四. 方阵乘积的行列式

问题：1. 可逆矩阵与行列式的关系；
2. 矩阵乘积的行列式.

定理1 方阵A可逆的充要条件为$\det A \neq 0$.

证 设 $A \xrightarrow{\text{行初等变换}} R$（简化行阶梯形）

即存在初等矩阵 $E_1, ..., E_t$ 使得 $A = E_1 \cdots E_t R$

$\Leftarrow$: 已知 $\det A \neq 0$ 若A不可逆，

则R的最后一行的元全为零，所以$\det R = 0$

$\det A = (\det E_1) \cdots (\det E_t)(\det R) = 0$, 矛盾.

$\Rightarrow$: 若A可逆，则$R=I$,

$$\det A = (\det E_1) \cdots (\det E_t)(\det I) \neq 0.$$

定理2 设A, B为n阶方阵，则

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

证 设$A \xrightarrow{\text{行初等变换}} R$（简化行阶梯形）

即存在初等矩阵 $E_1, \ldots, E_t$使得 $A = E_1 \cdots E_t R$

$$\det(AB) = \det(E_1 \cdots E_t RB)$$

$$= (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det(RB)).$$

若A可逆，则$R=I$,

$$\det(AB) = (\det E_1)\cdots(\det E_t)(\det(IB)) = (\det A)(\det B).$$

若A不可逆，则R的最后一行全为零,RB的最后一行全为零.

$$\det(AB) = 0$$

$$(\det A)(\det B) = 0(\det B) = 0.$$

推论1 设A_i $(i=1, \ldots, t)$为n阶矩阵，则

$$\det(A_1A_2\cdots A_t)=(\det A_1)\cdots(\det A_t).$$

推论2 设A, B为n阶矩阵，且$AB=I$ (或$BA=I$), 则

$$B=A^{-1}$$

证

$$\det(AB)=(\det A)(\det B)=\det I=1.$$

所以 $\det A\neq 0$, 于是A可逆

$$A^{-1}AB=A^{-1}I=A^{-1}$$

$$B=A^{-1}$$

应用 $\det(A^{-1})=\dfrac{1}{\det A}$

[结束]