第三章 几何空间

典型例题

例 1 设$|a|=2,|b|=3,<a,b>=\dfrac{\pi}{3}$,则以向量 $p=3a-4b,q=p+2q$为邻边的 平行四边形的周长和面积分别为_________.

分析 以 p,q 为邻边的平行四边形的周长为$2(\|p\|+\|q\|)=2\sqrt{108}+2\sqrt{52}$，再利用向量的向量积模的几何意义可以得到四边形的面积为$30\sqrt{3}$.

例 2 $\boldsymbol{a,b}$ 为非零向量,问下列各式在什么条件下成立?

（A） $\|a+b\|=\|a\|+\|b\|$;　　（B） $\|a+b\|=\|a\|-\|b\|$;

（C） $\|a+b\|=\|a-b\|$;　　（D） $(a+b)\cdot(a-b)=0$.

分析 （A）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向且平行时等号不成立;

（B）$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行但反向时等号不成立;

（C）当 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$ 时，有 $\boldsymbol{a\cdot b=0}$，则

$$
\begin{aligned}
(a+b)\cdot(a+b)&=a^2+2a\cdot b+b^2\\
&=a^2-2a\cdot b+b^2\\
&=(a-b)\cdot(a-b)
\end{aligned}
$$

故（C）成立.

（D）$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-a\cdot b+b\cdot a-b^2=0$，则（D）成立.

例 3 设等腰梯形的四个顶点为 A,B,C,D,AB 是底边，$\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AD}=b$，$\langle a,b\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，试用向量 $\boldsymbol{a,b}$ 表示向量 $\overrightarrow{DC},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{DB}$.

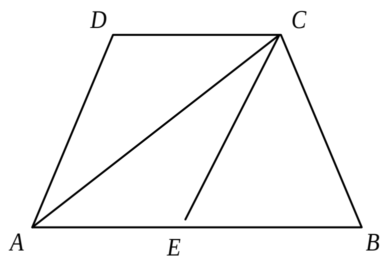

图3－1

解 过 $\boldsymbol{C}$ 点作 AD 的平行线交于 AB 边的 E 点,

因 $\langle a,b\rangle=\dfrac{\pi}{3}$，故 ΔBCE 为等边三角形

(如图 3-1 所示). 故

$$\overrightarrow{EB}=\|AD\|\overrightarrow{AB}^0=\frac{a}{\|a\|}\|b\|,$$

则

$$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EB}=-\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{EB}=\frac{\|b\|}{\|a\|}a-b,$$

$$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EB}=a-\frac{a}{\|a\|}\cdot\|b\|\ ;$$

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=a-\frac{\|b\|}{\|a\|}a+b;$$

$$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=a-b.$$

例 4 设向量a,b,c满足$a+b+c=0$，$\|a\|=3$，$\|b\|=5$，$\|c\|=7$，求向量a与b的夹角.

解 1　因为$a+b+c=0$，所以$c=-(a+b)$，从而 $\|c\|^2=\|a+b\|^2$.

由于

$$\|a+b\|^2=(a+b)\cdot(a+b)=\|a\|^2+\|b\|^2+2a\cdot b$$

于是

$$\|a\|^2+\|b\|^2+2a\cdot b=\|c\|^2$$

即
$$a\cdot b=\frac{1}{2}(\|c\|^2-\|a\|^2-\|b\|^2)=\frac{15}{2}$$

由 $\cos\langle a,b\rangle=\frac{a\cdot b}{\|a\|\ \ \|b\|}=\frac{1}{2}$ ，得 $\langle a,b\rangle=\frac{\pi}{3}$.

解 2　由$a+b+c=0$及$\|a\|,\|b\|,\|c\|$的关系，可知三向量a,b,c首尾相接，即构成一个三角形，由余弦定理

$$\cos\langle a,b\rangle=\frac{\|c\|^2-\|a\|^2-\|b\|^2}{2\|a\|\ \ \|b\|}=\frac{1}{2}$$

故有 $\langle a,b\rangle=\frac{\pi}{3}$.

例 5 根据所给条件，确定下列平面方程:

(1) 过点$M_0(4,-1,1)$且与平面$2x-7y+4z+1=0$平行;

(2) 过三点 $A(4,3,2), B(1,1,1), C(2,3,4)$;

(3) 过点 $M_0(0,-2,3)$ 且与直线 $\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{1}$ 垂直;

(4) 与 $A(3,5,-2), B(1,-1,4)$ 两点距离相等的点的轨迹.

解 (1) 所求平面与已知平面平行，则两平面具有相同的法向量，设所求平面方程为

$$2x-7y+4z+D=0$$

将 $M_0(4,-1,1)$ 代入方程得 $D=-19$，所求平面方程为

$$2x-7y+4z+19=0$$

(2) $\overrightarrow{BA}=(3,2,1), \overrightarrow{BC}=(1,2,3)$，所求平面的法向量与 $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$ 都垂直.

$\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{BC}=4(1,-2,1)$，可取 $n=(1,-2,1)$,所求平面方程为

$$(x-1)-2(y-1)+(z-1)=0, \quad 即\ x-2y+z=0$$

(3) 平面与直线垂直,则平面的法向量即为直线的方向向量,故 $n=(1,3,1)$,所求平面方程为 $(x-0)+3(y+2)+(z-3)=0$,即 $x+3y+z+3=0$.

(4) **解** 1 即求 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 两点的垂直平分面，此平面过 AB 的中点,且以 $\overrightarrow{AB}$ 为法向量.

AB 的中点坐标为 $M_0(2,2,1)$, $\overrightarrow{BA}=(2,6,-6)$.

所求平面方程为 $(x-2)+3(y-2)-3(z-1)=0$,即 $x+3y-3z-5=0$.

解 2 设 $M(x,y,z)$ 为轨迹上任一点,则 $\|\overrightarrow{MA}\|=\|\overrightarrow{MB}\|$,故

$$(x-3)^2+(y-5)^2+(z+2)^2=(x-1)^2+(y+1)^2+(z-4)^2$$

化简得 $x+3y-3z-5=0$.

例 6 一平面过点 $M_0(2,1,-1)$,且在 $\boldsymbol{x}$ 轴和 $\boldsymbol{y}$ 轴上截距分别为 2 和 1,求平面方程.

解 1 设平面的截距方程为

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{1}+\frac{z}{c}=1$$

因平面过点 $M_0(2,1,-1)$,将点 M_0 的坐标代入平面方程得

$$\frac{2}{2}+\frac{1}{1}+\frac{-1}{c}=1, c=1$$

故所求平面方程为$\frac{x}{2}+y+z=1$或$x+2y+2z-2=0$.

解 2 设平面的一般式方程为$Ax+By+Cz+D=0$,将平面上三点$(2,1,-1),(2,0,0),(0,1,0)$的坐标代入,得

$$\begin{cases}2A+B-C+D=0\\ 2A+D=0\\ B+D=0\end{cases},\quad 解得\begin{cases}A=-\frac{1}{2}D\\ B=-D\\ C=-D\end{cases}$$

所求平面方程为$x+2y+2z-2=0$.

解 3 因点$A(2,0,0),B(0,1,0),C(2,1,-1)$在所求平面上，可取平面法向量

$$n=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-1,-2,-2)$$

故所求平面方程为$(x-2)+2y+2z=0$，即$x+2y+2z-2=0$.

例 7 求两相交平面$2x+y+2z-4=0$；$\pi_2:3x-4y-1=0$的两夹角平分面方程.

解 设夹角平分面上任一点为(x,y,z)，该点到平面π_1与π_2的距离相等.

$$\frac{|x+2y-2z+3|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{|3x-4y-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2+0^2}}$$

整理即得$2x-11y+5z-9=0$ 或 $7x-y-5z+6=0$.

例 8 一光线沿直线$l:\frac{x+3}{5}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-4}{3}$入射，经平面$\pi:2x-y-z+5=0$反射，求反射光线的方程$l'$.

解 1 设直线$\boldsymbol{l}$与平面π的交点为N，如能求出l上的点$M(-3,1,4)$关于平面π的对称点M'，则$M'N$的方程即为反射光线的方程.过M垂直于π的直线参数方程为

$$x=2t-3,\quad y=-t+1,\ z=-t+4.$$

将此参数方程代入平面π，得$t=1$，即M在平面π上的投影点为$(-1,0,3)$，此点为M与M'的中点，故M'的坐标为$(1,-1,2)$，由解 2，又可得l与π的交点$N(2,2,7)$，$M'N=(1,3,5)$，故反射光线方程为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-7}{5}.$$

解 2 因 $\boldsymbol{s},\boldsymbol{n},\boldsymbol{s}'$ 三向量共面，且 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{s},\boldsymbol{s}'$ 的夹角相等，即 $\boldsymbol{n}$ 在 $\boldsymbol{s}$ 与 $\boldsymbol{s}'$ 的夹角平分线上，如果取 $\|\boldsymbol{s}'\|=\|\boldsymbol{s}\|$，则 $(s+s')//n$，设 $\boldsymbol{s}'=(\boldsymbol{m},\boldsymbol{n},\boldsymbol{p})$，而 $s=(5,1,3),n=(2,-1,-1)$，则

$$\begin{cases}\|s'\|^2=m^2+n^2+p^2=\|s\|^2=35\\ \dfrac{5+m}{2}=\dfrac{1+n}{-1}=\dfrac{3+p}{-1}\end{cases}$$

解得 $(m,n,p)=(-1,-3,-5)$

l' 过 l 与 π 的交点，将 $\boldsymbol{l}$ 的参数方程 $x=5t-3;y=t+1;z=3t+4$ 代入平面 π 得

$$2(5t-3)-(t+1)-(3t+4)+5=0,t=1$$

于是 l 与 π 的交点为 $N(2,2,7)$，故反射光线的方程 l' 为

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-7}{5}$$

例 9 过点 $M_0(-1,1,-1)$ 在平面 $\pi_1:x+z+2=0$ 上求一直线，使 l 与平面 $\pi_2:x-y-1=0$ 成 $\dfrac{\pi}{4}$ 的角.

解 设 l 方向向量 $s=(m,n,p)$，l 的参数方程为

$$\begin{cases}x=mt-1\\ y=nt+1\\ z=pt-1\end{cases}$$

$\boldsymbol{l}$ 在平面 π_1 上,其参数方程满足 π_1 的方程,故方程

$$mt-1+pt-1+2=0$$

得 $m+p=0$.

由 l 与 π_2 的夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$，得

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{|(1,-1,0)\cdot(m,n,p)|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{|m-n|}{\sqrt{2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

得方程组

$$\begin{cases} m+p=0 \\ |m-n|=\sqrt{m^2+n^2+p^2} \end{cases}.$$

因$s\neq 0$，解得$m=0, p=0$，n任意(不为0)或$m=-2n, p=2n$，所求直线方程为

$$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-2} \quad 或 \quad \frac{x+1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{0}$$

例 10 一直线l过点$M_0(-2,0,3)$与直线$l_1:\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-2}{1}$相交且与另一直线$l_2:\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-5}{4}=\dfrac{z+3}{-1}$垂直，求$l$的方程.

解 1 设l与l_1的交点为M，M可用l_1的参数表示为$(-2t+1,t-2,t+2)$，又$\overrightarrow{M_0M}\perp s_2$，故

$$(-2t+3,t-2,t-1)\cdot(2,4,-1)=0，得 t=-1$$

M 的坐标$M(3,-3,1)$，$\boldsymbol{l}$过M_0与M，利用两点式方程得

$$l:\frac{x+2}{5}=\frac{y}{-3}=\frac{z-3}{-2}$$

解 2 过M_0且与l_2垂直的平面方程为π_1，π_1的法向量即为$\boldsymbol{l_2}$的方向向量，利用平面点法式方程，π_1的方程为$2x+4y-z+7=0$.

l在π_1上，l与l_1的交点M即l_1与π_1的交点,将l_1的参数方程代入平面π_1：

$$2(-2t+1)+4(t-2)-(t+2)+7=0，得 t=-1.$$

M 的坐标$M(3,-3,1)$，利用直线两点式方程可知l的方程为

$$\frac{x+2}{5}=\frac{y}{-3}=\frac{z-3}{-2}.$$

例 11 求两异面直线：$\dfrac{4-x}{2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{1-z}{3}$与$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-2}{4}$之间的距离.

分析 两异面直线之间的距离是指两异面直线之间的最短距离，为此先求出通过一直线且平行于另一直线的平面方程π，然后在另一直线上取一点M，求点M到平面π的距离，则此距离就是两异面直线之间的最短距离.

解 过直线$\dfrac{4-x}{2}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{1-z}{3}$且平行于直线$\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+2}{-5}=\dfrac{z-2}{4}$的平面方程的法向量为:

$$n=(-2,6,-3)\times(2,-5,4)=(9,2,-2).$$

所求的平面方程为:

$$9(x-4)+2(y-0)-2(z-1)=0，即\quad 9x+2y-2z-34=0.$$

在直线 $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-5}=\frac{z-2}{4}$ 上取一点 $M(3,-2,2)$，则点 M 到平面 $9x+2y-2z-34=0$ 的距离是:

$$d=\frac{|27-4-4-34|}{\sqrt{9^2+2^2+(-2)^2}}=\frac{15}{\sqrt{89}}$$

即两两异面直线之间的距离为 $\frac{15}{89}\sqrt{89}$.

例 12 已知平面上三条不同的直线方程分别为

$$l_1: ax+2by+3c=0$$

$$l_2: bx+2cy+3a=0$$

$$l_3: cx+2ay+3b=0$$

证明这三条直线交于一点的充分必要条件为 $a+b+c=0$.

证必要性：设三直线 l_1,l_2,l_3 交于一点，则线性方程组

$$\begin{cases} ax+2by=-3c \\ bx+2cy=-3a \\ cx+2ay=-3b \end{cases} \tag{*}$$

有唯一解，故系数矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & 2c \\ c & 2a \end{pmatrix}$ 与增广矩阵 $\overline{A}=\begin{pmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{pmatrix}$ 的秩均为 2，于是

$$|\overline{A}|=0.$$

由于

$$|\overline{A}|=\begin{vmatrix} a & 2b & -3c \\ b & 2c & -3a \\ c & 2a & -3b \end{vmatrix}=6(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc]$$

$$=3(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$$

但 $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\neq 0$，故 $a+b+c=0$.

充分性：由于 $a+b+c=0$，则从必要性的证明可知 $|\overline{A}|=0$，故秩 $(\overline{A})<3$

由于

$$\begin{vmatrix} a & 2b \\ b & 2c \end{vmatrix} = 2(ac-b^2) = -2[a(a+b)+b^2] = -2[(a+\frac{1}{2}b)^2 + \frac{3}{4}b^2] \neq 0$$

故秩$(A)=2$.于是秩(A)=秩$(\overline{A})=2$. 因此方程组（*）有唯一解，即三直线交于一点.

例 13 矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$ 为满秩矩阵，证明直线 $l_1:\dfrac{x-a_1}{a_2-a_3}=\dfrac{y-b_1}{b_2-b_3}=\dfrac{z-c_1}{c_2-c_3}$ 与直线 $l_2:\dfrac{x-a_2}{a_3-a_1}=\dfrac{y-b_2}{b_3-b_1}=\dfrac{z-c_2}{c_3-c_1}$ 相交.

证明 取 l_1 上的一点 $M_1(a_1,b_1,c_1)$，$\boldsymbol{l_2}$ 上的点 $M_2(a_2,b_2,c_2)$. $\overrightarrow{M_2M_1}=(a_1-a_2,b_1-b_2,c_1-c_2)$. 直线 $\boldsymbol{l_1}$ 的方向向量为

$$\vec{s_1}=(a_2-a_3,b_2-b_3,c_2-c_3)$$

直线 $\boldsymbol{l_2}$ 的方向向量为

$$\vec{s_2}=(a_3-a_1,b_3-b_1,c_3-c_1)$$

因为

$$[\overrightarrow{M_2M_1},\quad \vec{s_1},\quad \vec{s_2}] = \begin{vmatrix} a_1-a_2 & b_1-b_2 & c_1-c_2 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} = 0\,,$$

故直线共面.

又因为矩阵 A 为满秩矩阵，故 $\det A \neq 0$,

而

$$\det A \overset{r_2-r_3}{\underset{r_3-r_1}{=}} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2-a_3 & b_2-b_3 & c_2-c_3 \\ a_3-a_1 & b_3-b_1 & c_3-c_1 \end{vmatrix} \neq 0$$

故 l_1，l_2 对应坐标不成比例，那么 l_1 与 l_2 不平行，所以 l_1 与 l_2 相交.