§1-5 极限存在准则(I)

一、夹逼准则

二、单调有界准则

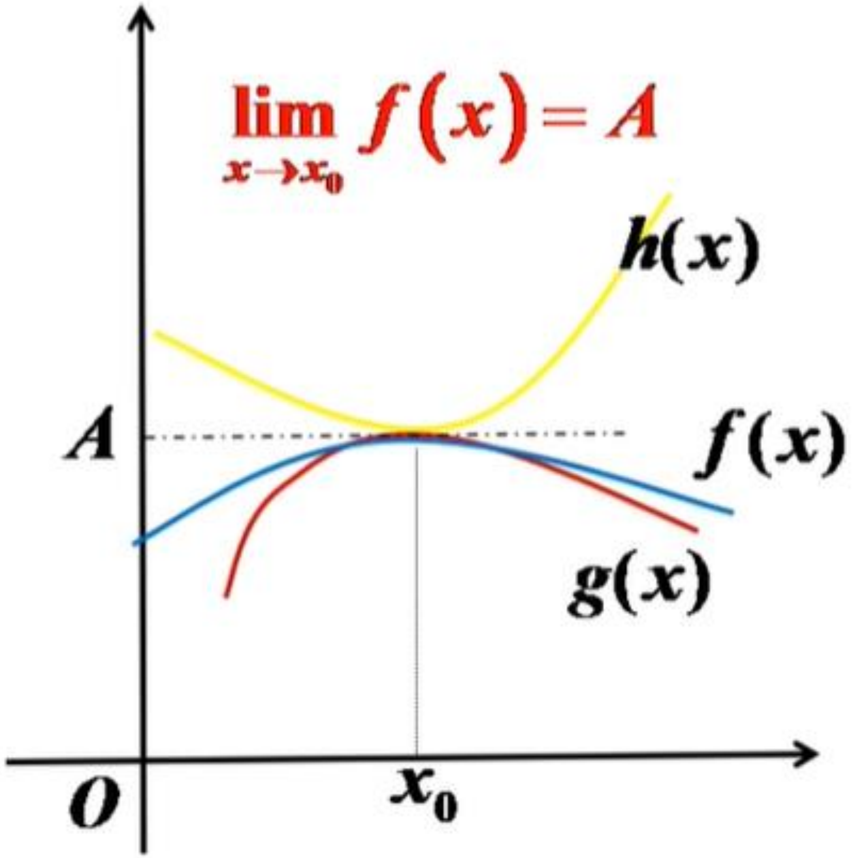
一、夹逼准则

准则I 如果当$x \in U(\hat{x}_0,\delta)$(或$|x|>M$)时，有

(1) $g(x) \le f(x) \le h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=A$, $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=A$,

那么$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)$存在,且等于$A$.



例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}.\ (\times)$$

例1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解 $\because\quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$,

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=1$,

由夹逼定理得

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$.

二、单调有界准则

有上界，即

$\exists M, \forall n,$ 有 $x_n \le M$

如果数列$\{x_n\}$满足条件

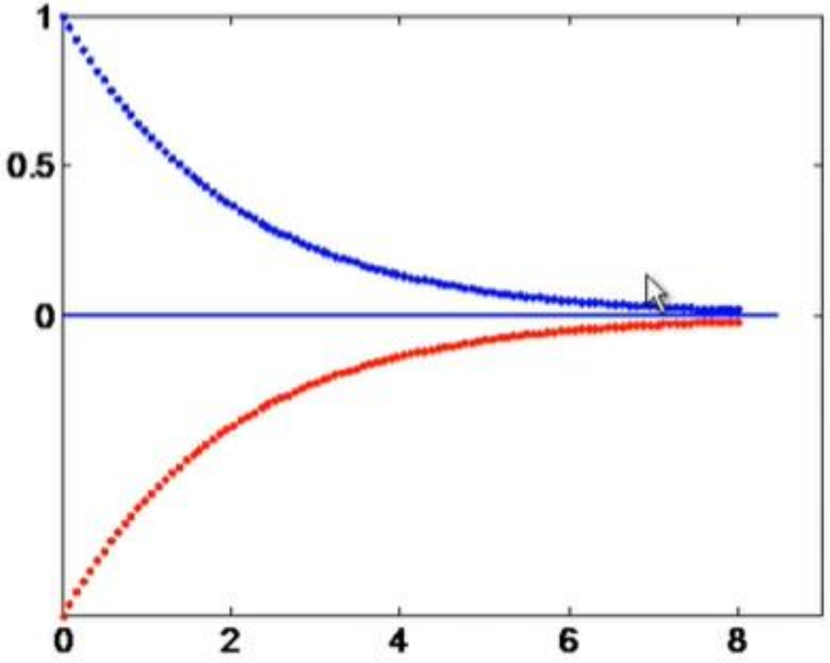
$x_1 \le x_2 \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \cdots,$ 单调不减

$x_1 \ge x_2 \cdots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \cdots,$ 单调不增

$\left.\begin{matrix} \text{单调不减} \\ \text{单调不增} \end{matrix}\right\}$ 单调数列

有下界，即

$\exists m, \forall n,$ 有 $x_n \ge m$



准则II　单调有界数列必有极限

例2. 设$x_1>0$，且$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)(n=1,2,3,\cdots,a>0)$

证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求此极限值.

证 由已知 $x_1>0$ 及递推公式知$x_n>0$,

$$\because\ x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)\geq\sqrt{x_n\cdot\frac{a}{x_n}}=\sqrt{a},$$

所以 数列$\{x_n\}$有下界$\sqrt{a}$.

因 $x_{n+1}-x_n=\frac{a}{2x_n}-\frac{x_n}{2}=\frac{a-x_n^2}{2x_n}\leq 0\ \left(\because\ x_n\geq\sqrt{a}\right)$,

所以 $x_{n+1}\leq x_n$, 故数列 $\{x_n\}$ 单调不增.

故根据单调有界准则, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 不妨记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$,

对等式 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ 两边取极限

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$$

$$\boxed{x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)}$$

得 $A=\dfrac{1}{2}\left(A+\dfrac{a}{A}\right)$

解得 $A=\pm\sqrt{a}$, 因 $x_n>0$, 故 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A\geq 0$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sqrt{a}$.

思考题

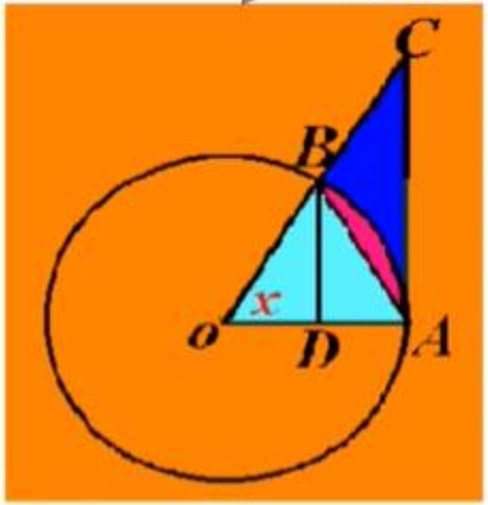
1.夹逼准则的第二条是否可去？试举例说明.

2.利用单调有界准则求极限主要有何特点？

§1-5 两个重要极限(II)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$



分析：

设单位圆 O，圆心角 $\angle AOB = x$，$(0 < x < \frac{\pi}{2})$

过 A 点作单位圆的切线，得 ΔACO.

扇形 AOB 的圆心角为 x，ΔOAB 的高为 BD，

于是有 $\sin x = BD$，$x =$ 弧 AB，$\tan x = AC$，

$\because BD <$ 弧$AB < AC$

$\therefore \sin x < x < \tan x \quad \Rightarrow 1 < \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x}$

即 $\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1,$

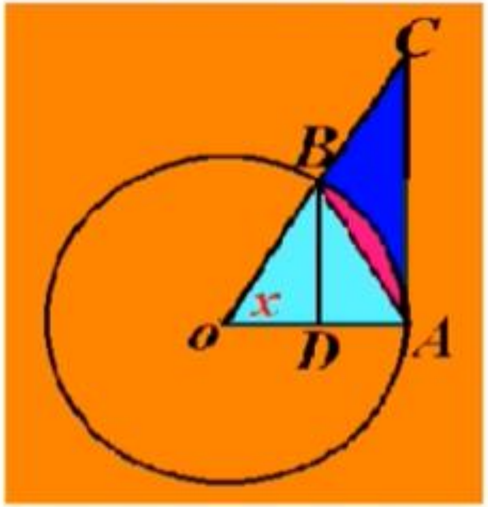
上式对于$-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$也成立.

即当$0 < |x| < \dfrac{\pi}{2}$时, 有$\cos x < \dfrac{\sin x}{x} < 1;$

$\because \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1, \quad \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1, \quad \therefore \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1.$

记住此公式

$\dfrac{\sin x}{x}$



例1 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$.

解 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x\cdot\cos x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{\cos x}$

$=1.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$

$\boxed{\dfrac{\sin x}{x}}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{(\dfrac{x}{2})^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}(\dfrac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}})^2$

$=\dfrac{1}{2}\cdot1^2=\dfrac{1}{2}$.

思考题

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{\sin x}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 x}{1\text{-}\cos(x)}$.

§1-5 两个重要极限(III)

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

当 $\forall x>1$ 时，$\exists$正整数n,使得 $n\le x\le n+1$,

$$(1+\frac{1}{n+1})^n \le (1+\frac{1}{x})^x \le (1+\frac{1}{n})^{n+1},$$

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e.$$

中国大学MOOC

首先证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$

设 $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$

$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i$，其中$C_n^i = \frac{n(n-1)\cdots(n-i+1)}{i!}$.

$$=1+\frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots \quad +\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n})\cdots(1 - \frac{n-1}{n}).$$

类似地,

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n+1}) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{n!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})\cdots(1 - \frac{n-1}{n+1})$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}(1 - \frac{1}{n+1})(1 - \frac{2}{n+1})\cdots(1 - \frac{n}{n+1})$$

所以 $x_{n+1} > x_n$, $\quad \therefore \{x_n\}$是单调增加的;

$$x_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \cdots + \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n}).$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \quad < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)\cdots 2\cdot 1} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$= 1 + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 3,$$

$\therefore \{x_n\}$是有界的;

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在. 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e.$ $(e = 2.71828\cdots)$

再证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

中国大学MOOC

当 $\forall x>1$ 时，∃正整数n,使得 $n\le x\le n+1$,

$$(1+\frac{1}{n+1})^n\le(1+\frac{1}{x})^x\le(1+\frac{1}{n})^{n+1},$$ 且$x\to+\infty$时，$n\to\infty$.

而 $$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^{-1}=e,$$

由夹逼定理得： $\therefore\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x=e.$

对 $\lim\limits_{x\to-\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$，令 $t=-x$,

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{x})^x=\lim_{t\to+\infty}(1-\frac{1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t-1}{t})^{-t}=\lim_{t\to+\infty}(\frac{t}{t-1})^{t}=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t-1})^{t-1}(1+\frac{1}{t-1})=e.$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$$

令 $x=\dfrac{1}{t}$，$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to\infty}(1+\dfrac{1}{t})^t=e.$

记住此公式

$$\boxed{\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e \qquad \lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e}$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{-x})^{-x}]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{3+x}{2+x})^{2x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})]^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}[(1+\frac{1}{x+2})^{x+2}]^{2}(1+\frac{1}{x+2})^{-4}$

$=e^{2}$.

思考题

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)^{\left(\frac{1}{x}\right)^2}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2+x}{1+x}\right)^x$.

§1-5 极限存在准则(IV)

一、无穷小的比较

二、等价无穷小替换

一、无穷小的比较

例如， 当$x \to 0$时，$x, x^2, \sin x$，都是无穷小.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x} = 0,$$ x^2比$3x$要快得多；

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{3x} = \frac{1}{3},$$ $\sin x$与$3x$大致相同；

极限不同，反映了无穷小趋向于零的“快慢”程度不同.

定义: 设α,β是同一过程中的两个无 穷小,且$\alpha \neq 0$.

(1) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,就说$\beta$是比$\alpha$高阶的无穷小, 记作 $\beta = o(\alpha)$;

(2) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C (C \neq 0)$,就说$\beta$与$\alpha$是同阶的无穷小;

特殊地 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$,则称$\beta$与$\alpha$是等价的无穷小; 记作 $\alpha \sim \beta$;

(3) 如果$\lim \dfrac{\beta}{\alpha^k} = C (C \neq 0, k > 0)$, 就说$\beta$是$\alpha$的$k$阶的无穷小.

例1 证明：当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

解 $$\lim_{x\to 0}\frac{4x\tan^3 x}{x^4} = 4\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^3 = 4,$$

故当$x \to 0$时，$4x\tan^3 x$为x的四阶无穷小.

例2 当$x \to 0$时，求$1-\cos x$关于x的阶数.

解 $$\because \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 当$x \to 0$时，$1-\cos x$为x的二阶无穷小.

常见等价无穷小

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\quad \therefore$ 当$x\to 0$时$,\sin x\sim x;$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1,\quad \therefore$ 当$x\to 0$时$,\tan x\sim x;$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x}{x}=1,\quad \therefore$ 当$x\to 0$时$,\arctan x\sim x;$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{\frac{1}{2}x^2}=1,\therefore$ 当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2};$

常用等价无穷小： 当$x \to 0$时，

$$\sin x \sim x,\ \arcsin x \sim x,\quad a^x - 1 \sim x\ln a$$

$$\tan x \sim x,\ \arctan x \sim x,\ \log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}$$

$$\ln(1+x) \sim x,\ e^x - 1 \sim x,\ 1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2.$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

以上等价无穷小的关系同学们必须熟记，以备应用。

二、等价无穷小替换

定理(等价无穷小替换定理)

设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta' \ (\alpha' \neq 0, \beta' \neq 0)$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'} = A$ 或 ∞，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

证 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = \lim \left(\frac{\beta}{\beta'} \cdot \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \frac{\alpha'}{\alpha} \right) = \lim \frac{\beta}{\beta'} \cdot \lim \frac{\beta'}{\alpha'} \cdot \lim \frac{\alpha'}{\alpha} = \lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

推论

若 $x \to x_0$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小，且 $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\alpha(x) \cdot f(x) \right] = A$(或 ∞).

则 $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\alpha(x) \cdot f(x) \right] = \lim\limits_{x \to x_0} \left[\beta(x) \cdot f(x) \right] = A$ (或∞).

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{1-\cos x}$.

解 当$x\to 0$时,

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ \tan 2x\sim 2x.$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)^2}{\frac{1}{2}x^2}=8.$$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3 2x}$.

解 当$x\to 0$时, $\sin 2x\sim 2x$,

$$\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)$$

$$\tan x\sim x,\quad 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,$$

$$\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^3}{(2x)^3}=\frac{1}{16}.$$

思考题

1. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{\sin x}$.

2. 求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$.