

第三讲 曲面与空间曲线

- ▶ 曲面方程
 1. 柱面
 2. 旋转曲面
- ▶ 空间曲线
 1. 一般式方程
 2. 参数式方程
 3. 空间曲线在坐标面上的投影
- ▶ 内容小结

第三讲 曲面与空间曲线

► 曲面方程

1. 柱面
2. 旋转曲面

空间曲线

1. 一般式方程
2. 参数式方程
3. 空间曲线在坐标面上的投影

内容小结

一、曲 面

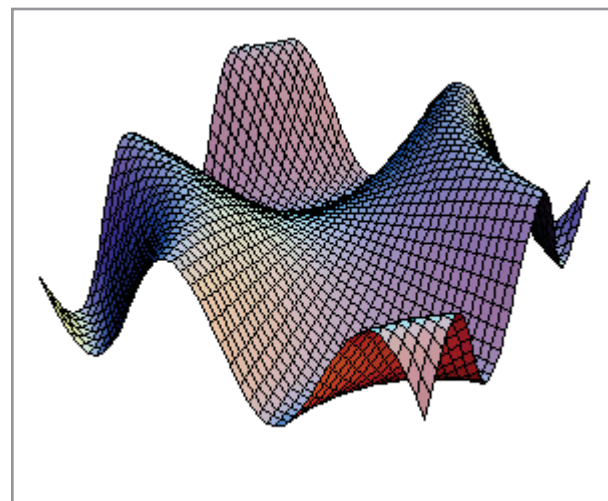
定义 空间点集

$$S = \{(x, y, z) | F(x, y, z) = 0\}$$

称为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的曲面.

意义:

- (1) S 上的点都满足 $F(x, y, z) = 0$;
- (2) 满足 $F(x, y, z) = 0$ 的点都在 S 上.



例1 建立球心在点 $M(x_0, y_0, z_0)$, 半径为 R 的球面方程.

解 设 $M(x, y, z)$ 是球面上任一点,

根据题意有 $\|MM_0\| = R$

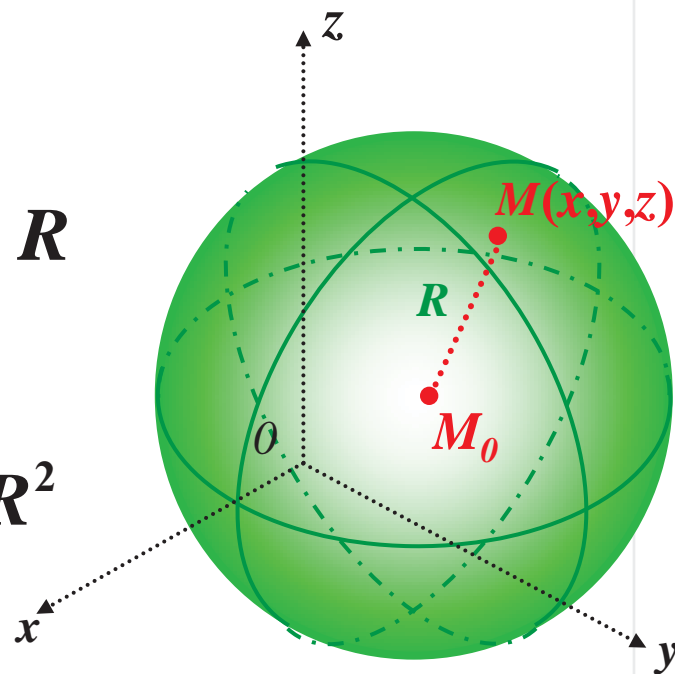
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = R$$

所求方程为

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

特殊地: 球心在原点时方程为

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$



例2 方程 $z = (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1$ 的图形是怎样的？

解 根据题意有 $z \geq -1$

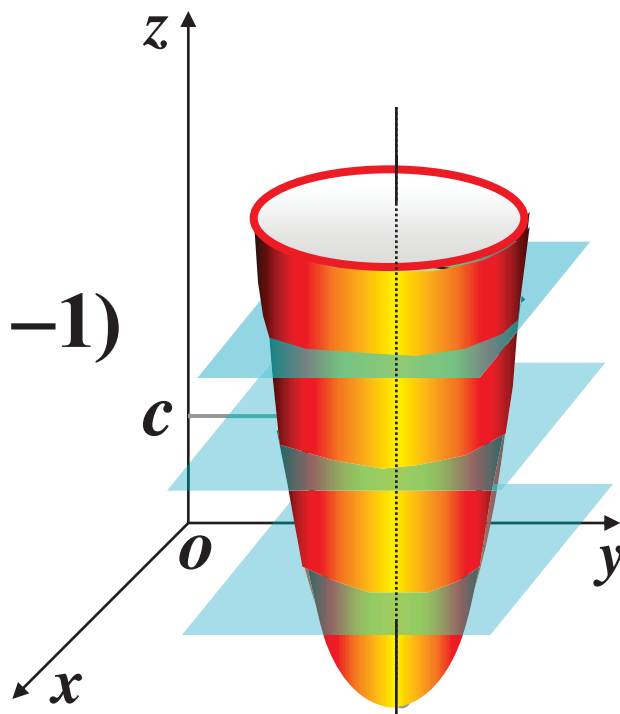
用平面 $z = c$ 去截图形得圆：

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面 $z = c$ 上下移动时，
得到一系列圆

圆心在 $(1, 2, c)$ ，半径为 $\sqrt{1+c}$

半径随 c 的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.



由以上二例可见，研究曲面有两个基本问题：

- (1) 已知曲面作为满足某些条件的点集, 求曲面方程;
- (2) 已知曲面方程, 研究曲面形状.