第二讲 正定二次型

二、正定二次型的性质

复习：

定理1 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow A$ 的特征值全大于零.

推论1 n 元二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$正定 $\Leftrightarrow f(X)$的正惯性指数为 n.

推论2 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 正定 $\Leftrightarrow$ A 与 I 合同.

推论2的矩阵形式为：

A正定$\Leftrightarrow A$与I 合同 $\Leftrightarrow A=C^{T}C\ \ (|C|\neq 0)$.

推论3 若$A=(a_{ij})_{n\times n}$正定，则$|A|>0$,且$a_{ii}>0,(\forall i)$.

例4 设A,B是n阶正定矩阵，证明：AB也是正定矩阵的充要条件是 $AB=BA$.

证 充分性：$\because A,B$正定，则$A^T=A,\ B^T=B$

又 $AB=BA,\quad \therefore (AB)^T=B^TA^T=BA=AB$

即AB是实对称矩阵.

又由A,B正定，则存在可逆矩阵$P,Q,$使

$$A=PP^T,\quad B=QQ^T\quad \Rightarrow AB=PP^TQQ^T$$

$$\Rightarrow P^{-1}ABP=P^TQQ^TP=(Q^TP)^T(Q^TP)$$

即AB相似于正定矩阵 $(Q^TP)^T(Q^TP)$

由于相似矩阵有相同的特征值，而正定矩阵

$(Q^T P)^T (Q^T P)$的特征值全大于0,

$\therefore AB$ 的特征值也全大于0，正定.

必要性：

$\because A, B$，AB都正定，都是实对称矩阵

$\therefore\ AB = (AB)^T = B^T A^T = BA.$

要判定一个二次型是否正定，常用其矩阵的顺序主子式来研判，下面给出顺序主子式的概念.

定义 对于 n 阶矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，子式

$$P_k=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix},\quad (k=1,2,\cdots,\ n)$$

称为A 的顺序主子式.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

定理2 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 正定⇔A的顺序主子式全大于零.

证 这里仅证必要性：设$A = (a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵.

$$A_k = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ & \cdots & \cdots & \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{pmatrix}$$ 是A的k阶顺序主子式对应的矩阵,

对 $\forall X_k = (x_1, x_2 \cdots, x_k)^T \neq 0$,

令 $X = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^{\mathrm{T}}$

则 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX = X_k^{\mathrm{T}}A_kX_k > 0.$

由 $X_k^{\mathrm{T}}A_kX_k > 0$ 可知 A_k 为正定矩阵.

所以 $|A_k| = P_k > 0$, $(k = 1, \ldots, n)$.

例5 讨论下面二次型的正定性:

(1) $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

(2) $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_2x_3$;

解 f_1 中 x_3^2 的系数 $a_{33} = -1 < 0$,

f_2 中 x_2^2 的系数 $a_{22} = 0$,

所以, f_1, f_2 都不是正定二次型.

(3) $f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3$;

f_3 的矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

其顺序主子式为

$P_1 = 1 > 0,\qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0,$

$P_3 = |A| = 2 > 0,$

所以 f_3 是正定二次型.

例6 二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2tx_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3,$$

当 t 为何值时，f 为正定二次型？

解 f 的矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

A的顺序主子式为

$$P_1 = 1, \qquad P_2 = \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 4 \end{vmatrix} = 4 - t^2,$$

$$P_3 = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ t & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 4-t^2 & 2+t \\ 0 & 2+t & 3 \end{vmatrix} = -4(t-1)(t+2).$$

二次型 $f(X)=X^TAX$ 为正定二次型的充要条件是

$$\begin{cases} P_1 = 1 > 0 \\ P_2 = 4 - t^2 > 0 \\ P_3 = -(t-1)(t+2) > 0 \end{cases}$$

解得 $-2 < t < 1.$

故当且仅当 $-2 < t < 1$ 时，f 正定.

例7 设实对称矩阵$A=(a_{ij})_{n\times n}$是正定矩阵. $b_1, b_2, \ldots, b_n$是任意n个非零实数，证明: $B=(a_{ij}b_ib_j)_{n\times n}$为正定矩阵.

证 B 的 k 阶顺序主子式为

$$|B_k|=\begin{vmatrix} b_1^2a_{11} & b_1b_2a_{12} & \cdots & b_1b_ka_{1k} \\ b_2b_1a_{21} & b_2^2a_{22} & \cdots & b_2b_ka_{2k} \\ & \cdots & \cdots & \\ b_kb_1a_{k1} & b_kb_2a_{k2} & \cdots & b_k^2a_{kk} \end{vmatrix}=b_1^2b_2^2\cdots b_k^2|A_k|$$

正定矩阵A的k阶顺序主子式 $|A_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$.

所以， $|B_k|>0$, $(k=1, \ldots, n)$. B 为正定矩阵.

综上，对正定矩阵有以下等价命题：

定理3　对于实对称矩阵 A，以下命题等价：

(1) A为正定矩阵；

(2) A的特征值全为正实数；

(3) A与单位矩阵合同；

(4) A的各阶顺序主子式全大于零.