第一讲 实二次型及其标准形

二次型及其矩阵表示

矩阵的合同

用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形

- 内容小结

内容小结

1．二次型及相关概念

(1) 二次型：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \overset{a_{ij}=a_{ji}}{=} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = X^TAX \triangleq f(X)$$

其中 $X=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$， $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为对称阵，

$\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(f)$ 称为二次型的秩.

(2)矩阵的合同： $C^TAC=B$ (C可逆)

2. 性质

(1) 二次型 $f(X)=X^TAX$ 在可逆变换 $X=CY$ 下的矩阵是合同的，即

$$f(X)=X^TAX \underset{|C|\neq 0}{\overset{X=CY}{=}} Y(C^TAC)Y \triangleq Y^TBY$$

则 $B=C^TAC$.

(2) 惯性定理

二次型 $f=X^TAX$ 总可经过可逆线性变换化为标准形

$$f \overset{X=CY}{=} d_1y_1^2+d_2y_2^2+\cdots+d_py_p^2-d_{p+1}y_{p+1}^2-\cdots-d_ry_r^2$$

其中 $d_i > 0\,(i=1,2,\cdots,r)$， $r = R(A)$ 为 f 的秩，

p叫 f 的正惯性指数， $r-p$ 叫负惯性指数，

$p-(r-p)=2p-r$ 叫符号差，标准形不唯一，但

p与r是唯一的。

f 的规范形 $f = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_p^2 - z_{p+1}^2 - \cdots - z_r^2$

是唯一的。

3. 化二次型为标准形的方法

(1) 配方法

① 含有平方项； ② 不含平方项.

(2) 正交变换法

1^0 写出二次型的矩阵A，并求A的特征值与n个线性无关的特征向量；

2^0 将重特征根所对应的线性无关的特征向量正交化，再将全部特征向量单位化，以它们为列作矩阵Q；

3^0 作正交变换 $X = QY$, 得二次型的标准形

$$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

λ_i 是Q中第i个列向量所对应的特征值.