第二章 一元函数微分学

§2.5 函数的微分

一、微分的概念

二、可导与可微的关系

三、微分的几何意义

四、微分公式和法则

五、微分在近似计算中的应用

第二章 一元函数微分学

§2.5 函数的微分

一、微分的概念

二、可导与可微的关系

三、微分的几何意义

四、微分公式和法则

五、微分在近似计算中的应用

一、微分的概念

如何简便计算$\sin 29^\circ$?

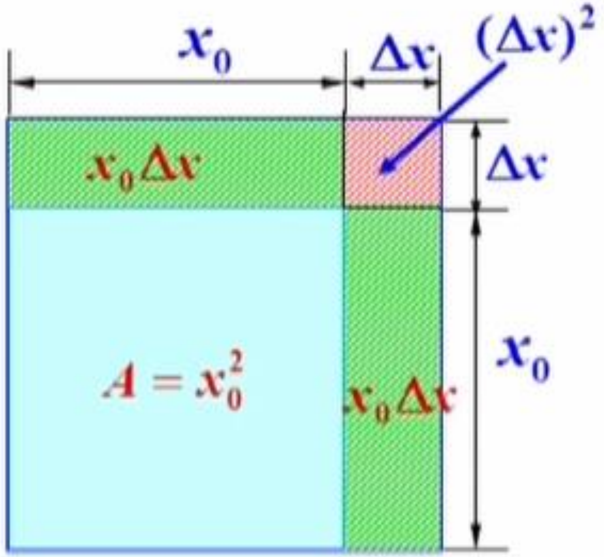
已知$\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$, 令$y = \sin x$, 则$\sin 29^\circ = \sin 30^\circ + \Delta y\Big|_{\substack{x=30^\circ \\ \Delta x=-1^\circ}}$.

如何简便计算当$|\Delta x|$很小时Δy的近似值?

实例：正方形金属薄片受热后面积的改变量.

设边长由x_0变到$x_0+\Delta x$，正方形面积 $A=x^2$，

$$\therefore \Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=\underbrace{\boxed{2x_0\cdot\Delta x}}_{(1)}+\underbrace{(\Delta x)^2}_{(2)}.$$



(1)：Δx的线性函数，且为ΔA的主要部分；

(2)：Δx的高阶无穷小，当$|\Delta x|$很小时可忽略.

考察函数$y=x^3$的改变量Δy

$$\Delta y=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=\underbrace{\boxed{3x_0^2\cdot\Delta x}}_{(1)}+\underbrace{3x_0\cdot(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}_{(2)}.$$

问题：这个Δx的线性函数是否所有函数的改变量都有？

定义 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的增量可以表示为

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可微，

并且称 $A\cdot\Delta x$ 为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的微分，

记作 $dy\big|_{x=x_0}$ 或 $df(x_0)$，即 $dy\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x$

$y=f(x)$ 在任意点 x 的微分，称为函数的微分，记作 dy 或 $df(x)$.

$$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)=A\cdot\Delta x+o(\Delta x) \qquad \text{即 } \Delta y = dy+o(\Delta x)$$

微分 dy 就是函数增量 Δy 的线性主部.

微分的实质

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x) = dy + o(\Delta x)$$

注：(1) dy是自变量的改变量Δx的线性函数;

(2) $\Delta y - dy = o(\Delta x)$是比$\Delta x$高阶无穷小;

(3) 当$A \neq 0$时，dy与Δy是等价无穷小;

(4) 当$|\Delta x|$很小时，$\Delta y \approx dy$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{A \cdot \Delta x + o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[1 + \frac{o(\Delta x)}{A \cdot \Delta x} \right] = 1$$

第二章 一元函数微分学

§2.5 函数的微分

一、微分的概念

二、可导与可微的关系

三、微分的几何意义

四、微分公式和法则

五、微分在近似计算中的应用

二、可导与可微的关系

可导 $\Leftrightarrow \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在 ? 可微 $\Leftrightarrow \Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$

若函数$f(x)$在点x_0可导,

则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$,

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha,$$

$$\Rightarrow \Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \alpha\cdot(\Delta x)$$

$$= f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x),$$

$\Rightarrow f(x)$在x_0可微, 且$f'(x_0) = A$.

若函数$f(x)$在点x_0可微,

则$\Delta y = A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$,

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = A,$$

$\Rightarrow f(x)$在x_0可导, 且$A = f'(x_0)$.

定理 函数$y=f(x)$在x_0可微的充要条件是在x_0处可导，且$A=f'(x_0)$.

$$dy\Big|_{x=x_0}=f'(x_0)\cdot\Delta x=f'(x_0)\cdot dx$$

通常把自变量x的增量Δx称为自变量的微分，即$dx=\Delta x$.

$$dy=f'(x)dx \Longrightarrow \frac{dy}{dx}=f'(x)$$

即函数的导数等于函数的微分dy与自变量的微分dx之商.

导数也叫"微商".

例1 求函数 $y = x^3$ 当 $x = 2$, $\Delta x = 0.02$ 时的微分.

解 $\because dy = (x^3)'\Delta x = 3x^2\Delta x,$

$$\therefore dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 3x^2\Delta x\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.02}} = 0.24.$$

例2 设 $y = \ln(1+2x)$, 求 dy.

解 $\because\ y' = \dfrac{1}{1+2x}(1+2x)' = \dfrac{2}{1+2x}$,

$\therefore\ dy = \dfrac{2}{1+2x}dx.$

第二章 一元函数微分学

§ 2.5 函数的微分

一、微分的概念

二、可导与可微的关系

三、微分的几何意义

四、微分公式和法则

五、微分在近似计算中的应用

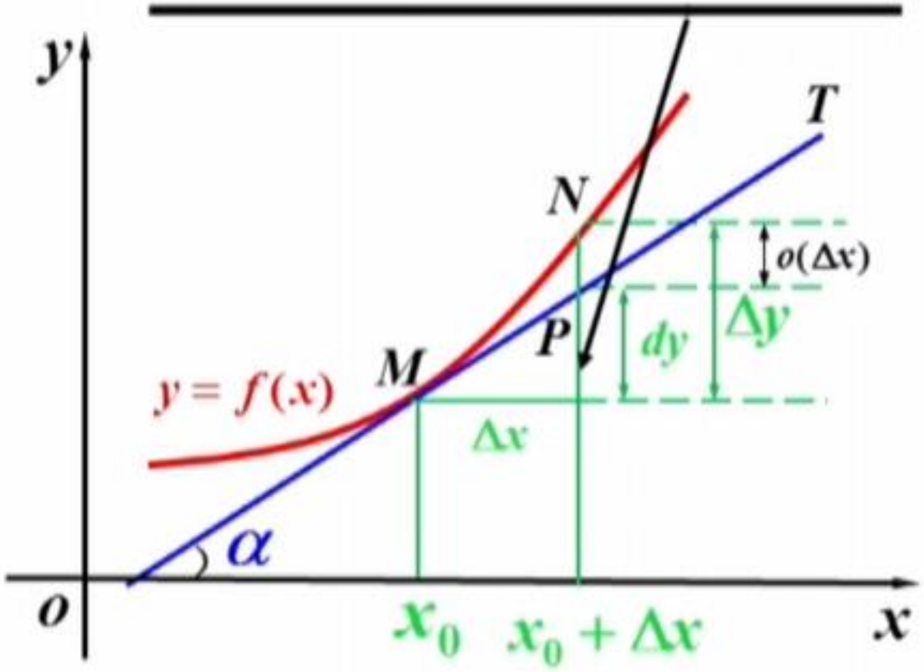
三、微分的几何意义

$$\tan\alpha\cdot\Delta x = f'(x_0)\cdot\Delta x = dy\big|_{x=x_0}$$

$$y = f(x)$$

Δy是曲线上点的纵坐标增量,

dy是切线上点的纵坐标增量.



当$|\Delta x|$很小时, 在点M的附近,

可用切线段MP近似代替曲线段MN.

第二章 一元函数微分学

§2.5 函数的微分

一、微分的概念

二、可导与可微的关系

三、微分的几何意义

四、微分公式和法则

五、微分在近似计算中的应用

四、微分公式和法则

$dy = f'(x)dx$

1. 基本初等函数的微分公式

$d(C) = 0$ $\qquad d(\sin x) = \cos x dx$ $\qquad d(\sec x) = \sec x \tan x dx$

$d(x^{\mu}) = \mu x^{\mu-1} dx$ $\qquad d(\cos x) = -\sin x dx$ $\qquad d(\csc x) = -\csc x \cot x dx$

$d(a^{x}) = a^{x} \ln a dx$ $\qquad d(\tan x) = \sec^2 x dx$ $\qquad d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a} dx$

$d(e^{x}) = e^{x} dx$ $\qquad d(\cot x) = -\csc^2 x dx$ $\qquad d(\ln x) = \dfrac{1}{x} dx$

$d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\qquad d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$d(\arctan x) = \dfrac{1}{1+x^2} dx$ $\qquad d(\operatorname{arccot} x) = -\dfrac{1}{1+x^2} dx$

2. 函数和、差、积、商的微分法则

设u、v均可微

$$d(u \pm v) = du \pm dv \qquad d(Cu) = Cdu$$

$$d(uv) = vdu + udv \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0)$$

$$\because \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}(v \neq 0)$$

$$\therefore d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}dx = \frac{vu'dx - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}(v \neq 0)$$

中国大学MOOC

3. 复合函数的微分法则

设 $y = f(u)$，$u = \varphi(x)$ 均可微 $\quad y = f[\varphi(x)]$

$$dy = \{f[\varphi(x)]\}'dx = f'(u)\boxed{\varphi'(x)dx} = f'(u)du.$$

$$= d\varphi(x) = du$$

$$\boxed{dy = f'(u)du}$$

微分形式的不变性

若 u 是自变量，$dy = f'(u)du$

复合函数求微分

例1 设 $y=\ln(x+e^{x^2})$, 求dy.

解 $dy=\dfrac{1}{x+e^{x^2}}d(x+e^{x^2})=\dfrac{1}{x+e^{x^2}}(dx+de^{x^2})$

$=\dfrac{1}{x+e^{x^2}}[dx+e^{x^2}d(x^2)]=\dfrac{1}{x+e^{x^2}}(dx+e^{x^2}\cdot 2xdx)$

$=\dfrac{1}{x+e^{x^2}}(1+2xe^{x^2})dx.$

例2 设 $y = e^{-ax}\sin bx$，求 dy.

乘积的微分

解 $dy = \sin bx \cdot d(e^{-ax}) + e^{-ax} \cdot d(\sin bx)$

$= \sin bx \cdot e^{-ax} d(-ax) + e^{-ax} \cdot \cos bx d(bx)$

$= \sin bx \cdot e^{-ax} \cdot (-a)dx + e^{-ax} \cdot \cos bx \cdot bdx$

$= e^{-ax}(b\cos bx - a\sin bx)dx.$

例3 设$\cos(xy)=x^2y^2$，求dy和$\dfrac{dy}{dx}$.

解 两边微分

$$d[\cos(xy)]=d(x^2y^2)$$

$$-\sin(xy)d(xy)=y^2d(x^2)+x^2d(y^2)$$

$$-\sin(xy)(ydx+xdy)=2xy^2dx+2x^2ydy$$

$$\Rightarrow dy=-\frac{\sin(xy)y+2xy^2}{\sin(xy)x+2x^2y}dx,$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{\sin(xy)y+2xy^2}{\sin(xy)x+2x^2y}.$$

例4 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.

(1) $d(\quad)=e^{2x}dx$; (2) $d(\quad)=\cos\omega x dx$.

解 (1) $\because d(e^{2x})=2e^{2x}dx$,

$$\therefore e^{2x}dx=\frac{1}{2}d(e^{2x})=d(\frac{1}{2}e^{2x}),$$

$$\Rightarrow d(\frac{1}{2}e^{2x}\boxed{+C})=e^{2x}dx;$$

凑微分

(2) $\because d(\sin\omega x)=\omega\cos\omega x dx$,

$$\therefore \cos\omega x dx=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega x)=d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t),$$

$$\Rightarrow d(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\boxed{+C})=\cos\omega t dt.$$

五、微分在近似计算中的应用

设函数$y=f(x)$可微，当$|\Delta x|$很小时，

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

函数增量的近似值：$\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x,$

$f(x)$在点x_0的线性近似

$$\Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\Rightarrow f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0), \quad \Rightarrow f(x) \approx f(0) + f'(0)\cdot x.$$

设$f(x)=(1+x)^{\alpha}$，$f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$，$\Rightarrow f(0)=1,\ f'(0)=\alpha,$

$$(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x,\quad \sin x \approx x,\quad \tan x \approx x,\quad e^{x} \approx 1+x,\quad \ln(1+x) \approx x.$$

当$|x|$很小时

例1 计算下列各数的近似值：(1) $e^{-0.03}$; (2) $\sqrt[3]{998.5}$.

解 (1) $e^{-0.03} \approx 1 - 0.03 = 0.97$.

$e^{x} \approx 1 + x,$

例2 计算$\sin 29^{\circ}$的近似值. $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$

解 设$f(x)=\sin x$, $f'(x)=\cos x$,

$$\because\ x_0=30^{\circ}=\frac{\pi}{6},\ \Delta x=-1^{\circ}=-\frac{\pi}{180},$$

$$\therefore\ f(\frac{\pi}{6})=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ f'(\frac{\pi}{6})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin 29^{\circ}=\sin[\frac{\pi}{6}+(-\frac{\pi}{180})]\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot(-\frac{\pi}{180})$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot(-\frac{\pi}{180})\approx 0.485.$$

例3　有一批半径为$1cm$的球，为提高球面的光洁度，需镀上一层铜，厚度为$0.01cm$，请估计每个球需用铜多少克?(铜的密度为$8.9g/cm^3$)

解　球体体积为$V=\frac{4}{3}\pi R^3$，

镀铜的体积为V在$R=1$，$\Delta R=0.01$时体积的增量ΔV，

$$\Delta V \approx dV\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2 \Delta R\Big|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} = 4\pi\cdot 1^2\cdot 0.01 \approx 0.13\ (\mathrm{cm}^3),$$

$\therefore$ 每个球需用铜：$8.9\times 0.13 = 1.16g$.

小结

★ 微分学所要解决的两类问题:

$$\begin{cases} \text{函数的变化率问题} \longrightarrow \text{导数的概念} \\ \text{函数的增量问题} \longrightarrow \text{微分的概念} \end{cases}$$

求导数与微分的方法，叫做<u>微分法.</u>

研究微分法与导数理论及其应用的科学，叫做<u>微分学.</u>

导数与微分的区别:

1. 函数$f(x)$在点x_0处的导数$f'(x_0)$是一个数,

而微分$dy = f'(x_0)\Delta x$是Δx的线性函数.

2. 从几何意义上来看, $f'(x_0)$是曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线斜率,

而微分$dy = f'(x_0)\Delta x$是曲线$y = f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线在该点的纵坐标增量.