已知n阶矩阵A和B满足条件 $A+B=AB$,

（1）证明：$A-I$ 为可逆矩阵, 其中I为n阶单位矩阵;

（2）证明: $AB=BA$;

（3）已知 $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 求矩阵$A$.

[解析] （1）证明：$A-I$ 为可逆矩阵，其中I为n阶单位矩阵；

根据可逆矩阵的定义，若想证明 $A-I$ 为可逆矩阵，只需找出

$(A-I)$g?$=I$ 即可.

由 $A+B=AB$ 得 $AB-A-B+I=I$

即 $(A-I)(B-I)=I$

故 $(A-I)$ 可逆，且 $(A-I)^{-1}=B-I$

（2）证明: $AB = BA$;

由 $(A-I)(B-I)=I$

知 $(A-I)$和$(B-I)$互为逆矩阵,

即 $(A-I)(B-I)=(B-I)(A-I)$

可得 $AB-A-B+I=BA-B-A+I$

故 $AB=BA.$

（3）已知 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵$A$.

由 $B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$ 得 $B-I=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}B-I & I\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

即 $$(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

由 $(A-I)^{-1}=B-I$ 可得

$$A=I+(B-I)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\frac{1}{2}&0\\-\frac{1}{3}&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$$