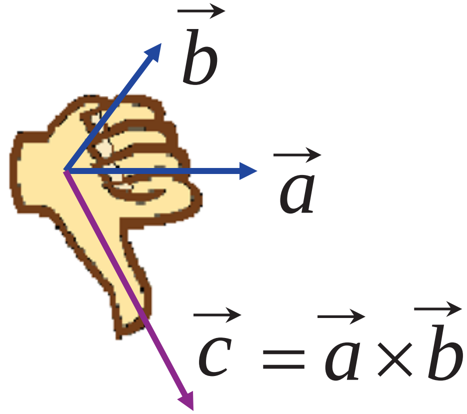
第二讲 向量的乘法

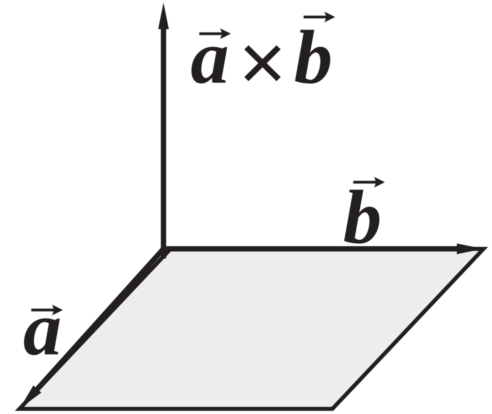
- 内　积
  1.内积的概念与性质
  2.内积的坐标形式
- 外　积
  1.外积的概念与性质
  2.外积的坐标形式
- 混合积
  1.混合积的概念与性质
  2.混合积的几何意义
- 内容小结

复习:

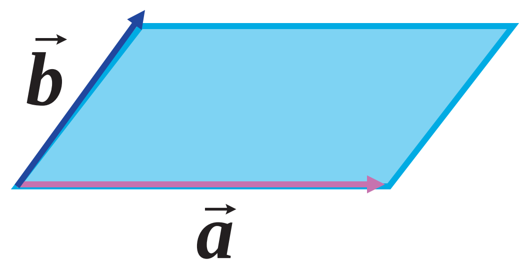
1. 外积的概念

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$





$$\|\vec{c}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cdot\sin\theta$$



2. 外积的性质

(1) $\vec{a}//\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

(2) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$，特别 $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{0}\times\vec{a}=\vec{0}$;

(3) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$;

(4) $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$.

3. 外积的坐标形式

由定义易得：基向量的外积

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$$

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

设$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$$

$$=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-a_3b_2\vec{i}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

即 $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$

由上式可推出

$$\vec{a}//\vec{b} \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3} \quad (\text{当}b_i=0\text{时，有}a_i=0)$$

例 1 求与$\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$都垂直的单位向量.

解

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 4\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}=10\vec{j}+5\vec{k},$$

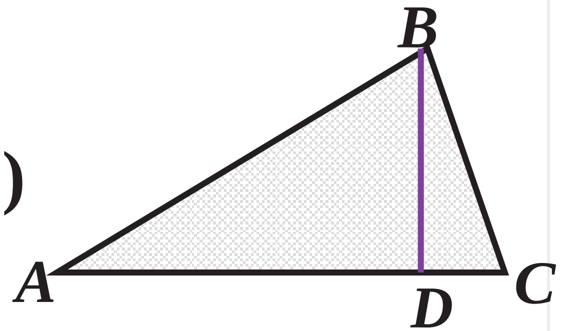
$$\because \|\vec{c}\|=\sqrt{10^2+5^2}=5\sqrt{5},$$

$$\therefore \vec{e}_c=\pm\frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|}=\pm\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}\right).$$

例 2 在顶点为$A(1,-1,2)$、$B(5,-6,2)$和$C(1,3,-1)$的三角形中，求AC边上的高BD.

解 $\overrightarrow{AC}=(0,4,-3)$, $\overrightarrow{AB}=(4,-5,0)$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -5 & 0\\ 0 & 4 & -3\end{vmatrix}=(15,12,16)$$



$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AB}\|=\frac{1}{2}\sqrt{15^2+12^2+16^2}=\frac{25}{2},$$

$$\|\overrightarrow{AC}\|=\sqrt{4^2+(-3)^2}=5,\quad S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\|\cdot\|\overrightarrow{BD}\|$$

$$\Rightarrow\frac{25}{2}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\|\overrightarrow{BD}\|,\qquad\therefore\quad\|\overrightarrow{BD}\|=5.$$

主要内容

外积的坐标形式

练习 1. 设 $A_i=(x_i,y_i,z_i),(i=1,2,3)$为平面上的三个点，用外积表示这三个点共线的充要条件.

答案：$\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=0$

2. 设单位向量$\overrightarrow{OA}$与三个坐标轴夹角相等，B是点$M(1,-3,2)$关于$N(-1,2,1)$的对称点. 求$\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}$.

答案：$\pm\frac{1}{\sqrt{3}}(-7,-3,10)$.