七、思考和小结

特征值特征向量:

设 A 是 n 阶方阵, $0 \neq \alpha \in \mathrm{C}^n, \lambda \in \mathrm{C}$ 使得 $A\alpha = \lambda\alpha$

(1) 称 λ 是矩阵 A 的一个**特征值**;

(2) 称 α 是矩阵 A 相应于特征值 λ 的一个**特征向量**.

特征值子空间:

$$V_\lambda = \left\{ \alpha \in \mathrm{C}^n \,\middle|\, A\alpha = \lambda\alpha \right\}$$

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow V_\lambda \neq \{0\}$

V_λ 称为A的**特征值λ的特征子空间**

特征值的判定.

给定n阶矩阵 A, 则

λ是A的特征值 $\Leftrightarrow \exists \alpha \neq 0,\ s.t.\ A\alpha = \lambda\alpha$

$\Leftrightarrow (\lambda I - A)X = 0$ 有非零解 α;

$\Leftrightarrow |\lambda I - A| = 0$;

$\Leftrightarrow \lambda I - A$ 不可逆;

$\Leftrightarrow R(\lambda I - A) < n$;

$$\Uparrow$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Uparrow$$

A各行元之和为λ

特征向量的判定.

给定n阶矩阵 A, α是非零列向量

α是A的特征向量 $\Leftrightarrow A\alpha = \lambda\alpha$ 对某个数λ

$\Uparrow$

$\Leftrightarrow \alpha, A\alpha$ 线性相关;

A各行元之和为 λ,

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix};$$

$\Leftrightarrow \alpha$ 是 $(\lambda I - A)X = 0$ 的非零解

特征值、特征向量的计算.

(1) 求 $|\lambda I - A| = 0$ 的根：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$

(2) 对每一λ_i，求出$(\lambda_i I - A)X = 0$ 的一组基础解系

$$\alpha_{i_1}, \alpha_{i_2}, \cdots, \alpha_{i_{r_i}}$$

则A的对应于λ_i的特征向量为：

$$k_1\alpha_{i_1} + k_2\alpha_{i_2} + \cdots + k_{r_i}\alpha_{r_i}$$

$k_1, k_2, \cdots, k_{r_i}$ 不全为零

$$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} \qquad \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n = |A|$$

代数重数：λ作为A特征多项式根的重数

几何重数：特征子空间V_λ的维数$n-R(\lambda I-A)$

$$1\le 几何重数\le 代数重数$$

α是A的特征值λ的特征向量$\Rightarrow$

(1) α是$f(A)$的特征值$f(\lambda)$的特征向量.

(2) $f(A)=O\Rightarrow f(\lambda)=0.$

A可逆时: (3) α是A^{-1}的特征值λ^{-1}的特征向量.

(4) α是A^*的特征值$\frac{|A|}{\lambda}$的特征向量.

思考题:

1. 是否任一数λ_0都是某矩阵A的特征值?

是.比如,

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_0 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

2. 是否任一列向量 α 都是某矩阵 A 的特征向量?

$$\alpha \neq 0 \Rightarrow I\alpha = 1\alpha$$