第四章 n维向量空间

4.3 向量组的秩

何军华

电子科技大学

一、秩与最大无关组的概念

引例. $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性相关： $2\alpha_1+0\alpha_2-\alpha_3=0$

α_1,α_2 线性无关； α_2,α_3 线性无关.

最大无关组

定义. 设向量组 T 的部分向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 满足:

- $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性无关;
- T中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

称 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 是向量组 T 的一个**最大无关组**,

数 r 称为**向量组T的秩**.

约定: 只含零向量的向量组的秩为0.

例1. 求如下向量组 T 的最大无关组和秩.

$$T: \alpha_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \alpha_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \alpha_3=\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}.$$

解: α_1,α_2线性无关: 对应分量不成比例.

任取3个向量: 即选取了所有向量, 线性相关:

$$2\alpha_1+0\alpha_2+(-1)\alpha_3=0.$$

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$ 是向量组T的最大无关组, T 的秩为 2.

同理, α_2,α_3 也是 T 的最大无关组.

最大无关组一般不惟一, 秩是惟一的, 为什么?

问题: 如何计算一般向量组的最大无关组和秩?

例2. 设向量组 $T:\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

T线性无关 $\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是$T$的最大无关组

$\Rightarrow$ 秩$(T)=3$

秩$(T)=3\Rightarrow$ T的最大无关组中有3个向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$

$\Rightarrow$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关.

◆ 若向量组线性无关, 则: (1) 最大无关组是其自身,

(2) 秩 = 向量个数.

◆ 向量组线性无关(相关) $\Leftrightarrow$

向量组的秩 = (<)向量组所含向量数.

二、矩阵的列秩和行秩

例3. 求行最简形矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的秩，

行秩(即行向量组的秩)和列秩(即列向量组的秩).

解: $R(A)=$ 行最简形中非零行的行数 $=2$.

A的行向量组:

$$\alpha_1=(1,2,0,4),\ \alpha_2=(0,0,1,3),\ \alpha_3=(0,0,0,0)$$

显然α_1,α_2线性无关, A的行向量组可由α_1,α_2线性表示,

$\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2$是行向量组的一个最大无关组$\Rightarrow A$的行秩$=2$

例3. 求行最简形矩阵$A=\begin{pmatrix}1&2&0&4\\0&0&1&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$的秩，行秩和列秩.

解:

A的列向量组: $\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}$

显然β_1,β_2线性无关，其它列都可由β_1,β_2线性表示:

$$\beta_2=2\beta_1,\ \beta_4=4\beta_1+3\beta_2.$$

$\Rightarrow\beta_1,\beta_2$是$A$列组的一个最大无关组$\Rightarrow$ A的列秩$=2$

问题: 对一般的矩阵，秩=列秩=行秩?

设 $A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B,\ 1 \le k \le n$

任取 A 的 k 列, 构成子矩阵 A_k,

相应选取 B 中相同的 k 个列, 构成子矩阵 B_k. 则:

$$A_k \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B_k,$$

行变换是方程组的同解变换, $A_k X = 0$ 与 $B_k X = 0$ 同解.

因此:

$$A_k X = 0 \text{有非零解} \Leftrightarrow B_k X = 0 \text{有非零解}$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$$

A_k 的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ B_k 的列向量组线性相关

逆否命题:

A_k 的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ B_k 的列向量组线性无关

$$A \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B,\quad A_k \xrightarrow{\text{有限次初等行变换}} B_k,$$

A_k的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow$ B_k的列向量组线性相关

逆否命题:

A_k的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow$ B_k的列向量组线性无关

进而: A_k的列组是A列组的最大无关组

$\Leftrightarrow$ B_k的列组是B列组的最大无关组

A的列秩 $= k$ $\Leftrightarrow$ A的列秩 $= k$

初等行变换不改变:

方程组的**解**, **列向量间的线性表出关系式**,

线性相关性, **最大无关组**, **列秩**.

定理2. 任一矩阵的秩，行秩和列秩相等.

证： 设 $\mathrm{R}(A)=r$, A经由初等行变换化为行最简形 B:

$$A \to \cdots \to B = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & a & 0 & c \\ 0 & \boxed{1} & b & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & e \\ \cdots & \cdots & O & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

B非零行首元1对应的 r 个列向量，恰为向量$\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_r$，线性无关，显然$B$的其它列可由这些列线性表示.

是B列组的最大无关组.

A中与B的这 r 个列对应的列是A列组的最大无关组.

A的列秩 $=$ B的列秩 $=\mathrm{R}(B)=\mathrm{R}(A)=r$

A的行秩 $=$ A^T的列秩 $=\mathrm{R}(A^T)=\mathrm{R}(A)=r$

例4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & -6 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 6 & -9 & 7 & 9 \end{pmatrix}$

试求A列向量组的秩和一个最大无关组,

并将其它列向量用最大无关组线性表示.

分析: 初等行变换不改变列组的秩, 最大无关组,

也不改变列组间的线性表示式,

将A经初等行变换化为行最简形B,

观察 B 的列向量组即可.

解:

$$A=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}=B$$

$$\begin{array}{ccccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3&\alpha_4&\alpha_5\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccccc}\beta_1&\beta_2&\beta_3&\beta_4&\beta_5\end{array}$$

显然, $\beta_1=\varepsilon_1,\beta_2=\varepsilon_2,\beta_4=\varepsilon_3$ 是矩阵B列组的最大无关组,

且B的其它列向量可由这3个列线性表示为:

$$\beta_3=-\beta_1-\beta_2,\ \beta_5=4\beta_1+3\beta_2-3\beta_4.$$

因此A的列秩为3, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 是A列组的一个最大无关组,

$$\alpha_3=-\alpha_1-\alpha_2,\ \alpha_5=4\alpha_1+3\alpha_2-3\alpha_4.$$

三、向量组之间的线性表出和秩

定理3. 设向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \ldots, \beta_s$线性表出，

(1) 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性无关，则$r \leq s$；

(2) 若$r > s$，则$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性相关.

多组由少组线性表出，则多组线性相关；

证：(2): 不妨设向量均为n维列向量，令

$$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r),\ B = (\beta_1, \ldots, \beta_s),$$

因$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \ldots, \beta_s$线性表出，所以存在

$$K = (k_{ij})_{s\times r}\text{使得：}\quad A_{n\times r} = B_{n\times s}K_{s\times r}.$$

定理3. 设向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \ldots, \beta_s$线性表出，

(1) 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性无关，则$r \leq s$；

(2) 若$r > s$，则$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性相关.

$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $B = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$,　$A_{n\times r} = B_{n\times s}K_{s\times r}$

因 变元数$r >$方程数s，故$KX = 0$有非零解X_0，此时

$$AX_0 = BKX_0 = B0 = 0.$$

于是$AX=0$有非零解，因此$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性相关.

(1): 显然是(2)的逆否命题.

性质1. 设$S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是$T$的最大无关组，则：

(1) T 可由 S 线性表出；　(2) T 与S 等价.

证明： (1) T中任取一个向量α:

[1] 如果α是 S中的向量，当然可以由S线性表示.

[2] 如果α不是 S中的向量，添入S中，得到s+1个向量

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha,$$

S是T的最大无关组，因此T中任意s+1个向量线性相关，

$$\left.\begin{array}{r}\text{特别的，}\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha\text{ 线性相关}\\ S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s\text{线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha\text{ 可由}S\text{ 线性表示.}$$

(2) 显然部分组S可由整体向量组T线性表示，结合(1)即得.

两向量组秩的关系

向量组 I 可由向量组 II 线性表出

$\Rightarrow$ 组 I 的秩 $r_1 \le$ 组 II 的秩 r_2.

证: 设 $\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 为 I 的最大无关组

$\beta_1,\dots,\beta_{r_2}$ 为 II 的最大无关组

组 I 可由组 II 线性表出

$\Rightarrow$

$\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 可由 $\beta_1,\dots,\beta_{r_2}$ 线性表出

$\alpha_1,\dots,\alpha_{r_1}$ 线性无关

$\Rightarrow r_1 \le r_2$.

推论: 组 I 与组 II 等价 $\Rightarrow$ 秩 $r_1 =$ 秩 r_2.

四、最大无关组的性质、等价叙述

- 设含有 r 个向量的 S 是 T 的一个部分向量组，为说明 S 是 T 的一个最大无关组，根据定义需要：

  (1) S 线性无关；

  (2) T 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

- 为说明某向量组 T 的秩为 r，根据定义需要：

  (1) 找出含有 r 个线性无关向量的部分向量组；

  (2) 证明 T 中任意 $r+1$ 个向量都线性相关.

问题：能否研究性质找出更好的判别法？

最大无关组 是 满足一定条件的部分无关组,

如何判断部分无关组恰为最大无关组?

性质2. 设向量组$S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是向量组$T$的部分无关组,则如下条件等价:

(1) S是T的最大无关组; (2) T与S等价;

(3) T可由S线性表示;

(4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha$线性相关,$\forall\alpha\in T$.

证: $(1)\Rightarrow(2)$:即性质1. $(2)\Rightarrow(3)$:显然.

$(3)\Rightarrow(4)$:T可由S线性表出$\Rightarrow T$中向量α可由S线性表出

$\Rightarrow\alpha$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表示$\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha$线性相关.

性质2. 设向量组$S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是向量组$T$的部分无关组，则如下条件等价:

(1) S是T的最大无关组; (2) T与S等价;

(3) T可由S线性表示;

(4) $\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha$线性相关，$\forall\alpha\in T$.

证明: (4)$\Rightarrow$(1) 从T中任取$s+1$个向量: $\beta_1,\cdots,\beta_{s+1}$

$$\left.\begin{array}{r}\text{任取}\beta_i\text{: 由(4), }\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\beta_i\text{ 线性相关}\\ S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s\text{ 线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\beta_i$ 可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_s$线性表出

$\Rightarrow\underbrace{\beta_1,\cdots,\beta_{s+1}}_{s+1\text{个向量}}$可由$\underbrace{\alpha_1,\cdots,\alpha_s}_{s\text{个向量}}$线性表出 $\Rightarrow$ $\beta_1,\cdots,\beta_{s+1}$线性相关.

例5. 证明: R^n的秩为 n, 且R^n中任意 n 个线性无关的向量都是R^n的最大无关组.

证: $\varepsilon_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\varepsilon_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\cdots,\varepsilon_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$ 是R^n的n个线性无关的向量.

且R^n中任意 $n+1$个向量, 都是 n 维向量, 线性相关.

$\Rightarrow \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$R^n$的最大无关组 $\Rightarrow$ 秩$R^n=$向量数n.

设$T:\alpha_1,\ \cdots,\alpha_n$是$R^n$中线性无关的向量组,

因R^n中任意 $n+1$个向量都线性相关, T是R^n的最大无关组.

例6. 设向量组 $\alpha_1=(1,0,1)^T,\alpha_2=(0,1,1)^T,\alpha_3=(1,3,5)^T$ 不能由向量组 $\beta_1=(1,1,1)^T,\beta_2=(1,2,3)^T,\beta_3=(3,4,a)^T$ 线性表出，求 a的值.

解: 某3维向量不能由 β_1,β_2,β_3 线性表出

$\Rightarrow \beta_1,\beta_2,\beta_3$不是$\mathrm{R}^3$的最大无关组

$\Rightarrow R(\beta_1,\beta_2,\beta_3)<3$

$$\Rightarrow 0=\left|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right|=\begin{vmatrix}1&1&3\\1&2&4\\1&3&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&3\\0&1&1\\0&2&a-3\end{vmatrix}\Rightarrow a=5$$

例7. 设A, B分别为$m\times r$, $r\times s$矩阵，证明

$$R(AB)\le \min\{R(A), R(B)\}.$$

证: 将$A_{m\times r}B_{r\times s}=C_{m\times s}$ 写成分块矩阵形式:

$$(a_1,a_2,\cdots,a_r)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rs} \end{pmatrix}_{r\times s}=(c_1,c_2,\cdots,c_s)$$

表明乘积C的列组可由A的列组线性表出

$\Rightarrow$ 秩C的列组$\le$秩A的列组 $\Rightarrow R(AB)\le R(A)$

类似的，乘积C的行组可由B的行组线性表出

$\Rightarrow$ 秩C的行组$\le$秩B的行组 $\Rightarrow R(AB)\le R(B)$

$\Rightarrow$

五、R^n的基、维数与坐标

R^n：n维向量空间

R^n的一组基：R^n 的一个最大无关组

R^n的维数$(\dim R^n)$：R^n 的秩, $\dim R^n = n$.

设$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为$R^n$的一组基，则

$$R^n = L(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

又，

$$R^n = L(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$$

R^n 的标准基

$\forall\alpha\in \mathrm{R}^n$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$为一组基,

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$$

α在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标

即: 任一向量在给定基下的坐标是惟一的.

例8. (1) 设$\alpha = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$,

$L(\alpha)$: R^3的一维子空间;

(2) 设$\alpha = (x_1, x_2, x_3)$, $\beta = (y_1, y_2, y_3)$ 线性无关,

$L(\alpha, \beta)$: R^3的二维子空间.