

第四讲 二次曲面

- ▶ 二次曲面的标准方程与图形
 1. 椭球面
 2. 抛物面
 3. 双曲面
- ▶ 化二次曲面为标准方程
- ▶ 内容小结

第四讲 二次曲面

► 二次曲面的标准方程与图形

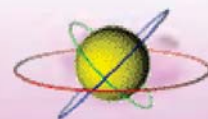
1. 椭球面

2. 抛物面

3. 双曲面

化二次曲面为标准方程

内容小结



一、二次曲面的标准方程与图形

二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz \\ + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

所表示的曲面称为二次曲面.

$$\left. \begin{array}{l} \text{例如, 椭圆柱面} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{旋转抛物面} \quad z = x^2 + y^2 \\ \text{球面} \quad x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{array} \right\} \text{标准方程}$$

研究二次曲面几何特征的方法:

- (1) 用坐标变换(旋转、平移)将二次方程化为标准方程;
- (2) 用截痕法讨论标准方程的几何特征.

截痕法:

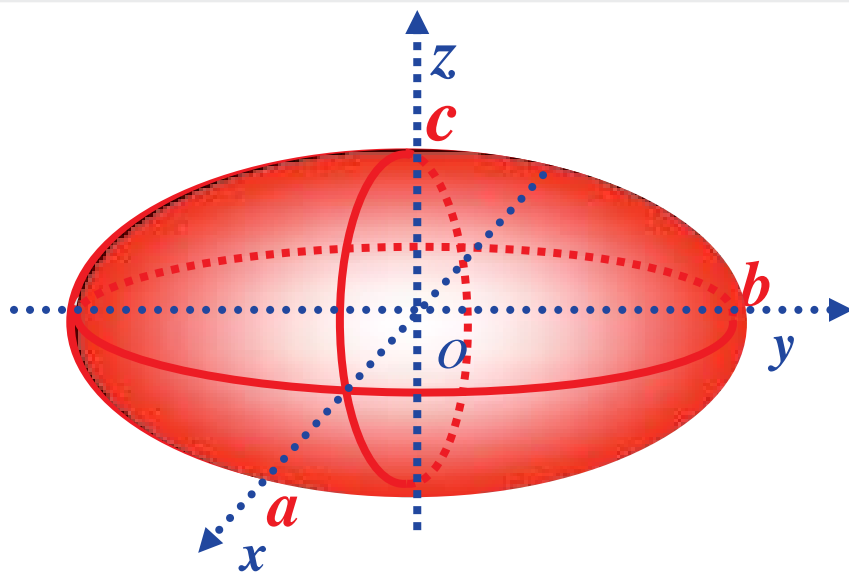
用坐标面或与坐标面平行的平面与曲面相截, 考察所得交线(截痕)的形状, 通过截痕形状研究曲面的形状.

几类二次曲面的的标准方程:

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(a > 0, b > 0, c > 0)$$



(1) 范围: $|x| \leq a$, $|y| \leq b$, $|z| \leq c$.

图形在 $x = \pm a$, $y = \pm b$, $z = \pm c$ 所围成的长方体内.

(2) 对称性: 图形关于三个坐标面、三个坐标轴及原点对称.

(3) 截 痕

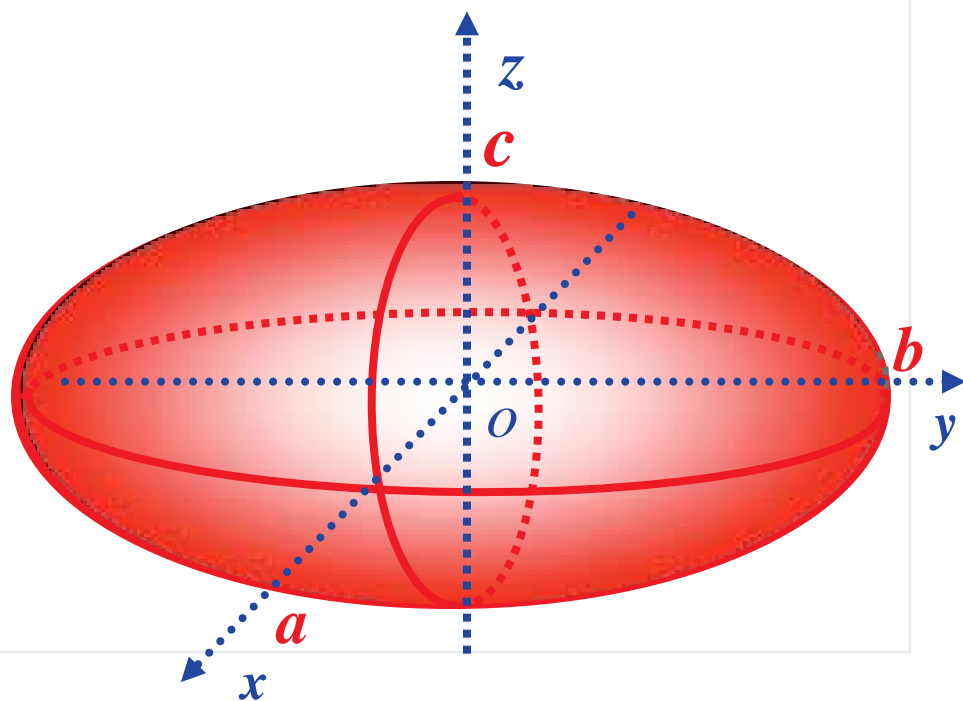
用平面 $z = z_1$ 截椭球面，其交线为椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \frac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \quad |z_1| < c \end{cases}$$

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

同理与平面

$x = x_1$ 和 $y = y_1$
的交线也是椭圆.



椭球面与三个坐标面的交线为椭圆：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ z = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

(4) 椭球面的几种特殊情况：

1⁰ $a = b$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 是旋转椭球面

由椭圆 $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \\ y = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转而成.

2⁰ $a = b = c$, $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. 是球面

主要内容

1. 研究二次曲面几何特征的方法
2. 椭球面的标准方程与图形