

已知实二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = X^T A X$ 经过正交变换 $X = P Y$ 化为

标准形 $y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$, 则 $|2A^{-1} - A| = (\quad)$

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

解析：正交变换下的标准形为 $y_1^2 - y_2^2 + 2y_3^2$

$\Rightarrow A$ 的特征值为 $1, -1, 2$

$\Rightarrow 2A^{-1} - A$ 的特征值为

$$2 \cdot 1^{-1} - 1, 2 \cdot (-1)^{-1} - (-1), 2 \cdot 2^{-1} - 2 = 1, -1, -1$$

$$\Rightarrow |2A^{-1} - A| = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \quad \text{令 } A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$