三、线性相关性的概念

考虑线性方程组:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, & (1) \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -3, & (2) \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 = 1. & (3) \end{cases}$$

观察: $2\times(1)+(2)=(3)$

解释: ◆ 方程(3)可由方程(1)(2)线性表出;

◆ 方程(3)在方程组中"多余", 去掉该方程不影响方程组的求解.

问题: 能否用数学概念描述方程组中存在多余的方程?

定义: 给定向量组$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$,

若存在不全为零的数$k_1, k_2, \ldots, k_m$使得:

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0,$$

则称$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性相关; 否则, 称$\alpha_1, \ldots, \alpha_m$线性无关.

特殊情形:

(1) 单个向量α:

α线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ $\alpha=0$ ($\alpha\neq 0$);

(2) 两个向量α_1, α_2:

α_1, α_2线性相关(无关) $\Leftrightarrow$ 对应分量(不)成比例.

例1. n维单位向量组 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证: 设$x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+\cdots+x_n\varepsilon_n=0,$

$$\Rightarrow x_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}+\cdots x_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ $\Rightarrow \varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 线性无关.

证明向量组 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 线性无关的方法:

设 $x_1\alpha_1+\cdots+x_m\alpha_m=0$, 设法证明 $x_1=\ldots=x_m=0$.

例2. 含有零向量的向量组线性相关.

证: 存在不全为0的数1, 0, …, 0, 使得

$$1\,\mathbf{0} + 0\alpha_1 + \dots + 0\alpha_m = \mathbf{0}.$$

例3. 含有重复向量的向量组线性相关.

证: 设给定向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta, \beta$

存在不全为0的数0, 0, …, 0, 1, −1 使得:

$$0\alpha_1 + 0\alpha_2 + \dots + 0\alpha_m + 1\beta + (-1)\beta = \mathbf{0}.$$