三. $AB=O$ 与 $AB=I$

设A是m行n列矩阵, 则如下条件彼此等价:

- 存在非零矩阵 B 使得 $AB=O$;
- $AX=0$ 有非零解;
- $R(A)<n$.

$$A_{m\times n}B_{n\times s}=O \Rightarrow A(b_1,\cdots,b_s)=(0,\cdots,0)$$

- B的列向量都是 $AX=O$ 的解;
- $R(A)+R(B)\le n$;

例1. 设A, B为满足 $AB=O$ 的任意两个非零矩阵, 则必有

(A) A的列向量组线性相关, B的行向量组线性相关;

(B) A的列向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

(C) A的行向量组线性相关, B的行向量组线性相关.

(D) A的行向量组线性相关, B的列向量组线性相关.

分析: $A_{m\times n}B_{n\times s}=O \Rightarrow R(A)+R(B)\le n$

$$A, B \text{ 非零} \Rightarrow 0<R(A_{m\times n}), R(B_{n\times s})<n$$

例2. 设 $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ a & b & -3\\ 4 & -2 & c\end{pmatrix}$，如果3阶矩阵$B$满足$AB=O$，且 $B^{*}\neq O$，求 A^{2015}.

分析：

$$\left.\begin{array}{r} R(A)\geq 1 \\ AB=O\Rightarrow R(A)+R(B)\leq 3\end{array}\right\}\Rightarrow R(B)\leq 2$$

$$\left.\begin{array}{r} R(B)\leq 2 \\ B^{*}\neq O\Rightarrow R(B)\geq 2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow R(B)=2 \\ R(A)+R(B)\leq 3 \\ R(A)\geq 1\end{array}\right\}\Rightarrow R(A)=1$$

例2. 设 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & b & -3 \\ 4 & -2 & c \end{pmatrix}$，如果3阶矩阵$B$满足$AB=O$，且 $B^* \neq O$，求 A^{2015}.

$$R(A)=1 \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}(2,-1,3) = \alpha^T\beta$$

$$A^{2015}=\left[\alpha^T\beta\right]^{2015}=\alpha^T\left[\beta\alpha^T\right]^{2014}\beta=9^{2014}\alpha^T\beta$$

$$=9^{2014}A \qquad = 9^{2014}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

例3. $R\left(B_{m\times n}\right)=n \Rightarrow \exists\, A_{n\times m},\ s.t.\ \ AB=I_n$

列满秩矩阵左可逆.

证： $\boxed{R\left(B_{m\times n}\right)=n \Rightarrow}$ 存在可逆阵 P,Q 使得 $PBQ=\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}_{m\times n}$

$$\Rightarrow \left(I_n, O\right)_{n\times m} PBQ=\left(I_n, O\right)_{n\times m}\begin{pmatrix} I_n \\ O \end{pmatrix}=I_n$$

$$\Rightarrow \left(I_n, O\right)_{n\times m} PB=Q^{-1} \quad \Rightarrow \underbrace{Q\left(I_n, O\right)_{n\times m} P}_{A}B=I_n$$

$$\Rightarrow \exists\, A=Q\left(I_n, O\right)P,\ \ s.t.\ \ AB=I_n$$

$$\boxed{R\left(B_{m\times n}\right)=m \Rightarrow \exists\, C_{n\times m},\ s.t.\ \ BC=I_m}$$

例4. $A_{n\times m}B_{m\times n}=I_n \Rightarrow R(A)=R(B)=n$

两矩阵乘积是单位阵，则：矩阵的秩 = 单位阵的阶数.

证： $\boxed{A_{n\times m}B_{m\times n}=I_n \Rightarrow}\ n=R(I_n)\le \min\left(R(A),R(B)\right)$

$$\left.\begin{array}{r}\Rightarrow R(A)\ge n,\ \ R(B)\ge n\\ R(A_{n\times m})\le n,\ R(B_{m\times n})\le n\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{\Rightarrow R(A)=R(B)=n}$$

四．两个向量组的线性相关性

设 $A_{n\times r}=(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)$, $B_{n\times s}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$, 则如下叙述等价:

- $\beta_1,\cdots,\beta_s$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表出
- $(\alpha_1,\cdots,\alpha_r)X_{r\times s}=(\beta_1,\cdots,\beta_s)$有解
- $R(A)=R(A,B)$

如下叙述等价:

- $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\cdots,\beta_s$等价
- $R(A)=R(A,B)=R(B)$

例1. 设$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}2\\3\\a\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\a+2\\-2\end{pmatrix},\beta_1=\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\a\end{pmatrix}$

β_1可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, β_2不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出, 求$a$.

分析: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1,\beta_2)=\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\2&3&a+2&3&-1\\1&a&-2&4&a\end{pmatrix}$

$$\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&a&1&-3\\0&a-2&-3&3&a-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&1&1&1\\0&-1&a&1&-3\\0&0&a^2-2a-3&a+1&-2a+5\end{pmatrix}$$

β_2不可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出$\Leftrightarrow a^2-2a-3=0$且$-2a+5\neq0$

β_1可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出$\Rightarrow a+1=0$ $\boxed{\Rightarrow a=-1}$

例2. 设A, B都是n阶方阵, P, Q是n阶可逆矩阵.

下列命题不正确的是(　　).

(A) 若$B=AQ$, 则A的列向量组与B的列向量组等价;

(B) 若$B=PA$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(C) 若$B=PAQ$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(D) 若A的行向量组与B的行向量组等价, 则A与B等价.

分析: $B = AQ \Rightarrow (\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)Q$

$$\Rightarrow (\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)Q^{-1}$$

因此A的列向量组与B的列向量组可以相互线性表出, 是彼此等价的; 因此选项(A)正确;

同理选项(B)正确.

例2. 设A, B都是n阶方阵, P, Q是n阶可逆矩阵.

下列命题不正确的是(　　).

(A) 若$B=AQ$, 则A的列向量组与B的列向量组等价;

(B) 若$B=PA$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(C) 若$B=PAQ$, 则A的行向量组与B的行向量组等价;

(D) 若A的行向量组与B的行向量组等价, 则A与B等价.

(C): 令 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ A, B的行向量组不等价

选项(C)错误.

(D): 向量组等价, 则向量组同秩,

于是A, B同秩, $\Rightarrow$ 同型矩阵A, B等价 选项(D) 正确.

例3. 设向量组 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}4\\2\\a+2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}$

中任两个向量都可由另外两个向量线性表出, 求a.

分析: 任两个向量都可由另外两个向量线性表出

$$\Rightarrow R(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\le 2$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&4&2&1\\-1&2&4&a\\0&a+2&3&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&6&6&a+1\\0&a+2&3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&4&2&1\\0&6&6&a+1\\0&0&\boxed{1-a}&\boxed{1-(a+2)(a+1)/6}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Rightarrow a=1}$$