第一章 矩阵及其初等变换

§1.3 逆矩阵

一. 逆矩阵的概念

二. 逆矩阵的性质

三. 矩阵可逆的充要条件

四. 用行初等变换求逆矩阵

电子科技大学 黄廷祝

一. 逆矩阵的概念

数$a\neq 0$：$a\,a^{-1}=a^{-1}\,a=1$

$\boxed{\text{什么样的矩阵}A\text{：}\quad A\cdot ?=I}$

设A为<u>n阶矩阵</u>，若<u>存在n阶矩阵B</u>，使得

$$\underline{AB=BA=I},$$

则称A为可逆矩阵，B为A的逆矩阵，记为$A^{-1}=B$.

若A可逆，则A^{-1}存在，且$AA^{-1}=A^{-1}A=I$.

单位阵 I: $$I^{-1}=I$$

对角阵:

$$D=\begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix},\ (d_1,\ldots,d_n\neq 0)\ ;\quad D^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}$$

$$(kI)^{-1}=\frac{1}{k}\ I,\ (k\neq 0)$$

定理1. 设A可逆， 则它的逆是唯一的.

证 设有B和C满足

$$AB = BA = I, \qquad AC = CA = I.$$

则

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$$

可以证明:

> 若A, B均为方阵，且$AB = I$ (或 $BA = I$), 则:
> A可逆且$B=A^{-1}$.

思考: $AB=kI$可得什么？

[结束]

二. 逆矩阵的性质

性质：设A, B 均为n阶可逆矩阵，数$\lambda \neq 0$，则

(1) A^{-1}可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$;

(2) λA可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$;

(3) AB可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$;

(4) A^T可逆，且$(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$.

证 (3) $(AB)(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AA^{-1}=I$

所以AB可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

(4) $A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=I$

例1. 设方阵A满足$A^2-A-2I=O$, 证明：

(1) A 和 $I-A$ 都可逆, 并求其逆矩阵；

(2) $A+I$ 和 $A-2I$不同时可逆.

常见:

已知矩阵的一个等式，证明某矩阵可逆, 或进行计算

(1) 从已知等式变形出(矩阵1)(矩阵2)=kI

(2) 先化简, 后计算

例2. 设方阵A满足$A^2-A-2I=O$, 证明：

(1) A和$I-A$都可逆，并求其逆矩阵；

(2) $A+I$和$A-2I$不同时可逆.

证 (1): $O=A^2-A-2I=A(A-I)-2I$

$$\Rightarrow A(A-I)=2I$$

$$\Rightarrow A\text{可逆}, \text{且} A^{-1}=\frac{1}{2}(A-I)$$

$$O=A^2-A-2I=(-A+I)(-A)-2I$$

$$\Rightarrow (I-A)(-A)=2I$$

$$\Rightarrow I-A\text{可逆}, \text{且}(I-A)^{-1}=-\frac{1}{2}A$$

设方阵A满足$A^2-A-2I=O$, 证明：

(1) A和$I-A$都可逆，并求其逆矩阵；

(2) $A+I$ 和$A-2I$不同时可逆.

已知方阵的等式证明方阵不可逆:

(方阵1)(方阵2)$=O$

$\Rightarrow$ 方阵1，方阵2 不能同时可逆！

为什么？

(2):

$$(A+I)(A-2I)=A^2-A-2I=O$$

所以，$A+I$ 和A-$2I$不同时可逆.

例3 已知 $B^2=B$， $A=I+B$

证明：A可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$.

证: $$A\left[\frac{1}{2}(3I-A)\right]=\frac{3}{2}A-\frac{1}{2}A^2$$

$$=\frac{3}{2}(I+B)-\frac{1}{2}(I+B)^2$$

$$=\frac{3}{2}I+\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}\left(I^2+2B+B^2\right)$$

$$=\frac{3}{2}I+\frac{3}{2}B-\frac{1}{2}I-B-\frac{1}{2}B^2=I$$

$\therefore$ A 可逆且 $A^{-1}=\frac{1}{2}(3I-A)$

例4 设A可逆，则

$$AX=b\text{有唯一解}X=A^{-1}b$$

$$AX=0\text{只有零解 }X=0$$

例5 设方阵A满足: $A^k=O\ (k>0)$,

(1) 证明: $(I-A)$可逆

(2) 计算$(I-A)^{-1}$

$$1-x^k=(1-x)\left(1+x+x^2+\cdots x^{k-1}\right)$$

问题：初等矩阵可逆吗？其逆阵呢？

$$E_{ij}^{-1}=E_{ij};\qquad E_i^{-1}(c)=E_i(\tfrac{1}{c}),\ c\neq 0;$$

$$E_{ij}^{-1}(c)=E_{ij}(-c).$$

为什么？

[结束]

三. 矩阵可逆的充要条件

定理2 设A为n阶矩阵，则如下命题等价：

1. A是可逆的；
2. $AX=O$只有零解；
3. A与I行等价；
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

证 1→2: 显然(*why?*)

2→3: 设A经一系列初等行变换化为行阶梯形B

则$BX=0$只有零解. 断言: B的对角元均非零

否则B最后一行元均为零, $BX=O$有非零解, 矛盾!

于是B可经一系列初等行变换化为行简化阶梯形I

1. A是可逆的;
2. $AX=O$只有零解;
3. A与I行等价;
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

3→4: 由条件，A可经行初等变换得I.

故存在初等矩阵$E_1,\dots,E_k$使得

$$E_k\cdots E_1A=I$$

$$\Rightarrow A=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}I=E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$$

4→1: 显然(*why*?)

推论 设A为n阶矩阵，则$AX=b$有唯一解的充要条件是A可逆.

证 **充分性:**

A可逆，则$AX=b$有唯一解 $X=A^{-1}b$

必要性:

反证 设$AX=b$有唯一解X_0, 但A不可逆.

A不可逆$\Rightarrow AX=0$有非零解Z.

令$Y=X_0+Z$, 则Y为$AX=b$的解，矛盾!

[结束]

四. 用行初等变换求逆矩阵

设A可逆，所以存在初等矩阵$E_1, \ldots, E_k$，使得

$$\underline{E_k E_{k-1} \cdots E_1} A = I$$

$$A^{-1} = E_k E_{k-1} \cdots E_1 = \underline{E_k E_{k-1} \cdots E_1} I$$

当A经系列初等行变换化为I时，

I经相同的初等行变换化为A^{-1}!

方法:

$$\boxed{(A \mid I) \xrightarrow{\text{初等行变换}} (I \mid A^{-1})}$$

例6. 求A的逆矩阵：$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}$.

解:

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&1&2&0&1&0\\1&3&3&0&0&1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-3&-4&-2&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&-4&-5&1&3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&\frac{5}{4}&-\frac{1}{4}&-\frac{3}{4}\end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

例7. 求A的逆矩阵：
$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & 1\\ 0 & 4 & -1\end{pmatrix}.$$

解

$$(A,I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)$$

故A不可逆

为什么？

<< >>

例8. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}$

求: (1) $(A+2I)^{-1}(A^2-4I)$, (2) $(A+2I)^{-1}(A-2I)$

解: $(A+2I)^{-1}(A^2-4I)=(A+2I)^{-1}(A+2I)(A-2I)$

$$=A-2I=\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&0&0\\1&-3&0\\1&1&-3\end{pmatrix}$$

(2) $(A+2I)^{-1}(A-2I)=?$

例9 解矩阵方程：(1) $AX=B$， (2) $XA=B$.

$$A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

其他类型的矩阵方程:

(1) $AXB=C$, 且A与B可逆, 那么

$$A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1},\quad X=A^{-1}CB^{-1}.$$

(2) $AX+B=C$， 且A可逆, 那么

$$AX=C-B,\quad X=A^{-1}(C-B).$$

(3) 如果A不可逆, 如何求解方程：

$$AX=B?$$

令$X=\begin{pmatrix}x_{11}&x_{12}&x_{13}\\x_{21}&x_{22}&x_{23}\\x_{31}&x_{32}&x_{33}\end{pmatrix}$, 由 $AX=B$ 联立得9元方程组，求解之！

例10. 设三阶方阵A, B满足关系:

$$A^{-1}BA = 6A + BA, \text{且} A = \begin{pmatrix} 1/2 & & O \\ & 1/4 & \\ O & & 1/7 \end{pmatrix} \text{求} B$$

解:

$$A^{-1}BA - BA = 6A$$

$$\Rightarrow \left(A^{-1} - I\right)BA = 6A \Rightarrow \left(A^{-1} - I\right)B = 6I$$

$$\Rightarrow B = 6\left(A^{-1} - I\right)^{-1}.$$

$$B = 6\left(A^{-1} - I\right)^{-1}$$

$$= 6\left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]^{-1} = 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= 6\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

例11 设四阶矩阵

$$B=\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}$$

且矩阵满足关系式：$A(I-C^{-1}B)^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}}=I$ 求矩阵**A**

解

$$I=A[C(I-C^{-1}B)]^{\mathrm{T}}=A(C-CC^{-1}B)^{\mathrm{T}}=A(C-B)^{\mathrm{T}}$$

$$(C-B)^{\mathrm{T}}=\left(\begin{pmatrix}2&1&3&4\\0&2&1&3\\0&0&2&1\\0&0&0&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\0&0&0&1\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}$$

$$=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&0&0&1\end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\3&2&1&0\\4&3&2&1\end{pmatrix}$$

易知$(C-B)^{\mathrm{T}}$可逆，所以：$A=[(C-B)^{\mathrm{T}}]^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-2&1&0\\0&1&-2&1\end{pmatrix}$

[结束]