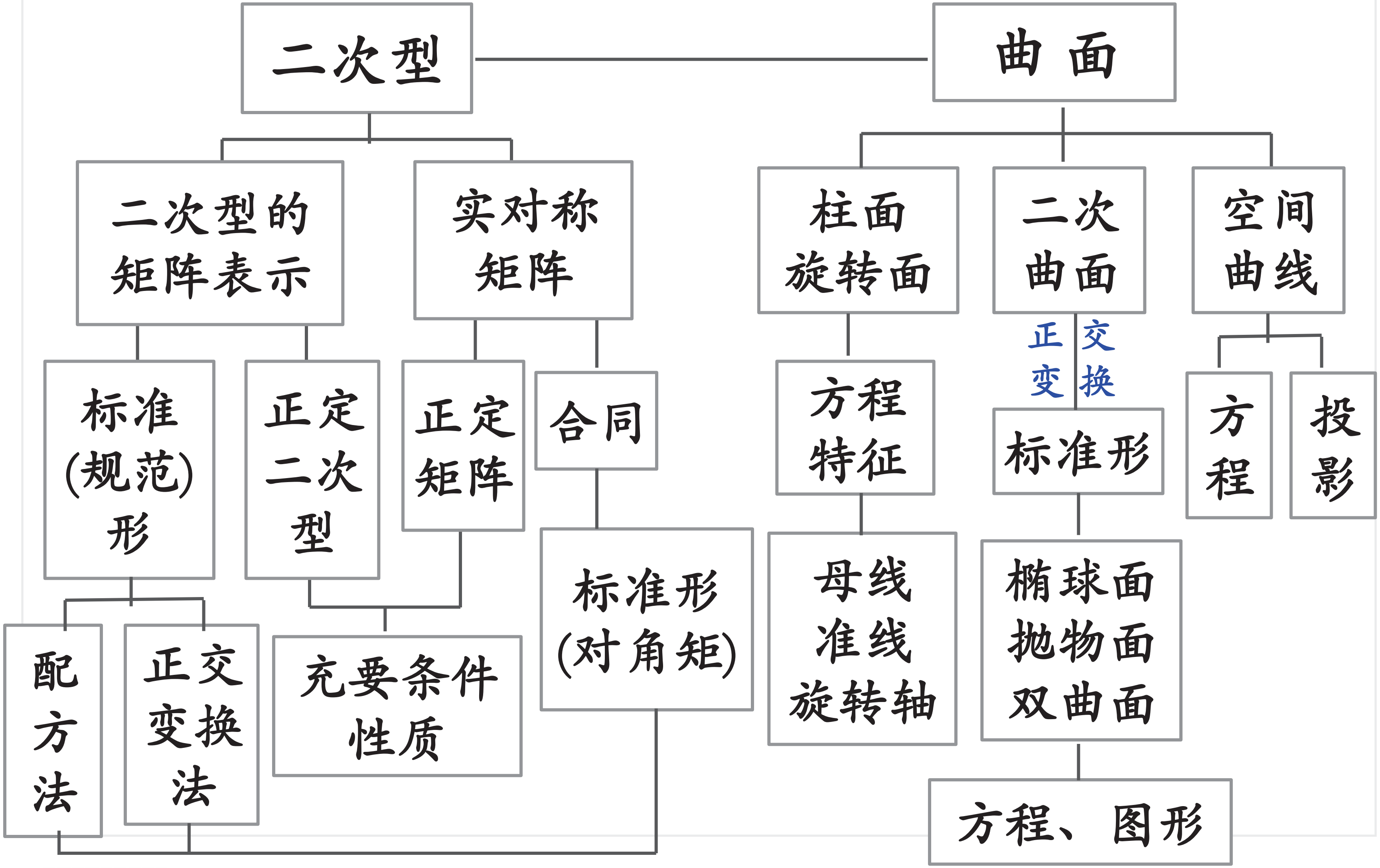
第六章 二次型与二次曲面

习题课 1

- 内容结构
- 范　例

电子科技大学　蒲和平

内容结构



二次型
曲面
二次型的矩阵表示
实对称矩阵
柱面旋转面
二次曲面
空间曲线
标准(规范)形
正定二次型
正定矩阵
合同
方程特征
正交变换
标准形
方程
投影
配方法
正交变换法
充要条件性质
标准形(对角矩)
母线准线旋转轴
椭球面抛物面双曲面
方程、图形

范　例

一、二次型的相关概念与合同矩阵

1．设 $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$

则二次型的矩阵是______，的秩为_______。

解 二次型的矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&1\\2&1&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&2\\0&0&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix},\quad \mathrm{R}(A)=3$$

2. 设A,B均为n阶实对称矩阵，则A与 B合同的充要条件为（ C ）.

(A) A与 B有相同的特征值；

(B) A与 B有相同的秩；

(C) A与 B有相同的正、负惯性指数;

(D) A，B均是可逆阵。

解 (A)是充分条件.

A，B 实对称, 且λ_i相同，则存在正交矩阵P, Q 使

$$P^{-1}AP = P^T AP = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$Q^{-1}BQ = Q^T BQ = \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

$$\therefore A \simeq \mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n) \simeq B$$

反之不一定正确.

如 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$均是实对称矩阵，并且合同

$$\because \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

但A,B 具有不同的特征值.

(B)是必要条件但不充分;

(D)既不充分也不必要.

3. 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 则A与B __A__ .

（A）合同且相似；（B）合同但不相似；

（C）不合同但相似；（D）不合同且不相似.

解 因为A,B都是实对称矩阵，如果它们相似则一定合同. 由于实对称矩阵一定能相似对角化，故只须判定它们是否有相同的特征值.

显然 $R(A)=R(B)=1$, A与B均有二重0特征值，又

$$A\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad \lambda=3\text{是}A\text{与}B\text{的唯一非零特征值.}$$

4. 设二次型

$$f=x_1^2+ax_2^2+x_3^2+2x_1x_2-2x_2x_3-2ax_1x_3$$

的正负惯性指数是1，求 f 的规范型及常数 a.

解　二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}$

因为 f 的正负惯性指数都是1，所以 f 的秩为2.

即有　$\mathrm{R}(A)=2.$

$$\because A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & a-1\\ 0 & 0 & (a-1)(a+2)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时, $\mathrm{R}(A)=2$;　f 的规范型为　$y_1^2-y_2^2$