第五章 特征值与特征向量

5.3 n维向量空间的正交性

何军华

电子科技大学

回顾

在三维几何空间$\mathbb{R}^3$中：

向量的内积 $\Rightarrow$ 向量的长度

向量的夹角

正交的概念

本节目的

将$\mathbb{R}^3$中的概念推广到$\mathbb{R}^n$中

*Schmidt*正交化方法

正交矩阵

一. 内 积

内积: 设 $\alpha=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta=(b_1, b_2, \cdots, b_n)\in\mathbb{R}^n$,

规定 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=\alpha\beta^T$,

称为α与β的**内积**.

性质: (1) $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

(2) $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$, $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

(2′) $(\alpha,\beta+\gamma)=(\alpha,\beta)+(\alpha,\gamma)$, $(\alpha,k\beta)=k(\alpha,\beta)$;

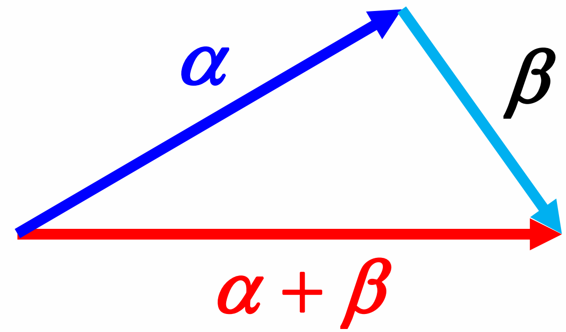
(3) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当$\alpha=0$时等号成立.

长度: $\|\alpha\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} = \sqrt{(\alpha,\alpha)}$

性质:

1^o 非负性 $\|\alpha\| \geq 0$;

2^o 齐次性 $\| k\alpha \| = |k| \cdot \|\alpha\|$;



3^o 三角不等式(*Minkowski*不等式)

$$\|\alpha+\beta\| \leq \|\alpha\| + \|\beta\|.$$

H. Minkowski (1864-1909), 德国数学家

在数论与代数学领域有重要贡献;

为广义相对论奠定了数学基础.

单位向量: $\|\alpha\|=1$: α称为单位向量.

设$\alpha \neq 0$, 令$\alpha_e = \dfrac{1}{\|\alpha\|}\alpha$, 则:

$$\|\alpha_e\| = \sqrt{(\alpha_e, \alpha_e)} = \sqrt{\frac{1}{\|\alpha\|^2}(\alpha, \alpha)} = 1.$$

夹角:

$$\langle\alpha, \beta\rangle = \arccos\frac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}$$: α与β的夹角.

问题: $\left|\dfrac{(\alpha, \beta)}{\|\alpha\|\|\beta\|}\right| \leq 1$?