第二章 行列式

§2.5 矩阵的秩

一. 矩阵秩的概念

二. 基本结论与性质

三. 矩阵秩的计算

四. 矩阵的标准形（分解）

五. 三个证明例子

电子科技大学 黄廷祝

一. 矩阵秩的概念

矩阵A中非零子式的最高阶数r，称为A的秩，

记为$R(A) = r$.

显然对任意矩阵A，A的秩唯一，
但其最高阶非零子式一般不唯一.

矩阵秩的另一种理解：

若矩阵A中有一个不等于0的r阶子式D，且所有$r+1$阶子式（如果存在）全等于0，那么D称为矩阵A的最高阶非零子式，数r称为矩阵A的秩.

例1. 求矩阵的秩：

$$(1)\ A=\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix};\ (2)\ B=\begin{pmatrix}2&4&8\\1&2&1\end{pmatrix};(3)\ C=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\3&6&2&0\end{pmatrix}$$

解. (1)(2) 易

(3)：C中所有3阶子式全为零，可得 $R(A)=2$.

为什么？

思考 若$R(A)=r$，A的所有r阶子式均不为零吗？所有$r-1$阶子式均不为零吗？

[结束]

二. 基本结论与性质

1. $R(A)=0 \Leftrightarrow A=O$；

2. $R(A)\geq r \Leftrightarrow A$有一个$r$ 阶子式不为零；

3. $R(A)\leq r \Leftrightarrow A$的所有$r+1$阶子式全为零。

4. $R(kA)=\begin{cases}0, & k=0,\\ R(A), & k\neq 0.\end{cases}$

5. 设A为$m\times n$阶矩阵，则$0\leq R(A)\leq \min(m,n)$;

6. 对任意矩阵A，$R(A^T)=R(A)$;

7. 方阵A可逆 $\Leftrightarrow R(A)=n$.

(满秩矩阵—可逆矩阵　降秩矩阵—不可逆矩阵)

[结束]

三. 矩阵秩的计算

例1. 求矩阵的秩： $A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有三阶子式 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

所有四阶子式全为零，所以 $R(A)=3$.

对于行阶梯形矩阵A，$R(A)=A$的非零行的行数.

定理1. 初等变换不改变矩阵的秩.

例2 求矩阵的秩: $A=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\3&6&2&0\end{pmatrix}$

解

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&0&0\\0&0&-10&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&-10&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

所以 $R(A)=2$.

$R(A)=r\Leftrightarrow$ 经行初等变换能将A化为具有r个非零行的行阶梯形矩阵.

例3. 已知$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 2 & -4 & 8 & 0 \\ -2 & 4 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 0 & -6 \end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

求矩阵A及矩阵$B=(A|b)$的秩.

解

$$B=\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\2&-4&8&0&2\\-2&4&-2&3&3\\3&-6&0&-6&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&4&2&0\\0&0&2&1&5\\0&0&-6&-3&1\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&5\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&2&-1&1\\0&0&2&1&0\\0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\therefore R(A)=2,\quad R(B)=3.$$

推论. 对任意矩阵A,

$$R(PA)=R(AQ)=R(PAQ)=R(A),$$

其中P, Q分别为可逆矩阵.

证. 因为Q可逆，存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_t$使得

$$Q= E_1 \cdots E_t,$$

$$AQ =A E_1 \cdots E_t,$$

即 AQ 为A经列初等变换所得. 故 $R(AQ)= R(A)$.

同理可证其他.

[结束]

四. 矩阵的标准形（分解）

定理2 对任意矩阵$A_{m\times n}$，都存在可逆矩阵$P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$使得

$$A = P\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n} Q, \quad R(A) = r$$

其中$\begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$称为$A$的标准形. 即任何矩阵都等价于其标准形.

(问：矩阵等价的充要条件是什么？)

(A与B等价$\Leftrightarrow$存在可逆的P,Q使得$A=PBQ$)

即，存在可逆矩阵K,S使得 $KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}_{m\times n}$，$R(A) = r$

证. $A \xrightarrow{\text{行初等变换}}$ 简化行阶梯型 $\xrightarrow{\text{列初等变换}} \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$

$r = R(A).$ **（为什么？）**

存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_k; F_1, \ldots, F_s$使得

$$(E_k \cdots E_1)A(F_1 \cdots F_s) = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

存在可逆矩阵$K = E_1, \ldots, E_k; S = F_1, \ldots, F_s$使得

$$KAS = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

推论. 同型矩阵A与B等价的充要条件是$R(A)=R(B)$.

例4 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&4&1\\2&4&8&2\\3&6&2&0\end{pmatrix}$, 求$A$的标准形.

解

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&0&0\\0&0&-10&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&4&1\\0&0&-10&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix},R(A)=2.$$

$$\text{标准形为}\begin{pmatrix}I_2&O\\O&O\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

[结束]

五. 三个证明例子

例5 **设A为n阶矩阵($n\geq 2$)，证明** $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$

证 ①若R(A)=n: $\det A\neq 0$，

$$AA^*=(\det A)I,$$

$$|A||A^*|=|(\det A)I|=|A|^n\neq 0,$$

所以 $|A^*|\neq 0$, 即 $R(A^*)=n.$

② R(A) < n-1: **A中所有n-1阶子式均为零，**

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=O, \quad R(A^*)=0.$$

例6 证明 $R\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = R(A) + R(B).$

证 令 $R(A)=r_1,\ R(B)=r_2$. 存在可逆矩阵 P_1, P_2, Q_1, Q_2 使得

$$A = P_1\begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_1,\quad B = P_2\begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_2,$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1\begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_1 & O \\ O & P_2\begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix}Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

可逆矩阵，为什么？

所以，$\text{秩}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{秩}\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} = r_1 + r_2.$

例7 设 A 为任一实矩阵，$R(A^TA)$与$R(A)$是否相等？

证 **任取一个非零实向量**x

若$Ax=0$，必有$A^TAx=0$，

反之若$A^TAx=0$，有 $x^TA^TAx=0$

即 $(Ax)^T(Ax)=0 \Rightarrow Ax=0$;

由此可知 $Ax=0$与$A^TAx=0$同解，

故 $R(A^TA)=R(A)$

[结束]