第四章 n维向量空间

4.1 n维向量空间的概念

何军华

电子科技大学

一、n 维向量空间的概念

几何空间中：

$$\alpha = \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2, a_3)$$

点P的坐标

几何向量的线性运算：加法, 数乘

设 $\alpha = (a_1, a_2, a_3)$, $\beta = (b_1, b_2, b_3)$, 规定

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3),$$

$$k \cdot \alpha = (ka_1, ka_2, ka_3).$$

所有3维向量组成的集合，按上述线性运算，满足：

四条加法规则

$1^o \quad \alpha+\beta=\beta+\alpha$

$2^o \quad (\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

$3^o \quad \alpha+0=0+\alpha=\alpha$

$4^o \quad \alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$

两条数乘规则

$5^o \quad 1\alpha=\alpha$

$6^o \quad k(l\alpha)=(kl)\alpha$

两条加法与数乘结合的规则

$7^o \quad k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

$8^o \quad (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

称此集合构成一个3维向量空间，记为$\mathbf{R}^3$.

n维向量空间R^n：

n维行向量： $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ (有序数组)

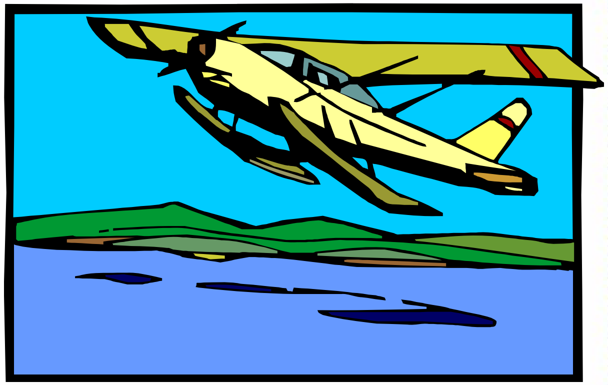
α的分量

n维列向量： $\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

R^n是行空间还是列空间? 取决于出现R^n时的上下文

实(复)向量： 分量为实(复)数的向量

n维向量的实际意义



确定飞机的状态，需要6个参数：

机身的仰角 φ $\left(-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$

机翼的转角 ψ $(-\pi < \psi \le \pi)$

机身的水平转角 θ $(0 \le \theta < 2\pi)$

飞机重心在空间的位置参数 $P(x, y, z)$

所以，确定飞机的状态，需用6维向量

$$\alpha = (x, y, z, \varphi, \psi, \theta)$$

向量相等 $\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n), \beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\alpha=\beta \Leftrightarrow a_i=b_i$$

零向量 $\alpha=(0, 0, \ldots, 0)$

负向量 $\alpha=(-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$

$\mathbf{R}^n$ 全体n维实向量所成集

n维向量的线性运算:

$$\alpha=(a_1, a_2, \ldots, a_n),\ \beta=(b_1, b_2, \ldots, b_n),$$

$$\alpha+\beta=(a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n),$$

$$k\alpha=(ka_1, ka_2, \ldots, ka_n),\ k\in\mathbf{R}.$$

加法与数乘满足：

(1) $\alpha+\beta=\beta+\alpha$;

(2) $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$;

(3) $\alpha+0=\alpha$;

(4) $\alpha+(-\alpha)=0$;

(5) $1\alpha=\alpha$;

(6) $k(l\alpha)=(kl)\alpha$;

(7) $k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$;

(8) $(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$.

称 $\mathbf{R}^n$ 构成 **n 维实向量空间.**

线性方程组与n维向量的线性运算：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

即 $$x_1\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n\begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

即 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n = b,$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

即 $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)X = b,$

$$AX = b$$

二. $\mathbf{R}^n$ 的子空间

子空间: R^n 的非空子集 V，且对加法和数乘运算封闭，即：

$$\alpha,\beta\in V, k\in R \Rightarrow \alpha+\beta\in V, k\alpha\in V,$$

则称 V 是 $\mathbf{R}^n$ 的子空间.

例1. (1) $\mathbf{R}^n$ 的子空间 V 一定包含零向量0, 为什么?

任取 $\alpha\in V \Rightarrow 0=0\alpha\in V$

(2) 子空间 V 对减法运算是否封闭? 为什么?

$$\alpha,\beta\in V \Rightarrow \alpha,(-1)\beta\in V$$

$$\Rightarrow \alpha-\beta=\alpha+(-1)\beta\in V$$

子空间的判定：

子空间：非空　对加法封闭　对数乘封闭

不是子空间：否定任一条，　或 $0 \notin V$

例2. 设 $V=\{(x_1, x_2) \mid x_1+x_2=0\}$, V是否为 $\mathbf{R}^2$ 的子空间？

是　显然V非空：$(0,0) \in V$

$$\forall \alpha=(a_1, a_2), \beta=(b_1, b_2) \in V, c \in \mathbf{R}$$

$$\Rightarrow a_1+a_2=0, b_1+b_2=0$$

$$\Rightarrow (a_1+b_1)+(a_2+b_2)=0, \quad c(a_1+a_2)=0$$

$$\Rightarrow \alpha+\beta \in V, \quad c\alpha \in V$$

子空间:　　非空　对加法封闭　对数乘封闭

不是子空间:　否定任一条,　　或 $0 \notin V$

例3. 设 $V = \{(x_1, x_2) \mid x_1 + x_2 = 1\}$, V 是否为 $\mathbf{R}^2$ 的子空间?

不是　$(0, 0) \notin V$

例4. 设 $V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 x_2 = 0\}$, V 是否为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间?

不是　$\alpha = (1, 0, \cdots), \beta = (0, 1, \cdots) \in V$

但是 $\alpha + \beta = (1, 1, \cdots) \notin V$

例5. (1) 设π_1是过坐标原点的平面，则

以原点为始点，π_1上面的点为终点的所有向量

为R^3的一个子空间.

(2) 设l_1是过坐标原点的空间直线，则

以原点为始点，l_1上面的点为终点的所有向量

为R^3的一个子空间.

若π_2, l_2不经过原点, 则如上结论不正确.

为什么？　　不含0向量!