第一章 矩阵及其初等变换

典型例题

例 1 设 A, B 均为三阶矩阵, I 是三阶单位矩阵, 已知 $AB=2A+B$, $B=\begin{pmatrix}2&0&2\\0&4&0\\2&0&2\end{pmatrix}$, 则 $(A-I)^{-1}=$___________ .

解 $AB=2A+B$

$$\Rightarrow O=AB-2A-B=(A-I)(B-2I)-2I\Rightarrow (A-I)(B-2I)=2I$$

$$\Rightarrow (A-I)^{-1}=\frac{1}{2}(B-2I)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&2\\0&2&0\\2&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

例 2 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-1\\2&3\end{pmatrix}, B=A^2-3A+2I$, 则 $B^{-1}=$_______.

分析 直接计算则计算量较大, 先对 B 进行因式分解可简化计算

解 $B=(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1\\2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\2&0\end{pmatrix}$.

简单计算可得: $B^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\-1&-1\end{pmatrix}$.

例 3 设 α 为 3 维列向量, α^T 是 α 的转置. 若 $\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$, 则 $\alpha^T\alpha=$___________.

解 由 $A=\alpha\alpha^T=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}(1,-1,1)$, 知 $\alpha^T\alpha=(1,-1,1)\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}=3$.

例 4 设 A,B 为同阶可逆阵, 则(　　)成立.

(A) $AB=BA$;　　　　(B) 存在可逆矩阵 P, 使 $P^{-1}AP=B$;

(C) 存在可逆矩阵 C, 使 $C^T AC = B$;　　(D)　存在可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ = B$.

分析 同阶可逆矩阵等价, 因而存在可逆矩阵 P, Q, 使 $PAQ = B$, 因此(D)正确;

由于 P, Q 之间没有必然的联系, 故(B), (C) 均错误(事实上, (B)给出的是两矩阵相似的定义, 而 (C) 给出的是两矩阵合同的定义);

同阶可逆矩阵也不满足交换律, 故(A)错误.

例 **5** 设 $A, B, A+B, A^{-1}+B^{-1}$均为n阶可逆矩阵, 则 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}=$（　　）.

(A) $A^{-1}+B^{-1}$,　(B) $A+B$,　(C) $A(A+B)^{-1}B$,　(D) $(A+B)^{-1}$.

分析 两个矩阵的求和运算与求逆运算一般是不能交换的, 首先应当猜测最可能的答案是(C), 然后逐步检验:

$$\left(A^{-1}+B^{-1}\right)\left[A\left(A+B\right)^{-1}B\right]=\left[\left(A^{-1}+B^{-1}\right)\right]A\left(A+B\right)^{-1}B=\left(I+B^{-1}A\right)\left(A+B\right)^{-1}B$$

此时等式看似不可再化简下去, 其原因是乘积的中间有 $(A+B)^{-1}$, 但是仔细观察, 可以发现, 如上等式最右端的第一个矩阵可以提出 $A+B$:

$$(I+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=(B^{-1}B+B^{-1}A)(A+B)^{-1}B=B^{-1}(A+B)(A+B)^{-1}B=I$$

因此(C)正确.

此外, 若令 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, 则容易发现, 除了答案$(C)$, 其它答案均是错误的.

例 **6** 设 A 是 3 阶方阵, 将 A 的第 1 列与第 2 列交换得 B, 再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C, 则满足 $AQ=C$ 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$;　(B) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$;　(C) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;　(D) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

分析 对矩阵进行一次初等列变换相当于右乘初等变换对应的初等矩阵(对单位矩阵施行该初等列变换所得到的矩阵)

$$B=A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},C=B\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow A\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=C$$

$$\Rightarrow Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{选}(D).$$

例 7 设 A、B 均为三阶方阵，I 为三阶单位矩阵，它们满足

$$AB+I=A^2+B$$

其中 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$，求矩阵 B.

解 对 $AB+I=A^2+B$ 变形

$$(I-A)B=I-A^2,$$

因为

$$I-A=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&-1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

因为 $I-A\cong I$，所以 $I-A$ 可逆，因此有

$$B=(I-A)^{-1}(I-A^2)=(I-A)^{-1}(I-A)(I+A)=I+A$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{pmatrix}.$$

例 8 设四阶矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

且矩阵 A 满足关系式 $A(I-C^{-1}B)^TC^T=I$，求矩阵 A.

解 由 A、B、C 所满足的关系式可知

$$I=A[C(I-C^{-1}B)]^T=A(C-CC^{-1}B)^T=A(C-B)^T$$

由已知条件可知

$$(C-B)^T=\left(\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)^T$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^T=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

易知$(C-B)^T$可逆，并且它的逆矩阵为

$$[(C-B)^T]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$$

所以 $$A=[(C-B)^T]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}.$$

例 9 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$，且矩阵 X 满足

$$AXA+BXB=AXB+BXA+I$$

I 是三阶单位矩阵，求 X.

分析　已知矩阵满足的等式求解某矩阵时，通常对矩阵等式先化简，后计算.

解　$AXA+BXB=AXB+BXA+I\Rightarrow(AXA-AXB)+(BXB-BXA)=I$

$$\Rightarrow AX(A-B)+BX(B-A)=I$$
$$\Rightarrow AX(A-B)-BX(A-B)=I$$
$$\Rightarrow(A-B)X(A-B)=I$$

因此当$A-B$可逆时，$X=\left((A-B)^{-1}\right)^2$，又

$$A-B=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix},$$

经计算可得$(A-B)^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&2\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，因而，$X=\left[(A-B)^{-1}\right]^2=\begin{pmatrix}1&2&5\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$.

例 10 设$A=\begin{pmatrix}B&C\\O&D\end{pmatrix}$，其中$B$、$D$均是可逆矩阵，求$A^{-1}$.

解 设$A^{-1}=\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}$，由

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}B&C\\O&D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X_{11}&X_{12}\\X_{21}&X_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}BX_{11}+CX_{21}&BX_{12}+CX_{22}\\DX_{21}&DX_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_1&O\\O&I_2\end{pmatrix},$$

可得

$$\begin{cases}BX_{11}+CX_{21}=I_1\\BX_{12}+CX_{22}=O\\DX_{21}=O\\DX_{22}=I_2\end{cases}$$

由于B、D是可逆矩阵，容易求得

$$X_{21}=O,\ X_{22}=D^{-1},\ X_{11}=B^{-1},\ X_{12}=-B^{-1}CD^{-1},$$

故 $$A^{-1}=\begin{pmatrix}B^{-1}&-B^{-1}CD^{-1}\\O&D^{-1}\end{pmatrix}.$$

例 11 设X是$n\times1$矩阵，且$X^TX=1$，证明$S=I-2XX^T$是对称矩阵，且$S^2=I$.

分析 A是对称矩阵$\Leftrightarrow A^T=A$，因而仅需证明$S^T=S$即可.

证 $S^T=(I-2XX^T)^T=I^T-2(XX^T)^T=I-2(X^T)^TX^T=I-2XX^T=S$,

所以S是对称矩阵.

$$\begin{aligned}S^2&=(I-2XX^T)(I-2XX^T)\\&=I-4XX^T+4XX^TXX^T\\&=I-4XX^T+4XX^T\quad(X^TX=1)\\&=I\end{aligned}$$

例 12 已知实矩阵$A=(a_{ij})_{m\times n}$满足$A^TA=O$，证明：$A=O$.

分析 对于一般$m\times n$的命题，有时我们觉得无法下手，此时我们往往可以从特殊到一

般，亦即先考察命题的特殊情况，再考虑特殊情况时的证明是否可以推广到一般情况，先考虑 $m=n=2$ 的特殊情形:

若 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$，计算可得 $A^TA=\begin{pmatrix} a_{11}^2+a_{21}^2 & a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} \\ a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22} & a_{12}^2+a_{22}^2 \end{pmatrix}=O$.

观察如上等式，再考虑到我们的目的是证明每一 a_{ij} 均为 0，可知，由 A^TA 的对角元为零以及矩阵 A 中的元均为实数可得 $A=O$， 显然，这种考虑 A^TA 对角元为零的方法可以推广到一般情形，由此可得如下证明:

证

$$O=A^TA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^m a_{k1}^2 & & & * \\ & \sum_{k=1}^m a_{k2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & \sum_{k=1}^m a_{kn}^2 \end{pmatrix}$$

考虑最右端矩阵对角元，可得：$\sum_{k=1}^m a_{ki}^2=0, i=1,2,\cdots,n$，但是 a_{ki} 均为实数，因而 $a_{ki}=0\left(i=1,2,\cdots,n;\ k=1,2,\cdots,m\right)$，此即 $A=O$.

例 13 设 A 是 n 阶方阵，证明：存在 n 阶对称矩阵 B 与反对称矩阵 C 使得 $A=B+C$

分析 对称矩阵 B: $B^T=B$；反对称矩阵 C: $C^T=-C$

为证明结论，最佳方法是找出所需之 B, C, 假设已经找出，看看 B,C 应该满足什么条件:

设已经找到对称矩阵 B，反对称矩阵 C 满足

$$A=B+C,$$

则对上式两端同时取转置，得 $A^T=(B+C)^T=B^T+C^T=B-C$，两式联立得:

$$\begin{cases} B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right) \\ C=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right) \end{cases}$$

证 令 $B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right), C=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$，则:

$$B=B^T, C^T=-C\text{，且 } A=B+C$$

B, C 即为所求

例 14　已知 A,B 为 3 阶矩阵，且满足 $2A^{-1}B=B-4I$，其中 I 为 3 阶单位矩阵,

(1) 证明：矩阵 $A-2I$ 可逆;

(2) 若 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$，求矩阵 A.

证　(1) $2A^{-1}B=B-4I \Rightarrow 2B=AB-4A$

$$\Rightarrow O=AB-4A-2B=(A-2I)(B-4I)-8I$$

$$\Rightarrow (A-2I)(B-4I)=8I \Rightarrow A-2I\text{可逆并且}A-2I=8(B-4I)^{-1}$$

(2) $A-2I=8(B-4I)^{-1}=8\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}$

经过计算可得:

$$\begin{pmatrix}-3 & -2 & 0\\ 1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0\\ -\frac{1}{8} & -\frac{3}{8} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

例 15 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3\\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3\\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3\end{pmatrix}$，证明：存在数 k，使 $A^2=kA$.

分析 直接计算 A^2 再与 A 进行比较，找出所需要的 k 显然是可行的，但不是最有效的；观察 A 的形状，发现 $A=\alpha^T\beta$，其中 $\alpha=(a_1,a_2,a_3)$, $\beta=(b_1,b_2,b_3)$，由此可得

$$A^2=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=(\beta\alpha^T)\alpha^T\beta=(\beta\alpha^T)A$$

证 令 $\alpha=(a_1,a_2,a_3),\ \beta=(b_1,b_2,b_3)$，则:

$$A=\alpha^T\beta$$

此时，

$$A^2=(\alpha^T\beta)(\alpha^T\beta)=\alpha^T(\beta\alpha^T)\beta=\alpha^T(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)\beta=(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)A$$

此即，存在 $k=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, 使得$A^2=kA$.