四. 综合例题

例3. 求 a, b 的值与正交矩阵 C, 使

$C^{-1}AC=\Lambda$ 为对角矩阵, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1&b&1\\b&a&1\\1&1&1\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}0&&\\&1&\\&&4\end{pmatrix}.$$

解1: $A\sim\Lambda\Rightarrow\quad |\lambda I-A|=|\lambda I-\Lambda|$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1&-b&-1\\-b&\lambda-a&-1\\-1&-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-1)^2-b-b$$
$$-(\lambda-a)-(\lambda-1)-b^2(\lambda-1)$$

$$=\lambda^3-(a+2)\lambda^2+\left(2a-b^2-1\right)\lambda+b^2-2b+1$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 + (2a - b^2 - 1)\lambda + b^2 - 2b + 1$$

$$= |\lambda I - \Lambda| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda\,,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 5, \\ b^2 - 2b + 1 = 0\,, \end{cases} \Rightarrow a = 3\,,\quad b = 1\,.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\quad \lambda_1 = 0\,, \lambda_2 = 1\,, \lambda_3 = 4\,.$$

经计算可求得$\lambda_1 = 0$的一个特征向量： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$

计算可得 $\lambda_2 = 1$ 的一个特征向量： $\alpha_2 = (1, -1, 1)^T$

$\lambda_3 = 4$ 的一个特征向量： $\alpha_3 = (1, 2, 1)^T$.

将 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)^T,$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)^T,$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1)^T.$$

令 $C = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,则 C 为正交矩阵且

$$C^{-1}AC = \mathrm{diag}(0, 1, 4).$$

例3. 求 a, b 的值与正交矩阵 C，使

$C^{-1}AC=\Lambda$ 为对角矩阵，其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

解2: $$A\sim\Lambda\Rightarrow\begin{cases}1+a+1= 0+1+4\\ |A|= 0\bullet1\bullet4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ |A|=0\end{cases}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ b & 3 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & b & 1\\ b-1 & 3 & 0\\ 0 & 1-b & 0\end{vmatrix}=-(b-1)^2=0$$

$$\Rightarrow b=1$$

其余计算类似于前一解法.

例4. 设3阶实对称矩阵的秩为2, 且满足$A^2 = 3A$,

则$|A-2I| =$ ________.

分析: 3 阶实对称矩阵A的秩为 2

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 0\text{是}A\text{的 } 3-2=1 \text{ 重特征值} \\ A^2 = 3A \Rightarrow A\text{的特征值}\lambda\text{满足}\lambda^2 = 3\lambda \\ \Rightarrow \lambda = 0 \text{ 或 } 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$的特征值为$0, 3, 3 \Rightarrow A-2I$ 的特征值为$-2, 1, 1$

$$\Rightarrow |A-2I| = (-2)\bullet 1\bullet 1 = -2$$

例5. 设3阶实对称矩阵A的特征值为1, 2, 3. 矩阵A的属于特征值1, 2 的特征向量分别是$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求A的属于特征值3的特征向量； (2) 求矩阵A.

解: (1) 设A属于特征值3的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$

因为实对称矩阵不同特征值的特征向量彼此正交

$$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha)=(\alpha_2,\alpha)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解得基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A的属于特征值3的全部特征向量为 $k(1,0,1)^T, k\neq 0$

例5. 设3阶实对称矩阵A的特征值为1, 2, 3. 矩阵A的属于特征值1, 2 的特征向量分别是$\alpha_1=(-1,-1,1)^T,\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求A的属于特征值3的特征向量； (2) 求矩阵A.

A 属于特征值3的一个特征向量为 $\alpha_3=(1,0,1)^T$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$$

计算可知 $P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&1/3\\1/6&-1/3&-1/6\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$