第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

内容小结

三、直线与平面的位置关系

直线 l: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$

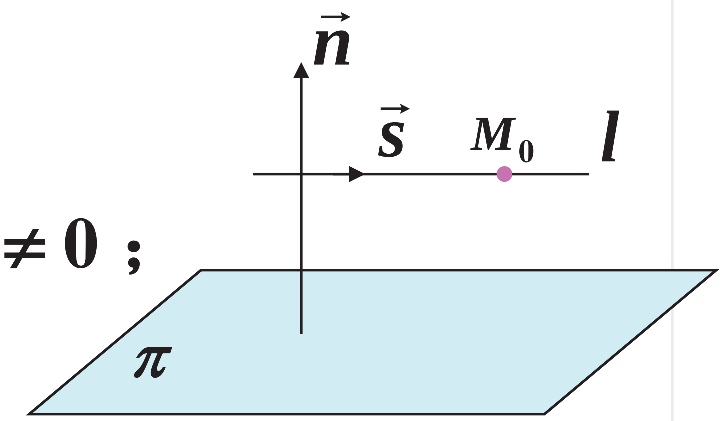
平面 π: $Ax+By+Cz+D=0$

直线的方向向量：$\vec{s}=(m, n, p)$, 点$M_0(x_0, y_0, z_0)$，

平面的法向量：$\vec{n}=(A, B, C)$.

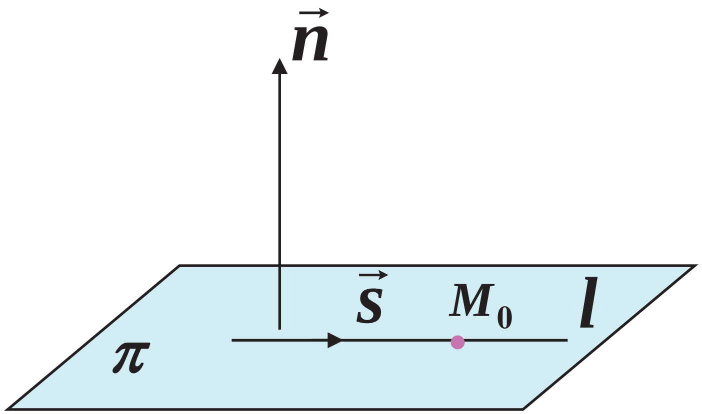
(1) l与π平行$\Leftrightarrow$

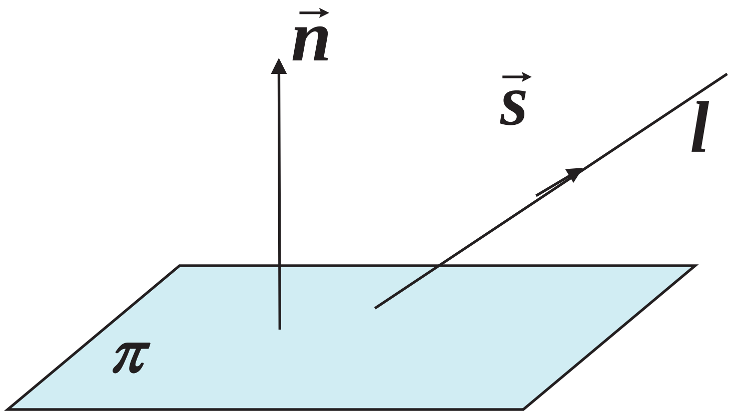
$\vec{s}\cdot\vec{n}=0$ 但 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$；



(2) $l \subset \pi \Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} = 0$且$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$；

(共面)



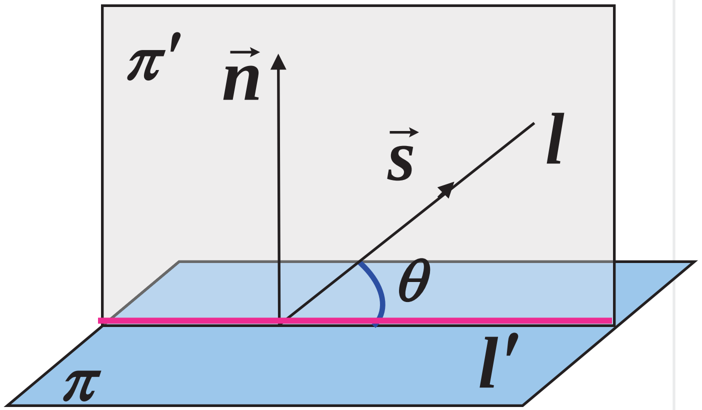


(3) l与π相交$\Leftrightarrow \vec{s} \cdot \vec{n} \neq 0$.

l与π的夹角：

过 l 作一平面 π' 与 π 垂直，则 π' 与 π 的交线 l' 称为 l 在 π 上的投影。

l 与 l' 的夹角 θ 称为 l 与 π 的夹角.



则

$$\theta = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \langle \vec{s},\ \vec{n} \rangle, & \langle \vec{s},\ \vec{n} \rangle \le \dfrac{\pi}{2} \\ \langle \vec{s},\ \vec{n} \rangle - \dfrac{\pi}{2}, & \langle \vec{s},\ \vec{n} \rangle > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

从而 $$\sin\theta = \frac{|\vec{s} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{s}\| \cdot \|\vec{n}\|} = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}$$

例1 判定直线 l: $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z}{2}$

与平面 π: $x+4y-z-1=0$

的位置关系，若相交则求出交点与夹角.

解 直线的方向向量 $\vec{s}=(1, -2, 2)$,

平面的法向量 $\vec{n}=(1, 4, -1)$,

由 $\vec{s}\cdot\vec{n}=-9\neq 0 \Rightarrow$ 直线与平面相交.

(1) 设二者夹角为θ，则

$$\sin\theta=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{n}\|}=\frac{|-9|}{\sqrt{18}\sqrt{9}}=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 则 \quad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 直线 l 的参数方程：

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2 - 2t \\ z = 2t \end{cases}$$

代入 π：$x + 4y - z - 1 = 0$ 得：

$$-9t - 8 = 0 \Rightarrow t = -\frac{8}{9}$$

将其代入直线参数方程得

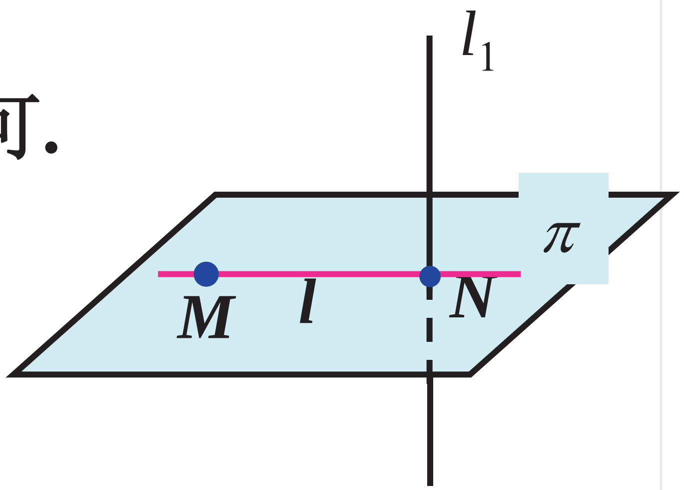
$$x = \frac{1}{9},\ \ y = -\frac{2}{9},\ \ z = -\frac{16}{9}$$

故交点为 $(\frac{1}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{16}{9})$.

例2 直线l过点$M(2,5,-2)$且与直线

$$l_1:\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \end{cases}$$

垂直相交，求l的方程.



解 只需求出交点N的坐标即可.

过M作平面π与l_1垂直，

π与l_1的交点即为N.

l_1的方向向量 $\vec{s}_1=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}=-9\vec{i}+5\vec{j}+7\vec{k}.$

过$M(2,5,-2)$且与l垂直的平面

$$\pi:\ -9(x-2)+5(y-5)+7(z+2)=0.$$

$$9x-5y-7z-7=0. \qquad (1)$$

将直线l_1与π的方程联立：

$$\begin{cases} x-y+2z-4=0 \\ 3x+4y+z=0 \\ 9x-y-7z-7=0 \end{cases} \qquad \overline{A}\to\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

解得：$x=1, y=-1, z=1.$

这就是l_1与π的交点N的坐标$(1,-1,1)$.

直线l 的方向向量 $\vec{s} = \overrightarrow{MN} = (-1,-6,3)$.

l 的方程 $\dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-5}{-6} = \dfrac{z+2}{3}$.

注： 在求交点N 的坐标时，也可将l_1 化为的参数方程:

$$\begin{cases} x = 1 - 9t \\ y = -1 + 5t \\ z = 1 + 7t \end{cases} \qquad (2)$$

代如平面方程(1)而求得

平面束

设直线 l 的方程为

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \cdots\cdots(1) \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\cdots\cdots(2) \end{cases}$$

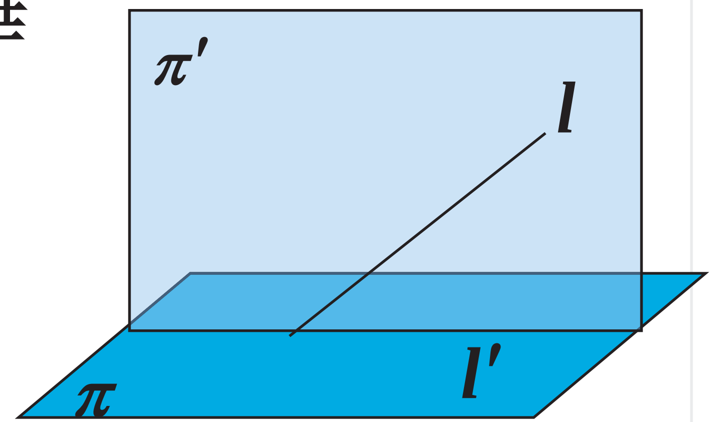
则除(2)所表示的平面外，经过直线 l 的所有平面都可以由下式表示

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad （3）$$

经过直线 l 的全体平面称为过直线 l 的平面束，方程(3)称为经过直线 l 的平面束方程。

例3 求直线 l: $\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$ 在平面 π: $2x+2y+z-11=0$ 上的投影 l'.

解1 过直线l作一平面π'与π垂直，则 π'与π的交线 l'就是l在π上的投影.



改写 l 的方程为

$$l:\ \begin{cases}\dfrac{x-4}{4}=\dfrac{y-5}{-1}\\[2mm] \dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-3}{3}\end{cases}\qquad \text{即}\quad l:\ \begin{cases}x+4y-24=0\\ 3y+z-17=0\end{cases}$$

经过直线 l 的平面束方程: $x+4y-24+\lambda(3y+z-17)=0$

整理得　$\pi': x+(4+3\lambda)y+\lambda z-(24+17\lambda)=0$

由 $\pi' \perp \pi \Rightarrow (2,\ 2,\ 1)\cdot(1,\ 4+3\lambda,\ \lambda)=0$

解得：$\lambda=-\dfrac{10}{7}$

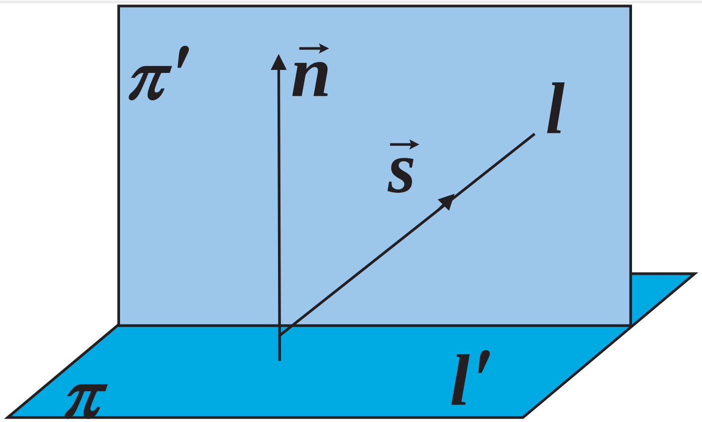
代入　$\pi': x+(4+3\lambda)y+\lambda z-(24+17\lambda)=0$

化简：　$\pi': 7x-2y-10z+2=0$

从而投影直线为：

$$l': \begin{cases} 7x-2y-10z+2=0 \\ 2x+2y+z-11=0 \end{cases}$$

解2 如图



π' 的法向：

$$\vec{n}' = \vec{s} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7,\ 2,\ 10)$$

则 $\pi': -7(x-4)+2(y-5)+10(z-2)=0$

即 $\pi': 7x-2y-10z+2=0$

从而投影直线为 $l': \begin{cases} 7x-2y-10z+2=0 \\ 2x+2y+z-11=0 \end{cases}$

主要内容

1. 直线与平面的位置关系

2. 平面束

练习： 1. 求过点$P(-1,1,2)$及直线$l: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z+2}{0}$的平面方程.

2. 过点$M(-1,0,4)$引直线l，使它平行于平面$3x-4y+z-10=0$，且与直线$l_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z}{2}$相交.

答案： 1. $4x+6y+3z-8=0$;

2. $\dfrac{x+1}{48}=\dfrac{y}{37}=\dfrac{z-4}{4}$.