第一讲 实二次型及其标准形

- 二次型及其矩阵表示
- ➤ 矩阵的合同
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形
- 小结

二、矩阵的合同

复习:

二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$ 经可逆线性变换 $X=CY$，有

$$f(X)=(CY)^TA(CY)=Y^T\underbrace{(C^TAC)}_{B}Y=Y^TBY\triangleq g(Y)$$

其中 $B=C^TAC$，称A与B合同.

1. 矩阵合同的概念

定义 对n阶矩阵A, B, 若存在可逆矩阵C, 使

$$C^TAC = B$$

则称 A与 B合同.

回顾：A与B等价$\Leftrightarrow PAQ = B$, $(P, Q$ 可逆$)$;

A与B相似$\Leftrightarrow P^{-1}AP = B$,（ P 可逆）.

思考：矩阵合同与等价、相似有何关系?

答案：两矩阵合同则一定等价，但不一定相似;

特别，若 P 为正交矩阵，则 $B= P^TAP = P^{-1}AP$,

此时合同与相似是一样的.

2. 矩阵合同的性质

(1) 反身性：矩阵A与自身合同；

(2) 对称性：若A与B合同，则B与A合同；

(3) 传递性：若A与B合同，且B与C合同，则A与C合同.

证 (1) $A = I^T A I$

(2) 若$B = P^T AP$ (P可逆), 则 $A = (P^{-1})^T BP^{-1}$. 即B与A合同.

(3) 若 $B = P^T AP$, $C = Q^T BQ$ (P,Q可逆)

$\Rightarrow C = Q^T (P^T AP)Q \Rightarrow C = (PQ)^T A(PQ)$,

即A与C 合同.

定理 二次型经可逆线性变换前后的矩阵是合同的；可逆线性变换不改变二次型的秩.

可逆线性变换 $X=CY$，又称为**非退化线性变换**.

问题： 1.与对称矩阵合同的矩阵的最简形式(标准形)是什么？即在可逆线性变换下二次型的最简形式(标准形)是什么？

2. 如何将二次型化为标准形？标准形是否唯一？

主要内容

1. 矩阵合同的概念；

2. 矩阵合同的性质.

练习

设A, B 均是n阶实对称矩阵，则有（　　）.

（A）若 A与B等价，则 A与B相似；

（B）若A 与B相似，则 A与B合同；

（C）若A 与B合同，则 A与B相似；

（D）若 A与B等价，则 A与B合同.

分析　矩阵A与B相似的充分必要条件为存在正交矩阵P，使得 $P^{-1}AP = P^TAP = B$

因此，若两个同形矩阵相似则必定合同，反之不一定.

比如 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$ 是合同的，因为

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$$

但A与B不相似．否则，有

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

矛盾！

答案：选(B).