罗尔定理及其几何意义

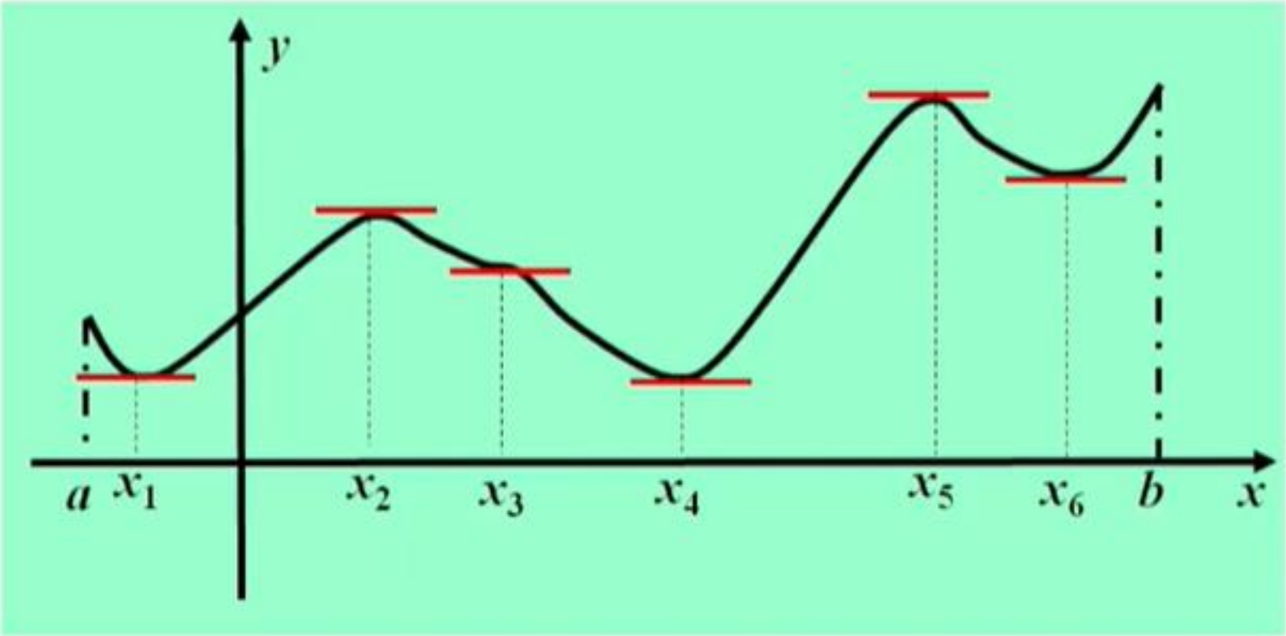
一、函数的极值

二、费马定理

三、罗尔中值定理

一、函数的极值

函数极值的定义



定义：设函数$f(x)$在区间(a,b)内有定义，x_0是(a,b)内的一个点，

- 如果存在点x_0的一个领域对于领域内的任何点x,都有$f(x)\ge f(x_0)$成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极小值。

- 如果存在点x_0的一个领域对于领域内的任何点x,都有$f(x)\le f(x_0)$成立，就称$f(x_0)$是函数$f(x)$的一个极大值。

函数的极大值与极小值统称为极值,使函数取得极值的点称为极值点.

二、 费马定理(函数极值点的必要条件)

设函数$f(x)$在点x_0可导，若x_0是$f(x)$的一个极值点，

则$f'(x_0)=0$.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

证：不妨设x_0为$f(x)$的极小值点，则$\exists U(x_0,\delta)$

使得$\forall x_0+\Delta x\in U^0(x_0,\delta)$,有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\geq 0.$$

当$\Delta x<0$时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0.$$

当$\Delta x>0$时，有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0.$$

由$f(x)$在x_0处的可导性，根据极限保号性

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\leq 0,$$

$$f'(x_0)=f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geq 0,$$

所以 $f'(x_0)=0.$

三、罗尔(Rolle)中值定理

定理 若函数$f(x)$满足以下条件：

(1) $f(x)\in C[a,b]$;　　闭区间连续

(2) $f(x)\in D(a,b)$;　　开区间可导

(3) $f(a)=f(b)$;　　有两个相同的函数值

则$\exists\xi\in(a,b)$，使得　$f'(\xi)=0$

例如：$f(x)=x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$.

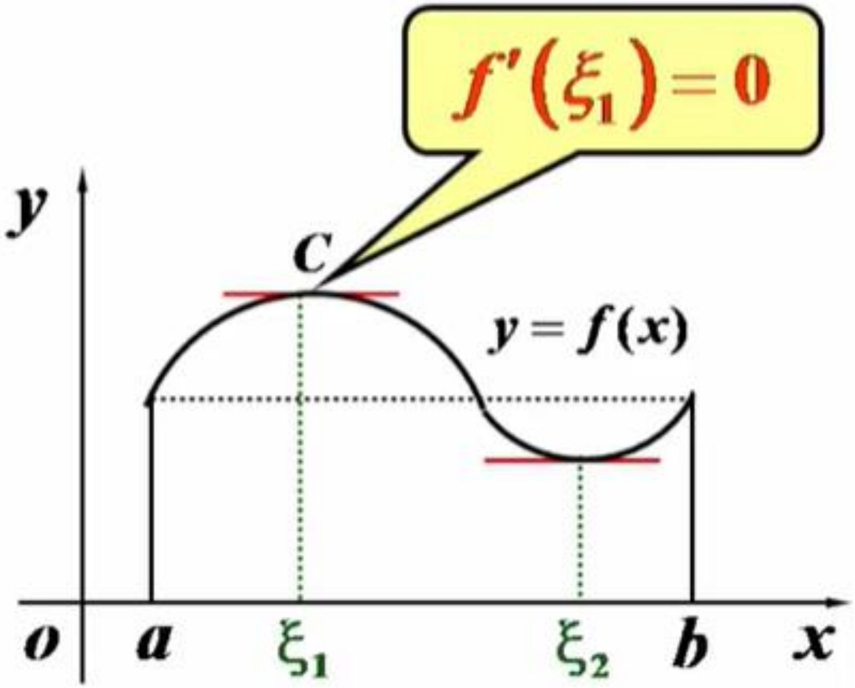
在$[-1,3]$上连续，在$(-1,3)$上可导，且 $f(-1)=f(3)=0$,

$\because f'(x)=2(x-1)$,

取$\xi=1$, $(1\in(-1,3))$

$f'(\xi)=0$.

几何解释：在曲线弧AB上至少有一点C，在该点处的切线是水平的.



如果 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上满足罗尔定理的条件，

$\therefore \exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$，

即 $f'(x)\big|_{x=\xi}=0$，也就是导函数方程 $f'(x)=0$ 有根 $\xi \in (a,b)$.

因此，也称罗尔定理为导函数方程根的存在定理.

注意:若罗尔定理的三个条件中有一个不满足,其结论可能不成立.

例如: $y = |x|,\ x \in [-2, 2]$;

在$[-2,2]$上除 $f'(0)$不存在外,满足罗尔定理的一切条件,但找不到一点能使 $f'(x) = 0$.

例 $y = x,\ x \in [0,1]$. $f(0) \neq f(1)$

例1 证明方程 $x^5-5x+1=0$ 有且仅有一个小于1的正实根.

证明：设 $f(x)=x^5-5x+1$,则 $f(x)$在$[0,1]$连续,且 $f(0)=1, f(1)=-3$.

由介值定理，$\exists\, x_0\in(0,1)$,使 $f(x_0)=0$.

设另有 $x_1\in(0,1), x_1\neq x_0$,使 $f(x_1)=0$.

$\because$ $f(x)$ 在 x_0, x_1 之间满足罗尔定理的条件,

$\therefore$ 至少存在一个 ξ (在 x_0, x_1 之间),使得 $f'(\xi)=0$.

但 $f'(x)=5(x^4-1)<0, (x\in(0,1))$ 矛盾,

$\therefore$ 方程有且仅有一个小于 1的正实根 .

电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

中国大学MOOC

罗尔定理的证明和举例

一、罗尔定理的证明

二、应用举例

电子科技大学数学科学学院

中国大学MOOC

一、罗尔(Rolle)定理

定理 若函数$f(x)$满足以下条件:

(1) $f(x)\in C[a,b]$;

(2) $f(x)\in D(a,b)$;

(3) $f(a)=f(b)$;

则$\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$

证明: $\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续, 必有最大值 M 和最小值 m.

(1) 若 $M=m$. 则 $f(x)=M$.

由此得 $f'(x)=0$. $\forall\, \xi\in(a,b)$, 都有 $f'(\xi)=0$.

(2) 若 $M\neq m$.

$\because f(a)=f(b)$, $\therefore$ 最值不可能同时在端点取得.

设 $M\neq f(a)$,

则在 (a,b) 内至少存在一点 ξ 使 $f(\xi)=M$.

$\because f'(\xi)$ 存在,

$\therefore$ 根据费马定理得 $f'(\xi)=0$.

二、应用举例

例1 设$F(x)=(1-x)^2 f(x)$，其中$f(x)$在$[1,2]$上二阶可导，且$f(2)=0$. 证明：在$(1,2)$内存在点ξ，使得$F''(\xi)=0$.

证 $\because F(x)$在$[1,2]$上连续，$F(x)$在$(1,2)$内可导，

$F(1)=F(2)=0$.所以$F(x)$满足罗尔定理的条件.

$\Rightarrow \exists \xi_1 \in (1,2)$，使$F'(\xi_1)=0$.

又$F'(x)=2(x-1)f(x)+(x-1)^2 f'(x)$,

$F'(x)\in C[1,\xi_1]\cap D(1,\xi_1)$，且$F'(1)=F'(\xi_1)=0$.

所以$F'(x)$满足罗尔定理的条件.

$\Rightarrow \exists \xi \in (1,\xi_1)\subset(1,2)$，使得$F''(\xi)=0$.

例2 设a_1，$a_2,\cdots a_n$为满足：$a_1-\dfrac{a_2}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{a_n}{2n-1}=0$的实数.

证明：$a_1\cos x+a_2\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内至少有一个根。

证 作辅助函数

$$f(x)=a_1\sin x+\frac{a_2}{3}\sin 3x+\cdots+\frac{a_n}{2n-1}\sin(2n-1)x$$

则 $f'(x)=a_1\cos x+a_3\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x.$

显然 $f(x)\in C\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cap D\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，且$f(0)=0$，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=a_1-\frac{a_3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1}=0.$$

$$a_1\cos x+a_3\cos 3x+\cdots+a_n\cos(2n-1)x=0$$

在开区间$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内至少有一个根.

例3 设 $f(x)\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$, 求证：$\exists\xi\in(0,\pi)$, 使得

$$f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0.$$

证 作辅助函数 $F(x)=f(x)\sin x.$

显然 $F(x)\in C[0,\pi]\cap D(0,\pi)$,且

$F(0)=F(\pi)=0$,满足罗尔定理, 故$\exists\xi\in(0,\pi)$

使得$F'(\xi)=0$,

因 $F'(x)=f'(x)\sin x+f(x)\cos x,$

故 $f'(\xi)\sin\xi+f(\xi)\cos\xi=0.$

例4 设函数 $f(x)\in C[0,1]\cap D(0,1)$，且 $0<f(x)<1,\forall x\in(0,1)$ 有 $f'(x)\neq 1$.

证明：存在惟一 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

证 先证存在性. 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-x,\qquad \Rightarrow F(x)\in C[0,1]$$

$$F(0)=f(0)>0,F(1)=f(1)-1<0.$$

由闭区间上连续函数的零点存在定理知,

$\exists\xi\in(0,1)$，使 $F(\xi)=0$，　即 $f(\xi)=\xi$.

用反证法证惟一性.

若有两点ξ_1、$\xi_2 \in (0,1)$ $(\xi_1 \neq \xi_2)$,使 $f(\xi_1)=\xi_1$, $f(\xi_2)=\xi_2$,

$\Rightarrow F(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$ 上满足罗尔定理的条件, 于是

$\exists \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subset (0,1)$,使得$F'(\xi)=0$,即$f'(\xi)=1$,

这与条件 $f'(x) \neq 1$矛盾.

故在$(0,1)$内存在唯一的ξ, 即$\xi \in (0,1)$,使得$f(\xi)=\xi$.

思考1: 若罗尔定理的三个条件之一不满足，定理的结论能成立吗?

思考2: 将罗尔定理中的条件$f(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$改为$D(a,b)$,需要

增加什么条件定理仍然成立?

拉格朗日中值定理

一、拉格朗日中值定理

二、几何意义

三、其他形式和推论

一、拉格朗日(Lagrange)中值定理

拉格朗日中值定理： 若 函数 $f(x)$满足以下条件

(1)在闭区间$[a,b]$上连续；

(2)在开区间(a,b)内可导；

则$\exists\xi\in(a,b)$使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

或 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

$$\boxed{f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \Leftrightarrow \boxed{f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0}$$

证　作辅助函数 $F(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}x$

$\because F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且 $F(a)=\dfrac{bf(a)-af(b)}{b-a}=F(b)$

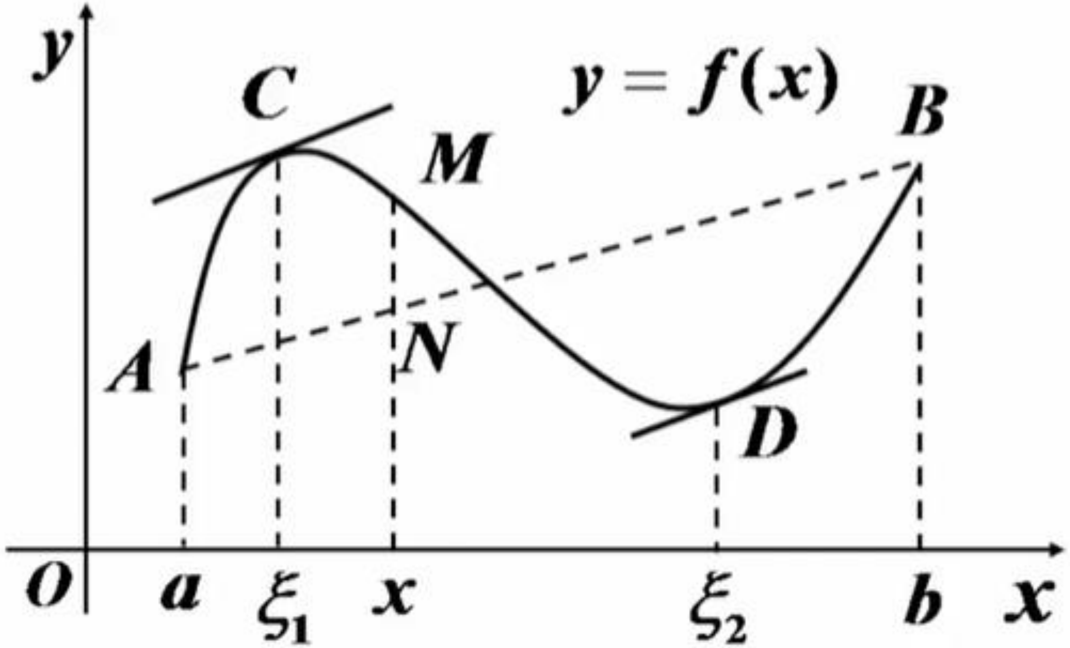
则 $\exists\, \xi\in(a,b)$，使得 $F'(\xi)=0.$

即 $f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

二、几何解释：

在曲线弧AB上至少有一点C，
在该点处的切线平行于弦AB.

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

三、其他形式和推论

有限增量公式:

设 $f(x)$在(a,b)内可导, $x_0,x_0+\Delta x\in(a,b)$, 则有

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$$

也可写成 $\Delta y=f'(x_0+\theta\Delta x)\cdot\Delta x \quad (0<\theta<1).$

增量Δy的精确表达式

推论1 如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒为零,
那末 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数.

推论2 如果$f(x),g(x)\in D(a,b)$，且$\forall x\in(a,b)$恒有$f'(x)=g'(x)$，

则在(a,b)内，$f(x)=g(x)+C$，C为常数。

证明： 作辅助函数$F(x)=f(x)-g(x)$，由题设

$$F'(x)=f'(x)-g'(x)=0,$$

根据推论1知 $F(x)=C$ （C为一常数），

即 $f(x)-g(x)=C$， 故$f(x)=g(x)+C$.

推论3 若 $f(x)$满足：

(1) $f(x)$在$[x_0, x_0+\delta)$上连续;

(2) $f(x)$在$(x_0, x_0+\delta)$内可导;

(3) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$存在$\left(或 \lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x) = \infty\right)$, 则

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

证： $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$，显然 $f(x) \in C[x_0, x] \cap D(x_0, x)$，

则 $\exists \xi \in (x_0, x)$ 使得

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(\xi).$$

因此

$$f'_+(x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0^+} f'(\xi), (x_0 < \xi < x)$$

$$= \lim_{\xi\to x_0^+} f'(\xi) = \lim_{x\to x_0^+} f'(x).$$

同理： 若 $f(x)$ 满足：

(1) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0]$ 上连续；

(2) $f(x)$ 在 $(x_0-\delta, x_0)$ 内可导；

(3) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$ 存在 $\left(\text{或} \lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x) = \infty\right)$，则

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} f'(x)$$

例1 讨论$f(x)=\begin{cases} x^2, & x>1, \\ 1, & x=1 \\ x^3, & x<1, \end{cases}$,在点$x=1$处的可导性。

解 显然，$f(x)$在R 连续(请同学们自己证明）.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x>1, \\ 3x^2, & x<1, \end{cases}$$

由推论3有:

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}f'(x)=\lim_{x\to1^+}2x=2,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^-}3x^2=3,$$

因为 $f'_+(1)\neq f'_-(1)$, 所以 $f(x)$在$x=1$点处不可导.

例2 证明 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\ (-1\le x\le 1)$.

证：设 $f(x)=\arcsin x+\arccos x,\quad x\in[-1,1]$

$$\because f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)=0.$$

$\therefore f(x)\equiv C,\quad x\in[-1,1]$

又 $\because f(0)=\arcsin 0+\arccos 0=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$,

即 $C=\frac{\pi}{2}$.

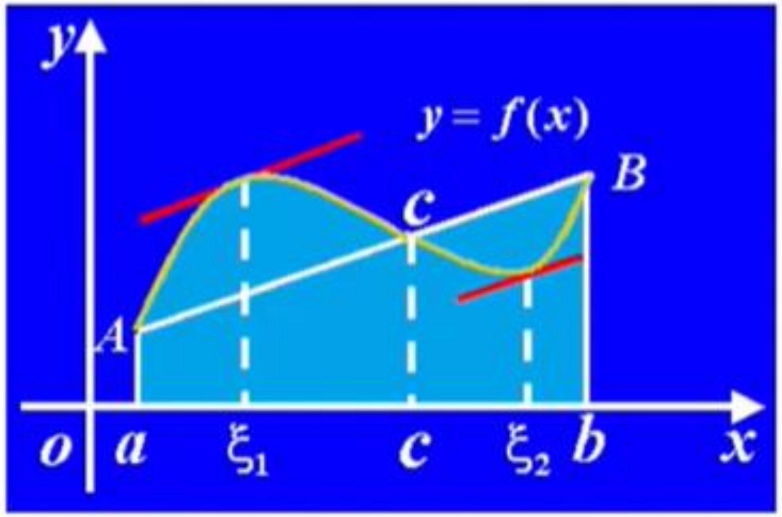
例3 设函数$f(x)\in C[a,b]$，在(a,b)内$f''(x)$存在，连接$(a,f(a))$与$(b,f(b))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于$(c,f(c))$，其中$a<c<b$.

求证： 在(a,b)内，至少存在一点ξ，使得$f''(\xi)=0$.

证明： 将区间$[a,b]$分成$[a,c]$与$[c,b]$.

$\because f(x)$在$[a,c$与$[c,b]$上分别

满足拉格朗日中值定理 的条件。



$$\therefore \exists \xi_1 \in (a,c),\text{使}\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(\xi_1);$$

$$\exists \xi_2 \in (c,b)\text{使}\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(\xi_2).$$

又因为$K_{AB}=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}=\dfrac{f(b)-f(c)}{b-c}$,

所以,$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)$.

又$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]\subset(a,b)$上满足罗尔定理的条件.

$$\therefore \exists \xi \in (\xi_1,\xi_2)\subset(a,b),\text{使}f''(\xi)=0.$$

柯西中值定理

一、柯西中值定理及证明

二、应用举例

一、柯西(Cauchy)中值定理

柯西中值定理：若函数$f(x)$、$g(x)$满足条件

(1) 在闭区间$[a,b]$上连续；

(2) 在开区间(a,b)内可导，且$\forall x\in(a,b)$，均有$g'(x)\neq 0$；

则$\exists \xi\in(a,b)$，使得$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

分析：上式可改写为 $[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$

即要证导函数方程

$[f(b)-f(a)]g'(x)-[g(b)-g(a)]f'(x)=0$在$(a,b)$内有根.

证 作辅助函数

$$F(x)=[f(b)-f(a)]g(x)-[g(b)-g(a)]f(x)$$

显然 $F(x)\in C[a,b]\cap D(a,b)$，且

$$F(a)=f(b)g(a)-g(b)f(a)=F(b)$$

由罗尔定理知，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=[f(b)-f(a)]g'(\xi)-[g(b)-g(a)]f'(\xi)=0$$

即 $[f(b)-f(a)]g'(\xi)=[g(b)-g(a)]f'(\xi)$

又 $\because$ $\forall x\in(a,b)$，有$g'(x)\neq 0$

$\therefore$ $g'(\xi)\neq 0$，且 $g(b)\neq g(a)\Rightarrow$ $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$

二、应用举例

例1 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,证明:

至少存在一点$\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

$$f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]\Leftrightarrow\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\left.\frac{[f(x)]'}{(x^2)'}\right|_{x=\xi}=\frac{f(1)-f(0)}{1^2-0^2}$$

证: 设 $g(x)=x^2$,

则 $f(x),g(x)$ 在$[0,1]$上满足柯西中值定理的 条件,

$\therefore$ 在$(0,1)$内至少存在一点ξ,有

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}$$ 即 $f'(\xi)=2\xi[f(1)-f(0)]$.

例2 若函数$f(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理条件且不恒为常数，

证明：$\exists\xi\in(a,b)$,使得$f'(\xi)>0$.

证：$\because f(x)$在$[a,b]$上满足罗尔定理条件且不恒为常数

$\therefore f(x)$在$[a,b]$上必有最大值M、最小值m，

且M和m中至少有一个不等于$f(a)$、$f(b)$

不妨设$M\neq f(a)$，则$\exists\eta\in(a,b)$，使$f(\eta)=M$

$\because f(x)\in C[a,\eta]\cap D(a,\eta)$

$\therefore$由拉格朗日定理：$\exists\xi\in(a,\eta)$，

使$f'(\xi)=\dfrac{f(\eta)-f(a)}{\eta-a}>0$

例3 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，$c\in(a,b)$，且$f(a)=f(c)=f(b)$.试证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

证明：显然$f(x)$在$[a,c],[c,b]$上满足罗尔中值定理得条件，

于是分别存在$\xi_1\in(a,c),\xi_2\in(c,b)$，使得$f'(\xi_1)=0, f'(\xi_2)=0$,

又因为$f'(x)$在$[\xi_1,\xi_2]\subset[a,b]$上满足罗尔中值定理的条件，

所以$\exists\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(c,b)$，使得$f''(\xi)=0$.

例4 若函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=f(1)=0, f(\frac{1}{2})=1$,

试证：至少$\exists\xi\in(0,1)$,使得$f'(\xi)=1$.

证：令$F(x)=f(x)-x$ 显然,$F(x)$在$[0,1]$上连续, 在$(0,1)$内可导,

又$F(1)=f(1)-1<0$, $F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$,

$$\exists\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right),\text{使得}F(\eta)=0.$$

又$F(0)=f(0)-0=0$, $F(x)$在$[0,\eta]\subset[0,1]$上满足

罗尔定理, 所以$\exists\xi\in(0,\eta)\subset(0,1)$,使得$F'(\xi)=0$,

即$f'(\xi)=1$.

例5 若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$0<a<b$，

证明：$\exists\xi$，$\eta\in(a,b)$，使得$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

分析：$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)\Leftrightarrow\dfrac{f'(\xi)}{a+b}=\dfrac{f'(\eta)}{2\eta}$

$$\frac{f'(\eta)}{(x^2)'|_\eta}=\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\bullet\frac{1}{b+a}=\frac{f'(\xi)}{b+a}$$

证明：设$g(x)=x^2$,因为$0<a<b, g'(x)=2x\neq 0, x\in(a,b)$,易知$f(x)$,

$g(x)$在$[a,b]$上满足柯西定理条件，于是$\exists\eta\in(a,b)$,使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\eta)}{2\eta}\Rightarrow\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=(a+b)\frac{f'(\eta)}{2\eta}$$

又$\because f(x)$在$[a,b]$上满足拉格朗日定理

$\therefore\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$

由上面的两式可得：$f'(\xi)=\dfrac{a+b}{2\eta}f'(\eta)$.

练习 若函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=1, f(1)=0$，

证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$.

作辅助函数$F(x)=xf(x)$
用罗尔定理即可。

思考：罗尔中值定理、拉格朗日中值定理、柯西中值定理之间的关系。