二. 向量组之间的线性表出

- 组 I 可由组 II **线性表出**, 则: $R(\mathrm{I}) \le R(\mathrm{II})$
- 组 I 与组 II **等价**, 则: $R(\mathrm{I}) = R(\mathrm{II})$
- **同型矩阵 A, B 的行向量组等价**, 则: A, B 等价

A, B 等价 $\not\Rightarrow$ A, B 的行向量组等价.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A 与 I 等价 $\Rightarrow \exists C, s.t. CA = I$

$\Rightarrow$ A 与 I 的行向量组等价.

◆ 已知线性无关的n维向量组：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)C_{r\times s}$$

(1) $\mathrm{R}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=\mathrm{R}(C)$;

(2) $r=s$：$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_r$ 线性无关 $\Leftrightarrow |C|\neq 0 \Leftrightarrow C$可逆

证：$\underbrace{(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)}_{B}=\underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r)}_{A}C_{r\times s} \Rightarrow B_{n\times s}=A_{n\times r}C_{r\times s}$

$$\Rightarrow R(B)\le R(C)$$

$$\left.\begin{array}{r} R(A_{n\times r})=r \Rightarrow \exists D_{r\times n},\ s.t.\ DA=I_r \\ B=AC \end{array}\right\} \Rightarrow DB=DAC=C$$

$$\Rightarrow R(B)\ge R(C)$$

例1. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则如下向量组中线性相关的是(　　)

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$;

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$; (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$;

分析: 对应矩阵的行列式为0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-7 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=9$$

例1. 已知向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，则如下向量组中线性相关的是(　　)

(A) $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$;　(B) $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$;

(C) $\alpha_1-2\alpha_2,\alpha_2-2\alpha_3,\alpha_3-2\alpha_1$; (D) $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2+2\alpha_3,\alpha_3+2\alpha_1$;

特殊值法: 令 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

问题转化为：判断4个具体向量组的线性无关问题，

计算各向量组相应矩阵行列式即可.

例2. 设向量组 α,β,γ 与数 k,l,m 满足 $k\alpha+l\beta+m\gamma=0$

$km\neq 0$, 则(　　　)

(A) α,β 与 α,γ $\boxed{\text{等价}}$　　(B) α,β 与 β,γ $\boxed{\text{等价}}$

(C) α,γ 与 β,γ $\boxed{\text{等价}}$　　(D) α 与 β $\boxed{\text{等价}}$

分析:

- 向量组I, II等价 $\Leftrightarrow$ I, II能相互线性表出
- α_i 可由 $\alpha_1,\cdots,\alpha_i,\cdots,\alpha_r$ 线性表示

$$\alpha_i=0\alpha_1+\cdots+0\,\alpha_{i-1}+1\alpha_i+0\,\alpha_{i+1}+\cdots+0\,\alpha_r$$

- $$\left.\begin{array}{r} k_1\alpha_1+\cdots+k_i\alpha_i+\cdots+k_r\alpha_r=0 \\ k_i\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

α_i 可由其余向量线性表示

例2. 设向量组 α,β,γ 与数 k,l,m 满足 $\boxed{k\alpha+l\beta+m\gamma=0}$

$\boxed{km\neq 0,}$ 则(　　　)

(A) α,β 与 α,γ 等价　　　$\boxed{\text{(B) } \alpha,\beta \text{ 与 } \beta,\gamma \text{ 等价}}$

(C) α,γ 与 β,γ 等价　　　(D) α与β等价

分析:

$$\left.\begin{array}{r} k\alpha+l\beta+m\gamma=0 \\ km\neq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \alpha \text{ 可由 } \beta,\gamma \text{ 线性表示} \\ \beta \text{ 可由 } \beta,\gamma \text{ 线性表示} \\ \gamma \text{ 可由 } \alpha,\beta \text{ 线性表示} \end{array}\right\}$$

β可由α,β 线性表示

$\Rightarrow \alpha,\beta$ 与 β,γ 等价

例3. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\,(s\geq 3)$ 线性无关, 且向量组

$$\beta_1=\alpha_1+t\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+t\alpha_3,\cdots,\beta_{s-1}=\alpha_{s-1}+t\alpha_s,\beta_s=\alpha_s+t\alpha_1$$

线性相关, 求 s 和 t 满足的条件.

解:

$$\underbrace{\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)}_{B}=\underbrace{\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & & & & t\\ t & 1 & & & \\ & t & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & t & 1\end{pmatrix}}_{C}$$

$$|C|=1+(-1)^{s+1}t^s\begin{cases}=0, & s\text{为偶且}t=\pm1\\ =0, & s\text{为奇且}t=-1\\ \neq 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性相关 $\Leftrightarrow |C|=0$

$\Leftrightarrow \left[s\text{为偶且}t=\pm1\right]$或$\left[s\text{为奇且}t=-1\right]$