第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

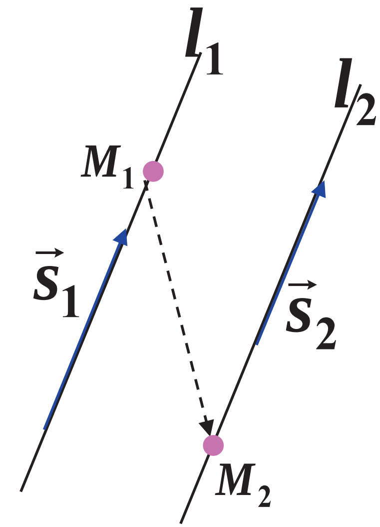
直线与平面的位置关系

内容小结

三、直线与直线的位置关系

$$l_1: \quad \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}$$

$$l_2: \quad \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$



它们的方向向量分别为

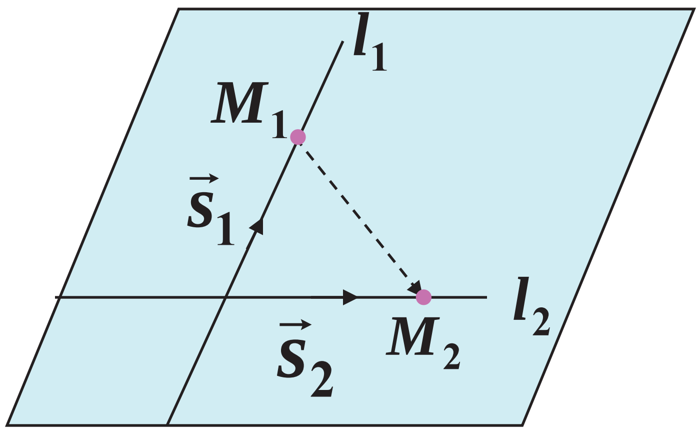
$$\vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1) \qquad \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

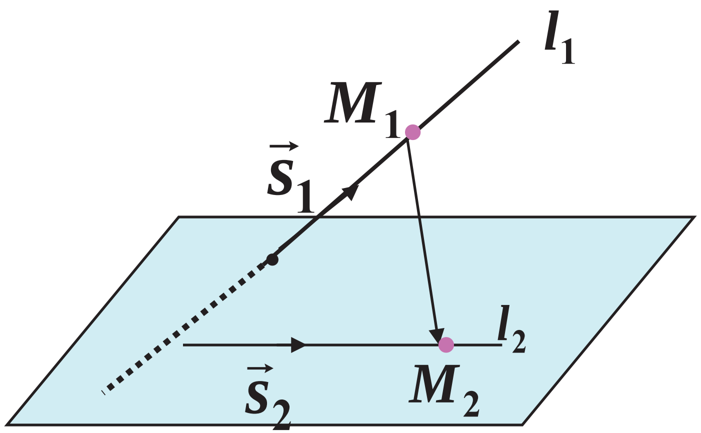
分别过点 $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\quad M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$

(1) l_1与l_2平行(不重合)$\Leftrightarrow \vec{s}_1 // \vec{s}_2 \nparallel \overrightarrow{M_1M_2}$

(2) l_1与l_2重合$\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1 // \vec{s}_2 // \overrightarrow{M_1M_2}$

(3) l_1与l_2相交$\Leftrightarrow$ $\vec{s}_1 \nparallel \vec{s}_2$且$[\vec{s}_1, \ \vec{s}_2, \ \overrightarrow{M_1M_2}] = 0$;



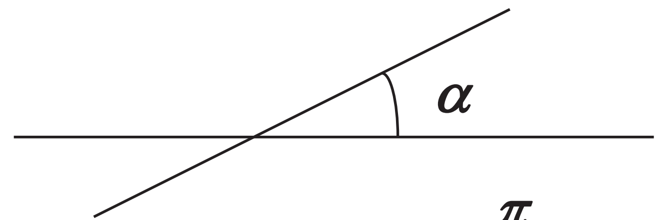


(4) l_1与l_2异面$\Leftrightarrow$ $[\vec{s}_1, \ \vec{s}_2, \ \overrightarrow{M_1M_2}] \neq 0$;

注： (1)---(3)均属于两直线共面的情况.

两直线的方向向量所成角中最小者(锐角)称为两直线的**夹角**。

两直线的夹角与它们方向向量的夹角要么相等要么互补。



$$0 \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$$

设两直线的夹角为α：

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{\|\vec{s}_1\| \cdot \|\vec{s}_2\|} = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

则 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 = 0 \quad (m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0)$

例1 判定两直线

$$l_1: x = y = z - 4, \qquad l_2: -x = y = z$$

的位置关系.

解 它们的方向向量分别为

$$\vec{s}_1 = (1,\ 1,\ 1) \qquad \vec{s}_2 = (-1,\ 1,\ 1)$$

分别过点 $M_1 = (0,\ 0,\ 4),\ M_2 = (0,\ 0,\ 0)$

因为 $\vec{s}_1 \not\parallel \vec{s}_2$ 且

$$[\vec{s}_1,\ \vec{s}_2,\ \overrightarrow{M_1M_2}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 \neq 0$$

则l_1与l_2异面.

例 2 求过点$(-3,2,5)$且与两平面$x-4z=3$和$2x-y-5z=1$的交线平行的直线方程.

解 设所求直线的方向向量为$\vec{s}=(m,\ n,\ p)$,

根据题意知 $\vec{s}\perp\vec{n}_1$, $\vec{s}\perp\vec{n}_2$,

取 $\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=(-4,-3,-1)$,

所求直线的方程 $$\frac{x+3}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-5}{1}.$$

主要内容

直线与直线的位置关系

练习： 求过点 $M(2,1,3)$ 且与直线

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{-1}$$

垂直相交的直线方程.

答案： $$\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}.$$