七．方程组有解的判定

线性方程组的**解数** $\Leftrightarrow$ **秩**的(不等式)关系

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$$

有非零解 $\Leftrightarrow R(A)<n$

只有零解 $\Leftrightarrow R(A)=n$

$$A_{m\times n}X_{n\times 1}=b_{m\times 1}\left(b\neq 0\right)$$

无解 $\Leftrightarrow R(A)\neq R(\overline{A})$

无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<n$

惟一解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=n$

例1. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \end{pmatrix}$，其中 a,b,c,d 是互异实数，

那么如下结论中一定成立的是(　　)

(A) $AX=0$只有零解；　(B) $A^TX=0$有非零解；

$\boxed{\text{(C)}\ A^TAX=0\text{有非零解；}}$　(D) $AA^TX=0$有非零解；

分析： $C_{m\times n}X=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow R(C_{m\times n})<n$

a,b,c,d 互异 $\Rightarrow R(A)=R(A^T)=R(AA^T)=R(A^TA)=3$

$A_{3\times 4}$　$A^T_{4\times 3}$　$(A^TA)_{4\times 4}$　$(AA^T)_{3\times 3}$

例2. 非齐次线性方程组 $AX=b$ 中未知量的个数为 n, 方程的个数为 m, 系数矩阵 A 的秩为 r, 则(　　)

(A) $r=m$时, 方程组 $AX=b$ 有解;

(B) $r=n$时, 方程组 $AX=b$ 有惟一解;

(C) $m=n$时, 方程组 $AX=b$ 有惟一解;

(D) $r<n$时, 方程组 $AX=b$ 有无穷多解;

分析:

$$(A)\quad R(A_{m\times n})=m \Rightarrow R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)$$

$$(B)\quad R(A_{m\times n})=n \Rightarrow R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)=n$$

$$(C)\quad m=n \Rightarrow \qquad R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)=n$$

$$(D)\quad R(A_{m\times n})<n \Rightarrow R(A_{m\times n})=R(A_{m\times n},b)<n$$

例3. 设A, A^*都是3阶非零矩阵且$AA^* = O$, 则 $A^*X = 0$

的基础解系含有______个解向量.

分析:

$$\left.\begin{array}{l} AA^* = O \Rightarrow R(A) + R(A^*) \le 3 \\ R(A^*) = \begin{cases} 3, & R(A) = 3, \\ 1, & R(A) = 2, \\ 0, & R(A) \le 1. \end{cases} \\ A \ne O, A^* \ne O \Rightarrow R(A), R(A^*) \ge 1 \end{array}\right\} \Rightarrow R(A^*) = 1$$

$\Rightarrow 3 - R(A^*) = 2 \Rightarrow A^*X = 0$ 的基础解系含有 2个 解向量