五. 方阵的幂与多项式

设A是n阶方阵, k是正整数, 规定:

$$\begin{cases} A^1 = A \\ A^{k+1} = A^k A, \ k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

若m, k是正整数, 显然:

$$A^m A^k = A^{m+k}$$

$$(A^m)^k = A^{mk}$$

一般的, $(AB)^k \neq A^k B^k$

方阵的多项式

若 $f(x) = a_k x^k + \cdots a_1 x + a_0$

是x的多项式, A是n阶方阵, 称:

$$f(A) = a_k A^k + \cdots a_1 A + a_0 I$$

是方阵A的k次多项式

设有多项式 $f(x)$, $g(x)$, A, B 为n阶方阵, 则

$$f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A)$$

但是，一般的，$f(A)f(B) \neq f(B)f(A)$!

如，$(A-I)(2A+I)=(2A+I)(A-I)$

$$(A+B)^2=(A+B)(A+B)=A^2+AB+BA+B^2$$
$$\neq A^2+2AB+B^2$$

何时等号成立?

但是

$$(A+I)^2=A^2+2A+I$$

为什么?

[结束]