



# 1.4 极限运算法则(I)

- 一、极限运算法则
- 二、求极限方法举例

电多科技大学数学科学学院

## 一、极限运算法则



定理 设  $\lim f(x) = A, \lim g(x) = B, 则$ 

(1) 
$$\lim [f(x)\pm g(x)]=A\pm B;$$

(2) 
$$\lim [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$$
;

(3) 
$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$
, 其中 $B \neq 0$ .

$$:: \lim f(x) = A, \lim g(x) = B.$$

$$\therefore f(x) = A + \alpha, g(x) = B + \beta,$$
 其中 $\alpha \to 0, \beta \to 0.$ 

$$[f(x)\pm g(x)] =$$

$$(A\pm B)+(\alpha\pm\beta)$$

$$(\alpha \pm \beta) \rightarrow 0. \therefore (1)$$
成立.

$$[f(x)\cdot g(x)]=(A+\alpha)(B+\beta)$$

$$= AB + [(A\beta + B\alpha) + \alpha\beta]$$

$$[(A\beta + B\alpha) + \alpha\beta] \to 0.$$

二(2)成立.



推论1 如果 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ 存在,而x为常数,则  $\lim_{x \to \infty} f(x) = c \lim_{x \to \infty} f(x)$ . 常数因子可以提到极限记号外面.

推论2 如果 $\lim_{x \to \infty} f(x)$ 存在,而 $\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} f$ 

W

# 二、求极限方法举例

例1 求 
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-3x+5}$$
.

$$\underset{x\to 2}{\text{HI}}$$
  $(x^2-3x+5)$ 

$$= \lim_{x \to 2} x^2 - \lim_{x \to 2} 3x + \lim_{x \to 2} 5$$

$$= (\lim_{x\to 2} x)^2 - 3\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5$$

$$= 2^2 - 3 \cdot 2 + 5 = 3 \neq 0,$$



$$\therefore \lim_{x\to 2} \frac{x^3-1}{x^2-3x+5}$$

$$= \frac{\lim_{x\to 2} x^3 - \lim_{x\to 2} 1}{\lim_{x\to 2} (x^2 - 3x + 5)}$$

$$=\frac{2^3-1}{3}=\frac{7}{3}.$$



注: 1. 设
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$
,则有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a_0 (\lim_{x \to x_0} x)^n + a_1 (\lim_{x \to x_0} x)^{n-1} + \dots + a_n$$

$$= a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \dots + a_n = f(x_0).$$

2. 设 
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$
, 且  $Q(x_0) \neq 0$ , 则有

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} P(x)}{\lim_{x\to x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = f(x_0).$$

若 $Q(x_0)$  = 0, 则商的法则不能应用.

例2 求 
$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{x^2+2x-3}$$
.

$$X : \lim_{x \to 1} (4x - 1) = 3 \neq 0,$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} \frac{x^2+2x-3}{4x-1} = \frac{0}{3} = 0.$$

由无穷小与无穷大的关系,

得 
$$\lim_{x\to 1} \frac{4x-1}{x^2+2x-3} = \infty$$
.

# 例3 求 $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3+3x^2+5}{7x^3+4x^2-1}$ .

解 原式 = 
$$\lim_{x \to \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}}{7 + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^3}}$$

$$=\frac{2}{7}$$



#### 注:

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n} = \begin{cases} \frac{a_0}{b_0}, & \exists n = m, \\ 0, & \exists n > m, \\ \infty, & \exists n < m, \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{7x^3}=\frac{2}{7}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{7x^3}=0.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3}{7x^2}=\infty.$$



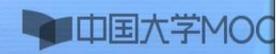
### 思考题

求下面问题的极限

1. 
$$\lim_{x\to 0} (\frac{x+1}{x^3-3})$$

$$2. \lim_{x \to \infty} (\frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 1})$$





# 1.4 极限运算法则(II)

## 一、复合函数运算法则

1

电多科技大学数学科学学院



## 定理 (复合函数运算法则)

设函数 $u = \varphi(x)$ , 且  $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = a$ , 但在点 $x_0$  的某去心邻域内

$$u = \varphi(x) \neq a$$
, 又 $\lim_{u \to a} f(u) = A$ , 则复合函数  $f[\varphi(x)] \stackrel{\cdot}{=} x \to x_0$ 时

的极限也存在,且 
$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A$$
.

即 
$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to a} f(u) = A$$
.



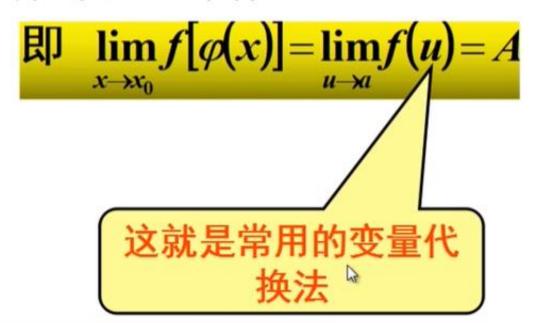
#### 注:1.定理中将



$$\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=a$$
 改为  $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\infty$  或  $\lim_{x\to\infty}\varphi(x)=\infty$ 

而
$$\lim_{u\to u} f(u) = A$$
 改为 $\lim_{u\to\infty} f(u) = A$ ,可得类似结论.

2.定理表明:满足定理的条件:



# 例1 设 $\lim_{x \to x} \varphi(x) = A > 0$ , 证明:

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{\varphi(x)} = \sqrt[n]{A} \ (n\in N).$$

证 令 
$$u = \varphi(x)$$
,  $f(u) = \sqrt[n]{u}$ ,

根据假设 
$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = A$$
.

则由定理可得

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = \lim_{u\to A} f(u)$$

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt[n]{\varphi(x)} = \lim_{u \to A} \sqrt[n]{u}$$

$$= \sqrt[n]{A} \cdot (n \in N)$$



#### <mark>列2</mark> 求 lim ln sin x.

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\mathbf{M}$$
 令  $\mathbf{u} = \sin x$ ,

则 
$$x \to \frac{\pi}{2} \Rightarrow u \to 1$$
,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x = \lim_{u\to 1}\ln u$$

$$= \ln 1 = 0.$$



### 思考题

求下面问题的极限

3

1. 
$$\lim_{x\to 1}(x-2)^2$$

2. 
$$\lim_{x\to 1} (\ln(\frac{1}{x-1}))$$