三、向量组之间的线性表出和秩

定理3. 设向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \ldots, \beta_s$线性表出，

(1) 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性无关，则$r \le s$；

(2) 若$r > s$，则$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性相关.

多组由少组线性表出，则多组线性相关；

证：(2): 不妨设向量均为n维列向量，令

$$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r),\ B = (\beta_1, \ldots, \beta_s),$$

因$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \ldots, \beta_s$线性表出，所以存在

$K = (k_{ij})_{s\times r}$使得： $A_{n\times r} = B_{n\times s} K_{s\times r}$.

定理3. 设向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\beta_1, \ldots, \beta_s$线性表出，

(1) 若$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性无关，则$r \le s$；

(2) 若$r > s$，则$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性相关.

$A = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $B = (\beta_1, \ldots, \beta_s)$, $A_{n\times r} = B_{n\times s} K_{s\times r}$

因 变元数$r >$方程数s, 故 $KX = 0$ 有非零解 X_0, 此时

$$AX_0 = BKX_0 = B0 = 0.$$

于是$AX=0$有非零解，因此$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性相关.

(1): 显然是(2)的逆否命题.

性质1. 设$S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s$是$T$的最大无关组，则：

(1) T 可由 S 线性表出；　(2) T 与S 等价.

证明： (1) T中任取一个向量α:

[1] 如果α是 S中的向量，当然可以由S线性表示.

[2] 如果α不是 S中的向量，添入S中，得到$s+1$个向量

$$\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha,$$

S是T的最大无关组，因此T中任意s+1个向量线性相关，

特别的，$\left.\begin{array}{r}\alpha_1,\cdots,\alpha_s,\alpha\text{ 线性相关}\\ S:\alpha_1,\cdots,\alpha_s\text{线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha$ 可由S 线性表示.

(2) 显然部分组S可由整体向量组T线性表示，结合(1)即得.

两向量组秩的关系

向量组 I 可由向量组 II 线性表出

$\Rightarrow$ 组 I 的秩 $r_1 \le$ 组 II 的秩 r_2.

证: $\left.\begin{array}{r}\text{设}\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1}\text{为 I 的最大无关组}\\ \beta_1,\ldots,\beta_{r_2}\text{为 II 的最大无关组}\\ \text{组 I 可由组 II 线性表出}\end{array}\right\}\Rightarrow$

$\left.\begin{array}{r}\alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1}\text{可由}\beta_1,\ldots,\beta_{r_2}\text{线性表出}\\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{r_1}\text{线性无关}\end{array}\right\}\Rightarrow r_1 \le r_2.$

推论: 组 I 与组 II 等价 $\Rightarrow$ 秩 $r_1 =$ 秩 r_2.