第二讲 正定二次型

正定二次型的概念

正定二次型的性质（1）

正定二次型的性质（2）

二次型的其它类型

- 内容小结

内容小结

1. 正定二次型(矩阵)的概念

定义：$\forall X \neq 0$, 实二次型 $f(X) = X^T AX > 0$

2. 正定矩阵的性质

(1) 设实对称矩阵A正定, 则 $kA\ (k>0)$、A^T、A^{-1}、A^* 也正定。

(2) 设A,B为n阶正定阵 $\Rightarrow kA + lB$ 也正定 $(k>0, l>0)$.

(3) 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则$|A|>0$,且$a_{ii}>0, (\forall i)$.

（4）充分必要条件：

n元实二次型 $f = X^T AX$ 正定 (A为正定矩阵)

$\Leftrightarrow$ A的特征值全为正

$\Leftrightarrow$ f 的正惯性指数 $p = n$

$\Leftrightarrow$ A与单位矩阵合同，即 $A = C^T C \quad (|C| \neq 0)$.

$\Leftrightarrow$ A的各阶顺序主子式全大于0

3. 二次型的其它类型

对于二次型 $f(X)=X^TAX$ 及任意非零实向量 X,

(1) 如果 $f(x)=X^TAX<0$, 则称 $f(X)$ 是负定二次型;

(2) 如果 $f(x)=X^TAX\geq 0$, 则称 $f(X)$ 是半正定二次型;

(3) 如果 $f(x)=X^TAX\leq 0$, 则称 $f(X)$ 是半负定二次型;

(4) 不是正定, 半正定, 负定, 半负定的二次型称为不定二次型.

负定的判定: A负定 $\Leftrightarrow -A$正定.