五. 三个证明例子

例5 设A为n阶矩阵$(n\geq 2)$，证明 $R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n, \\ 0, & R(A)<n-1. \end{cases}$

证 ①若$R(A)=n$: $\det A\neq 0$，

$$AA^*=(\det A)I,$$

$$|A||A^*|=|(\det A)I|=|A|^n\neq 0,$$

所以 $|A^*|\neq 0$, 即 $R(A^*)=n$.

② $R(A)<n-1$: A中所有$n-1$阶子式均为零，

$$A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{n1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}=O, \quad R(A^*)=0.$$

例6 **证明** $R\left(\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}\right) = R(A) + R(B).$

证 令 $R(A) = r_1$, $R(B) = r_2$. **存在可逆矩阵** P_1, P_2, Q_1, Q_2 **使得**

$$A = P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1, \quad B = P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2,$$

$$\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_1 & O \\ O & P_2 \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & O \\ O & P_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_1 & O \\ O & Q_2 \end{pmatrix}$$

可逆矩阵，为什么？

所以，秩 $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} =$ 秩 $\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r_1} & O \\ O & O \end{pmatrix} & O \\ O & \begin{pmatrix} I_{r_2} & O \\ O & O \end{pmatrix} \end{pmatrix} = r_1 + r_2.$

例7 设 A 为任一实矩阵，$R(A^T A)$与$R(A)$是否相等？

证 **任取一个非零实向量**x

若$Ax=0$，必有$A^T Ax=0$，

反之若$A^T Ax=0$，有 $x^T A^T Ax=0$

即 $(Ax)^T(Ax)=0 \Rightarrow Ax=0$;

由此可知 $Ax=0$与$A^T Ax=0$同解，

故 $R\left(A^T A\right)=R\left(A\right)$

[结束]