第四讲 二次曲面

二次曲面的标准方程及图形

1.椭球面

2.抛物面

3.双曲面

➤ 化二次曲面为标准方程

内容小结

二、化二次曲面为标准方程

复习：

用正交变换化二次型为标准形的方法：

（1）写出二次型 $f(X)$的矩阵A；

（2）求A的特征值与特征向量；

（3）将同一特征值的特征向量正交、单位化；

（4）以(3)中的标准正交向量组为列做正交矩阵C；

(5) 做正交变换$X = CY$, 则 $f(X)=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$.

例1 设 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$ 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并说明 $f(x_1,x_2,x_3)=5$ 表示什么曲面。

解 f 对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

将$\lambda_1=5$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$分别代入齐次线性方程$(\lambda I-A)X=0$，解得所对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

标准化：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

取正交矩阵

$$C=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

作正交变换 $X=CY$，即

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3 \\ x_2=-\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3 \\ x_3=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

得 $f(x_1, x_2, x_3) = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$

由 $f(x_1, x_2, x_3) = 5$ 可得

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 = 5$$

$$y_1^2 + \frac{y_2^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y_3^2}{5} = 1 \longrightarrow \boxed{\text{单叶双曲面}}$$

一般地，二次曲面

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$， $a_{ij} = a_{ji}$

$$X = (x, y, z)^T, \quad b = (b_1, b_2, b_3)^T$$

则S的方程可写为： $X^TAX + b^TX + c = 0$

作正交变换 $X = QY$ 将A化为标准形

$$Q^TAQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

曲面方程为

$$S: \quad Y^T Q^T A Q Y + b^T Q Y + c = 0$$

即 $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3' z' + c = 0$

再配方作平移，可将S化为标准方程.

二次曲面 $\xrightarrow{\text{正交变换}}$ 化二次项为标准形 $\xrightarrow{\text{配方}}$ 标准方程

思考：　曲面S的类型由什么确定？

例2 $z = f(x, y) = xy$ 表示什么曲面？

解 $f(x, y) = xy$ 的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda + \frac{1}{2}), \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = -\frac{1}{2},$$

存在正交变换 $X = CY$ 使

$$z = f = \frac{1}{2}x'^2 - \frac{1}{2}y'^2$$

$z = xy$ 为双曲抛物面.

例3 设 $f(x_1, x_2, x_3) = X^{\mathrm{T}}AX$ 为实二次型，则

$$f(x_1, x_2, x_3) = 1 \text{ 为椭球面} \Leftrightarrow A \text{ 为正定矩阵.}$$

证 将 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 用正交变换 $X = CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

则 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ 为椭球面

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全为正数

$\Leftrightarrow$ A 为正定矩阵.

主要内容

化二次曲面方程为标准方程

二次曲面一般方程 $\xrightarrow{\text{正交变换}}$ 化二次项为标准形 $\xrightarrow{\text{配方}}$ 标准方程

练习 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$，用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并说明 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示什么曲面.

提示： f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=-1.$

作正交变换 $X=CY$，其中

$$C=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$f(Y)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

曲面 $y_1^2+y_2^2-y_3^2=1$ 是单叶双曲面.