

设 A 为3阶实对称矩阵, λ_1 是2重特征值, 对应两线性无关的特征向量

$$\xi_1 = (1, 2, 3)^T, \xi_2 = (-2, 1, -1)^T,$$

则对应于另一特征值 λ_3 的全部特征向量是 $k(-1, -1, 1)^T, k \neq 0$.

[解析] 实对称矩阵不同特征值的特征向量彼此正交.

设 $\alpha = (x, y, z)$ 是 λ_3 的一个特征向量, 则

$$\begin{cases} 0 = (\alpha, \xi_1) = x + 2y + 3z, \\ 0 = (\alpha, \xi_2) = -2x + y - z, \end{cases} \Rightarrow \text{基础解系 } (-1, -1, 1)^T$$

$$\Rightarrow \lambda_3 \text{ 的全部特征向量为 } k(-1, -1, 1)^T, k \neq 0$$