第一讲 实二次型及其标准形

二次型及其矩阵表示

矩阵的合同

- 用配方法化二次型为标准形

用正交变换化二次型为标准形

小结

三、用配方法化二次型为标准形

形如 $g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \cdots + d_n y_n^2$ 的n元二次型，称为标准二次型，简称**标准形.**

由配方法，可得以下结论：

定理1 任何一个n 元二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形：

$$d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_r y_r^2 \qquad (r \le n,\ d_i \ne 0)$$

r为二次型的秩.

思考： 如何用矩阵的语言来描述定理1？

——对称矩阵都合同于对角矩阵.

用配方法 (凑平方) 化二次型为标准形:

1. 二次型中含有平方项

例1 用配方法化二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$$ 为标准形.

解 $$f(x_1, x_2) = \underline{x_1^2 + 4x_1x_2} + x_2^2$$

$$= \underline{(x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2} + x_2^2$$

$$= (x_1 + 2x_2)^2 - 3x_2^2$$

令 $\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

得标准形 $f = y_1^2 - 3y_2^2$

进一步的，令 $\begin{cases} z_1 = y_1 \\ z_2 = \sqrt{3} y_2 \end{cases}$ 即 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

则 $f = z_1^2 - z_2^2$ —— 规范形

可见，二次型的标准形不唯一.

此时，总的线性变换为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ 0 & \dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad 即 \begin{cases} x_1 = z_1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} z_2 \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}} z_2 \end{cases}$$

2. 二次型中不含平方项

例2 用配方法化二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$$

为标准形.

解 作线性变换
$$\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = \qquad\qquad \boxed{y_3} \quad y_1 ? \end{cases}$$

则

$$f=2(y_1+y_2)(y_1-y_2)+2(y_1+y_2)y_3-6(y_1-y_2)y_3$$

$$=2y_1^2-2y_2^2+\underline{2y_1y_3}+\underline{2y_2y_3}-\underline{6y_1y_3}+\underline{6y_2y_3}$$

$$= 2y_1^2 - 2y_2^2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$$

$$= 2(y_1^2 - 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2y_2^2 + 8y_2y_3 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2^2 - 4y_2y_3) - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 8y_3^2 - 2y_3^2$$

$$= 2(y_1 - y_3)^2 - 2(y_2 - 2y_3)^2 + 6y_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1 = y_1 - y_3 \\ z_2 = y_2 - 2y_3 \\ z_3 = y_3 \end{cases}$

则 $f = 2z_1^2 - 2z_2^2 + 6z_3^2$ —— 标准形

如果再令 $\begin{cases} t_1 = \sqrt{2} z_1 \\ t_2 = \sqrt{6} z_3 \\ t_3 = \sqrt{2} z_2 \end{cases}$

则 $f = t_1^2 + t_2^2 - t_3^2$ —— 规范形

规范形是特殊的标准形，其形式如下：

$$\underbrace{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_p^2}_{\text{正系数项}} - \underbrace{y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2}_{\text{负系数项}} \quad (r \le n)$$

p称为f 的正惯性指数；$r-p$叫负惯性指数；

p-$(r-p)$ =2p-r 叫符号差.

定理2 (惯性定理) 实二次型都可经可逆线性变换化为规范形，规范形是唯一的.

定理的矩阵表述：

若 A 是实对称矩阵，则必存在可逆矩阵C,使

$$C^T AC = \begin{pmatrix} I_p & & \\ & -I_{r-p} & \\ & & O \end{pmatrix}$$

A的合同标准形

推论： 两同型实对称矩阵合同的充分必要条件是它们有相同的正、负惯性指数.

例3 设二次型

$$f = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2ax_1x_3$$

的正负惯性指数都是1，求 f 的规范型及常数 a.

解 二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -a \\ 1 & a & -1 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为 f 的正负惯性指数都是1，所以 f 的秩为2.

即有 $\mathrm{R}(A) = 2.$

$$\because A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 1 & a & -1\\ -a & -1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -a\\ 0 & a-1 & a-1\\ 0 & 0 & (a-1)(a+2)\end{pmatrix}$$

$\therefore$ 当 $a=-2$ 时, $\mathrm{R}(A)=2$;

f 的规范型为 $\quad y_1^2-y_2^2$

主要内容

1.用配方法化二次型为标准形；

① 含有平方项； ② 不含平方项.

2.惯性定理.

练习 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+4x_1x_3+x_2x_3$$

的正负惯性指数.

答案：正惯性指数 $p=1$, 负惯性指数 $q=2$.