第二讲 正定二次型

正定二次型的概念

➤ 正定二次型的性质（1）

正定二次型的性质（2）

二次型的其它类型

内容小结

二、正定二次型的性质

复习:

1. 正定二次型的概念

定义 如果任一非零实向量 $X=(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 都有 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX>0$, 则称实二次型 $f(X)$ 为正定二次型, $f(X)$的矩阵A 称为正定矩阵.

2. 二次型的标准形

定理 任何一个n 元二次型都可以通过可逆线性变换化为标准形:

$$d_1y_1^2+d_2y_2^2+\ldots+d_ry_r^2 \quad (r\le n,\ d_i\ne 0)$$

r为二次型的秩.

定理1 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 的特征值全大于零.

证 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,则通过正交变换

$X=CY$ 可将$f(X)$化为

$$f(X)=X^TAX=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2=g(Y)$$

充分性：若A的特征值$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$全为正，

则 $\forall X\in\mathbf{R}^n$, $X\neq 0$, 有 $Y=C^{-1}X\neq 0$,

$$f(X)=g(Y)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2>0$$

$\therefore$ $f(X)$是正定二次型.

必要性：

若 A正定，且有某$\lambda_i \le 0$， 不妨设$\lambda_1 \le 0$,

取 $Y = (1, 0, \ldots, 0)^T$， 则 $X = CY \ne 0$,

$f(X) = g(Y) = \lambda_1 1 + \lambda_2 0 + \ldots + \lambda_n 0 = \lambda_1 \le 0$

与 $f(X) > 0$ 矛盾，故 $\lambda_i > 0, (i = 1, \ldots, n)$.

推论1 n 元二次型 $f(X) = X^TAX$正定 $\Leftrightarrow f(X)$的正惯性指数为 n.

可逆线性变换不改变二次型的正负惯性指数，因此也不改变二次型的正定性.

如果 n元二次型 $f(X)=X^TAX$ 的正惯性指数为 n，则其规范形为

$$g(Y)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2=Y^TIY$$

故 A 与 I 合同.

反之, 如果A与 I 合同, 则 $f(X)$的规范形为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2$$

推论2 $f(X)=X^TAX$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 与 I 合同.

推论2的矩阵形式为:

A正定$\Leftrightarrow A$与I 合同 $\Leftrightarrow A=C^TC \ \ (|C|\neq 0)$.

推论3 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则$|A|>0$,且$a_{ii}>0,(\forall i)$.

证 (1) 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则存在可逆矩阵C使

$$A=C^TC \Rightarrow |A|=|C^T||C|=|C|^2>0.$$

(2) (反证法) 设某 $a_{ii}\le 0$，

取 $X=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)^{\mathrm{T}}$ 第i个分量为1

则 $X^{\mathrm{T}}AX=a_{ii}\le 0$， 矛盾.

所以 $a_{ii}>0$， $(i=1,\ldots,n)$.

例1 设A是n 阶正定矩阵，证明: $|A+I|>1.$

证 $\because$ A是正定矩阵

$\therefore$ A的特征值全为正实数：λ_1，λ_2，…，λ_n

$(A+I)$的特征值也全为正实数：

(λ_1+1)，(λ_2+1)，…，(λ_n+1).

$\therefore$ $|A+I|=(\lambda_1+1)(\lambda_2+1)\ldots(\lambda_n+1)>1$

例2 求证：正定矩阵A的逆矩阵A^{-1}也是正定矩阵.

证 因为

$$(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}=A^{-1}$$

所以 A^{-1}也是一个实对称矩阵.

下证是A^{-1}正定矩阵，

法一：设A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，

由于A为正定矩阵，则它们全为正，

所以A^{-1}的特征值 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_n}$ 也全为正，故A^{-1}正定。

法二： A为正定矩阵，则存在可逆矩阵P，使得

$$A = P^T IP$$

$$A^{-1} = (P^T P)^{-1} = P^{-1}(P^T)^{-1} = P^{-1}(P^{-1})^T = P^{-1} I (P^{-1})^T$$

即 A^{-1} 与单位矩阵 I 合同，则 A^{-1} 正定.

法三： 设 $f(X)=X^TA^{-1}X$，作可逆线性变换 $X=AY$，

$$X^TA^{-1}X = Y^T A^T A^{-1}AY = Y^T A^T Y = Y^T AY.$$

可逆线性变换不改变矩阵的正定性，而$Y^T AY$是正定二次型，故$X^TA^{-1}X$也是正定二次型，从而A^{-1}是正定矩阵.

主要内容

正定矩阵的性质

n 阶矩阵A正定

$\Leftrightarrow A$的特征值全为正实数

$\Leftrightarrow A$的正惯性指数为 n

$\Leftrightarrow A$与单位矩阵合同

$\Rightarrow |A|>0,$且$a_{ii}>0,(\forall i)$

练习 设A，B都是n阶实对称阵，A的特征值大于a，B的特征值大于b，证明：$A+B$的特征值大于$a+b$.

证 设A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,

则$A-aI$的特征值为$\lambda_i-a,(i=1,\cdots,n)$

因为A的特征值大于a，$\therefore \lambda_i-a>0 \quad (i=1,\cdots,n).$

$\Rightarrow A-aI$正定. 同理 $B-bI$也正定.

$\Rightarrow (A-aI)+(B-bI)=A+B-(a+b)I$ 正定.

设$A+B$的特征值为$l_i(i=1,\cdots,n)$,

则$l_i-(a+b)\,(i=1,\cdots,n)$是$A+B-(a+b)I$ 的特征值

$\therefore l_i-(a+b)>0$，即 $l_i>(a+b).\,(i=1,\cdots,n).$