二. 逆矩阵的性质

性质：设A, B 均为n阶可逆矩阵，数$\lambda\neq 0$，则

(1) A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) λA可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$;

(3) AB可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(4) A^T可逆，且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

证 (3) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I$

所以AB可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(4) $A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=I$

例1. 设方阵A满足$A^2-A-2I=O$, 证明：

(1) A 和 $I-A$ 都可逆, 并求其逆矩阵；

(2) $A+I$ 和 $A-2I$不同时可逆.

常见:

已知矩阵的一个等式，证明某矩阵可逆, 或进行计算

(1) 从已知等式变形出(矩阵1)(矩阵2)$=kI$

(2) 先化简, 后计算

例2. 设方阵A满足$A^2 - A - 2I = O$, 证明：

(1) A和$I - A$都可逆，并求其逆矩阵；

(2) $A + I$和$A - 2I$不同时可逆.

证 (1): $O = A^2 - A - 2I = A(A - I) - 2I$

$$\Rightarrow A(A - I) = 2I$$

$$\Rightarrow A\text{可逆, 且}A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I)$$

$$O = A^2 - A - 2I = (-A + I)(-A) - 2I$$

$$\Rightarrow (I - A)(-A) = 2I$$

$$\Rightarrow I - A\text{可逆, 且}(I - A)^{-1} = -\frac{1}{2}A$$

设方阵A满足$A^2-A-2I=O$, 证明：

(1) A和$I-A$都可逆，并求其逆矩阵；

(2) $A+I$和$A-2I$不同时可逆.

已知方阵的等式证明方阵不可逆:

(方阵1)(方阵2)$=O$

$\Rightarrow$ 方阵1，方阵2不能同时可逆！

为什么？

(2):

$$(A+I)(A-2I)=A^2-A-2I=O$$

所以，$A+I$和$A-2I$不同时可逆.

例3 已知 $B^2 = B$， $A = I + B$

证明： A可逆且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

证： $$\boldsymbol{A}\left[\frac{1}{2}(3\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\right] = \frac{3}{2}\boldsymbol{A} - \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2$$

$$= \frac{3}{2}(I + B) - \frac{1}{2}(I + B)^2$$

$$= \frac{3}{2}I + \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}(I^2 + 2B + B^2)$$

$$= \frac{3}{2}I + \frac{3}{2}B - \frac{1}{2}I - B - \frac{1}{2}B^2 = \boldsymbol{I}$$

$\therefore$ A 可逆且 $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$

例4 设A可逆，则

$$AX=b\text{有唯一解}X=A^{-1}b$$

$$AX=0\text{只有零解 }X=0$$

例5 设方阵A满足: $A^k=O\ (k>0)$,

(1) 证明: $(I-A)$可逆

(2) 计算$(I-A)^{-1}$

$$1-x^k=(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots x^{k-1}\right)$$

问题：初等矩阵可逆吗？其逆阵呢？

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij};\quad E_i^{-1}(c)=E_i(\tfrac{1}{c}),\ c\neq 0;$$

$$E_{ij}^{-1}(c)=E_{ij}(-c).$$

为什么？

[结束]