

第四章 n 维向量空间

4.3 向量组的秩

何军华

电子科技大学

一、秩与最大无关组的概念

引例. $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关: $2\alpha_1 + 0\alpha_2 - \alpha_3 = 0$

α_1, α_2 线性无关; α_2, α_3 线性无关.

最大无关组

定义. 设向量组 T 的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 满足:

- ◆ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 线性无关;
- ◆ T 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

称 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ 是向量组 T 的一个 最大无关组,

数 r 称为 向量组 T 的秩.

约定: 只含零向量的向量组的秩为0.

例1. 求如下向量组 T 的最大无关组和秩.

$$T: \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

解: α_1, α_2 线性无关: 对应分量不成比例.

任取3个向量: 即选取了所有向量, 线性相关:

$$2\alpha_1 + 0\alpha_2 + (-1)\alpha_3 = 0.$$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2$ 是向量组 T 的最大无关组, T 的秩为 2.

同理, α_2, α_3 也是 T 的最大无关组.

最大无关组一般不惟一, 秩是惟一的, 为什么?

问题: 如何计算一般向量组的最大无关组和秩?

例2. 设向量组 $T: \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

T 线性无关 $\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 T 的最大无关组

$$\Rightarrow \text{秩}(T) = 3$$

$\text{秩}(T) = 3 \Rightarrow T$ 的最大无关组中有3个向量: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$

$\Rightarrow \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关.

◆ 若向量组线性无关, 则: (1) 最大无关组是其自身,
(2) 秩 = 向量个数.

◆ 向量组线性无关(相关) \Leftrightarrow

向量组的秩 = (<) 向量组所含向量数.