第六章 二次型与二次曲面

典型例题

例 1 若二次型 $f(x_1,x_2x_3)=2x_1^2+x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+tx_2x_3$ 是正定的，则 t 的取值范围是________.

分析 实二次型为正定二次型的充分必要条件为其矩阵的所有顺序主子式大于零，由此可以计算出参数 t 的取值范围.答案为 $-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$.

例 2 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$ 的正惯性指数是_______.

分析 求一个二次型的正惯性指数可以用配方法对二次型作非退化线性变换解得，或者用合同变换化 A 为标准形.也可以直接计算其矩阵的特征值来判断.二次型的正惯性指数等于其矩阵的正特征值的个数.答案为 1.

例 3 将 n 阶实对称可逆矩阵按合同分类，即彼此合同的矩阵分为一类，则可以分成________类.

分析 因为实对称矩阵合同的充分必要条件为秩相同，且正惯性指数相同，可逆矩阵的秩均为 n，所以 n 阶实对称可逆矩阵合同的充分必要条件为正惯性指数相同. n 阶实对称可逆矩阵的正惯性指数可以为：$0,1,2,\cdots,n$，因此 n 阶实对称可逆矩阵按合同分类可以分成 $n+1$ 类.

例 4 已知实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$ 经过正交变换 $x=Py$ 可化成标准形 $f=6y_1^2$，则 a=___________.

分析 由于二次型由正交变换可化为标准形 $f=6y_1^2$，则标准形的系数为原二次型矩阵的特征值，再将特征值代入二次型矩阵的特征方程中可以求出 a;或由标准型知二次型矩阵 A 的特征值为 6, 0, 0, 则 A 的对角元的和等于 6, 可以求出参数 a;也可由 A 的秩求 a.

解 经过正交变换 $x=Py$ 化成标准形 $f=6y_1^2$，故知 f 所对应的实对称矩阵的特征值为

6, 0, 0.另一方面，该实对称矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a & 2 & 2 \\ 2 & a & 2 \\ 2 & 2 & a \end{pmatrix}, |\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-a & 2 & 2 \\ 2 & \lambda-a & 2 \\ 2 & 2 & \lambda-a \end{vmatrix},$$

$$=-(\lambda-(a+4))(\lambda-(a-2))^2=0 \Rightarrow a=2.$$

例 5 曲面 $x^2+\frac{y^2}{4}+z^2=1$ 可由坐标平面内的一曲线__________绕 y 轴旋转而成.

解 利用坐标平面内一曲线绕坐标轴旋转而成的空间曲面的性质，可以得到该曲面可由 $\begin{cases} \frac{y^2}{4}+z^2=1 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成，也可由 $\begin{cases} x^2+\frac{y^2}{4}=1 \\ z=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转而成.

例 6 空间曲线 $\begin{cases} x^2-y^2=4 \\ z=c \end{cases}$ 所属曲线类型是_______________ .

解 该曲线可由平行与 xoy 平面的一平面 $z=c$ 截双曲柱面 $x^2-y^2=4$ 所得，为双曲线.

例 7 与矩阵 $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 合同的矩阵是（　　）.

（A）$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$；（B）$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$；（C）$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$；（D）$\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$.

分析 两个同型的矩阵合同的充分必要条件为这两个矩阵有相同的正惯性指数和负惯性指数，并且秩相同.应选（B）.

例 8 用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$ 为标准形，并求出该正交变换.

解 二次型的对应矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$.则由 A 的特征方程

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2 & 0\\ -2 & \lambda-2 & 2\\ 0 & 2 & \lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-5)=0$$

得到矩阵A的特征值为: $2,5,-1$.

对$\lambda=2$，由$(2I-A)X=0$，对其系数矩阵作初等变换得:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

由此可得特征向量$\xi_1=(2,1,2)^T$.

同理，对特征值$\lambda=5$，由$(5I-A)X=0$可得特征向量$\xi_2=(1,2,-2)^T$.

对特征值$\lambda=-1$，由$(-I-A)X=0$可得特征向量$\xi_3=(-2,2,1)^T$.

特征值不同，特征向量必两两正交，只需对其单位化可得:

$\gamma_1=\dfrac{1}{3}(2,1,2)^T,\gamma_2=\dfrac{1}{3}(1,2,-2)^T,\gamma_1=\dfrac{1}{3}(-2,2,1)^T$.

构造正交矩阵

$$Q=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix},$$

则
$$B=Q^TAQ=Q^{-1}AQ=\begin{pmatrix}2 & & \\ & 5 & \\ & & -1\end{pmatrix}.$$

那么，作正交变换$X=QY$，有 $X^TAX=2y_1^2+5y_2^2-y_3^2$.

例 9 设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2++x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3+2bx_2x_3$经过正交变换$X=PY$化成$f=y_2^2+2y_3^2$，其中$X=(x_1,x_2,x_3)^T,Y=(y_1,y_2,y_3)^T$是三维列向量，$P$是三阶正交矩阵，求常数$a,b$的值.

分析 正交变换化二次型为标准形时，标准形的系数为对应的二次型矩阵的特征值，由此可以计算出参数a,b的值.

解 根据假设条件知，变换后二次型的矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 1 & b\\ 1 & b & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

二次型 f 可以写成 $f=X^TAX$, $f=Y^TBY$.

由于 $P^TAP=B, P$ 为正交矩阵，故 $P^T=P^{-1}$，于是有 $P^{-1}AP=B$，即 $A\sim B$，所以有 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$，即

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-1 & -b\\ -1 & -b & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-2\end{vmatrix},$$

由此可得方程 $\lambda^3-3\lambda^2+(2-a^2-b^2)\lambda+(a-b)^2=\lambda^3-3\lambda^2+2\lambda$,

其解 $a=b=0$ 为所求的常数.

注　要注意使用“相似矩阵有相同的特征值”这一性质.

例 10 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$，矩阵 $B=(kI+A)^2$，其中 k 为实数，I 为 3 阶单位矩阵，求对角矩阵 Λ，使 B 与 Λ 相似，并求 k 为何值时，B 为正定矩阵.

分析　因为 $B\sim\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$，故 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是 B 的特征值，求对角矩阵 Λ 就转化为求 B 的特征值，由于 $B=(kI+A)^2$，因此应通过 Λ 的特征值来求 B 的特征值.

解　由 A 的特征多项式 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & -1\\ 0 & \lambda-2 & 0\\ -1 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2$，可得 A 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2, \lambda_3=0$，那么 $kI+A$ 的特征值为: $k+2, k+2, k$;

$B=(kI+A)^2$ 的特征值为: $(k+2)^2, (k+2)^2, k^2$;

又因 A 为实对称矩阵，$A^T=A$，故

$$B^T=[(kI+A)^2]^T=[(kI+A)^T]^2=(kI+A)^2=B,$$

得到 B 是实对称矩阵，所以 B 可对角化，且

$$B \sim \Lambda = \begin{pmatrix} (k+2)^2 & & \\ & (k+2)^2 & \\ & & k \end{pmatrix},$$

由上面的结果立刻可以得到：当 $k \neq -2$，且 $k \neq 0$ 时，B 的全部特征值均为正数，这时 B 为正定矩阵.

例 11 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + ax_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2.

（1）求参数 a 及二次型矩阵的特征值;

（2）指出方程 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种曲面.

解 二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{pmatrix}$.因秩 $(A) = 2$，A 有一个 2 阶子式 $\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 24 \neq 0$，故有因秩 $(A) = 2 \Leftrightarrow |A| = 0$.所以

$$0 = |A| = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & a \end{vmatrix} = 24(a-3),$$

解得 $a = 3$.于是 $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & 1 & -3 \\ 1 & \lambda - 5 & 3 \\ -3 & 3 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 4)(\lambda - 9),$$

所以 A 的特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 9$.

（2）由（1）知存在正交矩阵 P，使得

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

即 $f(x_1, x_2, x_3)$ 可以经过正交变换 $X = PY$ 化为标准形 $4y_2^2 + 9y_3^2$，这表明二次曲面 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 的标准形为 $4y_2^2 + 9y_3^2 = 1$，所以 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示椭圆柱面.

注 **用正交变换 $X = PY$ 化二次型为标准形，这类题若要求写出正交变换 $X = UY$，计**

算量大.若只要求知道结果，即仅需知道标准形，则计算量不大.在解答中要注意区分和判断.

例 12 已知二次曲面方程$x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$可以经过正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化为椭圆柱面方程$\eta^2+4\zeta^2=4$，求 a, b 的值和正交矩阵.

分析　本题将二次型化为椭圆柱面方程，实质上是要用正交变换将二次型化为相似标准形.故可利用相似矩阵的性质求常数 a，b.求正交矩阵 P，可在求出 a，b 后解方程组$(\lambda_i E-A)X=0$ $(i=1,2,3,\lambda_i=0,1,4)$，求$A$的特征向量，以属于$A$的不同特征值的单位特征向量为列构成正交矩阵 P.

解　设$A=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，则由$A=\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}$相似得两矩阵的特征多项式相等. 即

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & -b & -1 \\ -b & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda & & \\ & \lambda-1 & \\ & & \lambda-4 \end{vmatrix}\Rightarrow a=3,b=1.$$

对应于特征值$\lambda_1=0$的单位特征向量为$x_1=\left(\frac{2}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$；

对应于特征值$\lambda_2=1$的单位特征向量为$x_2=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$；

对应于特征值$\lambda_3=4$的单位特征向量为$x_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$.

因此 $P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

例 13 证明: 任一实可逆矩阵可以分解为一正交矩阵与一正定矩阵之积.

证 设 A 是 n 阶实可逆矩阵, 则 $A^TA=A^TIA$, 即 A^TA 为正定矩阵.

设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 A^TA 的特征值, 则 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$, 所以存在可逆矩阵 P, 使

$$A^TA=P^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}P,$$

令

$$B=P^{-1}\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}P,$$

则 B 为正定矩阵, B^{-1} 也是正定矩阵, 且

$$A^TA=B^2,B^{-1}A^TAB^{-1}=I,(AB^{-1})^T(AB^{-1})=I.$$

故 AB^{-1} 为正交矩阵.令 $Q=AB^{-1}$,则 $A=QB$, 且 Q 为正交矩阵, B 为正定矩阵.

注 本题使用了"设 A 是 n 阶实可逆矩阵, 则 A^TA 为正定矩阵"这一性质, 同时要注意到, 正定矩阵一定是实对称矩阵.

例 14 设 A 为 n 阶正定矩阵, 证明存在 n 阶正定矩阵 B, 使 $A=B^2$.

证 由 A 为 n 阶正定矩阵, 则存在正交矩阵 T, 使得

$$T^TAT=\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

其中 $\lambda_i>0(i=1,2,\cdots,n)$.即

$$A=T\Lambda T^{-1}=T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}T^{-1}T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}T^{-1},$$

令 $B=T\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & & & \\ & \sqrt{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}T^{-1}$，由于 B 的特征值 $\sqrt{\lambda_i}>0(i=1,2,\cdots,n)$，所以 B 正定.

故存在 n 阶正定矩阵 B，使 $A=B^2$.

例 15 对一般的 n 元实二次型 $f=X^TAX$，其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$，证明：f 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值恰为矩阵 A 的最大特征值.

证 由于 n 元实二次型 $f=X^TAX$ 一定存在正交变换 $X=QY$，使其化为

$$f=X^TAX=Y^TQ^TAQY=Y^TBY=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots\lambda_ny_n^2,$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 A 的特征值且全是实数，记它们的最大值为 λ_i.

注意到当 $X^TX=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 时，有

$$X^TX=Y^TQ^TQY=Y^TQ^{-1}QY=Y^TY=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=1,$$

于是 $f=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots\lambda_ny_n^2\le\lambda_i(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_i$.

这就证明了 f 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值恰为矩阵 A 的最大特征值.

下面再证明必有 X_0，使得 $X_0^TX_0=1$ 且 $X_0^TAX_0=\lambda_i$，为此取 $y_0=(0,\cdots,1,\cdots,0)^T$，其第 i 个分量为 1，其余分量全为零.则 $Y_0^TY_0=1$，且

$$Y_0^TBY_0=\lambda_1\cdot0+\lambda_2\cdot0+\cdots+\lambda_i\cdot1+\cdots+\lambda_n\cdot0=\lambda_i.$$

这就证明了 λ_i 是二次型 X^TAX 在条件 $X^TX=1$ 上的最大值，故 n 元二次型 $f=X^TAX$ 在条件 $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2=1$ 下的最大值恰为矩阵 A 的最大特征值.

例 16 设 A 为 $m\times n$ 实矩阵，I 是 n 阶单位矩阵.令矩阵 $B=\lambda I+A^TA$，其中 λ 为实数.证明：当 $\lambda>0$ 时，B 为正定矩阵.

证 由题设，B 为 $n\times n$ 方阵，且

$$B^T=(\lambda I+A^TA)^T=(\lambda I)^T+(A^TA)^T=\lambda I+A^TA=B,$$

所以 B 为实对称矩阵.对任意的 n 维非零向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$，有

$$\alpha^T B\alpha = \alpha^T(\lambda I + A^T A)\alpha = \lambda\alpha^T\alpha + (A\alpha)^T(A\alpha),$$

其中 $\alpha^T\alpha = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 > 0, (A\alpha)^T(A\alpha) \ge 0$.

故当 $\lambda > 0$ 时，对任意的 $\alpha \ne 0$ 有

$$\alpha^T B\alpha = \lambda\alpha^T\alpha + (A\alpha)^T(A\alpha) > 0,$$

所以实对称矩阵 B 为正定矩阵.

例 17 设 A 为 m 阶正定矩阵, B 为 $m\times n$ 实矩阵，B^T 为 B 的转置矩阵，证明：$B^T AB$ 为正定矩阵的充分必要条件是 B 的秩 $R(B) = n$.

分析　证明抽象实对称矩阵多用定义：对任意的 n 维列向量 $X \ne 0, X^T AX > 0$.

解　必要性. 设 $B^T AB$ 为正定矩阵，则对任意的实 n 维列向量 $X \ne 0$，有 $X^T(B^T AB)X > 0$，即 $(BX)^T A(BX) > 0$,于是 $BX \ne 0$.因此 $BX = 0$ 只有零解.从而 $R(B) = n$.

充分性.因 $(B^T AB)^T = B^T AB$,故 $B^T AB$ 为实对称矩阵.若 $R(B) = n$，则线性方程组 $BX = 0$ 只有零解.从而对任意实 n 维列向量 $X \ne 0$ 只有 $BX \ne 0$.又 A 为正定矩阵，所以对于 $BX \ne 0$ 有 $(BX)^T A(BX) > 0$.于是当 $X \ne 0$ 时，$X^T(B^T AB)X > 0$，故 $B^T AB$ 为正定矩阵.

例 18 设 A, B 都是 n 阶正定矩阵，证明 AB 的特征值均为正数.

分析　要证明 AB 的特征值均为正数，注意正定矩阵的特征值为正数，但 AB 不一定是正定矩阵，又注意相似矩阵有相同的特征值，还有考虑到 A, B 是正定矩阵，故可以利用正交矩阵的正交变换性质证明.

证　A, B 都是 n 阶正定矩阵，由例 6 知，存在正定矩阵 P, Q 使得 $A = P^T P, B = Q^T Q$, 则

$$AB = P^T PQ^T Q = P^T PQ^T QP^T(P^T)^{-1},$$

所以 AB 相似于 $PQ^T QP^T = (QP^T)^T(QP^T)$,而后者是正定矩阵，其特征值为正，又相似矩阵有相同的特征值，故 AB 的特征值均为正数.

注　正定矩阵有很多等价的命题，可以通过对这些等价命题的证明，从而深入理解和熟练运用这些等价条件，在证明中才能事半功倍.