第三讲 曲面与空间曲线

曲面方程

1.柱面

2.旋转曲面

- 空间曲线

1.一般式方程

2.参数式方程

3.空间曲线在坐标面上的投影

内容小结

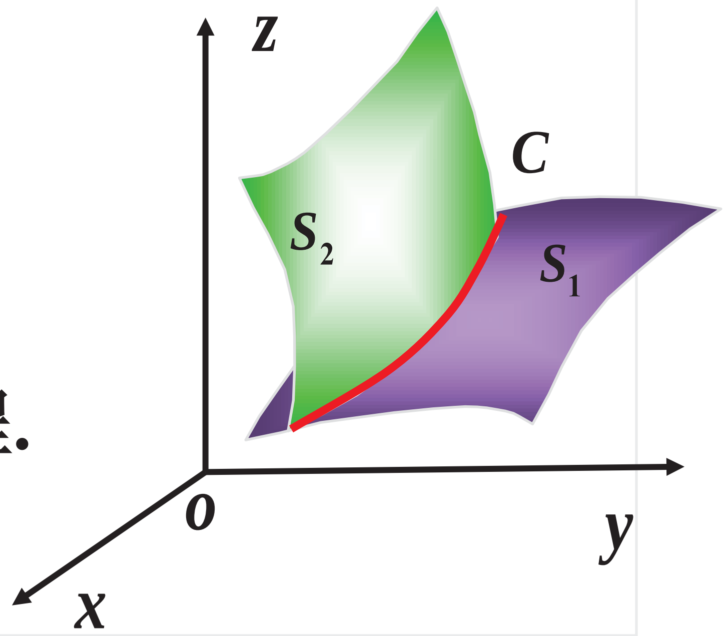
二. 空间曲线

1. 一般式方程

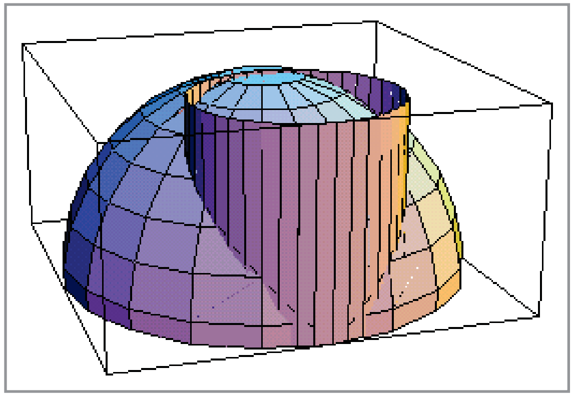
空间曲线C可看作空间两曲面的交线.

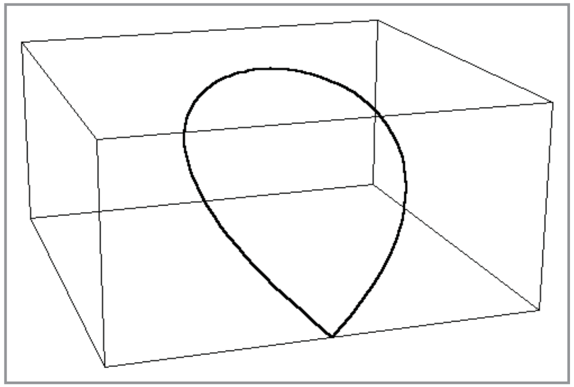
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

上式称为空间曲线的一般方程.



例1 方程组 $\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \dfrac{a}{2})^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$ 表示怎样的曲线？





解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$(x - \dfrac{a}{2})^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.

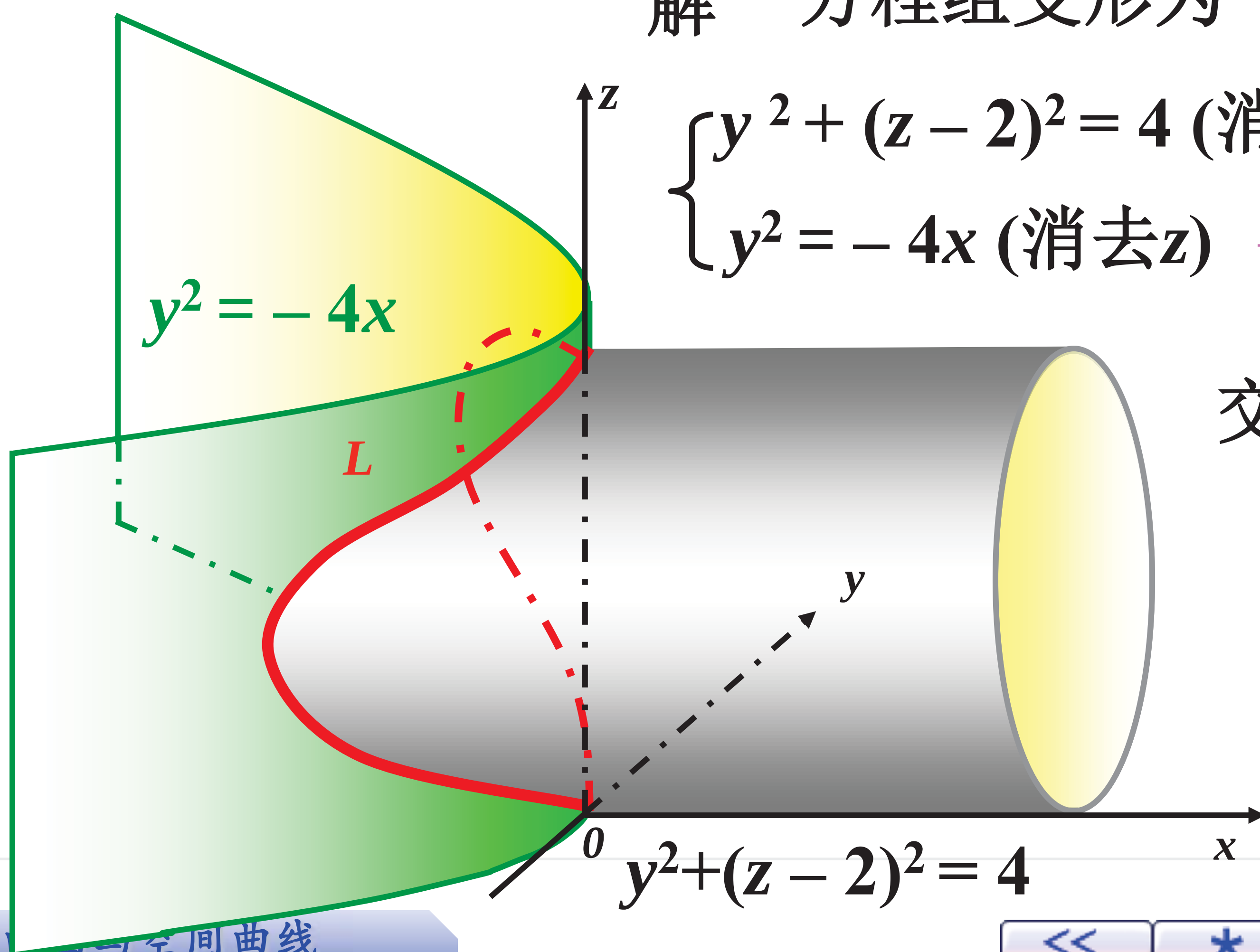
例2 方程组 $\begin{cases} 2y^2 + z^2 + 4x = 4z \\ y^2 + 3z^2 - 8x = 12 \end{cases}$ 表示怎样的曲线？

解　方程组变形为

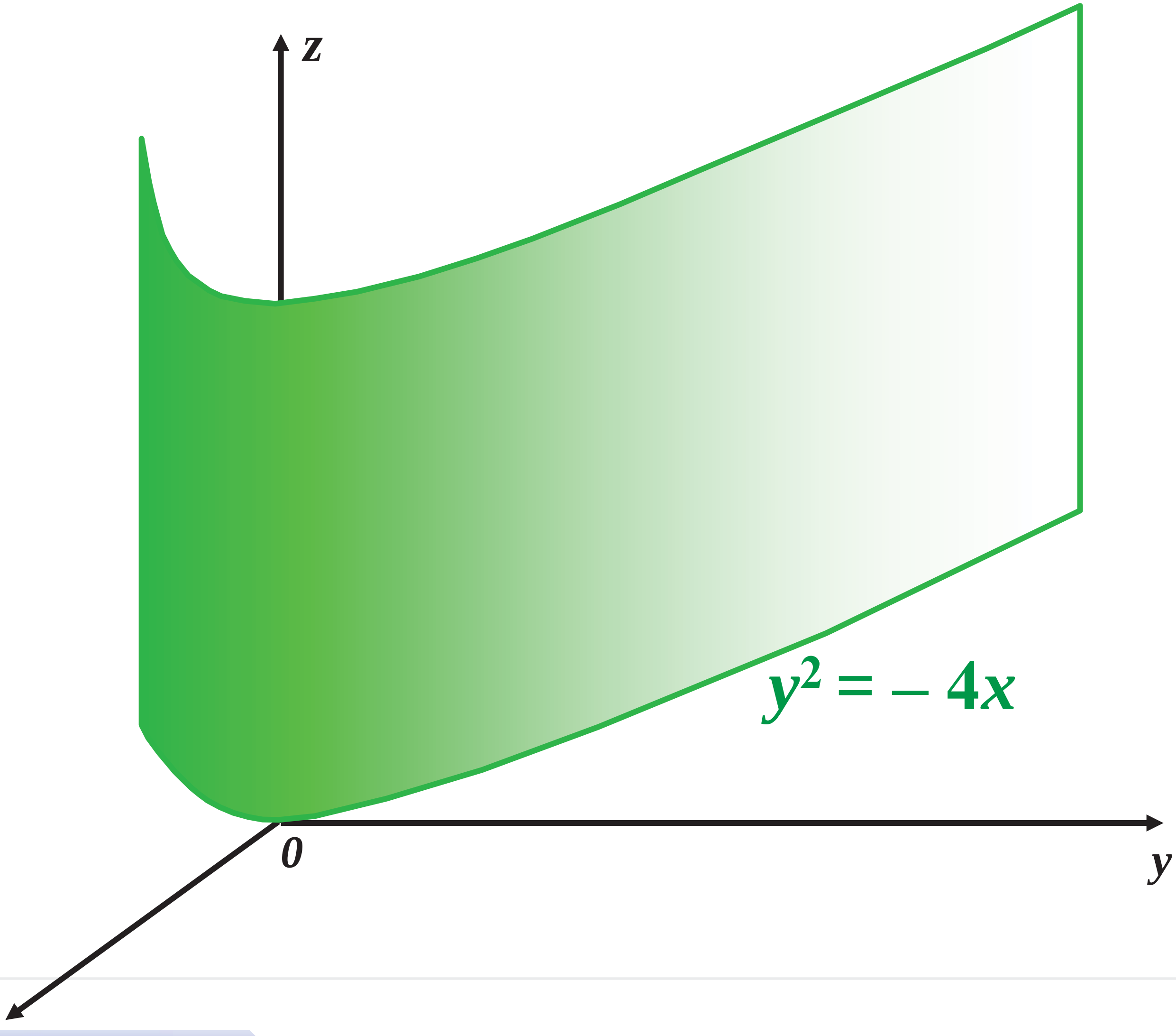
$$\begin{cases} y^2 + (z-2)^2 = 4 \text{ (消去}x\text{)} \\ y^2 = -4x \text{ (消去}z\text{)} \end{cases}$$

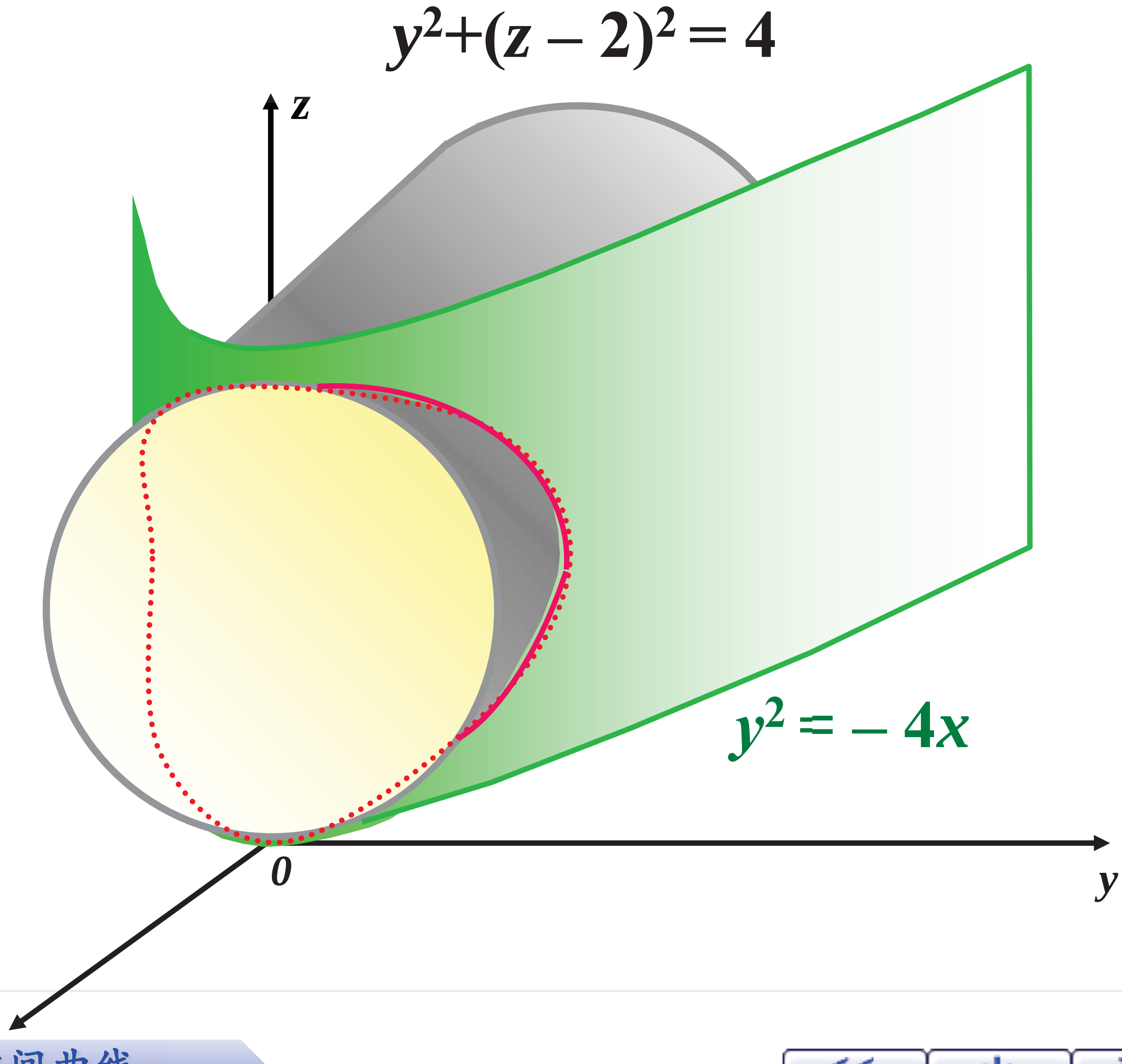
圆柱面

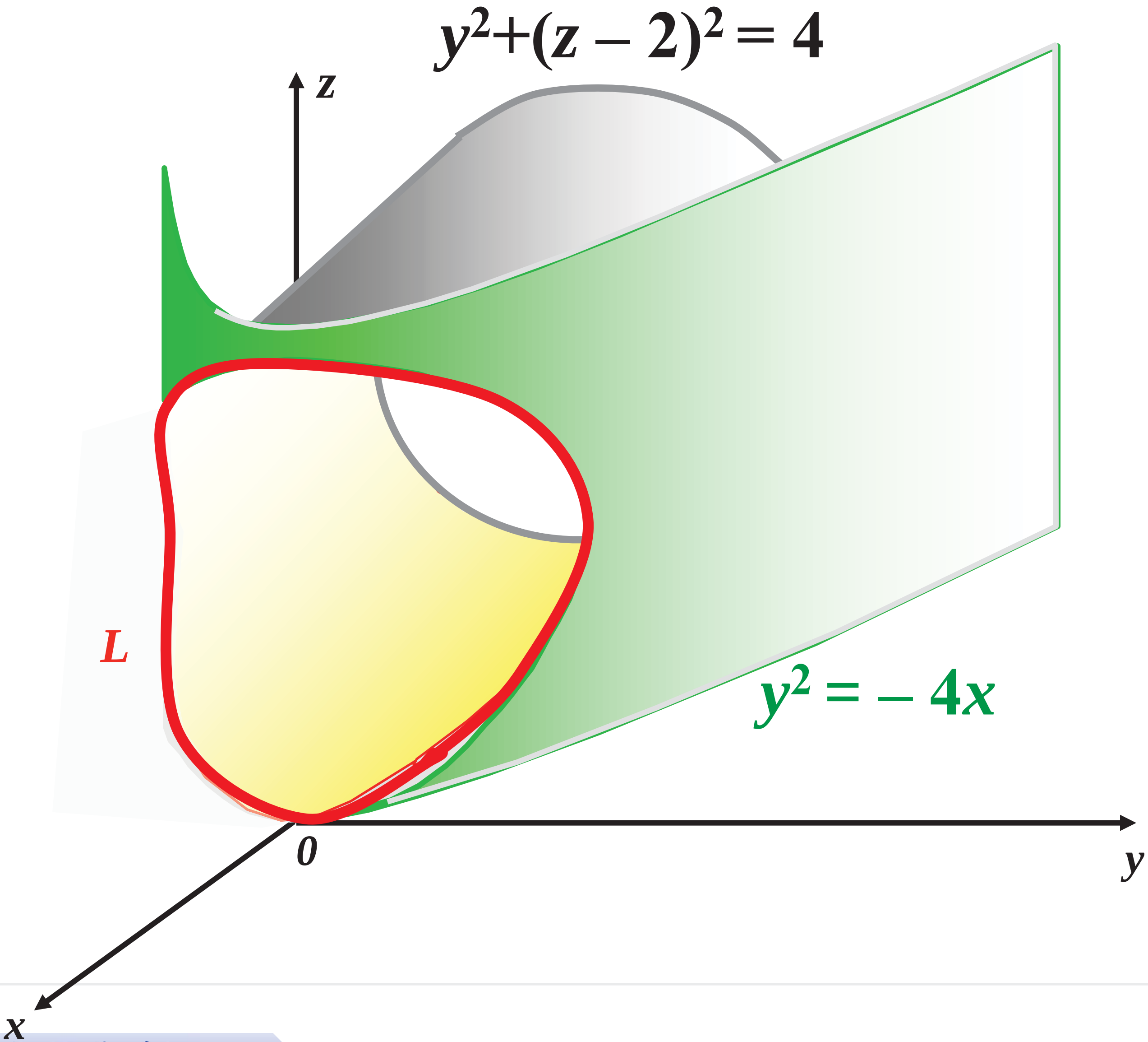
抛物柱面



交线如图.


z
$y^2 = -4x$
0
y
x


$y^2+(z-2)^2=4$
z
$y^2=-4x$
0
y
x



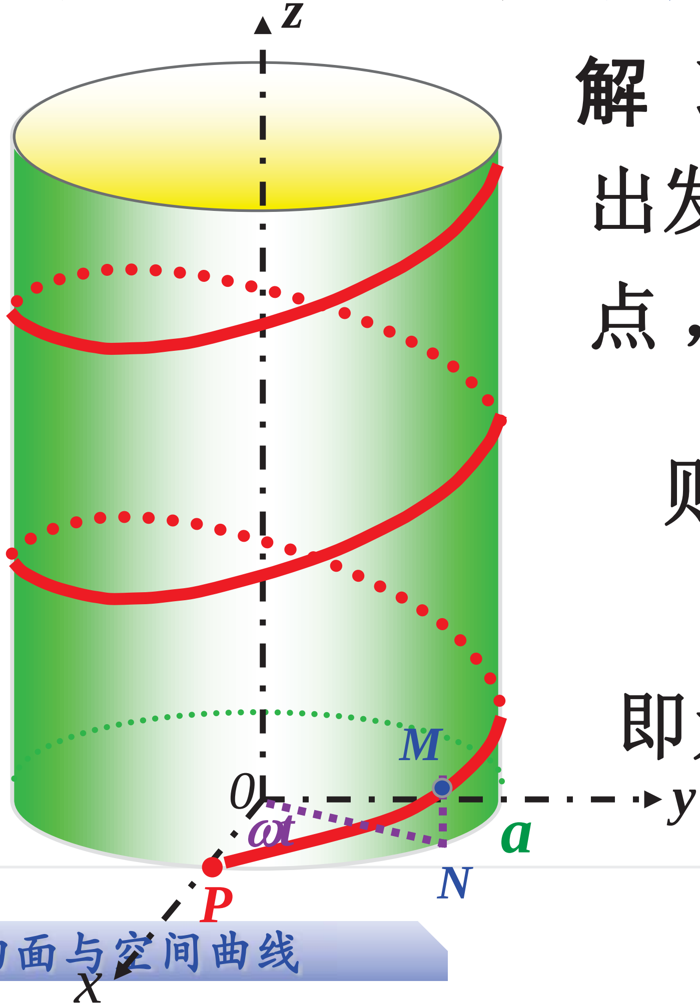
$y^2+(z-2)^2=4$
z
L
$y^2=-4x$
0
y
x

2. 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ 称为空间曲线的参数方程.

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1)，当 t 取遍允许取的全部值时，就得到曲线上的所有点.

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω、v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做**螺旋线**. 试建立其参数方程.



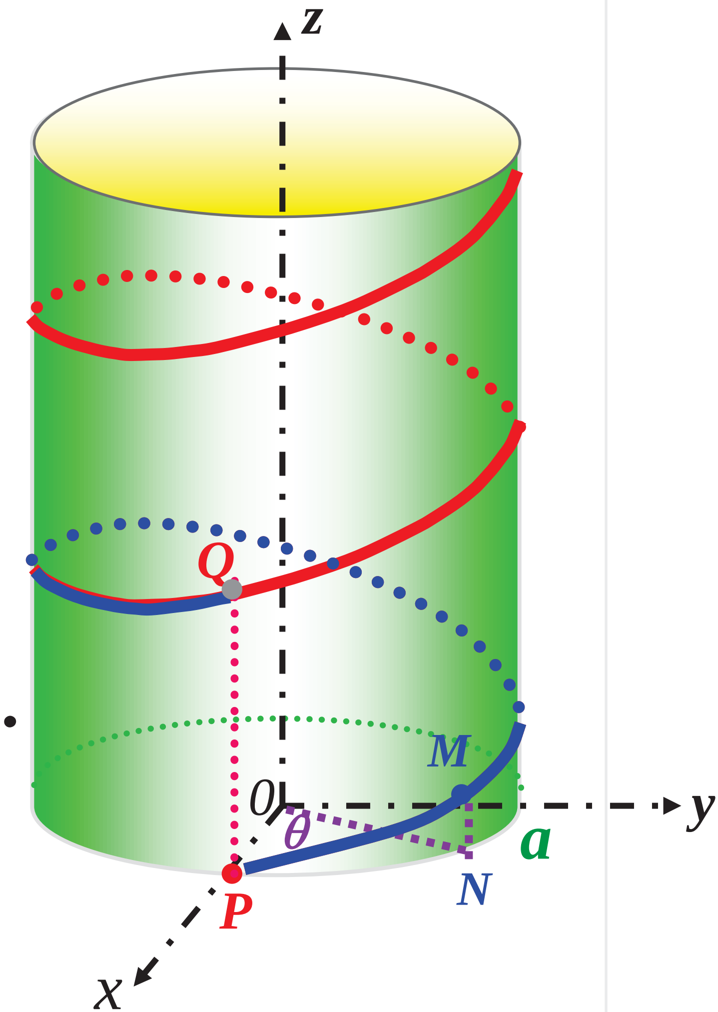
解 取时间 t 为参数，动点从 P 点出发，经过 t 时间，运动到 M 点，M 在 xoy 面的投影 $N(x, y, 0)$

则有
$$\begin{cases} x = a\cos\omega t \\ y = a\sin\omega t \\ z = vt \end{cases}$$

即为圆柱螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \quad (\theta = \omega t,\quad b = \dfrac{v}{\omega}) \\ z = b\theta \end{cases}$$



螺旋线的性质：

上升的高度与转过的角度成正比.

当 θ 从 $0 \to 2\pi$，螺线从点 $P \to Q$

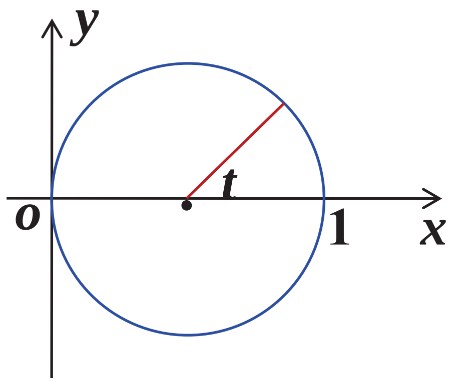
上升的高度 $|\overline{PQ}| = 2\pi b$ 叫螺距.

例4 写出曲线$L:\begin{cases} x^2+y^2=x \\ z=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$的参数方程.

解1 $x^2+y^2=x \Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$

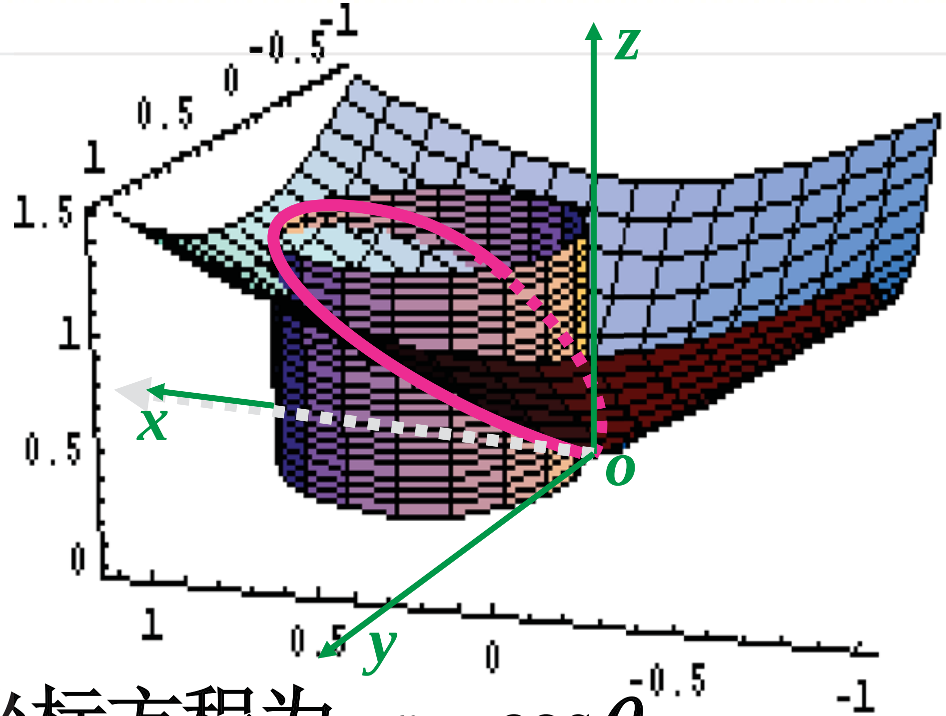
其参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t \\ y=\frac{1}{2}\sin t \end{cases} \quad (0\le t\le 2\pi)$$



代入 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 得： $z=|\cos\frac{t}{2}|$

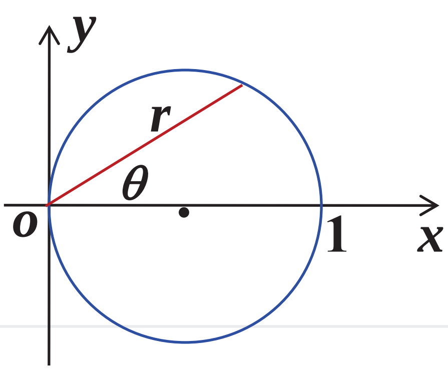
$$\Rightarrow L:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t \\ y=\dfrac{1}{2}\sin t \\ z=\left|\cos\dfrac{t}{2}\right| \end{cases}$$



解2 $x^2+y^2=x$ 的极坐标方程为 $r=\cos\theta$

由直角坐标与极坐标的关系得其参数方程:

$$\begin{cases} x=\cos^2\theta \\ y=\cos\theta\sin\theta \end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases} x=\cos^2\theta \\ y=\cos\theta\sin\theta \\ z=\cos\theta \end{cases}$$



主要
内容

1. 空间曲线的一般式方程

2. 空间曲线的参数式方程