六. 内容小结

相似: 设A与B都是n阶矩阵，若存在可逆矩阵P, 使:

$$P^{-1}AP = B,$$ 则称A与B相似，记为$A\sim B$

性质: 反身性, 对称性, 传递性

定理1. 相似矩阵有相同的特征值.

定理2. $A \sim \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是矩阵A的全部特征值.

定理3. n阶矩阵A与对角矩阵相似$\Leftrightarrow$

A有n个线性无关的特征向量

定理4. $A\alpha_1=\lambda_1\alpha_1,\cdots,A\alpha_m=\lambda_m\alpha_m,\ \alpha_i\neq 0\left(i=1,\cdots,m\right),$

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 互异 $\Rightarrow \alpha_1,\cdots,\alpha_m$线性无关.

推论1. A 的特征值互异, 则 A 与对角矩阵相似.

推论2. 设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是矩阵A的不同特征值.

$\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{ir_i}$ 是λ_i的线性无关的特征向量.

$\Rightarrow \alpha_{11},\cdots,\alpha_{1r_1},\cdots,\alpha_{k1},\cdots,\alpha_{kr_k}$ 线性无关

设A是n阶矩阵, 则:

A可相似对角化 $\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

$\Uparrow$ $\Leftrightarrow$ A的k重特征值恰有k个无关的特征向量

A有n个互异的特征值

$\Leftrightarrow$ λ_i是A的k_i重特征值, 则

$$R(\lambda_i I - A) = n - k_i$$