六. 矩阵的转置

$$已知A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$，规定A的转置矩阵为：

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A_{m\times n} \Rightarrow (A^T)_{n\times m}$$

例7.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix},$$

$$A^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 2 & 8\end{pmatrix};$$

$$B=\begin{pmatrix}18 & 6\end{pmatrix},$$

$$B^T=\begin{pmatrix}18\\ 6\end{pmatrix}.$$

性质:

1) $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = A$

2) $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}$

3) $(kA)^{\mathrm{T}} = kA^{\mathrm{T}}$

4) $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

$$(A_1A_2\ldots A_k)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}{}_k\, A^{\mathrm{T}}{}_{k\text{-}1}\ldots A^{\mathrm{T}}{}_1$$

证明 $(AB)^T = B^T A^T$：

令 $A = (a_{ij})_{m\times n}$，$B = (b_{ij})_{n\times s}$

$(AB)^T$ 与 $B^T A^T$ 均 s 行 m 列，同型

$$((AB)^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}, \quad (B^T A^T)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} b_{ki}$$

所以，$(AB)^T = B^T A^T$

例8. 已知$A=\begin{pmatrix}1&-1&2\\0&1&3\\1&2&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&1\\2&2\\1&-1\end{pmatrix}$, 求$AB$, B^TA^T.

解:

$$AB=\begin{pmatrix}3&-3\\5&-1\\8&4\end{pmatrix}$$

$$B^TA^T=(AB)^T=\begin{pmatrix}3&5&8\\-3&-1&4\end{pmatrix}$$

计算准则: 先化简，后计算

[结束]