第四讲 空间直线

空间直线的方程

1. 点向式方程
2. 参数式方程
3. 一般式方程

点到直线的距离

直线与直线的位置关系

直线与平面的位置关系

内容小结

3. 一般式方程

直线可看成两个平面的的交线，

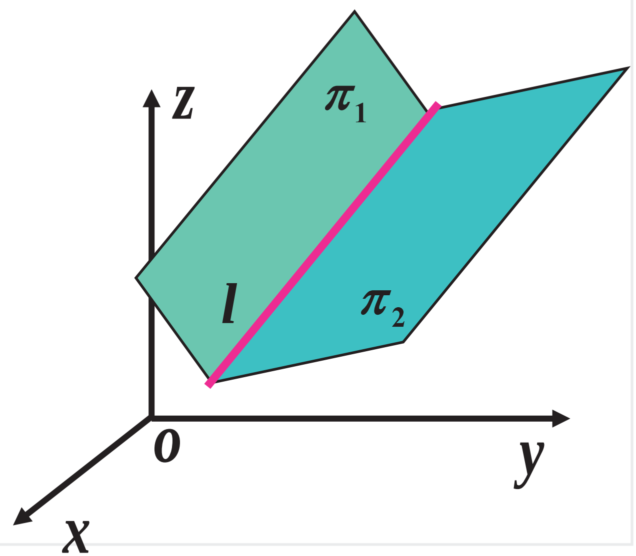
$$l:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}\qquad \vec{s}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\A_1&B_1&C_1\\A_2&B_2&C_2\end{vmatrix}$$

这个方程组称为直线 l 的一般式方程。

例1 将直线 l 的一般式方程

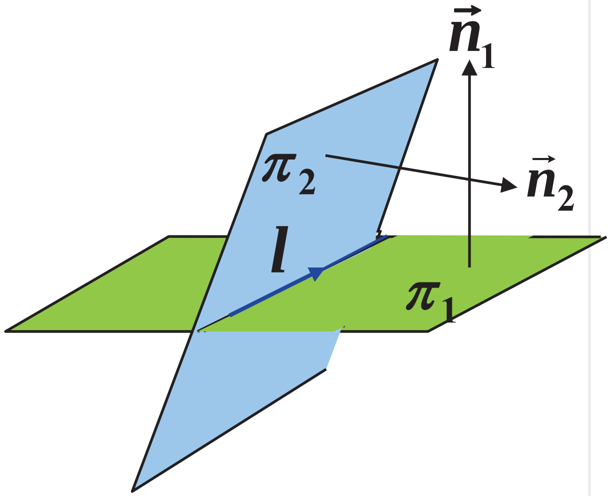
$$\begin{cases}4x+3y-z+5=0\\3x+2y+2z+1=0\end{cases}$$

化为点向式方程。



解一 (1)求定点，在$\begin{cases}4x+3y-z+5=0\\3x+2y+2z+1=0\end{cases}$中

取 $z=1$，则 $\begin{cases}4x+3y=-4\\3x+2y=-3\end{cases}$



解得：$x=-1$，$y=0$，$z=1$

两个平面的的法向量分别为

$\vec{n}_1=(4,\ 3,\ -1)$，$\vec{n}_2=(3,\ 2,\ 2)$

l 的方向向量：$\vec{s}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&3&-1\\3&2&2\end{vmatrix}=(8,-11,-1)$

则 l 的方程为 $\dfrac{x+1}{8}=\dfrac{y}{-11}=\dfrac{z-1}{-1}$

$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

解二 再求一个定点

取 $z=0$，则 $\begin{cases} 4x+3y=-5 \\ 3x+2y=-1 \end{cases}$

解得：$x=7$，$y=-11$，$z=0$

即得两个点 $M(-1,0,1)$，$N(7,-11,0)$

则 l 的方程为

$$\frac{x+1}{7-(-1)}=\frac{y}{-11-0}=\frac{z-1}{0-1}$$

即 $$\frac{x+1}{8}=\frac{y}{-11}=\frac{z-1}{-1}$$

解三 (消去法)

$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

消去 x,

$$z=\frac{y+11}{11}$$

消去 y,

$$z=\frac{x-7}{-8}$$

则 l 的方程为

$$\frac{x-7}{-8}=\frac{y+11}{11}=\frac{z}{1}$$

解四（用高斯消元法——行初等变换）

$$\begin{cases} 4x+3y-z+5=0 \\ 3x+2y+2z+1=0 \end{cases}$$

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & -1 & -5 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 3 & 2 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & 11 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 8 & 7 \\ 0 & -1 & 11 & 11 \end{array}\right)$$

$$\therefore \begin{cases} x=7-8z \\ y=-11+11z \end{cases} \xRightarrow{\text{令} z=t} \text{参数式：} \begin{cases} x=7-8t \\ y=-11+11t. \\ z=t \end{cases}$$

点向式： $\dfrac{x-7}{-8}=\dfrac{y+11}{11}=\dfrac{z}{1}.$

注： (1) 由于点以及方向向量的选取不同，直线的方程形式也不同，但方向向量始终是平行的(对应分量成比例).

(2) 将直线上的点视为方程组(一般式方程)的解集，则方程组作任意的同解变形，仍然表示同一条直线.

二、点到直线的距离

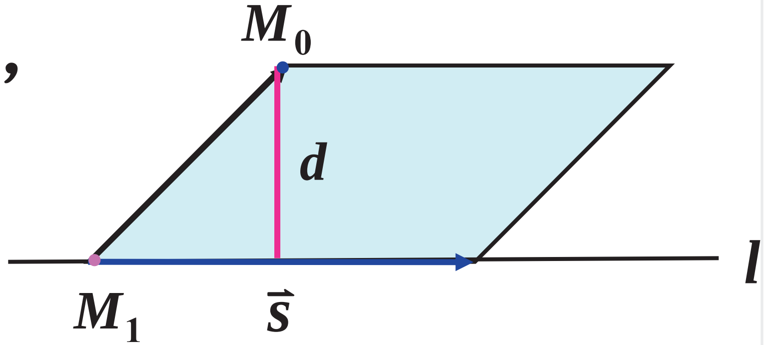
设 l: $\dfrac{x-x_1}{m}=\dfrac{y-y_1}{n}=\dfrac{z-z_1}{p}$

$M_0(x_0, y_0, z_0)$是空间上任意点，求其到 l 的距离 d.

如图，设$M_1(x_1, y_1, z_1)$是直线l 上任意一确定的点，

$\vec{s}=(m,n,p)$是 l 的方向向量，

以 $\vec{s}$ 和 $\overrightarrow{M_1M_0}$ 为邻边的平行四边形面积：



$$S=\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|=d\left\|\vec{s}\right\|,\qquad \therefore d=\frac{\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|}{\left\|\vec{s}\right\|}$$

例2 求点 $M_0(1, 2, 1)$ 到直线

$$l: \begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

的距离。

解 消去 x：$\dfrac{z}{2} = y + 1$

消去 y：$\dfrac{z}{-2} = x - 1$

则 l 的方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{-2}$

直线过点 $M_1(1, -1, 0)$，方向向量 $\vec{s} = (1, -1, -2)$，

则

$$\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ 0 & 3 & 1\end{vmatrix}=(5,\ -1,\ 3)$$

点M_0到直线 l 的距离：

$$d=\frac{\left\|\vec{s}\times\overrightarrow{M_1M_0}\right\|}{\|\vec{s}\|}=\frac{\sqrt{5^2+(-1)^2+3^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+(-2)^2}}=\sqrt{\frac{35}{6}}$$

主要内容

1. 直线的一般式方程

2. 点到直线的距离

练习：(1) 用对称式方程及参数方程表示直线 L：

$$\begin{cases} x-y+z=1 \\ 2x+y+z=4 \end{cases}$$

(2) 求原点到直线 L 的距离.

答案：(1) $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{3}$，$\begin{cases} x=1-2t \\ y=1+t \\ z=1+3t \end{cases}$

(2) $\sqrt{\dfrac{19}{7}}$.