第二讲 向量的乘法

- 内　积
  1.内积的概念与性质
  2.内积的坐标形式
- 外　积
  1.外积的概念与性质
  2.外积的坐标形式
- 混合积
  1.混合积的概念与性质
  2.混合积的几何意义
- 内容小结

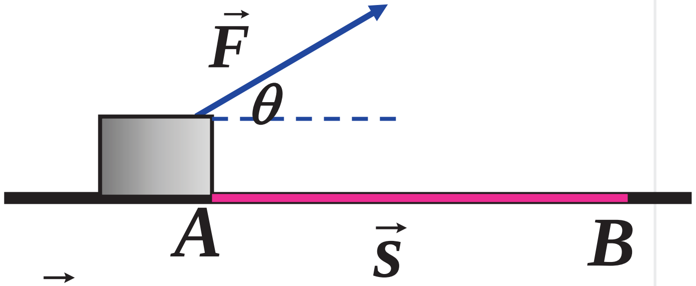
第二讲 向量的乘法

- 内　积
  - 1.内积的概念与性质
  - 2.内积的坐标形式
- 外　积
  - 1.外积的概念与性质
  - 2.外积的坐标形式
- 混合积
  - 1.混合积的概念与性质
  - 2.混合积的几何意义
- 内容小结

一、内积

1. 内积的概念与性质

引例. 一质点在力$\vec{F}$ 的作用下从点A移动到B，力所做的功.



记 $\vec{s}=\overrightarrow{AB}$, 则

$$W=\|\vec{s}\|\cdot\|\vec{F}\|\cos\theta=\|\vec{s}\|\cdot \mathrm{Prj}_{\vec{s}}\,\vec{F}$$

定义 设向量$\vec{a},\vec{b}$的夹角为θ, 称

$$\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta \overset{\text{记作}}{=\!=\!=} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

为$\vec{a}$与$\vec{b}$的内积 (数量积、点积) .

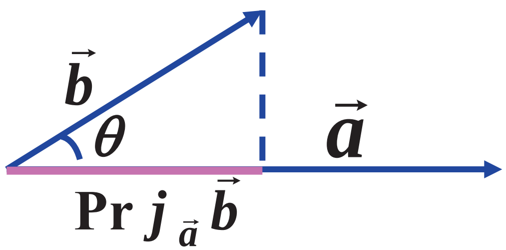
<< * >>

内积的意义：

$$(1)\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\cos\theta$$

$$=\|\vec{a}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\|\vec{b}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

即有 $\mathrm{Prj}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{\|\vec{a}\|}=\vec{b}\cdot\vec{e}_a$



$$(2)\ \vec{a}^2=\|\vec{a}\|^2$$

(3) 若 $\vec{a}\neq 0,\ \vec{b}\neq 0$, 则 $\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$

特别：$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\bullet\vec{b}=0$

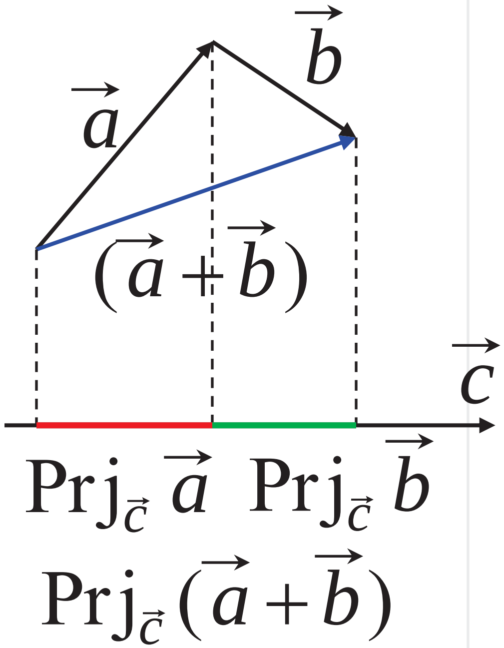
内积的运算律:

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 (λ为实数)

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$



证 当 $\vec{c}=\vec{0}$ 时, 显然成立; 当 $\vec{c}\neq\vec{0}$ 时

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\|\vec{c}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=\|\vec{c}\|(\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{a}+\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{b})$$

$$=\|\vec{c}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{a}+\|\vec{c}\|\,\mathrm{Prj}_{\vec{c}}\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

例1 设 $\|\vec{a}\| = 11, \|\vec{b}\| = 23, \|\vec{a}-\vec{b}\| = 30$, 求 $\|\vec{a}+\vec{b}\|$.

解 $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 650 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{b}^2$$

$$= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 650 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$2\vec{a}\cdot\vec{b} = -250,$$

$$\therefore \|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = 650 - 250 = 400$$

$$\Rightarrow \|\vec{a}+\vec{b}\| = 20.$$

主要内容

内积的概念与性质

1. 内积的意义；　2. 内积的运算律.

练习 已知 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 两两垂直，且 $\|\vec{a}\|=1,\|\vec{b}\|=2,\|\vec{c}\|=3$，求 $\vec{s}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ 的长度与它和 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的夹角.

答案：$\|\vec{s}\|=\sqrt{14},\langle\vec{s},\vec{a}\rangle=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{14}}$