二．相似的定义与性质

相似： 设A与B都是n阶矩阵，若存在可逆矩阵P,使：

$$P^{-1}AP=B,$$

则称 A与B相似，记为$A\sim B$

性质：

(1) 反身性：$A\sim A$

(2) 对称性：$A\sim B\Rightarrow B\sim A$

(3) 传递性：$A\sim B$ 且 $B\sim C\Rightarrow A\sim C$

证： (3)：$A=P^{-1}BP \quad B=Q^{-1}CQ$

$$\Rightarrow A=P^{-1}Q^{-1}C\underbrace{QP}_{D}=D^{-1}CD$$

例1. 设 $A\sim C, B\sim D$, 证明: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$

证: $A\sim C, B\sim D \Rightarrow$ 存在可逆矩阵P, Q, 使得

$$P^{-1}AP = C,\ Q^{-1}BQ = D$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} P^{-1} & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

定理1. 相似矩阵有相同的特征值.

证: 设$B=P^{-1}AP$,则:

$$
\begin{aligned}
|\lambda I-B| &= |\lambda I-P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}\lambda IP-P^{-1}AP| \\
&= |P^{-1}(\lambda I-A)P| \\
&= |P^{-1}|\cdot|\lambda I-A|\cdot|P| \\
&= |\lambda I-A|
\end{aligned}
$$

思考: 相似矩阵是否有相同的行列式?秩?反之如何?

定理2. $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵A的**全部特征值.**

证:

$$|\lambda I - \Lambda| = \begin{vmatrix} \lambda - \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda - \lambda_n \end{vmatrix} = (\lambda - \lambda_1)\cdots(\lambda - \lambda_n)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Lambda\text{的全部特征值是:}\lambda_1, \cdots, \lambda_n. \\ A \sim \Lambda \Rightarrow A\text{与}\Lambda\text{的特征值相同,} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow A$ 的全部特征值是$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.