第五章 特征值与特征向量

典型例题

例 1 设n阶方阵A的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则

(1) kA的特征值为______(其中k为任意常数);

(2) A^k的特征值为______;

(3) A^T的特征值为______;

(4) A可逆时，A^{-1}的特征值为______;

(5) A可逆时，A^*的特征值为______;

(6) 设$f(x)=a_0x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k$，则$f(A)$的特征值为_______.

解 根据矩阵特征值和特征向量的定义，可以得到上面与矩阵A相关联矩阵的特征值.

(1) 设A的特征值λ_i对应的特征向量为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$，有$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，则$kA\alpha_i=k\lambda_i\alpha_i=(k\lambda_i)\alpha_i$，即$kA$的特征值为$\boldsymbol{k\lambda_i}$，对应的特征向量为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(2) 因$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，故$A^k\alpha_i=A^{k-1}(A\alpha_i)=A^{k-1}(\lambda_i\alpha_i)=\lambda_i(A^{k-1}\alpha_i)=\cdots=\lambda_i{}^k\alpha_i$，则$A^k$的特征值为$\lambda_i^k$，对应的特征向量为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(3) 因$\det(\lambda I-A)=\det(\lambda I-A^T)$，所以$A^T$与$A$有相同的特征值，即为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，但$A^T$与$A$一般没有相同的特征向量.

(4) 由于$\det A=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$，故当矩阵$A$可逆时，其所有的特征值非零. 由$A\alpha_i=\lambda_i\alpha_i$，$\alpha_i=\lambda_iA^{-1}\alpha_i$，即$A^{-1}\alpha_i=\dfrac{1}{\lambda_i}\alpha_i$，所以$A^{-1}$的特征值为$\lambda_i^{-1}$，对应的特征向量为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(5) A可逆，根据矩阵A与其伴随矩阵A的关系($AA^*=|A|I$)，即$A^*=|A|A^{-1}$，根据(1),(4)的结论可得：A^*的特征值为$\dfrac{\det A}{\lambda_i}$，对应的特征向量为$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$.

(6) 根据结论(1)和(3)可得:

$$a_0A^k\alpha_i=a_0\lambda_i^{\,k}\alpha_i,\qquad a_1A^{k-1}\alpha_i=a_1\lambda_i^{\,k-1}\alpha_i,$$

……

$$a_{k-1}A\alpha_i=a_{k-1}\lambda_i\alpha_i,\qquad a_kI\alpha_i=a_k\alpha_i,$$

把以上各式两端分别相加，得

$$\begin{aligned}&(a_0A^k+a_1A^{k-1}+\cdots+a_{k-1}A+a_kI)\alpha_i\\&=(a_0\lambda_i^{\,k}+a_1\lambda_i^{k-1}+\cdots+a_{k-1}\lambda_i+a_k)\alpha_i,\end{aligned}$$

所以矩阵多项式 $f(A)$ 的特征值为 $f(\lambda_i)$，对应的特征向量为 $\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$.

例 2 如果非零向量 x 是矩阵 A 的特征向量，则_____是矩阵 $P^{-1}AP$ 的特征向量.

分析 由特征值和特征向量的定义即可得到.

解 设 $B=P^{-1}AP$，则 $A=PBP^{-1}$，又 $Ax=\lambda x$，所以有 $PBP^{-1}x=\lambda x$，两边同时左乘可逆矩阵 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 得 $BP^{-1}x=\lambda P^{-1}x$，即 $(P^{-1}AP)P^{-1}x=\lambda P^{-1}x$，$P^{-1}x$ 是 $P^{-1}AP$ 的一个特征向量.

例 3 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}a&1&c\\0&b&0\\-4&c&1-a\end{pmatrix}$ 有一个特征值 $\lambda=2$，其相应的特征向量为 $x=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$，则 $a=$____；$b=$____；$c=$____.

解 由 $Ax=2x$，将 A 和 x 代入方程组得:

$$\begin{cases}a+2+2c=2\\2b=4\\-4+2c+2(1-a)=4\end{cases},$$

解方程组得: $a=-2,\ b=2,\ c=1.$

例 4 设 A 为三阶方阵，A 的特征值为 1，-2, 3，则下列矩阵中满秩矩阵是(　　).

(A) $I-A$；　(B) $2I-A$；　(C) $A+2I$；　(D) $A-3I$.

解 因为 $2I-A$ 的特征值为 $2-\lambda$，即 1, 4, -1 全不为零，而其它三项中矩阵的特征值均有 0，所以应选 (B).

例 **5** 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，则以下结论正确的是(　　)

(A) 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}$ 对应于 $\boldsymbol{\lambda}$ 的特征向量也是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的对应于特征值 $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$ 的特征向量;

(B) $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的任一线性组合都是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量;

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 具有相同的特征向量;

(D) $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为方程组 $(A-\lambda I)x=0$ 的全部解向量.

解 (A)中，设 λ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}$，则 $A\alpha=\lambda\alpha$，由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 非奇异，则 $\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\lambda A^{-1}\alpha}$，从而 $\boldsymbol{A^{-1}\alpha}=\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}\boldsymbol{\alpha}$，故 $\dfrac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$ 是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 对应于特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的特征值.

(B)中，设 λ_1，λ_2 为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个不同的特征值，$\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ 为对应的特征向量，则线性组合 $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ 不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，由于不同的特征值所对应的特征向量线性无关.

(C)中，设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{pmatrix}\mathbf{1}&\mathbf{0}\\\mathbf{1}&\mathbf{2}\end{pmatrix}$，计算可得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 的特征值为 $\lambda_1=\mathbf{1}$，$\lambda_2=\mathbf{2}$.

当 $\lambda_1=\mathbf{1}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_1 的全部特征向量为 $k\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}(k\neq 0)$，$\boldsymbol{A}^T$ 对应于特征值 λ_1 的全部特征向量为 $\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{-1}\end{pmatrix}(\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0})$；当 $\lambda_2=\mathbf{2}$ 时，$\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ_2 的全部特征向量为 $\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}\mathbf{1}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}(\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0})$，$\boldsymbol{A}^T$ 对应于特征值 λ_2 的全部特征向量为 $\boldsymbol{k}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{1}\end{pmatrix}(\boldsymbol{k}\neq\mathbf{0})$，所以 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^T$ 没有相同的特征向量.

(D)中，根据特征值和特征向量的定义，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量为非零向量，故方程组 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的零向量解不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，故非(D)，所以选(A).

例 6 设 n 阶矩阵 A 的各行元之和均为常数 k，(1) 试证 k 是 A 的一个特征值，且求 A 的属于特征值 $\lambda=k$ 的一个特征向量.

(2) 当 A 为可逆矩阵，且 $k\neq 0$ 时，A^{-1} 的各行元素之和应为多大？矩阵 $2A^{-1}+4A$ 的各行元素之和又为多大?

分析 本题的关键在于如何利用题设的条件：A的各行元素之和均为常数k，且将此条件与矩阵的特征值与特征向量联系在一起.

解 (1) 设 $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

则 $$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{n1} \\ a_{21}+a_{22}+\cdots+a_{n2} \\ \vdots \\ a_{n1}+a_{n2}+\cdots+a_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

即k是矩阵A的一个特征值，其对应的特征向量为$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$.

(2) 由结论(1)可得 $$\frac{1}{k}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

上式说明$\frac{1}{k}$是A^{-1}的一个特征值，$(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$是A^{-1}的属于$\frac{1}{k}$的特征向量，同时也说明了矩阵A^{-1}的各行元素之和都等于$\frac{1}{k}$.

又

$$2A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}+4A\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=\frac{2}{k}\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}+4k\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

即

$$(2A^{-1}+4A)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}=(\frac{2}{k}+4k)\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

故矩阵$2A^{-1}+4A$的各行元素之和$\frac{2}{k}+4k$.

例 7 设向量$\alpha=(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)^T$，$\beta=(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n)^T$都是非零向量，且满足$\alpha^T\beta=0$，记$n$阶矩阵$A=\alpha\beta^T$，求

(1) A^2；

(2) 矩阵A的特征值和特征向量.

分析 凡是矩阵分解为一个列向量与一个行向量乘积，其 A^k 必可简化．记 $A=\alpha\beta^T$，设 $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha=a$，则 $A^k=\alpha\beta^T\cdot\alpha\beta^T\cdots\alpha\beta^T=\alpha(\beta^T\alpha)(\beta^T\alpha)\cdots(\beta^T\alpha)\beta^T=a^{k-1}A$.

解 (1) 方法 1 因为 $\alpha^T\beta=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k=\sum_{k=1}^{n}b_ka_k=\beta^T\alpha=0$，所以

$A^2=(\alpha\beta^T)(\alpha\beta^T)=\alpha(\beta^T\alpha)\beta^T=\alpha 0\beta^T=O$，即 A^2 是 n 阶零矩阵.

方法 2 因为

$$A=\alpha\beta^T=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & a_nb_n \end{pmatrix},$$

所以矩阵 A^2 的第 i 行第 j 列的元素为

$$(a_ib_1,\ a_ib_2,\ \cdots,\ a_ib_n)\begin{pmatrix} a_1b_j \\ a_2b_j \\ \vdots \\ a_nb_j \end{pmatrix}=\sum_{k=1}^{n}(a_ib_k)(a_kb_j)$$

$$=(a_ib_j)\sum_{k=1}^{n}b_ka_k=0,\ (i=1,\ \cdots,\ n;\ j=1,\ \cdots,\ n).$$

所以 $A^2=O$.

(2) 法 1 设 λ 为 A 的任一特征值，x 为对应的特征向量，则 $Ax=\lambda x$，两边左乘 A，得 $A^2x=\lambda Ax=\lambda^2x$，由于 $A^2=O$，所以 $\lambda^2x=0$，且 x 为非零的特征向量，故得 $\lambda=0$.

法 2 设 λ 为 A 的任一特征值，x 为对应的特征向量，则 $Ax=\lambda x$，由 $A=\alpha\beta^T$，得

$$Ax=\alpha\beta^T x=\lambda. \tag{1}$$

若 $\beta^Tx=0$，则有 $\lambda x=O$，又 $x\neq O$，所以有 $\lambda=0$；若 $\beta^Tx\neq 0$，给式(1)两边左乘向量 β^T,得

$$\beta^T\alpha\beta^Tx=(\beta^T\alpha)\beta^Tx=\lambda\beta^Tx=0,$$

由于 $\beta^Tx\neq 0$，所以有 $\lambda=0$.

由于 A 的特征值全为零，因此 A 的特征向量全体就是齐次线性方程组 $(0I-A)x=O$ 的非零解向量的全体，具体求解如下:

不妨设α，β中分量$a_1b_1\neq 0$，解齐次线性方程组$(0I-A)x=O$，

$$0I-A=\begin{pmatrix}-a_1b_1 & -a_1b_2 & \cdots & -a_1b_n\\ -a_2b_1 & -a_2b_2 & \cdots & -a_2b_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -a_nb_1 & -a_nb_2 & \cdots & -a_nb_n\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

由此可得基础解系为

$$\alpha_1=(-\frac{b_2}{b_1},\ 1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T,$$

$$\alpha_2=(-\frac{b_3}{b_1},\ 0,\ 1,\ \cdots,\ 0)^T$$

……

$$\alpha_{n-1}=(-\frac{b_n}{b_1},\ 0,\ \cdots,\ 0,\ 1)^T$$

于是A的属于特征值 0 的全部特征向量为$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{n-1}\alpha_{n-1}$($k_1$，$k_2$，$\cdots$，$k_{n-1}$为任意常数且不全为零).

例 8 设矩阵$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，求$x$与$y$应满足的条件.

分析 **由题设矩阵A有三个线性无关的特征向量，由此若A的特征值有重根，则此特征值对应的特征向量必线性无关，从而矩阵$(\lambda I-A)$的秩为 3 减去特征值λ的重数，就可以得到x与y应满足的条件.**

解 矩阵A的特征方程为

$$|\lambda I-A|=\lambda^3-\lambda^2-\lambda+1=(\lambda-1)^2(\lambda+1)=0,$$

若使重根$\lambda=1$对应两个线性无关的特征向量，矩阵

$$I-A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -x & 0 & -y\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

的秩必须为 1，所以$x:y=1:(-1)$，即$x+y=0$. 因为不同特征值所对应的特征向量线性无关，所以要使矩阵A有三个线性无关的特征向量，必须满足$x+y=0$.

例 9 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}$，其行列式 $|A|=-1$，又 A^* 有一个特征值 λ_0，属于 λ_0 的一个特征向量为 $\alpha=(-1,\ -1,\ 1)^T$，求 $a,\ b,\ c$ 和 λ_0 的值.

解 根据题设有 $AA^*=|A|I=-I$ 和 $A^*\alpha=\lambda_0\alpha$，于是有

$$AA^*\alpha=-\alpha\text{，}\ AA^*\alpha=A(\lambda_0\alpha)=\lambda_0 A\alpha\text{，}$$

由此可得 $\lambda_0 A\alpha=-\alpha$，即

$$\lambda_0\begin{pmatrix} a & -1 & c \\ 5 & b & 3 \\ 1-c & 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

或

$$\begin{cases} \lambda_0(-a+1+c)=1 & (1) \\ \lambda_0(-5-b+3)=1 & (2) \\ \lambda_0(-1+c-a)=-1 & (3) \end{cases}$$

由式(1)减式(3)得 $\lambda_0=1$，将 $\lambda_0=1$ 代入式(2)和式(1)，得 $b=-3,\quad a=c$，再由 $|A|=-1$ 和 $a=c$，有 $|A|=a-3=-1$，解得 $a=2$，故有 $a=2$，$b=-3,\quad c=2$，$\lambda_0=1$.

例 10 已知三阶矩阵 A 的第一行元素全是 1，且 $\alpha_1=(1,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,\ -1)^T$，$\alpha_3=(1,\ -1,\ 0)^T$ 是 A 的 3 个特征向量，求 A.

分析 **首先根据** A 的第一行元素的特点和**特征向量求出特征值，然后判断三特征向量是否线性无关来判断矩阵** A **是否可对角化，若** A **可对角化，则由** $A=P\Lambda P^{-1}$ **求出** A.

解 设 3 个特征向量对应的特征值分别为 λ_1，λ_2，λ_3，则

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ a_1+a_2+a_3 \\ b_1+b_2+b_3 \end{pmatrix}=\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

所以 $\lambda_1=3$. 同样可得 $\lambda_2=\lambda_3=0$.　由于 3 个特征向量线性无关，令 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)$，则

$$A=P\Lambda P^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&-1\\1&-1&0\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}.$$

例 11 将矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&-3&3\\3&-5&3\\6&-6&4\end{pmatrix}$ 对角化.

解 对于矩阵 A，求其特征值与特征向量:

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&3&-3\\-3&\lambda+5&-3\\-6&6&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda+2)^2(\lambda-4)=0,$$

其特征值为 $\lambda_1=-2$ (二重), $\lambda_2=4$.

把 $\lambda_1=-2$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_1 I-A)X=0$，解之，有两个线性无关的特征向量:

$p_1=(1,\ 1,\ 0)^T$， $p_2=(1,\ 0,\ -1)^T$.

把 $\lambda_2=4$ 代入齐次线性方程组 $(\lambda_2 I-A)X=0$，解之，得特征向量为:

$p_3=(1,\ 1,\ 2)^T$，

因此矩阵 A 有三个线性无关的特征向量，令

$$P=(p_1,\ p_2,\ p_3)=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&-1&2\end{pmatrix},$$

则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

例 12 设矩阵 A 与 B 相似，其中 $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$， $B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$，

(1) 求 x 和 y 的值;

(2) 求可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$.

分析 根据相似矩阵具有某些相同的性质来求未知量.

解 (1) 因为 $A\sim B$，所以两矩阵的特征多项式相同，即 $|\lambda I-A|=|\lambda I-B|$，

$$(\lambda+2)[\lambda^2-(x+1)\lambda+x-2]=(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-y) \tag{5.5}$$

令 $\lambda=0$，式(5.5)可得 $2(x-2)=2y$，即 $y=x-2$，

令 $\lambda=-2$，则 $y=-2$，由此可得 $x=0$.

(2) 由 $x=0$，$y=-2$ 可得

$$A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&0&2\\3&1&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&-2\end{pmatrix},$$

A 的特征值为 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-2$.

将 $\lambda_1=-1$ 代入 $[\lambda_1 I-A]X=0$，可得 λ_1 对应的一个特征向量为 $\alpha_1=(0,\ 2,\ -1)^T$.

同样可求得 λ_2，λ_3 所对应的另两个特征向量为 $\alpha_2=(0,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_3=(1,\ 0,\ -1)^T$.

令 $P=[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3]=\begin{pmatrix}0&0&1\\2&1&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=B$.

例 13 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}3&2&-2\\k&-1&-k\\4&2&-3\end{pmatrix}$，问 k 为何值时，存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵，并求出 P 及相应的对角矩阵.

解 由 $|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\-k&\lambda+1&k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$ 得 A 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=-1$，$\lambda_3=1$.

A 的特征值与 k 无关.

当 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 时，它是一个二重特征值，为使 A 有 3 个线性无关的特征向量，则需

$$R(-I-A)=,$$

$$-I-A=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-k&0&k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-4&-2&2\\-k&0&k\\0&0&0\end{pmatrix},$$

所以 k 必须为 0.

当 $k=0$ 时，$-I-A \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应于 $\lambda_1=\lambda_2=-1$ 的两个线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-1,\ 2,\ 0)^T$，$\alpha_2=(1,\ 0,\ 2)^T$.

当 $\lambda_3=1$ 时，$I-A \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，对应的特征向量为 $\alpha_3=(1,\ 0,\ 1)^T$. 所以，当 $k=0$ 时，存在可逆矩阵 $P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3)=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，使

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例 14 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根，求 a 的值，并讨论 A 是否可相似对角化.

分析 n 阶矩阵可相似对角化的一个充要条件是矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量，故当 A 有 2 重特征值时，该特征值对应于 2 个线性无关的特征向量，否则 A 就不可以对角化.

解 矩阵 A 的特征多项式

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 3 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2\lambda & 0 \\ 1 & \lambda-4 & \\ -1 & -a & \lambda- \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & \lambda-4 & 3 \\ -1 & -a & \lambda-5 \end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & 3 \\ -1 & -a-1 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-2)(\lambda^2-8\lambda+18+3a).$$

若 $\lambda=2$ 是特征方程的二重根，则有 $2^2-8\times2+18+3a=0$，解得 $a=-2$.

当 $a=-2$ 时，矩阵 A 的特征值为 2，2，6，矩阵 $2I-A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ 的秩显见为 1，故

$\lambda=2$对应的线性无关的特征向量有两个，所以A可以对角化.

若$\lambda=2$不是特征方程的二重根，则$\lambda^2-8\lambda+18+3a$为完全平方，从而$18+3a=16$，解得$a=-\dfrac{2}{3}$.

当$a=-\dfrac{2}{3}$时，矩阵A的特征值为 2，4，4，矩阵$4I-A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1 \end{pmatrix}$的秩为 2，这是因为应用初等行变换，

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 3 \\ -1 & \dfrac{2}{3} & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

故$\lambda=4$对应的线性无关的特征向量只有一个，从而A不可以对角化.

例 15 已知$p=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$是矩阵$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & a & 3 \\ -1 & b & -2 \end{pmatrix}$的一个特征向量，(1) 试确定参数$a$, b及p所对应的特征值; (2) 问A能否相似于对角矩阵?

分析 **通过特征值的定义得一含参数的方程组，解方程组即可求得未知参数，然后利用特征向量的线性相关性判断矩阵A是否相似于对角矩阵.**

解 (1) 由

$$(\lambda I-A)p=\begin{pmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda-a & -3 \\ 1 & -b & \lambda+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

即

$$\begin{cases} \lambda-2+1+2=0 \\ -5+\lambda-a-3=0. \\ 1-b-\lambda-2=0 \end{cases}$$

解得$\lambda=-1$, $a=-3$, $b=0$, -1是p所对应的特征值.

(2) 矩阵A的特征多项式为

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -5 & \lambda+3 & -3\\ 1 & 0 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda+1)^3,$$

则 A 的特征值为 $\lambda=-1$(三重). 再求 A 的线性无关的特征向量, 解方程组 $(-I-A)X=0$, 因为矩阵

$$-I-A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & -2\\ -5 & 2 & -3\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

的秩为 2, 线性无关的特征向量只有一个, 故 A 不能相似于对角矩阵.

例 16 在 R^4 中求一单位向量, 使它与 $\alpha_1=(1,\ 1,-1,\ 1)^{\mathrm{T}}$, $\alpha_2=(1,-1,-1,\ 1)^{\mathrm{T}}$ 和 $\alpha_3=(2,\ 1,\ 1,\ 3)^{\mathrm{T}}$ 都正交.

解 设 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)^T$ 与 $\alpha_i\ (i=1,2,3)$ 正交, 则 $\alpha_i^T x=0\ (i=1,\ 2,\ 3)$, 即

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=0\\ x_1-x_2-x_3+x_4=0\\ 2x_1+x_2+x_3+3x_4=0,\end{cases}$$

解此齐次线性方程组, 得基础解系为 $p=(4,\ 0,\ 1,\ -3)^T$. 故与 $\alpha_i\ (i=1,2,3)$ 都正交的向量全体为 $x=kp=k(4,\ 0,\ 1,\ -3)^T$ (k 为任意实数), 当 $k\neq 0$ 时, 将非零向量 $x=kp$ 单位化, 得所求的单位向量为

$$\eta=\frac{x}{\|x\|}=\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(4,\ 0,\ 1,\ -3)^T.$$

例 17 设 $A=(a_{ij})_{3\times 3}$ 是正交矩阵, 且 $a_{11}=1$, $b=(1,\ 0,\ 0)^T$, 求线性方程组 $Ax=b$ 的解.

分析 利用正交矩阵的定义和性质计算.

解 设 $A=\begin{pmatrix}1 & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$. 则由 A 为正交矩阵得

$$1^2+a_{12}{}^2+a_{13}{}^2=1,\ 1^2+a_{21}{}^2+a_{31}{}^2=1,$$

所以有 $a_{12}=a_{13}=a_{21}=a_{31}=0$.

又由 $A^T A = I$，知 A 可逆，并且 $A^{-1} = A^T$，于是

$$x = A^{-1}b = A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{32} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

例 18 设三阶实对称矩阵 A 的特征值为 1, 2, 3, A 对应于特征值 1, 2 的特征向量分别为

$\alpha_1 = (-1,\ -1,\ 1)^T$，$\alpha_2 = (1,\ -2,\ -1)^T$.

(1) 求 A 对应于特征值 3 的特征向量;

(2) 求矩阵 A.

分析 已知矩阵 A 的两个特征向量 α_1，α_2，现要求的特征向量 α_3 与 α_1，α_2 都正交，由此

可求出 α_3 (不惟一). 当 α_1，α_2，α_3 求出后，即可得相似变换矩阵 P，由此 A 也可求出.

解 (1) 设 A 对应于 3 的特征向量为

$$\alpha_3 = (x_1,\ x_2,\ x_3)^T.$$

因为矩阵 A 是实对称矩阵，故不同特征值所对应的向量 α_1，α_2，α_3 都正交，即有

$$\begin{cases} (\alpha_1, \alpha_3) = -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ (\alpha_2, \alpha_3) = x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases},$$

其基础解系为 $\alpha = (1,\ 0,\ 1)^T$，故 A 对应于特征值 3 的特征向量为一个 $\alpha_3 = \alpha = (1,\ 0,\ 1)^T$.

(2) 记 $P = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，则应有 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$，于是

$$A = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 13 & -2 & 5 \\ -2 & 10 & 2 \\ 5 & 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

例 19 设三阶实对称矩阵 A 的秩为 2，$\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ 是 A 的二重特征值. 若 $\alpha_1 = (1,\ 1,\ 0)^T$，$\alpha_2 = (2,\ 1,\ 1)^T$，$\alpha_3 = (-1,\ 2,\ -3)^T$ 都是 A 的属于特征值 6 的特征向量.

(1) 求 A 的另一特征值和对应的特征向量.

(2) 求矩阵 A.

分析 n阶矩阵A的行列式$|A|$等于矩阵A的n个特征值之积，实对称矩阵的重特征值所具有的线性无关的特征向量的个数与特征值的重数相同(因而一定可以对角化)，并且不同特征值所对应的特征向量彼此正交.

解 (1) 因为$\lambda_1=\lambda_2=6$是A的二重特征值，故A的属于特征值6的线性无关的特征向量有 2 个. 由题设可得α_1，α_2，α_3的一个最大线性无关组为α_1，α_2，故α_1，α_2为A的属于特征值 6 的线性无关的特征向量.

有$R(A)=2$可知，$|A|=0$，所以矩阵A的另一个特征值为$\lambda_3=0$.

设$\lambda_3=0$所对应的特征向量为$\alpha=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$，则有$\alpha_1^T\alpha=0$，$\alpha_2^T\alpha=0$，即

$$\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ 2x_1+x_2+x_3=0. \end{cases}$$

解得此方程组的基础解系为$\alpha=(-1,\ 1,\ 1)^T$，即A的属于特征值$\lambda_3=0$的特征向量为$k\alpha=k(-1,\ 1,\ 1)^T$，（k为不为零的任意常数).

(2) 令矩阵$P=(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha)$，则

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \text{所以}\quad A=P\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1},$$

又

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

故

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

例 20 设三阶实对称矩阵A的特征值为$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=\lambda_3=1$，对应于λ_1的特征向量为

$\eta_1=(0,\ 1,\ 1)^T$，求 A.

解　矩阵 A 是实对称矩阵，故可以对角化，即存在正交矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\Lambda=\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，这里 P 的列向量就是与 A 的特征值相对应的特征向量. 同时实对称矩阵的对应于不同特征值的特征向量是相互正交的，则对应于 $\lambda_2=\lambda_3=1$ 的特征向量 $x=(x_1,\ x_2,\ x_3)^T$ 与 $\eta_1=(0,\ 1,\ 1)^T$ 正交，解齐次方程 $x^T\eta_1=x_2+x_3=0$，可得基础解系为 $\eta_2=(1,\ 0,\ 0)^T$，$\eta_3=(0,\ 1,\ -1)^T$，则 $\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3$ 均是 A 的特征向量，并已正交,标准化得 $p_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ 1)^T$，$p_2=(1,\ 0,\ 0)^T$，$p_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ 1,\ -1)^T$，于是 $P=(p_1,\ p_2,\ p_3)$，所

$$A=P\begin{pmatrix}-1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}P^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

例 21　设 n 阶实对称矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & b & \cdots & b\\ b & 1 & \cdots & b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ b & b & \cdots & 1\end{pmatrix}$，

(1) 求 A 的特征值和特征向量;

(2) 求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

分析　在求行列式时，注意行列式 $|\lambda I-A|$ 的各行之和相等，就易于求得 $|\lambda I-A|$ 的全部根. 在求特征向量及将 A 对角化时，需区分 $b\neq 0$ 及 $b=0$ 两种情况.

解 (1)　$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -b & \cdots & -b\\ -b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-1-(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ \lambda-1-(n-1)b & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda-1-(n-1)b & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & -b & \cdots & -b\\ 1 & \lambda-1 & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & -b & \cdots & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b]\begin{vmatrix}1 & -b & \cdots & -b\\ 0 & \lambda-(1-b) & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda-(1-b)\end{vmatrix}$$

$$=[\lambda-1-(n-1)b][\lambda-(1-b)]^{n-1}.$$

故矩阵 A 的特征值 $\lambda_1=1+(n-1)b$，$\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$.

1° 当 $b\neq 0$ 时，对于 $\lambda_1=1+(n-1)b$，

$$\lambda_1 I-A=\begin{pmatrix}(n-1)b & -b & \cdots & -b\\ -b & (n-1)b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & (n-1)b\end{pmatrix},$$

易见，向量 $\xi_1=(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$ 是方程组 $(\lambda_1 I-A)x=0$ 的基础解系，所以，属于 λ_1 的全部特征向量为 $k\xi_1=k(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)^T$（$k$ 为任意非零常数).

对于 $\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1-b$，解齐次线性方程组 $[(1-b)I-A]x=0$，由

$$(1-b)I-A=\begin{pmatrix}-b & -b & \cdots & -b\\ -b & -b & \cdots & -b\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -b & -b & \cdots & -b\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix},$$

解得基础解系为

$$\xi_2=(1,\ -1,\ 0,\ \cdots,\ 0)^T,$$

$$\xi_3=(1,\ 0,\ -1,\ \cdots,\ 0)^T,$$

$$\cdots$$

$$\xi_n=(1,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ -1)^T.$$

故全部特征向量为

$$k_2\xi_2+k_3\xi_3+\cdots+k_n\xi_n\quad(k_2,\ k_3\cdots,\ k_n \text{是不全为零的任意常数}).$$

2° 当 $b=0$ 时，$\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=1$，$A=I$，由 $I-A=0$ 知任意非零向量都是特征向量.

(2) 1° 当$b\neq 0$时，A有n个线性无关的特征向量，令$P=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则

$$P^{-1}AP=\mathrm{diag}(1+(n-1)b,\ 1-b,\ \cdots,\ 1-b).$$

2° 当$b=0$时，$A=I$，对任意可逆矩阵P，均有 $P^{-1}AP=I$.

例 22 设A与B是同阶实对称矩阵，证明存在正交矩阵P使$P^TAP=B$的充分必要条件是A与B有相同的特征值.

证 充分性

设A与B的相同特征值为$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，且$A$与$B$是实对称矩阵，故存在正交矩阵$P_1$，$P_2$，使

$$P_1^TAP_1=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}=P_2^TBP_2,$$

可得

$$(P_2^T)^{-1}P_1^TAP_1P_2^{-1}=B，(P_1P_2^{-1})^TA(P_1P_2^{-1})=B.$$

由于P_1，P_2都是正交矩阵，所以P_2^{-1}及$P_1P_2^{-1}$也是正交矩阵，令$P=P_1P_2^{-1}$，则$P^TAP=B$.

必要性 因为P是正交矩阵且$P^TAP=B$，所以$P^{-1}AP=B$，即A与B相似，因而有相同的特征值.

例 23 设A是n阶实对称矩阵，且$A^2=A$，证明存在正交矩阵P使

$$P^TAP=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix},$$

其中 1 的个数等于A的秩$R(A)$.

证 设λ是A的任一特征值，α是A对应于特征值λ的特征向量，则

$$A\alpha=\lambda\alpha，A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha,$$

$$(\lambda^2-\lambda)\alpha=0,\ \alpha\neq 0,$$

故$\lambda^2-\lambda=0$，得$\lambda=0$或$\lambda=1$.

又由于A是实对称矩阵，所以存在正交矩阵P使

$$P^T AP=\begin{pmatrix}1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0\end{pmatrix}.$$

由于P是可逆矩阵，故$R(P^T AP)=R(A)$，即$P^T AP$对角线上元素为 1 的个数等于A的秩$R(A)$.