第二章 行列式

§2.2 行列式的性质与计算

一. 行列式性质1～性质3

二. 行列式性质4、性质5

三. 行列式的计算

四. 方阵乘积的行列式

五. 几个例题

电子科技大学 黄廷祝

一. 行列式性质1～性质3

性质1 行列式按任一行展开，其值相等，即

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

M_{ij}：划去A的i行j列后所余下行列式, a_{ij}的余子式

A_{ij}: a_{ij} 的代数余子式

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \\ 7 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -2\times 4\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2\times 4\times(-15)$$

例2 计算 $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{nn} \end{vmatrix}$

解

$$D_n = a_{nn} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix}$$

$$= a_{nn} a_{n-1,n-1} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-2} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2,n-2} \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} = \cdots = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

同理

$$D_n = \begin{vmatrix} & * & & a_n \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & a_2 & & \\ a_1 & & 0 & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_n$$

推论 det$A$的某一行全为零$\Rightarrow \det A = 0$

性质2 det$A$ 的第i行元素与第j行元素对应相等

即 $a_{ik} = a_{jk}$, $i \neq j$, $k=1,\ldots, n$ $\Rightarrow \det A = 0$

证 对行列式的阶n用数学归纳法

1°: $n=2$, 显然.

2°: 设结论对n-1阶行列式成立, 对n阶行列式,

按第$k(\neq i, j)$行展开:

$$\det A = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \quad (k \neq i, j)$$

$M_{kl}(l=1,\ldots,n)$: n-1阶行列式, 有两行元对应相等

$$\Rightarrow A_{kl} = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \Rightarrow \det A = 0$$

性质3

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证

$$\text{左}\left(\text{按第}i\text{行展开}\right)=(b_{i1}+c_{i1})A_{i1}+\cdots+(b_{in}+c_{in})A_{in}$$

$$=(b_{i1}A_{i1}+\cdots+b_{in}A_{in})+(c_{i1}A_{i1}+\cdots+c_{in}A_{in})$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1+4 & 2+5 & 3+6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 0 = 0$$

[结束]