二阶齐次微分方程

一、线性微分方程的解的结构

二、二阶常系数齐次方程的解法

三、n 阶常系数齐次线性方程解法

§4 二阶齐次微分方程

二阶线性微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}+P(x)\dfrac{dy}{dx}+Q(x)y=f(x)$

当 $f(x)=0$时，二阶线性齐次微分方程

当 $f(x)\neq 0$时，二阶线性非齐次微分方程

n 阶线性微分方程 $y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y=f(x).$

若记 $Ay=y^{(n)}+P_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}(x)y'+P_n(x)y.$

则n阶线性微分方程可以简记为 $Ay=f$

线性映射 $A: y\in C^n[a,b]\mapsto f\in C[a,b]$

n 阶线性方程组 $A\in R_{n\times n}: y\in R^n\mapsto f\in R^n$

齐次方程：叠加原理、通解？ 齐次方程与非齐次方程解的关系？

一、线性微分方程的解的结构

1.二阶齐次方程解的结构: $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \quad (1)$

叠加原理

定理 1. 如果函数 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 是方程(1)的两个解，那么 $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 也是(1)的解, 其中 C_1、C_2 是常数.

问题: $y = C_1y_1 + C_2y_2$ 是否为通解?

线性方程组：需要线性无关性

进一步的问题:如何定义函数的线性无关?

定义 设$y_1, y_2, \cdots y_n$为定义在区间I内的n个函数. 如果存在n个不全为零的常数，使得当x在该区间内时有恒等式 $k_1y_1 + k_2y_2 + \cdots + k_ny_n \equiv 0$,则称这$n$个函数在区间$I$内线性相关，否则称线性无关.

如何判断一组函数是否线性无关?

例如： 当$x \in (-\infty, +\infty)$时，

e^x, e^{-x}, e^{2x} 线性无关； $1, \cos^2 x, \sin^2 x$ 线性相关.

特别: 若在I上有$\dfrac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq$常数,则函数$y_1(x)$与$y_2(x)$在$I$上线性无关.

齐次方程通解的结构

定理 2. 如果$y_1(x)$与$y_2(x)$是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=0 \qquad (1)$$

的两个线性无关的特解，则$y=C_1y_1+C_2y_2$就是方程(1)的通解.

例如：$y''+y=0$

$y_1=\cos x$, $y_2=\sin x$,　且 $\dfrac{y_2}{y_1}=\tan x\neq$常数,

$y=C_1\cos x+C_2\sin x.$

复值情形解的性质

定理 3. 如果二阶齐次方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (1)$$

的系数$P(x),Q(x)$都是实值函数,且$y = \varphi(x) + i\psi(x)$是方程的解,则

$\varphi(x), \psi(x), \varphi(x) - i\psi(x)$ 都是方程(1)的解.

二、二阶常系数齐次方程的解法

n 阶常系数线性微分方程的标准形式

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_ny=f(x)$$

二阶常系数非齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=f(x)$$

二阶常系数齐次线性方程的标准形式

$$y''+py'+qy=0$$

二阶常系数齐次方程的解法

特征方程法
Euler, 1743

$$y'' + py' + qy = 0$$

设 $y = e^{rx}$, 将其代入上方程, 得 $(r^2 + pr + q)e^{rx} = 0$

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征方程

特征根 $r_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$

(1) 有两个不相等的实根 $(\Delta > 0)$

特征根为 $r_1 = \dfrac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, $r_2 = \dfrac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$

两个线性无关的特解 $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}.$

故齐次方程的通解为: $y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;

（2） 有两个相等的实根 $(\Delta=0)$

特征根为 $r_1=r_2=-\dfrac{p}{2}$， 一特解为 $y_1=e^{r_1x}$，

另一解：常数变易法或线性无关性

设另一特解为 $y_2=u(x)e^{r_1x}$，

将 y_2，y_2'，y_2'' 代入原方程并化简，$u''+\underline{(2r_1+p)u'}+\underline{(r_1^2+pr_1+q)u}=0$，

知 $u''=0$，取 $u(x)=x$，则 $y_2=xe^{r_1x}$.

故齐次方程的通解为： $y=(C_1+C_2x)e^{r_1x}$；

（3） 有一对共轭复根 $(\Delta<0)$

特征根为 $r_1=\alpha+i\beta$，$r_2=\alpha-i\beta$，

$y_1=e^{(\alpha+i\beta)x}$，$y_2=e^{(\alpha-i\beta)x}$，

重新组合或定理4: $\overline{y}_1=\dfrac{1}{2}(y_1+y_2)=e^{\alpha x}\cos\beta x$，$\overline{y}_2=\dfrac{1}{2i}(y_1-y_2)=e^{\alpha x}\sin\beta x$.

故齐次方程的通解为: $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$.

总结如下:

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad r^2 + pr + q = 0$$

特征根的情况	通解的表达式
实根 $r_1 \neq r_2$	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$;
实根 $r_1 = r_2$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$;
复根 $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

例1. 求微分方程 $y''+2y'-3y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+2r-3=0$ 其特征根为两个不相等的实根 $r_1=1, r_2=-3$

方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}$.

例2. 求方程 $y''+4y'+4y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+4r+4=0$，解得 $r_1=r_2=-2$，

故所求通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}$.

例3. 求方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^2+2r+5=0$，解得 $r_{1,2}=-1\pm 2i$，

故所求通解为 $y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

三、n 阶常系数齐次线性方程解法

$$y^{(n)}+P_1y^{(n-1)}+\cdots+P_{n-1}y'+P_ny=0$$

特征方程为 $r^n+P_1r^{n-1}+\cdots+P_{n-1}r+P_n=0$

特征方程的根	通解中的对应项
(1)单实根r	给出一项 Ce^{rx}
(2)一对单复根 $r=\alpha\pm\beta i$	给出二项 $y=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$
(3)k重实根r	给出k项 $(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})e^{rx}$
(4)一对k重复根 $r=\alpha\pm j\beta$	给出$2k$项 $[(C_0+C_1x+\cdots+C_{k-1}x^{k-1})\cos\beta x+(D_0+D_1x+\cdots+D_{k-1}x^{k-1})\sin\beta x]e^{\alpha x}$

例4．求微分方程 $y^{(4)}-y=0$的通解.

解　特征方程为 $r^4-1=0 \Rightarrow r_1=1,\quad r_2=-1,\quad r_{3,4}=\pm i.$

故方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x,\ C_i,i=1,2,3,4$为常数.

例5. 求微分方程 $\dfrac{d^4x}{dt^4}+2\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$的通解.

二重复根

解　其特征方程为 $r^4+2r^2+1=0$, 特征根为 $r_{1,2}=\pm i.$

方程的通解为 $x=\left(C_1+C_2t\right)\cos t+\left(C_3+C_4t\right)\sin t,\ C_1,C_2,C_3,C_4$均为常数.

例6. 求方程$y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$ 的通解.

解　特征方程为 $r^5+r^4+2r^3+2r^2+r+1=0,\ \Rightarrow (r+1)(r^2+1)^2=0,$

特征根为 $r_1=-1,\ r_{2,3}=\pm i$ 二重复根

故所求通解为 $y=C_1e^{-x}+(C_2+C_3x)\cos x+(C_4+C_5x)\sin x.$

例7. 证明：$f(x)$满足$f'(x)=f(1-x)$,则必满足方程$f''(x)+f(x)=0$,

并求方程$f'(x)=f(1-x)$的解.

证明: $f''(x)=f'(1-x)(1-x)'=-f'(1-x)=-f(1-(1-x))=-f(x)$

$f''(x)+f(x)=0$的通解为 $f(x)=C_1\cos x+C_2\sin x$.

$\because f'(x)=f(1-x)$

$\therefore -C_1\sin x+C_2\cos x=C_1\cos(1-x)+C_2\sin(1-x)$

令 $x=0,\to C_2=\dfrac{C_1(1+\sin 1)}{\cos 1}$

从而，$f(x)=C_1\left(\cos x+\dfrac{1+\sin 1}{\cos 1}\sin x\right)$

练习1. 设连续函数$f(x)$满足$f(x)=5-\int_0^x (x-t-1)f(t)dt$，求$f(x)$.

练习2. 写出以$y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$为通解的常系数齐次线性微分方程.