第四章 n维向量空间

习题课

何军华

电子科技大学

一、线性相关性及重要结论

设$A_{m\times n}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则如下条件彼此等价:

- $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关，即:

  存在不全为0的数$k_1,k_2,\cdots,k_n$使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_n\alpha_n=0.$$

- 存在某个向量可由其余向量线性表出;
- 零向量可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$非零的线性表出;
- 齐次方程组$AX=0$有非零解;
- 秩$R(A)<n$;

$m=n$时: ◆ 行列式为0 ◆ A不可逆.

已知向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关:

因为向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关,所以存在不全为0的数$k_1,\cdots,k_n$使得:　　$k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0.$

证明某个向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性相关:

设法找出不全为0的数$k_1,\cdots,k_n$使得:

$$k_1\alpha_1+\cdots k_n\alpha_n=0.$$

通常利用秩,行列式等证明$AX=0$有非零解.

涉及“线性相关”的重要结论:

- 向量个数>分量个数, 向量组线性相关;

  6个3维向量必然线性相关;

- 部分相关, 则整体相关;
- 向量组相关, 去掉一些分量后仍然线性相关;
- 行列式为0, 则列(行)向量组线性相关;
- 多组由少组线性表出, 则多组线性相关;
- 向量个数 > 向量组的秩, 则线性相关;
- $AX=0$有非零解, 则A的列组线性相关.

例1. 设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关，向量$\beta_1$可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，而向量$\beta_2$不能由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出，则对任意的常数$k$，必有(　　)

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性相关；

(B) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,k\beta_1+\beta_2$线性无关；

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性相关；

(D) $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta_1+k\beta_2$线性无关.

例2. 设向量组α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则(　　)

(A) α必可由β,γ,δ线性表出；

(B) β必不可由α,γ,δ线性表出；

(C) δ必可由α,β,γ线性表出；

(D) δ必不可由α,β,γ线性表出；

分析：

$$\left.\begin{array}{r}\alpha,\beta,\gamma\text{ 线性无关} \Rightarrow \alpha,\beta\text{ 线性无关}\\ \alpha,\beta,\delta\text{ 线性相关}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow \delta$可由α,β线性表出$\Rightarrow$ δ可由α,β,γ线性表出

例2. 设向量组α,β,γ线性无关，向量组α,β,δ线性相关，则(　　)

(A) α必可由β,γ,δ线性表出；

(B) β必不可由α,γ,δ线性表出；

(C) δ必可由α,β,γ线性表出；

(D) δ必不可由α,β,γ线性表出；

特殊值：

令$\alpha=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\gamma=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$　　$\delta=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$

排除(A)(B)(D)