第二章 一元函数微分学

§2.2 导数的运算法则

一、四则运算的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导公式

电子科技大学数学科学学院

第二章 一元函数微分学

§2.2 导数的运算法则

一、四则运算的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导公式

一、四则运算的求导法则

定理　如果函数$u(x)$, $v(x)$在点x处可导，则它们的和、差、积、商(分母不为零)在点x处也可导，并且

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$;

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$;

(3) $[\dfrac{u(x)}{v(x)}]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$.

特别地 $[\dfrac{1}{v(x)}]'=\dfrac{-v'(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$.

证(1)、(2)略

证(3) 设 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $(v(x)\neq 0)$,

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x)-u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]v(x)-u(x)[v(x+\Delta x)-v(x)]}{v(x+\Delta x)v(x)\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot v(x)-u(x)\cdot\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$$

$$\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}$$

$$u'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2},$$

$\therefore f(x)$在x处可导.

推论:

(1) $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$

★ $[f(x)+g(x)+h(x)]'=f'(x)+g'(x)+h'(x)$

★ $[\sum_{i=1}^{n} f_i(x)]'=\sum_{i=1}^{n} f_i'(x)$

(2) $[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

★ $[Cf(x)]'=Cf'(x)$

★ $[f(x)\cdot g(x)\cdot h(x)]'=$

$f'(x)\cdot g(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g'(x)\cdot h(x)+f(x)\cdot g(x)\cdot h'(x)$

例1 求 $y = x^3 - 2x^2 + \sin x$ 的导数.

解 $y' = (x^3)' - (2x^2)' + (\sin x)' = (x^3)' - 2(x^2)' + (\sin x)'$

$= 3x^2 - 2 \cdot 2x + \cos x = 3x^2 - 4x + \cos x.$

例2 求 $y = \sin 2x \cdot \ln x$ 的导数.

$(\sin x)' = \cos x$

解 $\because\ y = 2\sin x \cdot \cos x \cdot \ln x$

$\therefore\ y' = 2\cos x \cdot \cos x \cdot \ln x + 2\sin x \cdot (-\sin x) \cdot \ln x + 2\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{x}$

$= 2\cos 2x \ln x + \frac{1}{x}\sin 2x.$

例3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

即 $(\tan x)'=\sec^2 x$

同理可得 $(\cot x)'=-\csc^2 x$

例4 求函数 $y=\sec x$ 的导数.

解 $y'=(\sec x)'=(\dfrac{1}{\cos x})'=\dfrac{-(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sec x\tan x.$$

$$(\sec x)'=\sec x\tan x$$

类似的 $(\csc x)'=-\csc x\cot x$

第二章 一元函数微分学

§2.2 导数的运算法则

一、四则运算的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导公式

二、反函数的求导法则

设函数 $\boxed{x=\varphi(y)}$ 存在反函数 $\boxed{y=f(x)}$

$\varphi'(y)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ ⬅ 可导 单调 $\varphi'(y)\neq 0$

可导 ➡ $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

任取 $x\in I_x,\quad \Delta x\neq 0,\ x+\Delta x\in I_x$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\varphi'(y)}=f'(x)$$

$\varphi(y)$满足什么条件时$\Delta y\neq 0$?

单调连续函数的反函数必单调连续 $\Rightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

定理 如果函数$x=\varphi(y)$在某区间I_y内单调、可导且$\varphi'(y)\neq 0$，
则它的反函数$y=f(x)$在对应区间I_x内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}$$

即 反函数的导数等于直接函数导数的倒数.

注：$f'(x_0)=\dfrac{1}{\varphi'(y_0)}$

例1 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 $\because x=\sin y$ 在 $I_y=(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 内单调、可导,

且 $(\sin y)'=\cos y>0$,

$\therefore$ 在 $I_x=(-1,1)$ 内有

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

例2　求函数 $y=\arctan x$ 的导数.

解　$x=\tan y$ 在区间 $I_y=(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 内单调可导,

$$(\tan y)'=\sec^2 y=1+\tan^2 y\neq 0$$

在对应的区间 $I_x=(-\infty,+\infty)$ 内，有

$$(\arctan x)'=\frac{1}{(\tan y)'}=\frac{1}{\sec^2 y}=\frac{1}{1+\tan^2 y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}\qquad (\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

例3 求 $y=f(x)=x^3+2x-1$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在 $y=2$ 处的导数.

解 $y=2, \quad \Rightarrow 2=x^3+2x-1, \quad \Rightarrow x=1,$

$y'=f'(x)=3x^2+2,$

$$\Rightarrow [f^{-1}(y)]'\Big|_{y=2}=\frac{1}{f'(x)\big|_{x=1}}=\frac{1}{(3x^2+2)\big|_{x=1}}=\frac{1}{5}.$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{\varphi'(y_0)}$$

第二章 一元函数微分学

§2.2 导数的运算法则

一、四则运算的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导公式

三、复合函数的求导法则

函数$u=\varphi(x)$在点x可导，而$y=f(u)$在点$u=\varphi(x)$可导，

复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x可导?

$\because\ y=f(u)$在点$u=\varphi(x)$可导，

$$\Rightarrow \lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u),\quad \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta u}=f'(u)+\alpha,(\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$$

$$\Rightarrow \Delta y=f'(u)\Delta u+\alpha\Delta u,(\lim_{\Delta u\to 0}\alpha=0)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\varphi'(x)$$

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}[f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}]=f'(u)\varphi'(x)$$

三、复合函数的求导法则

定理 如果函数$u=\varphi(x)$在点x可导，而$y=f(u)$在点$u=\varphi(x)$可导，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x可导，且其导数为

$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot\varphi'(x)$$

或 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$ 或 $\{f[\varphi(x)]\}'=f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$

推广 设$y=f(u)$，$u=u(v)$，$v=v(x)$，则$y=f\{u[v(x)]\}$的导数为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}$$

$$\{f[\varphi(x)]\}'\Big|_{x=x_0}=\{f'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)\}\Big|_{x=x_0}=f'(u)\Big|_{u=u_0}\cdot\varphi'(x)\Big|_{x=x_0}$$

例1 求函数 $y=\ln\sin x$ 的导数.

解 $\because\ y=\ln u,\ u=\sin x,$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{\sin x}=\cot x.$$

例2 求函数 $y=(x^2+1)^{10}$ 的导数.

解 设 $u=x^2+1,\ y=u^{10},$

则 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=10u^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

$$\frac{dy}{dx}=10(x^2+1)^9\cdot(x^2+1)'=10(x^2+1)^9\cdot 2x=20x(x^2+1)^9.$$

例3 求函数$y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}(a>0)$的导数.

解 $y'=(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2})'+(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a})'$ $\quad (x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}$

$$=\left(\frac{x}{2}\right)'\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)'+\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)+\frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}\cdot\frac{1}{a}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{a^2}{2\sqrt{a^2-x^2}}=\sqrt{a^2-x^2}.$$

例4 求函数$y=e^{\sin\frac{1}{x}}$的导数.

解 $y'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot(\sin\frac{1}{x})'=e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}\cdot(\frac{1}{x})'=-\frac{1}{x^2}e^{\sin\frac{1}{x}}\cdot\cos\frac{1}{x}.$

例5 设函数$y=\ln|x|$，求y'.

解 $\because \ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x) & x<0\end{cases}$ $\therefore$ 当$x>0$时，$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x}$,

当$x<0$时，$y'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{x}.$

因此，对任何$x\neq 0$，有$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$

例6 已知$f(x)$可导，求函数$y=f(e^x)e^{f^2(x)}$的导数.

解 $y'=[f(e^x)]'e^{f^2(x)}+f(e^x)[e^{f^2(x)}]'$

$$=f'(e^x)\cdot(e^x)'\cdot e^{f^2(x)}+f(e^x)\cdot e^{f^2(x)}\cdot[f^2(x)]'$$

$$=e^x f'(e^x)\cdot e^{f^2(x)}+f(e^x)\cdot e^{f^2(x)}\cdot 2f(x)\cdot f'(x)$$

$$=e^{f^2(x)}[e^x f'(e^x)+2f(x)f'(x)f(e^x)].$$

例7 设 $f(x)=e^x$，$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$，求 $\dfrac{d}{dx}f[g(x)]\Big|_{x=0}$.

解 令 $y=f(u)$, $u=g(x)$, 则 $x=0$ 时，有 $u=0$,

$\because f'(u)=e^u$， $\therefore f'(0)=1$,

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0,$$

$$\frac{d}{dx}f[g(x)]\Big|_{x=0}=f'(0)g'(0)=1\times 0=0.$$

$$\{f[g(x)]\}'\Big|_{x=x_0}=f'(u)\Big|_{u=u_0}\cdot g'(x)\Big|_{x=x_0}$$

第二章 一元函数微分学

§2.2 导数的运算法则

一、四则运算的求导法则

二、反函数的求导法则

三、复合函数的求导法则

四、基本求导公式

四、基本求导公式

$(C)' = 0$

$(x^{\mu})' = \mu x^{\mu-1}$

$(a^x)' = a^x \ln a$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(e^x)' = e^x$

$(\tan x)' = \sec^2 x$

$(\cot x)' = -\csc^2 x$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x\ln a}$

$(\sec x)' = \sec x \tan x$

$(\csc x)' = -\csc x \cot x$

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$

$(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arccot} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$