证明：任意n阶方阵都可表示为一对称矩阵与一反对称矩阵的和.

[解析]

《方法一》 设A为任意n阶方阵, 对A做变换

$$A=\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}A^T-\frac{1}{2}A^T=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)+\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$$

而 $$\left(\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)\right)^T=\frac{1}{2}\left(A^T+A\right)=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$$

故 $\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)$ 为对称矩阵.

又 $$\left(\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)\right)^T=\frac{1}{2}\left(A^T-A\right)=-\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$$

故 $\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$ 为反对称矩阵.

故命题成立.

《方法二》 设A为任意n阶方阵，假设A可分解为一对称矩阵B与一反对称矩阵C之和，

即 $A=B+C$ 其中 $B^T=B, C^T=-C.$

则 $A^T=(B+C)^T=B^T+C^T=B-C$

由 $\begin{cases} B+C=A \\ B-C=A^T \end{cases} \Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right), C=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$

即 $A=B+C$ 有解，故原命题成立.