

第四讲 空间直线

空间直线的方程

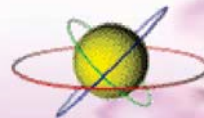
1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

► 内容小结



小 结

1. 空间直线的方程

(1) 点向式方程

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

点: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, 方向: $\vec{s} = (m, n, p)$.

(2) 参数式方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

点 方向向量

(3) 一般式方程

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$$

2. 点到直线的距离

点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 到直线 $l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$

的距离:
$$d = \frac{\|\vec{s} \times \overrightarrow{M_1M_0}\|}{\|\vec{s}\|}$$

其中 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{s} = (m, n, p)$.

3. 直线与直线的位置关系

$$l_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \vec{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$$

$$l_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2} \quad \vec{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$$

点: $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$

$$(1) l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 平行} \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$(2) l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 重合} \Leftrightarrow \vec{s}_1 \parallel \vec{s}_2 \parallel \overrightarrow{M_1M_2}$$

$$(3) l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 相交} \Leftrightarrow \vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2 \text{ 且 } [\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}] = 0;$$

$$(4) l_1 \text{ 与 } l_2 \text{ 异面} \Leftrightarrow [\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}] \neq 0;$$

(1)---(3)均属于两直线共面的情况.

设两直线的夹角为 α ，则

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\| \cdot \|\vec{s}_2\|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \quad (m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0)$$

4. 直线与平面的位置关系

$$l: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad \vec{s} = (m, n, p),$$

$$\pi: Ax + By + Cz + D = 0 \quad \vec{n} = (A, B, C).$$

(1) l 与 π 平行 $\Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ 但 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$;

(2) $l \subset \pi \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$ 且 $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$;

(3) l 与 π 相交 $\Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$.

l 与 π 的夹角:

$$\sin \theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{s}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

5. 平面束

$$l: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

经过直线 l 的所有平面:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$