第二章 行列式

典型例题

例 1 若 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=M\neq 0$, 则 $D_1=\begin{vmatrix} 3a_{11} & -a_{12} & 5a_{11}-a_{13} \\ 3a_{21} & -a_{22} & 5a_{21}-a_{23} \\ 3a_{31} & -a_{32} & 5a_{31}-a_{33} \end{vmatrix}=$ ________ .

解 $D_1=\begin{vmatrix} 3a_{11} & -a_{12} & 5a_{11} \\ 3a_{21} & -a_{22} & 5a_{21} \\ 3a_{31} & -a_{32} & 5a_{31} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ 3a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ 3a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{vmatrix}=0+3\times(-1)\times(-1)\times M=3M$.

例 2 已知行列式

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$, 则 $A_{31}+A_{32}+A_{33}$ ________ ; $A_{31}+A_{32}-A_{33}$ ________ .

解 $A_{31}+A_{32}+A_{33}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}=a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=\sum_{k=1}^{3}a_{2k}A_{3k}=0$;

$$A_{31}+A_{32}-A_{33}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+(-1)\cdot A_{33}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}=-2.$$

例 3 设 3 阶方阵 A 的伴随矩阵为 A^* 且 $|A|=\frac{1}{2}$, 则 $\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$ ________ .

解 由 $|A|=\frac{1}{2}$, 得 $A^*=|A|A^{-1}=\frac{1}{2}A^{-1}$ 且 $|A^{-1}|=|A|^{-1}=2$, 故

$$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=\left|\frac{1}{3}A^{-1}-2\times\frac{1}{2}A^{-1}\right|=\left|-\frac{2}{3}A^{-1}\right|=(-\frac{2}{3})^3\left|A^{-1}\right|=-\frac{16}{27}.$$

例 4 设线性方程组 $\begin{cases} bx-ay=-2ab \\ -2cy+3bz=bc \\ cx+az=0 \end{cases}$, 则 ( ).

(A) 当 a, b, c 取任意实数时, 方程组均有解;

(B) 当 $a=0$ 时, 方程组无解;

(C) 当 $b=0$ 时, 方程组无解;

(D) 当 $c=0$ 时, 方程组无解.

分析 方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix}=c\begin{vmatrix} -a & 0 \\ -2c & 3b \end{vmatrix}+a\begin{vmatrix} b & -a \\ 0 & -2c \end{vmatrix}=-3abc-2abc=-5abc.$$

由 Crammer 法则知

(1) $abc\neq\mathbf{0}$时，方程组有惟一解;

(2) $abc=\mathbf{0}$（即$a=\mathbf{0}$或$b=\mathbf{0}$或$c=\mathbf{0}$）时， 方程组均有无穷多个解，故选(A).

例 5 设A，B为三阶方阵，$|A|=-2$，$A^3-ABA+2I=0$， 则$|A-B|=$（ ）.

（A） 2; (B) -2; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) $-\dfrac{1}{2}$.

分析 由$A^3-ABA+2I=0$得$A(A-B)A=-2I$，两边取行列式得,

$$|A||A-B||A|=|-2I|=(-2)^3,$$

故$|A-B|=\dfrac{-8}{(-2)^2}=-2$， 故选（B）.

例 6 计算$|A_n|=\begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 \end{vmatrix}$.

分析 该行列式中 0 元较多，可按某行或某列展开.

解 按第 1 列展开得$|A_n|=7|A_{n-1}|-2\begin{vmatrix} 5 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & & & \\ \vdots & & A_{n-2} & \\ 0 & & & \end{vmatrix}$，最后一个行列式再按第一行展开得

$$|A_n|=7|A_{n-1}|-2\cdot5|A_{n-2}|=(2+5)|A_{n-1}|-2\cdot5|A_{n-2}|,$$

于是

$$|A_n|-2|A_{n-1}|=5(|A_{n-1}|-2|A_{n-2}|);$$

$$|A_n|-5|A_{n-1}|=2(|A_{n-1}|-5|A_{n-2}|).$$

当$n=2$时

$$|A_2|-2|A_1|=5^2;\quad |A_2|-5|A_1|=2^2.$$

由归纳法可得

$$|A_n|-2|A_{n-1}|=5^n;\ |A_n|-5|A_{n-1}|=2^n.$$

由 Crammer 法则知

$$A_n=\frac{\begin{vmatrix}5^n & -2\\ 2^n & -5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -5\end{vmatrix}}=\frac{5^{n+1}-2^{n+1}}{3}.$$

例 7 计算爪型（箭形）行列式 $D_n=\begin{vmatrix}a_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_n\\ b_2 & a_2 & & & \\ b_3 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ b_n & & & & a_n\end{vmatrix}$（其中 $\prod_{i=2}^{n}a_i\neq 0$）.

分析 若 $b_i=0(i=2,3,\cdots,n)$， 则 D_n 为上三角行列式. 可用行列式的性质化第 1 列元为 0, 利用上三角行列式计算.

解 将第 i 列的 $-\dfrac{b_i}{a_i}$ 倍 $(i=2,3,\cdots,n)$ 全加到第 1 列，得

$$D_n=\begin{vmatrix}a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{a_i}c_i & c_2 & c_3 & \cdots & c_n\\ 0 & a_2 & & & \\ 0 & & a_3 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n\end{vmatrix}=\prod_{i=2}^{n}a_i(a_1-\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{a_i}c_i).$$

例 8 计算 $D_n=\begin{vmatrix}x_1-m & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m\end{vmatrix}$.

分析 1 行列式中各行的和均为 $\sum_{i=1}^{n}x_i-m$， 可把各列全加到第 1 列， 再利用行列式的性质计算.

解 1 $$D_n=\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n x_i-m & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum_{i=1}^n x_i-m & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i-m & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$=(\sum_{i=1}^n x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix} \overset{-r_1+r_i}{\underset{i=2,3,\cdots,n}{=}} (\sum_{i=1}^n x_i-m)\begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^{n-1}(\sum_{i=1}^n x_i-m)=(-m)^n(1-\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{m}).$$

分析 2 行列式中各列元分别含有 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$， 可采用加边法（也称升阶法），利用行列式的性质消去相同元.

解 2 $$D_n=\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$$

$$\overset{-r_1+r_i}{\underset{i=2,3,\cdots,n+1}{=}}\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix} \overset{-\frac{1}{m}c_i+c_1}{\underset{i=2,3,\cdots,n+!}{=}} \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -m \end{vmatrix}$$

$$=(-m)^n(1-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^n x_i).$$

例 9 已知 $A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \end{pmatrix}$，求 $R(A)$.

分析 矩阵化为行阶梯形矩阵后，非零行的行数即为该矩阵的秩. 因此，对矩阵进行初等变换，化其为行阶梯形矩阵.

解

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 4 & -34 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -39 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -13 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故 $R(A) = \mathbf{2}$.

例 10 讨论 n 阶方阵 $A = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{pmatrix} (n \geq 2)$ 的秩.

解 对矩阵 A 作初等变换化为行阶梯形矩阵

$$A \xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{c_i+c_1} \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{pmatrix} \xrightarrow[i=2,3,\cdots,n]{-r_1+r_i} \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}.$$

(1) $a \neq b$ 且 $a \neq (1-n)b$ 时，$R(A) = n$;

(2) $a = b = 0$ 时，$A = 0, R(A) = 0$;

(3) $a = b \neq 0$ 时，$R(A) = 1$;

(4) $a \neq b$ 且 $a = (1-n)b$ 时，$R(A) = n-1$.

例 11 证明 $D_n = \begin{vmatrix} \mathbf{2}\cos\theta & \mathbf{1} & & & \\ \mathbf{1} & \mathbf{2}\cos\theta & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & \mathbf{2}\cos\theta & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \mathbf{1} \\ & & & \mathbf{1} & \mathbf{2}\cos\theta \end{vmatrix} = \dfrac{\sin(n+\mathbf{1})\theta}{\sin\theta}$.

分析 证明与自然数 n 有关的命题一般可用数学归纳法，展开 n 阶行列式为低阶同样结构的行列式，用归纳假设代入并计算，即可得证.

证 （用第二数学归纳法）

（1）$k = \mathbf{1}$ 时，$D_1 = \mathbf{2}\cos\theta = \dfrac{\mathbf{2}\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin\mathbf{2}\theta}{\sin\theta}$，等式成立.

（2）假设 $k \leq n-\mathbf{1}$ 时等式成立，即

$$D_k = \frac{\sin(k+\mathbf{1})\theta}{\sin\theta} (k \leq n-\mathbf{1}).$$

（3）当 $k = n$ 时，

$$D_n = 2\cos\theta\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & & & \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 0 & 2\cos\theta & 1 & & & \\ & 1 & 2\cos\theta & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= 2\cos\theta D_{n-1} - D_{n-2} = 2\cos\theta\frac{\sin n\theta}{\sin\theta} - \frac{\sin(n-1)\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}[2\cos\theta\sin n\theta - \sin(n-1)\theta]$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\sin\theta}[\sin(n+\mathbf{1})\theta + \sin(n-\mathbf{1})\theta - \sin(n-\mathbf{1})\theta] = \frac{\sin(n+\mathbf{1})\theta}{\sin\theta},$$

即 $k=n$ 时等式也成立. 故该等式对任何 n 都成立.

例 12 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶矩阵，A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式， 证明:

（1）$|A^*| = |A|^{n-\mathbf{1}}$;

（2）若 A 可逆， 则 $\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-2}$.

证 $AA^* = A^*A = (\det A)I$, 则 $\det(AA^*) = (\det A)^n$, 即

$$(\det A)(\det A^*) = (\det A)^n$$

（1） 若 A 可逆， 则 $\det A \neq \mathbf{0}$, 故 $\det A^* = (\det A)^{n-\mathbf{1}}$;

若 A 不可逆， 则 $R(A) \le n-\mathbf{1}$， 可证 $R(A^*) < n$, 故 $\det A^* = \mathbf{0} = (\det A)^{n-1}$.

（2） 因为 $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \begin{cases} |A| & , \quad i=j, \\ 0 & , \quad i\neq j, \end{cases}$ 所以

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ 0 & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & |A| & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & 0 & \cdots & |A| \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-1},$$

即

$$|A|\cdot\begin{vmatrix} A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-\mathbf{1}}, \quad \text{故} \quad \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \\ A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n2} & A_{n3} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}|A|^{n-2}.$$

例 13　A 为 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，$R(A)=m$. 证明：存在 $n\times m$ 矩阵 B，使 $AB=I_m$.

证　由 A 为 $m\times n$ 矩阵，$m<n$，$R(A)=m$ 知，　存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$ 与 $Q_{n\times n}$，　使

$$PAQ=(I_m, O_{m\times(n-m)}),$$

从而 $AQ=P^{-1}(I_m, O_{m\times(n-m)})$，

$$AQ\begin{pmatrix} I_m \\ O_{(n-m)\times m}\end{pmatrix}=P^{-1}(I_m, O_{m\times(n-m)})\begin{pmatrix} I_m \\ O_{(n-m)\times m}\end{pmatrix}=P^{-1}I_m,\quad AQ\begin{pmatrix} I_m \\ O_{(n-m)\times m}\end{pmatrix}P=P^{-1}I_mP=I_m.$$

令 $B=Q\begin{pmatrix} I_m \\ O_{(n-m)\times m}\end{pmatrix}P$，　则　$AB=I_m$　且 B 为 $n\times m$ 矩阵.

例 14　设 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶非零实方阵且 $a_{ij}=A_{ij}\,(\forall i, j)$. 证明：$R(A)=n$.

分析　A **为** n **阶非零实方阵，　要证** $R(A)=n$，　**只需证** $\det A\neq \mathbf{0}$ **即可.**

证　因 $A=(a_{ij})$ 为 n 阶非零实方阵，故至少存在一个元 $a_{ik}\neq \mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}\det A &= a_{i\mathbf{1}}A_{i\mathbf{1}}+a_{i\mathbf{2}}A_{i\mathbf{2}}+\cdots+a_{ik}A_{ik}+\cdots+a_{in}A_{in}\\ &= a_{i\mathbf{1}}^{\mathbf{2}}+a_{i\mathbf{2}}^{\mathbf{2}}+\cdots a_{ik}^{\mathbf{2}}+\cdots+a_{in}^{\mathbf{2}}\\ &\geq a_{ik}^{\mathbf{2}}>\mathbf{0},\end{aligned}$$

即　$\det A\neq 0$，　故　$R(A)=n$.