第六章 二次型与二次曲面

习题课3

- 范 例

电子科技大学 蒲和平

四、曲面与空间曲线

1. 若柱面的母线平行于z轴，则柱面方程的特点是 不含变量z ________.

2. 设曲面方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, 当 $a=b$ 时，曲面可由曲线 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成；或由曲线 $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成.

3.曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=2 \\ z=x^2+y^2 \end{cases}$在$xoy$面的投影曲线为$\underline{\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}}$.

在yoz面的投影曲线为$\underline{\begin{cases} z=1 \\ x=0 \end{cases}\ (|y|\le 1).}$.

解 由曲线方程消去x得

$$z^2+z+2=0 \quad \Rightarrow (z-1)(z+2)=0$$

$$\Rightarrow z=1 \text{ 或 } z=-2 \text{ (舍去)}$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=1$$

4. 求直线$l:\dfrac{x}{a}=\dfrac{y-b}{0}=\dfrac{z}{1}$绕$z$轴旋转一周所得旋转曲面的方程,并指出方程表示什么曲面.

解 设$P(x,y,z)$为旋转曲面上的任一点，过P点作z轴的垂平面，该平面交直线l于点$P_0(x_0,y_0,z_0)$

由P与P_0到z轴的距离相等得

$$\begin{cases} x^2+y^2=x_0^2+y_0^2 \\ z=z_0 \end{cases}$$

由$P_0\in l\Rightarrow\dfrac{x_0}{a}=\dfrac{y_0-b}{0}=\dfrac{z_0}{1}$ 将以上三式联立消去x_0,y_0,z_0，得到旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2$$

$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2$$

曲面类型：

(1) $a=b=0$, 方程为$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$, 这是z轴，不构成曲面；

(2) $a=0, b\neq 0$, 方程为 $x^2+y^2=b^2$，是圆柱面；

(3) $a\neq 0, b=0$, 方程为 $x^2+y^2=a^2z^2$，是圆锥面；

(4) $a\neq 0, b\neq 0$, 方程为 $x^2+y^2-a^2z^2=b^2$

是单叶旋转双曲面.

5. 将方程 $2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3=1$

化为标准形，并说明它表示什么曲面。

解　$f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

特征值：$\lambda_1=1$（二重特征值），$\lambda_2=10$，

求$\lambda_1=1$ 的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ -2 & -4 & 4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组 $x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

特征向量：$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2 = (2, 0, 1)^{\mathrm{T}}$

将α_1, α_2 正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^{\mathrm{T}},$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2,\ 4,\ 5)^T$$

求λ_2=10 的特征向量:

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，特征向量：$\alpha_3 = (1, 2, -2)^T$

将 β_1, β_2 , α_3 单位化:

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\ 1,\ 0)^T, \quad \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,\ 4,\ 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1,\ 2,\ -2)^T.$$

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$

作正交变换 $X=CY$，则曲面化为标准形

$$y_1^2+y_2^2+10y_3^2=1$$ 曲面是椭球面.