§1-6 连续函数——函数的连续性

一、函数的增量

二、连续的定义

三、左、右连续

四、连续函数与连续区间

电子科技大学数学科学学院

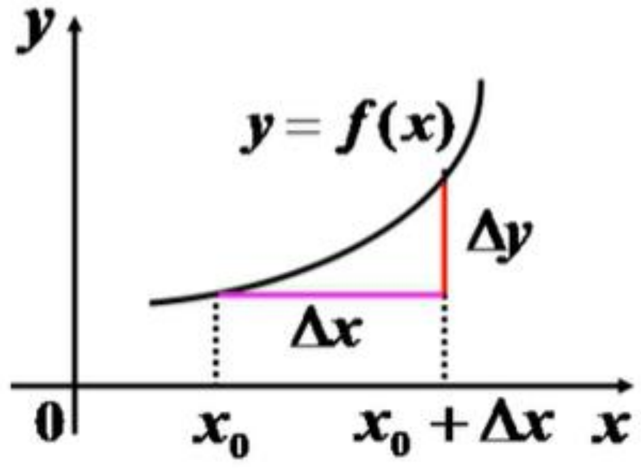
1. 函数的增量

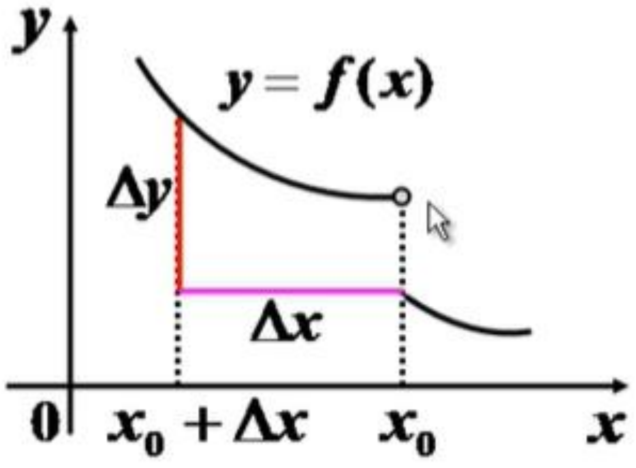
设函数$f(x)$在$U(x_0,\delta)$内有定义，$\forall\ x\in U(x_0,\delta)$，

$\Delta x = x - x_0$，称为自变量在点x_0的增量

$(x = x_0 + \Delta x)$

$\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$，称为函数 $f(x)$相应于Δx的增量.





2. 连续的定义

定义1 设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋向于零时，对应的函数增量 Δy 也趋向于零，即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为 $f(x)$ 的连续点.

设 $x=x_0+\Delta x$，$\quad \Delta y=f(x)-f(x_0)$，

$\Delta x\to 0$ 就是 $x\to x_0$，$\quad \Delta y\to 0$ 就是 $f(x)\to f(x_0)$.

定义2："$\varepsilon-\delta$"定义：

$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，使当 $|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

例1 试证函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 在$x=0$ 处连续.

证 $\because \lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}=0$, 又 $f(0)=0$, 所以$\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)-f(0)\big)=0$,

由定义知 函数 $f(x)$在$x=0$处连续.

3. 左、右连续

若函数$f(x)$在$(a,x_0]$内有定义，且$f(x_0-0)=f(x_0)$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$, 则称$f(x)$在点$x_0$处**左连续**;

3. 左、右连续

若函数 $f(x)$ 在 $[x_0,b)$ 内有定义，且 $f(x_0+0)=f(x_0)$,

即 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**右连续**.

定理

函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 是函数 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

即函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0).$$

例2 讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\geq 0, \\ x-2, & x<0, \end{cases}$ 在 $x=0$处的连续性.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2=f(0),$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-2)=-2\neq f(0),$

$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在. 右连续但不左连续，

故函数 $f(x)$在点 $x=0$处不连续.

4. 连续函数与连续区间

- 在(a, b)上每一点都连续的函数,叫做(a, b)上的连续函数,或者说函数在(a, b)上连续.

- 如果函数在开区间(a,b)内连续，并且在左端点$x=a$处右连续,在右端点$x=b$处左连续,则称函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

- $C(a,b)$表示在开区间(a,b)内全体连续函数构成的集合;

如果函数 $f(x)$在开区间(a,b)内连续,记为 $f(x)\in C(a,b)$.

- $C[a,b]$表示在闭区间$[a,b]$上全体连续函数构成的集合.

如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,记为 $f(x)\in C[a,b]$.

连续函数的图形是一条连续而不间断的曲线.

例3 证明函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内连续.

证 任取 $x_0\in(-\infty,+\infty)$,

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\because\left|\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1,\quad\left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right|\le\left|\frac{\Delta x}{2}\right|\xrightarrow{\Delta x\to 0}0,$$

$\therefore$ 当 $\Delta x\to 0$ 时, $\Delta y\to 0.$

即 函数 $y=\sin x$ 对任意 $x_0\in(-\infty,+\infty)$ 都是连续的.

故 $y=\sin x\in C(-\infty,+\infty)$

思考题

判断下面函数是否连续?

1. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}.$ 2. $f(x)=\cos(x).$

§1-6 连续函数——函数的间断点

一、可能的间断点

二、间断点的分类

一、可能的间断点

函数 $f(x)$在点 x_0处连续必须满足的三个 条件：

(1) $f(x)$在点x_0处有定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

如果上述三个条件中只要有一个不满足，则称函数 $f(x)$在点x_0处不连续 (或间断)，并称点 x_0为$f(x)$的不连续点(或间断点).

凡不满足上述三个条件之一，则$f(x)$在点x_0处必间断：

(1) $f(x)$在点x_0处无定义;

(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

(3) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，且$f(x)$在点 x_0 处有定义，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

二、间断点的分类

定义：若点 x_0为 $f(x)$的间断点，但 $f(x)$在点 x_0的左右极限均存在

$$\left(\lim_{x\to x_0^-} f(x), \lim_{x\to x_0^+} f(x)\text{均存在}\right)$$

则称点x_0为 $f(x)$ 的第一类间断点. 凡不是第一类间断点的间断点称为第二类间断点 .

第一类间断点又可分为：

中国大学MOOC

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

1.可去型间断点：

如果$f(x)$在点x_0处的极限存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \neq f(x_0)$，

或$f(x)$在点x_0处无定义，则称点x_0为函数$f(x)$的**可去间断点**.

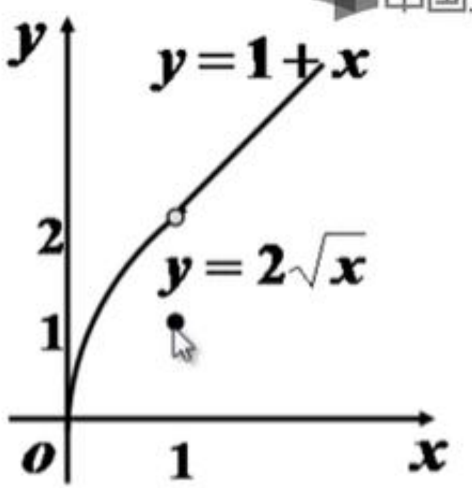
2.跳跃型间断点：

如果$f(x)$在点x_0处左，右极限都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$，

则称点x_0为函数，$f(x)$的**跳跃型间断点**.

例1 讨论下面函数在$x=1$处的连续性.

$$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1, & x=1,\\ 1+x, & x>1.\end{cases}$$



解 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}2\sqrt{x}=2,\quad \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}(1+x)=2,$

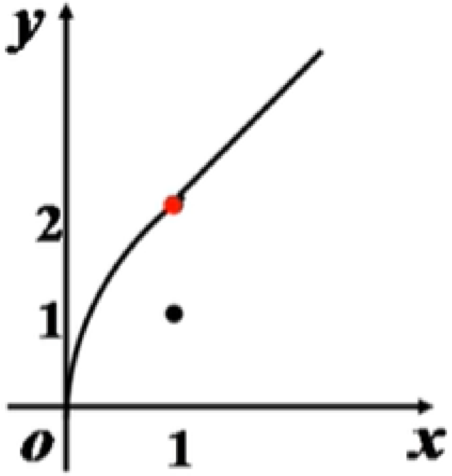
$\because \lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\Rightarrow\lim\limits_{x\to1}f(x)=2,$

$\because \lim\limits_{x\to1}f(x)=2\ne f(1),\qquad \therefore x=1$为函数的可去间断点.

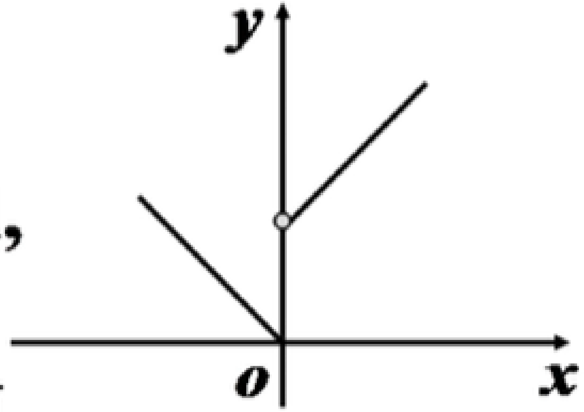
注意 可去间断点只要改变或者补充间断处函数的定义，则可使其变为连续点.

如例1中，令 $f(1)=2$，则 $f(x)=\begin{cases}2\sqrt{x}, & 0\le x<1,\\ 1+x, & x\ge 1.\end{cases}$

在$x=1$处连续.



例2 讨论函数$f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ 1+x, & x>0,\end{cases}$在$x=0$处的连续性



解 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0,\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(1+x)=1,$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ne\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\quad \therefore x=0$为函数的跳跃间断点.

第二类间断点

如果$f(x)$在点x_0处的左、右极限至少有一个不存在，则称点x_0为函数，

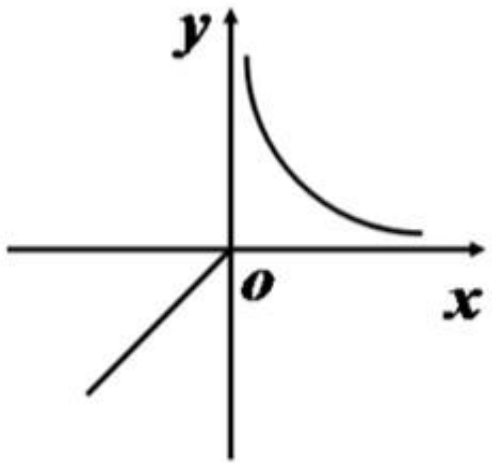
则$f(x)$的第二类间断点.

例3 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x>0,\\ x, & x\le 0,\end{cases}$在$x=0$处的连续性.

解 $\because f(0-0)=0,\ \ f(0+0)=+\infty,$

$\therefore x=1$为函数的第二类间断点.

这种情况称为无穷间断点.



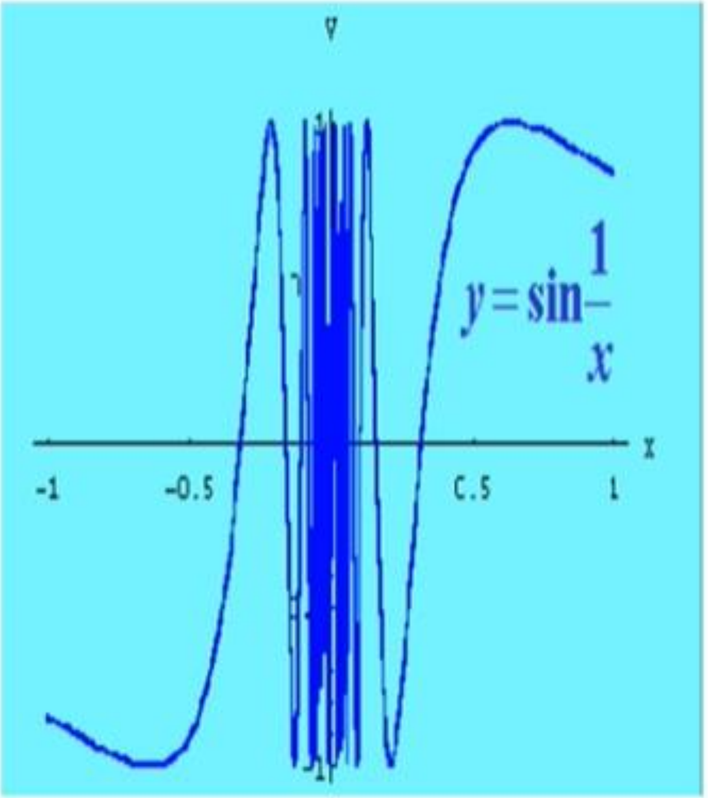
例4 讨论函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解 $\because$ 在 $x=0$ 处没有定义,

且 $\lim\limits_{x\to 0^-}\sin\frac{1}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\frac{1}{x}$ 不存在.

$\therefore$ $x=0$ 为第二类间断点.

这种情况称为**振荡型间断点**.



思考题

判断下面函数间断点的类型.

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}$.　　2. $f(x)=\begin{cases} 1, x>0 \\ -1, x\le 0 \end{cases}$.

§1-6 连续函数——连续函数的性质

一、连续函数的四则运算

二、反函数与复合函数的连续性

三、连续函数的性质

四、初等函数的连续性

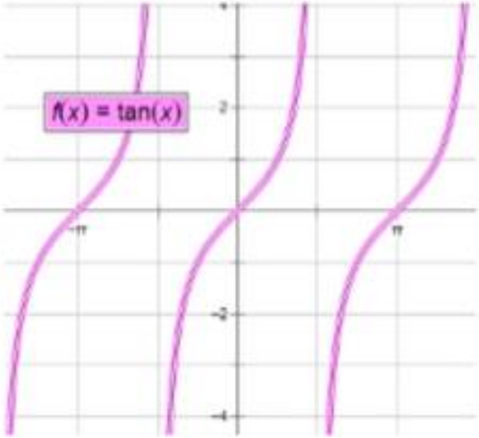
一、连续函数的四则运算

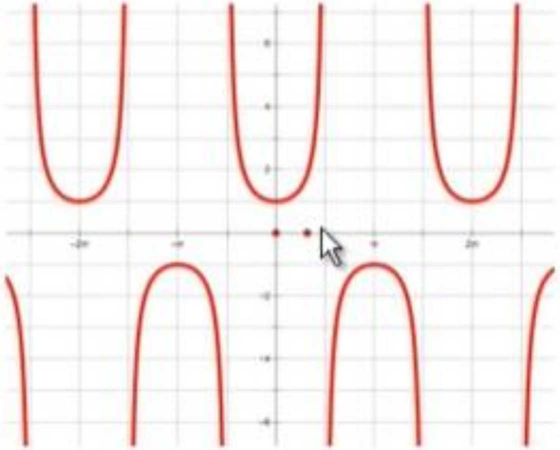
定理1　若函数$f(x)$，$g(x)$在点x_0处连续，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$ 在点x_0处也连续.

例如，　$\sin x,\cos x$在 $(-\infty,+\infty)$内连续，

故 $\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 在其定义域内连续.





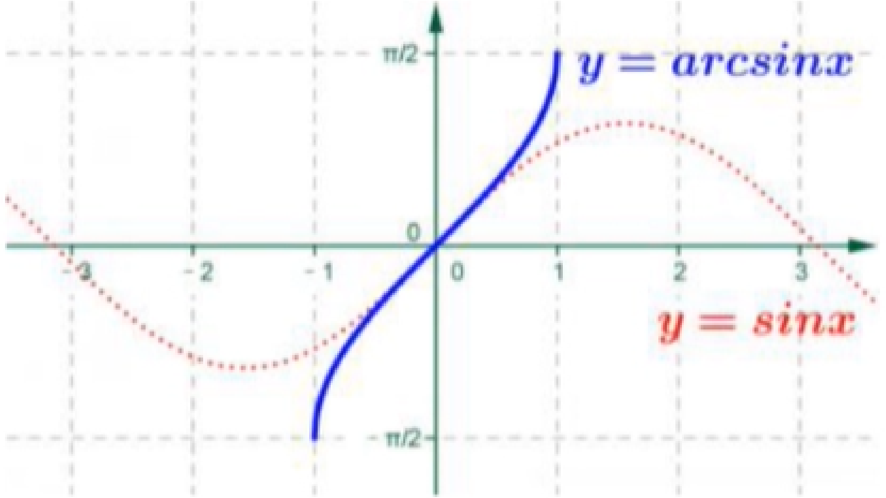
二、反函数与复合函数的连续性

定理2 单调连续函数的反函数必单调连续.

例如, $y=\sin x$在$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$上单调增加且连续,

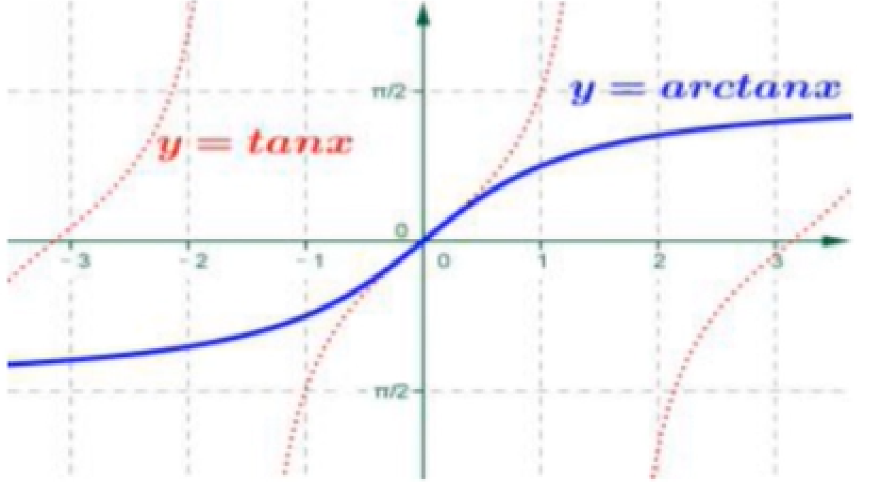
故$y=\arcsin x$在$[-1,1]$上也是

单调增加且连续.



同理 $y=\arctan x$在$(-\infty,+\infty)$上也是

单调增加且连续.



反三角函数在其定义域内皆连续.

三、连续函数的性质

定理3 若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$, 函数 $f(u)$ 在点 a 连续，则有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f(a) = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)].$$

注：极限符号可以与函数符号互换.

例1 求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

分析 $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$.

解 原式 $= \lim\limits_{x \to 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln[\lim\limits_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}] = \ln e = 1.$

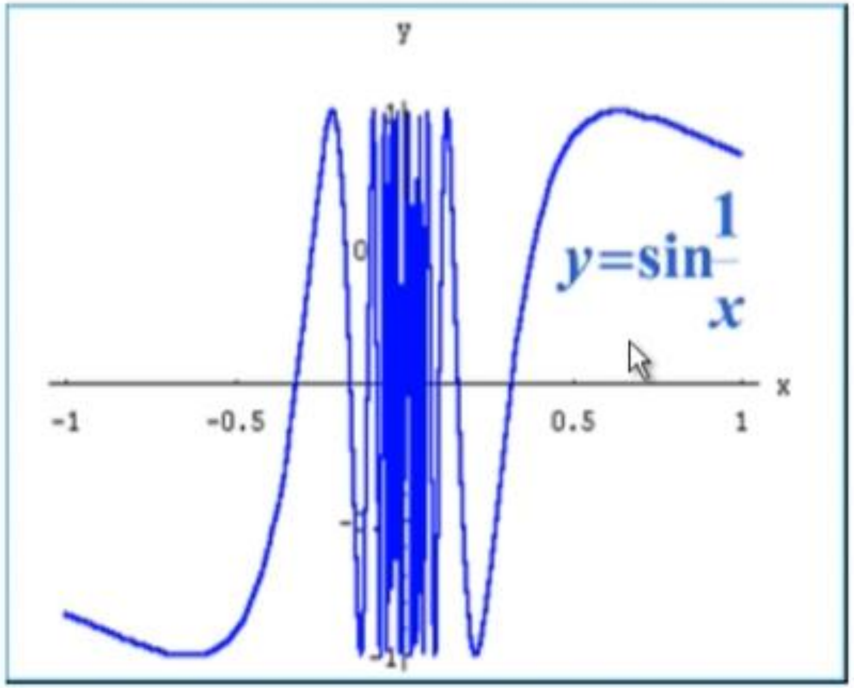
定理4 若函数$u=\varphi(x)$在点$x=x_0$连续，且$\varphi(x_0)=u_0$，而函数$y=f(u)$，在点$u=u_0$连续，则复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点$x=x_0$也连续.

注： 定理4是定理3的特殊情况.

例如，$u=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续，

$y=\sin u$ 在$(-\infty,+\infty)$内连续，

$\therefore y=\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$内连续.



四、初等函数的连续性 $\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

中国大学MOOC

基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数、常数函数.

定理5　一切基本初等函数在其定义域内都是连续的.

初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和复合运算所得到的函数

定理6　一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

注：　1、定义区间是指包含在定义域内的区间；

2、初等函数仅在其定义区间内连续，在其定义域内不一定连续.

例如，$y=\sqrt{\cos x-1}$，$D: x=0,\pm 2\pi,\pm 4\pi,\cdots$　定义域是孤立点集

思考题

1. 求$\lim\limits_{x\to 1}\sin(x^2)$.

2. 求$f(x)=\dfrac{1}{x-2x+3}$的连续区间.

§1-6 连续函数——闭区间上连续函数的性质

一、有界性定理

二、介值定理

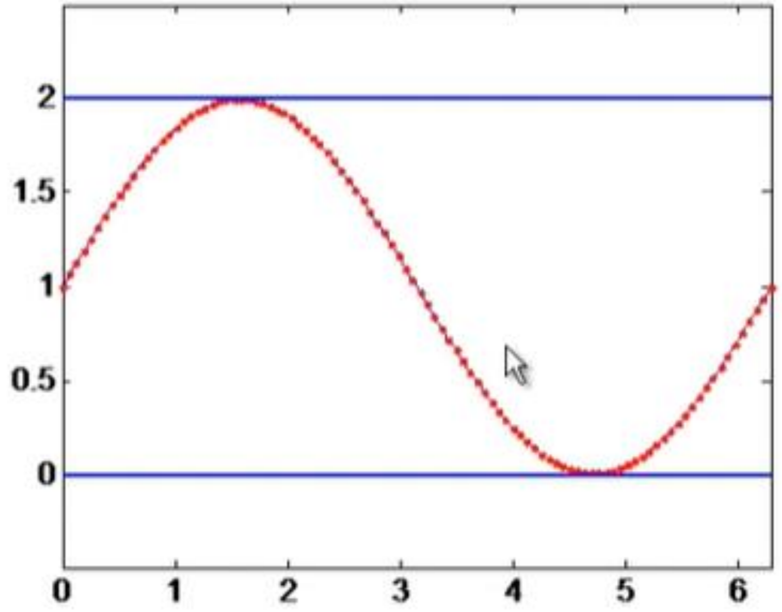
一、有界性定理

定义：对于在区间I上有定义的函数$f(x)$,

如果有 $x_0 \in I$, 使得对于任一 $x \in I$ 都有,

$$f(x) \le f(x_0) \quad (f(x) \ge f(x_0)),$$

则称$f(x_0)$是函数$f(x)$在区间I上的最大(小)值.

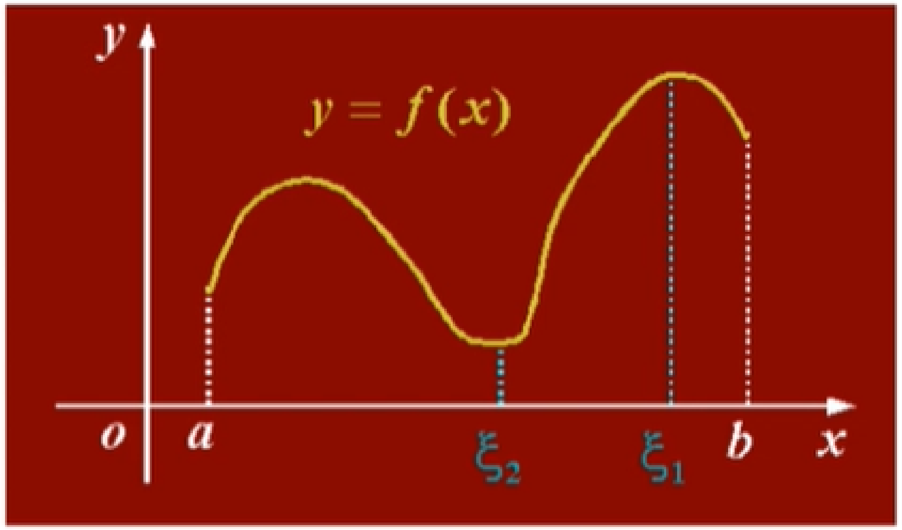


例如,

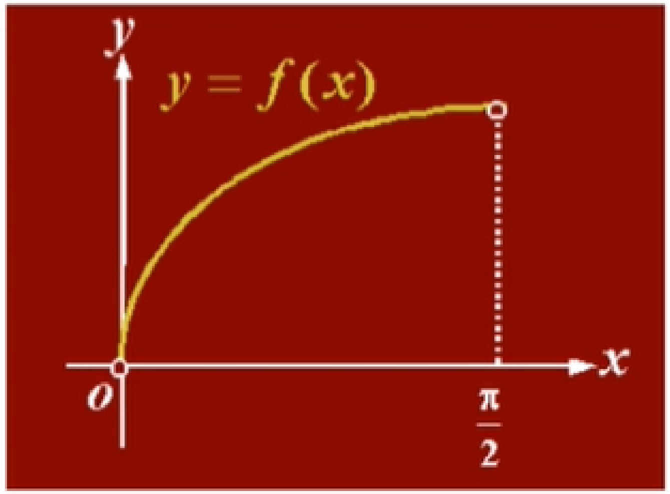
$$y = 1 + \sin x, \quad 在[0, 2\pi]上, \quad y_{max} = 2, \quad y_{min} = 0.$$

定理1（最大值和最小值定理）在闭区间上连续的函数一定存在最大值和最小值.

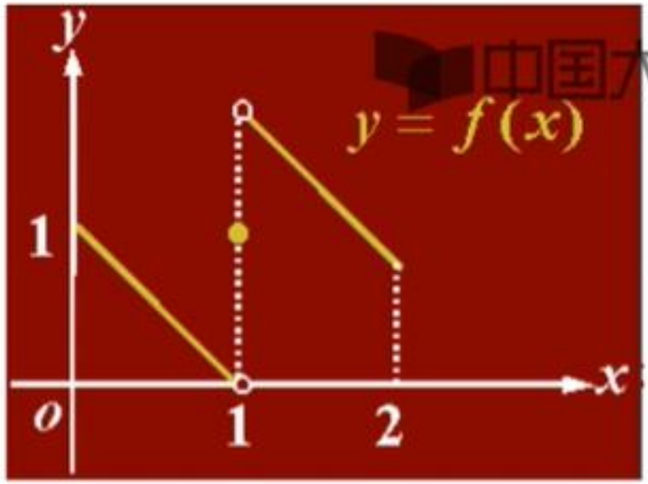
若$f(x)\in C[a,b]$,则$\exists\xi_1,\xi_2\in[a,b]$,
使得$\forall x\in[a,b]$,有
$f(\xi_1)\geq f(x),\ f(\xi_2)\leq f(x)$.



注意1:若区间是开区间，定理不一定成立;



注意2： 若区间内有间断点，定理不一定成立.



定理2(有界性定理) 在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

证 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续, $\forall x \in [a,b]$, 有 $m \le f(x) \le M$,

取 $K = \max\{|m|,|M|\}$, 则有 $|f(x)| \le K$.

$$|f(x)| \le K, x \in D.$$

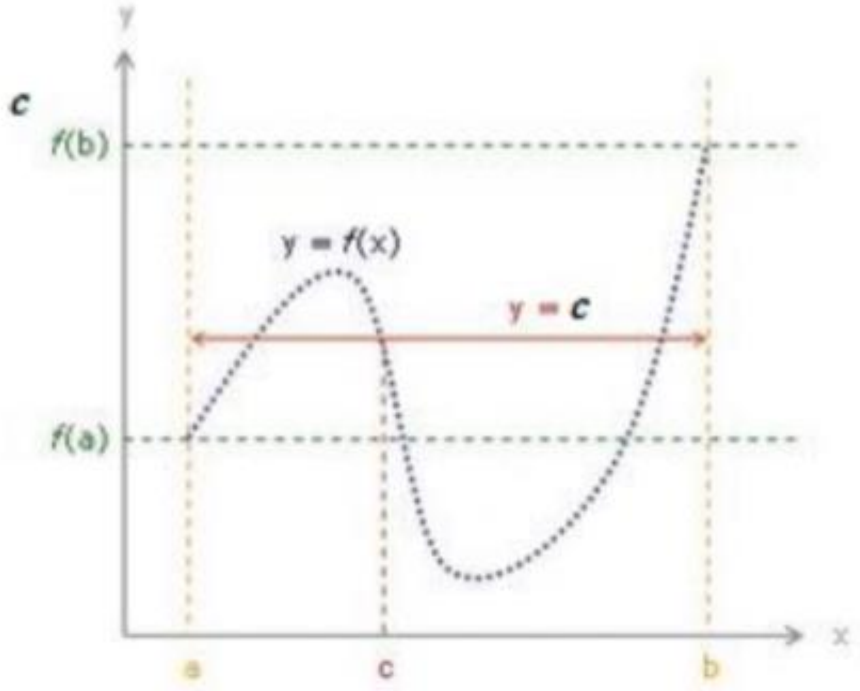
$\therefore$ 函数$f(x)$在$[a,b]$上有界.

二、介值定理

定理3 介值定理

若$f(x)\in C[a,b]$且$f(a)\neq f(b)$,则$f(a)<c<f(b)$ $(或f(b)<c<f(a))$

其中c为常数. 则存在 $\xi\in(a,b)$,使得$f(\xi)=c$.



几何上: 从点$(a,f(a))$到点$(b,f(b))$的连续

曲线与直线$y=c$至少有一个交点.

推论1 若$f(x)\in C[a,b]$, M,m分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最大值和最小值,

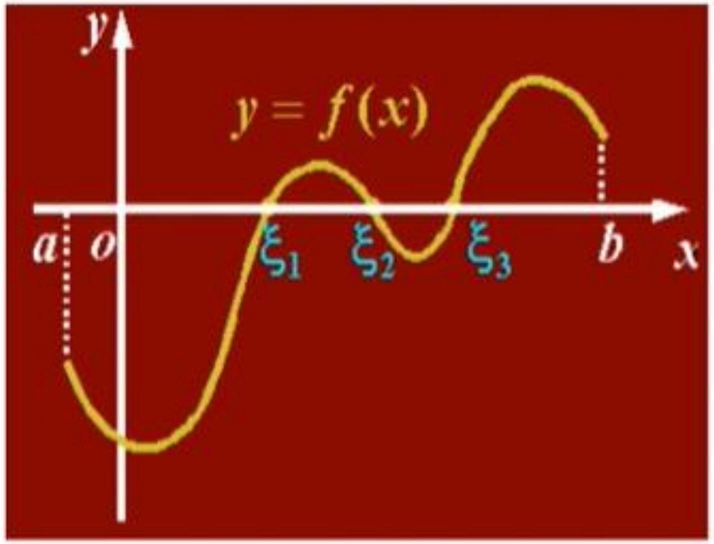
则对任意常数c, $m<c<M$, 必$\exists\xi\in(a,b)$,使$f(\xi)=c$.

推论2（零点存在定理） 设函数$f(x)$在闭区闭$[a,b]$上连续，且$f(a)$与$f(b)$异号，即$f(a)\cdot f(b)<0$, 那么在开区间(a,b)内至少有函数$f(x)$的一个零点，即至少有一点$\xi(a<\xi<b)$，使$f(\xi)=0$

即方程 $f(x)=0$在(a,b)内至少存在一个实根.

几何解释:

连续曲线$y=f(x)$的两个端点位于x轴的不同侧,则曲线与x轴至少有一个交点.



推论3 若$f(x)\in C[a,b]$,且$f(x)$在$[a,b]$上单调, 且$f(a)\cdot f(b)<0$,

则存在唯一的点$\xi\in(a,b)$, 使$f(\xi)=0$.

例1 证明方程$x^4-4x^2+1=0$在区间$(0,1)$内至少有一根.

证 令$f(x)=x^4-4x^2+1$，则$f(x)$在$[0,1]$上连续，又 $f(0)=1>0$,

$f(1)=-2<0$, 由零点定理,

$\exists\ \xi\in(0,1)$, 使$f(\xi)=0$,

即 $\xi^4-4\xi^2+1=0$,

$\therefore$ 方程$x^4-4x^2+1=0$在$(0,1)$内 至少有一根ξ.

思考题

1. 求$y=\cos x$在区间[-4,4]内的最大、最小值.

2. 证明方程$e^{-x}-x=0$在区间[0,1]内有根.