二、向量组之间的线性表出

1. 定义与性质

向量组 I: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$； II: $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$；

若组I中每一个向量都可由组II中的向量线性表出，

则称组I可由组II线性表出.

若组I与组 II可以互相线性表出，则称组I与组II等价.

向量组等价的性质:

反身性：每一向量组都与自身等价；

对称性： I与II等价，则II与I等价；

传递性： I与II等价，II与III等价，则I与III等价.

2. 向量组线性表出的矩阵形式:

设向量组II: $b_1, \ldots, b_s$ 可由I: $a_1, \ldots, a_r$线性表出, 则:

$$b_1 = k_{11}a_1 + k_{21}a_2 + \cdots + k_{r1}a_r$$

$$b_2 = k_{12}a_1 + k_{22}a_2 + \cdots + k_{r2}a_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_s = k_{1s}a_1 + k_{2s}a_2 + \cdots + k_{rs}a_r$$

$$\Rightarrow (b_1, b_2, \cdots, b_s) = (a_1, a_2, \cdots, a_r)\underbrace{\begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1s} \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_{r1} & k_{r2} & \cdots & k_{rs} \end{pmatrix}}_{K_{r\times s}}$$

线性表出的
系数矩阵

3. 矩阵乘积导出的线性表出

设 $A_{m\times r}B_{r\times s}=C_{m\times s}$, 写成分块矩阵形式:

$$(a_1,a_2,\cdots,a_r)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$$

$$\Rightarrow c_1=b_{11}a_1+b_{21}a_2+\cdots+b_{r1}a_r$$

$$c_2=b_{12}a_1+b_{22}a_2+\cdots+b_{r2}a_r$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_s=b_{1s}a_1+b_{2s}a_2+\cdots+b_{rs}a_r$$

因此, 乘积C的列向量组可由A的列向量组线性表出.

对称的, 乘积C的行向量组可由B的行向量组线性表出.