第四讲 空间直线

- 空间直线的方程
  1. 点向式方程
  2. 参数式方程
  3. 一般式方程
- 点到直线的距离
- 直线与直线的位置关系
- 直线与平面的位置关系
- 内容小结

第四讲 空间直线

- 空间直线的方程
  1. 点向式方程
  2. 参数式方程
  3. 一般式方程

  点到直线的距离

  直线与直线的位置关系

  直线与平面的位置关系

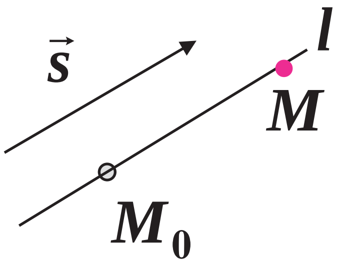
  内容小结

一、空间直线的方程

1. 点向式方程

设直线l过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$且与$\vec{s}=(m,\ n,\ p)$平行，

$\vec{s}$称为l的**方向向量.**



$\forall M(x,y,z)\in l,$

则 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)//\vec{s}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

点向式方程.

（对称式方程）

直线的一组方向数

$\vec{s}$ 的方向余弦也叫直线的**方向余弦.**

特别地，当方向向量有一个分量为零时，比如 $m=0$

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

理解为 $\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$，即直线在平面 $x=x_0$ 上.

例1 设直线 l 经过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求 l 的方程。

解 l 的方向向量: $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

故 l 的方程为 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (两点式方程)

例 2 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$，直线的方向向量为

$$\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,0,4)$$

所求直线方程

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

2. 参数式方程

令 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

则 $$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

方向向量

点

这是直线 l 的参数式方程，t 称为参数，不同的 t 对应于 l 上不同的点。

直线的参数方程可将三个变量化为一个变量，有利于解方程(组)。

例3 设直线 l 经过点 $M(3,\ 4,\ -4)$，$\vec{s}$ 是 l 的方向向量，$\vec{s}$ 的方向角为 $\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{2\pi}{3}$，求 l 的方程。

解 $\vec{e}_s = (\cos\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{2\pi}{3}) = (\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2})$

取 $\vec{s} = (1,\ \sqrt{2},\ -1)$

则 l 的方程为：
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 4 + \sqrt{2}t \\ z = -4 - t \end{cases}$$

例 4 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$ 垂直相交的直线方程.

解 先作一过点 M 且与已知直线垂直的平面 π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点 N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$，交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为 $\dfrac{x-2}{2}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-3}{4}$.

主要内容

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程

练习 求点$(-1, 2, 0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

答案: $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

内容小结

3. 一般式方程

直线可看成两个平面的的交线，

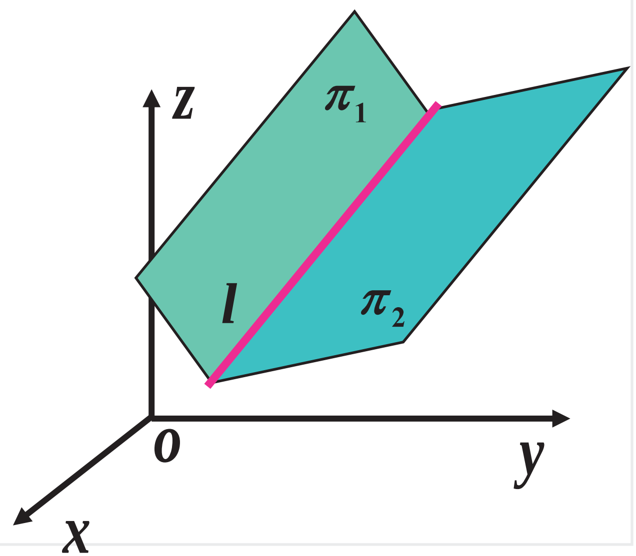
$$l:\ \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad \vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

这个方程组称为直线 l 的一般式方程。

例1 将直线 l 的一般式方程

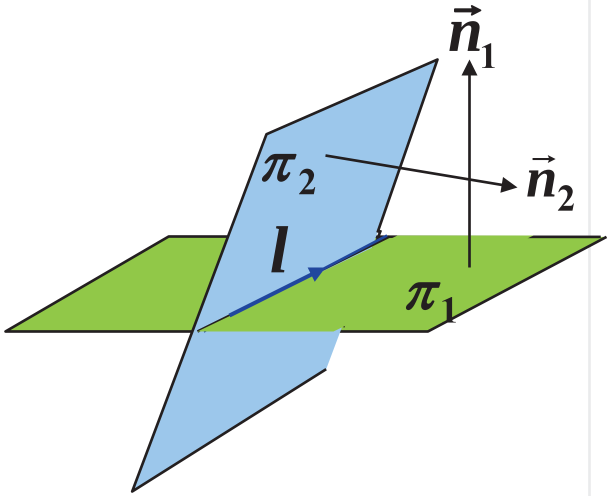
$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

化为点向式方程。



解一　(1)求定点，在$\begin{cases}4x+3y-z+5=0\\3x+2y+2z+1=0\end{cases}$中

取 $z=1$，则 $\begin{cases}4x+3y=-4\\3x+2y=-3\end{cases}$



解得：$x=-1$，$y=0$，$z=1$

两个平面的的法向量分别为

$\vec{n}_1=(4,\ 3,\ -1)$，$\vec{n}_2=(3,\ 2,\ 2)$

l 的方向向量：$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&3&-1\\3&2&2\end{vmatrix}=(8,-11,-1)$

则 l 的方程为 $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-1}$

$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

解二 再求一个定点

取 $z=0$，则 $\begin{cases} 4x+3y=-5 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$

解得：$x=7$，$y=-11$，$z=0$

即得两个点 $M(-1,0,1)$，$N(7,-11,0)$

则 l 的方程为

$$\frac{x+1}{7-(-1)}=\frac{y}{-11-0}=\frac{z-1}{0-1}$$

即 $$\frac{x+1}{8}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{-1}$$

解三 (消去法)

$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

消去 x,

$$z=\frac{y+11}{11}$$

消去 y,

$$z=\frac{x-7}{-8}$$

则 l 的方程为

$$\frac{x-7}{-8}=\frac{y+11}{11}=\frac{z}{1}$$

解四（用高斯消元法——行初等变换）

$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 11 & 11 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x=7-8z \\ y=-11+11z \end{cases} \xRightarrow{\text{令}z=t} \text{参数式：} \begin{cases} x=7-8t \\ y=-11+11t. \\ z=t \end{cases}$$

点向式：$\dfrac{x-7}{-8}=\dfrac{y+11}{11}=\dfrac{z}{1}$.

注： (1) 由于点以及方向向量的选取不同，直线的方程形式也不同，但方向向量始终是平行的(对应分量成比例).

(2) 将直线上的点视为方程组(一般式方程)的解集，则方程组作任意的同解变形，仍然表示同一条直线.

二、点到直线的距离

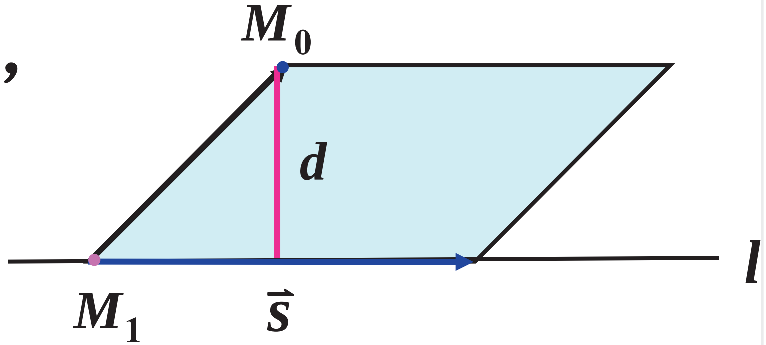
设 l: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$是空间上任意点，求其到 l 的距离 d.

如图，设$M_1(x_1, y_1, z_1)$是直线l 上任意一确定的点，

$\vec{s}=(m,n,p)$ 是 l 的方向向量，

以 $\vec{s}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为邻边的平行四边形面积：



$$S=\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|=d\left\|\vec{s}\right\|,\quad \therefore d=\frac{\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|}{\left\|\vec{s}\right\|}$$

例2 求点 $M_0(1,\ 2,\ 1)$ 到直线

$$l:\ \begin{cases} x+y=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$$

的距离。

解 消去 x： $\dfrac{z}{2}=y+1$

消去 y： $\dfrac{z}{-2}=x-1$

则 l 的方程为 $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z}{-2}$

直线过点 $M_1(1,\ -1,\ 0)$，方向向量 $\vec{s}=(1,\ -1,\ -2)$，

则

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=(5,\ -1,\ 3)$$

点M_0到直线 l 的距离：

$$d=\frac{\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|}{\left\|\vec{s}\right\|}=\frac{\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\sqrt{\frac{35}{6}}$$

主要内容

1. 直线的一般式方程

2. 点到直线的距离

练习：(1) 用对称式方程及参数方程表示直线 L:

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$$

(2) 求原点到直线 L 的距离.

答案：(1) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$, $\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$

(2) $\sqrt{\dfrac{19}{7}}$.

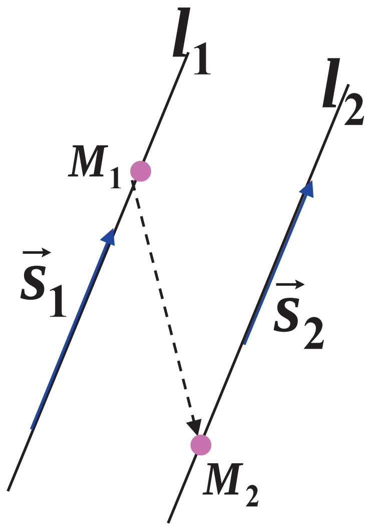
第四讲 空间直线

空间直线的方程
1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程
点到直线的距离
直线与直线的位置关系
直线与平面的位置关系
内容小结

三、直线与直线的位置关系

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$



它们的方向向量分别为

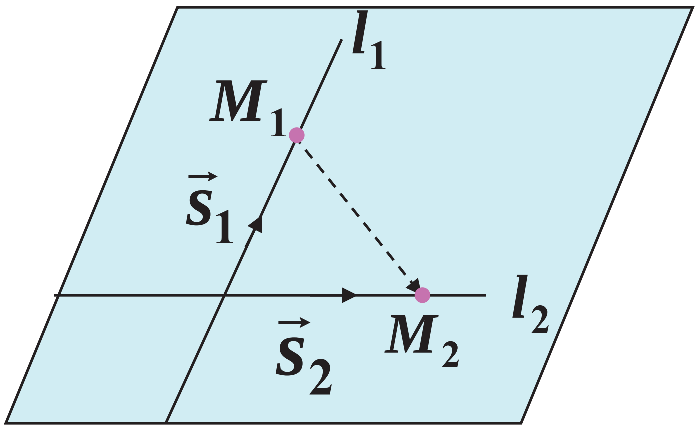
$$\vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1) \quad \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

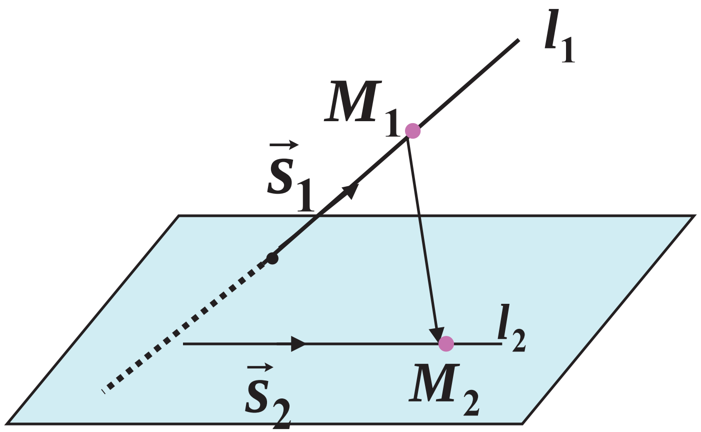
分别过点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

(1) l_1与l_2平行(不重合)$\Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2 \not\parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

(2) l_1与l_2重合$\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1 // \vec{s}_2 // \overrightarrow{M_1M_2}$

(3) l_1与l_2相交$\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$且$[\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}] = 0$；



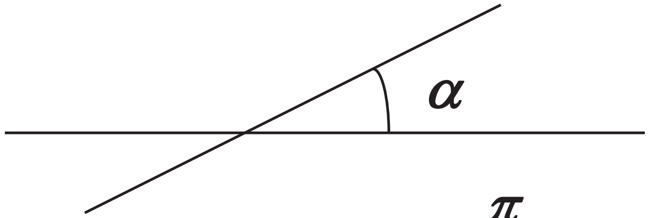


(4) l_1与l_2异面$\Leftrightarrow$ $[\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq 0$；

注： (1)---(3)均属于两直线共面的情况.

两直线的方向向量所成角中最小者(锐角)称为两直线的夹角。

两直线的夹角与它们方向向量的夹角要么相等要么互补。



$0 \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$

设两直线的夹角为α：

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\| \cdot \|\vec{s}_2\|} = \frac{|m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

则 $l_1 \perp l_2 \iff \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \quad (m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0)$

例1 判定两直线

$$l_1: x = y = z - 4, \qquad l_2: -x = y = z$$

的位置关系.

解 它们的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (1,\ 1,\ 1) \qquad \vec{s}_2 = (-1,\ 1,\ 1)$$

分别过点 $M_1 = (0,\ 0,\ 4)$, $M_2 = (0,\ 0,\ 0)$

因为 $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$ 且

$$[\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

则l_1与l_2异面.

例 2 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为 $\vec{s}=(m,\ n,\ p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

主要内容

直线与直线的位置关系

练习： 求过点$M(2,1,3)$且与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

垂直相交的直线方程.

答案： $$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$

第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

内容小结

三、直线与平面的位置关系

直线 l: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

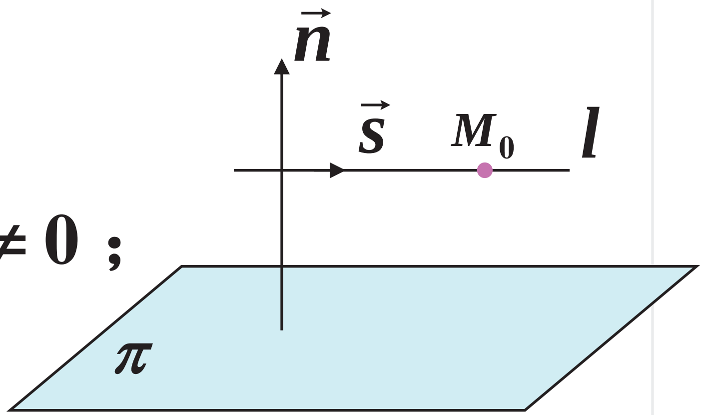
平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$

直线的方向向量：$\vec{s}=(m，n，p)$，点$M_0(x_0，y_0，z_0)$，

平面的法向量：$\vec{n}=(A，B，C)$.

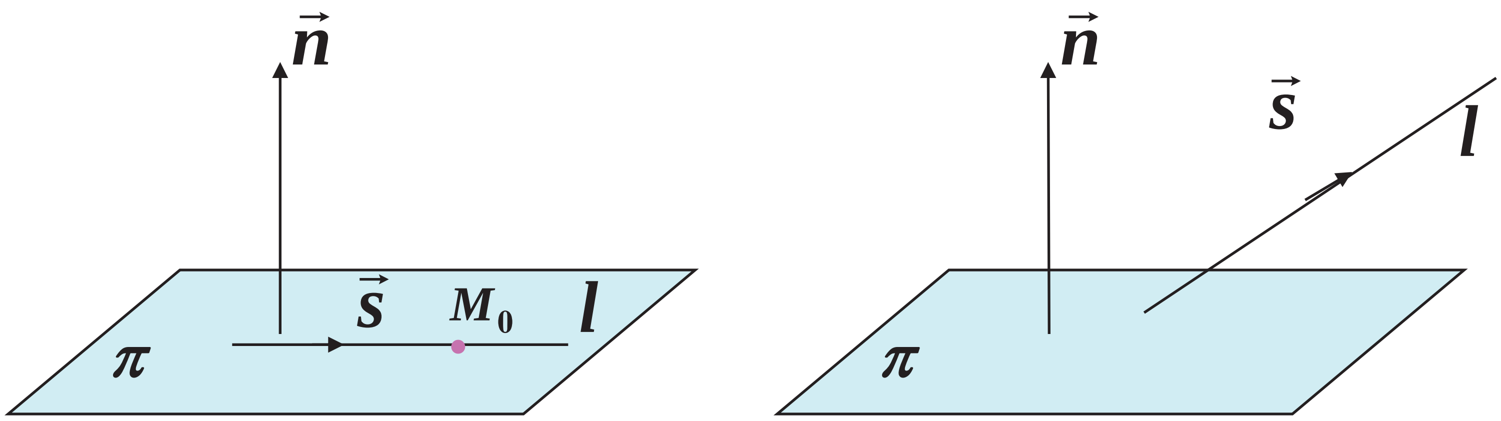
(1) l与π平行$\Leftrightarrow$

$\vec{s}\cdot\vec{n}=0$ 但 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$；



(2) $l \subset \pi \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$;

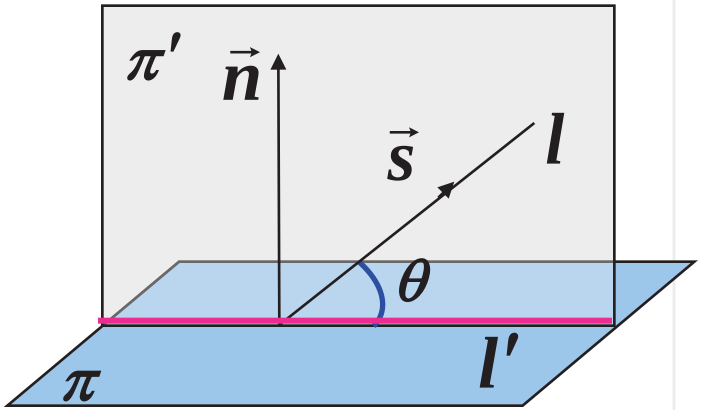
(共面)



(3) l与π相交 $\Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0.$

l与π的夹角:

过 l 作一平面 π' 与 π 垂直，则 π' 与 π 的交线 l' 称为 l 在 π 上的**投影**。



l 与 l' 的夹角 θ 称为**l 与 π 的夹角.**

则

$$\theta=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-\langle\vec{s},\ \vec{n}\rangle, & \langle\vec{s},\ \vec{n}\rangle\le\dfrac{\pi}{2}\\ \langle\vec{s},\ \vec{n}\rangle-\dfrac{\pi}{2}, & \langle\vec{s},\ \vec{n}\rangle>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

从而 $$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

例1 判定直线 l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$

与平面 π: $x+4y-z-1=0$

的位置关系，若相交则求出交点与夹角.

解 直线的方向向量 $\vec{s}=(1,\ -2,\ 2)$,

平面的法向量 $\vec{n}=(1,\ 4,\ -1)$,

由 $\vec{s}\cdot\vec{n}=-9\neq 0 \Rightarrow$ 直线与平面相交.

(1) 设二者夹角为θ，则

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{|-9|}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}},\quad \text{则}\quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 直线 l 的参数方程：

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

代入 π： $x + 4y - z - 1 = 0$ 得：

$$-9t - 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{8}{9}$$

将其代入直线参数方程得

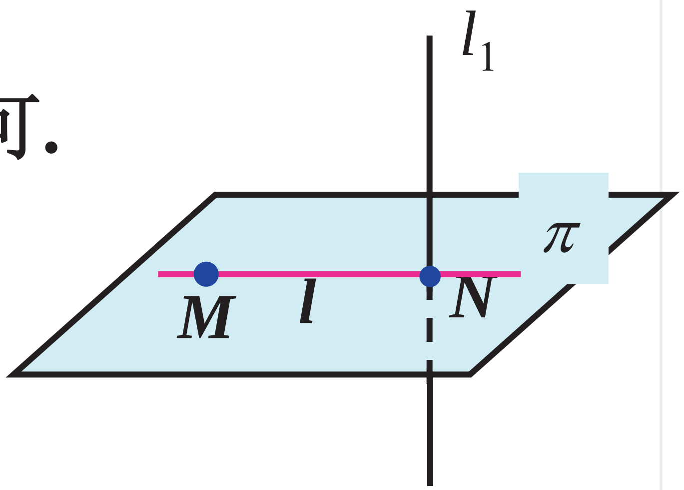
$$x = \frac{1}{9}, \quad y = -\frac{2}{9}, \quad z = -\frac{16}{9}$$

故交点为 $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{16}{9})$.

例2 直线l过点$M(2,5,-2)$且与直线

$$l_1:\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \end{cases}$$

垂直相交，求l的方程.



解 只需求出交点N的坐标即可.

过M作平面π与l_1垂直，

π与l_1的交点即为N.

l_1的方向向量 $$\vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}.$$

过$M(2,5,-2)$且与l垂直的平面

$$\pi:\ -9(x-2)+5(y-5)+7(z+2)=0.$$

$$9x-5y-7z-7=0. \qquad (1)$$

将直线l_1与π的方程联立：

$$\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \\ 9x-y-7z-7=0 \end{cases} \qquad \overline{A} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

解得：$x=1, y=-1, z=1.$

这就是l_1与π的交点N的坐标$(1,-1,1)$.

直线l的方向向量 $\vec{s}=\overrightarrow{MN}=(-1,-6,3)$.

l的方程 $$\frac{x-2}{-1}=\frac{y-5}{-6}=\frac{z+2}{3}.$$

注： 在求交点N的坐标时，也可将l_1化为的参数方程:

$$\begin{cases} x=1-9t \\ y=-1+5t \\ z=1+7t \end{cases} \qquad (2)$$

代如平面方程(1)而求得

平面束

设直线 l 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \cdots\cdots(1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \cdots\cdots(2) \end{cases}$$

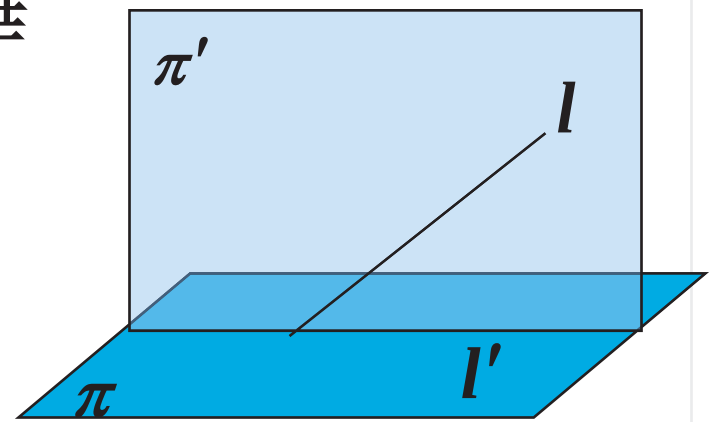
则除(2)所表示的平面外，经过直线 l 的所有平面都可以由下式表示

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad （3）$$

经过直线 l 的全体平面称为过直线 l 的平面束，方程(3)称为经过直线 l 的平面束方程。

例3 求直线 l: $\frac{x-4}{4}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z-2}{3}$ 在平面 π: $2x+2y+z-11=0$ 上的投影 l'.

解1 过直线l 作一平面π'与π垂直，则 π'与π的交线 l'就是l 在π上的投影.



改写 l 的方程为

$$l:\ \begin{cases}\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-5}{-1}\\[2mm] \dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-3}{3}\end{cases}\quad \text{即}\quad l:\ \begin{cases}x+4y-24=0\\ 3y+z-17=0\end{cases}$$

经过直线 l 的平面束方程：$x+4y-24+\lambda(3y+z-17)=0$

整理得 $\pi':\ x+(4+3\lambda)y+\lambda z-(24+17\lambda)=0$

由 $\pi'\perp\pi \Rightarrow (2,\ 2,\ 1)\cdot(1,\ 4+3\lambda,\ \lambda)=0$

解得：$\lambda=-\dfrac{10}{7}$

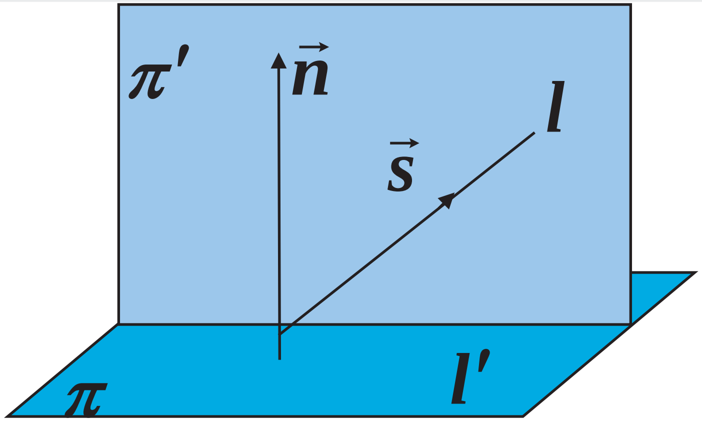
代入 $\pi':\ x+(4+3\lambda)y+\lambda z-(24+17\lambda)=0$

化简：$\pi':\ 7x-2y-10z+2=0$

从而投影直线为：

$$l':\ \begin{cases} 7x-2y-10z+2=0 \\ 2x+2y+z-11=0 \end{cases}$$

解2　如图



π' 的法向：

$$\vec{n}' = \vec{s}\times\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7,\ 2,\ 10)$$

则 $\pi' : -7(x-4)+2(y-5)+10(z-2)=0$

即 $\pi' : 7x-2y-10z+2=0$

从而投影直线为 $l' : \begin{cases} 7x-2y-10z+2=0 \\ 2x+2y+z-11=0 \end{cases}$

主要内容

1. 直线与平面的位置关系

2. 平面束

练习：1. 求过点$P(-1,1,2)$及直线$l:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{0}$的平面方程.

2. 过点$M(-1,0,4)$引直线l，使它平行于平面$3x-4y+z-10=0$，且与直线$l_1:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交.

答案：1. $4x+6y+3z-8=0$;

2. $\dfrac{x+1}{48}=\dfrac{y}{37}=\dfrac{z-4}{4}$.

第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

➤ 内容小结

小　结

1. 空间直线的方程

(1) 点向式方程

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

点：$M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向：$\vec{s}=(m,n,p)$.

(2) 参数式方程

$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

点　方向向量

(3) 一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad \vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

2. 点到直线的距离

点$M_1(x_1, y_1, z_1)$到直线 $l: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

的距离： $$d=\frac{\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|}{\|\vec{s}\|}$$

其中$M_0(x_0,y_0,z_0)$, $\vec{s}=(m,n,p)$.

3. 直线与直线的位置关系

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \qquad \vec{s}_1=(m_1, \ n_1, \ p_1)$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2} \qquad \vec{s}_2=(m_2, \ n_2, \ p_2)$$

点: $M_1(x_1, \ y_1, \ z_1)$, $M_2(x_2, \ y_2, \ z_2)$

(1) l_1与l_2平行 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 \not\parallel \overrightarrow{M_1M_2}$

(2) l_1与l_2重合 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 /\!/ \vec{s}_2 /\!/ \overrightarrow{M_1M_2}$

(3) l_1与l_2相交 $\Leftrightarrow \vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$ 且 $[\vec{s}_1, \ \vec{s}_2, \ \overrightarrow{M_1M_2}]=0$;

(4) l_1与l_2异面 $\Leftrightarrow [\vec{s}_1, \ \vec{s}_2, \ \overrightarrow{M_1M_2}]\neq 0$;

(1)---(3)均属于两直线共面的情况.

设两直线的夹角为α，则

$$\cos\alpha=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\|\cdot\|\vec{s}_2\|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$

$$l_1\perp l_2\Leftrightarrow\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0\quad(m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0)$$

4. 直线与平面的位置关系

$$l:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}\qquad\vec{s}=(m,\ n,\ p),$$

$$\pi:Ax+By+cz+D=0\qquad\vec{n}=(A,\ B,\ C).$$

(1) l与π平行$\Leftrightarrow\ \vec{s}\cdot\vec{n}=0$但$Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq0$；

(2) $l\subset\pi\Leftrightarrow\ \vec{s}\cdot\vec{n}=0$且$Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$；

(3) l 与 π 相交 $\Leftrightarrow \vec{s}\cdot\vec{n}\neq 0.$

l 与 π 的夹角：

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

5. 平面束

$$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$$

经过直线 l 的所有平面:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$