五. 齐次线性方程组

给定齐次线性方程组: $A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$

定理1: 设$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\right)$,则如下叙述等价:

(1) $AX=0$ 有非零解;

(2) 秩$\mathrm{R}(A)<n$;

(3) A的列组线性相关;

$m=n$时: (4) 行列式$|A|=0$;

(5) A不可逆;

定理2: 设$A_{m\times n}X_{n\times 1}=0_{m\times 1}$有非零解.则:

(1) 所有解构成非零的**解空间:**

$$V_A=\left\{X\in \mathrm{R}^n \middle| AX=0\right\}.$$

(2) 解空间的基(最大无关组)称为**基础解系**;

[1] 解; [2] 线性无关; [3] 任一解可由其表出;

(3) **基础解系**一定存在,解数恰为自由变元数:

基础解系中**解数** $=n-R(A)$.

(4) 若基础解系中含k个解,

则 **任意k个无关的解** 都是基础解系.

基础解系的判定

设$\alpha_1,\cdots,\alpha_k \in \mathbf{R}^n$是齐次方程组$A_{m\times n}X_{n\times 1}=\mathbf{0}_{m\times 1}$的解，

则如下叙述等价:

(1) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$是基础解系;

即$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关,

且任一解都可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性表出.

(2) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关且$R(A)=n-k$.

(3) $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关且基础解系中含k个解.

(4) 任一解可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$惟一线性表出.

例1. 设 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 系数矩阵 A 的秩为r, 则 $AX=0$ 有非零解的充分必要条件是(　　)

(A) $r = n$.　　(B) $r < n$.

(C) $r \ge n$.　　(D) $r > n$.

分析: n元齐次方程组 $AX=0$ 解的两种情况:

$$(1)\ R(A) < n \Leftrightarrow \text{存在自由变元} \Leftrightarrow \text{非零解}$$

$$(2)\ R(A) = n \Leftrightarrow \text{不存在自由变元} \Leftrightarrow \text{只有零解}$$

例2. 已知 $A_{5\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若

$$\eta_1=(3,1,-2,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$$

是方程组 $AX=0$ 的基础解系，那么如下命题：

(1) α_1,α_3线性无关；　　(2) α_1可由α_2,α_3线性表出；

(3) α_3,α_4线性无关；　　(4) 秩$R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3.$

中正确的是(　　)

(A) (1)(3).　　(B)(2)(4).　　(C) (2)(3).　　(D) (1)(4).

分析：

$$\left.\begin{array}{r}4\text{个变元}\\ \text{基础解系中含2个解向量}\end{array}\right\}\Rightarrow R(A)=2$$

(1)不正确

$$\left.\begin{array}{l}A\eta_1=0\Rightarrow 3\alpha_1+\alpha_2-2\alpha_3+\alpha_4=0\\ A\eta_2=0\Rightarrow \qquad\qquad\quad \alpha_2+\alpha_4=0\end{array}\right\}\Rightarrow 3\alpha_1-2\alpha_3=0$$

(2)正确

例2. 已知 $A_{5\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，若

$$\eta_1=(3,1,-2,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$$

是方程组 $AX=0$ 的基础解系，那么如下命题：

$(1)\ \alpha_1,\alpha_3$线性无关；　　$(2)\ \alpha_1$可由α_2,α_3线性表出；

$(3)\ \alpha_3,\alpha_4$线性无关；　　(4) 秩$R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3.$

中正确的是(　　)

分析： $R(A)=2$　　$3\alpha_1-2\alpha_3=0$　　$\alpha_2+\alpha_4=0$

若(3)不正确：

$$\begin{cases}\alpha_3=0\ \Rightarrow \alpha_1=\alpha_3=0,\alpha_2=-\alpha_4 & \Rightarrow R(A)\le 1\\ \alpha_3\ne 0\ \Rightarrow \alpha_4=k\alpha_3,\ \alpha_1=(2/3)\alpha_3,\alpha_2=-k\alpha_3 & \Rightarrow R(A)\le 1\end{cases}$$

矛盾！　　　　因此(3)正确

例2. 已知 $A_{5\times4}=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$， 若

$$\eta_1=(3,1,-2,1)^T,\eta_2=(0,1,0,1)^T$$

是方程组 $AX=0$ 的基础解系，那么如下命题：

$(1)\ \alpha_1,\alpha_3$线性无关；　　$(2)\ \alpha_1$可由α_2,α_3线性表出；

$(3)\ \alpha_3,\alpha_4$线性无关；　　(4) 秩$R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=3$.

中正确的是(　　)

(A) (1)(3).　　(B)(2)(4).　　$\boxed{\text{(C) (2)(3).}}$　　(D) (1)(4).

(4)不正确：

$$(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow R(\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3-\alpha_4)\le R(A)=2$$

例3. 设 $\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases}$ $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0.$

试讨论 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 和b满足何种关系时:

(1) 方程组仅有零解;

(2) 方程组有非零解? 此时求方程组的一个基础解系.

分析: $|A|=(a_1+\cdots+a_n+b)b^{n-1}=b^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i+b\right)$

(1) 方程组仅有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0$

$\Leftrightarrow b\neq 0$ 且 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b\neq 0$

$$\begin{cases}(a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0,\end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n}a_i\neq 0.$$

(2) 方程组有非零解? 此时求方程组的一个基础解系.

(2) 方程组有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow b=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n}a_i+b=0$

$b=0$ 时：不妨设 $a_1\neq 0$.

此时系数阵各行相同, 基础解系：$\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-a_3\\ 0\\ a_1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\cdots,\begin{pmatrix}-a_n\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ a_1\end{pmatrix}$

$$\begin{cases} (a_1+b)x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ a_1x_1+(a_2+b)x_2+\cdots+a_nx_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)x_n=0, \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0.$$

(2) 方程组有非零解 $\Leftrightarrow$ $b=0$ 或 $\sum_{i=1}^{n} a_i + b = 0$

$\sum_{i=1}^{n} a_i + b = 0$ 时:

若 $a_i \neq 0$, 此时系数矩阵中 a_{ii} 的余子式不为0

$$\Rightarrow R(A) = n-1$$

此时系数矩阵各行元之和均为0, 基础解系为: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$