第四讲　二次曲面

二次曲面的标准方程及图形

1.椭球面

2.抛物面

3.双曲面

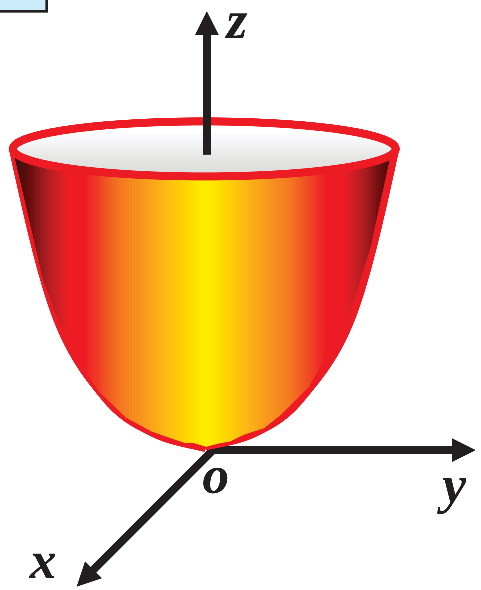
化二次曲面为标准方程

内容小结

一、二次曲面的标准方程及图形

2. 抛物面

（1）椭圆抛物面



$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$ （p 与 q 同号）

1) 范围：若 $p > 0$ 且 $q > 0$, 则

图形在 xy 平面上方，否则在 xy 平面下方.

2) 对称性：图形关于 z 轴、yz 平面、xz 平面对称.

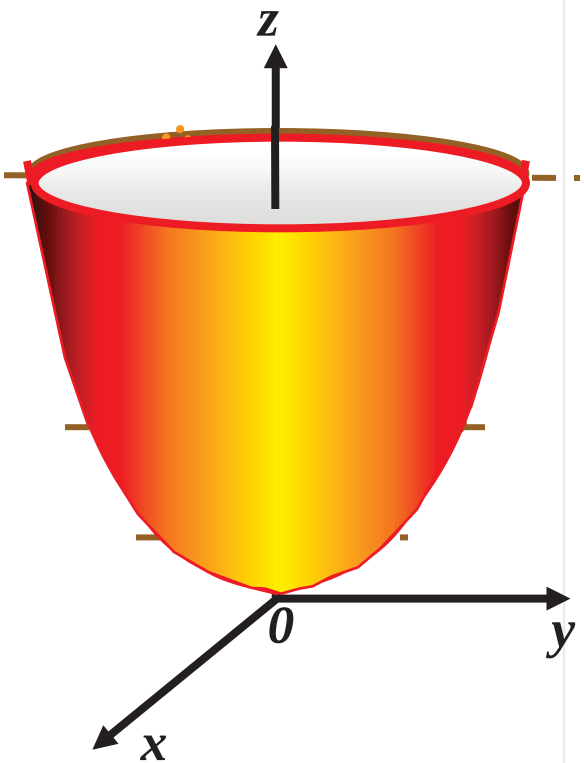
3) 截 痕：

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$ 设 $p > 0$, $q > 0$

1^0 与平面 $z = z_1 \ (z_1 > 0)$的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1} + \dfrac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1变动时椭圆的大小不同，中心都在 z 轴上.



2^0 与平面 $y = y_1$的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$ 它的轴平行于 z 轴

3^0 与平面 $x = x_1$ 的交线也为抛物线.

原点是该椭圆抛物面的**顶点**.

$p<0, q<0$ 时，椭圆抛物面开口向下.

特殊地：当 $p=q$ 时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$$ 是旋转抛物面

（由 xoz 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

与平面 $z=z_1\ (z_1>0)$ 的交线为圆.

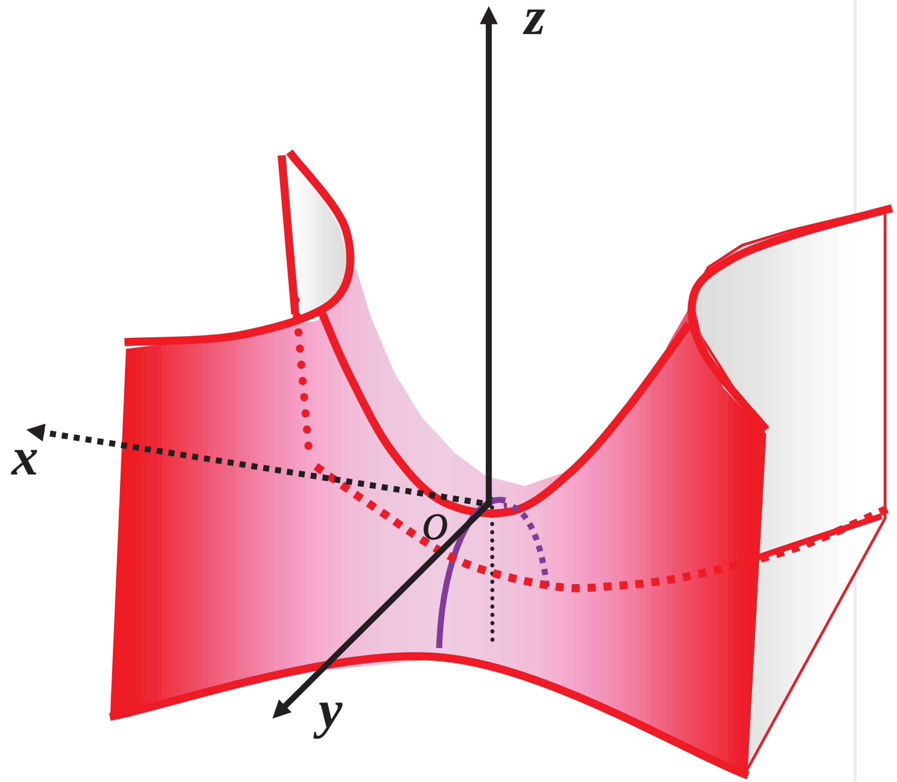
(2）双曲抛物面（马鞍面）

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},\ (pq > 0)$$

1）范围：$x, y, z \in \mathrm{R}$,

曲面可向各方向无限延伸.

2）对称性：图形关于 z 轴、yz 平面、xz 平面对称.



3) 截 痕 （设$p>0$, $q>0$)

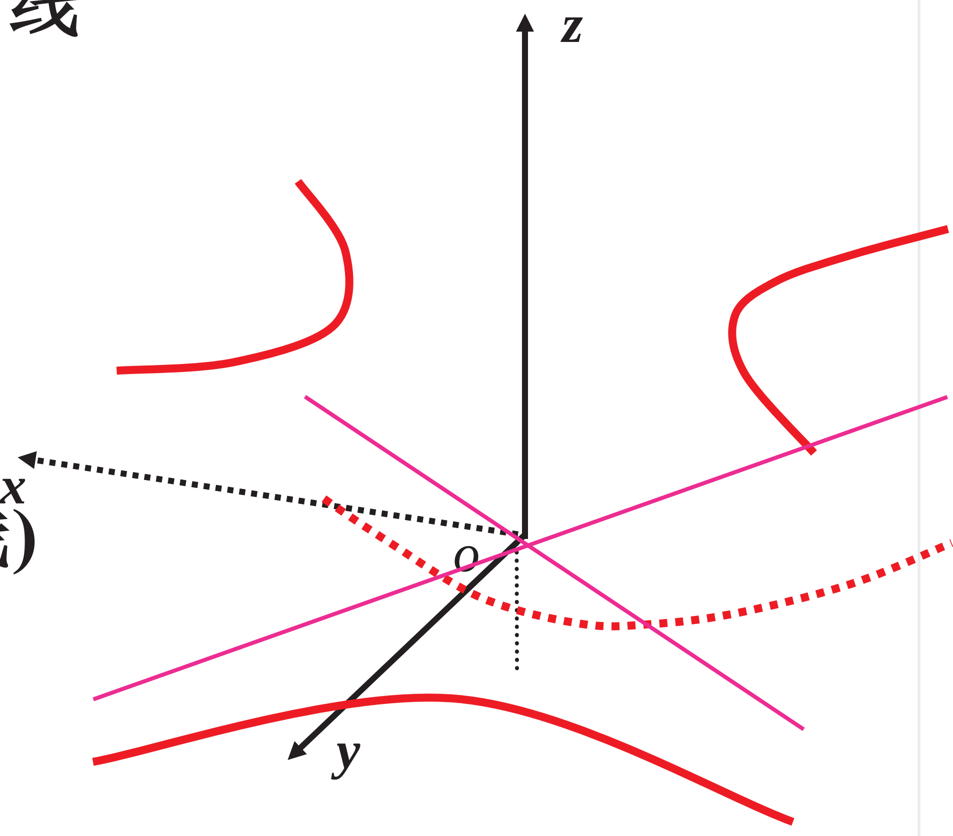
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$

用平面$z=z_0$ $(z_0\neq 0)$

截曲面所得截痕为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_0}-\dfrac{y^2}{2qz_0}=1\\ z=z_0\end{cases}$$

($z_0=0$ 时为一对相交直线)



用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

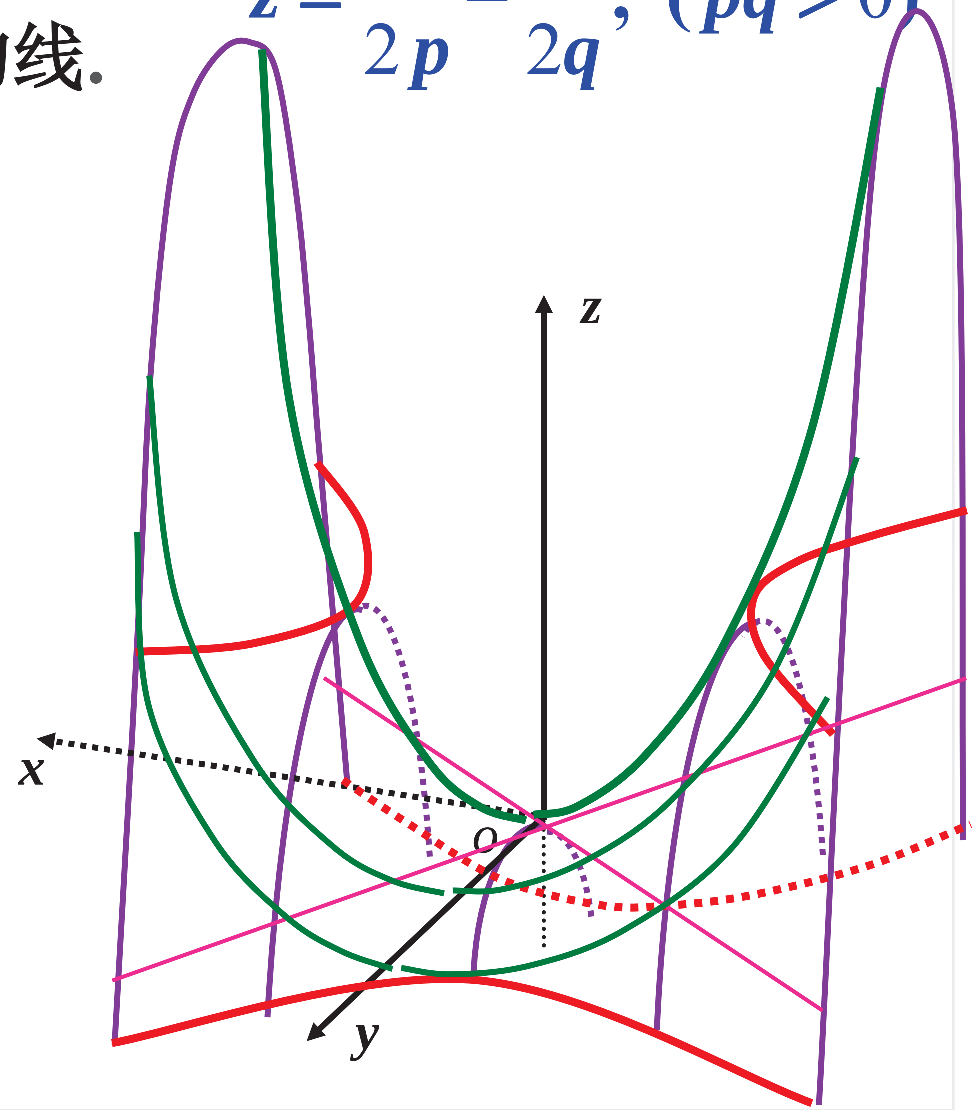
$$\begin{cases} z=\dfrac{x_0^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q} \\ x=x_0 \end{cases}$$

（开口向下）

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^2}{2q} \\ y=y_0 \end{cases}$$

（开口向上）

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$



用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

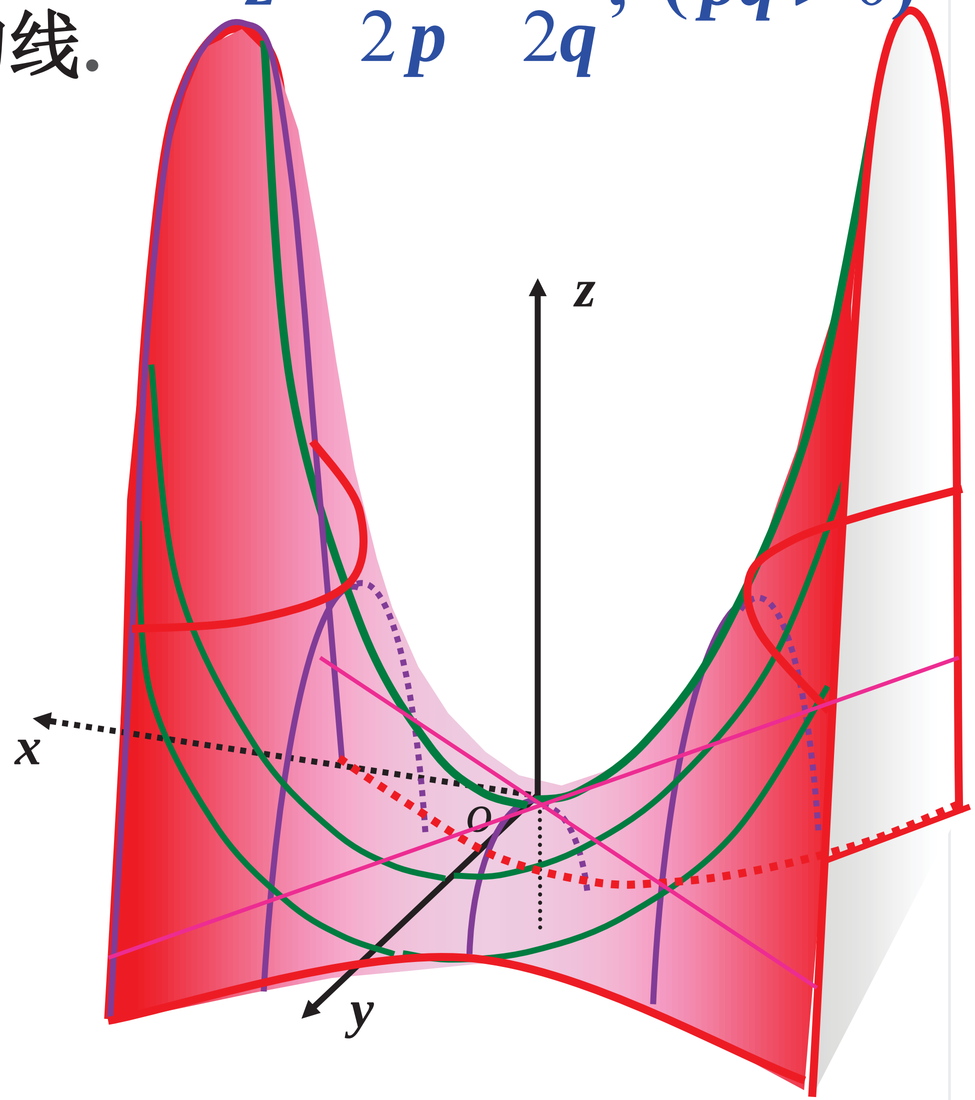
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{x_0^{\ 2}}{2p}-\dfrac{y^{\ 2}}{2q} \\ x=x_0 \end{cases}$$

（开口向下）

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2q} \\ y=y_0 \end{cases}$$

（开口向上）



用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

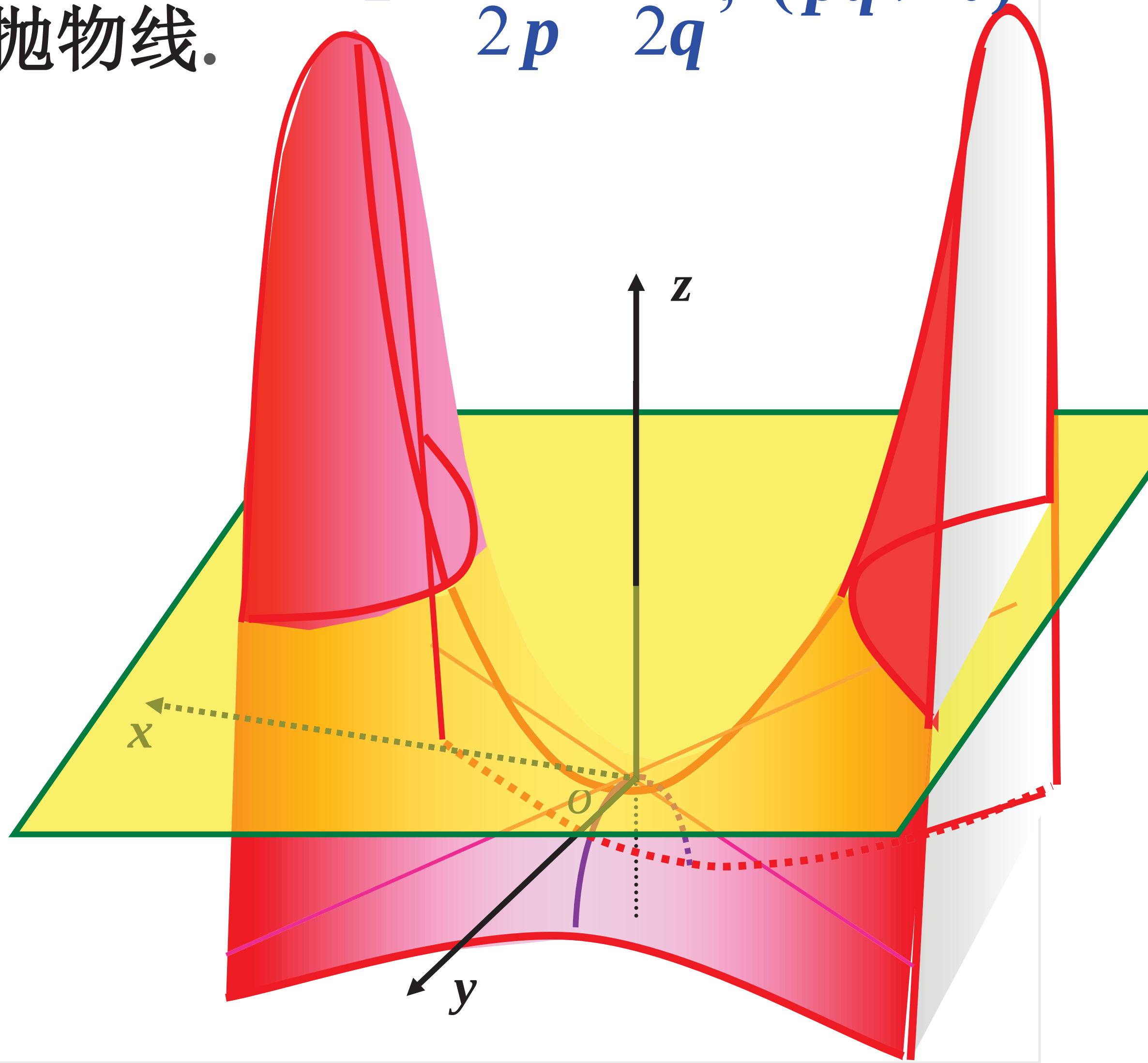
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{x_0^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q} \\ x=x_0 \end{cases}$$

（开口向下）

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^2}{2q} \\ y=y_0 \end{cases}$$

（开口向上）



用平面$x = x_0$与$y = y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

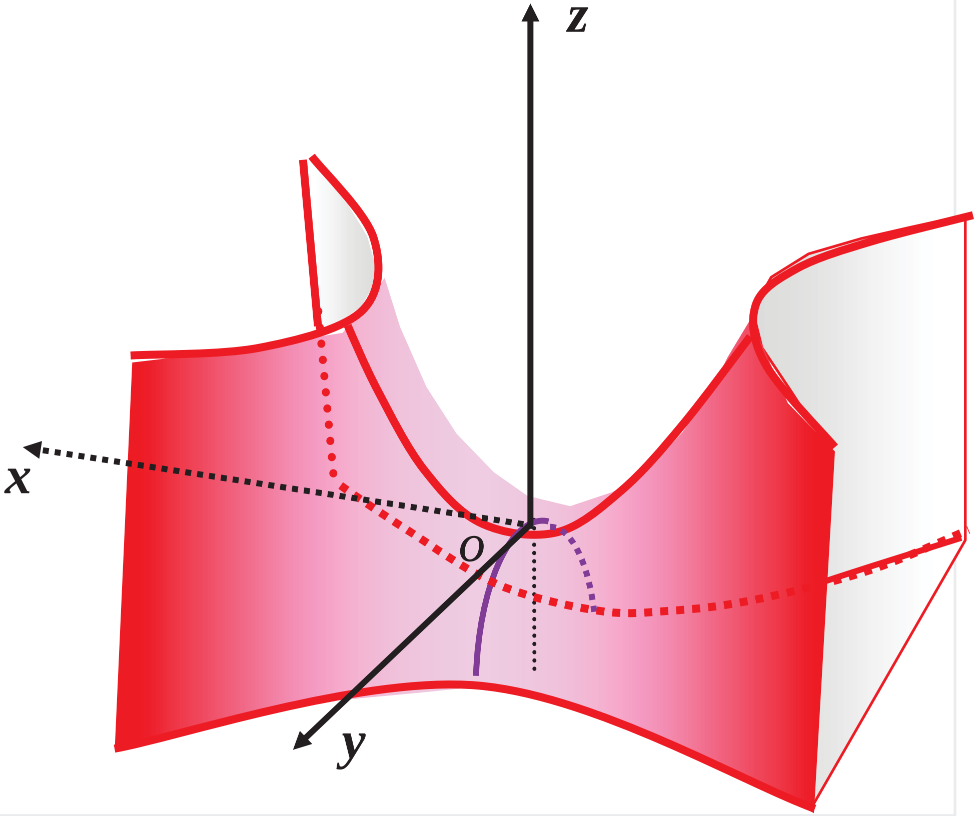
$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},\ (pq > 0)$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{x_0^{\,2}}{2p} - \dfrac{y^{\,2}}{2q} \\ x = x_0 \end{cases}$$

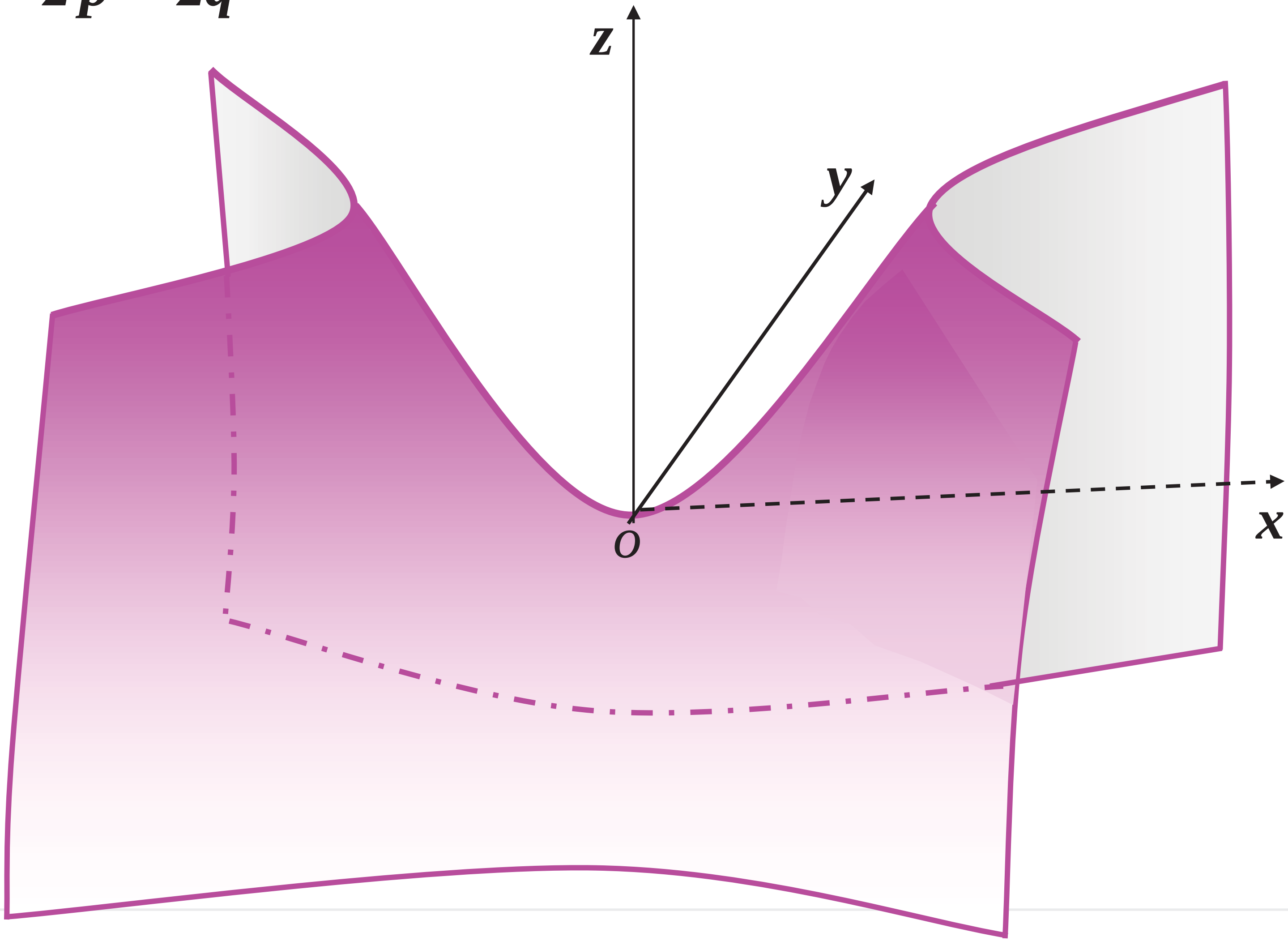
（开口向下）

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{2p} - \dfrac{y_0^{\,2}}{2q} \\ y = y_0 \end{cases}$$

（开口向上）



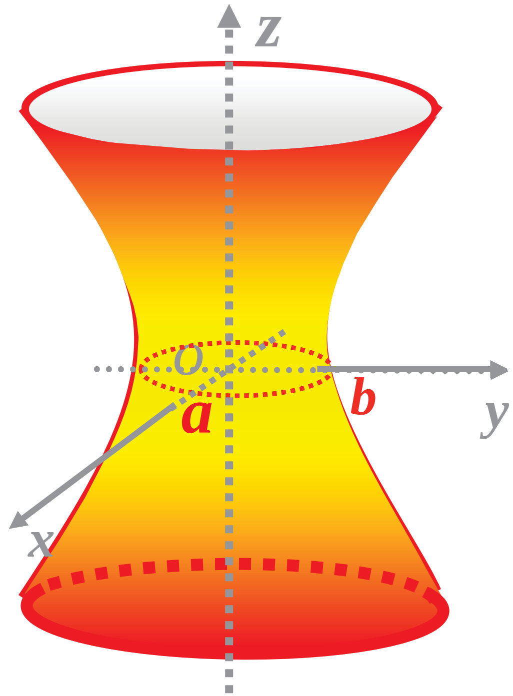
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (p>0,\ q>0)$$ 图形的画法



3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



1) 范围: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1$

故曲面在椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的外部;

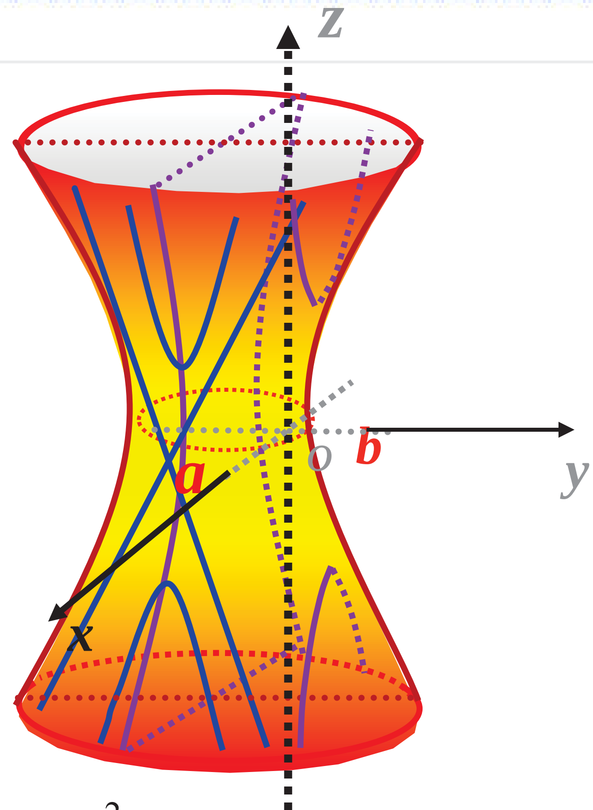
2) 对称性: 图形关于三个坐标轴、三个坐标面以及原点都对称.

3) 截 痕

用平面$z = z_0$截曲面

所得截痕为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 + \dfrac{z^2}{c^2} \\ z = z_0 \end{cases}$$



用平面$x = x_0$ 与 $y = y_0$截曲面

所得截痕为双曲线.：

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x_0^2}{a^2} \\ x = x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{y_0^2}{b^2} \\ y = y_0 \end{cases}$$

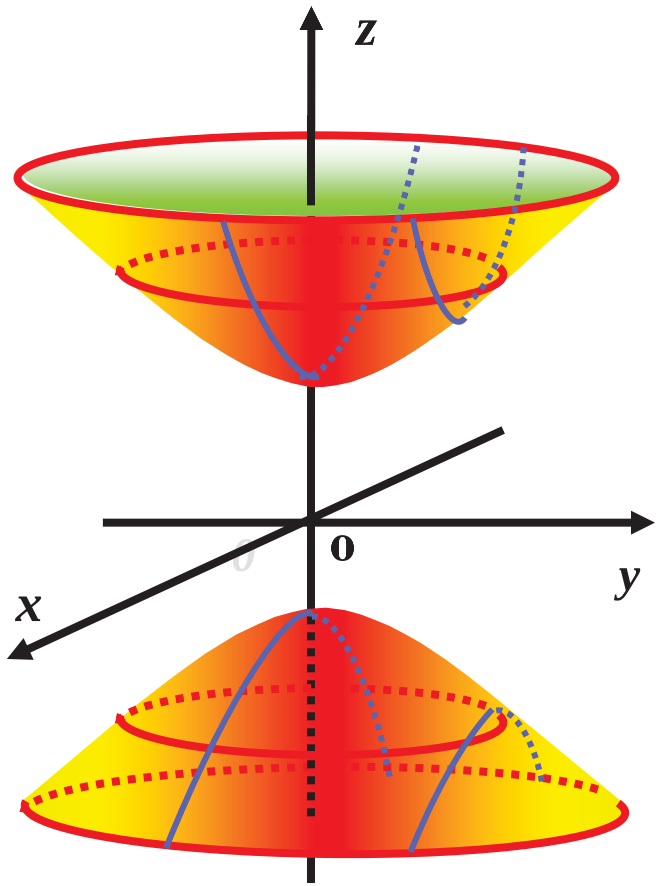
($y_0 = b$是一对相交直线)

($x_0 = a$是一对相交直线)

思考： $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ 的形状如何？

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



思考：

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

的图形怎样？

主要内容

二次曲面的标准方程与图形

（1）椭球面

（2）抛物面
- 椭圆抛物面
- 双曲抛物面

（3）双曲面
- 单叶双曲面
- 双叶双曲面