《线性代数与空间解析几何》

第六章 二次型与二次曲面

第一讲 实二次型及其标准形

第二讲 正定二次型

第三讲 曲面与空间曲线

第 四讲 二次曲面

电子科技大学 蒲和平

第一讲 实二次型及其标准形

- 二次型及其矩阵表示
- 矩阵的合同
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形
- 内容小结

一、二次型及其矩阵表示

1. 二次型的概念

定义 n元二次齐次多项式

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+\underline{2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+\cdots+2a_{1n}x_1x_n}$$
$$+a_{22}x_2^2+\underline{2a_{23}x_2x_3+\cdots+2a_{2n}x_2x_n}$$
$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+a_{nn}x_n^2$$

称为n元二次型，简称为二次型.

例如 $f(x_1,x_2)=x_1^2+x_1x_2+x_2^2$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_2^2+x_1x_2-5x_1x_3-x_3^2$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-ix_1x_2$$

若a_{ij}为复数，称为复二次型；

若a_{ij}为实数，称为实二次型.

令 $a_{ij}=a_{ji}\quad (i,\ j=1,2,\cdots,\ n)$

$$
\begin{aligned}
f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\ & a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n \\
& +a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n \\
& +\cdots\cdots \\
& +a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2
\end{aligned}
$$

$$
=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\boxed{x_i}x_j=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\cdot\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)
$$

$$
=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j\\ \cdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j\end{pmatrix}=X^TAX
$$

其中 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, $a_{ij}=a_{ji}$,

即有

$$f(X)=X^T AX \qquad (A^T=A)$$

对称矩阵A称为二次型 $f(X)$ 的矩阵.

A 的秩称为二次型 $f(X)$的秩. $\mathrm{R}(A)=\mathrm{R}(f)$.

例如，$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

其对应的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{R}(A) = 2$$

则 $f(x_1, x_2)$的秩为2.

记 $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$，易验证，仍有 $f = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

但 $B^T \neq B$, 故 B 不是 $f(x_1, x_2)$ 的矩阵.

二次型与其矩阵是一一对应的，因此可借助实对称矩阵来研究实二次型.

例1 求下列二次型的矩阵与秩

(1) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2$

(2) $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_2x_3$

解（1）二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{R}(A) = 2.$$

（2）二次型的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 3 \\ 0 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{R}(A) = 3.$$

2. 二次型的化简

二次曲线

$$ax^2+2bxy+cy^2=1$$ 圆？椭圆？双曲线？

$$\Leftrightarrow (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=1,$$ 记为 $X^TAX=1$

作坐标变换(正交变换) $X=CY$

即 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$，方程为 $(CY)^TA(CY)=1$

即 $Y^T(C^TAC)Y=1$

若 $C^TAC=\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$，则方程化为 $\lambda_1x'^2+\lambda_2y'^2=1$

此时很容易判断二次曲线的类型.

对于n元二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X^TAX$

作线性变换

$$\begin{cases} x_1=c_{11}y_1+c_{12}y_2+\cdots+c_{1n}y_n \\ x_2=c_{21}y_1+c_{22}y_2+\cdots+c_{2n}y_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_n=c_{n1}y_1+c_{n2}y_2+\cdots+c_{nn}y_n \end{cases}$$ 记为 $X=CY$，$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

有 $f(X)=(CY)^TA(CY)=Y^T(\underbrace{C^TAC}_{B})Y=Y^TBY\triangleq g(Y)$

即 $f(X)=X^TAX \xrightarrow{X=CY} g(Y)=Y^TBY$

其中 $B=C^TAC$，若C可逆，称 $X=CY$ 为可逆线性变换，并称A与B合同.

主要内容

1. 二次型的矩阵，二次型的秩；

2. 可逆线性变换对二次型的矩阵的影响.

练习 求二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+kx_2^2+x_3^2+2x_1x_2-4x_2x_3$$

的秩.

解 二次型的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&k&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&k-1&-2\\0&-2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&k-5&-2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$k=5,\mathrm{R}(A)=2$； $k\neq 5,\mathrm{R}(A)=3$.