洛必达法则

一、$\frac{0}{0}$与$\frac{\infty}{\infty}$型不定型

二、洛必达法则及举例

一、$\dfrac{0}{0}$型及$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定型

定义：如果当$x \to a(x \to \infty)$时，两个函数$f(x)$与$g(x)$都趋于零或趋于无穷大，那么极限 $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ (x \to \infty)}} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 称为$\dfrac{0}{0}$或$\dfrac{\infty}{\infty}$型不定型

例如：$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}, \left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx}, \left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

二、洛必达法则及举例

定理 (洛必达法则)设$f(x),g(x)$满足以下三个条件

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0;$

(2) 在 x_0 点的某邻域内(点 x_0 本身可以除外),

$f'(x)$及 $g'(x)$ 都存在且 $g'(x)\neq 0;$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$存在(或$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\infty$);

那么 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}.$

证明：作辅助函数

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq x_0 \\ 0, & x=x_0 \end{cases}, \qquad g_1(x)=\begin{cases} g(x), & x\neq x_0 \\ 0, & x=x_0 \end{cases},$$

$\forall x\in U^0(x_0,\delta)$，在以 x_0 与 x 为端点的区间上，$f_1(x),g_1(x)$满足柯西中值定理的条件，则有

$$\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{g_1(x)-g_1(x_0)}=\frac{f_1{}'(\xi)}{g_1{}'(\xi)} \quad (\xi\text{在}x\text{与}x_0\text{之间})$$

由$f_1(x)$及$g_1(x)$的定义知 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 当$x\to x_0$时，$\xi\to x_0$，

$$\therefore \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{\xi\to x_0}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$$

例1 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}$.　　$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\tan x)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2 x}{1}=1.$

例2 求 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$.　　$\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{6x}{6x-2}=\dfrac{3}{2}.$

上面的定理给出了$x \to x_0$时"$\frac{0}{0}$"型的极限，

注意到该定理的结论对以下几种情况仍然成立：

(1)自变量 $x \to \pm\infty,\ x \to x_0^+,\ x \to x_0^-$；

(2) $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\infty}{\infty}$**型.**

例3 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2}-\arctan x}{\dfrac{1}{x}}$. $\left(\dfrac{0}{0}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{1+x^2}=1.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\sin ax}{\ln\sin bx}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a\cos ax\cdot\sin bx}{b\cos bx\cdot\sin ax}=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos ax}{\cos bx}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin bx}{\sin ax}$

$=\dfrac{a}{b}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{bx}{ax}$

例5 求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\tan x}{\tan 3x}$. $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

解 $原式=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec^2 x}{3\sec^2 3x}=\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 3x}{\cos^2 x}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-6\cos 3x\sin 3x}{-2\cos x\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 6x}{\sin 2x}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{6\cos 6x}{2\cos 2x}=3.$$

使用洛必达法则三点注意

中国大学MOOC

- 1. 不是不定性不能使用该法则，检查每一步是否都为不定性。
- 2. 洛必达法则条件为充分条件，非必要。因此求导过后极限不存在不能说明原极限不存在。只能说明不应该用洛必达法则
- 3.综合运用各种恒等变形、变量代换、因式分解、等价无穷小替换等各种方法

例6 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^2\tan x}$.

解 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x - x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sec^2 x - 1}{3x^2}$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{x^2}=\frac{1}{3}.$$

其他不定型的计算

一、$0\cdot\infty$型

二、$\infty-\infty$型

三、$0^0,1^\infty$，∞^0型

关键:将其它类型不定型化为洛必达法则可解决的类型 $(\frac{0}{0}),(\frac{\infty}{\infty})$

一、$0\cdot\infty$ 型

解法步骤: $0\cdot\infty \Rightarrow \frac{1}{\infty}\cdot\infty$, 或 $0\cdot\infty \Rightarrow 0\cdot\frac{1}{0}$.

例1 求 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-2}e^{x}$. $(0\cdot\infty)$

解 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$

二. $\infty-\infty$ 型

解法步骤: $\infty-\infty \Rightarrow \dfrac{1}{0}-\dfrac{1}{0} \Rightarrow \dfrac{0-0}{0\cdot 0}$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$. $(\infty-\infty)$

解 $$原式=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{2x}=0.$$

三、$0^0, 1^\infty, \infty^0$ 型

解法步骤：
$$\left.\begin{matrix} 0^0 \\ 1^\infty \\ \infty^0 \end{matrix}\right\} \xrightarrow{f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}} \begin{cases} 0\cdot\ln 0 \\ \infty\cdot\ln 1 \Rightarrow 0\cdot\infty. \\ 0\cdot\ln\infty \end{cases}$$

或令 $y = f(x)^{g(x)}$，再两边取对数 $\Rightarrow \ln y = g(x)\ln f(x)$

两边取极限： $\lim \ln y = \lim[g(x)\ln f(x)]$

$$\Rightarrow \lim y = e^{\lim[g(x)\ln f(x)]}$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$. (0^0)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

$= e^{\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = e^0 = 1.$

例4 求 $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$. (1^∞)

解 原式 $= \lim\limits_{x\to 1} e^{\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1}} = e^{-1}.$

例5 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$. (∞^0)

解 令 $y=(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$ $\Rightarrow$ $\ln y=\dfrac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)$

$$\because \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}\cdot\ln(\cot x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\dfrac{1}{\cot x}\cdot\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\dfrac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{\cos x\cdot\sin x}=-1,$$

$\therefore$ 原式 $=e^{-1}$.

例6 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\cos x}{x}$.

极限不存在

解 $原式=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-\sin x}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}(1-\sin x)$.

洛必达法则失效。

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\cos x\right)=1.$$

例7 求 $\lim\limits_{x\to1^+}[\ln x\cdot\ln(x-1)]$. $(0\cdot\infty)$

解 将原式变形为 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{\ln(x-1)}}\Rightarrow\left(\dfrac{0}{0}\text{型}\right)$;

若变为 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}\Rightarrow\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$.是化为$\dfrac{0}{0}$型还是化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型?应视分子,分母导数的繁简来确定.

此题化为$\dfrac{\infty}{\infty}$型较为适宜.

$$\lim_{x\to1^+}\left[\ln x\cdot\ln(x-1)\right]=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln(x-1)}{\dfrac{1}{\ln x}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\dfrac{1}{x-1}}{-\dfrac{1}{x\ln^2 x}}=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln^2 x}{1-x}$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln^2 x+x\cdot 2\ln x\cdot\dfrac{1}{x}}{-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln^2 x+2\ln x}{-1}$$

例8 求$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$. ($\infty-\infty$型)

解 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x\left(e^x-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{2x}$

$=\frac{1}{2}$