三. 矩阵可逆的充要条件

定理2 设A为n阶矩阵，则如下命题等价:

1. A是可逆的;
2. $AX = O$只有零解;
3. A与I行等价;
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

证 1→2: 显然(*why*?)

2→3: 设A经一系列初等行变换化为行阶梯形B

则$BX = 0$只有零解. 断言: B的对角元均非零

否则 B最后一行元均为零, $BX=O$有非零解, 矛盾!

于是B可经一系列初等行变换化为行简化阶梯形I

1. A是可逆的；
2. $AX=O$只有零解；
3. A与I行等价；
4. A可表为有限个初等矩阵的乘积.

3→4: 由条件，A可经行初等变换得I.

故存在初等矩阵$E_1,\dots,E_k$使得

$$E_k\cdots E_1 A = I$$

$$\Rightarrow A = E_1^{-1}\cdots E_k^{-1} I = E_1^{-1}\cdots E_k^{-1}$$

4→1: 显然(*why*?)

推论 设A为n阶矩阵，则$AX=b$有唯一解的充要条件是A可逆.

证 **充分性:**

A可逆，则$AX=b$有唯一解 $X=A^{-1}b$

必要性:

反证 设$AX=b$有唯一解X_0，但A不可逆.

A不可逆$\Rightarrow AX=0$有非零解Z.

令$Y=X_0+Z$，则Y为$AX=b$的解，矛盾!

[结束]