四. 特征值与特征向量的计算

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

α是λ的特征向量 $\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I - A)X = 0$ 的非零解

(1) 求$|\lambda I - A| = 0$ 的根：$\lambda_1, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一λ_i，求$\left(\lambda_i I - A\right)X = 0$ 的一组基础解系：

$$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{ir_i}$$

则A的属于特征值λ_i的全部特征向量为：

$$k_1\alpha_{i1} + k_2\alpha_{i2} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{ir_i}$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 不全为0.

例5. 设 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, 求 A 的特征值和特征向量.

解: $$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+2 & -4 \\ 0 & \lambda-2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+6 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 4 \\ 2 & \lambda+6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2+5\lambda-14) = (\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

$\Rightarrow \lambda_1 = 2$(二重), $\lambda_2 = -7$.

求$\lambda_1 = 2$的特征向量：即$(\lambda_1 I - A)X = 0$的非零解：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2 + 2x_3$$

基础解系为： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A属于特征值2的全部特征向量为：

$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2$， k_1, k_2 不全为0

求$\lambda_2=-7$的特征向量:

$$\lambda_2 I-A=\begin{pmatrix}-8&2&-2\\2&-5&-4\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\-8&2&-2\\-2&-4&-5\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&-18&-18\\0&-9&-9\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}2&-5&-4\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1/2\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_3\\x_2=-x_3\end{cases}$$ 基础解系为: $\alpha_3=(1,2,-2)^T$

特征值 -7 的全部特征向量为: $k_3\alpha_3,k_3\neq 0$