第三讲 平 面

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程
3. 截距式方程

平面与平面的位置关系

内容小结

3. 截距式方程

例 1 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解1 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

将$A=-\frac{D}{a}$, $B=-\frac{D}{b}$, $C=-\frac{D}{c}$,

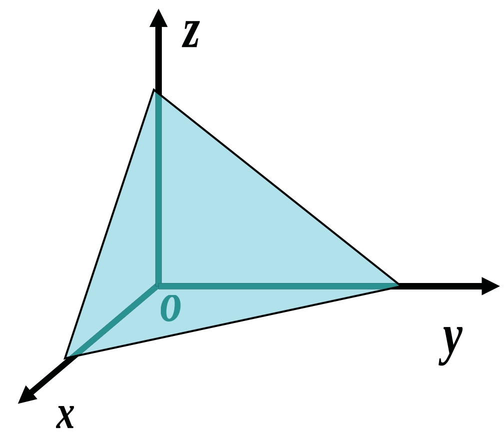
代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

例2 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解1 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$$\because V=1, \quad \therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|abc|=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$

化简得 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}$，令 $\dfrac{1}{6a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right|\Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=\pm1,\ b=\pm6,\ c=\pm1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm6.$

解2 已知平面的法向量为 $\vec{n}=(6,1,6)$

与已知平面平行，所求平面可写为

$$6x+y+6z=d$$

$$\Rightarrow \frac{x}{d/6}+\frac{y}{d}+\frac{z}{d/6}=1$$

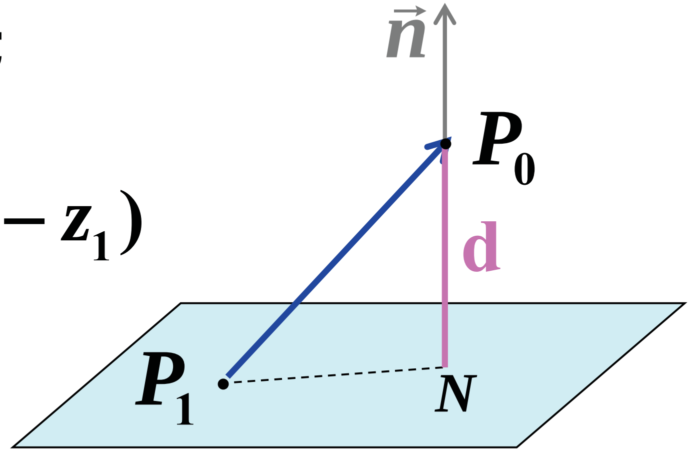
$$\because V=1, \quad \therefore \frac{1}{6}\left|\frac{d}{6}\cdot d\cdot\frac{d}{6}\right|=1 \Rightarrow d=\pm 6$$

例 3 求点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离.

解 $\forall \ P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$



$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$d = |\mathrm{Pr}\, j_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= |\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{e}_n|$$

$$= \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\because Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0 \qquad (\ P_1 \in \pi)$$

$$\therefore d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

--------点到平面距离公式

主要内容

1. 平面的截距式方程
2. 点到平面的距离

练习 设平面π在三个坐标轴上的截距均为1，π与三个坐标面围成一个四面体，求:

(1)内切于该四面体的球面的球心；

(2) 写出该球面的方程.

答案: (1) 球心坐标 $\left(\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6},\frac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$;

（2）球面方程

$$(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2=(\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2$$