第二讲 正定二次型

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的性质（1）
- 正定二次型的性质（2）
- 二次型的其它类型
- 内容小结

电子科技大学 蒲和平

第二讲 正定二次型

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的性质（1）
- 正定二次型的性质（2）
- 二次型的其它类型
- 内容小结

一、正定二次型的概念

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

$$\forall\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0,\quad a_i \in \mathrm{R},$$

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0.$$

定义 如果任一非零实向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 都有 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX > 0$，则称实二次型 $f(X)$ 为**正定二次型**，$f(X)$的矩阵A 称为**正定矩阵**.

正定矩阵 A 首先是一个实对称矩阵.

$f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 为正定二次型 $\Leftrightarrow$ A 为正定矩阵.

例1 设A, B都是n阶正定矩阵. 证明：$kA + lB$也是正定矩阵 $(k > 0, l > 0)$.

证 $\because$ A, B都是n阶正定矩阵

$\therefore$ $\forall X \in \mathbb{R}^n, X \neq 0$，有 $X^{\mathrm{T}}AX > 0, X^{\mathrm{T}}BX > 0$

$\therefore$ $X^{\mathrm{T}}(kA + lB)X = kX^{\mathrm{T}}AX + lX^{\mathrm{T}}BX > 0$

$\therefore kA + lB$为正定矩阵.

例2 判定二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+5x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$$

是否为正定二次型.

解 利用配方法化二次型为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)^2+(x_2-2x_3)^2+x_3^2$$

可见，对 $\forall X=(x_1,x_2,x_3)^T\neq\mathbf{0}$

都有 $f(x_1,x_2,x_3)>0$，所以 f 是正定二次型.

主要内容

正定二次型（矩阵）的概念

练习

设P是可逆矩阵，$A = P^{T}P$，证明：A是正定矩阵.

证 $\because \forall X \in \mathrm{R}^{n}, X \neq 0$，有

$$X^{T}AX = X^{T}P^{T}PX = (PX)^{T}(PX) = \|PX\|^{2} > 0$$

$\therefore A$为正定矩阵.

第二讲 正定二次型

正定二次型的概念

➤ 正定二次型的性质（1）

正定二次型的性质（2）

二次型的其它类型

内容小结

二、正定二次型的性质

复习:

1. 正定二次型的概念

定义 如果任一非零实向量 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ 都有 $f(X) = X^TAX > 0$，则称实二次型 $f(X)$ 为正定二次型，$f(X)$的矩阵A 称为正定矩阵.

2. 二次型的标准形

定理 任何一个n 元二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形:

$$d_1y_1^2 + d_2y_2^2 + \ldots + d_ry_r^2 \quad (r \leq n,\ d_i \neq 0)$$

r为二次型的秩.

定理1 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全大于零.

证 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则通过正交变换

$X=CY$ 可将$f(X)$化为

$$f(X)=X^TAX=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=g(Y)$$

充分性：若A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全为正,

则 $\forall X\in\mathbf{R}^n$, $X\neq 0$, 有 $Y=C^{-1}X\neq 0$,

$$f(X)=g(Y)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$$

$\therefore$ $f(X)$是正定二次型.

必要性：

若 A 正定，且有某 $\lambda_i \le 0$，不妨设 $\lambda_1 \le 0$，

取 $Y = (1, 0, \ldots, 0)^T$，则 $X = CY \ne 0$，

$$f(X) = g(Y) = \lambda_1 1 + \lambda_2 0 + \ldots + \lambda_n 0 = \lambda_1 \le 0$$

与 $f(X) > 0$ 矛盾，故 $\lambda_i > 0, (i = 1, \ldots, n)$.

推论1 n 元二次型 $f(X) = X^TAX$ 正定 $\Leftrightarrow f(X)$ 的正惯性指数为 n.

可逆线性变换不改变二次型的正负惯性指数，因此也不改变二次型的正定性.

如果 n元二次型 $f(X)=X^TAX$ 的正惯性指数为 n，则其规范形为

$$g(Y)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=Y^TIY$$

故 A 与 I 合同.

反之, 如果A与 I 合同, 则 $f(X)$的规范形为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$$

推论2 $f(X)=X^TAX$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 与 I 合同.

推论2的矩阵形式为:

A正定$\Leftrightarrow A$与I 合同 $\Leftrightarrow A=C^TC \quad (|C|\neq 0)$.

推论3 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则$|A|>0$,且$a_{ii}>0,(\forall i)$.

证 (1) 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则存在可逆矩阵C使

$$A=C^TC \Rightarrow |A|=|C^T||C|=|C|^2>0.$$

(2) (反证法) 设某 $a_{ii}\le 0$,

取 $X=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^T$ 第i个分量为1

则 $X^TAX=a_{ii}\le 0$, 矛盾.

所以 $a_{ii}>0$, $(i=1,\ldots,n)$.

例1 设A是n 阶正定矩阵，证明: $|A+I|>1$.

证 $\because$ A是正定矩阵

$\therefore$ A的特征值全为正实数：λ_1，λ_2，…，λ_n

$(A+I)$的特征值也全为正实数：

(λ_1+1)，(λ_2+1)，…，(λ_n+1).

$\therefore |A+I| = (\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_n+1)>1$

例2 求证：正定矩阵A的逆矩阵A^{-1}也是正定矩阵.

证 因为

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$$

所以 A^{-1}也是一个实对称矩阵.

下证是A^{-1}正定矩阵，

法一：设A 的特征值为λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n，

由于A为正定矩阵，则它们全为正，

所以A^{-1}的特征值 $\frac{1}{\lambda_1},\frac{1}{\lambda_2},\cdots,\frac{1}{\lambda_n}$ 也全为正，故A^{-1}正定。

法二：A为正定矩阵，则存在可逆矩阵P，使得

$$A = P^T I P$$

$$A^{-1} = (P^T P)^{-1} = P^{-1}(P^T)^{-1} = P^{-1}(P^{-1})^T = P^{-1} I (P^{-1})^T$$

即 A^{-1} 与单位矩阵 I 合同，则 A^{-1} 正定.

法三：设 $f(X)=X^T A^{-1} X$，作可逆线性变换 $X=AY$，

$$X^T A^{-1} X = Y^T A^T A^{-1} A Y = Y^T A^T Y = Y^T A Y.$$

可逆线性变换不改变矩阵的正定性，而$Y^T AY$是正定二次型，故$X^T A^{-1} X$也是正定二次型，从而A^{-1}是正定矩阵.

主要内容

正定矩阵的性质

n 阶矩阵A正定

$\Leftrightarrow A$的特征值全为正实数

$\Leftrightarrow A$的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow A$与单位矩阵合同

$\Rightarrow |A|>0$,且$a_{ii}>0,(\forall i)$

练习 设A，B都是n阶实对称阵，A的特征值大于a，B的特征值大于b，证明：$A+B$的特征值大于$a+b$.

证 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

则$A-aI$的特征值为$\lambda_i-a,(i=1,\cdots,n)$

因为A的特征值大于a， $\therefore \lambda_i-a>0 \quad (i=1,\cdots,n)$.

$\Rightarrow A-aI$正定. 同理$B-bI$也正定.

$\Rightarrow (A-aI)+(B-bI)=A+B-(a+b)I$ 正定.

设$A+B$的特征值为$l_i(i=1,\cdots,n)$,

则$l_i-(a+b)\,(i=1,\cdots,n)$是$A+B-(a+b)I$的特征值

$\therefore l_i-(a+b)>0$，即$l_i>(a+b).\,(i=1,\cdots,n)$.

第二讲 正定二次型

正定二次型的概念

正定二次型的性质（1）

正定二次型的性质（2）

二次型的其它类型

内容小结

二、正定二次型的性质

复习：

定理1 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于零.

推论1 n 元二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$正定 $\Leftrightarrow f(X)$的正惯性指数为 n.

推论2 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 与 I 合同.

推论2的矩阵形式为：

A正定$\Leftrightarrow A$与I 合同 $\Leftrightarrow A=C^{T}C\ \ (|C|\neq 0)$.

推论3 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则$|A|>0$,且$a_{ii}>0, (\forall i)$.

例4 设A,B是n阶正定矩阵，证明：AB也是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

证 充分性：$\because A,B$正定，则$A^T=A,\ B^T=B$

又 $AB=BA,\quad \therefore (AB)^T=B^TA^T=BA=AB$

即AB是实对称矩阵.

又由A,B正定，则存在可逆矩阵P,Q,使

$$A=PP^T,\quad B=QQ^T \quad \Rightarrow AB=PP^TQQ^T$$

$$\Rightarrow P^{-1}ABP=P^TQQ^TP=(Q^TP)^T(Q^TP)$$

即AB相似于正定矩阵 $(Q^TP)^T(Q^TP)$

由于相似矩阵有相同的特征值，而正定矩阵

$(Q^T P)^T (Q^T P)$的特征值全大于0,

$\therefore AB$ 的特征值也全大于0，正定.

必要性：

$\because A, B$，AB都正定，都是实对称矩阵

$\therefore \ AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$

要判定一个二次型是否正定，常用其矩阵的顺序主子式来研判，下面给出顺序主子式的概念.

定义 对于 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，子式

$$P_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad (k=1,2,\cdots,\ n)$$

称为A 的顺序主子式.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

定理2 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定$\Leftrightarrow$$A$的顺序主子式全大于零.

证 这里仅证必要性：设$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵.

$$A_k=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$是A的k阶顺序主子式对应的矩阵,

对 $\forall X_k=(x_1,x_2\cdots,x_k)^T\neq 0$,

令 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$

则 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX=X_k^{\mathrm{T}}A_kX_k>0.$

由 $X_k^T A_k X_k > 0$ 可知 A_k 为正定矩阵.

所以 $|A_k| = P_k > 0$, $(k = 1, \ldots, n)$.

例5 讨论下面二次型的正定性:

(1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

(2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$;

解 f_1 中 x_3^2 的系数 $a_{33} = -1 < 0$,

f_2 中 x_2^2 的系数 $a_{22} = 0$,

所以, f_1, f_2 都不是正定二次型.

(3) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3;$

f_3 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

其顺序主子式为

$P_1 = 1 > 0,$ $\qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$

$P_3 = |A| = 2 > 0,$

所以 f_3 是正定二次型.

例6 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

当 t 为何值时，f 为正定二次型？

解 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A的顺序主子式为

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2,$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 4-t^2 & 2+t \\ 0 & 2+t & 3 \end{vmatrix} = -4(t-1)(t+2).$$

二次型 $f(X)=X^TAX$ 为正定二次型的充要条件是

$$\begin{cases} P_1 = 1 > 0 \\ P_2 = 4 - t^2 > 0 \\ P_3 = -(t-1)(t+2) > 0 \end{cases}$$

解得 $-2 < t < 1.$

故当且仅当 $-2 < t < 1$ 时，f 正定.

例7 设实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵. $b_1, b_2, \ldots, b_n$是任意n个非零实数，证明: $B=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$为正定矩阵.

证 B 的 k 阶顺序主子式为

$$|B_k|=\begin{vmatrix} b_1^2a_{11} & b_1b_2a_{12} & \cdots & b_1b_ka_{1k} \\ b_2b_1a_{21} & b_2^2a_{22} & \cdots & b_2b_ka_{2k} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_kb_1a_{k1} & b_kb_2a_{k2} & \cdots & b_k^2a_{kk} \end{vmatrix}=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2|A_k|$$

正定矩阵A的k 阶顺序主子式 $|A_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$.

所以， $|B_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$. B 为正定矩阵.

综上，对正定矩阵有以下等价命题：

定理3　对于实对称矩阵 A，以下命题等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A的特征值全为正实数；

(3) A与单位矩阵合同；

(4) A的各阶顺序主子式全大于零.

第二讲 正定二次型

- 正定二次型的概念
- 正定二次型的性质（1）
- 正定二次型的性质（2）
- 二次型的其它类型
- 内容小结

四、二次型的其它类型

复习：

1. 正定二次型的概念

$f(X)=X^TAX$正定 $\Leftrightarrow \forall X\neq 0$，都有 $f(X)>0$.

2. 正定矩阵的充要条件

定理3 对于实对称矩阵 A，以下命题等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A的特征值全为正实数；

(3) A与单位矩阵合同；

(4) A的各阶顺序主子式全大于零.

定义 对于二次型 $f(X)=X^TAX$ 及任意非零实向量 X,

(1) 如果 $f(x)=X^TAX<0$，则称 $f(X)$ 是负定二次型;

(2) 如果 $f(x)=X^TAX\geq 0$，则称 $f(X)$ 是半正定二次型;

(3) 如果 $f(x)=X^TAX\leq 0$，则称 $f(X)$ 是半负定二次型;

(4) 不是正定, 半正定, 负定, 半负定的二次型称为不定二次型.

对应的矩阵分别称为

(1) A负定矩阵；　　(2) A半正定矩阵；

(3) A半负定矩阵；(4) A不定矩阵.

由定义知 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2$ 是半正定二次型,

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+x_3^2$$ 是不定二次型.

与正定矩阵对应，负定矩阵有如下定理：

定理4 对于实对称矩阵A，下列命题等价：

(1) A是负定矩阵；

(2) A的特征值全为负实数；

(3) A与$-I$合同；

(4) A的顺序主子式负正相间：

$$(-1)^k P_k > 0，(k = 1,2,\cdots, n)$$

证 $\because$ A负定$\Leftrightarrow -A$正定.

由定理3 可得以上结论.

例 求参数 t 的范围,使下面二次型是负定二次型.

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+2tx_1x_2+2tx_1x_3+2x_2x_3$$

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-2 & t & t\\ t & -2 & 1\\ t & 1 & -2\end{pmatrix}$$

A的各阶顺序主子式为

$$P_1=-2,\quad P_2=4-t^2,\quad P_3=6(t^2-1),$$

二次型负定的充要条件为 $P_1<0,P_2>0,P_3<0$

即为$-1<t<1.$

主要
内容

1.二次型的其它类型；

2. 负定二次型的判定.

练习

设A是n阶负定矩阵，P是n阶方阵，$B= P^{\mathrm{T}}AP$，试问：B是何种类型的矩阵？

答案 若P可逆，则B是负定矩阵；

若P不可逆，则B是半负定矩阵.

第二讲 正定二次型

正定二次型的概念

正定二次型的性质（1）

正定二次型的性质（2）

二次型的其它类型

➤ 内容小结

内容小结

1. 正定二次型(矩阵)的概念

定义：$\forall X \neq 0$, 实二次型 $f(X) = X^T AX > 0$

2. 正定矩阵的性质

(1) 设实对称矩阵A正定, 则 $kA\ (k > 0)$、A^T、A^{-1}、A^* 也正定。

(2) 设A,B为n阶正定阵 $\Rightarrow kA + lB$ 也正定 $(k > 0, l > 0)$.

(3) 若$A = (a_{ij})_{n\times n}$正定，则$|A| > 0$,且$a_{ii} > 0, (\forall i)$.

（4）充分必要条件：

n元实二次型 $f = X^T AX$ 正定 (A为正定矩阵)

$\Leftrightarrow$ A的特征值全为正

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数 $p = n$

$\Leftrightarrow$ A与单位矩阵合同，即 $A = C^T C \quad (|C| \neq 0)$.

$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式全大于0

3. 二次型的其它类型

对于二次型 $f(X)=X^TAX$ 及任意非零实向量 X，

(1) 如果 $f(x)=X^TAX<0$，则称 $f(X)$ 是负定二次型；

(2) 如果 $f(x)=X^TAX\geq 0$，则称 $f(X)$ 是半正定二次型；

(3) 如果 $f(x)=X^TAX\leq 0$，则称 $f(X)$ 是半负定二次型；

(4) 不是正定, 半正定, 负定, 半负定的二次型称为不定二次型.

负定的判定： A负定 $\Leftrightarrow -A$正定.