设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, 求 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)$.

[解析] 可将表达式先化简再进行计算.

由 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$

代入表达式并化简得

$$(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=A^2+AB+BA+B^2-A^2-2AB-B^2$$

$$=BA-AB$$

由 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}$，

得

$$BA=\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\8&6&6\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&3&1\\-1&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&7&3\\-2&5&2\\-2&4&3\end{pmatrix}$$

故 $(A+B)^2-(A^2+2AB+B^2)=BA-AB$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & 6 & 6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -8 & -3 \\ 10 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

一般结论:

矩阵的乘法一般不满足交换律. 即

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

一般不成立, 但当$AB=BA$（即A, B可交换）时, 上式成立.