

二. R^n 的子空间

子空间: R^n 的非空子集 V , 且对加法和数乘运算封闭, 即:

$$\alpha, \beta \in V, k \in R \Rightarrow \alpha + \beta \in V, k\alpha \in V,$$

则称 V 是 R^n 的子空间.

例1. (1) R^n 的子空间 V 一定包含零向量 0 , 为什么?

$$\text{任取 } \alpha \in V \Rightarrow 0 = 0\alpha \in V$$

(2) 子空间 V 对减法运算是否封闭? 为什么?

$$\alpha, \beta \in V \Rightarrow \alpha, (-1)\beta \in V$$

$$\Rightarrow \alpha - \beta = \alpha + (-1)\beta \in V$$

子空间的判定:

子空间: 非空 对加法封闭 对数乘封闭

不是子空间: 否定任一条, 或 $0 \notin V$

例2. 设 $V = \{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 0\}$, V 是否为 \mathbb{R}^2 的子空间?

是 显然 V 非空: $(0, 0) \in V$

$$\forall \alpha = (a_1, a_2), \beta = (b_1, b_2) \in V, c \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow a_1 + a_2 = 0, b_1 + b_2 = 0$$

$$\Rightarrow (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) = 0, \quad c(a_1 + a_2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta \in V, \quad c\alpha \in V$$

子空间: 非空 对加法封闭 对数乘封闭

不是子空间: 否定任一条, 或 $0 \notin V$

例3. 设 $V = \{(x_1, x_2) / x_1 + x_2 = 1\}$, V 是否为 \mathbb{R}^2 的子空间?

不是 $(0, 0) \notin V$

例4. 设 $V = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) / x_1 x_2 = 0\}$, V 是否为 \mathbb{R}^n 的子空间?

不是 $\alpha = (1, 0, \dots), \beta = (0, 1, \dots) \in V$

但是 $\alpha + \beta = (1, 1, \dots) \notin V$

例5. (1) 设 π_1 是过坐标原点的平面, 则

以原点为始点, π_1 上面的点为终点的所有向量

为 \mathbf{R}^3 的一个子空间.

(2) 设 l_1 是过坐标原点的空间直线, 则

以原点为始点, l_1 上面的点为终点的所有向量

为 \mathbf{R}^3 的一个子空间.

若 π_2, l_2 不经过原点, 则如上结论不正确.

为什么?

不含0向量!