电子科技大学

University of Electronic Science and Technology of China

中国大学MOOC

映射与函数

电子科技大学数学科学学院

一、集合

1、概念

具有某种特定性质并且可以彼此区别的事物的总体，称为集合.

集合里的每一个事物称为集合的元素.

若某个元素x属于集合A, 则记作$x \in A$;

若某个元素x不属于集合A, 则记作$x \notin A$.

例如： $-2 \notin R^{+}$, $4 \in N$.

2、集合的表示法

(1) 列举法：按任意顺序列出集合的所有元素，

并用花括号括起来.

有限集合

例如：$A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{1,2\}$.

(2) 描述法：设$P(a)$为某个与a有关的条件或法则，A为满足$P(a)$的一切a构成的集合，

则记为$A=\{a \mid P(a)\}$.

无限集合

例如 $A=\{x \mid x=2n+1,\ n\in N\}$，

通常用文氏图表示集合与集合之间关系.

3、全集与空集

由所研究的所有对象构成的集合称为**全集**，**记为I.**

不含任何元素的集合称为**空集**，**记作Φ.**

例如：$\left\{x \middle| x^2+1=0,\ x \in R\right\}=\Phi.$

4、子集

如果集合A的任一元素都是集合B的元素，

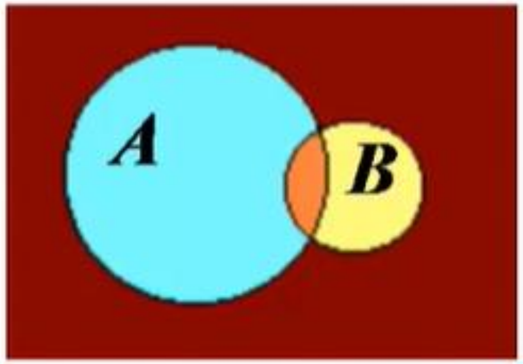
则称A是B的子集. 记作$A \subset B$，或$B \supset A$.

空集为任意集合A的子集，即$\Phi \subseteq A$.

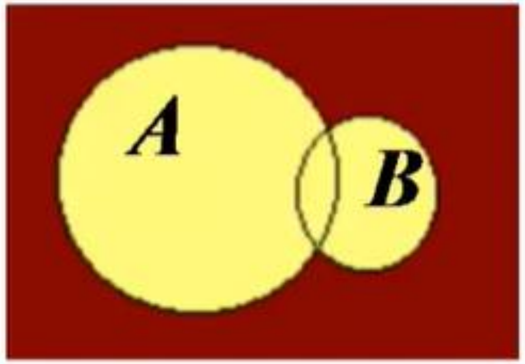
若A与B互为子集，即$A \subseteq B$，且$B \subseteq A$，则称**集合A与B相等，记作$A = B$或$B = A$.**

5、集合的运算

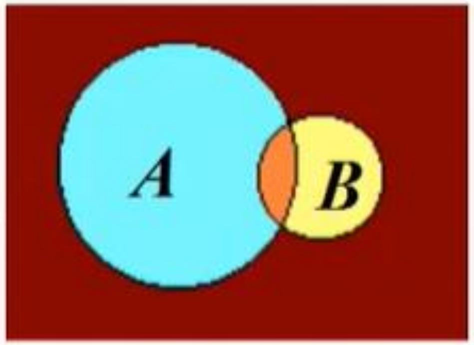
交集: $A \cap B = \{x | x \in A \text{且} x \in B\}$;



并集: $A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\}$;



差集: $A - B = \{x \mid x \in A \text{且} x \notin B\}$.



例1 设$A = \{1,2,4,6\}$, $B = \{2,4,7\}$.

则$A - B = \{1,6\}$, $B - A = \{7\}$.

补集: $C_A = \{x \mid x \in I \text{且} x \notin A\}$.

显然$A \cup C_A = I$, $A \cap C_A = \Phi$.

6、集合的笛卡尔乘积

设A与B是两个非空集合，$x\in A$，$y\in B$，所有二元有序元素组(x,y)构成的集合，称为A与B的**笛卡尔乘积(直积)，记作$A\times B$**，即

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,x\in A, y\in B\}.$$

例2　设$A=\{1,2,3\}$，$B=\{2,3\}$.

则$A\times B=\{(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$

$$B\times B=\{(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\}$$

$R\times R=\{(x,y)\,|\,x\in R, y\in R\}\Rightarrow$ 表示xoy平面上所有点的集合,$R\times R$常记作R^2.

映射与函数

二、数集

1、概念

元素全部是数的集合称为**数集**.

N----自然数集　　Z----整数集

Q----有理数集　　R----实数集

2、逻辑量词：

$\forall$：表示 "对每一个…" 或 "对任意的…"

或 "对所有的…"

$\exists$：表示 "存在…"

例如：$\forall x \in R$, $\exists y \in R$, 使得 $x + y = 4$.

3、绝对值

$$\forall x \in R,\ |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

性质：(1) $|x| \geq 0$, $|-x| = |x|$.

(2) $-|x| \leq x \leq |x|$.

(3) $\sqrt{x^2} = |x|$.

(4) 若 $a > 0$，则 $\{x \mid |x| < a\} = \{x \mid -a < x < a\}$,

$\{x \mid |x| > a\} = \{x \mid x < -a\} \cup \{x \mid x > a\}$.

(5) $|x + y| \leq |x| + |y|$, $|x - y| \geq |x| - |y|$.

(6) $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}, (y \neq 0)$.

4、区间

区间： 是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

$\forall a,b \in R$, 且 $a < b$.

$\{x \mid a < x < b\}$ 称为开区间, 记作 (a,b).

$\{x \mid a \le x \le b\}$ 称为闭区间, 记作 $[a,b]$.

$\{x | a \le x < b\}$ 称为半开区间，记作$[a,b)$.

$\{x | a < x \le b\}$ 称为半开区间，记作$(a,b]$.

有限区间

$[a,+\infty) = \{x | a \le x\}$ $\quad$ $(-\infty,b) = \{x | x < b\}$

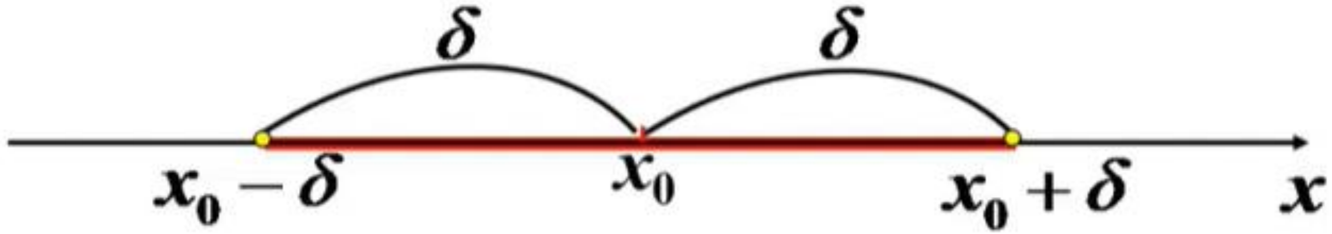
无限区间

5、邻域：设x_0与δ是两个实数，且$\delta > 0$.

数集$\{x \mid |x - x_0| < \delta\}$称为**点$x_0$的$\delta$邻域**，

点x_0叫做**邻域的中心**，δ叫做**邻域的半径**.

$$U(x_0,\delta) = \{x \mid x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\}.$$



点x_0的去心的δ邻域，记作$U^0(x_0,\delta)$

$$U^0(x_0,\delta) = \{x \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

映射与函数

三、映射

1、定义

设X与Y为两个非空集合，如果按照某种确定的法则f,对于集合X中的任何一个元素x,在集合Y中都有惟一的元素y与之对应，则称f为从集合X到集合Y的映射，记作

$$f:X\to Y$$

或 $$f:x\mapsto y=f(x),x\in X$$

其中元素y称为元素x在映射f下的**像**,元素x称为元素y在映射f下的**原像**(或**逆像**).

X称为映射f的定义域,记作$D(f)=X$,Y中像y的全体称为映射f的值域,记为$R(f)$或$f(X)$.

注意:$R(f)\subseteq Y$,像唯一,原像不一定唯一,不要求集合Y中每一个元素都有原像.

2、满射

如果映射f的值域$R(f)=Y$,则称f是X到Y上的映射或X到Y的满射.即Y中每个元素都有原像.

3、单射

如果对于每个$y\in R(f)$,有唯一的原像$x\in X$,则称f是X到Y的单射.即要求不同x有不同的像.

4、一一映射

如果从集合X到集合Y的映射f,既是单射又是满射,则称f为从X到Y的一一映射.

5、复合映射

设φ是从集合X到集合U_1的映射,f是从集合U_2($U_1 \subseteq U_2$)到集合Y的映射,则从X到Y存在一种确定的法则,使得对集合X中的任何一个元素x,在集合Y中都有惟一的元素y与之对应,这里$y=f\left[\varphi(x)\right]$,则称从$X$到$Y$的这种映射为复合映射(或映射的乘积).记

$$f\circ\varphi : X \to Y$$

或 $$f\circ\varphi : x \mapsto y = f\left[\varphi(x)\right], x \in X$$

6、逆映射

设f为从集合X到集合Y的一一映射,对于Y中的任何一个y,在X中都有惟一的元素x与之对应,这里的x满足$f(x)=y$,则称从Y到X的这种映射为f的**逆映射**.记作

$$f^{-1}:Y\to X$$

或
$$f^{-1}:y\mapsto x=f^{-1}(y),y\in Y$$

由定义有:

$$f^{-1}[f(x)]=(f^{-1}\circ f)(x)=x$$

$$f[f^{-1}(y)]=(f\circ f^{-1})(y)=y$$

映射与函数

一、集合
二、数集
三、映射
四、函数
五、函数的几种简单性质
六、反函数与复合函数
七、初等函数

四、函数

定义：若D是一个非空实数集合，设有一个对应规则f，使每一个$x \in D$，都有一个确定的实数y与之对应，则称f为定义在D上的一个函数，或称变量y是变量x的函数.

记作$y = f(x)$，$x \in D$.

x称为自变量，y称为因变量.

集合D称为函数的定义域，也可以记作D_f.

当$x_0 \in D_f$时，与x_0对应的数值y_0称为函数

$y = f(x)$在$x = x_0$处的函数值，记作$y_0 = f(x_0)$

或 $y_0 = y\big|_{x=x_0}$.

全体函数值的集合$Z_f = \{y \mid y = f(x), x \in D_f\}$,

称为函数的值域.

当$X \subset R$，$Y \subset R$时，$f(x)$为一元函数；

当$X \subset R^2$，$Y \subset R$时，f为二元函数，

记为$y = f(x_1, x_2)$；

当$X \subset R^n, Y \subset R$时，$f$为$n$元函数，

记为$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$.

函数的两个要素：

- 对应规律 f；● 定义域 D_f；

两个函数只要 f 和 D_f 相同，则这两个函数必相等.

例如 $f(x)=1,\ x\in(-\infty,+\infty)$ 与

$$h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

表现形式不同，却是两个相同的函数.

$y=x$与$y=\dfrac{x^2}{x}$不是相同的函数，因为定义域不同.

定义域是自变量所能取的使算式有意义的一切实数值.

例4 设 $f(x)=x^2+x-1$，求 $f(1)$，$f(a)$，$f(x+1)$，$f\left(-\frac{1}{y}\right)$，$f[f(x)]$.

解 $f(1)=1^2+1-1=1$

$f(a)=a^2+a-1$

$$f(x+1)=(x+1)^2+(x+1)-1$$
$$=x^2+3x+1$$

$$f\left(-\frac{1}{y}\right)=\left(-\frac{1}{y}\right)^2+\left(-\frac{1}{y}\right)-1$$

$$=\frac{1}{y^2}-\frac{1}{y}-1$$

$$f[f(x)]=[f(x)]^2+[f(x)]-1$$

$$=(x^2+x-1)^2+(x^2+x-1)-1$$

$$=x^4+2x^3-1$$

如果自变量在定义域内任取一个数值时，

对应的函数值总是只有一个，叫做单值函数，

否则叫做多值函数.

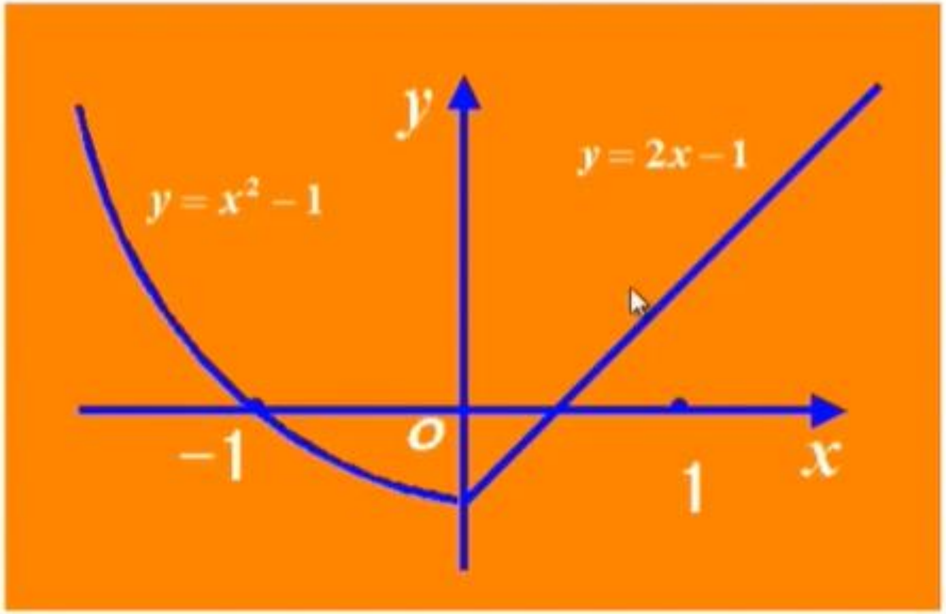
例如：$y=\pm\sqrt{2-x^2}$.

定义：点集$C=\{(x,y)\mid y=f(x),\ x\in D\}$称为

函数$y=f(x)$的图形.

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同的式子来表示的函数，称为**分段函数**.

例如，$f(x)=\begin{cases}2x-1, & x>0\\ x^2-1, & x\le 0\end{cases}$ $D=(-\infty,+\infty)$



例5 设 $f(x)=\begin{cases} x+2 & 0\le x\le 2 \\ x^2 & 2<x\le 4 \end{cases}$,

求D_f及$f(1), f(2), f(3), f(x-1)$.

解 $D_f=[0,2]\cup(2,4]=[0,4]$

$f(1)=1+2=3,\ f(2)=2+2=4,\ f(3)=3^2=9$

$$f(x-1)=\begin{cases} (x-1)+2 & 0\le x-1\le 2 \\ (x-1)^2 & 2<x-1\le 4 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} x+1 & 1\le x\le 3 \\ (x-1)^2 & 3<x\le 5 \end{cases}$$

例6 用分段函数表示 $f(x)=3-|x-1|$.

解 由绝对值定义知，

当 $x-1<0$，即 $x<1$ 时，$|x-1|=-(x-1)$

当 $x-1\geq 0$，即 $x\geq 1$ 时，$|x-1|=x-1$

$$\therefore f(x)=\begin{cases}3+(x-1) & x<1\\ 3-(x-1) & x\geq 1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}2+x & x<1\\ 4-x & x\geq 1\end{cases}$$

对应规则是用一个方程$F(x,y)=0$表示的函数

称为**隐函数.**

例如：$x^2+y^2=4$, $xy=1$, $e^x-x\sin y=0$等.

映射与函数

一、集合

二、数集

三、映射

四、函数

五、函数的几种简单性质

六、反函数与复合函数

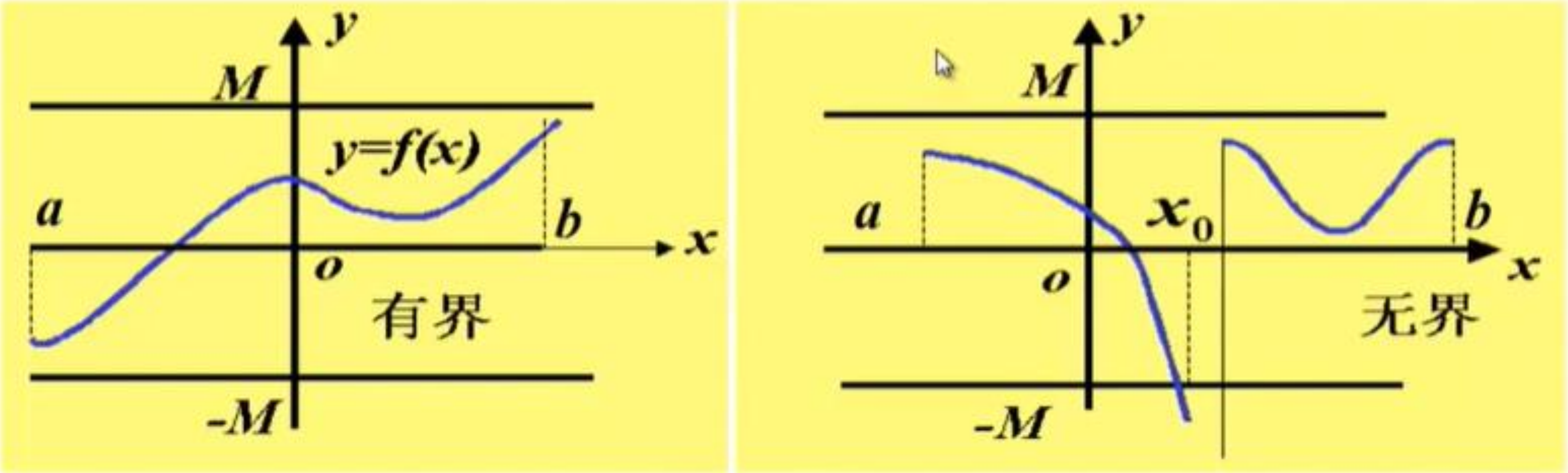
七、初等函数

五、函数的几种简单性质

1、函数的有界性

若$\exists M>0$, $\forall x\in(a,b)\subseteq D_f$, 有$|f(x)|\le M$成立,

则称函数$f(x)$在(a,b)上有界. 否则称无界.



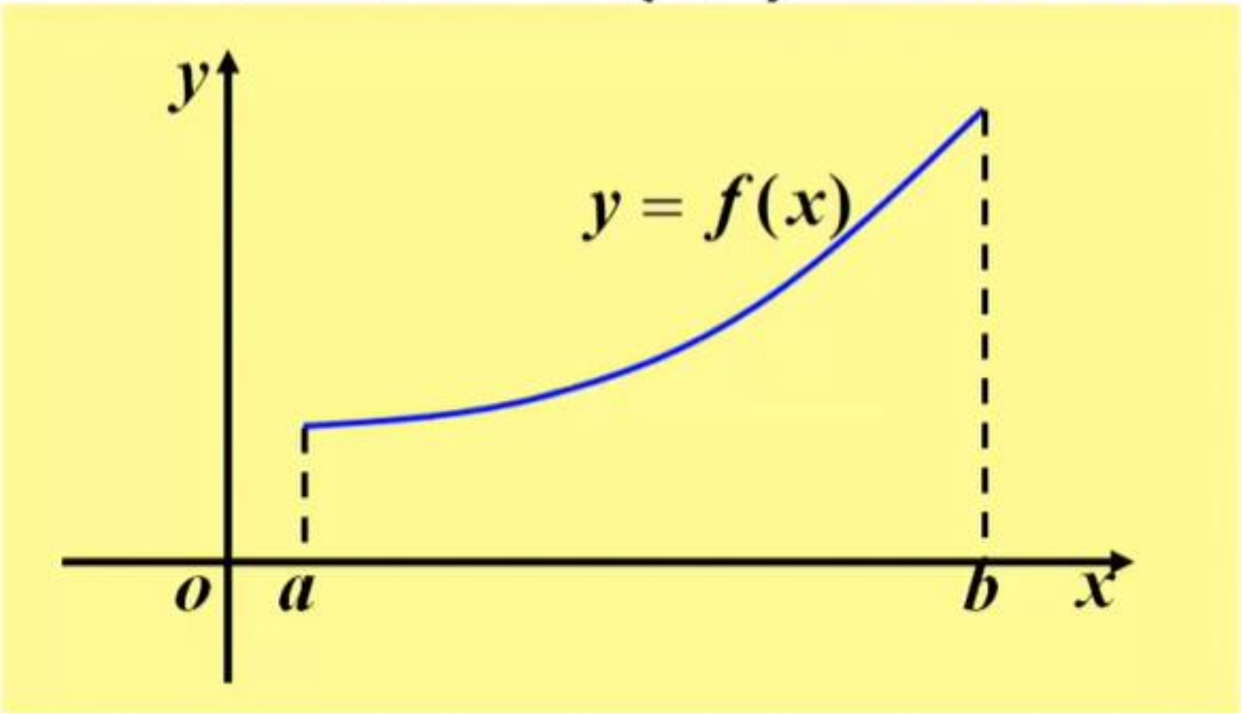
问：无界的定义应该怎么叙述?

2、函数的单调性

若$\forall x_1$、$x_2 \in (a,b) \subset D_f$，当$x_1 < x_2$时，

恒有 $f(x_1) < f(x_2)$，

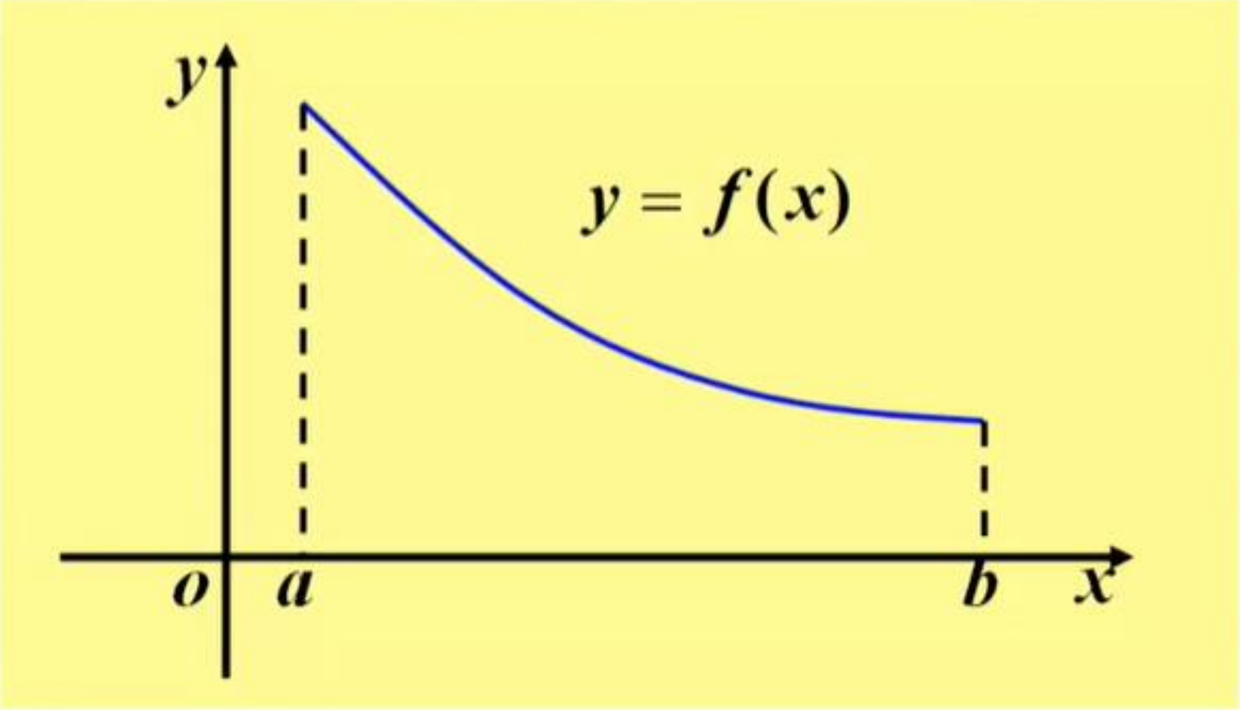
则称函数$f(x)$在区间(a,b)上是**单调增加**的；



若$\forall x_1$、$x_2 \in (a,b) \subset D_f$，当$x_1 < x_2$时，

恒有 $f(x_1) > f(x_2)$，

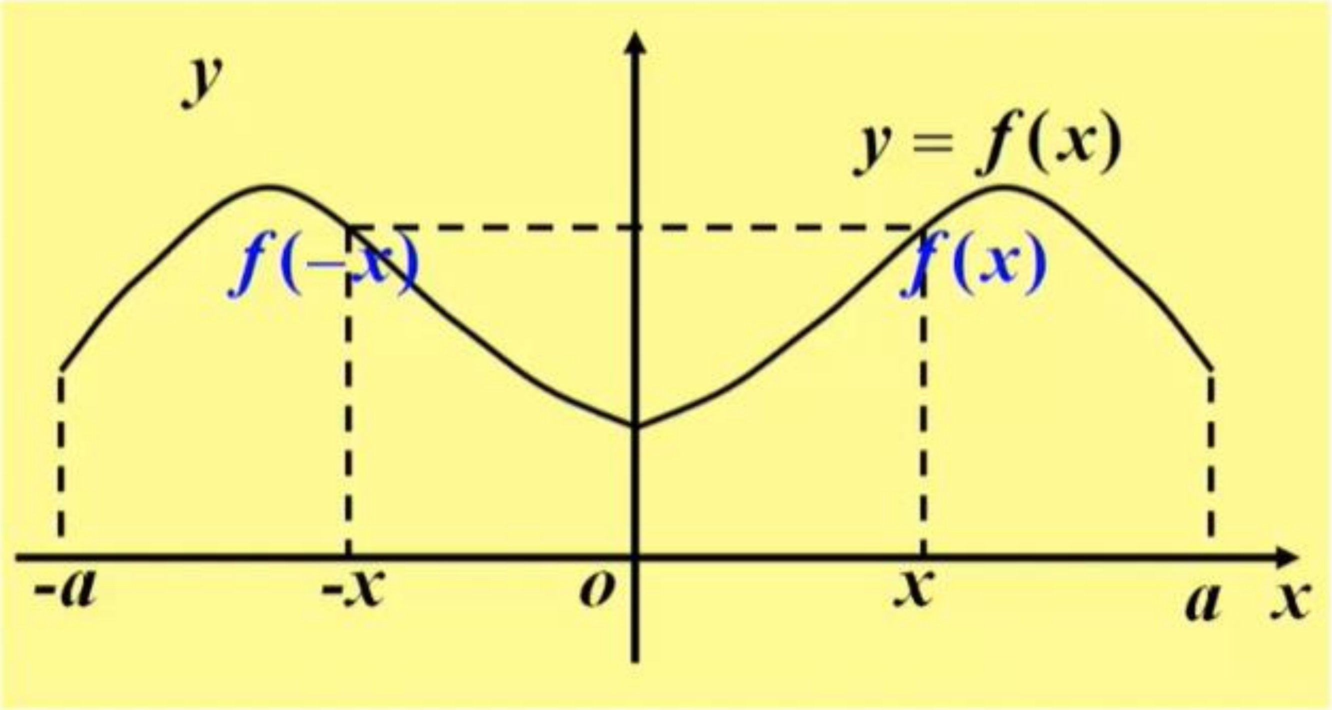
则称函数$f(x)$在区间(a,b)上是**单调减少**的.



3、函数的奇偶性

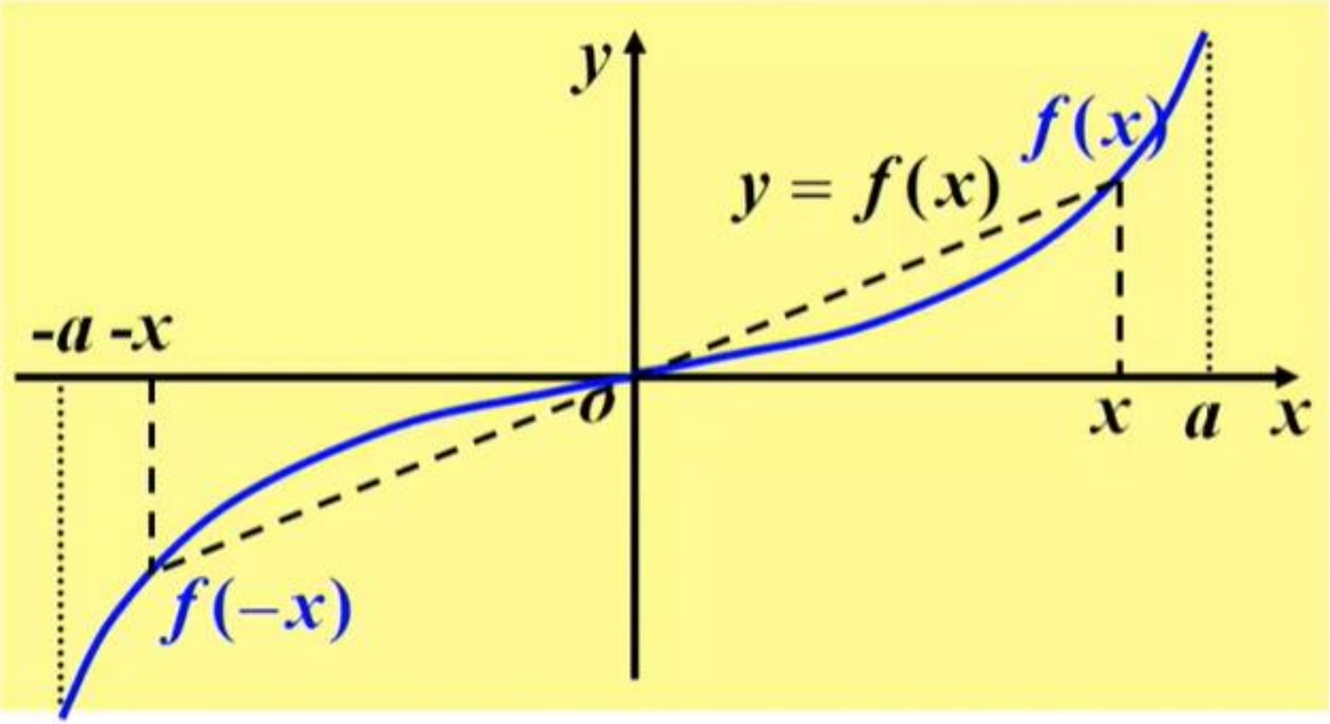
设D_f关于原点对称，若$\forall x \in D_f$，有

$f(-x) = f(x)$ 则称$f(x)$为**偶函数**.



设D_f关于原点对称，若$\forall x \in D_f$，有

$f(-x) = -f(x)$ 则称 $f(x)$为**奇函数**.



问题：奇偶函数的四则运算有什么规律？

例7 讨论下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x^2\cos x$ (2) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$

(3) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

例8 讨论下面函数的奇偶性

$$f(x)=\begin{cases} x(1-x) & x\geq 0 \\ x(1+x) & x<0 \end{cases}$$

解： $f(x)$可改写为：$\begin{cases} x-x^2 & x\ge 0 \\ x+x^2 & x<0 \end{cases}$

当$x\ge 0$时，$-x<0$，则

$$f(-x)=(-x)+(-x)^2=-x+x^2=-f(x)$$

当$x<0$时，$-x\ge 0$，则

$$f(-x)=(-x)-(-x)^2=-x-x^2=-f(x)$$

故该函数为奇函数.

4、函数的周期性：

设 $y=f(x)$，若 $\exists a>0$，使得 $f(x)=f(x+a)$

恒成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数.

满足这个等式的最小正数 a，称为函数的最小正周期(或基本周期).

映射与函数

一、集合

二、数集

三、映射

四、函数

五、函数的几种简单性质

六、反函数与复合函数

七、初等函数

六、反函数与复合函数

1、反函数

设$y=f(x)$，若$\forall\, y\in Z_f$有一个确定的且满足

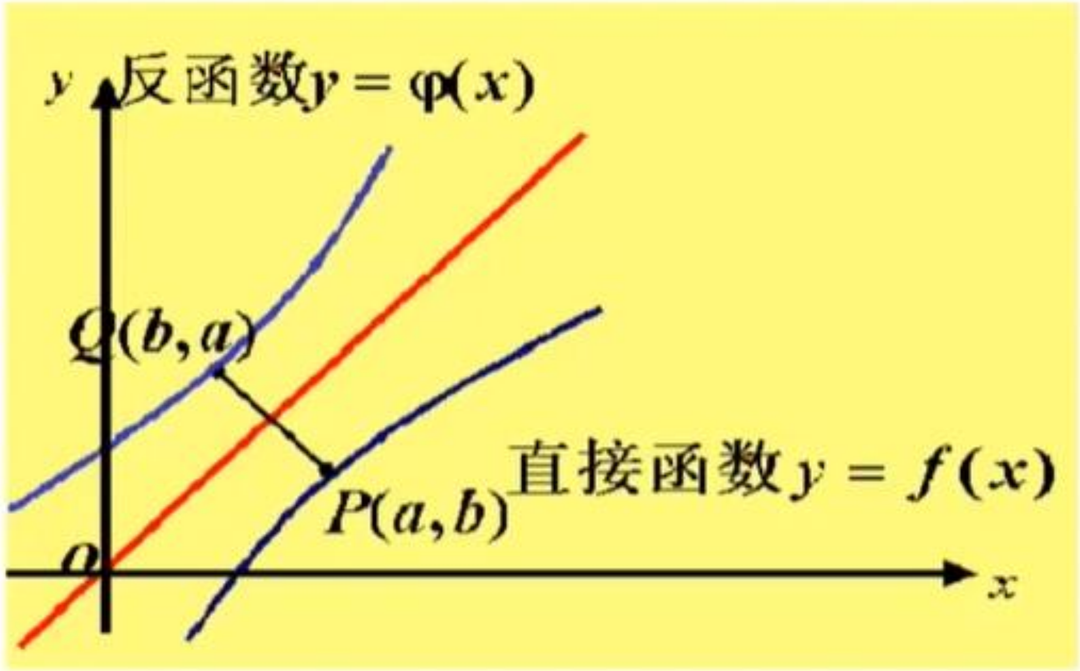
$y=f(x)$的$x\in D_f$与之对应，其对应规则记作

f^{-1}，这个定义在Z_f上的函数$x=f^{-1}(y)$称为

$y=f(x)$的反函数，或称它们互为反函数.

$y=f(x)$也称为直接函数.

直接函数与反函数的图形关于直线 $y = x$ 对称.



问题：是不是只有在整个定义域单调的函数才有反函数？

2、复合函数

设$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，称$y=f[\varphi(x)]$是由$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$复合而成的函数.

u称为中间变量，x为自变量.

例如：

$y=\sin\sqrt{x}$是由$y=\sin u, u=\sqrt{x}$复合而成的函数;

$y=\sin(\ln x)$是由$y=\sin u, u=\ln x$复合而成的函数;

$$y=\sqrt{\cot\frac{x}{2}} \qquad y=\sqrt{u},\quad u=\cot v,\quad v=\frac{x}{2}.$$

$$y=e^{\sin^2\frac{1}{x}} \qquad y=e^{u},\quad u=v^2,\quad v=\sin w,\quad w=\frac{1}{x}.$$

七、初等函数

1、基本初等函数

$y=C$，　$y=x^{\alpha}$，$y=a^{x}$，　$y=\log_a x\ (a\neq 1, a>0)$，

三角函数和反三角函数.

2、初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成，并可用一个式子表示的函数，称为初等函数.

3、双曲函数

双曲正弦：$shx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

双曲余弦：$chx = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切：$thx = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

双曲函数常用公式

$sh(x \pm y) = shxchy \pm chxshy$ ；

$ch(x \pm y) = chxchy \pm shxshy$ ；

$ch^2x - sh^2x = 1$ ；

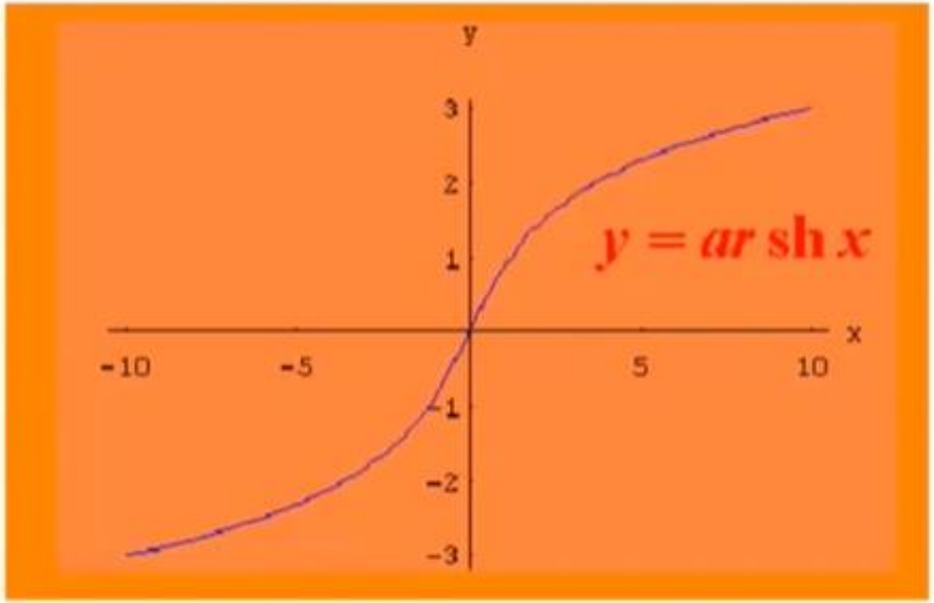
$sh2x = 2shxchx$ ；$ch2x = ch^2x + sh^2x.$

4. 反双曲函数

反双曲正弦 $y = ar\,\mathrm{sh}\,x$;

$y = ar\,\mathrm{sh}\,x$

$= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$



$D_f : (-\infty, +\infty)$

奇函数,

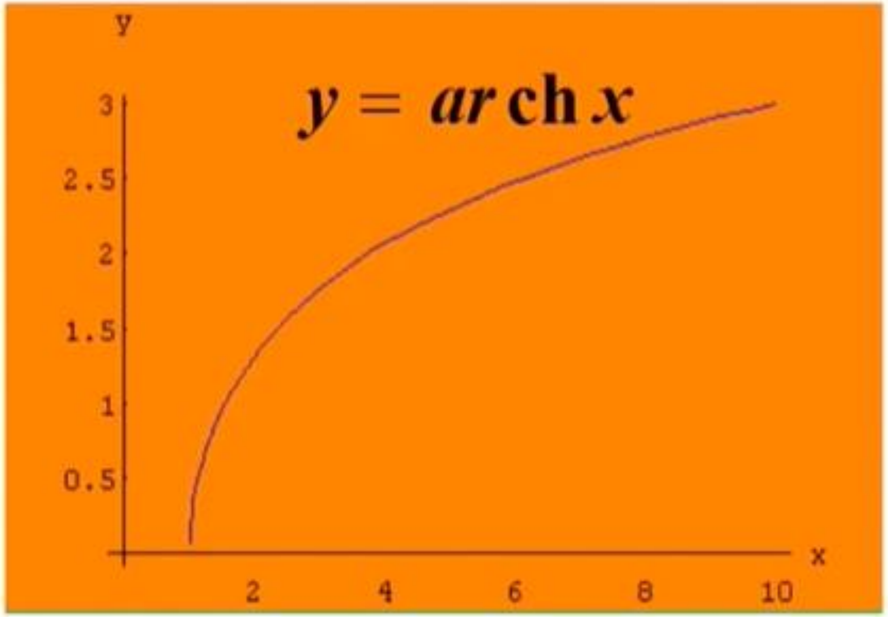
在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加.

反双曲余弦 $y = ar\operatorname{ch} x$

$$y = ar\operatorname{ch} x$$
$$= \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$D_f : [1, +\infty)$

在 $[1, +\infty)$ 内单调增加 .



反双曲正切 $y = ar\,\text{th}\,x$

$y = arthx$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

$D_f : (-1,1)$

奇函数,

在 $(-1,1)$ 内单调增加 .