面积为$\underline{6\sqrt{3}}$.

$2(\sqrt{108}+\sqrt{28})$

解 $\|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\|^2 = (3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})^2 = 9\|\vec{\alpha}\|^2 + 16\|\vec{\beta}\|^2 - 24\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}$

$$= 9\|\vec{\alpha}\|^2 + 16\|\vec{\beta}\|^2 - 24\|\vec{\alpha}\|\cdot\|\vec{\beta}\|\cos\frac{\pi}{3} = 108$$

$\Rightarrow \|3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}\| = \sqrt{108}$， 类似可得 $\|\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}\| = \sqrt{28}$

周长$=2(\sqrt{108}+\sqrt{28})$

面积 $S = \|(3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta})\times(\vec{\alpha} - 2\vec{\beta})\| = 2\|\vec{\alpha}\times\vec{\beta}\| = 6\sqrt{3}$

3. 设单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点. 求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$在$\overrightarrow{MN}$方向上的投影.

解 设α, β, γ是$\overrightarrow{OA}$ 的方向角，则

$\overrightarrow{OA} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$. 由 $\alpha=\beta=\gamma$可得

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 3\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\overrightarrow{OA} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

设点B的坐标是(x, y, z), 则点N是MB的中点，且

$$\frac{x+1}{2}=-1,\ \frac{y-3}{2}=2,\ \frac{z+2}{2}=1.$$

$\therefore \quad x=-3,\ y=7,\ z=0.$ $\quad \overrightarrow{OB}=(-3,7,0),$

又 $\overrightarrow{MN}=(-2,5,-1)$

$$\therefore \ \Pr j_{\overrightarrow{MN}} \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}=\frac{\overrightarrow{MN}\cdot(\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB})}{\|\overrightarrow{MN}\|}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{30}}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 5 & -1 \\ \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} & \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ -3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\pm\frac{11}{3\sqrt{10}}.$$

第三章 几何空间

习题课2

➤ 范 例

电子科技大学 蒲和平

二、平面

1. 设平面π过z轴且与平面$2x+y-\sqrt{5}z=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，

求平面π的方程.

解　平面过z轴,故可设其方程为 $Ax+By=0$

其法向量$\vec{n}=(A,B,0)$与已知平面的法向量

$\vec{n_0}=(2,1,-\sqrt{5})$所夹锐角为$\dfrac{\pi}{3}$,

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n_0}|}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{n_0}\|}=\frac{|2A+B|}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{1}{2},$$

$$\therefore 6A^2+16AB-6B^2=0,\text{即}A=\frac{1}{3}B\text{或}-3B$$

$\therefore$ 平面$x+3y=0$或$3x-y=0$为所求.

2. 求过点$P(-1,1,2)$及直线$l: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{0}$的平面方程.

解1 在 l 上取点 $Q(2,1,-2)$，$\overrightarrow{PQ}=(3,0,-4)$，所求平面法向量

$$\vec{n}=\vec{s}\times\overrightarrow{PQ}=(3,-2,0)\times(3,0,-4)=(4,6,3)$$

由点法式可得平面方程 $4x+6y+3z-8=0.$

解2 $l:\begin{cases}-2x-3y+7=0\\ z+2=0\end{cases}$，过$l$ 的平面束方程为

$$2x+3y-7+\lambda(z+2)=0 \qquad (1)$$

将P的坐标代入的得 $\lambda=3/2$

代入(1)得平面方程 $4x+6y+3z-8=0$

3. 平面π与平面π': $5x-y+3z-2=0$垂直,并与π'的交线落在xoy面上,求平面π的方程.

解 设平面π'与xoy面的交线为l

过l的平面束方程为: $(5x-y+3z-2)+\lambda z=0$

即 $5x-y+(3+\lambda)z-2=0$ （*）

当该平面与平面π'垂直，有

$$(5,-1,3+\lambda)\cdot(5,-1,3)=25+1+9+3\lambda=0$$

$$\Rightarrow \lambda=-\frac{35}{3}$$

代入（*）得所求平面方程为 $5x-y-\dfrac{26}{3}z-2=0.$

三、空间直线

1. 求点$M(3,1,-4)$关于直线$l:\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \end{cases}$的对称点.

解 直线的方向向量为

$$\vec{S}=(1,-1,-4)\times(2,1,-2)=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(6,-6,3)\,//(2,-2,1)$$

过点M且与l垂直的平面的方程为

$$\pi:\quad 2(x-3)-2(y-1)+(z+4)=0$$

即 $2x-2y+z=0$

π与l的交点坐标满足$\begin{cases} x-y-4z+12=0 \\ 2x+y-2z+3=0 \\ 2x-2y+z=0 \end{cases}$

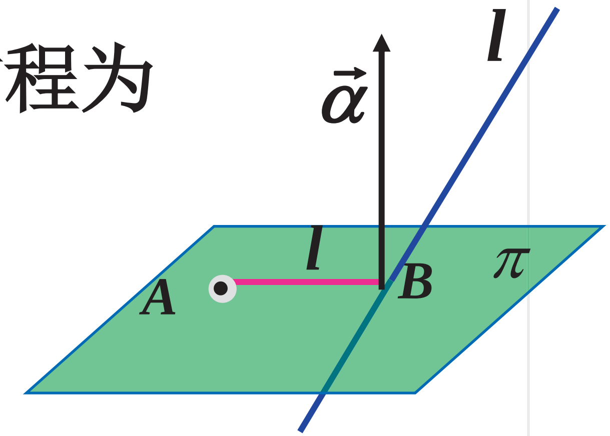
解得：$x=\dfrac{1}{3},\ y=\dfrac{5}{3},\ z=\dfrac{8}{3}$ （注：直线方程用参数式求交点较简）

令对称点的坐标为(a,b,c)则

$$\begin{cases} \dfrac{a+3}{2}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b+1}{2}=\dfrac{5}{3} \\ \dfrac{c-4}{2}=\dfrac{8}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7}{3} \\ b=\dfrac{7}{3} \\ c=\dfrac{28}{3} \end{cases}$$

对称点为 $\left(-\dfrac{7}{3},\dfrac{7}{3},\dfrac{28}{3}\right)$

2. 求过点$A(-1,2,3)$与向量$\vec{\alpha}=(4,3,1)$垂直,并与直线$l:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1}$相交的直方程.



解1 过点A且与向量$\vec{\alpha}$垂直的平面方程为

$$4(x+1)+3(y-2)+(z-3)=0$$

此平面与l的交点满足:

$$\begin{cases} 4(x+1)+3(y-2)+(z-3)=0 \\ \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-3}{1} \end{cases}$$

求得交点 $B(\dfrac{5}{3},-\dfrac{5}{3},\dfrac{10}{3})$

$\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{3}(8,-11,1)$,所求直线方程为:$\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-2}{-11}=\dfrac{z-3}{1}$.

解2 设待求之交点为$(1+2t,-2+t,3+t)$,此交点与A的连线与向量$\vec{\alpha}$垂直

$$\therefore (2+2t,-4+t,t)\cdot(4,3,1)=0$$

$$\Rightarrow 4(2+2t)+3(-4+t)+t=0$$

$$\Rightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow \text{交点为}(\frac{5}{3},-\frac{5}{3},\frac{10}{3})$$

故待求直线方程为:$\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y-2}{-11}=\dfrac{z-3}{1}$.

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{1}$$