二阶非齐次线性方程

一、二阶非齐次线性方程解的结构

二、$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$型

三、$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型

二阶非齐次线性方程解的结构: $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$

n 阶线性方程组 $A \in R_{n\times n} : y \in R^n \mapsto f \in R^n$

齐次方程与非齐次方程解的关系?

二阶非齐次线性方程解的结构:

定理1 设 y^* 是二阶非齐次线性方程

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \qquad (1)$$

的一个特解，Y 是与(1)对应的齐次方程的通解，则 $y = Y + y^*$ 是二阶非齐次线性微分方程(1)的通解.

定理 2 设 y_1 与 y_2 是二阶非齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ 的两个解，则 $y_1 - y_2$ 是对应齐次方程 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 的解.

定理 3 设非齐次方程(1)的右端 $f(x)$ 是几个函数之和，如

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

而 y_1^* 与 y_2^* 分别是方程

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_1(x)$$

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=f_2(x)$$

的特解，则 $y_1^*+y_2^*$ 就是原方程的特解.

叠加原理

二阶常系数非齐次线性方程: $y''+py'+qy=f(x)$

Euler, 1750

常数变易法?

! 通解:

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(s)y_2(x)-y_1(x)y_2(s)}{y_1(s)y_2{}'(s)-y_1{}'(s)y_2(s)}f(s)\mathrm{d}s$$

$f(x)$的两种简单类型:

$$f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$$

m次多项式

$$f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$$

l,n次多项式

一. $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 型: $y''+py'+qy=e^{\lambda x}P_m(x)$

对应齐次方程: $y''+py'+qy=0,$

非齐次方程通解: $y=\underline{Y}+\underline{y^*},$

齐次方程的通解　　非齐次方程的特解

非齐次方程特解 y^* 的求法: 待定系数法

设非齐次方程特解为 $y^*=Q(x)e^{\lambda x}$ 代入原方程

$$Q''(x)+\underline{(2\lambda+p)Q'(x)}+\underline{(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)}=P_m(x)$$

(1) 若 λ 不是特征方程的根: $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0,$

可设 $Q(x)=Q_m(x)$, $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$;

(2) 若 λ 是特征方程的单根: $\lambda^2+p\lambda+q=0,\ 2\lambda+p\neq 0,$

可设 $Q(x)=xQ_m(x)$, $y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$;

(3) 若λ是特征方程的重根: $\lambda^2 + p\lambda + q = 0,\ 2\lambda + p = 0,$

可设 $Q(x) = x^2 Q_m(x)$, $y^* = x^2 Q_m(x) e^{\lambda x}$.

总结如下: $y'' + py' + qy = e^{\lambda x} P_m(x)$

设 $y^* = x^k e^{\lambda x} Q_m(x)$, $k = \begin{cases} 0 & \lambda\text{不是根} \\ 1 & \lambda\text{是单根}, \\ 2 & \lambda\text{是重根} \end{cases}$ (k是根的重数)

上述结论可推广到n阶常系数非齐次线性微分方程.

例1 求方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x}$ 的通解.

解. 特征方程 $r^2 - 3r + 2 = 0$,

特征根 $r_1 = 1,\ r_2 = 2$,

对应齐次方程通解: $Y = C_1e^x + C_2e^{2x}$.

$\because \lambda = 2$ 是单根，设 $y^* = x(Ax + B)e^{2x}$,

代入方程, 得 $2Ax + B + 2A = x$ $\therefore \begin{cases} A = \dfrac{1}{2}, \\ B = -1 \end{cases}$

于是 $y^* = x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$

原方程通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{2x} + x(\frac{1}{2}x - 1)e^{2x}$.

例2. 写出下列微分方程的特解的形式

(1) $y''-y'-2y=xe^{x}$;

解. 对应齐次方程的特征方程为: $r^{2}-r-2=0,\ \Rightarrow r_{1}=-1, r_{2}=2.$

$\lambda=1$不是特征方程的根,故$k=0$. 故 $y^{*}=\left(Ax+B\right)e^{x}$.

(2) $y''+y'-2y=xe^{x}$;

解. 对应齐次方程的特征方程为: $r^{2}+r-2=0,\ \Rightarrow r_{1}=1, r_{2}=-2.$

$\lambda=1$是特征方程的单根,故$k=1$. 故 $y^{*}=x\left(Ax+B\right)e^{x}$.

(3) $y''-2y'+y=xe^{x}$.

解. 对应齐次方程的特征方程为: $r^{2}-2r+1=0,\Rightarrow r_{1,2}=1.$

$\lambda=1$是特征方程的二重根,故$k=2$, 故 $y^{*}=x^{2}\left(Ax+B\right)e^{x}$.

例3 写出微分方程 $y''-4y'+4y=6x^2+8e^{2x}$ 的待定特解的形式.

解. 设 $y''-4y'+4y=6x^2$ 的特解为 y_1^*

设 $y''-4y'+4y=8e^{2x}$的特解为 y_2^*

则所求特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*$

$\because r^2-4r+4=0$ $\therefore$ 特征根 $r_{1,2}=2$

$\therefore y_1^*=Ax^2+Bx+C \quad y_2^*=Dx^2e^{2x}$

$$y^*=y_1^*+y_2^*=Ax^2+Bx+C+Dx^2e^{2x}.$$

$$y'' + py' + qy = f(x)$$

二. $f(x) = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 型

Euler公式: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$

非齐次方程 $y'' + py' + qy = e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x]$ 的特解形式为:

$$\boxed{y^* = x^k e^{\lambda x}[R_m^{(1)}(x)\cos\omega x + R_m^{(2)}(x)\sin\omega x]}$$

其中 $R_m^{(1)}(x), R_m^{(2)}(x)$是$m$次多项式, $m = \max\{l, n\}$

$$k = \begin{cases} 0 & \lambda + i\omega\text{不是根}, \\ 1 & \lambda + i\omega\text{是根}. \end{cases}$$

例4. 求微分方程$y''-4y'+3y=xe^{2x}\cos 3x$ 的通解.

解 对应齐次方程 $y''-4y'+3y=0 \Rightarrow r^2-4r+3=0, \Rightarrow r_1=1, r_2=3.$

齐次方程的通解为 $Y=C_1e^x+C_2e^{3x}.$

$\lambda=2, \omega=3, \quad \lambda+i\omega=2+3i$不是特征方程的根.

$\therefore \quad y^*=e^{2x}\left[(ax+b)\cos 3x+(cx+d)\sin 3x\right]$

将$y^*,(y^*)',(y^*)''$代入原方程并消去e^{2x}可得:

$(-10ax-10b+bc)\cos 3x+(-10cx-6a-10d)\sin 3x=x\cos 3x.$

比较系数可得$-10a=1, -10b+bc=0, -10c=0, -6a-10d=0.$

$\xrightarrow{\text{解得}} a=-\frac{1}{10}, b=c=0, d=\frac{3}{50}. \qquad \therefore y^*=e^{2x}\left[-\frac{x}{10}\cos 3x+\frac{3}{50}\sin 3x\right].$

通解: $y=Y+y^*=C_1e^x+C_2e^{3x}+e^{2x}\left[-\frac{x}{10}\cos 3x+\frac{3}{50}\sin 3x\right].$

例5 .求微分方程$y''+y=(3x+1)\cos 2x$ 的一个特解.

解　此方程属 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 型.

$(\lambda=0,\omega=2,P_l(x)=(3x+1),P_n(x)=0)$.

其特征方程为　$r^2+1=0,\xrightarrow{\text{特征方程的根}} r_{1,2}=\pm i.$

$\lambda+i\omega=2i$ 不是特征根, $\Rightarrow k=0.$

$\Rightarrow y^*=(ax+b)\cos 2x+(cx+d)\sin 2x.$

将y^*代入原方程并比较系数可得其特解:

$$y^*=-\left(x+\frac{1}{3}\right)\cos 2x+\frac{4}{3}\sin 2x.$$

练习:

1.设 $y=e^{x}(c_1\sin x+c_2\cos x)$ 为二阶常系数齐次微分方程的通解，则该方程为____.

2.方程 $yy''+(y')^2=0$ 满足初始条件 $y|_{x=0}=1, y'|_{x=0}=\frac{1}{2}$ 的特解为____.

3.方程 $xy''+2y'=e^{x}+6x$ 满足 $y(1)=e, y'(1)=1$ 的特解为______.

4.方程 $y''+4y=2\cos^2 x$ 的通解为________.

欧拉方程

一、欧拉方程的一般形式

二、欧拉方程的解法

一、 Euler方程的一般形式(变系数线性方程)

Lagrange, 1762

形如

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

的方程(其中 $p_1, p_2 \cdots p_n$ 为常数) 叫Euler方程.

特点: 各项未知函数导数的阶数与乘积因子自变量的幂指数相同.

解法: 变量代换 变系数 化为 常系数 微分方程.

什么变换可行?

二、欧拉方程的解法

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1} x y' + p_n y = f(x)$$

作变量变换$x = e^t$或$t = \ln x$. 将自变量换为t

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right),$$

$$\cdots\cdots$$

用D表示对自变量t求导的运算$\dfrac{d}{dt}$,上述结果可以写为

$$xy' = Dy,$$

$$x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} = (D^2 - D)y = D(D-1)y$$

$$x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = (D^3 - 3D^2 + 2D)y = D(D-1)(D-2)y$$

$$\cdots\cdots$$

一般地，$x^k y^{(k)} = D(D-1)\cdots(D-k+1)y.$

将上式代入Euler方程，则化为以t为自变量的常系数线性微分方程.求出这个方程的解后，把t换为$\ln x$,即得到原方程的解.

例1 求欧拉方程 $x^3y''' + x^2y'' - 4xy' = 3x^2$ 的通解.

解. 作变量变换$x = e^t$或$t = \ln x$.

原方程化为 $D(D-1)(D-2)y + D(D-1)y - 4Dy = 3e^{2t}$,

即 $D^3y - 2D^2y - 3Dy = 3e^{2t}$, 或 $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 2\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} = 3e^{2t}$. (1)

方程(1)所对应的齐次方程为 $\dfrac{d^3y}{dt^3} - 2\dfrac{d^2y}{dt^2} - 3\dfrac{dy}{dt} = 0$,

其特征方程$r^3 - 2r^2 - 3r = 0$. 特征方程的根为$r_1 = 0, r_2 = -1, r_3 = 3$.

故齐次方程的通解为: $Y = C_1 + C_2e^{-t} + C_3e^{3t} = C_1 + \dfrac{C_2}{x} + C_3x^3$.

设特解为$y^* = be^{2t} = bx^2$,

代入原方程，得 $b = -\dfrac{1}{2}$. 即 $y^* = -\dfrac{x^2}{2}$,

所给Euler方程的通解为 $y = C_1 + \dfrac{C_2}{x} + C_3x^3 - \dfrac{1}{2}x^2$.

例2. 求$y''-\frac{3}{x}y'-\frac{5}{x^2}y=3$的通解.

解. $x^2y''-3xy'-5y=3x^2$, 令$x=e^t, t=\ln x, \Rightarrow D(D-1)y-3Dy-5y=3e^{2t}$

$\Rightarrow D^2y-4Dy-5y=3e^{2t} \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}-5y=3e^{2t}.$

先求对应的齐次方程的$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}-5y=0$的通解$Y$:

$r^2-4r-5=0 \Rightarrow r_1=5, r_2=-1$, 故$Y=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}$.

再求非齐次方程$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}-5y=3e^{2t}$的特解, 特解形式 $y^*=t^kQ_m(t)e^{\lambda t}$

$\lambda=2$不是特征方程的根$\Rightarrow k=0$. 故 $y^*=Ae^{2t}$.

将其代入方程$\frac{d^2y}{dt^2}-4\frac{dy}{dt}-5y=3e^{2t}$, $\Rightarrow A=-\frac{1}{3}$, $y^*=-\frac{1}{3}e^{2t}$.

故原方程的通解为: $y=Y+y^*=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}-\frac{1}{3}e^{2t}=C_1x^5+C_2\frac{1}{x}-\frac{1}{3}x^2$.

例3. 求解方程 $x^2y''-3xy'-5y=x^2\ln x$.

解. 令 $t=\ln x, x=e^t$, 代入原方程得 $D(D-1)y-3Dy-5y=te^{2t}$.

即 $y_t''-4y_t'-5y=te^{2t}$ (1) 相应的齐次方程为: $y_t''-4y_t'-5y=0$.

其特征方程为: $r^2-4r-5=0$, 特征根: $r_1=5,\quad r_2=-1$.

齐次方程的通解为: $Y=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}$.

设(1)的特解为: $y^*=(at+b)e^{2t}$,

则 $(y^*)'=e^{2t}(2at+a+2b)$, $(y^*)''=e^{2t}(4at+4a+4b)$.

将 $y^*, (y^*)', (y^*)''$ 代入原方程得 $-9at-9b=t$, $\therefore\quad a=-\dfrac{1}{9},\quad b=0$,

$$\Rightarrow y^*=-\frac{1}{9}te^{2t},$$

得(1)的通解为: $y=C_1e^{5t}+C_2e^{-t}-\dfrac{1}{9}te^{2t}$.

故原方程的通解为: $y=C_1x^5+\dfrac{C_2}{x}-\dfrac{1}{9}x^2\ln x$.