

## 二. 特征子空间

给定 $n$ 阶矩阵 $A$ , 规定  $V_\lambda = \{\alpha \in \mathbb{C}^n \mid A\alpha = \lambda\alpha\}$

(1)  $V_\lambda$  非空:  $0 \in V_\lambda$

(2)  $V_\lambda$  对加法封闭:

$$\alpha, \beta \in V_\lambda \Rightarrow A\alpha = \lambda\alpha, A\beta = \lambda\beta$$

$$\Rightarrow A(\alpha + \beta) = \lambda(\alpha + \beta) \Rightarrow \alpha + \beta \in V_\lambda$$

(3)  $V_\lambda$  对数乘封闭:

$$\alpha \in V_\lambda \Rightarrow A\alpha = \lambda\alpha$$

$$\Rightarrow A(k\alpha) = k(A\alpha) = k(\lambda\alpha) = \lambda(k\alpha) \Rightarrow k\alpha \in V_\lambda$$

给定 $n$ 阶矩阵 $A$ , 规定

$$V_\lambda = \{ \alpha \in \mathbb{C}^n \mid A\alpha = \lambda\alpha \}$$

$$(4) \quad \alpha_1, \dots, \alpha_s \in V_\lambda \Rightarrow k_1\alpha_1 + \dots + k_s\alpha_s \in V_\lambda, \quad k_i \in \mathbb{C}$$

(5)  $V_\lambda$  是 $n$ 维复向量空间的子空间.

$$\lambda \text{ 是 } A \text{ 的特征值} \Leftrightarrow V_\lambda \neq \{0\}$$

$V_\lambda$  称为 $A$ 的特征值 $\lambda$ 的特征子空间

**问题：** 给定 $n$ 阶矩阵  $A$ :

- (1) 如何判断数 $\lambda$  是否为 $A$ 的特征值?
- (2) 如何判断向量  $\alpha$  是否为 $A$ 的特征向量?
- (3) 如何求出矩阵 $A$ 的所有特征值?
- (4) 如何求出矩阵 $A$ 的所有特征向量?
- (5) 特征值和特征向量有何性质?
- (6) 如何应用矩阵的特征值、特征向量?