第四章 n维向量空间

4.4 线性方程组的解的结构

何军华

电子科技大学

一、齐次方程组解的性质和基础解系

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0, \end{cases}$$

即 $AX = 0$,

平凡解：$X = 0$(零解)

相关结论回顾:

设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, 则下列命题等价:

(1) $AX = 0$有非零解;

(2) $\mathrm{R}(A) < n$;

(3) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性相关;

1. 解的性质，基础解系的定义：

设$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_r$是$AX=0$的解，$k_1, k_2, \cdots k_r \in \mathbf{R}$，则：

(1) 两解之和是解：　$\xi_1+\xi_2$是$AX=0$的解；

$$A(\xi_1+\xi_2)=A\xi_1+A\xi_2=0$$

(2) 数乘解是解：　$k_1\xi_1$是$AX=0$的解；

$$A(k_1\xi_1)=k_1(A\xi_1)=0$$

(3) 解的线性组合是解：

$$A(k_1\xi_1+k_2\xi_2+\cdots+k_r\xi_r)$$

$$=A(k_1\xi_1)+A(k_2\xi_2)+\cdots+A(k_r\xi_r)=0+0+\cdots+0=0$$

给定齐次线性方程组 $A_{m\times n}X=0$, 令

$$S=\left\{\xi\in\mathbf{R}^n \,\middle|\, A\xi=0\right\}$$

表示$AX=0$ 全部解构成的集合, 则:

(1) $0\in S$, 即$AX=0$总有一个平凡解 $X=0$;

(2) S对线性运算是封闭的, 即

$$\xi_1,\xi_2\in S,\ k_1,k_2\in\mathbf{R}\Rightarrow\ k_1\xi_1+k_2\xi_2\in S.$$

S的最大无关组称为$AX=0$的基础解系.

设$\xi_1,\cdots,\xi_r$ 是 $AX=0$ 的一个基础解系, 则

$$X=k_1\xi_1+\cdots+k_t\xi_t\left(k_1,\cdots,k_t\in\mathbf{R}\right)$$

是方程组 $AX=0$ 的全部解, 称为 $AX=0$ 的通解.

基础解系的等价定义:

已知齐次线性方程组$A_{m\times n}X=0$, 若$\xi_1,\cdots,\xi_t\in\mathbf{R}^n$满足:

(1) $\xi_1,\ldots,\xi_t$是$AX=0$线性无关的解;

(2) $AX=0$的任一解均可由$\xi_1,\ldots,\xi_t$线性表出.

则称$\xi_1,\ldots,\xi_t$为$AX=0$的一个基础解系.

问题: 给定齐次线性方程组$AX=0$,

(1) 基础解系是否存在, 惟一? 一般存在, 不惟一

(2) 如何有效计算基础解系? 初等行变换

(3) 意义何在? 有限个解表示无穷解

2. 基础解系的存在性与计算

定理1. 设方程组 $A_{m\times n}X=0$有非零解(即$R(A)<n$), 则:

(1) 基础解系一定存在; (2) 基础解系中解数为 $n-R(A)$.

证. 设$R(A)=r$, 不妨设A的前r个列向量线性无关, 则

$$A\xrightarrow{\text{初等行变换}}\cdots\cdots\longrightarrow\begin{pmatrix}1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1,n-r}\\ \vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\ 0&\cdots&1&b_{r1}&\cdots&b_{r,n-r}\\ &&&O&&\end{pmatrix}$$

得同解方程组: $\begin{cases}x_1=-b_{11}x_{r+1}-\cdots-b_{1,n-r}x_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_r=-b_{r1}x_{r+1}-\cdots-b_{r,n-r}x_n\end{cases}$

等号右端变元称为**自由变元**，左端变元称为**受约束变元**.

$$\text{分别取}\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots\cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \text{得} AX = 0 \text{ 的} n-r \text{个解:}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 是$AX=0$ 的基础解系：

(1) $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关：

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \text{线性无关}$$

为什么？

$$\Rightarrow \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{n-r} \text{ 线性无关}$$

(2) $AX=0$的任一解都可由 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性表出：

任取$AX=0$的解$\xi=\left(c_1, c_2, \cdots, c_{r+1}, \cdots, c_n\right)^T$，可以证明：

$$\xi = c_{r+1}\xi_1 + \cdots + c_n\xi_{n-r}.$$

二、齐次方程组求解实例

例1. 求方程组的通解:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

解:

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 - x_5, \\ x_3 = -x_5, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1 = -x_2 - x_5, \\ x_3 = \qquad - x_5, \\ x_4 = 0, \end{cases}$$

基础解系： (令某自由变元取 1, 其它自由变元均取 0)

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} \boxed{-1} \\ 0 \\ \boxed{-1} \\ \boxed{0} \\ 1 \end{pmatrix}$$

通解：

$$X = k_1\xi_1 + k_2\xi_2,$$

$$k_1, k_2 \in R.$$

例2. 解方程组
$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=0, \\ 3x_1+6x_2+10x_3=0, \\ 2x_1+5x_2+7x_3=0, \\ x_1+2x_2+4x_3=0. \end{cases}$$

解:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & 10 \\ 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$R(A)=3$, 因此原方程组只有零解.

例3. 证明：与$AX=0$基础解系等价的线性无关向量组也是该方程组的基础解系.

证： 设 I: $\xi_1, \ldots, \xi_s$ 是 $AX=0$ 的基础解系,

II: $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关, 且与 I 等价.

(1) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$可由$\xi_1, \ldots, \xi_s$线性表出, 都是$AX=0$的解;

(2) 任取$AX=0$的解X, X 可由$\xi_1, \ldots, \xi_s$线性表出,

又$\xi_1, \ldots, \xi_s$可由$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$线性表出, 所以

X 可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ 线性表出;

(3) $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 线性无关,

故 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 是 $AX=0$的基础解系.

例4. $A_{m\times n}, B_{n\times s}$ 满足 $AB=O$，证明：

$$\boxed{R(A)+R(B)\le n.}$$

证： 设 $B=(b_1,\dots,b_s)$, 则

$$AB=A(b_1,\dots,b_s)=(Ab_1,\dots,Ab_s)=(0,\dots,0)=O_{m\times s}$$

$$\Rightarrow Ab_1=\cdots=Ab_s=0$$

B的列向量组都是$AX=0$的解,

可由$AX=0$的基础解系线性表出.

$$\Rightarrow\ \underbrace{\mathrm{R}(b_1,\dots,b_s)}_{\parallel\ R(B)}\le \underbrace{AX=0\text{基础解系中的解数}}_{\parallel\ n-R(A)}$$

三、非齐次方程组解的性质

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

即$AX=b$，$b\neq 0$.

记 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$，则 $AX=b$ 的向量形式为：

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n = b,$$

$AX = b$ 有解 $\Leftrightarrow$ b可由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$线性表出

$$\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A)$$

$AX = 0$称为$AX = b$对应的齐次线性方程组(导出组).

◆ η_1, η_2 为 $AX = b$ 的解,

则 $\eta_1 - \eta_2$ 是对应齐次方程组的解.

证: $A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0.$

◆ η 为 $AX = b$ 的解, ξ 为 $AX = 0$ 的解,

则 $\eta + \xi$ 为 $AX = b$ 的解.

证: $A(\eta + \xi) = A\eta + A\xi = b + 0 = b.$

$AX=b$ 的特解：$AX=b$ 的任一解.

◆ 设 η_0 为 $AX=b$ 的一个特解,

则 $AX=b$ 的任一解 η 可表为:

$$\eta=\eta_0+\xi,\qquad (\xi \text{ 为 } AX=0 \text{ 的一个解})$$

证：

$$\eta=\eta_0+(\eta-\eta_0)$$

$AX=0$ 的解, 设为 ξ

取 $AX=b$ 的任一特解 η_0, 当 ξ 取遍导出组的全部解时,

$$\eta=\eta_0+\xi$$

就得到 $AX=b$ 的全部解.

求$AX=b$的通解(全部解), 需求:

(1) 一个特解η_0;

(2) 对应导出组的全部解:

设η_0为$AX=b$的一个特解,

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$为其导出组的一个基础解系,

则$AX=b$的通解:

$$\boxed{X=\eta_0+k_1\xi_1+\ldots+k_{n-r}\xi_{n-r},\quad k_1,\ldots,k_{n-r}\in R}$$

四、非齐次方程组求解实例

例1. 求方程组的通解：
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

解：

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$R(\overline{A}) = R(A) = 2 < 3 \ (\text{变元数})$$

原方程组有无穷多解，

同解方程组：
$$\begin{cases} x_1 = 3 + x_3 \\ x_2 = 2 - 2x_3 \end{cases}$$

例1. 求方程组的通解：$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 13, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$

同解方程组：$\begin{cases} x_1 = \boxed{3} + x_3 \\ x_2 = \boxed{2} - 2x_3 \end{cases}$

(1) 求非齐次组的特解：取x_3=0, 得 $\eta_0 = \begin{pmatrix} \boxed{3} \\ \boxed{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

(2) 求导出组的基础解系：

取x_3=1, 得$\xi = \begin{pmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{-2} \\ 1 \end{pmatrix}$

通解：

$X = \eta_0 + k\,\xi,\ k \in \mathrm{R}$

例2. 解
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

解:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$$R\left(\overline{A}\right) = 3 \neq 2 = R(A)$$ 无解!

例3. 解方程组：$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2. \end{cases}$

解:

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda & 1 & \lambda \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda^2 & 1-\lambda^3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & 2-\lambda-\lambda^2 & 1-\lambda^2+\lambda-\lambda^3 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda) \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2\\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda)\\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda)\end{array}\right)$$

◆ $\lambda=1$时：$R(A)=R(\overline{A})=1<3$, 有无穷多解.

$$\overline{A}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$ 得同解方程组 $x_1 = 1 - x_2 - x_3$

导出组基础解系：$\xi_1=(-1, 1, 0)^T$, $\xi_2=(-1, 0, 1)^T$

非齐次组的特解：$\eta_0=(1, 0, 0)^T$

原方程组的通解：$X=\eta_0+k_1\xi_1+k_2\xi_2, k_1, k_2\in R$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 0 & \lambda-1 & 1-\lambda & \lambda(1-\lambda) \\ 0 & 0 & (1-\lambda)(\lambda+2) & (1+\lambda)^2(1-\lambda)\end{array}\right)$$

◆ $\lambda=-2$时： $R(A)=2\neq 3=R(\overline{A})$， 无解

◆ $\lambda\neq 1,-2$时： $R(A)=R(\overline{A})=3$， 唯一解：

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-\lambda-1}{\lambda+2}, \\ x_2=\dfrac{1}{\lambda+2}, \\ x_3=\dfrac{(\lambda+1)^2}{\lambda+2}. \end{cases}$$

例4. 判断方程组有无解: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ ax_1 + bx_2 = c \\ a^2x_1 + b^2x_2 = c^2 \end{cases}$ $(a, b, c$互异$)$

解: 方程组**有解** $\Leftrightarrow R(\overline{A}) = R(A)$

$$\det \overline{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b) \neq 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} R(\overline{A}) = 3 \\ R(A) = 2 \end{cases}$$

$R(\overline{A}) \neq R(A)$,

原方程组**无解**

为什么?

例5. 设A是 $m\times 3$ 矩阵, 且 $R(A)=1$. 如果非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的3个解向量 η_1,η_2,η_3 满足

$$\eta_1+\eta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\eta_2+\eta_3=\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix},\eta_3+\eta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

求$Ax=b$ 的通解.

法1:

$Ax=b$ 的通解? $\begin{cases}\text{特解: 解出 }\eta_1,\eta_2,\eta_3\text{即可;}\\ \text{导出组基础解系?}\end{cases}$

基础解系中解数: 变元数 - 系数矩阵A的秩 = $3-1=2$

由η_1,η_2,η_3 得$AX=0$两个线性无关解即可!

$$\eta_1=\frac{1}{2}\left[(\eta_1+\eta_2)+(\eta_3+\eta_1)-(\eta_2+\eta_3)\right]=\begin{pmatrix}1\\3/2\\1/2\end{pmatrix}$$

$$\eta_2=\frac{1}{2}\left[(\eta_1+\eta_2)+(\eta_2+\eta_3)-(\eta_3+\eta_1)\right]=\begin{pmatrix}0\\1/2\\5/2\end{pmatrix}$$

$$\eta_3=\frac{1}{2}\left[(\eta_2+\eta_3)+(\eta_3+\eta_1)-(\eta_1+\eta_2)\right]=\begin{pmatrix}0\\-3/2\\-3/2\end{pmatrix}$$

$$\xi_1=\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\ \xi_2=\eta_1-\eta_3=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix},$$

$$X=\eta_1+k_1\xi_1+k_2\xi_2,\ k_1,k_2\in \mathbf{R}$$

法2:

$Ax = b$ 的通解? $\begin{cases} \text{特解}: \eta_0 = \frac{1}{2}(\eta_1 + \eta_2) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 3/2 \end{pmatrix} \\ \text{导出组基础解系?} \end{cases}$

基础解系中解数:变元数 - 系数矩阵A的秩 = $3 - 1 =$ 2

得AX=0两个线性无关解即可!

$$\tau_1 = (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_2 + \eta_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \tau_2 = (\eta_1 + \eta_2) - (\eta_3 + \eta_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

线性无关,是$AX = 0$的基础解系.

$$X = \eta_0 + k_1\tau_1 + k_2\tau_2, k_1, k_2 \in \mathrm{R}$$

例6. 设A是5×4的矩阵，b是5维列向量，$b\neq 0, R(A)=R(\overline{A})=2$

已知 $\eta_1=(2,-1,1,1)^T, \eta_2=(1,-1,0,1)^T, \eta_3=(1,-3,0,1)^T$

都是 $Ax=b$ 的解，写出 $Ax=b$ 的通解.

解: $n-\mathrm{R}(A)=2,$

$$\eta_1-\eta_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \eta_2-\eta_3=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}$$ 是 $Ax=0$ 的两个线性无关的解向量

$\Rightarrow$ $AX=b$的通解为：$X=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\\1\end{pmatrix}+k_1\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\2\\0\\1\end{pmatrix}, k_1,k_2\in\mathrm{R}$

例7. 设A为n阶方阵，则

$$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n \\ 1, & R(A)=n-1 \\ 0, & R(A)<n-1 \end{cases}$$

证： 若$R(A)=n-1$，则 $|A|=0$，且 $R(A^*)\geq 1$

$$|A|=0 \Rightarrow AA^*=|A|I=O$$

$$\Rightarrow R(A^*)\leq n-R(A)=1$$

$$\Rightarrow R(A^*)=1$$

其它情形前面的章节已经证明.