第四章 常微分方程

第2讲 可分离变量微分方程

电子科技大学数学科学学院

一阶微分方程的一般形式:

$$F(x,y,y')=0$$

若方程可解出 y'，即 $y'=f(x,y)$，则称其为一阶微分方程的典则形式.

有时也写成 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$，称为微分方程的对称形式.

$$y=y(x)\text{或}x=x(y)$$

"对称"指方程关于变量x和y位置对称 $\Rightarrow$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}\quad(Q(x,y)\neq 0)$$

$$\frac{dx}{dy}=-\frac{Q(x,y)}{P(x,y)}\quad(P(x,y)\neq 0)$$

一、可分离变量的方程一般形式

定义：形如$\dfrac{dy}{dx}=f(x)g(y)$（或$g(y)dy=f(x)dx$）的微分方程称为**可分离变量的微分方程**，其中$f(x),g(y)$分别是 x,y的连续函数.

分离变量：如果$g(y)\neq 0$,可将方程改写为$\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$.这样方程两边都只包含了一个变量及其微分,即把变量分离开了.

例如 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^2}{y}\Rightarrow ydy=2x^2dx.$

二、可分离变量微分方程的解法----分离变量法

设函数$\dfrac{1}{g(y)}$和$f(x)$是连续的,对$\dfrac{dy}{g(y)}=f(x)dx$两端积分，得到

$$\int \frac{1}{g(y)}dy=\int f(x)dx$$

记函数$G(y)$和$F(x)$依次为$\dfrac{1}{g(y)}$和$f(x)$的原函数,C为任意常数,则

$$G(y)=F(x)+C$$

就是微分方程的隐式解. 实际上$g(y)=0$的根$y=y_0$也是方程的解.

例1 求解微分方程 $\dfrac{dy}{dx}=2xy$ 的通解.

解 分离变量 $\dfrac{dy}{y}=2xdx(y\neq 0)$,

两端积分 $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=\int 2xdx$,

得 $\ln|y|=x^2+C_1$

$|y|=e^{C_1}e^{x^2}$

或 $y=\pm e^{C_1}e^{x^2}$.

令 $C=\pm e^{C_1}$ 得 $y=Ce^{x^2}$.

注意到，$y=Ce^{x^2}$中的C可正可负，但C不能为零，这是因为在分离变量的过程中假定了$y\neq 0$. 事实上，$y=0$也是原微分方程的解.因此，若在通解中C也可取零，就把排除掉的解$y=0$也包含进去了，故原方程的通解为

$$y=Ce^{x^2}\ (\text{其中}C\text{为任意常数})$$

为了简便，以后遇到类似情况可同样处理.上面的解题过程可简化为:

两边积分得

$$\ln|y|=x^2+\ln|C|$$

故通解为

$$y=Ce^{x^2}\ (C\text{为任意常数})$$

例2 求微分方程$\left(xy+x^{3}y\right)dy-\left(1+y^{2}\right)dx=0$满足初始条件$y(1)=0$的特解.

解 将原方程改写为 $xy\left(1+x^{2}\right)dy-\left(1+y^{2}\right)dx=0,$

分离变量得
$$\frac{y}{1+y^{2}}dy=\frac{dx}{x\left(1+x^{2}\right)},$$

两边积分
$$\int\frac{y}{1+y^{2}}dy=\int\frac{dx}{x\left(1+x^{2}\right)}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^{2}}\right)dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln\left(1+y^{2}\right)=\ln x^{2}-\ln\left(1+x^{2}\right)+\ln C$$

从而原方程的通解为$1+y^{2}=\dfrac{Cx^{2}}{1+x^{2}}$ （C为大于0任意常数).

将初始条件$x=1, y=0$带入通解，得$C=2$,故特解为$1+y^{2}=\dfrac{2x^{2}}{1+x^{2}}$.

例3 若函数$y=y(x)$可导,且满足$x\int_0^x y(t)dt=(x+1)\int_0^x ty(t)dt$,求函数$y(x)$.

解 两端对x求导可得 $$\int_0^x y(t)dt+xy=\int_0^x ty(t)dt+(x+1)xy,$$

$$\xrightarrow[\text{(注意积分变量为}t\text{)}]{\text{整理得}} \quad x^2y=\int_0^x (1-t)y(t)dt$$

上式两端再对x求导得 $$2xy+x^2\frac{dy}{dx}=(1-x)y,$$

$$\xrightarrow{\text{整理可得}} \quad \frac{dy}{y}=\frac{1-3x}{x^2}dx$$

$$\xrightarrow{\text{两端积分得}} \quad \ln|y|=-\frac{1}{x}-3\ln|x|+\ln|C|$$

故所求函数$y(x)$为$y=\dfrac{C}{x^3}e^{-\frac{1}{x}}$,($C$为任意常数).

如果两个曲线族相互正交(两条曲线在交点处的切线互相垂直)，那么称其中一个曲线族为另一个曲线族的正交轨线.

例4　求圆族$x^2+y^2=C\left(C>0\right)$的正交轨线.

解　为此,在圆族$x^2+y^2=C$两边对x求导,得微分方程

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

于是圆族在点$\left(x,\ y\right)$处的斜率为

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

因此,其正交轨线在该点$\left(x,y\right)$处的斜率就应为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$$

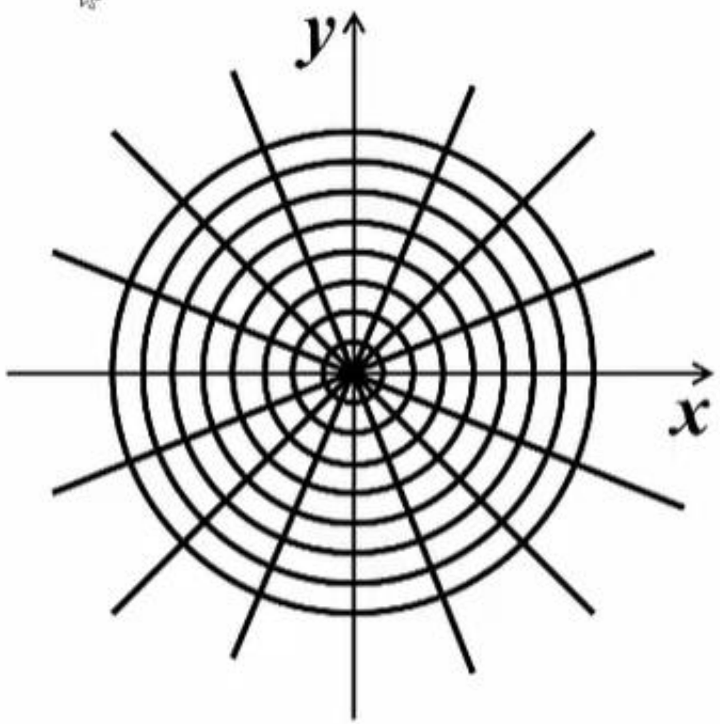
分离变量得

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

积分得通解

$$y=C_1x$$

其中C_1为任意常数.



由此可见,圆族$x^2+y^2=C$的正交轨线是通过原点的直线族$y=C_1x$,如右图所示.

第四章 常微分方程

第3讲 齐次微分方程

一、齐次微分方程的一般形式

定义 如果一阶微分方程$\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)$中的函数$f(x,y)$为齐次函数,即

$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$,则称微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$为齐次方程.

注 若函数$f(x,y)$对任意t满足$f(tx,ty)=t^k f(x,y)$,则称$f(x,y)$为k次齐次函数. 当$k=0$时为零次齐次函数或齐次函数. 若$f(x,y)$为齐次函数,令$t=\dfrac{1}{x}$有$f(x,y)\equiv f(tx,ty)=f(1,\dfrac{y}{x})=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

二、齐次微分方程的解法

解法 对齐次方程引入新的未知函数,相当于做变量代换

$$u = \frac{y}{x},即\ y = xu,$$

有$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, 带入原方程$\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$得

$$u + x\frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

可分离变量的方程

即
$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}.$$

当$\varphi(u)-u\neq 0$时,两端积分得 $\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|$,

若$\psi(u)$是$\frac{1}{\varphi(u)-u}$的一个原函数,则有

$$\ln|x|=\psi(u)+\ln|C|$$

即

$$x=Ce^{\psi(u)}=Ce^{\psi(\frac{y}{x})}.$$

若$\varphi(u)-u=0$有根$u=u_0$, 则$y=u_0x$也是原齐次方程的解.

例1　求解微分方程$(x - y\cos\frac{y}{x})dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$

解　原方程为齐次方程,令$u = \frac{y}{x}$,则 $dy = xdu + udx$,有

$$(x - ux\cos u)dx + x\cos u(udx + xdu) = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \cos u du = -\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \qquad \sin u = -\ln|x| + C$$

故微分方程的解为$\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C.$

例2　求解微分方程$\dfrac{dx}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{dy}{2y^2-xy}$.

解　原方程可写为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y^2-xy}{x^2-xy+y^2}=\dfrac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$,

令$u=\dfrac{y}{x}$,则 $\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,有

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{2u^2-u}{1-u+u^2}\ \Rightarrow [\frac{1}{2}(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u})-\frac{2}{u-2}+\frac{1}{u-1}]du=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \ln|u-1|-\frac{3}{2}\ln|u-2|-\frac{1}{2}\ln|u|=\ln|x|+\ln|C|\Rightarrow \frac{u-1}{\sqrt{u}(u-2)^{\frac{3}{2}}}=Cx$$

故微分方程的解为$(y-x)^2=Cy(y-2x)^3$.

例3　求一曲线,使得在其上任一点P处的切线在y轴上的截距等于原点到点P的距离.

解　设点P的坐标为(x,y),所求曲线为$y=y(x)$,切线上的动点为(X,Y),则过点P的切线方程为

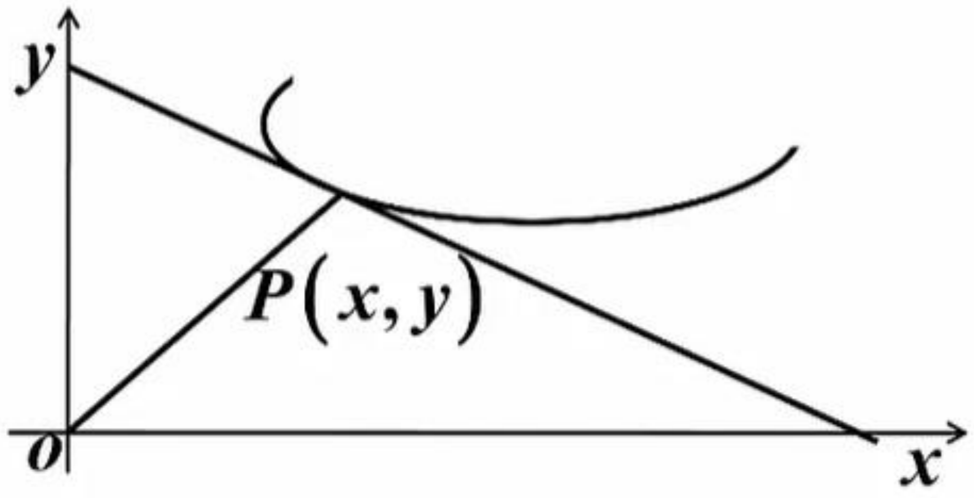
$$Y-y=\frac{dy}{dx}(X-x)$$

令$X=0$得切线与y轴的截距

$$Y_0=y-x\frac{dy}{dx}$$

由题意可得

$$y-x\frac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$$



这就是点P的坐标满足的微分方程.

(1)若$x>0$,方程变为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}-\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$.令$u=\dfrac{y}{x}$,则有$y=xu,\dfrac{dy}{dx}=u+x\dfrac{du}{dx}$,

代入上式有 $$u+x\frac{du}{dx}=u-\sqrt{1+u^2}$$

$$\xrightarrow{\text{分离变量}}\quad \frac{du}{\sqrt{1+u^2}}=-\frac{dx}{x}$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分}}\quad xu+\sqrt{x^2+x^2u^2}=C$$

将$u=\dfrac{y}{x}$代回上式得,当$x>0$时的通解为$y+\sqrt{x^2+y^2}=C$.

(2)若$x<0$,方程变为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$, 其通解为 $-y+\sqrt{x^2+y^2}=Cx^2$.

三、可化为齐次方程的微分方程及其解法

通过变量替换将非齐次线性微分方程化为齐次微分方程.

例4 求$\dfrac{dy}{dx}=(x+y)^2$的通解.

解 令 $x+y=u, \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$,代入原方程得

$\dfrac{du}{dx}=1+u^2$, 解得 $\arctan u = x+C$,

代回 $u=x+y$,得$\arctan(x+y)=x+C$,

原方程的通解为$y=\tan(x+C)-x$.

第四章 常微分方程

第4讲 一阶线性微分方程

电子科技大学数学科学学院

一、一阶线性微分方程的一般形式

定义 形如$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y=c(x), a(x)\neq 0$的方程称为一阶线性方程.

其标准形式为 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$,

当$Q(x)\equiv 0$,称其为一阶齐次线性微分方程;

当$Q(x)\neq 0$,称其为一阶非齐次线性微分方程.

例如 $\frac{dy}{dx}-y=x^2, \frac{dx}{dt}-x\sin t=t^2$, 线性的;

$yy'-2xy=3, y'-\cos y=1$, 非线性的.

二、一阶齐次线性微分方程的解法------分离变量法

由于$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=0$是可分离变量方程,分离变量得

$$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

$$\xrightarrow{\text{两边积分得}} \quad \ln y=-\int P(x)dx+\ln C$$

齐次线性方程的通解为$y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

三、一阶非齐次线性微分方程的解法------常数变易法

求一阶非齐次线性方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$的通解,先求它所对应的齐次线性方程$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$的通解$y=Ce^{-\int P(x)dx}$. 将通解中的任意常数C变为x的一个待定函数$C(x)$,即作变换$y=C(x)e^{-\int P(x)dx}$,代入原方程得

$$\underline{C'(x)e^{-\int P(x)dx}-P(x)C(x)e^{-\int P(x)dx}}+P(x)\underline{C(x)e^{-\int P(x)dx}}=Q(x)$$

整理得

$$C'(x)=Q(x)e^{\int P(x)dx}\xrightarrow{\text{两边积分}}C(x)=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C$$

故一阶线性非齐次微分方程的通解为:

记住此公式

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

$$= \underbrace{Ce^{-\int P(x)dx}}_{\text{对应齐次方程通解}} + \underbrace{e^{-\int P(x)dx}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次方程特解}}$$

注 在求解一阶非齐次线性微分方程时,可以直接套用通解公式,但要掌握常数变易法.

回忆非齐次线性方程组解的结构,同非齐次微分方程解结构的异同.

例1 求微分方程$\cos x\cdot\dfrac{dy}{dx}+y\sin x=1$的通解.

解法一 此方程为一阶非齐次线性微分方程,将方程改写为

$$\frac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x$$

其对应的齐次线性微分方程为

$$\frac{dy}{y}=-\tan x dx\xrightarrow{\text{两端积分得}}\ln y=\ln\cos x+\ln C$$

故对应的齐次线性方程的通解为

$$y=C\cos x$$

设原方程的通解为

$$y = C(x)\cos x$$

代入原方程得

$$C'(x)\cos x - C(x)\sin x + C(x)\cos x\tan x = \sec x$$

即

$$C'(x)\cos x = \sec x \Rightarrow C'(x) = \sec^2 x$$

积分得

$$C(x) = \tan x + C$$

故原方程的通解为$y = \cos x(\tan x + C) = \sin x + C\cos x.$

解法二　将方程改写为$\dfrac{dy}{dx}+y\tan x=\sec x$,这里$P(x)=\tan x, Q(x)=\sec x.$

代入一阶非齐次线性微分方程的通解公式

$$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$$

$$=e^{-\int \tan x dx}\left(\int \sec x e^{\int \tan x dx}dx+C\right)$$

$$=e^{\ln\cos x}\left(\int \sec x e^{-\ln\cos x}dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\int \sec x^2 dx+C\right)$$

$$=\cos x\left(\tan x+C\right)$$

$$=\sin x+C\cos x$$

例2　求微分方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x+y^3}$的通解.

解法一　原方程不是未知函数y的线性方程. 但是,将x看成y的函数时得

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x+y^2 \qquad \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2$$

这是关于x的线性方程,y为自变量. 其对应齐次方程

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=0,$$

易求其通解为$x=Cy^2$. 令$x=C(y)y^2$，代入非齐次方程得

$$C'(y)y^2=y^2 \ \Rightarrow C'(y)=1 \quad \Rightarrow C(y)=y+C$$

故原方程的通解为$x=(y+C)y^2$或$x=Cy^2+y^3$.

解法二　将方程改写为$\dfrac{dx}{dy}-\dfrac{2}{y}x=y^2$,这里$P(y)=-\dfrac{2}{y}$,$Q(y)=y^2$,

代入一阶非齐次线性微分方程的通解公式

$$x=e^{-\int P(y)dy}\left(\int Q(y)e^{\int P(y)dy}dy+C\right)$$

$$=e^{-\int -\frac{2}{y}dy}\left(\int y^2e^{\int -\frac{2}{y}dy}dy+C\right)$$

$$=e^{2\ln y}\left(\int y^2e^{-2\ln y}dy+C\right)$$

$$=y^2\left(\int dy+C\right)$$

$$=y^2(y+C)$$

例3　设$F(x)=f(x)g(x)$,其中函数$f(x),g(x)$在R内满足以下条件
$f'(x)=g(x), g'(x)=f(x), f(0)=0, f(x)+g(x)=2e^{x}$,求

(1) $F(x)$所满足的一阶微分方程

(2) 求出$F(x)$的表达式

解

$$\begin{aligned} F'(x) &= f'(x)g(x)+f(x)g'(x) \\ &= f(x)^2+g(x)^2 \\ &= (f(x)+g(x))^2-2f(x)g(x) \\ &= 4e^{2x}-2F(x) \end{aligned}$$

整理得 $F'(x)+2F(x)=4e^{2x}$

由一阶微分方程的通解公式得

$$F(x) = e^{-\int 2dx}\left(\int 4e^{2x}e^{\int 2dx}dx + C\right)$$
$$= e^{-2x}\left(\int 4e^{4x}dx + C\right)$$
$$= e^{-2x}(e^{4x} + C)$$

又$F(0) = f(0)g(0) = 0$，代入求得$C = -1.$

$F(x)$所满足的一阶微分方程为 $F(x)=e^{-2x}(e^{4x} + C)$;

$F(x)$的表达式为$F(x)=e^{-2x}(e^{4x}-1)$.

第四章 常微分方程

第5讲 伯努利（Bernoulli）方程

电子科技大学数学科学学院

一、伯努利方程的一般形式

形如$\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n,(n\neq 0,1)$的方程称为伯努利方程.

其标准形式为 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n.$

当$n=0$时,该方程是一阶齐次线性方程;

当$n=1$时,该方程是可分离变量的微分方程;

当$n\neq 0,1$时,该方程是非线性微分方程.

若$y\neq 0$,变形可得$y^{-n}\dfrac{dy}{dx}+P(x)y^{-n+1}=Q(x).$

二、伯努利方程的解法

当$n \neq 0,1$时,该方程是非线性微分方程,它可以通过变换$z = y^{1-n}$转化化为一阶线性微分方程. 具体步骤如下:

方程两边同除$y^n\left(y \neq 0\right)$, 得$y^{-n}\dfrac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$,

令$z = y^{1-n}$,则 $\dfrac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\dfrac{dy}{dx}$, 即$y^{-n}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-n}\dfrac{dz}{dx}$,

代入方程得 $\dfrac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$, 即转化为一阶线性非齐次方程.

求出通解后,将$z = y^{1-n}$代入即得

$$y^{1-n} = z = e^{-\int (1-n)P(x)dx}\left(\int Q(x)(1-n)e^{\int (1-n)P(x)dx}dx + C\right)$$

例1　求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=x\sqrt{y}$ 的通解.

解　这是$n=\frac{1}{2}$的伯努利方程,两端除以$\sqrt{y}$，得

$$\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}\sqrt{y}=x$$

令$z=\sqrt{y}$,得$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$. 代入方程得

$$\frac{dz}{dx}-\frac{2}{x}z=\frac{x}{2}$$

这是一阶线性非齐次微分方程. 用常数变易法求得其通解为

$$z=x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x|+C\right)$$

代入$z = y^{\frac{1}{2}}$得

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2$$

此外,方程还有解$y = 0$.

注　通过学习齐次方程的求解方法以及伯努利方程的求解方法,不难发现,首先都是进行变量代换,转化方程.由此可见,利用变量代换,把微分方程化为可求解的方程,这是解微分方程的常用方法.

例2　求微分方程的通解$2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2}$.

解　$2yy' + 2xy^2 = xe^{-x^2} \Rightarrow yy' + xy^2 = \frac{1}{2}xe^{-x^2}$

令 $z = y^2$,则$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$,

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} + 2xz = xe^{-x^2}$$

$$\Rightarrow z = e^{-\int 2xdx}[\int xe^{-x^2}e^{\int 2xdx}dx + C]$$

所求通解为$y^2 = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + C)$.

例3 求微分方程通解 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x+y}$.

解法1 方程变形为 $\dfrac{dx}{dy}=x+y$.

解法2 令 $x+y=u$ 则 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{du}{dx}-1$,

代入原式得 $\dfrac{du}{dx}-1=\dfrac{1}{u}$,

分离变量得 $u-\ln(u+1)=x+C$,

将 $u=x+y$ 代回,所求通解为

$y-\ln(x+y+1)=C$,或 $x=C_1e^{y}-y-1$.