第五章 特征值与特征向量

5.4 实对称矩阵的相似对角化

何军华

电子科技大学

本节目的:

讨论一类必可相似对角化的矩阵: **实对称矩阵**.

- 证明: 若A是n阶实对称矩阵, 则

  (1) A的特征值都是实数.

  (2) 互异特征值的特征向量必然彼此正交.

  (3) 存在n阶正交矩阵C使得

  $$C^{-1}AC = C^{T}AC \text{ 为对角阵.}$$

- 给出实对称矩阵正交对角化的方法.

一、共轭矩阵

复数及其性质：

$$\mathrm{i}^2=-1,\ \mathrm{i}:\text{虚单位}$$

$$z=a+b\mathrm{i},\ a:\text{实部},\ b:\text{虚部}$$

复数运算：加法，乘法

$$z_1=a_1+b_1\mathrm{i},\ z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$$

$$z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\mathrm{i},$$

$$z_1\bullet z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\mathrm{i}.$$

复共轭, 模

$$设\quad z_1 = a_1 + b_1 \mathrm{i},\ \cdots,\ z_n = a_n + b_n \mathrm{i}.$$

复共轭： $\overline{z_1} = a_1 - b_1 \mathrm{i},$

$$\overline{z_1 + \cdots + z_n} = \overline{z_1} + \cdots + \overline{z_n}, \qquad \overline{z_1 \bullet \cdots \bullet z_n} = \overline{z_1} \bullet \cdots \bullet \overline{z_n}.$$

模： $|z_1| = \sqrt{z_1 \overline{z_1}} = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \geq 0$

$$\overline{z_1} z_1 = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$$

$$\overline{z_1} \bullet z_1 + \cdots + \overline{z_n} \bullet z_n = 0 \Leftrightarrow \qquad z_1 = \cdots = z_n = 0$$

设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $\alpha=\left(z_1,\cdots,z_n\right)^T$, $a_{ij}, z_i\in\mathbb{C}$.

$\overline{A}=\left(\overline{a_{ij}}\right)_{m\times n}$ 称为A的**共轭矩阵**.

性质: (1) $\overline{A^T}=\overline{A}^T$ (2) $\overline{kA}=\overline{k}\,\overline{A}$

(3) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$. (4) $\overline{\alpha^T}\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=(0,\cdots,0)^T$

证明: (4) $0=\overline{\alpha^T}\alpha=\left(\overline{z_1},\cdots,\overline{z_n}\right)\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}=\overline{z_1}z_1+\cdots+\overline{z_n}z_n$

$\Leftrightarrow z_1=\cdots=z_n=0$ $\Leftrightarrow\alpha=(0,\cdots,0)^T$

二. 实对称矩阵的特征值与特征向量

定理1. 实对称矩阵的特征值都是实数.

证明: 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, A^T = A,\quad \alpha = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T \neq 0,$

$A\alpha = \lambda\alpha$. 求证: $\lambda = \overline{\lambda}$.

$$A\alpha = \lambda\alpha \Rightarrow \overline{A\alpha} = \overline{\lambda\alpha} \qquad \Rightarrow \overline{A}\,\overline{\alpha} = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha}^T \overline{A}^T = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T \qquad \Rightarrow \overline{\alpha}^T A = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T$$

$$\Rightarrow \overline{\alpha}^T A\alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T \alpha \qquad \Rightarrow \lambda\overline{\alpha}^T \alpha = \overline{\lambda}\,\overline{\alpha}^T \alpha,$$

$$\Rightarrow (\lambda - \overline{\lambda})\overline{\alpha}^T \alpha = 0,$$

$$\overline{\alpha}^T \alpha = \overline{z_1} z_1 + \overline{z_2} z_2 + \cdots + \overline{z_n} z_n > 0 \qquad \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}.$$

推论: 实对称矩阵A 的任一特征值都有一个实特征向量.

Why ?

定理2: 实对称矩阵不同特征值的实特征向量相互正交.

证. 设 $A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1, A\alpha_2 = \lambda_2\alpha_2, \lambda_1 \neq \lambda_2,$

α_1, α_2是非零实向量. 求证: $\alpha_1^T\alpha_2 = 0.$

$$A\alpha_1 = \lambda_1\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1^T A^T = \lambda_1\alpha_1^T \Rightarrow \alpha_1^T A = \lambda_1\alpha_1^T$$

$$\Rightarrow \alpha_1^T A\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2 \Rightarrow \lambda_2\alpha_1^T\alpha_2 = \lambda_1\alpha_1^T\alpha_2$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)\alpha_1^T\alpha_2 = 0 \Rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) = \alpha_1^T\alpha_2 = 0.$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0)$$

三. 实对称矩阵的相似对角化

定理3: 对任一实对称矩阵A, 均存在正交矩阵C, 使

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵A的特征值.

推论: 设A是实对称矩阵, λ是A的k重特征值, 则:

λ恰有k个线性无关的特征向量.

求正交矩阵 C 与对角矩阵 Λ 的计算步骤:

(1) 求 $f(\lambda)=|\lambda I-A|$ 的根: $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$;

(2) 求 $(\lambda_i I-A)X=0$ 的基础解系:

$$\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i};$$

(3) 将 $\alpha_{i1},\alpha_{i2},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 正交化后再单位化得:

$$\gamma_{i1},\gamma_{i2},\cdots,\gamma_{ir_i}$$

(4) 令 $C=(\gamma_{11},\cdots\gamma_{1r_1},\cdots,\gamma_{k1},\cdots\gamma_{kr_k})$,则 C 为正交矩阵且

$$C^TAC=C^{-1}AC=\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n).$$

例1. 设$A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，求正交矩阵$C$与对角矩阵$\Lambda$，使

$$C^T AC = C^{-1}AC = \Lambda .$$

解:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1(\text{二重}), \lambda_2 = 10 .$$

求 $\lambda_1=1$ 的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = -2x_2 + 2x_3\,,\quad \alpha_1 = (-2,1,0)^T,\quad \alpha_2 = (2,0,1)^T\,.$$

将α_1,α_2正交化：$\beta_1 = \alpha_1 = (-2,1,0)^T$,

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2,4,5)^T.$$

再将 β_1,β_2 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^T,\quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2,4,5)^T.$$

求$\lambda_2 = 10$ 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2} x_3, \quad x_2 = -x_3,$$

$$\Rightarrow \alpha_3 = (1, 2, -2)^T.$$

将α_3单位化： $\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1, 2, -2)^T.$

令 $C=\left(\gamma_1\ \ \gamma_2\ \ \gamma_3\right)=\begin{pmatrix} -\dfrac{2}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3\sqrt{5}} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{4}{3\sqrt{5}} & \dfrac{2}{3} \\ 0 & \dfrac{5}{3\sqrt{5}} & -\dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$,

则C为正交矩阵且：

$$C^T AC = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}.$$

例2. 实对称矩阵 A 与 B 相似

$\Leftrightarrow$ A与B有相同的特征值.

证明: " $\Rightarrow$ " 相似矩阵有相同的特征值.

$\Leftarrow$: 设$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是A与B的特征值,由A, B实对称知

$$A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim B,$$

由矩阵相似的传递性得: $A \sim B$.

四. 综合例题

例3. 求 a, b 的值与正交矩阵 C, 使

$C^{-1}AC=\Lambda$ 为对角矩阵, 其中

$$A=\begin{pmatrix}1 & b & 1\\ b & a & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\qquad \Lambda=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

解1: $A\sim\Lambda\Rightarrow\quad |\lambda I-A|=|\lambda I-\Lambda|$

$$\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & -1\\ -b & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-a)(\lambda-1)^2-b-b$$
$$-(\lambda-a)-(\lambda-1)-b^2(\lambda-1)$$

$$=\lambda^3-(a+2)\lambda^2+\left(2a-b^2-1\right)\lambda+b^2-2b+1$$

$$|\lambda I - A| = \lambda^3 - (a+2)\lambda^2 + (2a - b^2 - 1)\lambda + b^2 - 2b + 1$$

$$= |\lambda I - \Lambda| = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 4) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 4\lambda,$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2 = 5, \\ b^2 - 2b + 1 = 0, \end{cases} \Rightarrow a = 3, \quad b = 1.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$$

经计算可求得$\lambda_1 = 0$的一个特征向量： $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

计算可得 $\lambda_2=1$ 的一个特征向量： $\alpha_2=(1,-1,1)^T$

$\lambda_3=4$ 的一个特征向量： $\alpha_3=(1,2,1)^T$.

将 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 单位化：

$$\gamma_1=\frac{1}{\|\alpha_1\|}\alpha_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,-1)^T,$$

$$\gamma_2=\frac{1}{\|\alpha_2\|}\alpha_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,$$

$$\gamma_3=\frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T.$$

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$,则 C 为正交矩阵且

$$C^{-1}AC=\mathrm{diag}(0,1,4).$$

例3. 求 a, b 的值与正交矩阵 C，使

$C^{-1}AC = \Lambda$ 为对角矩阵，其中

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ b & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

解2: $A \sim \Lambda \Rightarrow \begin{cases} 1+a+1 = 0+1+4 \\ |A| = 0\cdot1\cdot4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ |A| = 0 \end{cases}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b-1 & 3 & 0 \\ 0 & 1-b & 0 \end{vmatrix} = -(b-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow b = 1$$

其余计算类似于前一解法.

例4. 设3阶实对称矩阵的秩为2, 且满足$A^2 = 3A$,

则$|A-2I| =$ ________.

分析: 3 阶实对称矩阵A的秩为 2

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow 0\text{是}A\text{的 }3-2=1\text{ 重特征值} \\ \\ A^2 = 3A \Rightarrow A\text{ 的特征值 }\lambda\text{ 满足 }\lambda^2 = 3\lambda \\ \\ \Rightarrow \lambda = 0\text{ 或 }3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ A的特征值为$0, 3, 3 \Rightarrow A-2I$ 的特征值为$-2, 1, 1$

$$\Rightarrow |A-2I| = (-2)\bullet 1 \bullet 1 = -2$$

例5. 设3阶实对称矩阵A的特征值为1, 2, 3. 矩阵A的属于特征值1, 2 的特征向量分别是$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.
(1) 求A的属于特征值3的特征向量； (2) 求矩阵A.

解: (1) 设A属于特征值3的特征向量为 $\alpha=(x_1,x_2,x_3)^T$

因为实对称矩阵不同特征值的特征向量彼此正交

$$\Rightarrow (\alpha_1,\alpha)=(\alpha_2,\alpha)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} -x_1-x_2+x_3=0, \\ x_1-2x_2-x_3=0. \end{cases}$$

解得基础解系为 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ A的属于特征值3的全部特征向量为 $k(1,0,1)^T, k\neq 0$

例5. 设3阶实对称矩阵A的特征值为1, 2, 3. 矩阵A的属于特征值1, 2 的特征向量分别是$\alpha_1=(-1,-1,1)^T$, $\alpha_2=(1,-2,-1)^T$.

(1) 求A的属于特征值3的特征向量； (2) 求矩阵A.

A 属于特征值3的一个特征向量为 $\alpha_3=(1,0,1)^T$

令$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\Rightarrow$

$$\Rightarrow P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow A=P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}P^{-1}$$

计算可知 $$P^{-1}=\begin{pmatrix}-1/3&-1/3&1/3\\1/6&-1/3&-1/6\\1/2&0&1/2\end{pmatrix}\Rightarrow A=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}13&-2&5\\-2&10&2\\5&2&13\end{pmatrix}$$