七. 对称矩阵、反对称矩阵

对称矩阵: $A^T = A$

即 $a_{ij} = a_{ji},\ \forall i, j$

反对称矩阵: $A^T = -A$

即 $a_{ii} = 0,\ a_{ij} = -a_{ji},\ \forall i \neq j$

例9. 下列矩阵是否对称矩阵，反对称矩阵？

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

问题: 数乘对称矩阵是否仍为对称矩阵?

同阶对称矩阵之和是否仍为对称矩阵?

同阶对称矩阵的乘积是否仍为对称矩阵?

例

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

例10. 设A, B均为n阶对称阵, 则: AB对称 $\Leftrightarrow$ $AB = BA$.

证: $\Leftarrow$: $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$

$\Rightarrow$: $(AB)^T = AB$

所以 $AB = (AB)^T = B^T A^T = BA$.

结论: 对任意矩阵 A，AA^T和 A^TA都是对称矩阵.

证： $(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T$

思考:

设A, B是同阶方阵,其中A对称(反对称), B对称(反对称), 则$A+B(A-B, AB)$如何?

思考: 设A为实矩阵. 证明: 若$A^TA=O$, 则$A = O$.

设A为实对称阵. 证明: 若$A^2=O$, 则$A = O$.

[结束]