第五讲　习题课

一. 习题1

二. 习题2

习题2

例1 设$A=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&8&2\\-4&2&5\end{pmatrix}$，证明：(1) $A^2-9A=O$;

(2) A 不可逆.

分析：$A^2-9A=O \Leftrightarrow A(A-9I)=O$

证：

(1) $A^2-9A=A(A-9I)=\begin{pmatrix}5&2&-4\\2&8&2\\-4&2&5\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}-4&2&-4\\2&-1&2\\-4&2&-4\end{pmatrix}}_{A-9I}=O.$

(2):(I)若A 可逆,则

$O=A^{-1}O=A^{-1}(A^2-9A)=A^{-1}A(A-9I)=A-9I\neq O$

$\longrightarrow$ A 不可逆.

A可逆 $\Leftrightarrow AX=0$ 只有零解

(II) 记 $A-9I=\begin{pmatrix}-4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 2\\ -4 & 2 & -4\end{pmatrix}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$,则

$$A^2-9A=O\Leftrightarrow A(A-9I)=O\Leftrightarrow A(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=O$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A\beta_i=0\\ \beta_i\neq 0\end{cases}(i=1,2,3)\longrightarrow A\text{ 不可逆.}$$

例2 设$A_{n\times n}$，证明:存在$B_{n\times n}$,$C_{n\times n}$,使得 $A=B+C$,

(其中$B^{\mathrm{T}}=B, C^{\mathrm{T}}=-C$)

分析: $\begin{cases} A=B+C \\ A^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}=B-C \end{cases} \Rightarrow B=?\ C=?$

证: $A=B+C \quad (1)$

$$\Rightarrow A^{\mathrm{T}}=(B+C)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}=B-C \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow A+A^{\mathrm{T}}=2B \Rightarrow B=\frac{1}{2}(A+A^{\mathrm{T}})$$

$$(1)-(2) \Rightarrow A-A^{\mathrm{T}}=2C \Rightarrow C=\frac{1}{2}(A-A^{\mathrm{T}})$$

例3 设 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$, (1)证明：$(I-A)^{-1}=I-\frac{1}{2}A$;

(2) 写出 $(I-A)^{-1}$.

$\boxed{\text{分析: } A\Rightarrow(I-A)\cdot B=I\Rightarrow B=(I-A)^{-1}}$

证1:

(1) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$A^2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}_{\|\atop 3}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\end{pmatrix}=3A$$

即 $A^2-3A=0 \Leftrightarrow A^2-3A+2I=2I$

$$\Leftrightarrow (I-A)(2I-A)=2I$$

$$\Leftrightarrow (I-A)(I-\frac{1}{2}A)=I$$

$$\Rightarrow (I-A)^{-1}=I-\frac{1}{2}A$$

(2) $(I-A)^{-1}=I-\frac{1}{2}A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&-1\\-1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}$$

分析: $A \Rightarrow I-A \Rightarrow (I-A, I) \to (I, (I-A)^{-1})$

证2: $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow I-A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow (I-A \mid I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \quad (I-A)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = I - \frac{1}{2}A.$$