第四讲 空间直线

- 空间直线的方程
  1. 点向式方程
  2. 参数式方程
  3. 一般式方程
- 点到直线的距离
- 直线与直线的位置关系
- 直线与平面的位置关系
- 内容小结

第四讲 空间直线

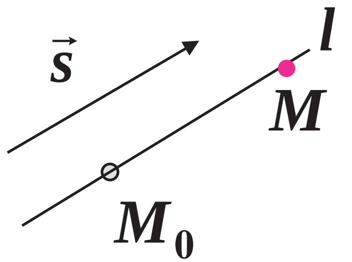
- 空间直线的方程
  1. 点向式方程
  2. 参数式方程
  3. 一般式方程
- 点到直线的距离
- 直线与直线的位置关系
- 直线与平面的位置关系
- 内容小结

一、空间直线的方程

1. 点向式方程

设直线l过点$M_0(x_0,y_0,z_0)$且与$\vec{s}=(m, n, p)$平行，

$\vec{s}$称为l的方向向量.



$\forall M(x,y,z)\in l,$

则 $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)//\vec{s}$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$ 点向式方程.（对称式方程）

直线的一组方向数

$\vec{s}$ 的方向余弦也叫直线的方向余弦.

特别地，当方向向量有一个分量为零时，比如 $m=0$

$$\frac{x-x_0}{0}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$$

理解为 $\begin{cases} x-x_0=0 \\ \dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \end{cases}$，即直线在平面 $x=x_0$ 上.

例1 设直线 l 经过点 $M_1(x_1, y_1, z_1)$ 与 $M_2(x_2, y_2, z_2)$, 求 l 的方程。

解 l 的方向向量：$\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

故 l 的方程为 $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ (两点式方程)

例 2 一直线过点 $A(2,-3,4)$，且和 y 轴垂直相交，求其方程.

解 因为直线和 y 轴垂直相交,

所以交点为 $B(0,-3,0)$, 直线的方向向量为

$$\vec{s}=\overrightarrow{BA}=(2,\ 0,\ 4)$$

所求直线方程

$$\frac{x-2}{2}=\frac{y+3}{0}=\frac{z-4}{4}.$$

2. 参数式方程

令 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$

则 $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$

点　方向向量

这是直线 l 的参数式方程，t 称为参数，不同的 t 对应于 l 上不同的点。

直线的参数方程可将三个变量化为一个变量，有利于解方程(组)。

例3 设直线 l 经过点 $M(3,\ 4,\ -4)$，$\vec{s}$ 是 l 的方向向量，$\vec{s}$ 的方向角为 $\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{2\pi}{3}$ ，求 l 的方程。

解 $\vec{e}_s=(\cos\frac{\pi}{3},\ \cos\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{2\pi}{3})=(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{1}{2})$

取 $\vec{s}=(1,\ \sqrt{2},\ -1)$

则 l 的方程为：
$$\begin{cases} x=3+t \\ y=4+\sqrt{2}t \\ z=-4-t \end{cases}$$

例 4 求过点$M(2,1,3)$且与直线$\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}$垂直相交的直线方程.

解 先作一过点M且与已知直线垂直的平面π

$$3(x-2)+2(y-1)-(z-3)=0$$

再求已知直线与该平面的交点N,

令 $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{-1}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=3t-1 \\ y=2t+1. \\ z=-t \end{cases}$

代入平面方程得 $t=\frac{3}{7}$，交点 $N(\frac{2}{7},\frac{13}{7},-\frac{3}{7})$

取所求直线的方向向量为 $\overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MN}=(\frac{2}{7}-2,\frac{13}{7}-1,-\frac{3}{7}-3)=(-\frac{12}{7},\frac{6}{7},-\frac{24}{7}),$$

所求直线方程为 $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-3}{4}$.

主要内容

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程

练习 求点$(-1,2,0)$在平面$x+2y-z+1=0$上的投影.

答案: $\left(-\frac{5}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$