第三讲 平 面

- 平面的方程
  1. 点法式方程
  2. 一般式方程
  3. 截距式方程
- 平面与平面的位置关系
- 内容小结

第三讲 平 面

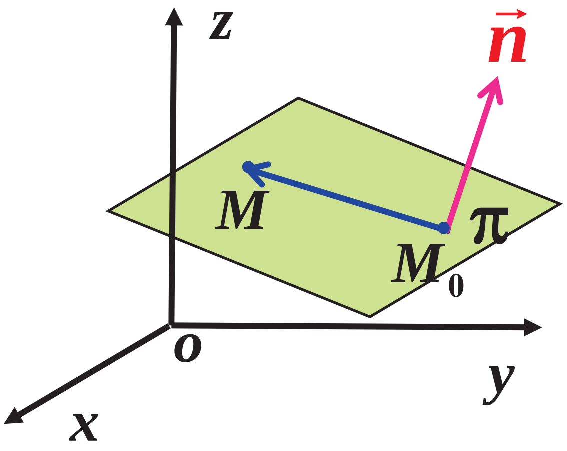
- 平面的方程
  1. 点法式方程
  2. 一般式方程
  3. 截距式方程
- 平面与平面的位置关系
- 内容小结

一、平面方程

1. 点法式方程

平面π可由π上任意一点和垂直于π的任一向量完全确定.

垂直于π的任一非零向量称为π的**法线向量**.



法线向量的特征： 垂直于平面内的任一向量.

设 $\vec{n}=(A, B, C)$, $M_0(x_0, y_0, z_0)\in\pi$

$M(x, y, z)$ 为平面π上的任一点,

必有 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$

$\because \overrightarrow{M_0M} = (x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$,

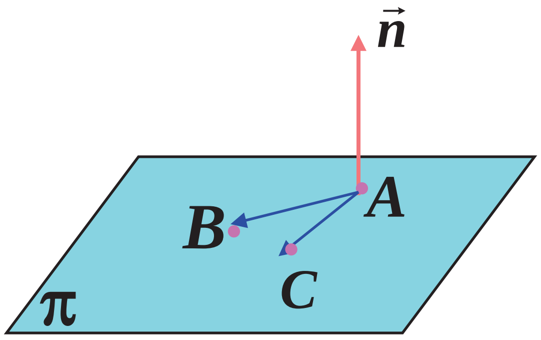
$\therefore A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad (1)$

方程(1)称为平面的点法式方程.

其中法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$，$(x_0,\ y_0,\ z_0)$是已知点.

平面上的点都满足方程(1)，满足方程(1)的点都在平面上.

例 1 求过三点$A(2,-1,4)$、$B(-1,3,-2)$和$C(0,2,3)$的平面方程.



解 $\overrightarrow{AB}=(-3,\ 4,-6)$

$\overrightarrow{AC}=(-2,\ 3,-1)$

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(14,\ 9,-1)$,

所求平面方程为 $14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$,

化简得 $14x+9y-z-15=0.$

说明: 此平面的三点式方程也可写成

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-4 \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

一般情况: 过三点 $M_k(x_k, y_k, z_k)$ $(k = 1,2,3)$ 的平面方程为

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

2. 一般式方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

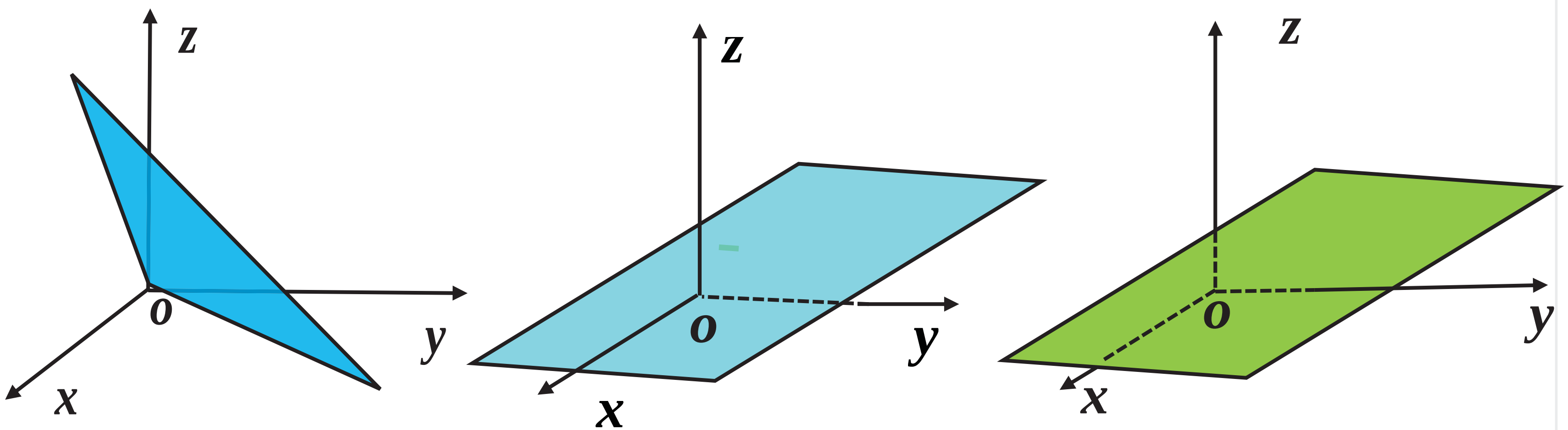
$$\Rightarrow Ax+By+Cz\underbrace{\boxed{-(Ax_0+By_0+Cz_0)}}_{=D}=0$$

$Ax+By+Cz+D=0$ ----平面的一般式方程

法向量 $\vec{n}=(A,B,C)$.

平面一般方程的几种特殊情况:

(1) $D=0$, 平面$Ax+By+Cz=0$通过坐标原点;



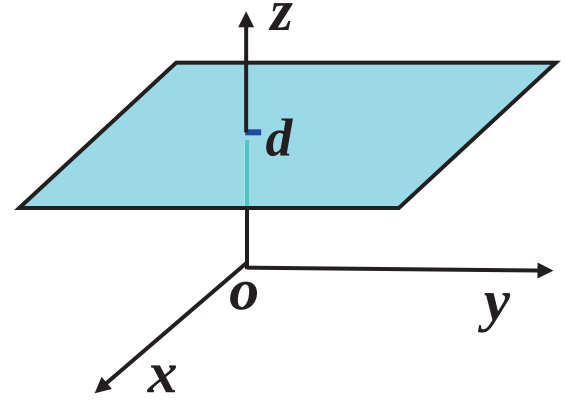
(2) $A=0$, $\begin{cases} D=0, & \text{平面 } By+Cz=0 \text{ 通过 } x \text{ 轴;} \\ D\neq 0, & \text{平面 } By+Cz+D=0 \text{ 平行于 } x \text{ 轴;} \end{cases}$

类似地可讨论 $B=0$, $C=0$ 情形.

(3) $A=B=0$, 平面 $Cz+D=0$ 或 $z=d$ // xoy面

类似地可讨论 $A=C=0$

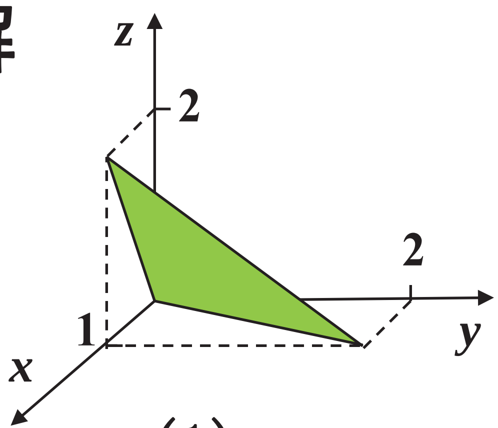
与$B=C=0$的情况.



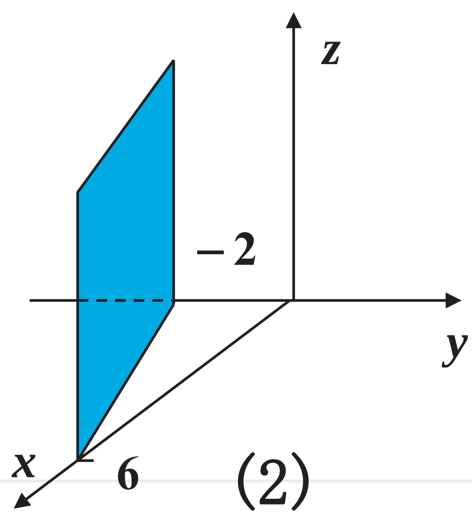
例2 画出下列图形:

(1) $2x-y-z=0$; (2) $-x+3y+6=0$; (3) $3z-7=0$;

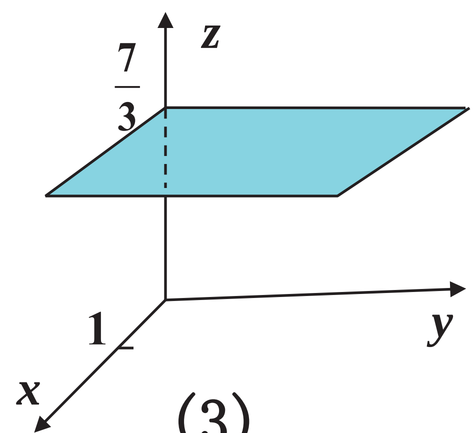
解



(1)



(2)



(3)

例 3 设平面过原点及点$(6,-3,2)$，且与平面 $4x-y+2z=8$垂直，求此平面方程.

解 设平面为 $Ax+By+Cz+D=0,$

由平面过原点知 $D=0$. 法向量$\vec{n}=(A,B,C)$

由平面过点$(6,-3,2)$知 $6A-3B+2C=0$

$\because \vec{n}\perp(4,-1,2),\quad \therefore 4A-B+2C=0$

$$\Rightarrow A=B=-\frac{2}{3}C,$$

所求平面方程为 $2x+2y-3z=0.$

思考：还有其他方法计算吗？

主要内容

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程

练习 1.下面方程在平面与空间中各表示什么图形?

方程	xoy平面	$o\text{-}xyz$空间
$x=2$	平行于y轴的直线	平行于yoz面的平面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于z轴的平面

2. 求通过 x 轴和点$(4,-3,-1)$的平面方程.

答案: $y-3z=0$

第三讲 平 面

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程
3. 截距式方程

平面与平面的位置关系

内容小结

3. 截距式方程

例 1 设平面与 x, y, z 三轴分别交于 $P(a,0,0)$、$Q(0,b,0)$、$R(0,0,c)$（其中 $a \neq 0$，$b \neq 0$，$c \neq 0$），求此平面方程.

解1 设平面为 $Ax + By + Cz + D = 0$,

将三点坐标代入得 $\begin{cases} aA + D = 0, \\ bB + D = 0, \\ cC + D = 0, \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad A = -\frac{D}{a}, \quad B = -\frac{D}{b}, \quad C = -\frac{D}{c}.$$

将$A=-\dfrac{D}{a}$, $B=-\dfrac{D}{b}$, $C=-\dfrac{D}{c}$,

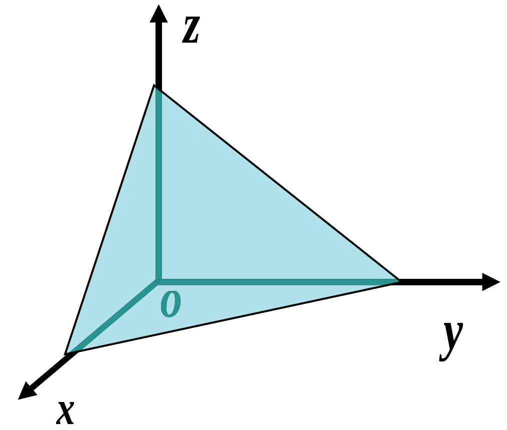
代入所设方程得

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$ 平面的截距式方程

x轴上截距　　y轴上截距　　z轴上截距

例2 求平行于平面 $6x+y+6z+5=0$ 而与三个坐标面所围成的四面体体积为一个单位的平面方程.

解1 设平面为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1,$



$$\because V=1,\quad \therefore \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}|abc|=1,$$

由所求平面与已知平面平行得

$$\frac{1/a}{6}=\frac{1/b}{1}=\frac{1/c}{6},$$

化简得 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}$， 令 $\frac{1}{6a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{6c}=t$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{6t},\quad b=\frac{1}{t},\quad c=\frac{1}{6t},$$

代入体积式

$$\therefore 1=\frac{1}{6}\cdot\left|\frac{1}{6t}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{6t}\right|\Rightarrow t=\pm\frac{1}{6},$$

$$\therefore a=\pm1,\ b=\pm6,\ c=\pm1,$$

所求平面方程为 $6x+y+6z=\pm6.$

解2 已知平面的法向量为 $\vec{n}=(6,1,6)$

与已知平面平行，所求平面可写为

$$6x+y+6z=d$$

$$\Rightarrow \frac{x}{d/6}+\frac{y}{d}+\frac{z}{d/6}=1$$

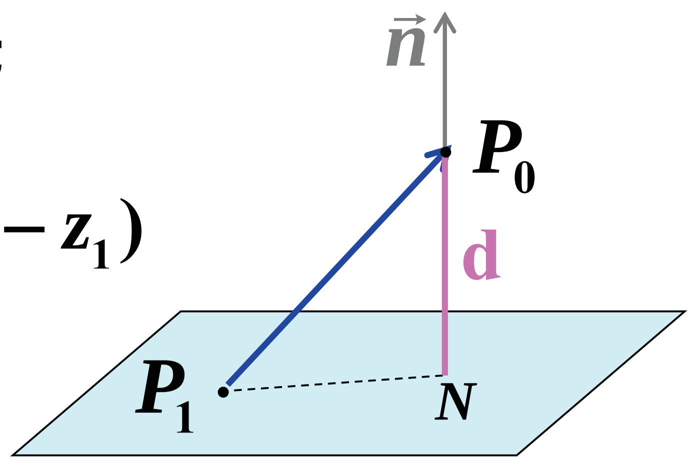
$$\because V=1, \quad \therefore \frac{1}{6}\left|\frac{d}{6}\cdot d\cdot\frac{d}{6}\right|=1 \Rightarrow d=\pm 6$$

例 3 求点$P_0(x_0, y_0, z_0)$到平面

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

的距离.

解 $\forall\ P_1(x_1, y_1, z_1) \in \pi$



$$\overrightarrow{P_1P_0} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1)$$

$$d = |\mathrm{Prj}_{\vec{n}} \overrightarrow{P_1P_0}|$$

$$= |\overrightarrow{P_1P_0} \cdot \vec{e}_n|$$

$$=\frac{|A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\because Ax_1+By_1+Cz_1+D=0 \qquad (\ P_1\in\pi)$$

$$\therefore d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

--------点到平面距离公式

主要内容

1. 平面的截距式方程
2. 点到平面的距离

练习 设平面π在三个坐标轴上的截距均为1，π与三个坐标面围成一个四面体，求:

(1)内切于该四面体的球面的球心；

(2) 写出该球面的方程.

答案: (1) 球心坐标 $\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\dfrac{3-\sqrt{3}}{6},\dfrac{3-\sqrt{3}}{6}\right)$;

（2）球面方程

$$(x-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(y-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2+(z-\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2=(\frac{3-\sqrt{3}}{6})^2$$

第三讲 平 面

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程
3. 截距式方程

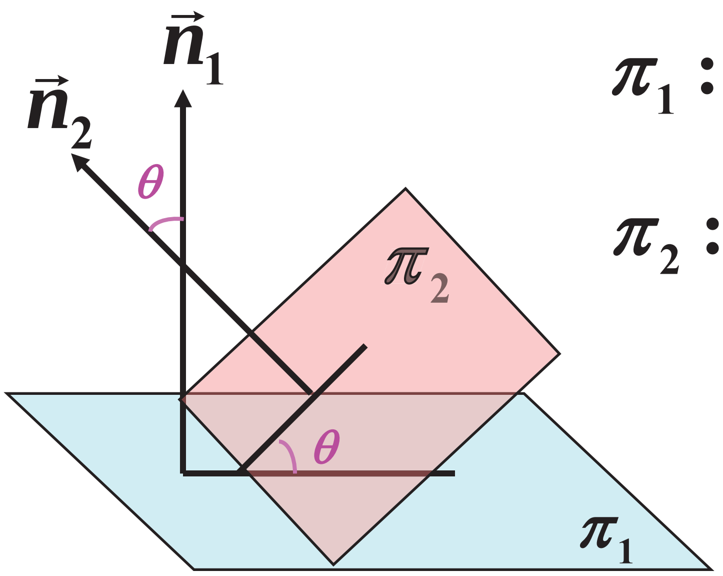
- 平面与平面的位置关系

内容小结

二、平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角

定义 两平面法向量之间的夹角称为两平面的夹角.（通常取锐角）



$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1),$$

$$\vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2),$$

按照两向量夹角余弦公式有

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

----------两平面夹角余弦公式

2. 两平面垂直与平行的充要条件:

(1) $\pi_1 \perp \pi_2 \iff A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;$

(2) $\pi_1 // \pi_2 \iff \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}.$

例1 讨论以下各组平面的位置关系：

(1) $-x+2y-z+1=0,\qquad y+3z-1=0$

(2) $2x-y+z-1=0,\qquad -4x+2y-2z-1=0$

(3) $2x-y-z+1=0,\qquad -4x+2y+2z-2=0$

解 (1) $\cos\theta=\dfrac{|-1\times0+2\times1-1\times3|}{\sqrt{(-1)^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{60}}$

两平面相交，夹角 $\theta=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{60}}$.

(2) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=-\dfrac{1}{2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$

所以，两平面平行但不重合.

(3) $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}=-\dfrac{1}{2}$

两平面重合.

例2 求过点$M_0(-1,3,2)$且与平面$2x - y + 3z - 4 = 0$和$x + 2y + 2z - 1 = 0$ 都垂直的平面π的方程.

解 两个已知平面的法向量为

$$\vec{n}_1 = (2, -1, 3), \quad \vec{n}_2 = (1, 2, 2),$$

故平面π的法向量为

$$\vec{n} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -8\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$

故平面π的方程为

$$-8(x+1) - (y-3) + 5(z-2) = 0,$$

即 $$8x + y - 5z + 15 = 0.$$

主要内容

平面与平面的位置关系

1. 两平面的夹角
2. 两平面的平行与垂直

练习

求过点 $(1,1,1)$ 且垂直于二平面 $x-y+z=7$ 和 $3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

答案： $2x+3y+z-6=0$

第三讲 平 面

平面的方程

1. 点法式方程
2. 一般式方程
3. 截距式方程

平面与平面的位置关系

➤ 内容小结

内容小结

1. 平面的方程

(1) 点法式

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

点：$M_0(x_0, y_0, z_0)$，法向量：$\vec{n}=(A, B, C)$.

三点式：
$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

(2) 一般式

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

$D=0$, 平面过原点;

$A=0$, 平面平行于x 轴; ………

(3) 截距式

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

2. 点到平面距离

$$\therefore d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3. 平面与平面的位置关系

$$\pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\quad \vec{n}_1=(A_1,B_1,C_1).$$

$$\pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\quad \vec{n}_2=(A_2,B_2,C_2).$$

两平面的夹角(法向量所夹锐角)

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

(1) $\pi_1\perp\pi_2 \quad \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0;$

(2) $\pi_1 // \pi_2 \quad \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}.$