电子科技大学
University of Electronic Science and Technology of China

中国大学MOOC

第四章 常微分方程

第1讲 微分方程的基本概念

电子科技大学数学科学学院

一、引例

例1 一曲线过点$(1,2)$，且在该曲线上任一点$M(x,y)$处的切线斜率为$2x$，求此曲线的方程.

解 设所求曲线为$y=y(x)$，根据导数的几何意义，可得

$$\frac{dy}{dx}=2x \quad \Rightarrow \quad y=\int 2xdx$$

$$\Rightarrow \quad y=x^2+C$$

其中C为任意常数. 即可以看出满足此条件的方程有无穷多条.

又因为$y(1)=2$，即当$x=1$时，$y=2$，求得$C=1$.

故所求曲线方程为 $y=x^2+1$.

例2 列车在平直的线路上以20米/秒的速度行驶，当制动时列车获得加速度-0.4米/秒^2，问开始制动后多少时间列车才能停住？以及列车在这段时间内行驶了多少路程？

解 设制动后t秒钟行驶s米，$s = s(t)$，根据加速度的定义和二阶导数的物理意义有

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -0.4$$

经过积分可得

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + C_1$$

$$s = -0.2t^2 + C_1t + C_2$$

且由题意s，v还满足附加条件$s(0) = 0$，$v(0) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = 20$，

带入条件后知 $C_1 = 20$, $C_2 = 0$.

$$v = \frac{ds}{dt} = -0.4t + 20$$

进一步可得 $s = -0.2t^2 + 20t$.

开始制动到列车完全停住共需$t = \dfrac{20}{0.4} = 50$(秒),

列车在这段时间内行驶了$s = -0.2 \times 50^2 + 20 \times 50 = 500$(米).

二、基本概念

微分方程： 凡含有未知函数的导数或微分的方程.

例 $y' = xy,\ y'' + 2y' - 3y = e^x,\quad (t^2 + x)dt + xdx = 0.$

常微分方程： 未知函数是一元函数.（本章讨论的内容）

偏微分方程： 未知函数是二元或二元以上函数.

微分方程的阶： 微分方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数.

一阶常微分方程的形式：$F(x, y, y') = 0,\ y' = f(x, y).$

一般n阶常微分方程的形式：$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0.$

若能从方程中解出 $y^{(n)}$则：$y^{(n)} = f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}).$

线性与非线性微分方程

定义：如果微分方程$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$的左端为未知函数$y$及它的各阶导数$y',y''\cdots,y^{(n)}$的一次有理整式，则称该微分方程为**$n$阶线性微分方程.**

n阶线性微分方程的一般形式为：

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x)$$

其中 $a_i(x)(i=1,2,\cdots n)$和$f(x)$都是x的已知函数.

定义：不是线性的微分方程称为**非线性的微分方程.**

$$\left.\begin{aligned} & y' + P(x)y = Q(x) \\ & y'' + x^2 y' + (\sin x)y = 2 \\ & y'' + y' + x^3 y = 0 \end{aligned}\right\} \text{线性微分方程}$$

$$\left.\begin{aligned} & x\underline{(y')^2} - 2\underline{yy'} + x = 0 \\ & y'' + y' + x^3 \underline{y^2} = 0 \\ & y'' + 3x\underline{\sin y} = 0 \end{aligned}\right\} \text{非线性微分方程}$$

三、微分方程的解

微分方程的解: 代入微分方程能使方程成为恒等式的函数.

(1) **通解**: n阶微分方程的解中含有n个相互独立的任意常数的解.

例 $y' = y$, 通解 $y = ce^x$;

$y'' + y = 0$, 通解 $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$.

n阶微分方程通解的其一般形式为

$$\Phi(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$$

其中$c_1, c_2, \cdots, c_n$为相互独立的任意常数. 若上式表示为

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

则称它为微分方程的**显式解**，否则称为**隐式解**或**通积分**.

(2) 特解：微分方程的不含任意常数的解.

例　$y = x^2 + c$ 是微分方程 $y' = 2x$ 的通解；

$y = x^2 + 1$ 是微分方程 $y' = 2x$ 的特解.

物理意义：微分方程的通解反映了由该方程所描述的某一运动过程的一般变化规律.

定解条件：若根据问题的具体情况，提出一些附加条件来确定通解中的任意常数.

初始条件：反映运动初始状态的定解条件.

初值问题：求微分方程满足初始条件的特解问题.

各阶微分方程的初值问题:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y'\right) = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y''\right) = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 \\ y'\big|_{x=x_0} = y'_0 \end{cases}$$

……

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', \cdots y^{(n)}\right) = 0 \\ y\big|_{x=x_0} = y_0, \ y'\big|_{x=x_0} = y'_0, \cdots, y^{(n-1)}\big|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

注: n阶方程应有n个初始条件.

积分曲线族: 含有任意常数的通解的曲线.

积分曲线: 微分方程的解的曲线.

例 $y=x^2+c$是微分方程$y'=2x$的积分曲线族.

$y=x^2+1$为它的积分曲线.

例3　验证：函数$x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$是微分方程$\dfrac{d^2x}{dt^2} + k^2x = 0$的解，并求满足初始条件$x\big|_{t=0} = A, \dfrac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = 0$的特解.

解　根据函数x的表达式，可得

$$\frac{dx}{dt} = -kC_1\sin kt + kC_2\cos kt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2C_1\cos kt - k^2C_2\sin kt$$

将$\dfrac{d^2x}{dt^2}$和x的表达式代入原方程，得

$$-k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) + k^2(C_1\cos kt + C_2\sin kt) \equiv 0$$

故 $x = C_1\cos kt + C_2\sin kt$是原方程的解.

因为 $x\big|_{t=0} = A,\quad \left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 0,$

所以 $C_1 = A,\ C_2 = 0.$

所求特解为$x = A\cos kt.$