泰勒公式

一、多项式逼近函数

二、$P_n(x)$的确定

三、余项估计

四、泰勒定理

一、多项式逼近函数

1.设$f(x)$在x_0处连续，则有

$$f(x)=f(x_0)+\alpha$$

$$\lim_{x\to x_0}\alpha=0$$

极限与无穷小的关系

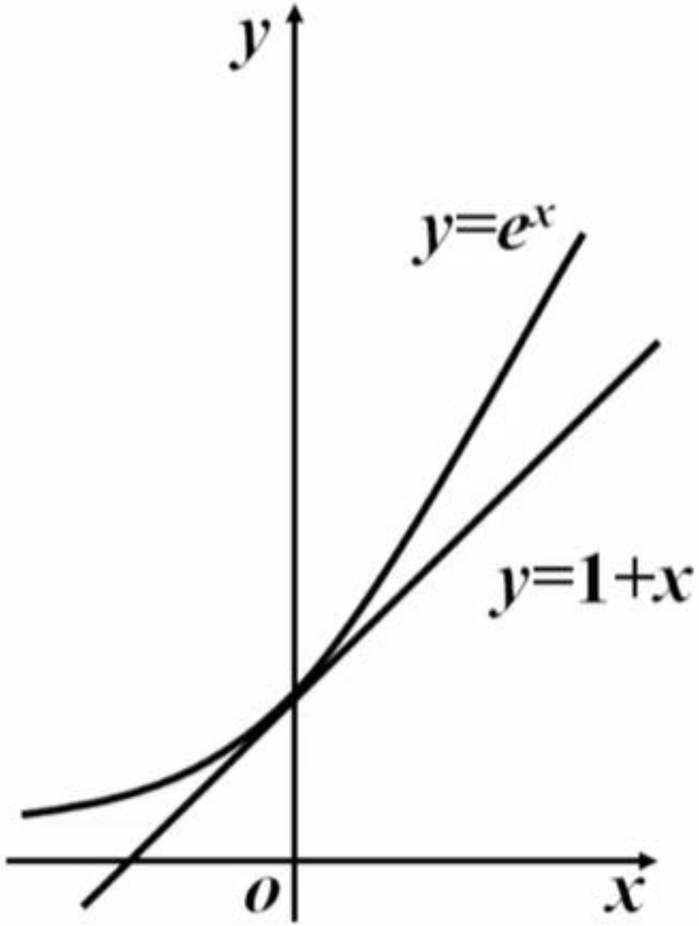
$$f(x)\approx f(x_0)$$

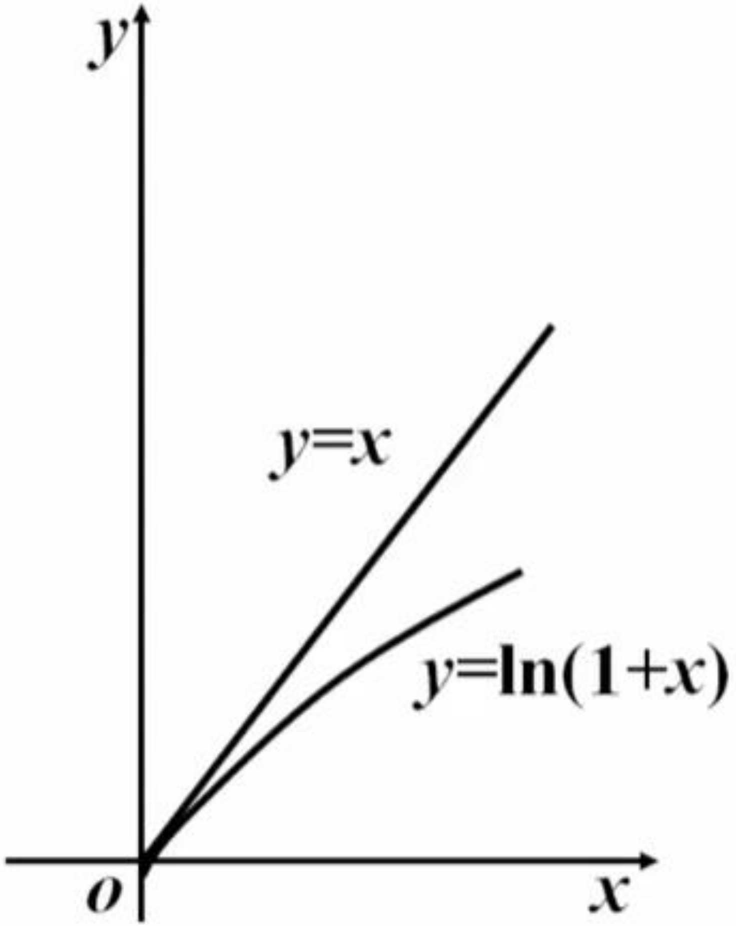
2.设$f(x)$在x_0处可导，则有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

例如：当$|x|$很小时，$e^x\approx 1+x,\ln(1+x)\approx x.$


y
$y=e^x$
$y=1+x$
o
x


y
$y=x$
$y=\ln(1+x)$
o
x

不足：1. 精确度不高；　2. 误差不能估计.

问题：寻找多项式函数$P_n(x)$，使得$f(x) \approx P_n(x)$，误差

$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$可估计.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n$$

设$f(x)$在含有x_0的开区间(a,b)内具有直到$(n+1)$阶导数.

二、 $P_n(x)$ 的确定

分析:

近似程度越来越好

1.若在x_0点相交

$$P_n(x_0)=f(x_0)$$

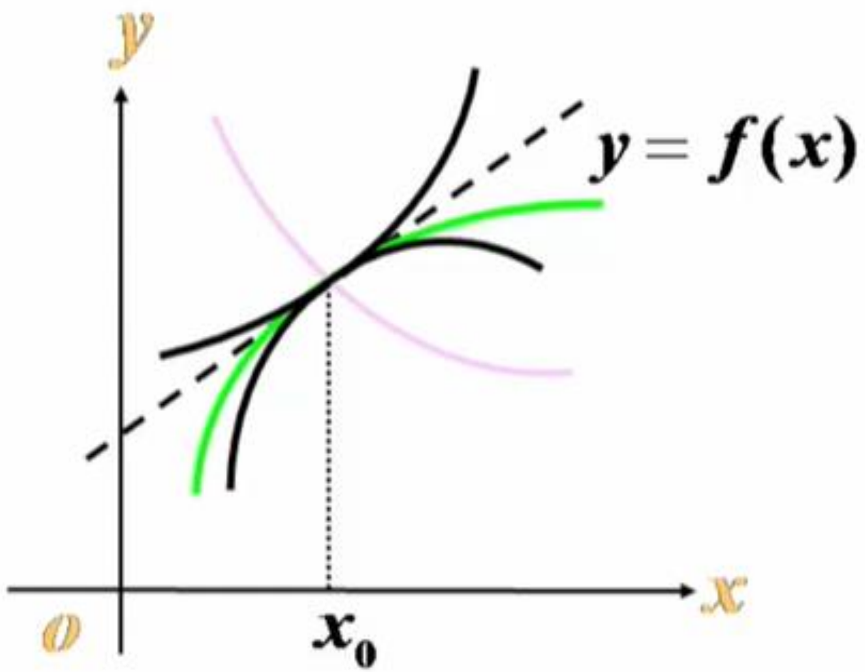
2.若有相同的切线

$$P_n'(x_0)=f'(x_0)$$

3.若弯曲方向相同

$$P_n''(x_0)=f''(x_0)$$

…… ……



$$P_n(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n$$

假设$P_n^{(k)}(x_0)=f^{(k)}(x_0), k=0,1,2,\ldots,n$

$a_0=f(x_0),\ \ 1\cdot a_1=f'(x_0),\ \ 2!a_2=f''(x_0),\ldots,n!a_n=f^{(n)}(x_0),$

得$a_k=\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0),\qquad k=0,1,2,\ldots,n$

代入$P_n(x)$中，得：

$$P_n(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

三、余项估计

令$R_n(x)=f(x)-P_n(x)$,

$$\Rightarrow R_n(x_0)=R_n'(x_0)=\ldots=R_n^{(n)}(x_0)=0,$$

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}-0}=\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}\quad(\xi_1\text{在}x_0\text{与}x\text{之间})$$

两函数$R_n'(x)$及$(n+1)(x-x_0)^n$在以x_0及ξ_1为端点的区间上满足柯西中值定理得条件，得

$$\frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n}=\frac{R_n'(\xi_1)-R_n'(x_0)}{(n+1)(\xi_1-x_0)^n-0}=\frac{R_n''(\xi_2)}{n(n+1)(\xi_2-x_0)^{n-1}}$$

其中，ξ_2在x_0与ξ_1之间.

如此下去，经过$(n+1)$次后，得

$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}=\frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$ (ξ在x_0与ξ_n之间，也在x_0与x之间)

即：$R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ在x_0与x之间)

麦克劳林公式

一、麦克劳林公式

二、求函数的麦克劳林公式

一、麦克劳林(Maclaurin)公式

函数在$x=x_0$的泰勒公式为：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

当$x_0=0$时的泰勒公式称为麦克劳林公式。

即：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

$$+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

二、求函数的麦克劳林公式

1.直接法展开

例1 求$f(x)=e^x$的n阶麦克劳林公式。

解 $\because \quad f'(x)=f''(x)=\cdots=f^{(n)}(x)=e^x,$

$\therefore \quad f(0)=f'(0)=f''(0)=\cdots=f^{(n)}(0)=1$

注意到 $f^{(n+1)}(\theta x)=e^{\theta x}$ 代入公式，得

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<\theta<1).$$

由公式可知 $e^x \approx 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!}$

估计误差 (设 $x > 0$) $|R_n(x)| = \left|\dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| < \dfrac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1)$.

取$x = 1$, $e \approx 1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$

其误差 $|R_n| < \dfrac{e}{(n+1)!} < \dfrac{3}{(n+1)!}$.

例2 求$f(x)=\sin x$的n阶麦克劳林公式。

解 $\because f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)\ (n=1,2,\cdots)$.

$$\therefore\ f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0, & n=2m,\\ (-1)^{m-1}, & n=2m-1,\end{cases}$$

$$f^{(2m+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)=(-1)^m\cos\theta x.$$

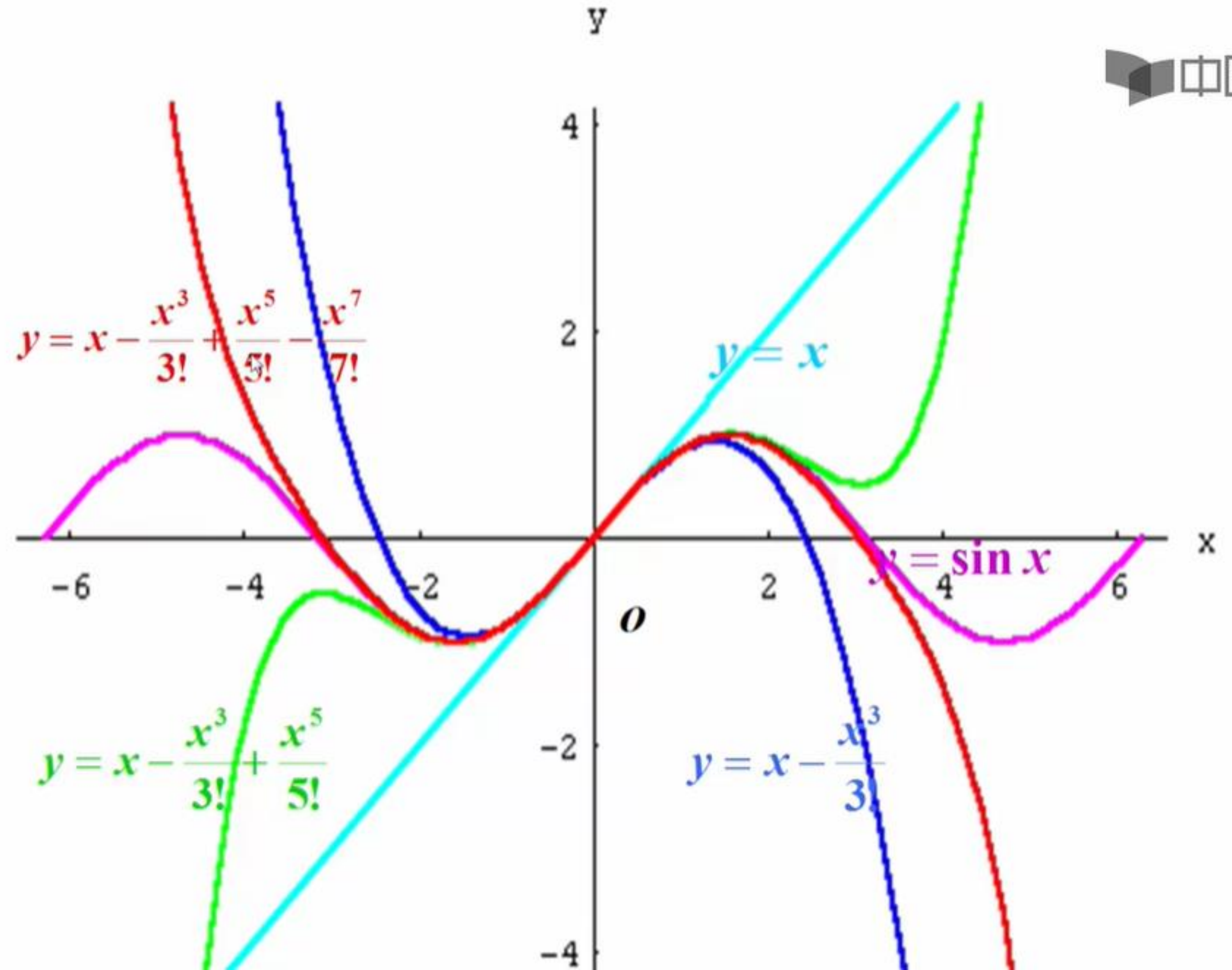
令$n=2m$，得$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$,

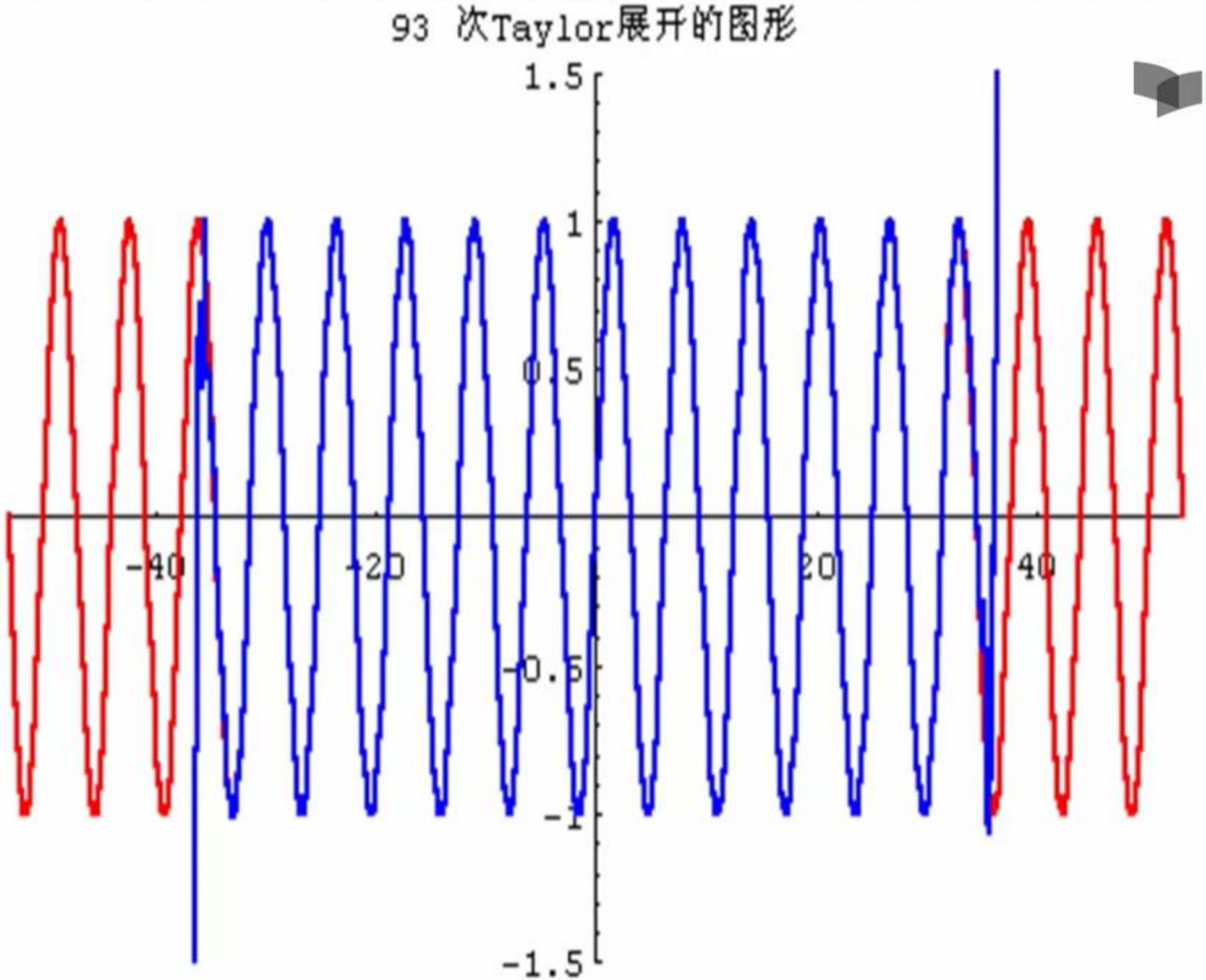
其中 $R_{2m}(x)=\frac{(-1)^m\cos\theta x}{(2m+1)!}x^{2m+1}\quad(0<\theta<1)$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

同理可得:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$


y
x
4
2
-2
-4
-6
6
o
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$
$y = x$
$y = \sin x$
$y = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$
$y = x - \frac{x^3}{3!}$


93 次Taylor展开的图形
1.5
1
0.5
-0.5
-1
-1.5
-40
-20
20
40

例3 求$f(x)=\ln(1+x)$的麦克劳林公式。

解 求$\because$ $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{(1+x)^n}$,

$$\Rightarrow f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=-1,\ f'''(0)=2!,\ldots,$$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-1)!,\ f^{(n+1)}(x)=(-1)^n\frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}},$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$$

$$+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}},\ (0<\theta<1)$$

常用函数的麦克劳林公式

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

2.间接法展开

例4 求$f(x)=e^{-x}$的n阶麦克劳林公式。

解
$$e^{-x}=1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x)^n}{n!}+o(x^n)$$
$$=1-x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{(-x)^n}{n!}+o(x^n)$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

例5 求$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$的$2n$阶麦克劳林公式(皮亚诺型余项)。

解 $\because e^{x}=1+x+\dfrac{x^{2}}{2!}+\dots+\dfrac{x^{n}}{n!}+\dots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^{2}}{2!}+\dots+(-1)^{n}\frac{x^{n}}{n!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

$$\therefore f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+\dots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n}),$$

泰勒公式的应用

一、求高阶导数

二、近似计算

三、求极限

四、证明不等式

一、求高阶导数

例如：$f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\dots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$,

$$\Rightarrow \frac{f^{(2n)}(0)}{(2n)!}=\frac{1}{(2n)!},\quad f^{(2n)}(0)=1.$$

$$g(x)=\frac{1}{x}=1-(x-1)+\dots+(-1)^n(x-1)^n+o[(x-1)^n],$$

$$\Rightarrow \frac{g^{(n)}(1)}{n!}=(-1)^n,\quad g^{(n)}(1)=(-1)^n n!.$$

二、近似计算

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

误差 $|R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \le \frac{M}{(n+1)!}|x|^{n+1}$,

设在包含0和x的某区间内$|f^{(n+1)}(x)| \le M$,

可以解决一下类型的问题:

1) 已知x和误差限，可确定项数n;

2) 已知项数n和x，计算近似值并估计误差;

3) 已知项数n和误差限，确定公式中x的适用范围.

例1 计算无理数e的近似值，使误差不超过10^{-6}.

解 $\because e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + \dfrac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (0<\theta<1)$

$$\therefore e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \qquad (0<\theta<1)$$

$$|R_n(1)| = \left|\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}\right| \le \left|\frac{e}{(n+1)!}\right| \le \frac{3}{(n+1)!} \le 10^{-6},$$

$$\Rightarrow \quad n = 9,$$

$$\therefore e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{9!} = 2.718281.$$

三、求极限

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})$$

三、求极限

例 2 计算 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+2\cos x-3}{x^4}$.

$$\therefore\quad e^{x^2}+2\cos x-3=\left(\frac{1}{2!}+2\cdot\frac{1}{4!}\right)x^4+o(x^4)$$

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{7}{12}$$

四、证明不等式

例3 若$f(x)$在$(0,1)$内二阶可导,且有最小值$\min\limits_{x\in(0,1)} f(x)=0$,

$f(\frac{1}{2})=1$,求证:$\exists\xi\in(0,1)$,使得$f''(\xi)>8$.

证

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

四、证明不等式

例3 若$f(x)$在$(0,1)$内二阶可导，且有最小值$\min\limits_{x\in(0,1)} f(x)=0$，$f(\frac{1}{2})=1$，求证：$\exists\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)>8$.

证　设$\exists x_0\in(0,1)$，使$f(x_0)=\min\limits_{x\in(0,1)} f(x)=0$

则$f'(x_0)=0$，又令$x=\frac{1}{2}$，由已知$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，

由一阶泰勒公式有

$$1=0+0\cdot\left(\frac{1}{2}-x_0\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(\frac{1}{2}-x_0\right)^2 \quad (\xi\text{介于}x_0\text{与}\frac{1}{2}\text{之间})$$

得 $1=\dfrac{f''(\xi)}{2!}\left(\dfrac{1}{2}-x_0\right)^2<\dfrac{f''(\xi)}{2!}\cdot\dfrac{1}{4}$ $\left(\xi\text{介于}\dfrac{1}{2}\text{与}x_0\text{之间}\right)$.

上面等式中因 $\left|\dfrac{1}{2}-x_0\right|<\dfrac{1}{2}$, 所以 $\left(\dfrac{1}{2}-x_0\right)^2<\dfrac{1}{4}$. 即 $f''(\xi)>8$

又因 ξ 在 $\dfrac{1}{2}$ 与 x_0 之间, 所以 $\xi\in(0,1)$.

故 $\exists\,\xi\in(0,1)$, 使得 $f''(\xi)>8$.

例4 若函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)$，$|f''(x)|\le 1$，

证明：$|f'(x)|\le \frac{1}{2}$在区间$(0,1)$内成立。

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$$

$$\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

$$f(0)=f(1),\left|f''(x)\right|\le 1$$

证　在$(0,1)$内任取x_0,应用一阶泰勒公式, 将$f(x)$在x_0处展开：

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi)(x-x_0)^2$$

(ξ介于x_0与x之间)

分别用$x=0,x=1$代入上式有：

$$f(0)=f(x_0)-f'(x_0)x_0+\frac{1}{2!}f''(\xi_1)x_0^2\quad(0<\xi_1<x_0),$$

$$f(1)=f(x_0)+f'(x_0)(1-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\xi_2)(1-x_0)^2\quad(x_0<\xi_2<1).$$

$f(0)=f(1),|f''(x)|\le 1$,证明：$|f'(x)|\le \frac{1}{2}$

因$f(0)=f(1)$，将上面两式相减有：

$$f'(x_0)=\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2-\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2,$$

因$|f''(x)|\le 1$，所以 $|f'(x_0)|\le \frac{1}{2}|f''(\xi_1)x_0^2|+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)(1-x_0)^2|$

$$\le \frac{1}{2}x_0^2+\frac{1}{2}(1-x_0)^2=\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}.$$

又由$x_0\in(0,1)$知，$\left|x_0-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2}$，于是有 $|f'(x_0)|\le \frac{1}{2}$.

由x_0的任意性，故对$\forall x\in(0,1)$，有$|f'(x)|\le \frac{1}{2}$成立.

例5 若$f(x)$在$[a,b]$上具有n阶导数，且$f(a)=f(b)=f'(b)=f''(b)$

$=\ldots=f^{(n-1)}(b)=0$,则$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f^{(n)}(\xi)=0$.

证 将$f(x)$在$x=b$处展开

$$f(x)=f(b)+f'(b)(x-b)+\frac{1}{2!}f''(b)(x-b)^2+$$

$$\cdots+\frac{1}{(n-1)!}f^{(n-1)}(b)(x-b)^{n-1}+\frac{1}{n!}f^{n}(\xi)(x-b)^{n}.$$

其中$\xi\in(a,b)$.