第三讲 曲面与空间曲线

- 曲面方程
  1.柱面
  2.旋转曲面
- 空间曲线
  1.一般式方程
  2.参数式方程
  3.空间曲线在坐标面上的投影
- 内容小结

电子科技大学 蒲和平

第三讲 曲面与空间曲线

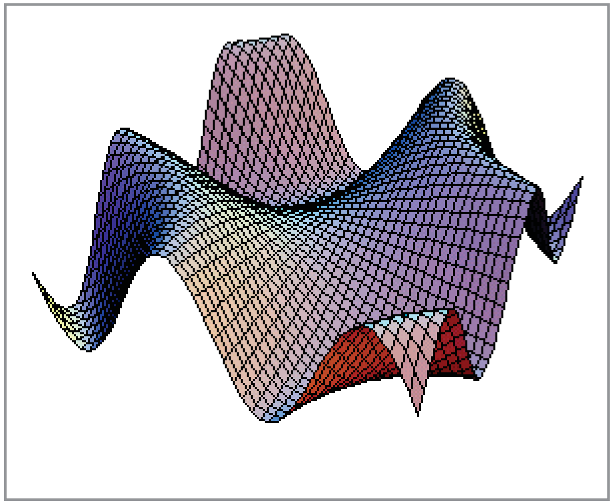
- 曲面方程
  1.柱面
  2.旋转曲面
- 空间曲线
  1.一般式方程
  2.参数式方程
  3.空间曲线在坐标面上的投影
- 内容小结

一、曲 面

定义 空间点集

$$S = \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = 0\}$$

称为由方程 $F(x, y, z) = 0$ 所确定的曲面.



意义:

(1) S 上的点都满足 $F(x, y, z) = 0$;

(2) 满足 $F(x, y, z) = 0$ 的点都在 S 上.

例1 建立球心在点 $M(x_0,y_0,z_0)$，半径为R 的球面方程.

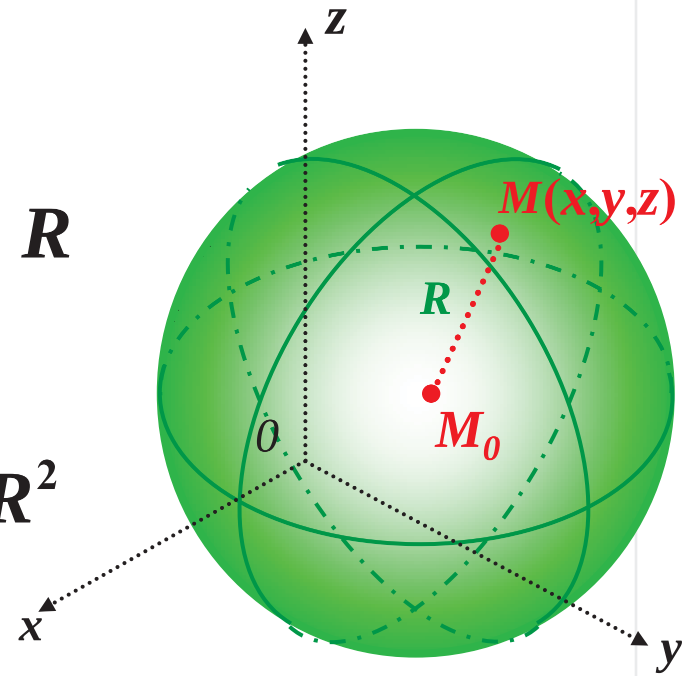
解 设$M(x,y,z)$是球面上任一点，

根据题意有 $\| MM_0 \| = R$

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$$



特殊地：球心在原点时方程为

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

例2 方程$z=(x-1)^2+(y-2)^2-1$的图形是怎样的？

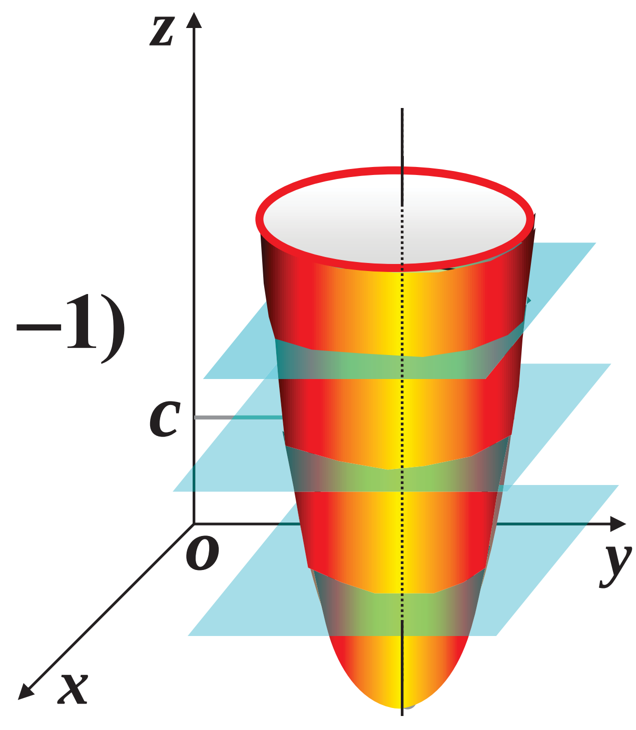
解 根据题意有 $z \geq -1$

用平面$z=c$去截图形得圆：

$$(x-1)^2+(y-2)^2=1+c \quad (c \geq -1)$$

当平面$z=c$上下移动时，

得到一系列圆



圆心在$(1,2,c)$，半径为$\sqrt{1+c}$

半径随c的增大而增大. 图形上不封顶，下封底.

由以上二例可见，研究曲面有两个基本问题：

(1) 已知曲面作为满足某些条件的点集, 求曲面方程;

(2) 已知曲面方程，研究曲面形状.

第三讲 曲面与空间曲线

曲面方程

1.柱面

2.旋转曲面

空间曲线

1.一般式方程

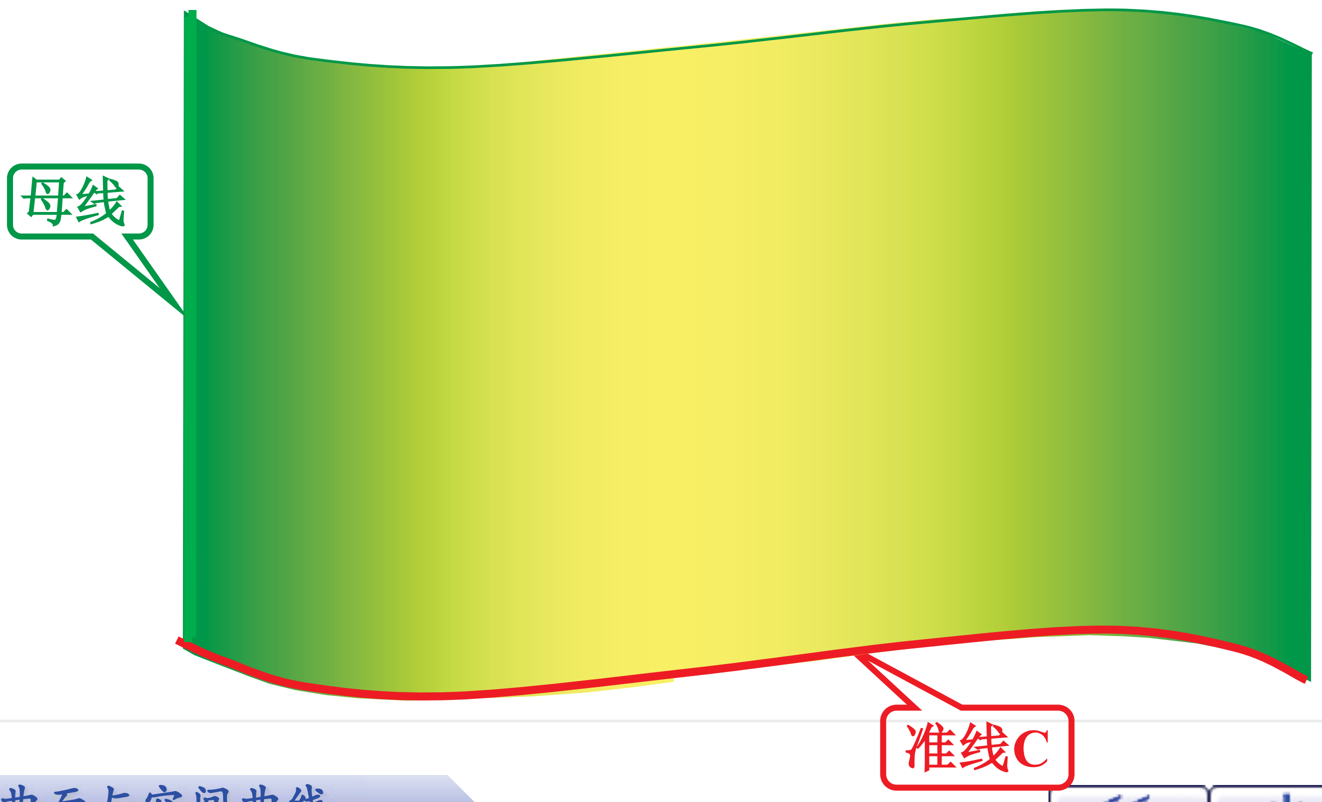
2.参数式方程

3.空间曲线在坐标面上的投影

内容小结

1. 柱 面

定义 平行于定直线并沿定曲线C移动的直线L所形成的曲面称为柱面. 定曲线C 叫柱面的准线, 动直线L 叫柱面的母线.



母线平行于坐标轴的柱面

设准线为xoy平面曲线：

$$C:\begin{cases}F(x,y)=0\\ z=0\end{cases}$$

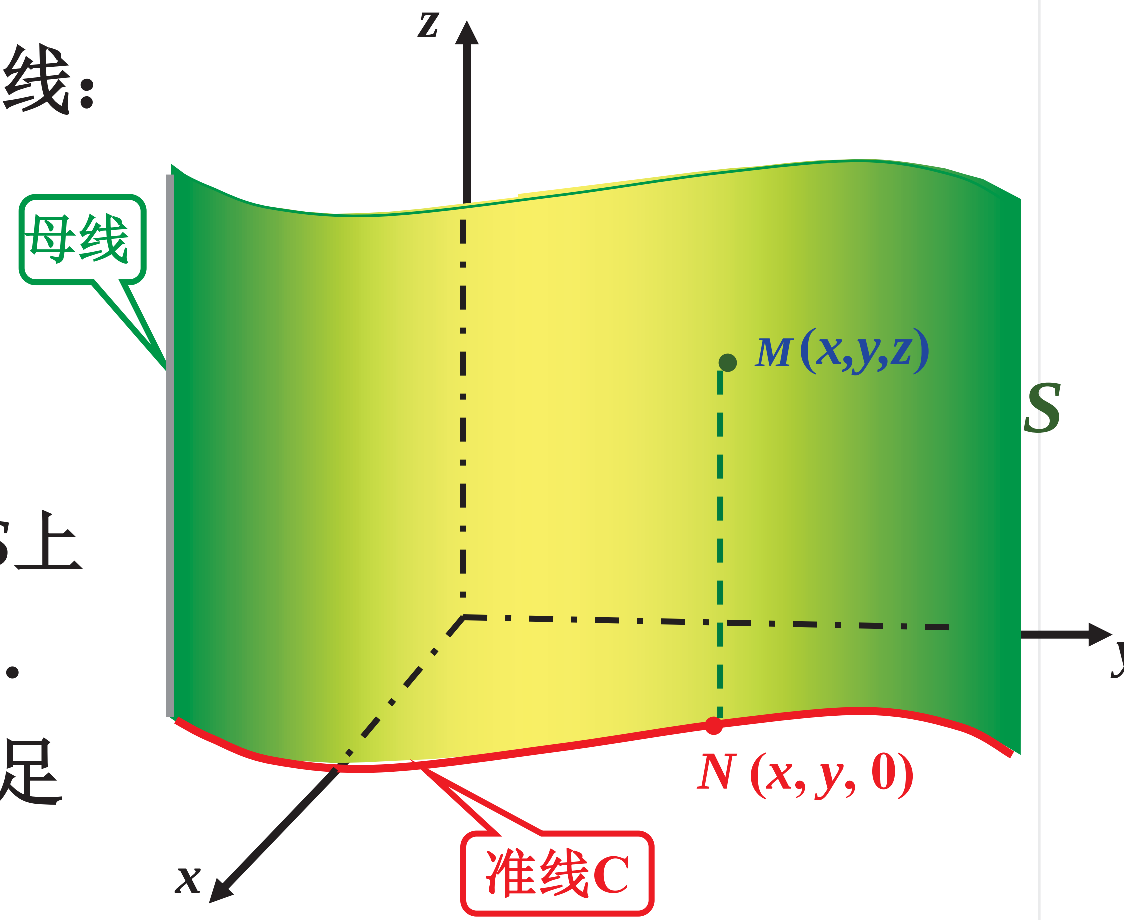
母线平行于z轴.

点$M(x,y,z)$在柱面S上

$\Leftrightarrow$ 点$N(x,y,0)\in C$.

即，点$M(x,y,z)$满足

方程 $F(x,y)=0$

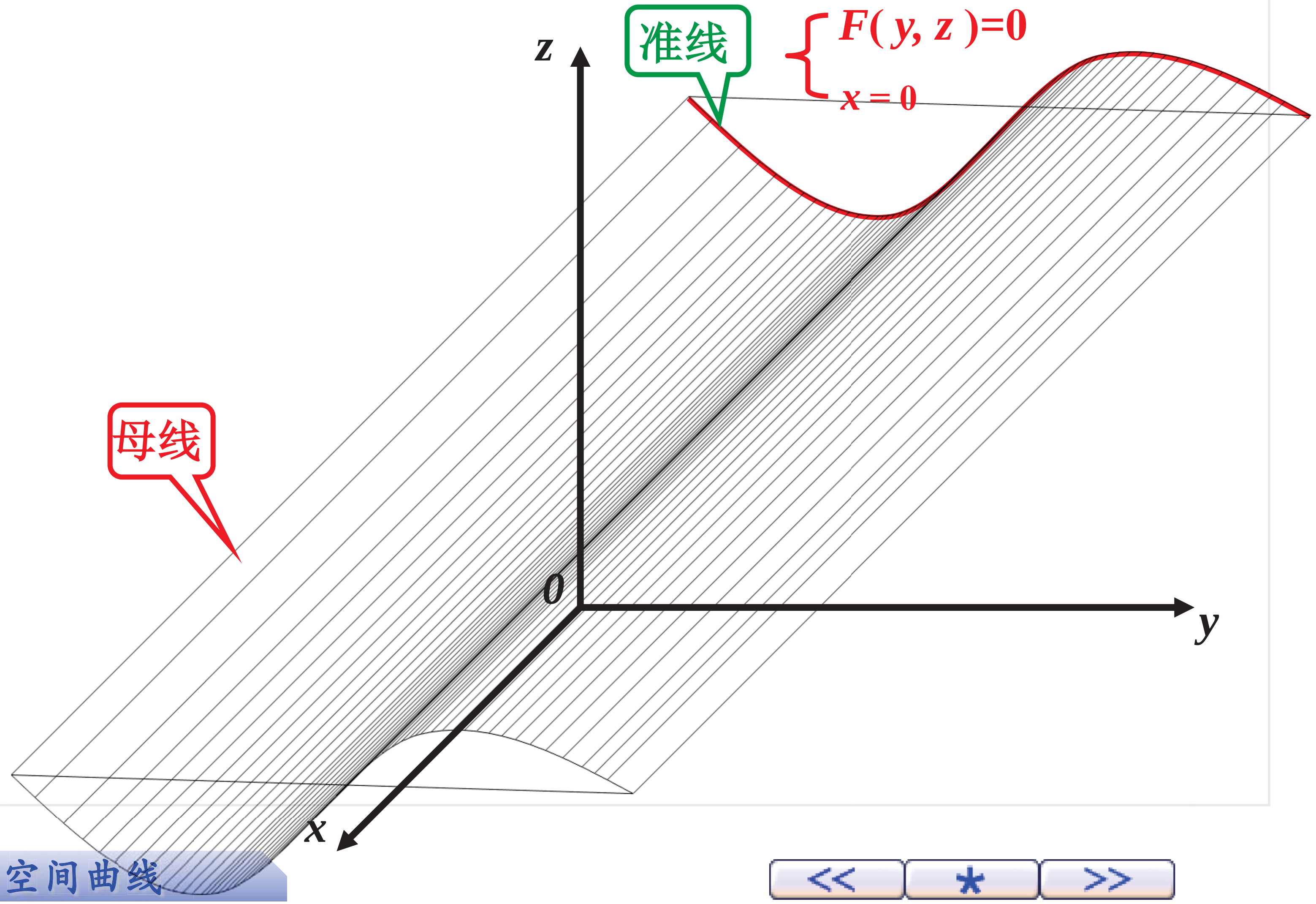


$\underline{F(x,y)=0}$ 表示母线平行于z轴的柱面

（不含z）

类似：$F(y,z)=0$ 表示母线平行于x轴的柱面

($不含x$)



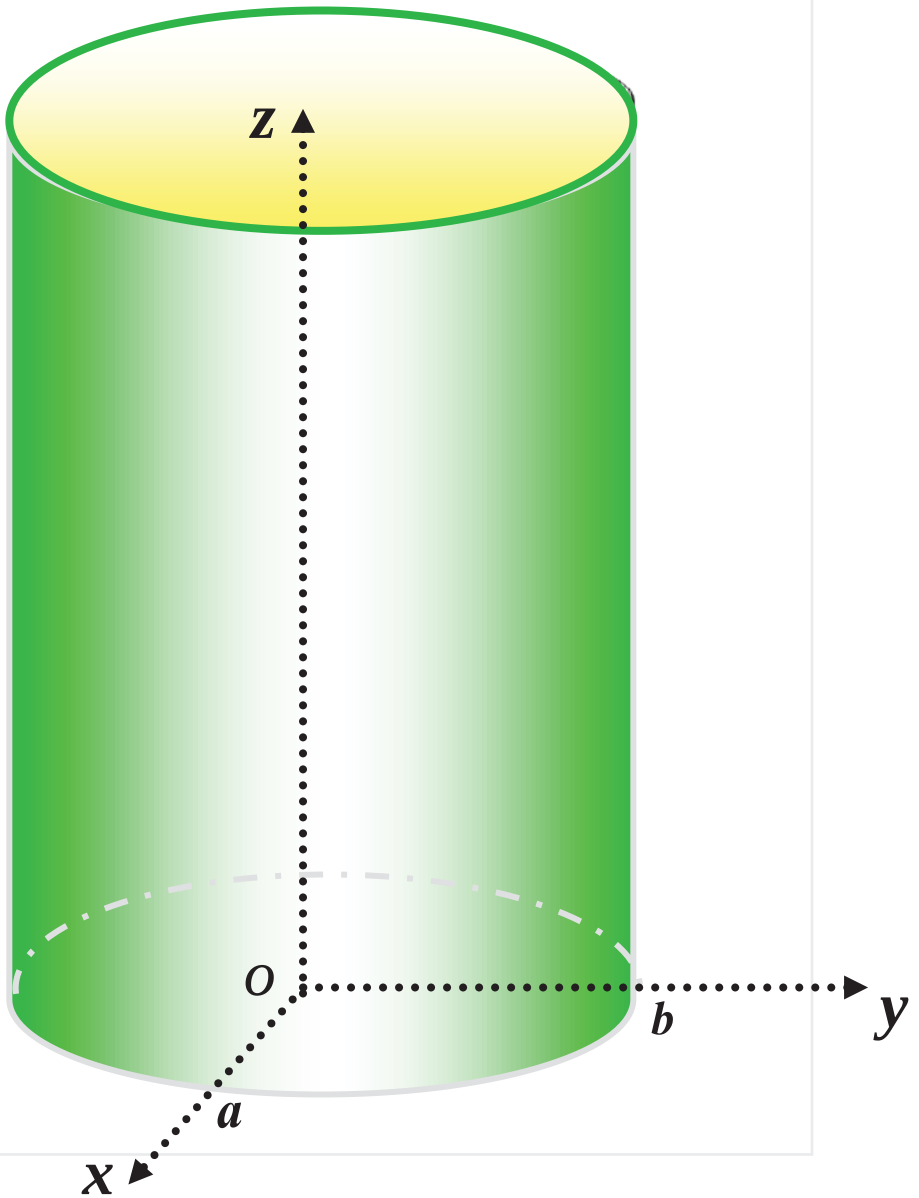
例1 椭圆柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

准线C 是 xoy 平面上的椭圆.

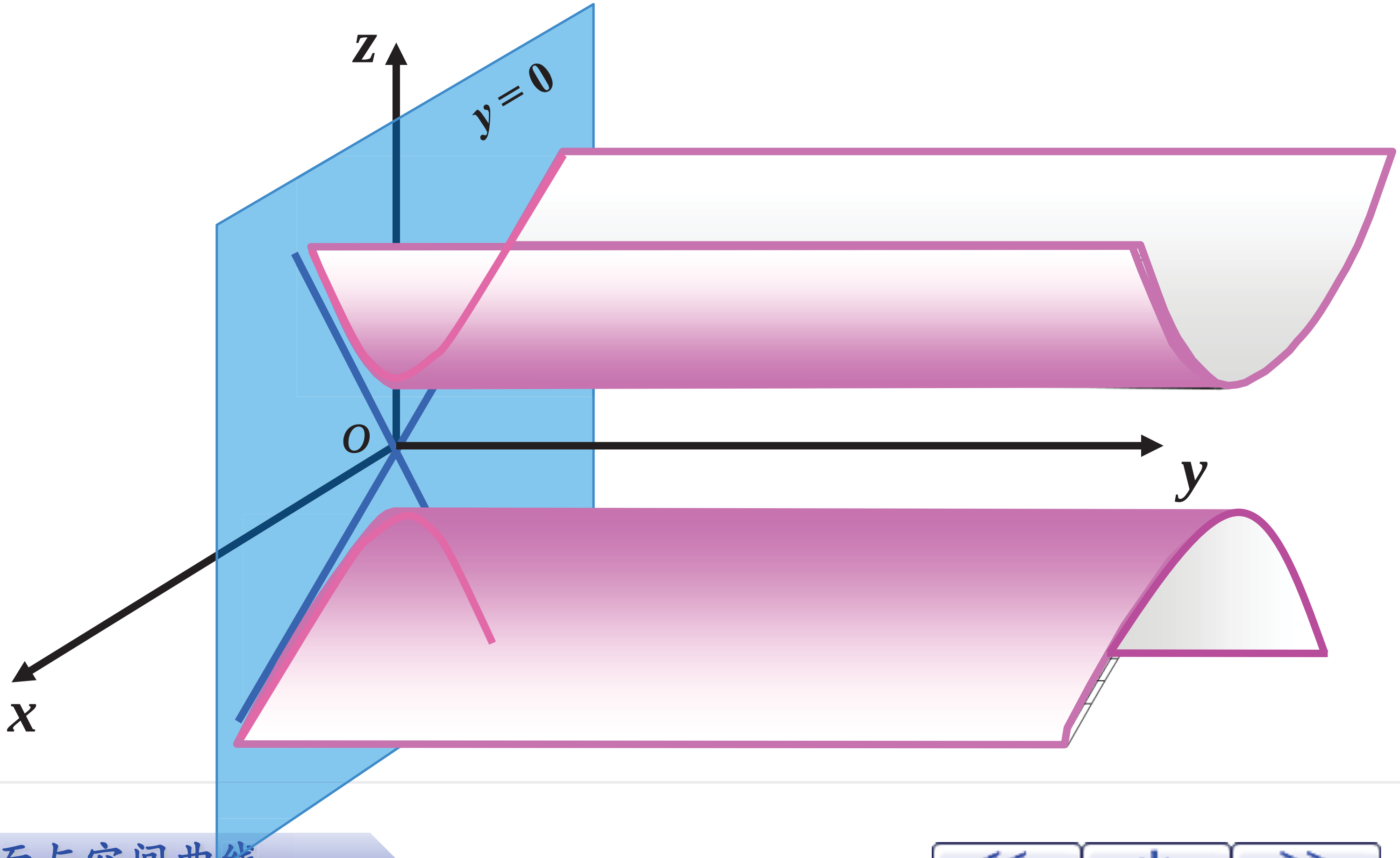
母线 l 与 z 轴平行.

$a=b$：圆柱面



例2 双曲柱面 $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{b^2}=1$

准线：xoz 平面上的双曲线；母线：与 y 轴平行.

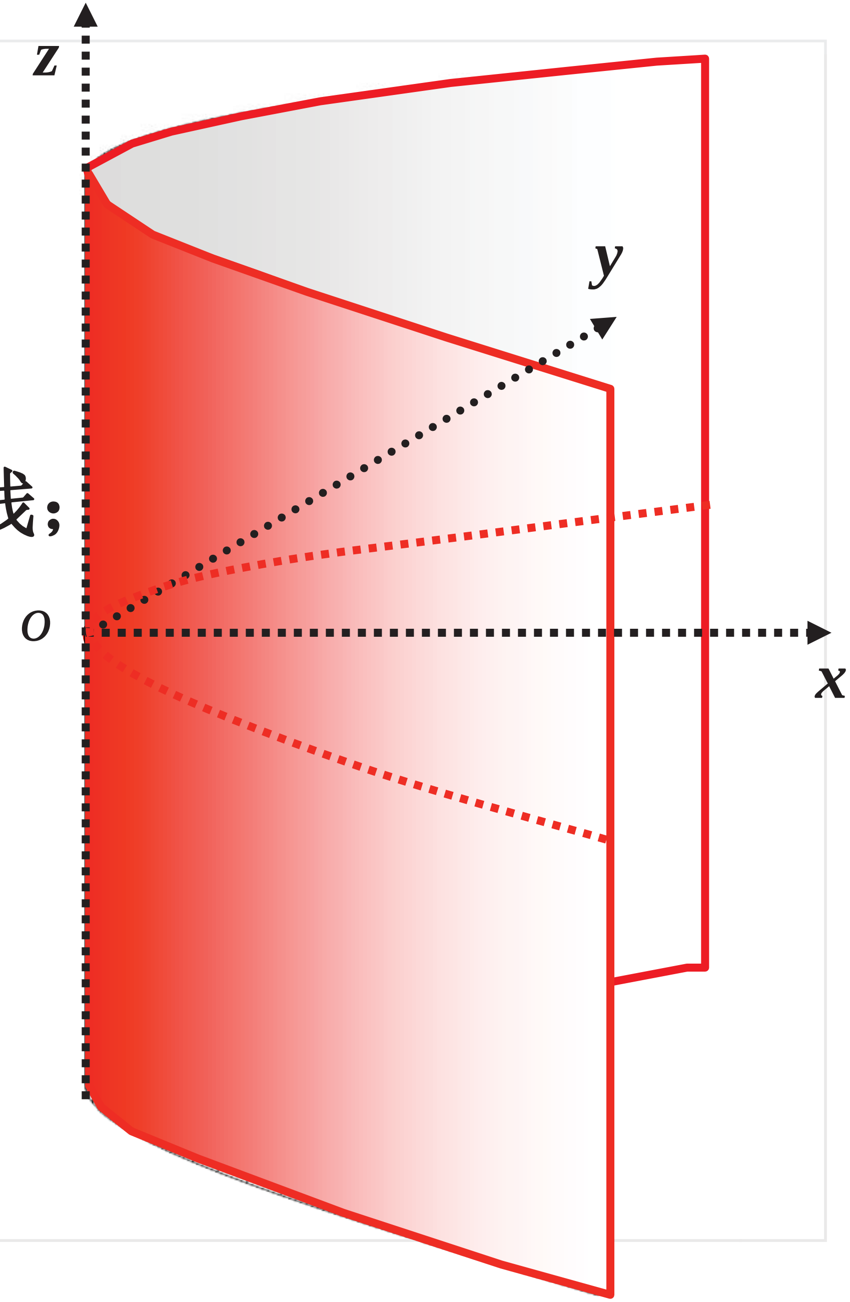


例3 抛物柱面

$$y^2 = 2px$$

准线: xoy 平面上的抛物线;

母线: 与z 轴平行.



主要内容

1.柱面的概念；

2. 母线平行于坐标轴的柱面方程.

练习

下列曲面中那些是柱面？并说明母线平行的坐标轴.

1. $y^2+2xy+1=0$ ——柱面，母线平行于z轴.

2. $z=x^2+y^2$ ——非柱面.

3. $x+y-z=1$ ——柱面（平面），母线不平行于坐标轴.

4. $z=\sin x$ ——柱面（平面），母线平行于y轴.

第三讲 曲面与空间曲线

曲　面

1.柱面

2.旋转曲面

空间曲线

1.一般式方程

2.参数式方程

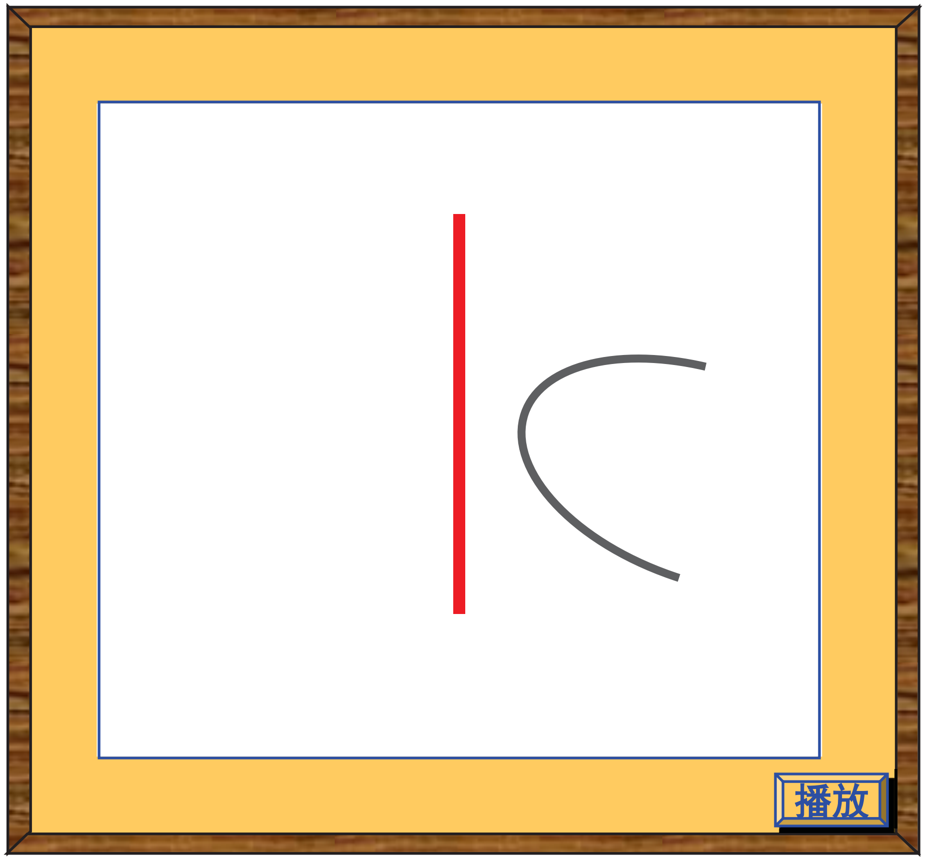
3.空间曲线在坐标面上的投影

内容小结

2. 旋转曲面

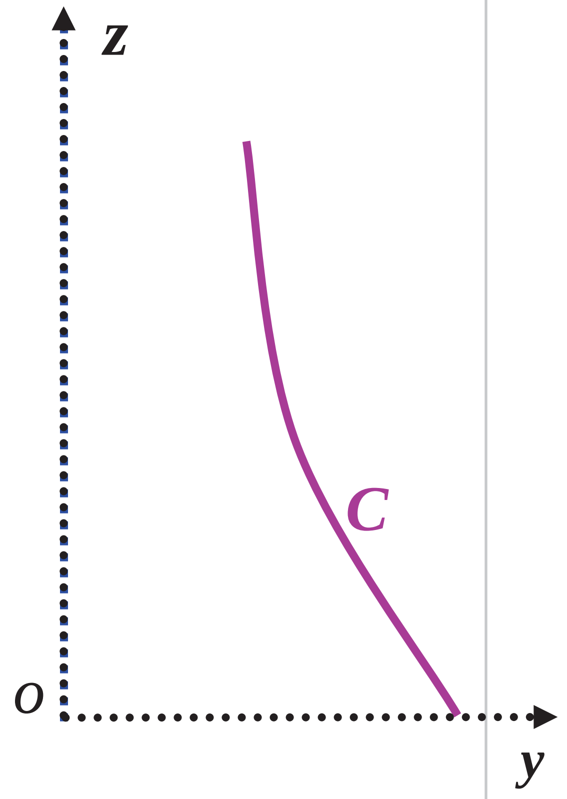
定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面.**

这条定直线叫旋转曲面的**轴.**



以坐标轴为转轴的旋转面方程

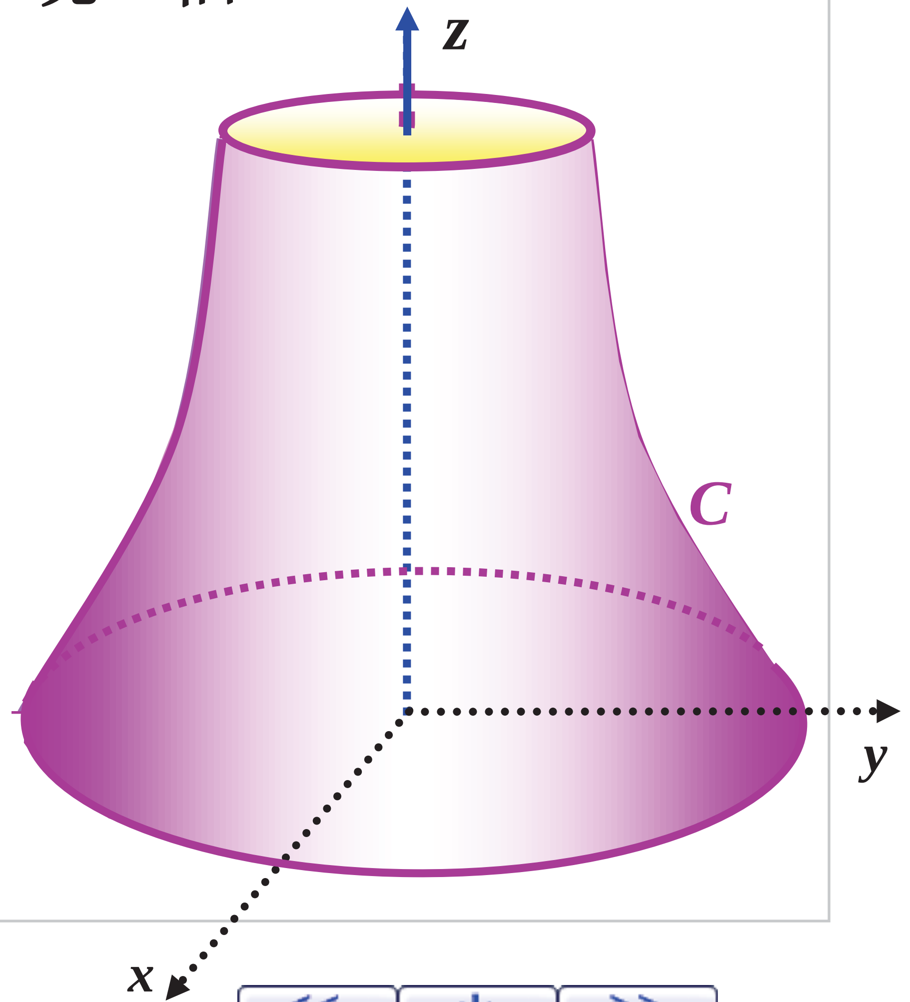
曲线 C: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴



以坐标轴为转轴的旋转面方程

曲线 C: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴

旋转一周得旋转曲面 S



以坐标轴为转轴的旋转面方程

曲线 C: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴

旋转一周得旋转曲面 S

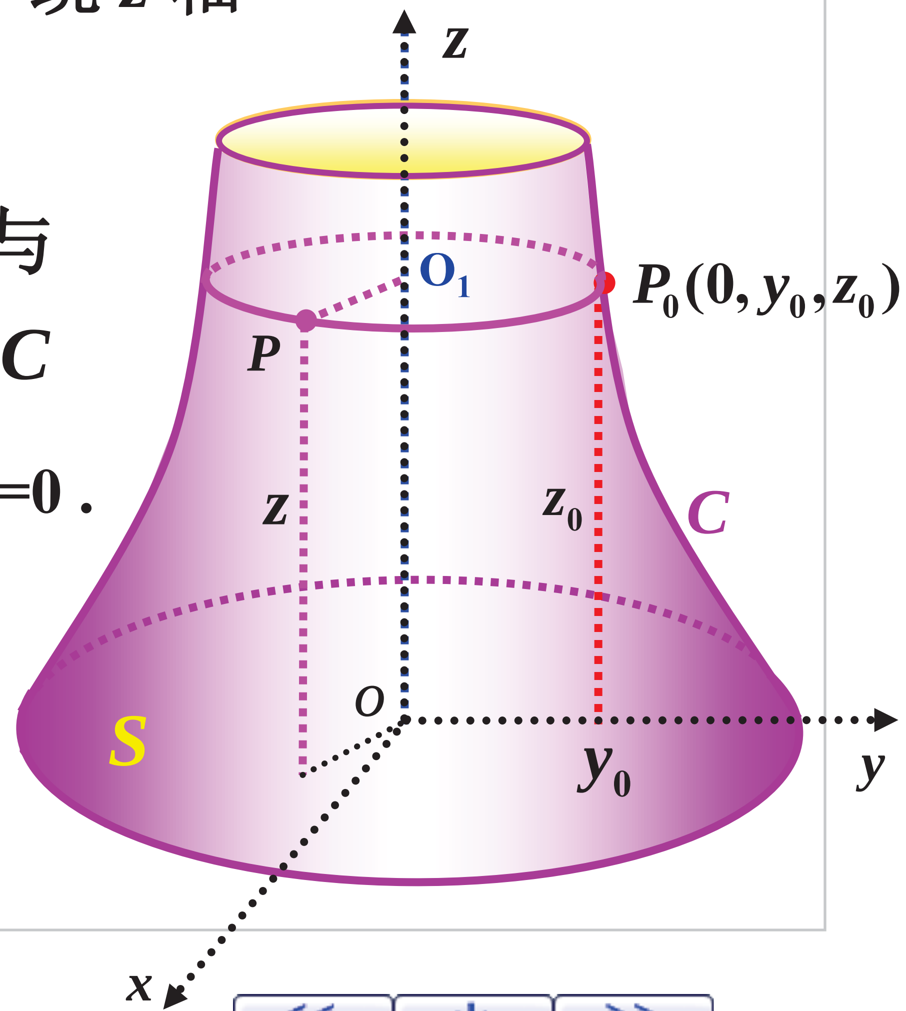
$\forall\, P(x,y,z)\in S$，过点P 作与

xoy面平行的平面交曲线 C

于点 $P_0(y_0, z_0)$, 则 $f(y_0, z_0)=0$.

由于 $z_0 = z$,

$$|y_0| = \left|\overline{PO_1}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$



以坐标轴为转轴的旋转面方程

曲线 C: $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴

旋转一周得旋转曲面 S

$\forall\ P(x,y,z)\in S$，过点 P 作与

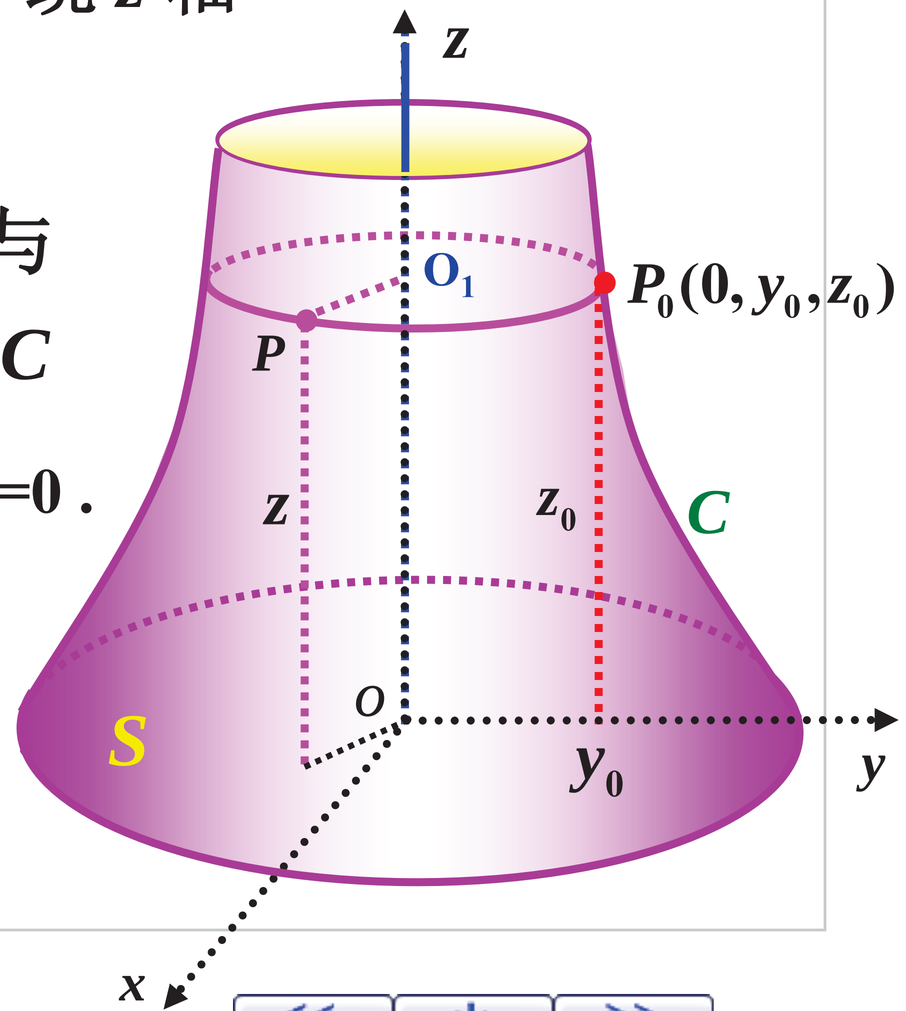
xoy 面平行的平面交曲线 C

于点 $P_0(y_0, z_0)$, 则 $f(y_0, z_0)=0$.

由于 $z_0 = z$,

$$|y_0| = \left|\overline{PO_1}\right| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$S:\ f(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z)=0$$



同理：曲线 C $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 y 轴旋转一周的曲面方程为

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0.$$

类似有： 平面曲线 $L:\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

1^0 绕 x 轴旋转, 得旋转曲面 $f(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0;$

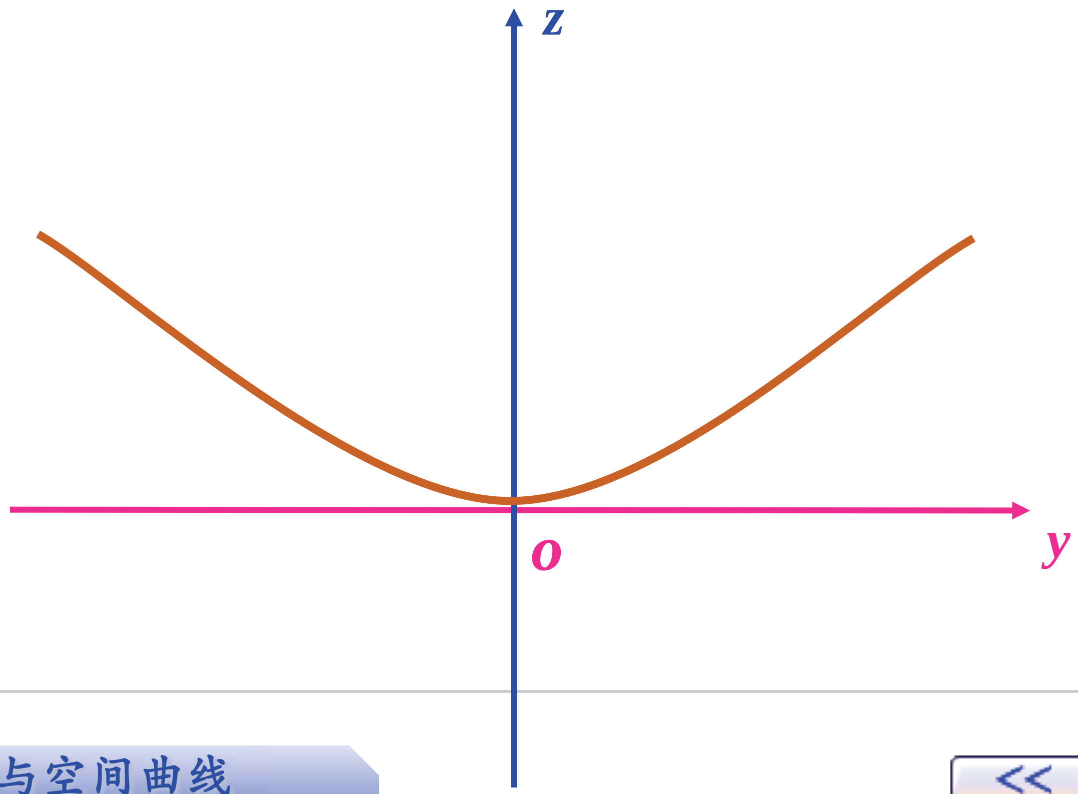
2^0 绕 y 轴旋转，得旋转曲面 $f(\pm\sqrt{x^2+z^2},y)=0.$

同样可讨论平面曲线 $\Gamma:\begin{cases} f(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$

绕x轴或z轴旋转所成的曲面方程.

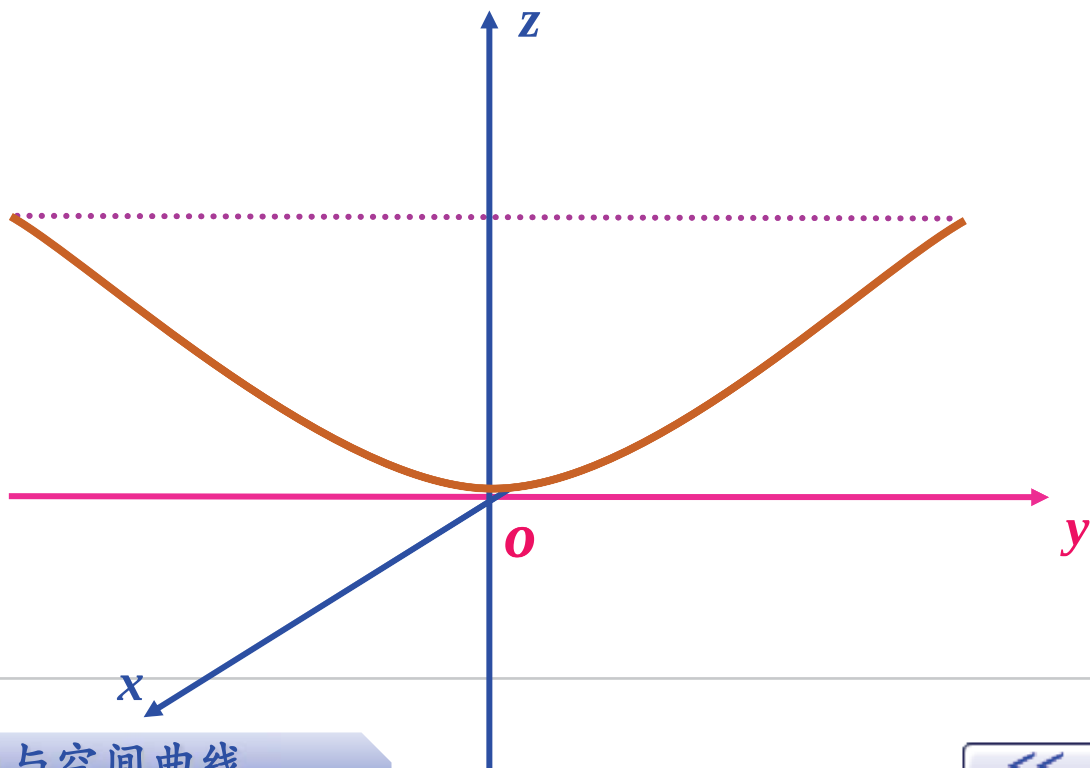
例4 旋转抛物面

抛物线 $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周，



例4 旋转抛物面

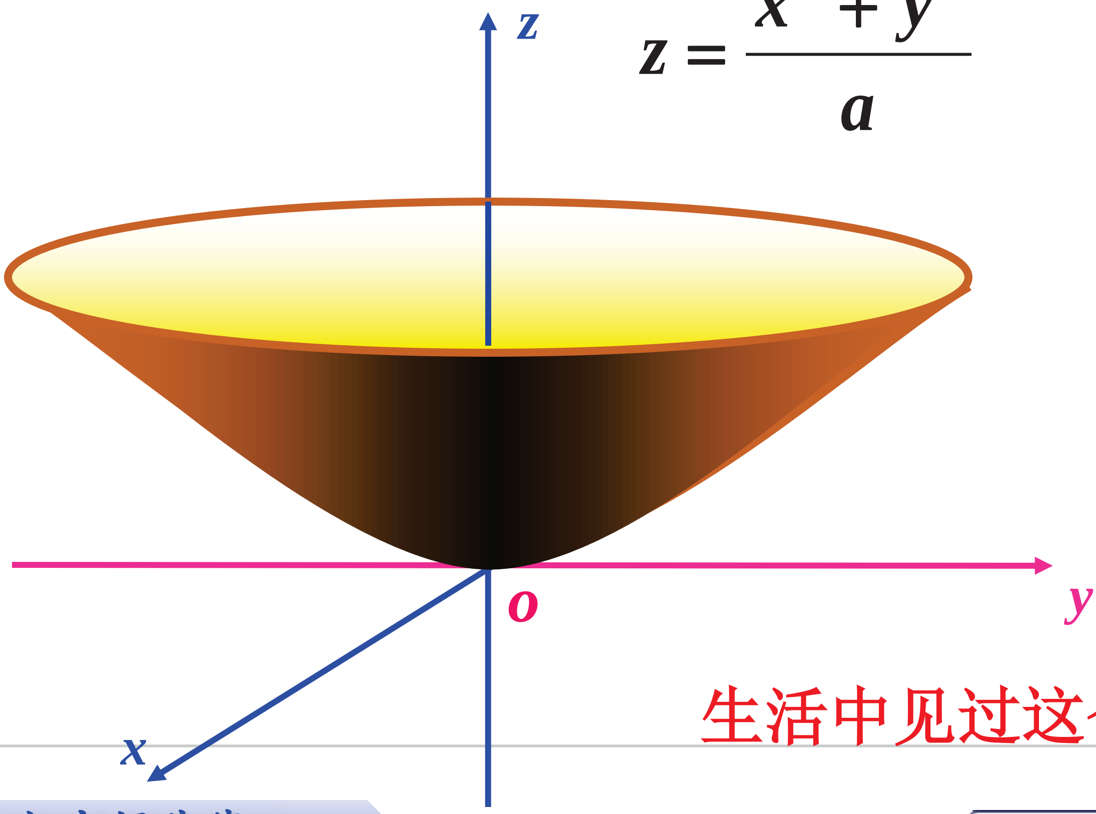
抛物线 $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周，



例4 旋转抛物面

抛物线 $\begin{cases} y^2 = az \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴一周，得旋转抛物面

$$z = \frac{x^2 + y^2}{a}$$



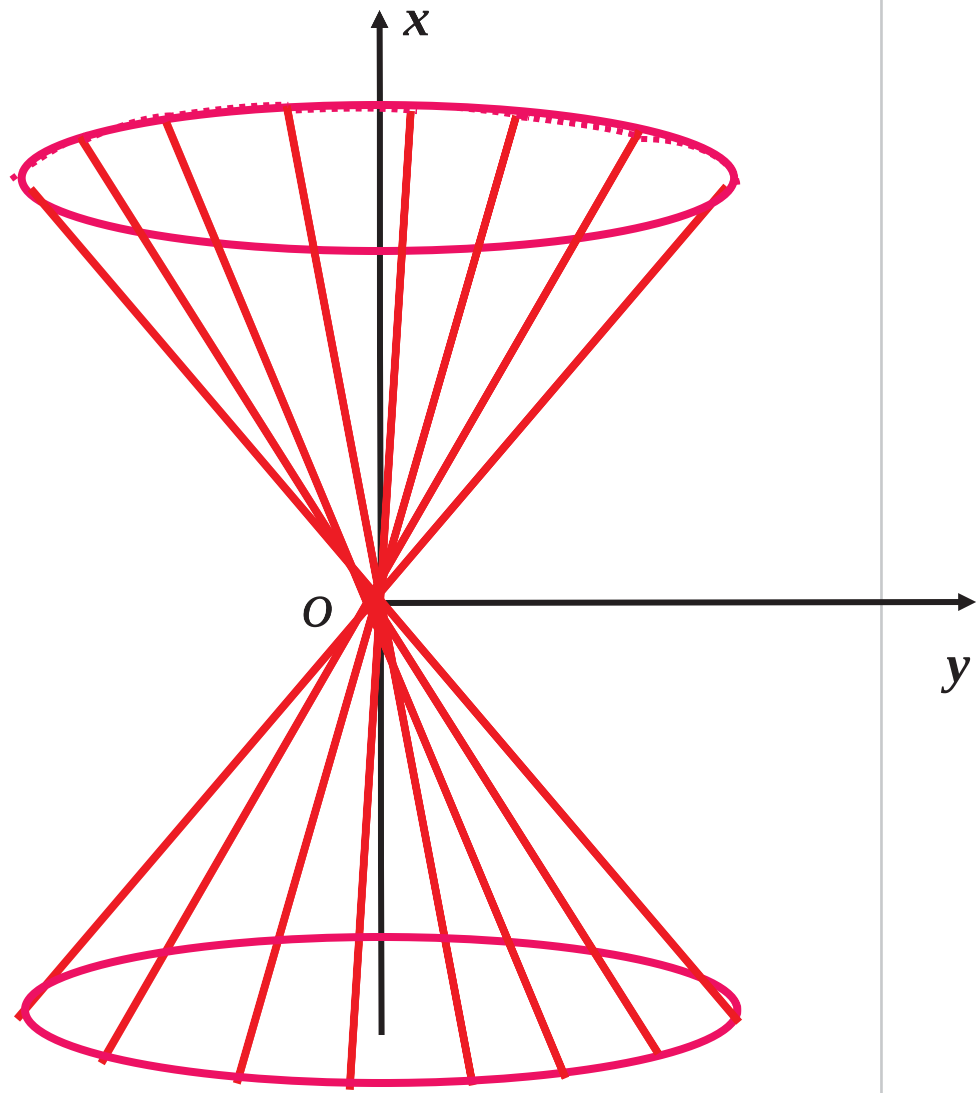
生活中见过这个曲面吗？

例5 旋转锥面

*xoy*平面上的直线

$$\begin{cases} y = kx \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 *x* 轴一周

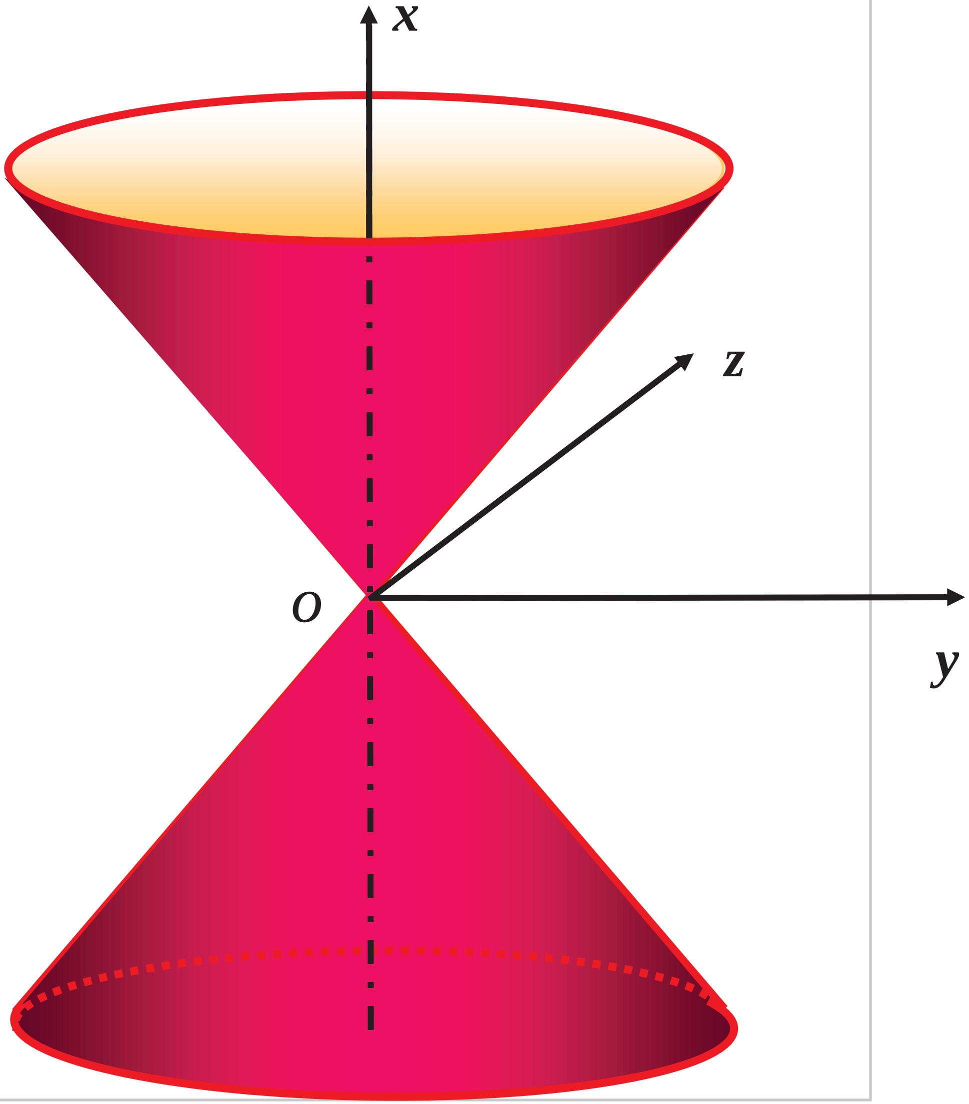


例5 旋转锥面

*xoy*平面上的直线

$$\begin{cases} y = kx \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 *x* 轴一周



例5 旋转锥面

xoy平面上的直线

$$\begin{cases} y = kx \\ z = 0 \end{cases}$$

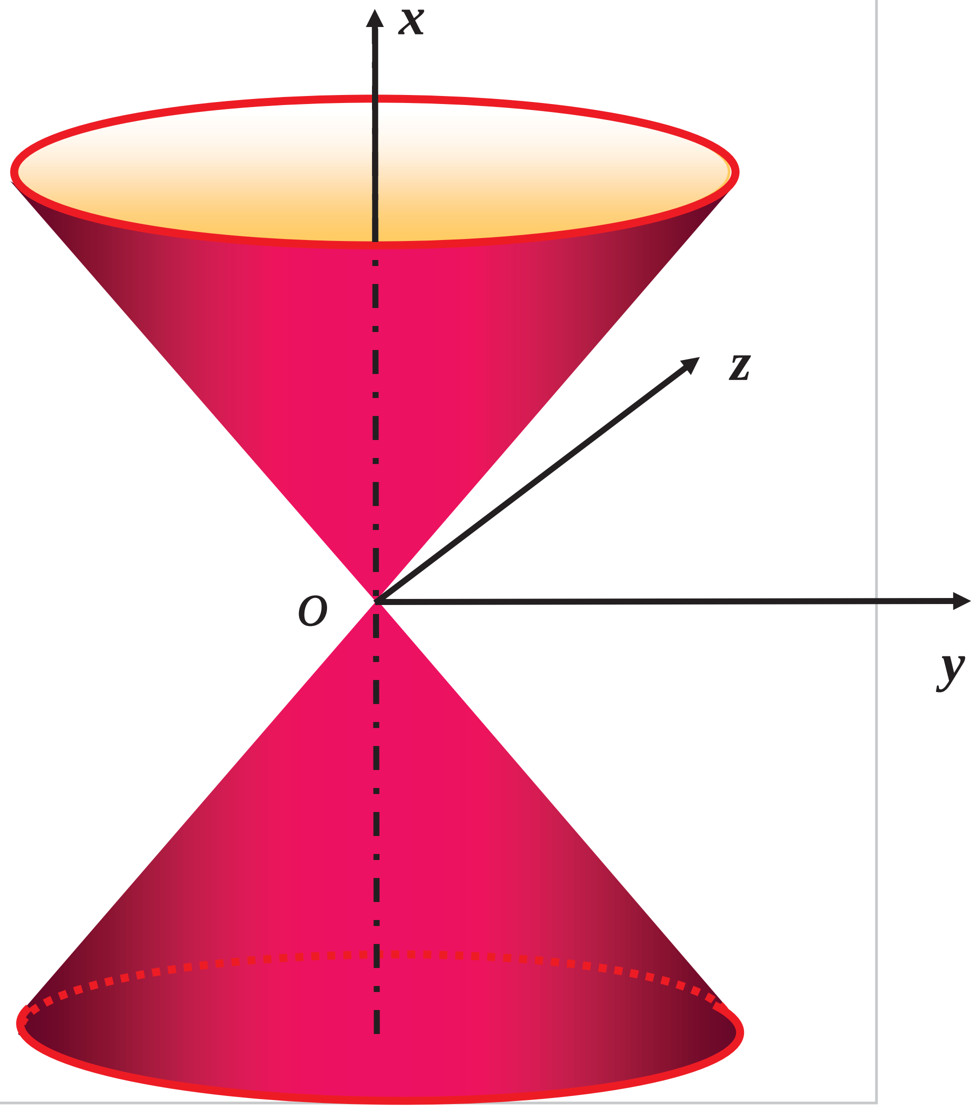
绕 x 轴一周

得旋转锥面

$$\pm\sqrt{y^2+z^2} = kx$$

即 $y^2+z^2=k^2x^2$

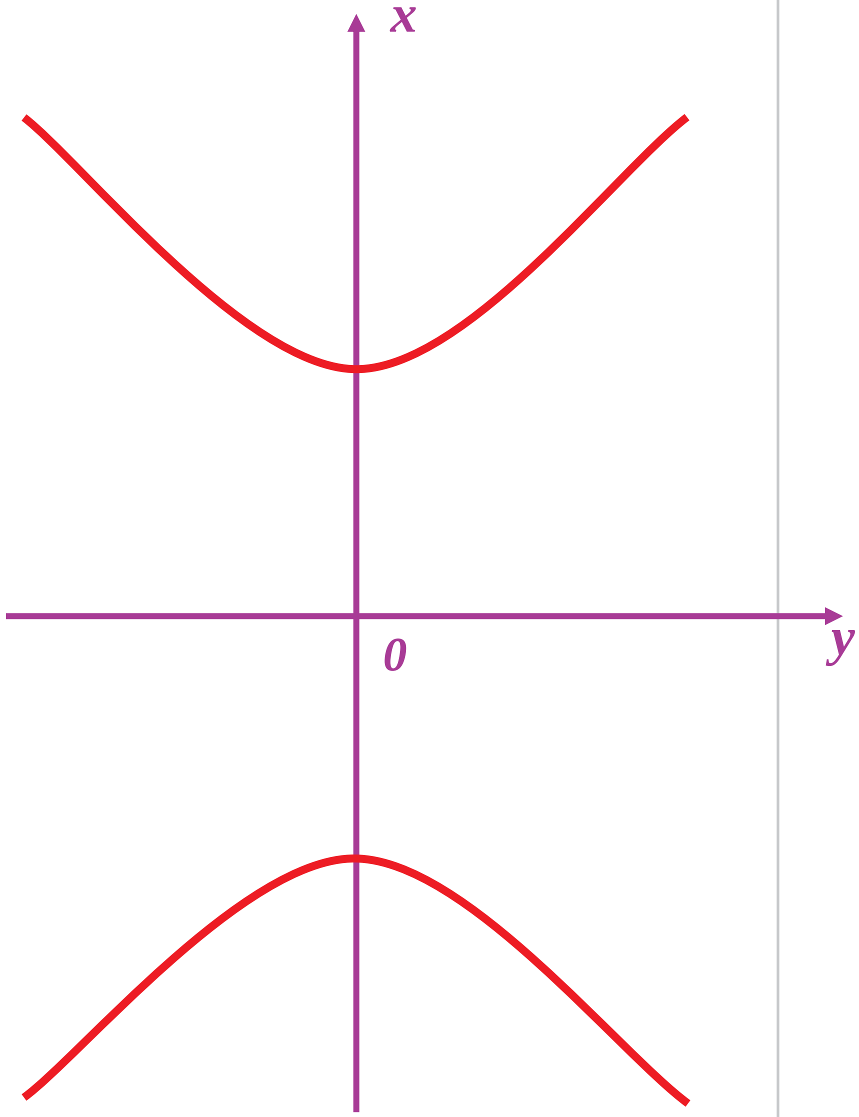
（齐次方程）



例6 双叶旋转双曲面

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

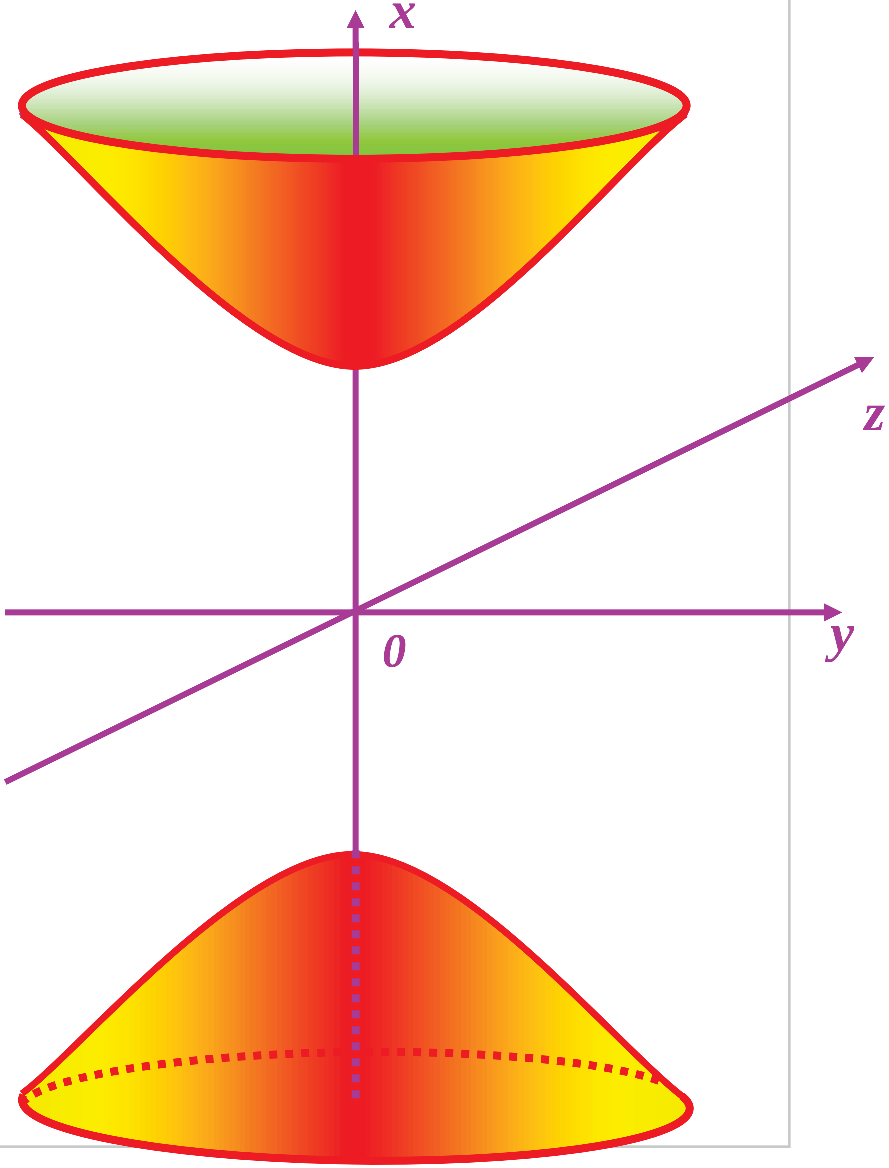
绕 x 轴一周



例6 双叶旋转双曲面

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕 x 轴一周



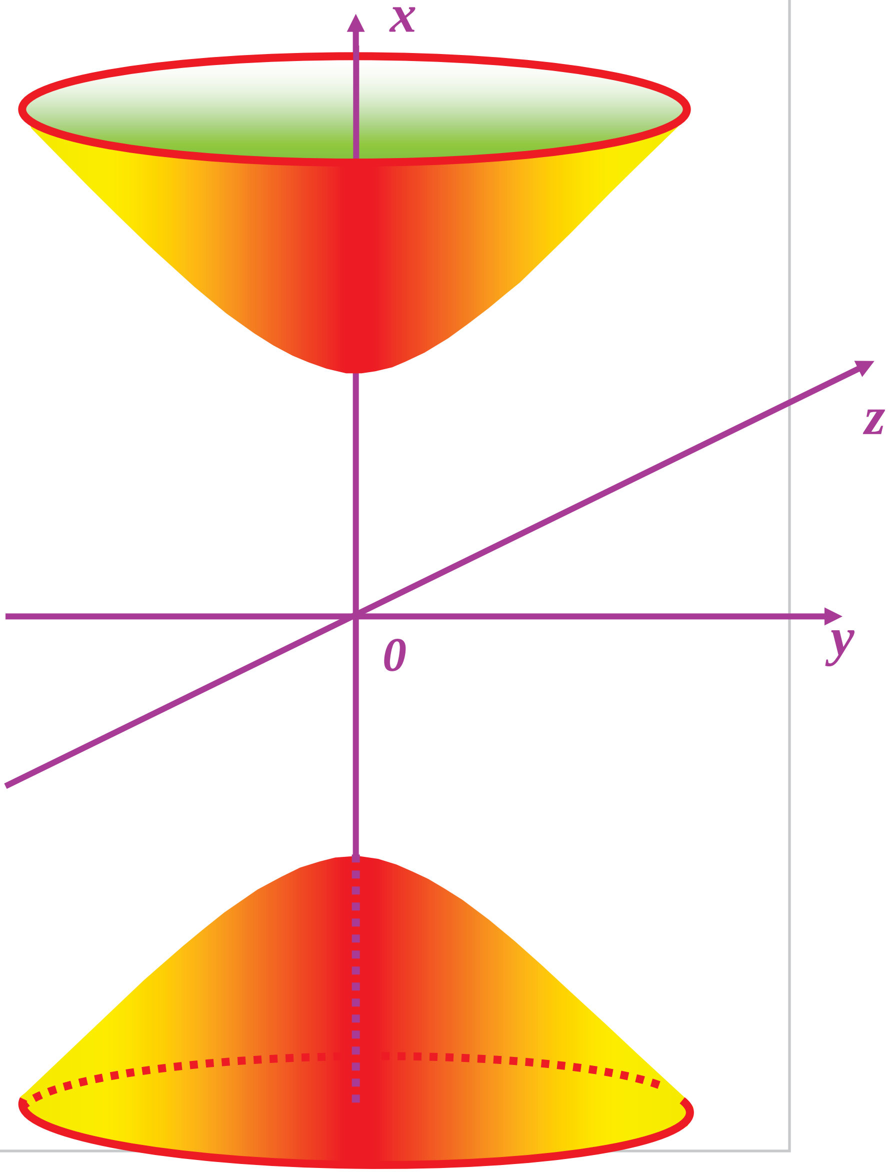
例6 双叶旋转双曲面

双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

绕 x 轴一周

得双叶旋转双曲面

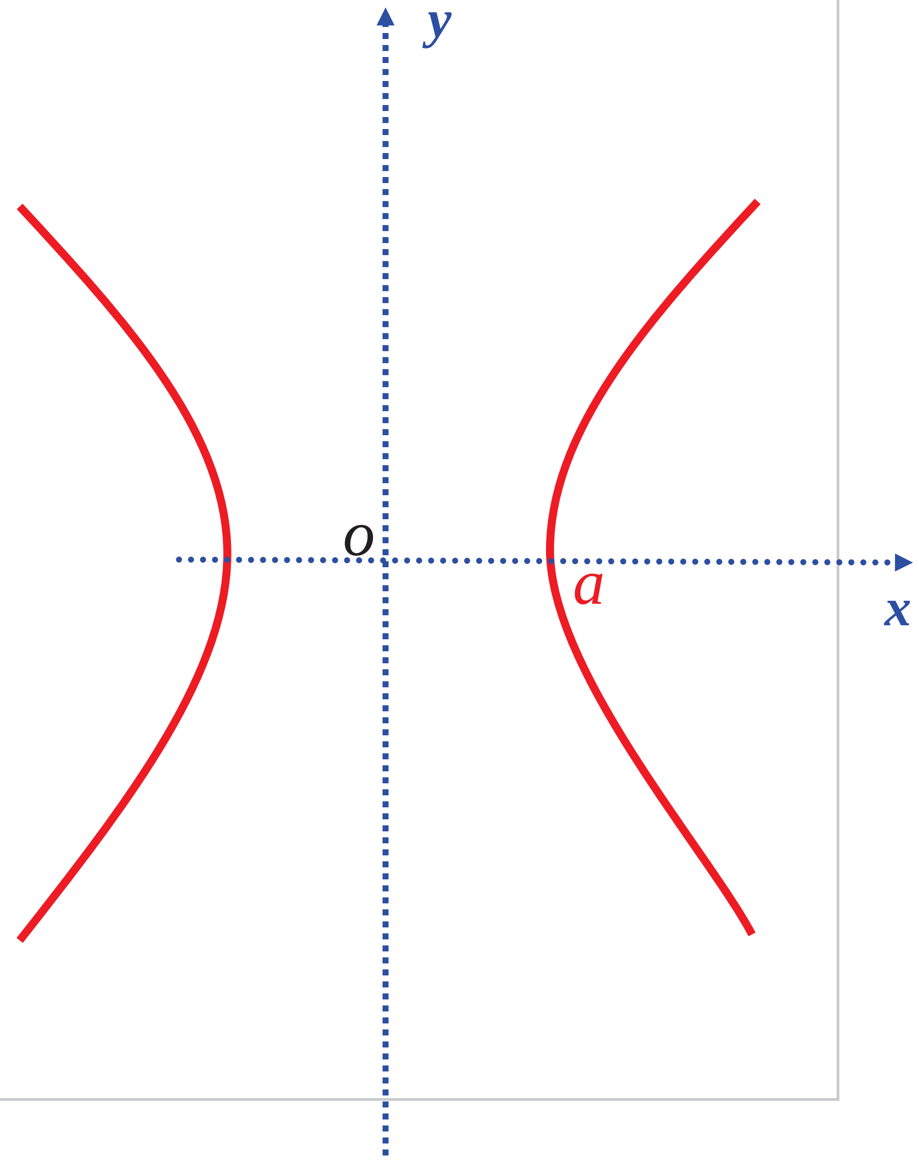
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$



例7 单叶旋转双曲面

上题双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}$

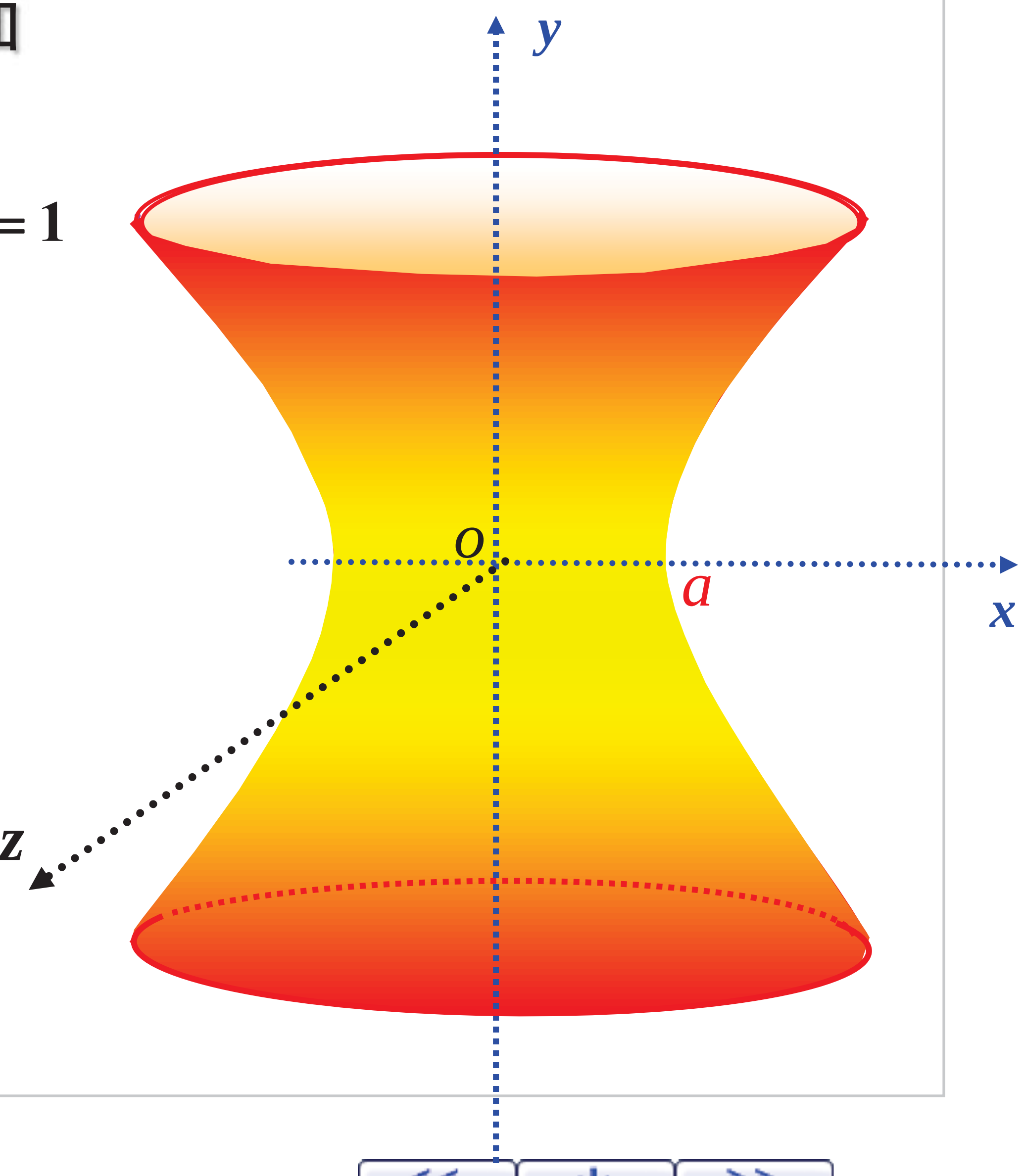
绕 y 轴一周



例7 单叶旋转双曲面

上题双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$

绕 y 轴一周



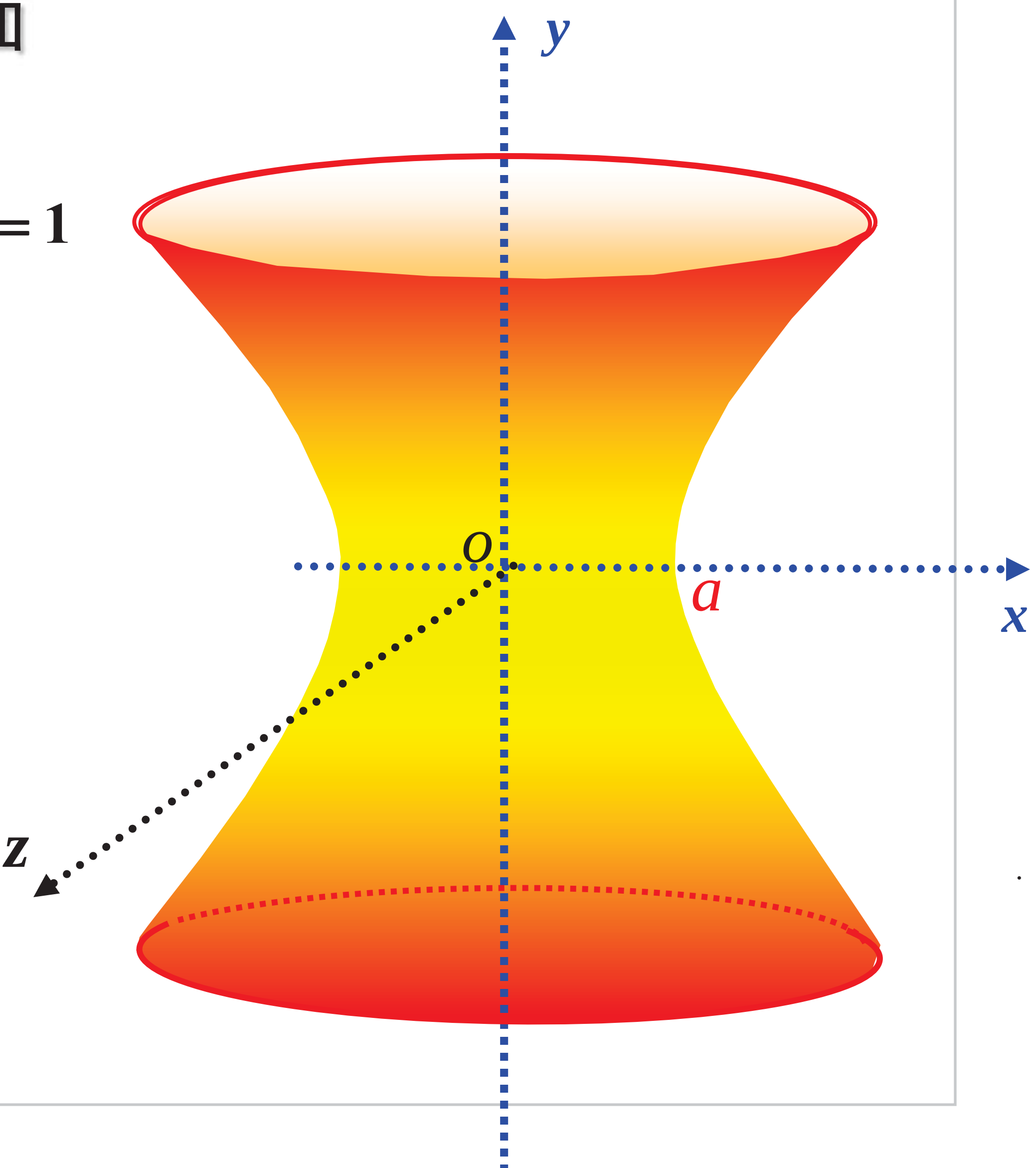
例7 单叶旋转双曲面

上题双曲线 $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}$

绕 y 轴一周

得单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2+z^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



注意区别:

$$z = k(x^2 + y^2)$$

旋转抛物面

$$z^2 = k(x^2 + y^2),(k > 0).$$

旋转锥面

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

单叶旋转双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

双叶旋转双曲面

主要内容

1.旋转曲面的概念；

2. 平面曲线绕坐标轴旋转的曲面方程.

练习：指出下列方程所表示曲面的名称；若是旋转曲面指出它的一条母线与旋转轴.

(1) $x^2 - y^2 = 1$　　双曲柱面，母线//z轴；

(2) $y^2 - 4y + 3 = 0$　　柱面，或一对平行平面 $y=1, y=3$；

(3) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$　　圆锥面，顶点(0,0,1),旋转轴：z轴

(4) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$　　双叶旋转双曲面，

母线 $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ 绕x轴旋转而成.

母线: $\begin{cases} z = 1 - x \\ y = 0 \end{cases} (z \le 1)$,或 $\begin{cases} z = 1 - y \\ x = 0 \end{cases} (z \le 1)$;

3. 指出下列方程所表示曲面的名称；若是旋转曲面指出它的一条母线与旋转轴.

(1) $x^2 - y^2 = 1$　　双曲柱面，母线//z轴；

(2) $y^2 - 4y + 3 = 0$　柱面，或一对平行平面 $y=1, y=3$；

(3) $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$　圆锥面，顶点(0,0,1),旋转轴：z轴

(4) $x^2 - y^2 - z^2 = 1$　双叶旋转双曲面，

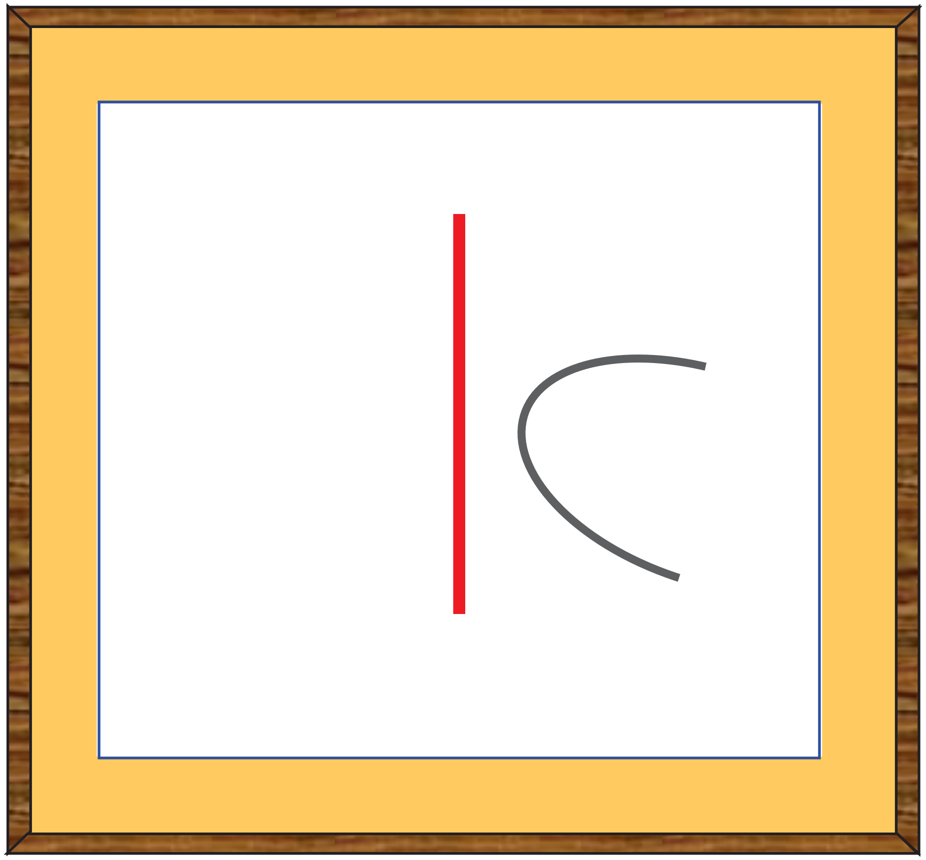
母线$\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$或$\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$绕x轴旋转而成.

母线:$\begin{cases} z = 1 - x \\ y = 0 \end{cases}(z \le 1)$,或$\begin{cases} z = 1 - y \\ x = 0 \end{cases}(z \le 1)$;

2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

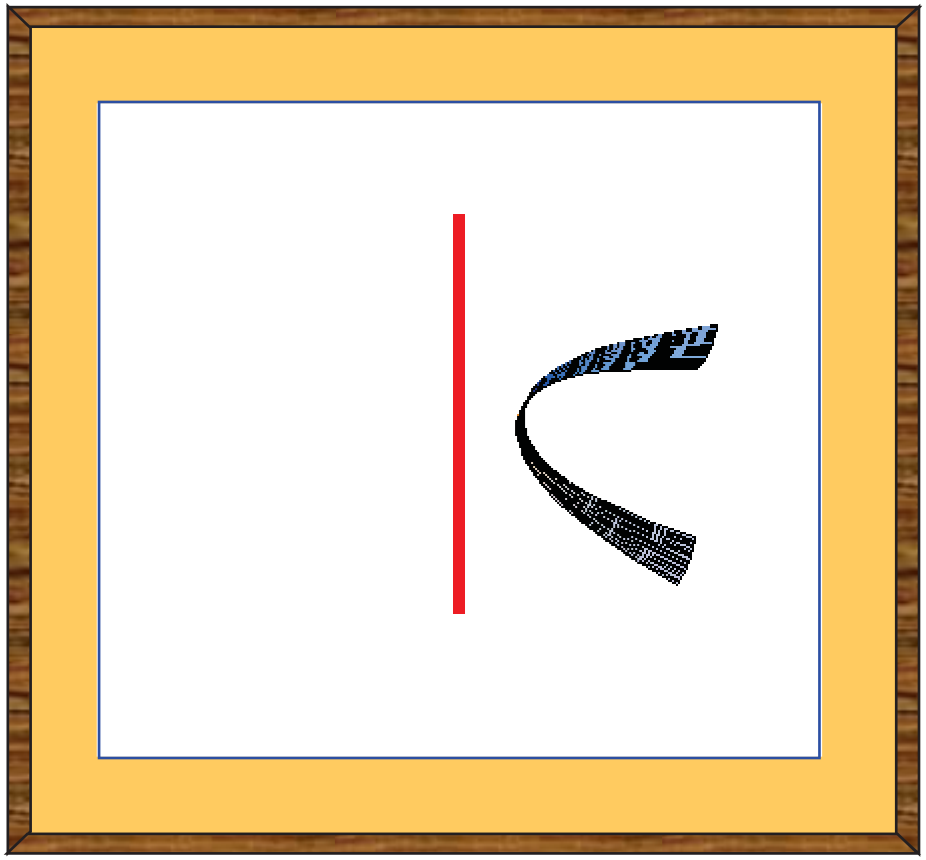
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

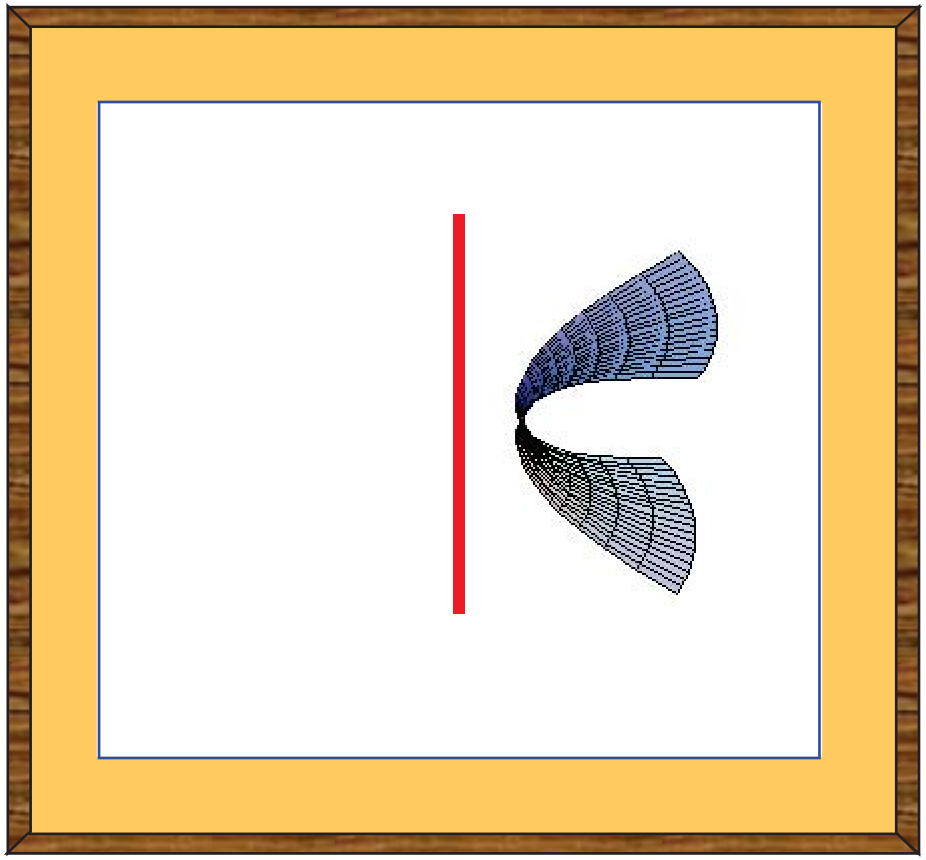
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面.**

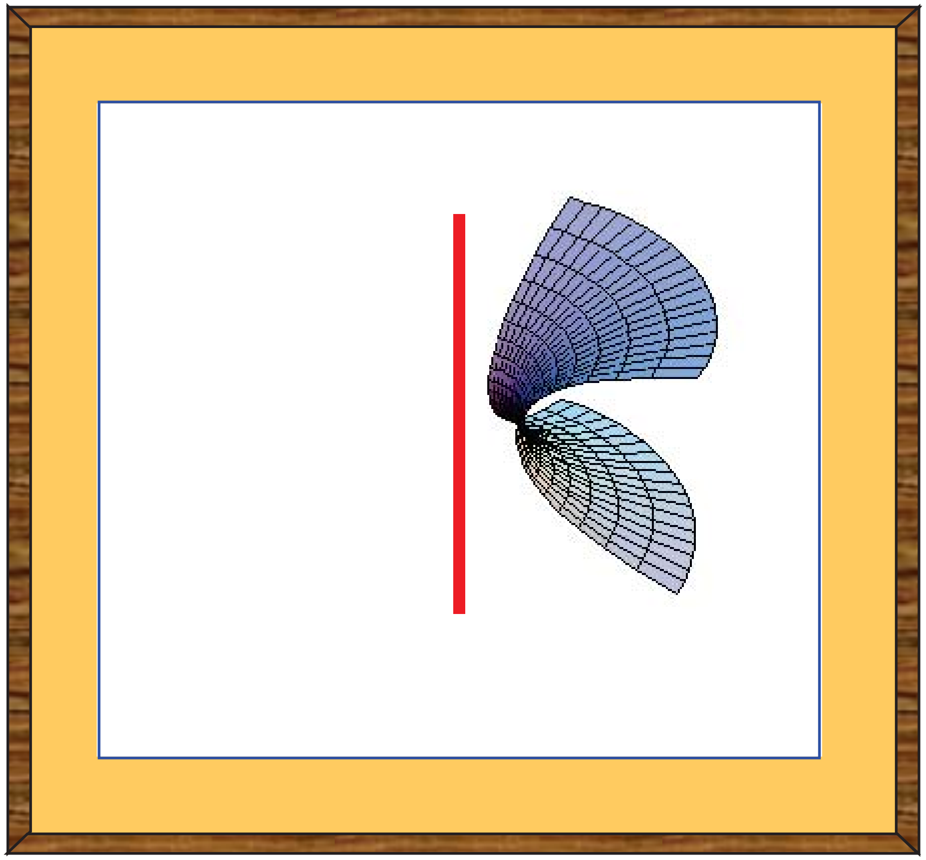
这条定直线叫旋转曲面的**轴.**



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

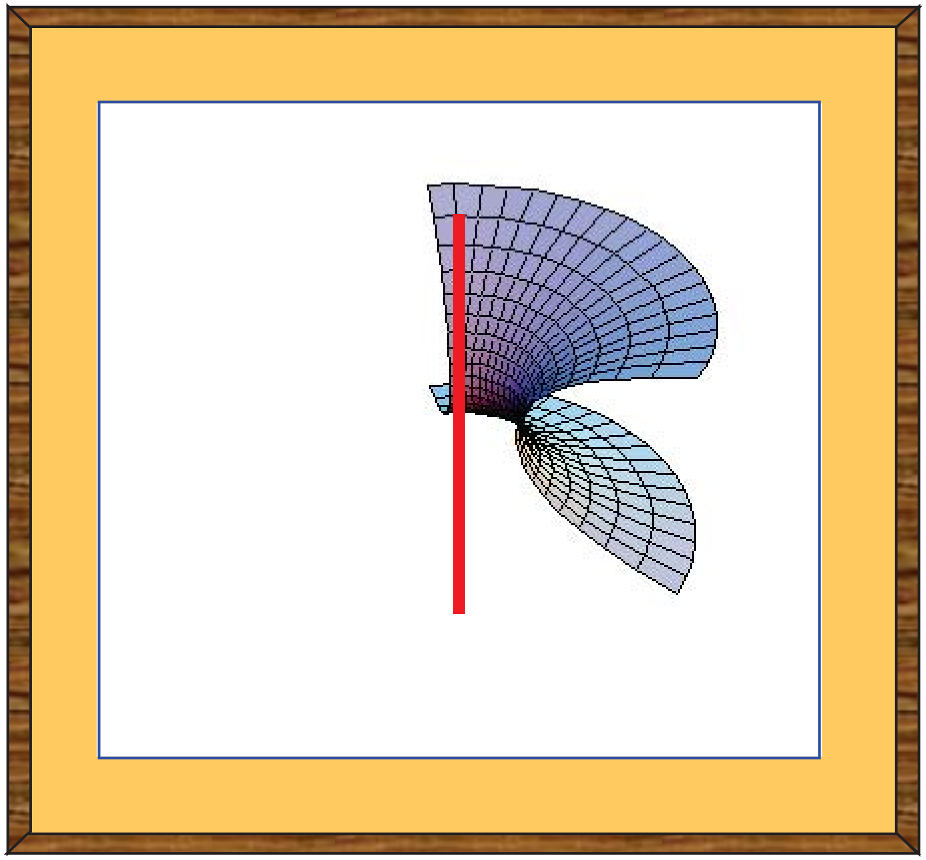
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义　以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面.**

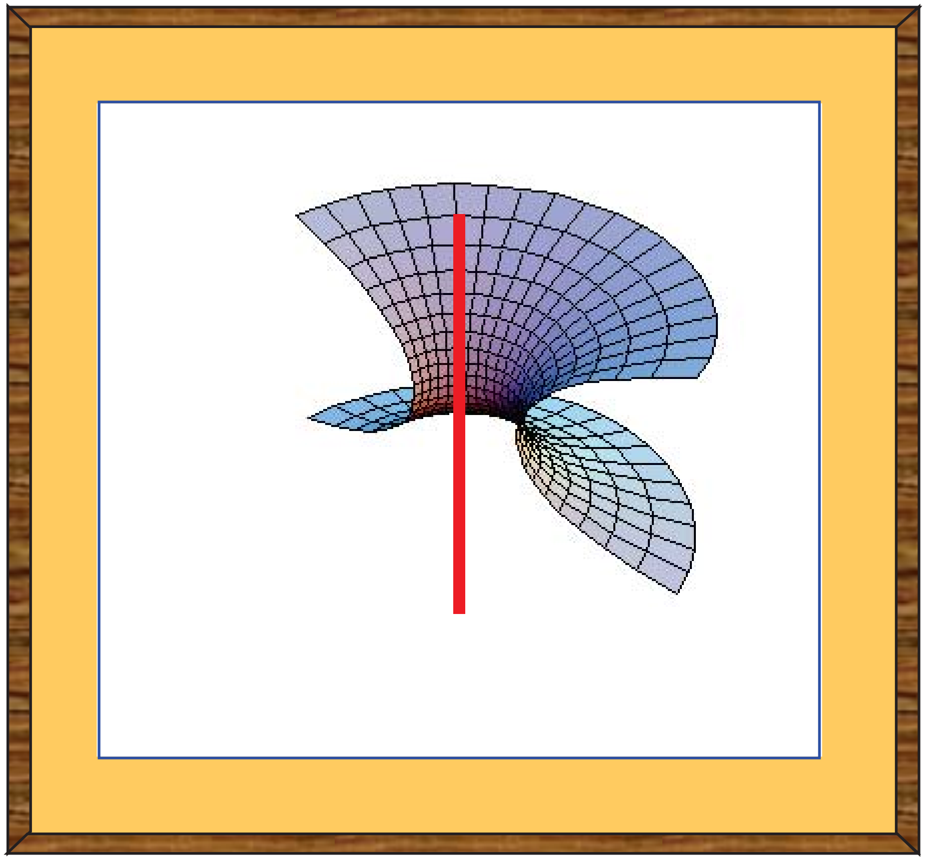
这条定直线叫旋转曲面的**轴.**



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

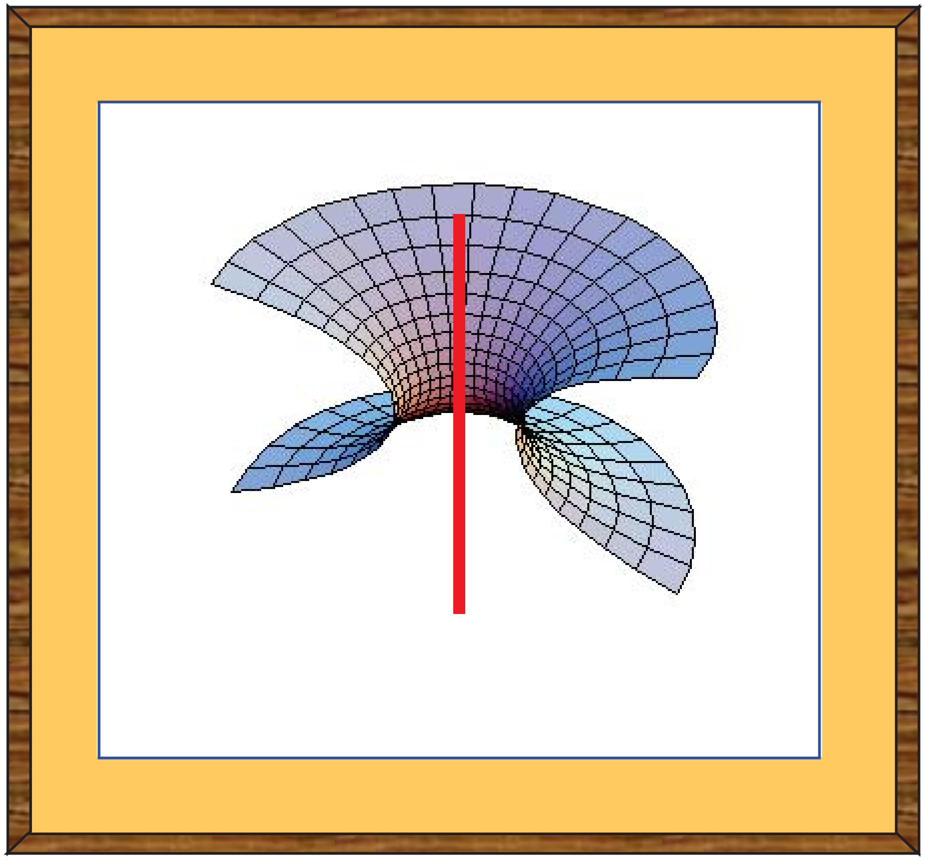
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

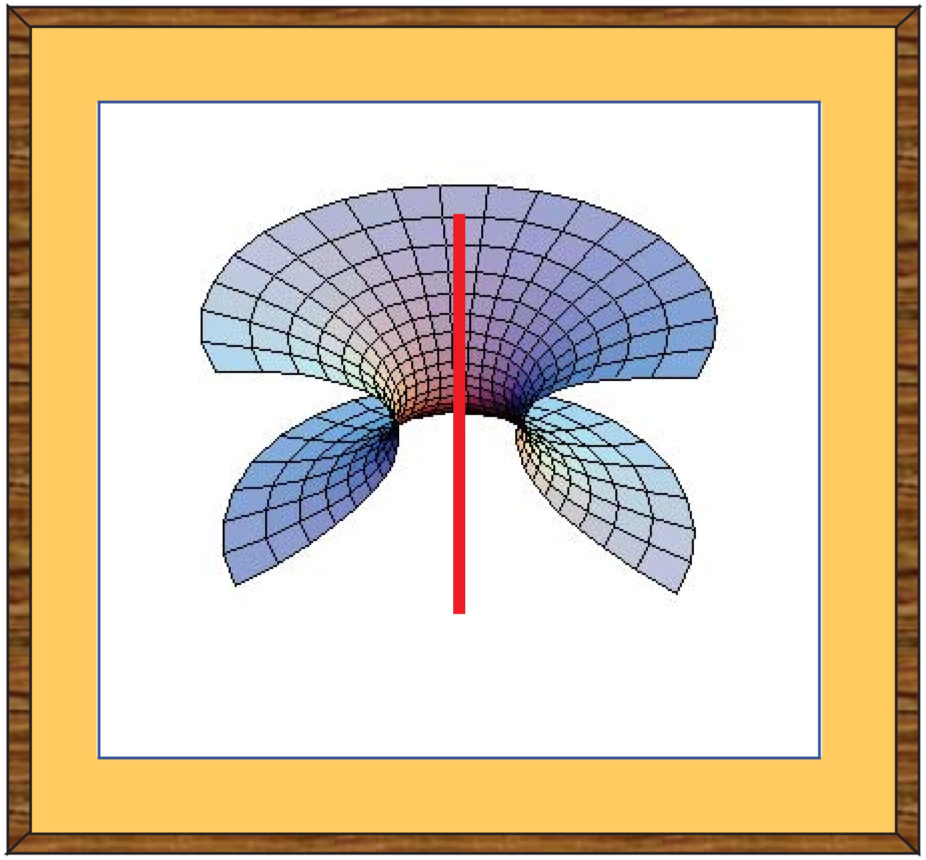
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

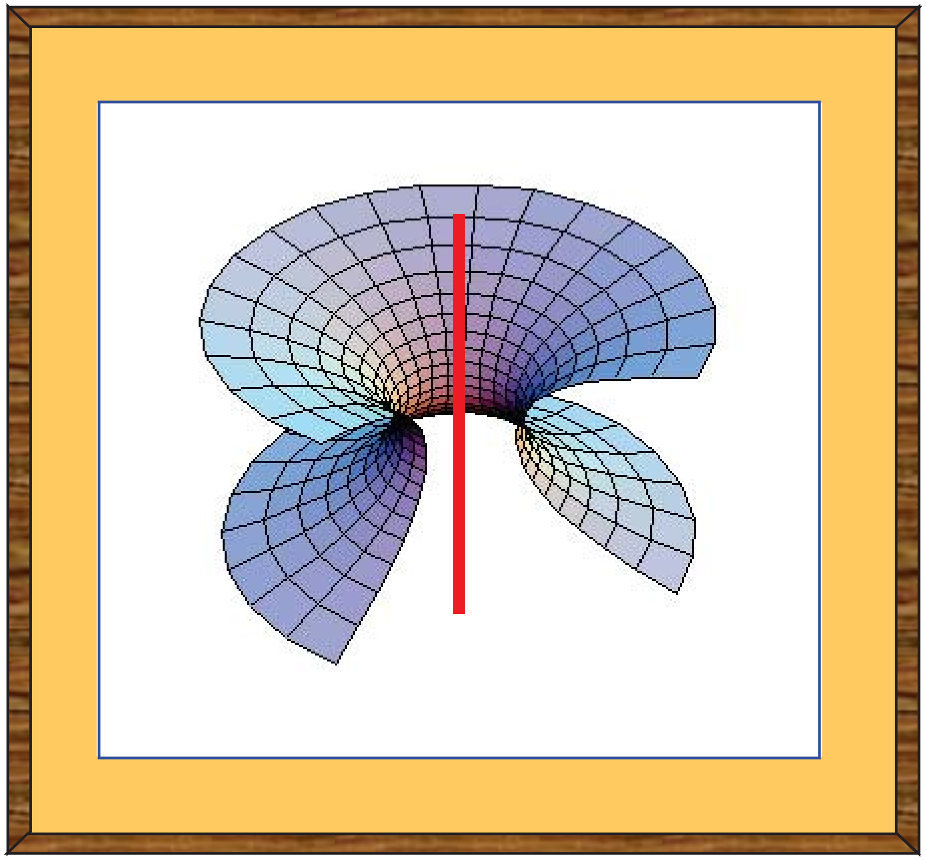
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

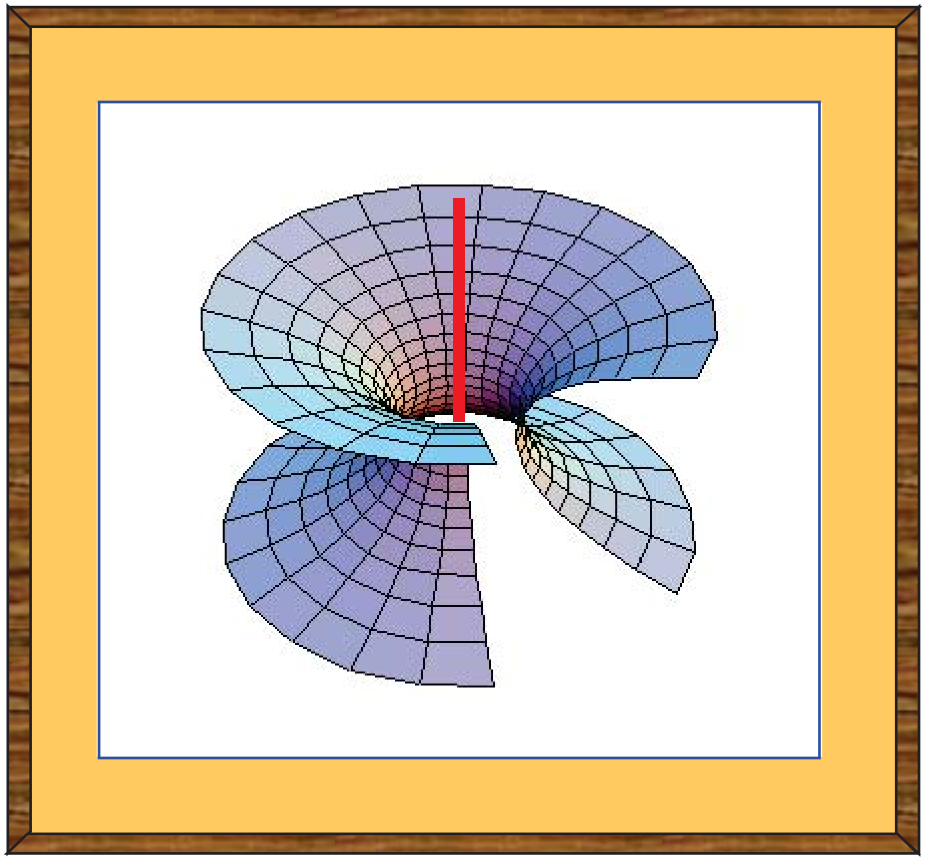
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

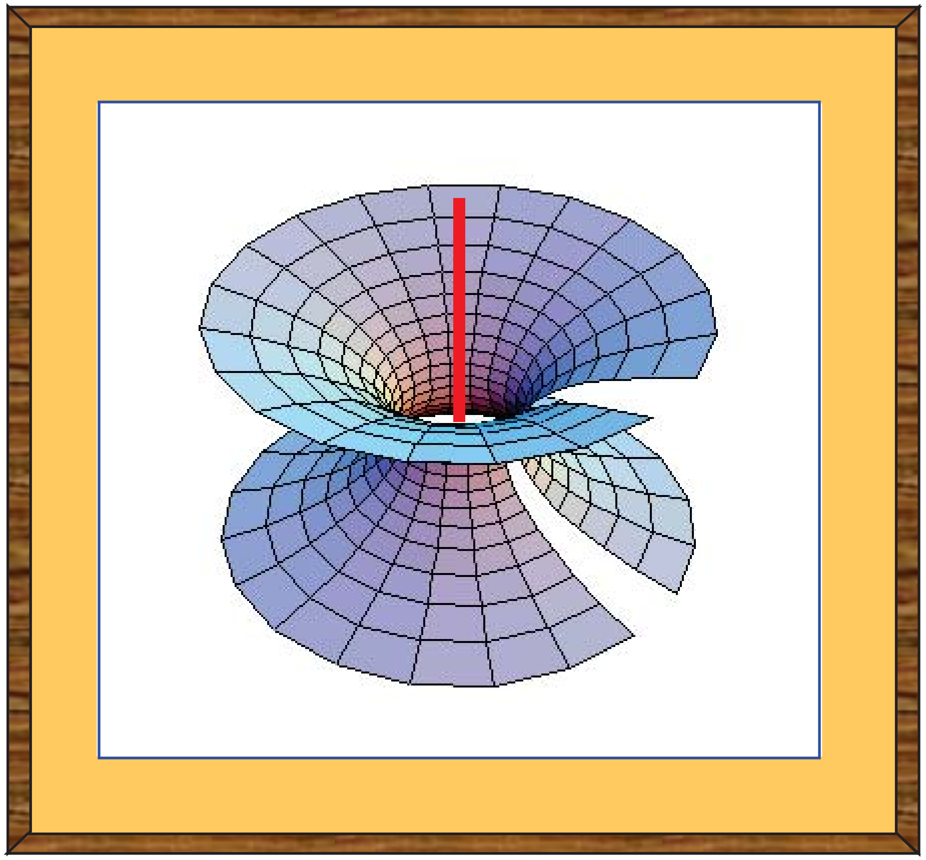
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面.**

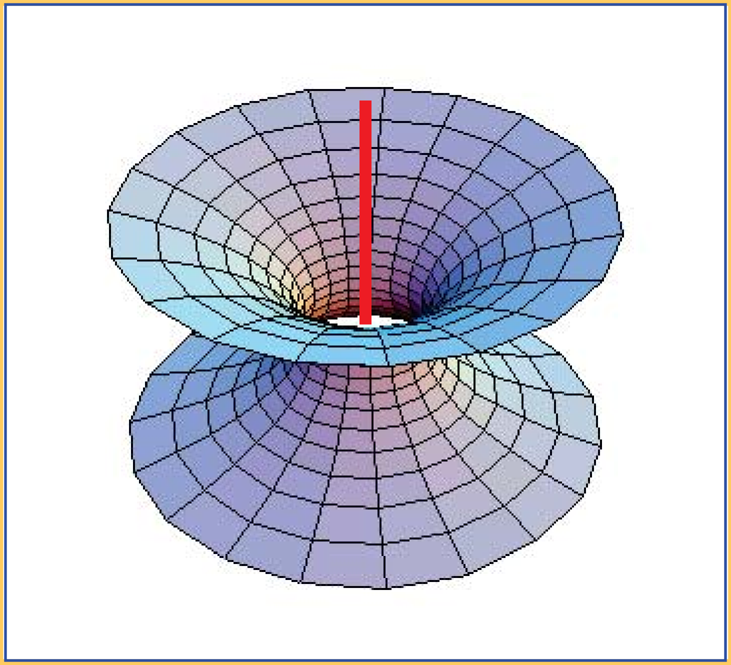
这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



2. 旋转曲面

定义 以一条平面曲线绕其平面上的一条直线旋转一周所成的曲面称为**旋转曲面**.

这条定直线叫旋转曲面的**轴**.



第三讲 曲面与空间曲线

曲面方程

1.柱面

2.旋转曲面

空间曲线

1.一般式方程

2.参数式方程

3.空间曲线在坐标面上的投影

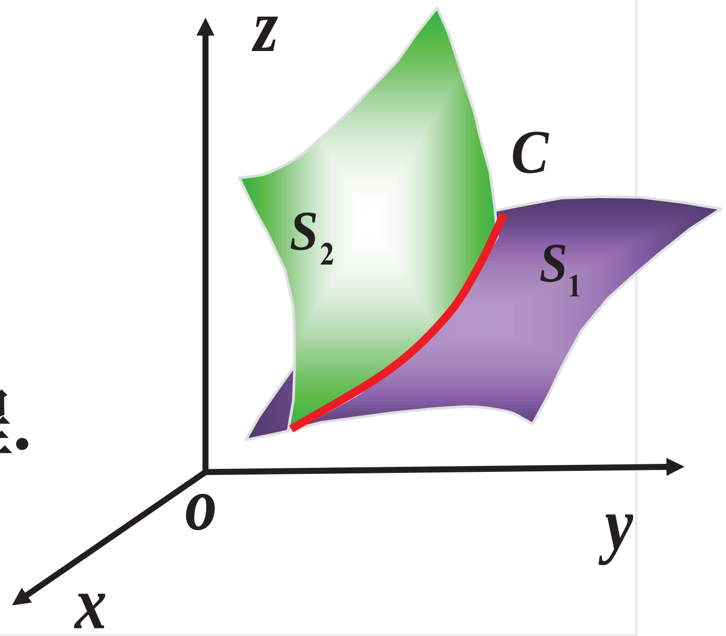
内容小结

二. 空间曲线

1. 一般式方程

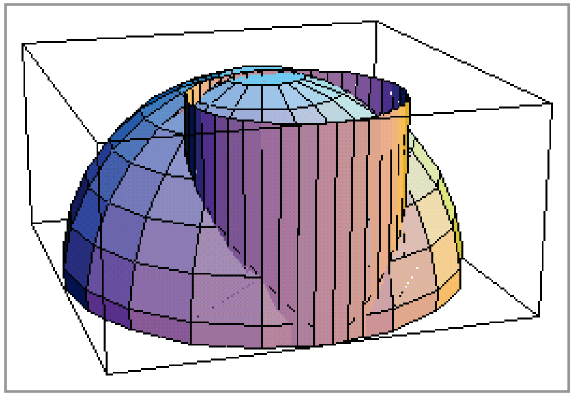
空间曲线C 可看作空间两曲面的交线.

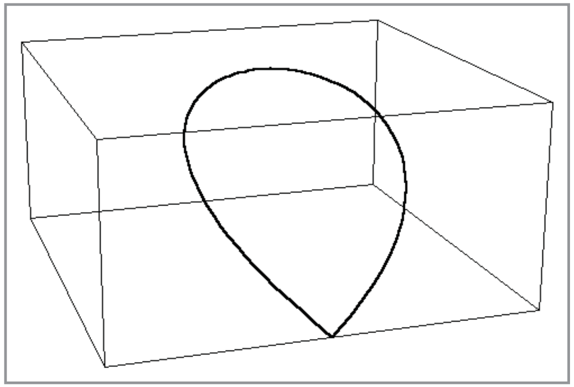
$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$



上式称为空间曲线的一般方程.

例1 方程组$\begin{cases} z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \\ (x - \dfrac{a}{2})^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4} \end{cases}$表示怎样的曲线？





解 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

上半球面,

$(x - \dfrac{a}{2})^2 + y^2 = \dfrac{a^2}{4}$ 圆柱面,

交线如图.

例2 方程组 $\begin{cases} 2y^2+z^2+4x=4z \\ y^2+3z^2-8x=12 \end{cases}$ 表示怎样的曲线?

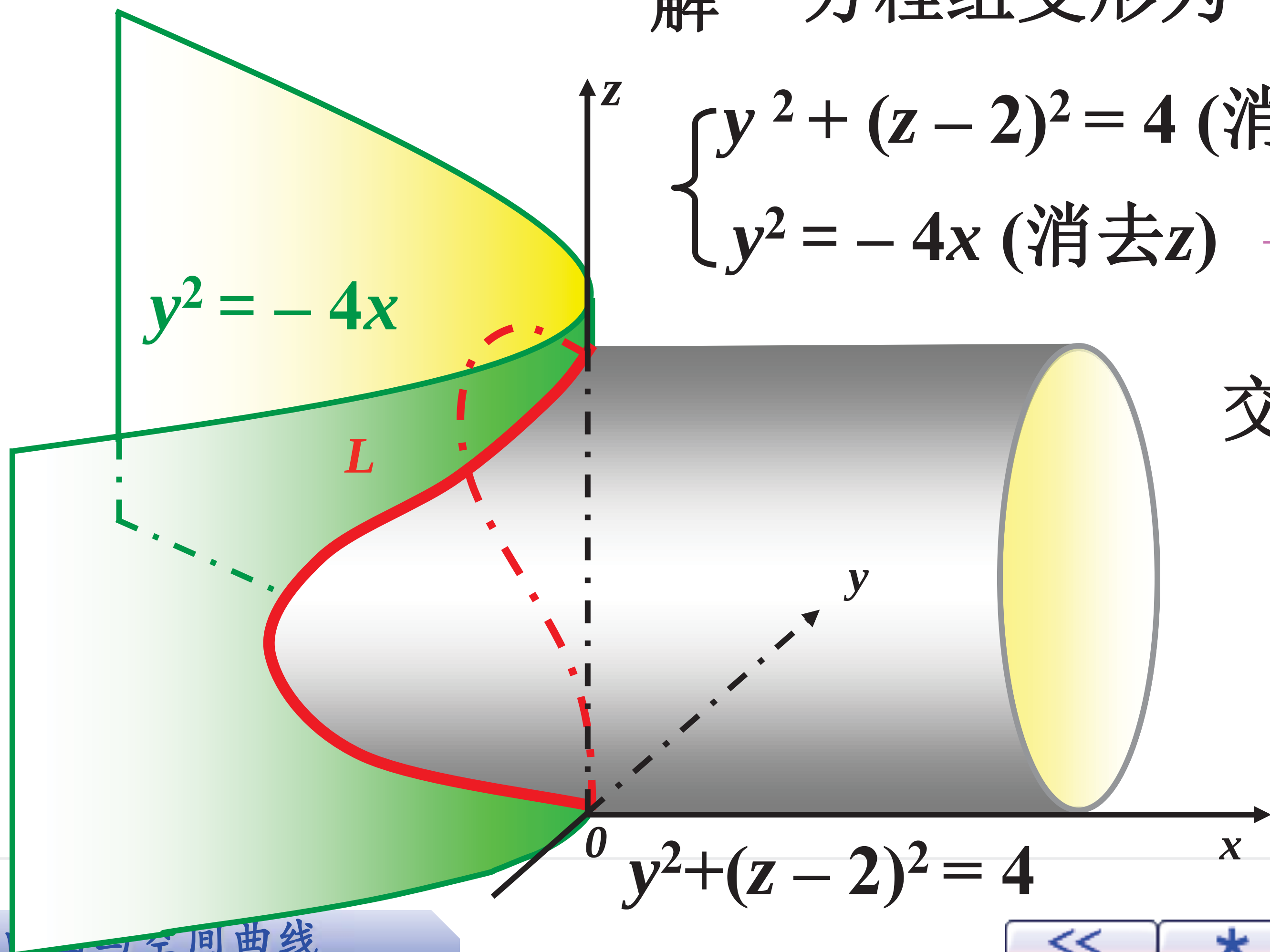
解　方程组变形为

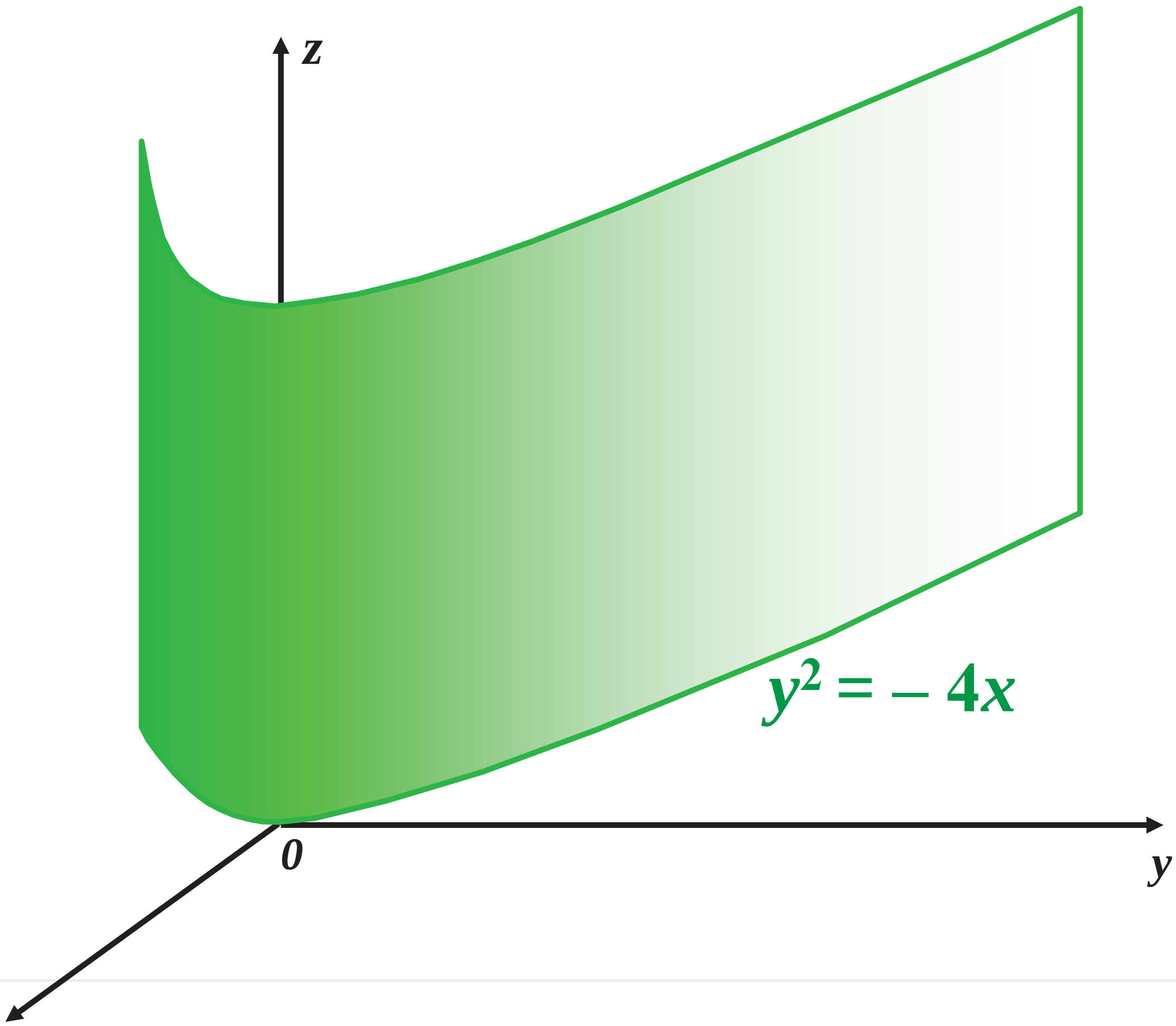
$$\begin{cases} y^2+(z-2)^2=4 \ (\text{消去}x) \\ y^2=-4x \ (\text{消去}z) \end{cases}$$

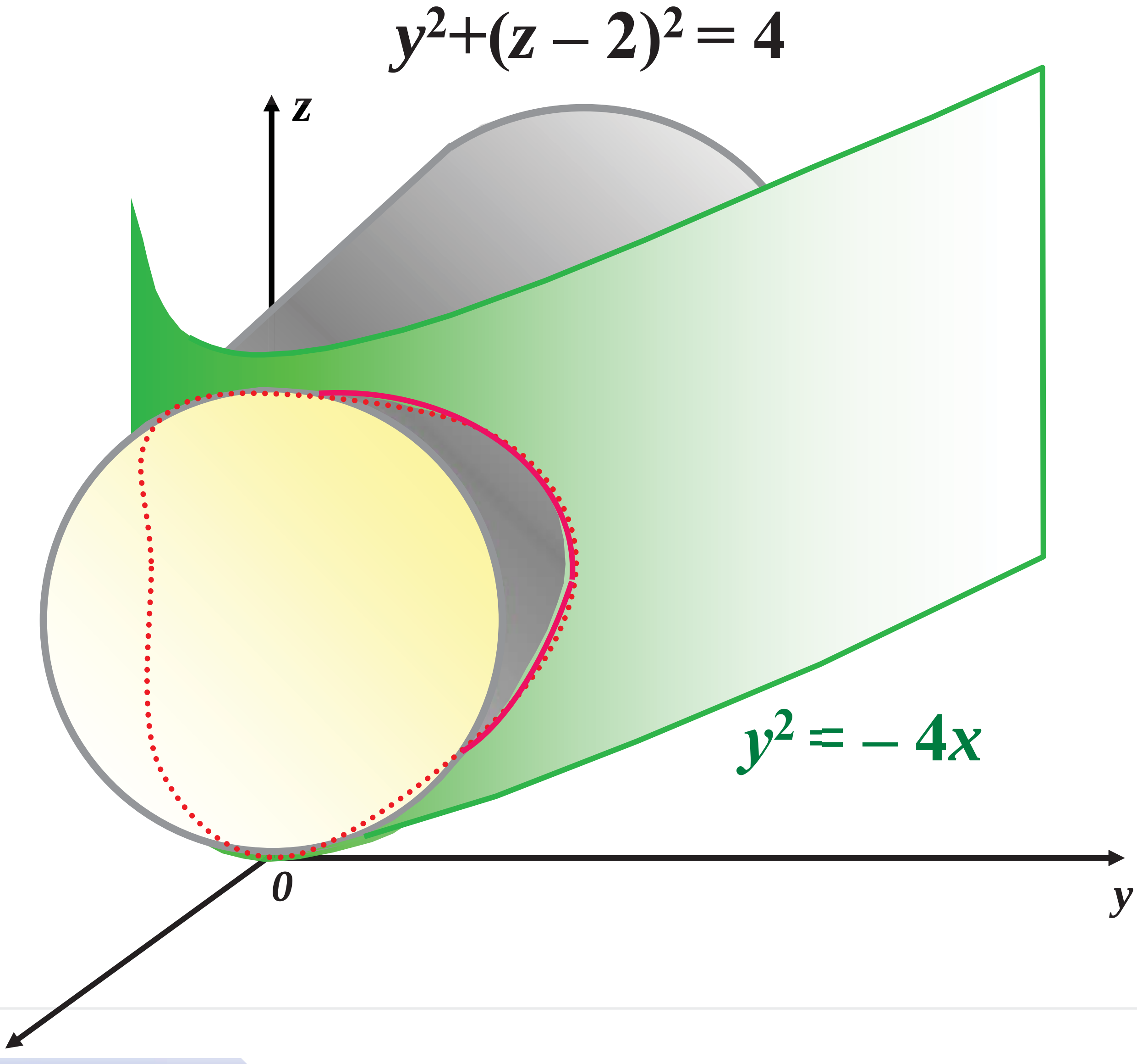
圆柱面

抛物柱面

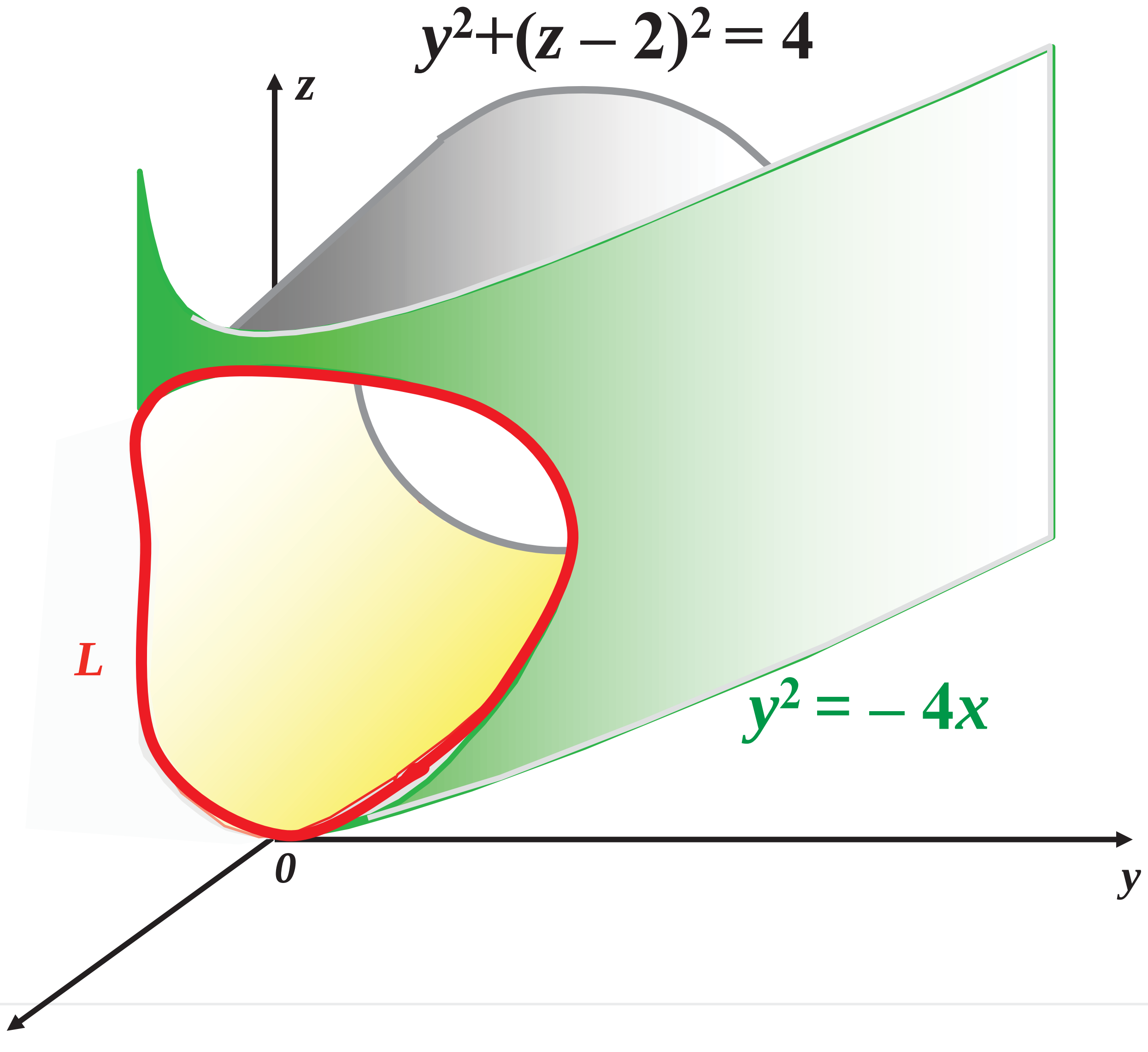
交线如图.




z
$y^2 = -4x$
0
y
x



$y^2+(z-2)^2=4$
z
$y^2=-4x$
0
y
x

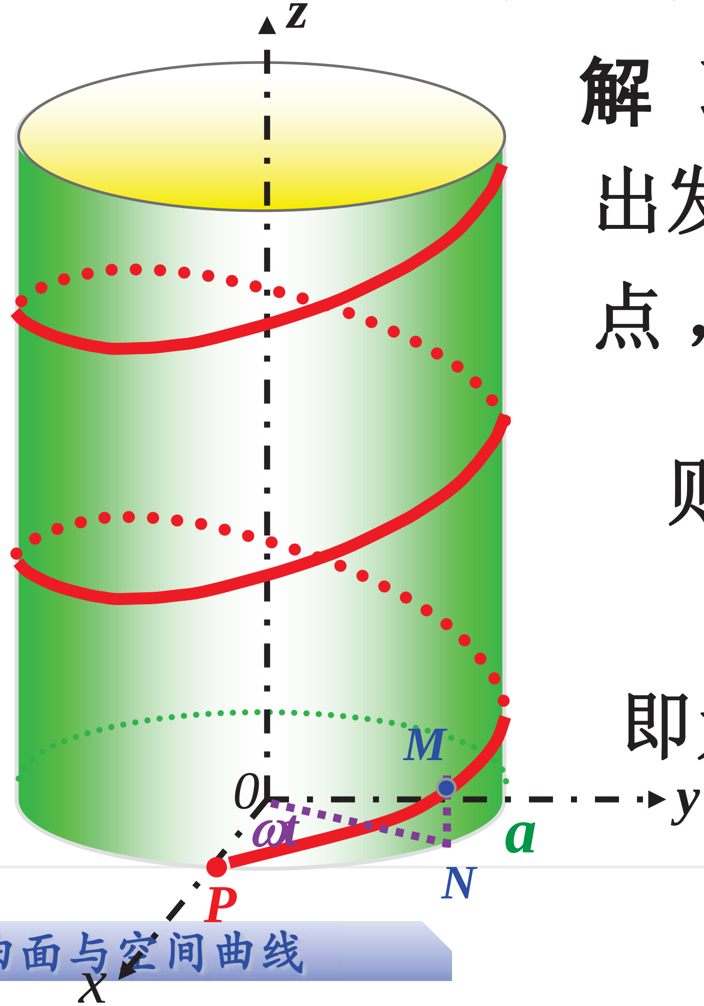

$y^2+(z-2)^2=4$
z
L
$y^2=-4x$
0
y
x

2. 参数方程

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$ 称为空间曲线的参数方程.

当给定 $t = t_1$ 时，就得到曲线上的一个点 (x_1, y_1, z_1)，当 t 取遍允许取的全部值时，就得到曲线上的所有点.

例 3 如果空间一点 M 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 上以角速度 ω 绕 z 轴旋转，同时又以线速度 v 沿平行于 z 轴的正方向上升（其中 ω、v 都是常数），那么点 M 构成的图形叫做**螺旋线**. 试建立其参数方程.



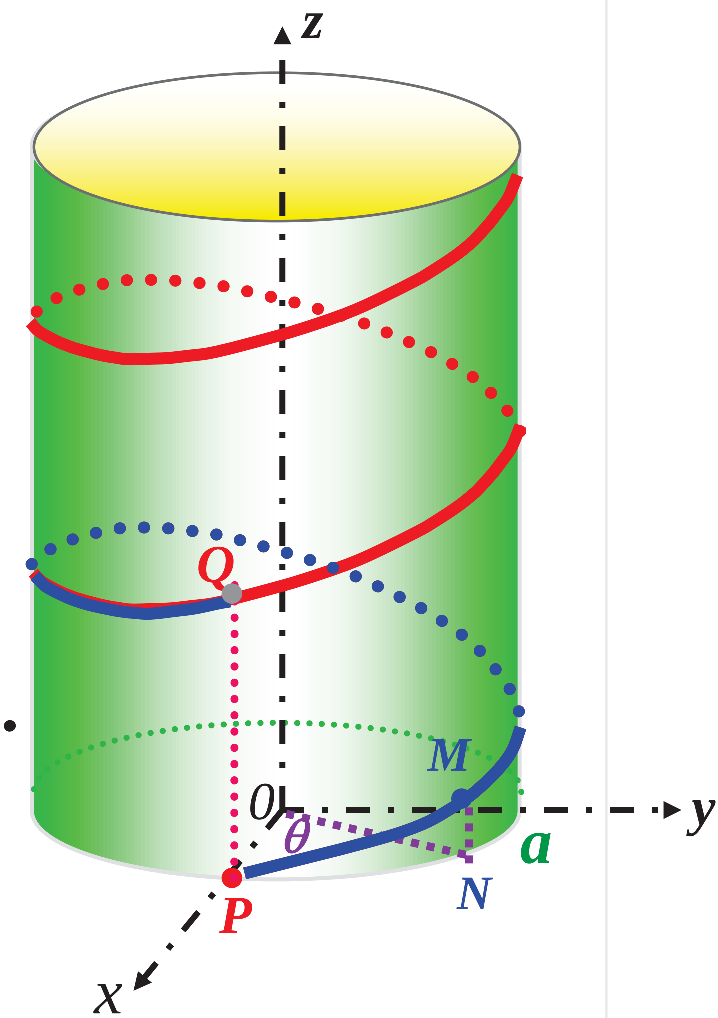
解 取时间 t 为参数，动点从 P 点出发，经过 t 时间，运动到 M 点，M 在 xoy 面的投影 $N(x,y,0)$

则有 $$\begin{cases} x=a\cos\omega t \\ y=a\sin\omega t \\ z=vt \end{cases}$$

即为圆柱螺旋线的参数方程

螺旋线的参数方程还可以写为

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a\sin\theta \\ z = b\theta \end{cases} \quad (\theta = \omega t,\quad b = \frac{v}{\omega})$$



螺旋线的性质:

上升的高度与转过的角度成正比.

当 θ 从 $0 \to 2\pi$，螺线从点 $P \to Q$

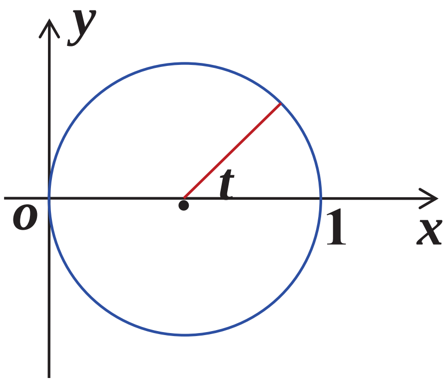
上升的高度 $|\overline{PQ}| = 2\pi b$ 叫螺距.

例4 写出曲线L: $\begin{cases} x^2 + y^2 = x \\ z = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$的参数方程.

解1 $x^2 + y^2 = x \Rightarrow (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$

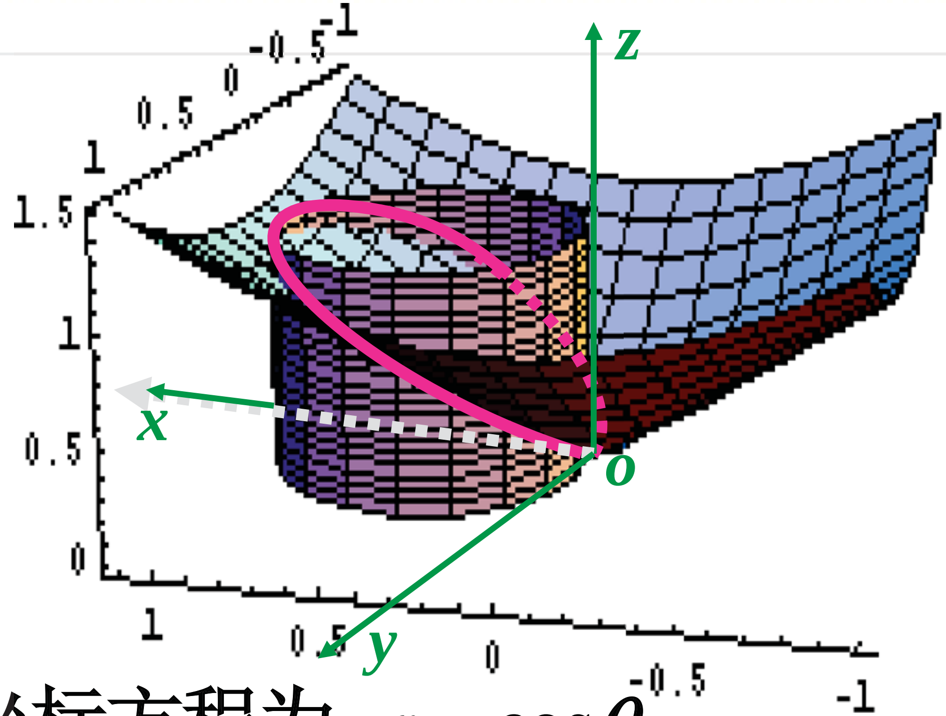
其参数方程为

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t \\ y = \frac{1}{2}\sin t \end{cases} \quad (0 \le t \le 2\pi)$$



代入 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 得: $z = |\cos \frac{t}{2}|$

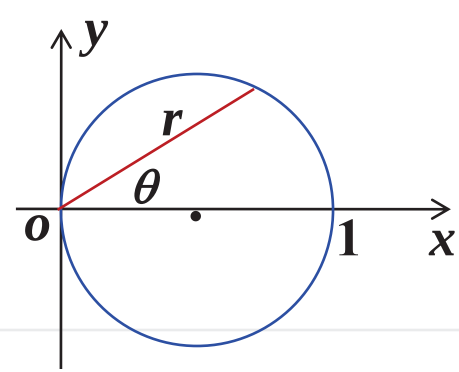
$$\Rightarrow L:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\cos t \\ y=\dfrac{1}{2}\sin t \\ z=\left|\cos\dfrac{t}{2}\right| \end{cases}$$



解2 $x^2+y^2=x$ 的极坐标方程为 $r=\cos\theta$

由直角坐标与极坐标的关系得其参数方程:

$$\begin{cases} x=\cos^2\theta \\ y=\cos\theta\sin\theta \end{cases} \Rightarrow L:\begin{cases} x=\cos^2\theta \\ y=\cos\theta\sin\theta \\ z=\cos\theta \end{cases}$$



主要
内容

1. 空间曲线的一般式方程

2. 空间曲线的参数式方程

第三讲 曲面与空间曲线

曲面方程

1.柱面

2.旋转曲面

空间曲线

1.一般式方程

2.参数式方程

3.空间曲线在坐标面上的投影

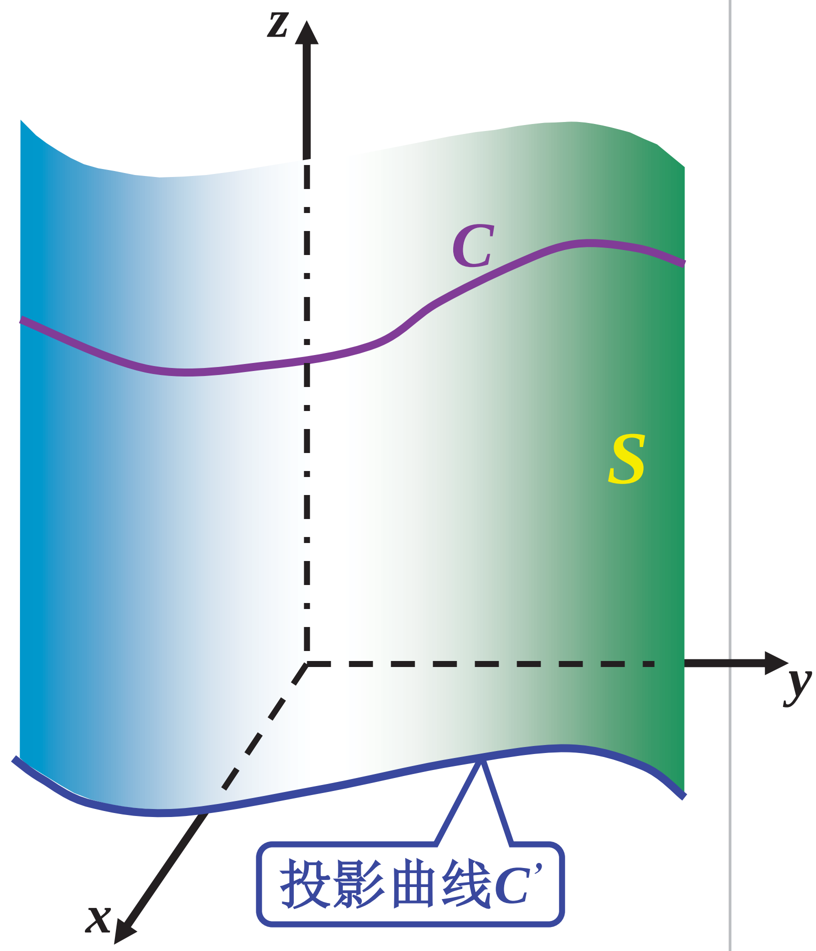
内容小结

3. 空间曲线在坐标面上的投影

C: 空间曲线

S: 以C为准线，母线与z轴平行的曲面，称为投影柱面.

C': 柱面S与xoy平面的交线，称为C在xoy平面上的投影曲线.



设空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (*)$$

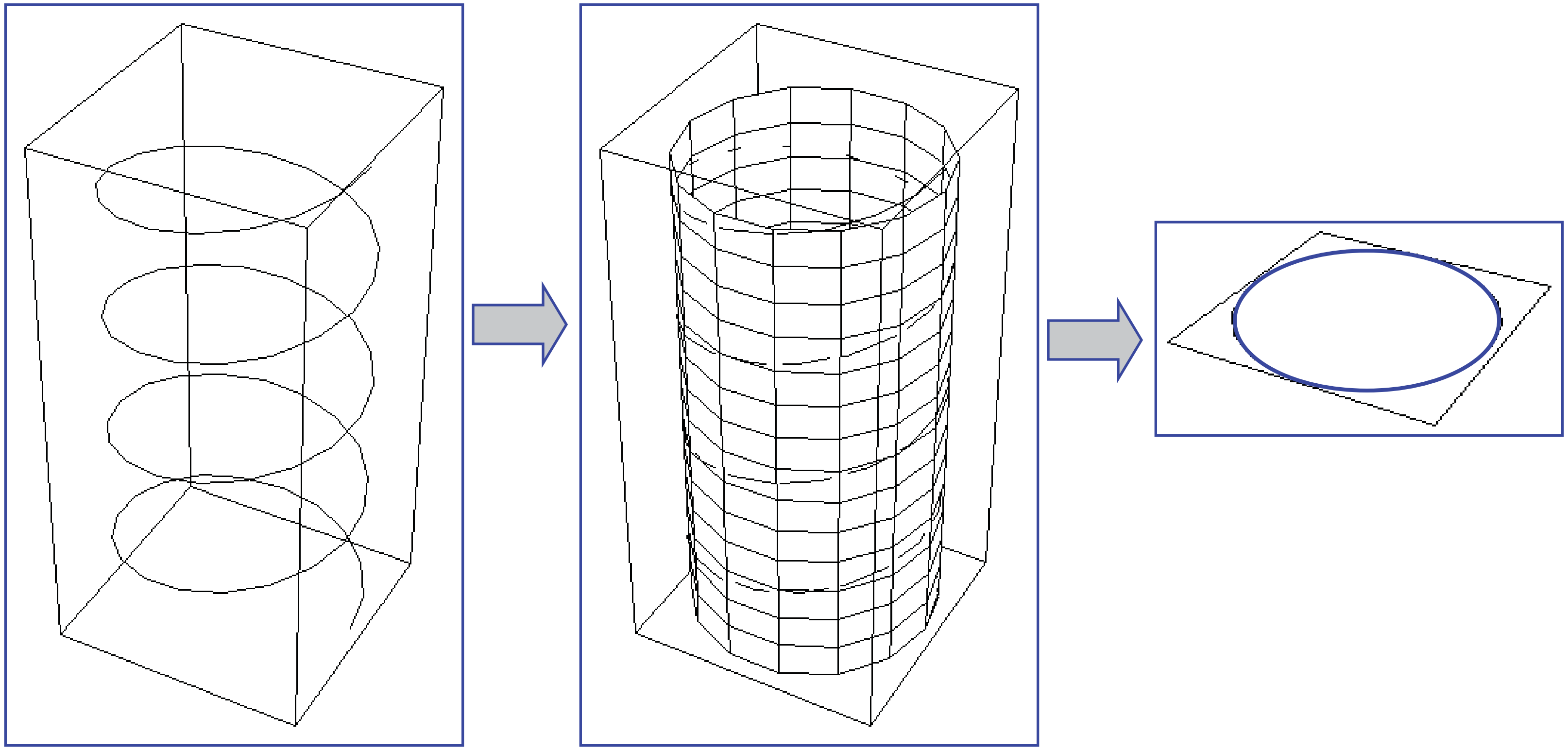
确定C 在xoy 面上的投影的一般过程为：

(1) 在(*)式中消去z， 得投影柱面方程

$$H(x,y)=0$$

(2) C': $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$ 就是C 在xoy 面上的投影方程.

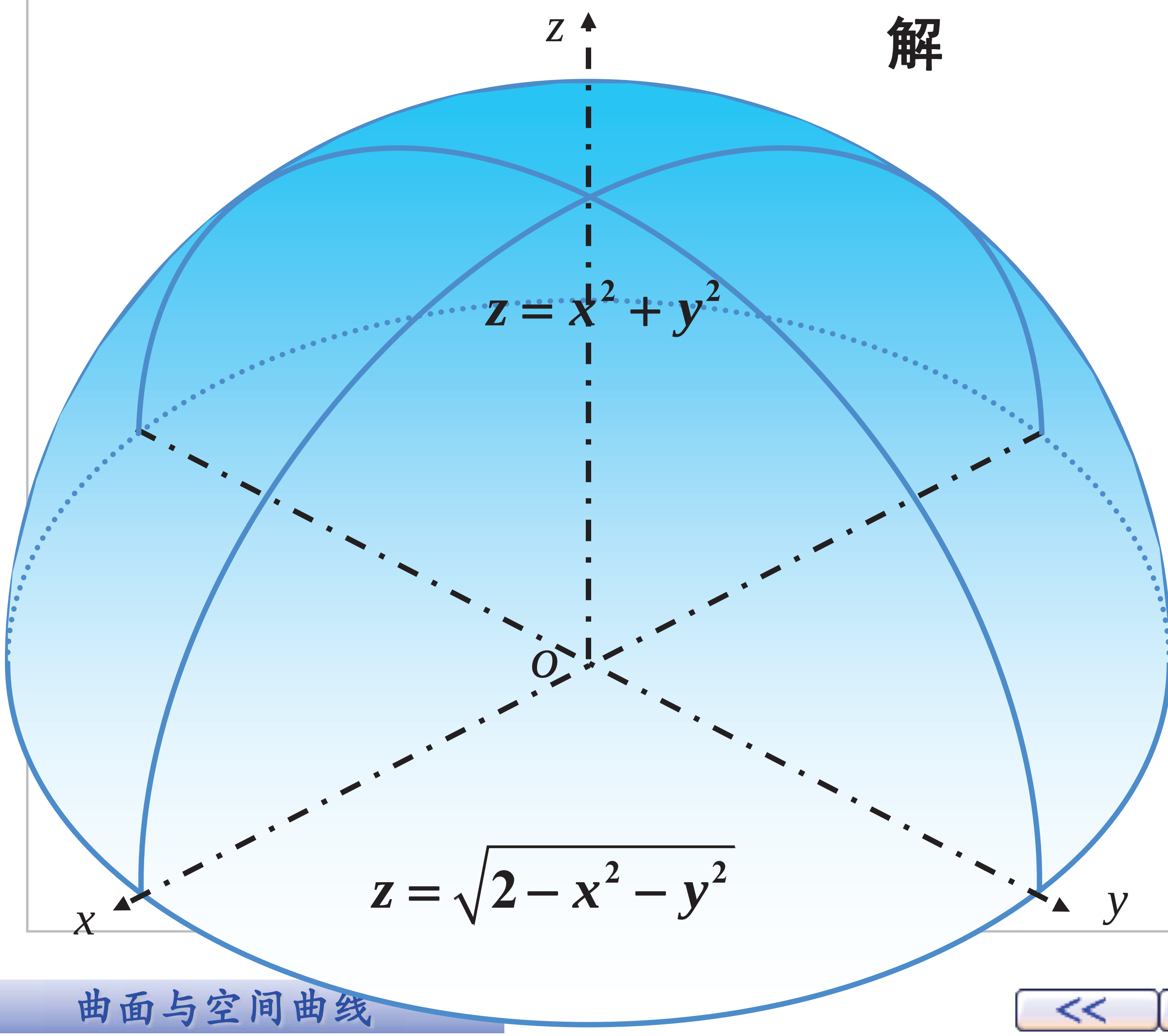
投影曲线的研究过程可用下面的几何图形表示：



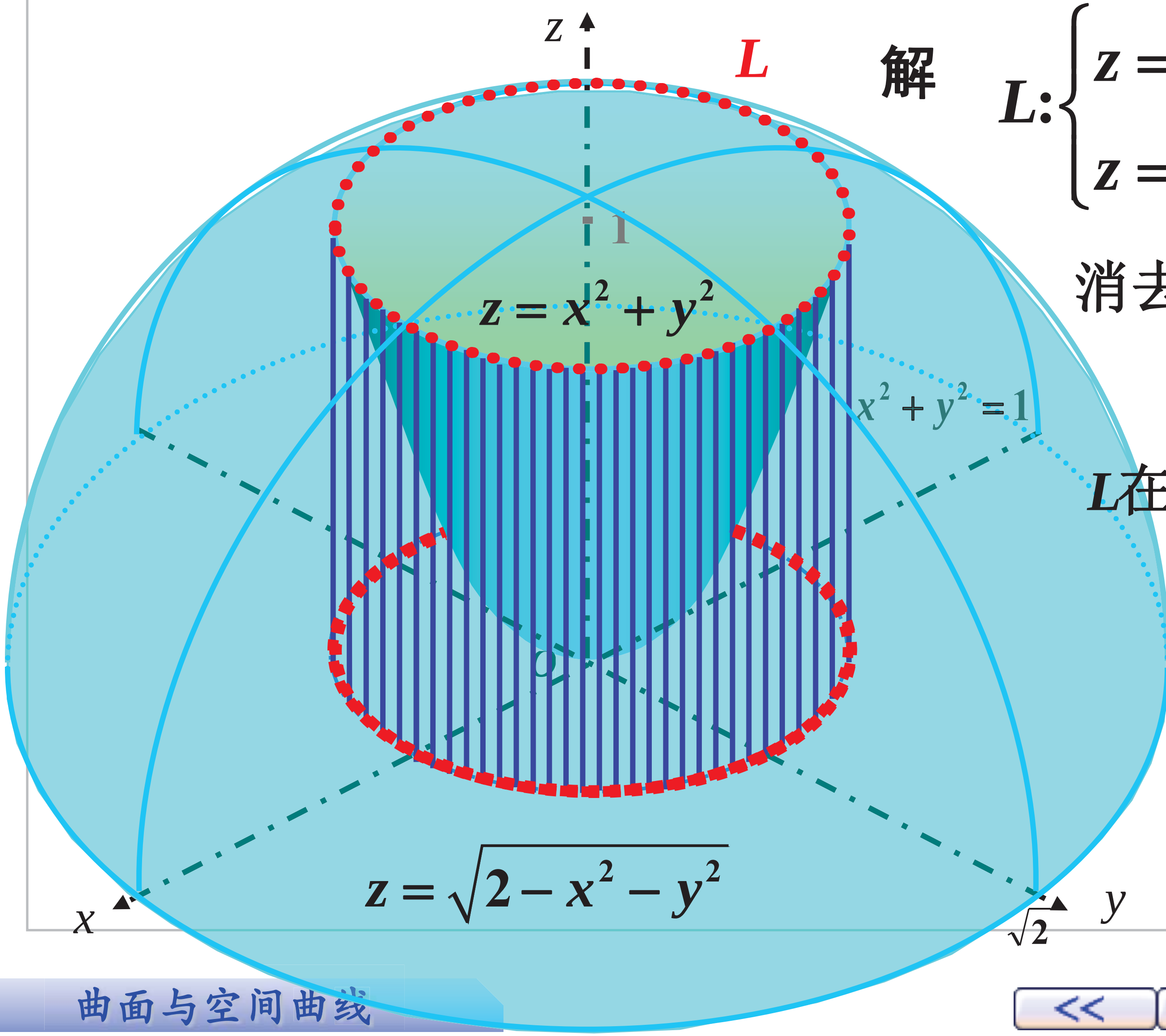
空间曲线　　投影柱面　　投影曲线

例1 求 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 的交线L在xoy面的投影.

解



例1 求 $z=\sqrt{2-x^2-y^2}$ 及 $z=x^2+y^2$ 的交线L在xoy面的投影.



解 $L:\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2} \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$

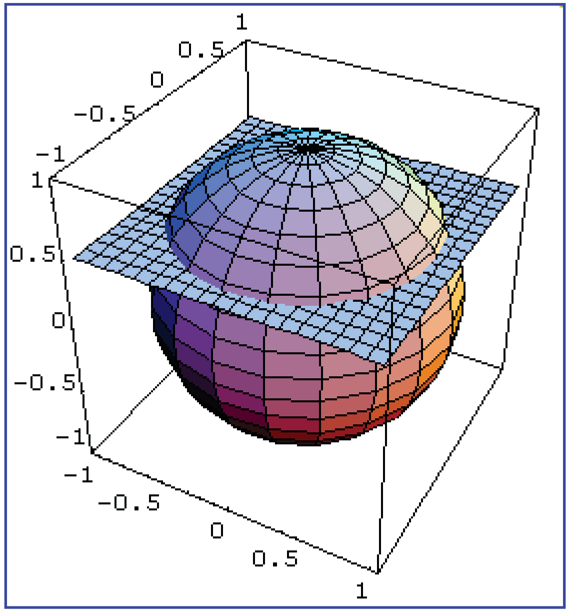
消去z 得投影柱面

$$x^2+y^2=1$$

L在xoy面的投影为:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

例2 求曲线 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ 在坐标面上的投影.



解 （1）消去变量z后得

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{4},$$

在 xoy 面上的投影为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{3}{4}, \\ z = 0 \end{cases}$$

（2）因为曲线在平面 $z=\frac{1}{2}$ 上，

$z=\frac{1}{2}$ 即为投影柱面，

所以曲线在 *xoz*面上的投影为线段：

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ y=0 \end{cases} \quad |x|\le\frac{\sqrt{3}}{2};$$

（3）同理在 *yoz* 面上的投影也为线段：

$$\begin{cases} z=\frac{1}{2}, \\ x=0 \end{cases} \quad |y|\le\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

主要内容

空间曲线在坐标面上的投影

（1）投影柱面　（2）投影曲线

练习 求抛物面 $y^2+z^2=x$ 与平面 $x+2y-z=0$ 的截线在三个坐标面上的投影曲线方程.

(1) 消去 z 得曲线在 xoy 面的投影 $\begin{cases} x^2+5y^2+4xy-x=0 \\ z=0 \end{cases}$,

(2) 消去 y 得曲线在 xoz 面的投影 $\begin{cases} x^2+5z^2-2xz-4x=0 \\ y=0 \end{cases}$,

(3) 消去 x 得曲线在 yoz 面的投影 $\begin{cases} y^2+z^2+2y-z=0 \\ x=0 \end{cases}$.

第三讲 曲面与空间曲线

曲面方程

1.柱面

2.旋转曲面

空间曲线

1.一般式方程

2.参数式方程

3.空间曲线在坐标面上的投影

➤ 内容小结

内容小 结

1.曲面方程

(1) 一般方程 $F(x,y,z)=0$.

(2) 母线平行于坐标轴的柱面方程为

$$F(x,y)=0 \qquad G(y,z)=0 \qquad H(z,x)=0\ .$$

(3) 旋转曲面

曲线 $\begin{cases} f(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$ 绕 z 轴旋转所产生的旋转曲面为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

2. 空间曲线方程

(1) 一般式方程(两曲面的交线) $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

在坐标面上的投影曲线

$$\begin{cases} H_1(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} H_2(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} H_3(z,x)=0 \\ y=0 \end{cases}.$$

(2) 参数方程 $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$