第一章 矩阵及其初等变换

§1.4 分块矩阵

一. 分块矩阵

二. 分块矩阵的运算

电子科技大学 黄廷祝

一. 分块矩阵

例.

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&6&0\\0&2&3&0\\\hline 2&0&1&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=\begin{pmatrix}1&5&6\\0&2&3\end{pmatrix},\ A_{12}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\ A_{21}=\begin{pmatrix}2&0&1\end{pmatrix},\ A_{22}=(4)$$

又如

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c}1&5&6&0\\0&2&3&0\\\hline 0&0&0&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$$

块对角矩阵

常用的矩阵分块方法:

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix},\text{其中}\alpha_i=(a_{i1},\ldots,a_{in}),\ i=1,2,\ldots,m$$

$$A=(a_{ij})_{m\times n}=(\beta_1,\quad \beta_2,\quad \cdots,\quad \beta_n),$$

$$\text{其中}\beta_j=(a_{1j},\ldots,a_{mj})^T,\ j=1,2,\ldots,n$$

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_t\end{pmatrix}=\mathrm{diag}(A_1,A_2,\cdots,A_t)$$

[结束]

二. 分块矩阵的运算

加法: 同型矩阵 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{r1} & \cdots & B_{rs} \end{pmatrix}$

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1s}+B_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{r1}+B_{r1} & \cdots & A_{rs}+B_{rs} \end{pmatrix}.$$

要求: 两矩阵的行、列分块方法一致

数乘: 分块矩阵 $A=(A_{ij})_{s\times t}$, $kA=(kA_{ij})_{s\times t}$.

乘法: $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times p}$,

$$AB=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & \cdots & B_{2t} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix}=C=(C_{kl})$$

其中C是 $r\times t$ 矩阵

$$C_{kl}=\sum_{i=1}^{s}A_{ki}B_{il}\quad (k=1,\dots,r;\ l=1,\dots,t)$$

要求: 1) 矩阵A的列数=矩阵B的行数
2) 矩阵A列的分法=矩阵B行的分法

例1. 求AB: $A=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\3&-1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\0&1&3&-1\\0&2&1&4\end{pmatrix}$

解:

$$AB=\left(\begin{array}{cc|cc}1&-1&0&0\\3&-1&0&0\\0&1&0&0\\\hline 0&0&2&-1\end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc}1&0&0&0\\-1&0&0&0\\\hline 0&1&3&-1\\0&2&1&4\end{array}\right)=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&O\\O&B_2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}A_1B_1&O\\O&A_2B_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccc}2&0&0&0\\4&0&0&0\\-1&0&0&0\\\hline 0&0&5&-6\end{array}\right)$$

设A,B均为n阶矩阵，则

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_m \end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix} A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_mB_m \end{pmatrix},$$

$A^k=?$

注意: 将矩阵分块作乘法其分法不是唯一的.如,例1中

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11} & O \\ O & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & O & O \\ O & B_{22} & B_{23} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{11}B_{11} & O & O \\ O & A_{22}B_{22} & A_{22}B_{23} \end{pmatrix}$$

例2. 如何分块求AB:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\-1&2&1&0&0\\1&1&0&1&0\\-2&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}3&2&0&1&0\\1&3&0&0&1\\-1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&0\\0&0&-1&0&0\end{pmatrix}$$

解

$$A=\begin{pmatrix}I_2&O_{2\times3}\\A_1&I_3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}B_1&I_2\\-I_3&O_{3\times2}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}I_2&O_{2\times3}\\A_1&I_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_1&I_2\\-I_3&O_{3\times2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_1&I_2\\A_1B_1-I_3&A_1\end{pmatrix}$$

转置: $A=(A_{kl})_{s\times t} \Rightarrow A^T=(B_{lk})_{t\times s}$

其中 $B_{lk}=A_{kl}^T,\ l=1,\ldots,t;\ k=1,\ldots,s$

例3. $A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ A_{13}^T & A_{23}^T \end{pmatrix}$$

逆:

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},（d_1,...,d_n \neq 0） \Rightarrow D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix}, A_1,...,A_m\text{均可逆}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} A_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_m^{-1} \end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} & & A_1 \\ & \iddots & \\ A_m & & \end{pmatrix}, A_1, \ldots, A_m \text{均可逆}$$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} & & A_m^{-1} \\ & \iddots & \\ A_1^{-1} & & \end{pmatrix}.$$

特殊：$A=\begin{pmatrix} & & d_1 \\ & \iddots & \\ d_m & & \end{pmatrix}, d_1 d_2 \ldots d_m \neq 0$

$$\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} & & d_m^{-1} \\ & \iddots & \\ d_1^{-1} & & \end{pmatrix}$$

例4. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，求 A 的逆.

解

$$A=\left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)=\begin{pmatrix} O & A_1 \\ A_2 & O \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} O & A_2^{-1} \\ A_1^{-1} & O \end{pmatrix}=\cdots\cdots$$

[结束]