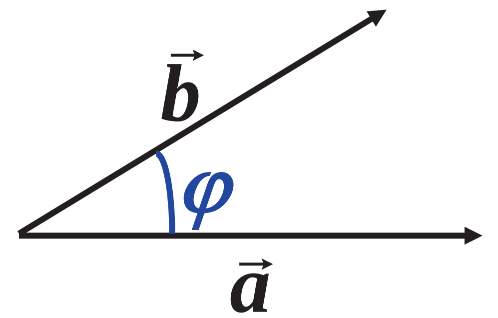
第一讲 空间直角坐标系与向量

- 空间直角坐标系
- 向量及其线性运算
- ➤ 向量在轴上的投影
- 向量线性运算的几何意义
- 向量的方向余弦
- 内容小结

三、向量在轴上的投影

1. 空间两向量的夹角

设 $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$,



向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角:

$$\varphi = \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \vec{b}, \vec{a} \rangle \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

类似地，可定义向量与数轴, 数轴与数轴的夹角.

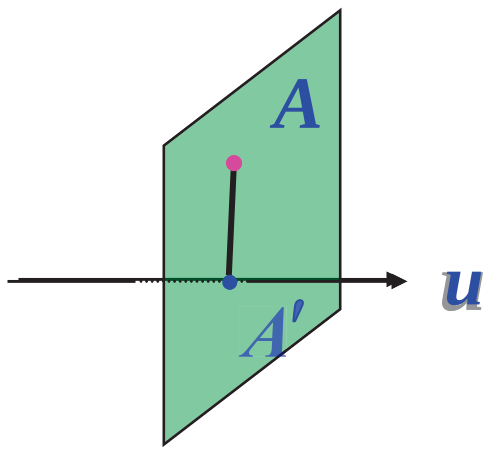
特殊地，当两个向量中有一个零向量时，规定它们的夹角可在0与 π 之间任意取值.

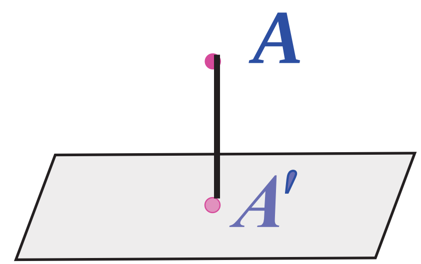
2. 空间一点在轴(平面)上的投影(射影)

过点A作u轴的垂直平面，交点A'即为点A在u轴上的投影.

(平面)　(直线)

(平面)

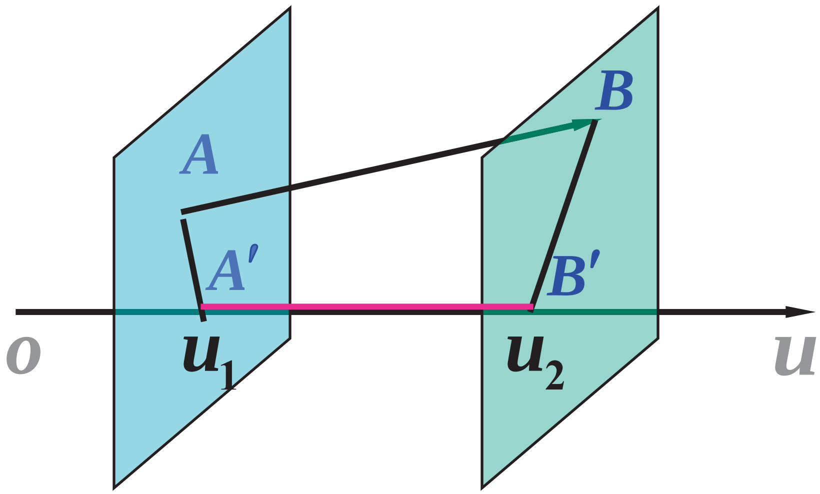




练习：$A(-4,3,5)$在xoy平面上的投影点为(-4,3,0)，在yoz面上的投影点为(0,3,5)，在y轴上的投影点为(0, 3, 0)，在z轴上的投影点为(0, 0, 5)；

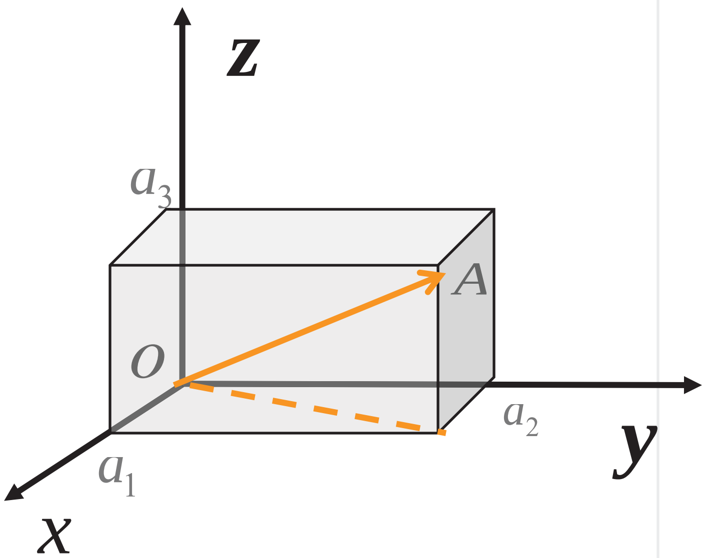
3. 向量在轴上的投影

设点A, B分别在 u 轴上的投影点为 A',B'，A',B' 在u轴上的坐标分别为u_1,u_2, 向量 $\overrightarrow{AB}$ 在 u 轴上的**投影**定义为



$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = u_2 - u_1 = \begin{cases} \|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } u \text{ 轴同向;} \\ -\|\overrightarrow{A'B'}\|, & \overrightarrow{A'B'} \text{ 与 } u \text{ 轴反向.} \end{cases}$$

设 $\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)$，则 a_1, a_2, a_3分别是 $\overrightarrow{OA}$ 在三个坐标轴上的投影.



利用勾股定理从图中可得

$$\|\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$$

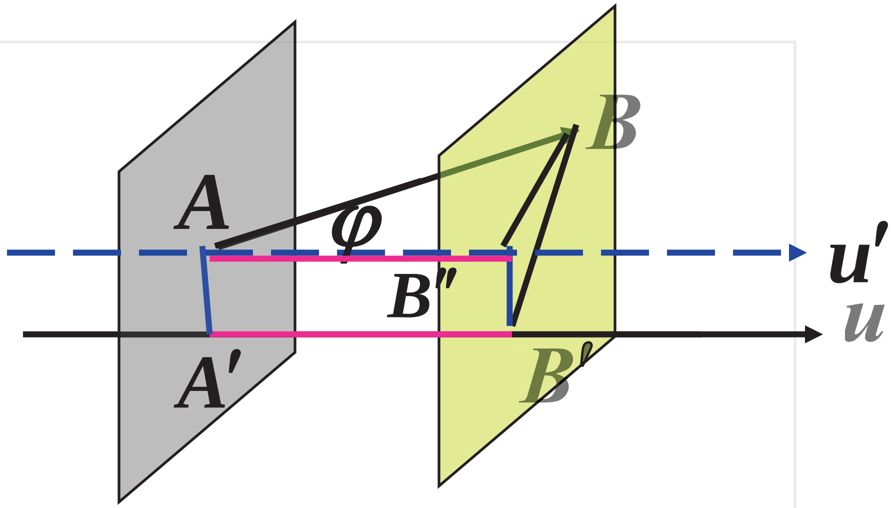
------向量的模.

$$\|k\cdot\overrightarrow{OA}\|=\sqrt{(k\cdot a_1)^2+(k\cdot a_2)^2+(k\cdot a_3)^2}$$

$$=|k|\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}$$

$$=|k|\cdot\|\overrightarrow{OA}\|$$

4. 投影的性质



（1） $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$，

$$\varphi = \langle \overrightarrow{AB}, u \rangle.$$

(2) $\mathrm{Prj}_u(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \mathrm{Prj}_u \vec{a}_1 + \mathrm{Prj}_u \vec{a}_2.$

该性质可推广到有限多个和的情形.

练习：设 $\vec{a} = (3,5,8)$, $\vec{b} = (2,-4,-7)$, $\vec{c} = (5,1,-4)$, 则向量 $4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$ 在 y 轴上的投影为 __7__； 在 x轴上的投影为 __13__ .

$\because\ 4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c} = (13, 7, 15)$

向量在轴上的投影

主要内容

1. 向量在轴上投影的概念;

2. 向量在轴上投影的性质.