第四讲 二次曲面

- 二次曲面的标准方程与图形
  1.椭球面
  2.抛物面
  3.双曲面
- 化二次曲面为标准方程
- 内容小结

电子科技大学 蒲和平

第四讲 二次曲面

- 二次曲面的标准方程与图形
  1.椭球面
  2.抛物面
  3.双曲面
- 化二次曲面为标准方程
- 内容小结

一、二次曲面的标准方程与图形

二次方程

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

所表示的曲面称为二次曲面.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{例如，椭圆柱面} & \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \\ \text{旋转抛物面} & z = x^2 + y^2 \\ \text{球面} & x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{array}\right\}\text{标准方程}$$

研究二次曲面几何特征的方法：

（1） 用坐标变换(旋转、平移)将二次方程化为标准方程；

（2） 用截痕法讨论标准方程的几何特征.

截痕法：

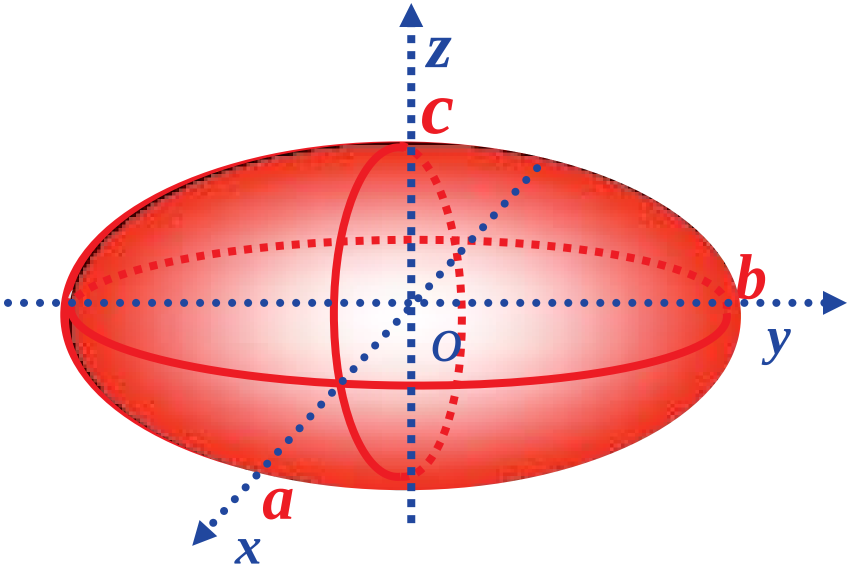
用坐标面或与坐标面平行的平面与曲面相截，考察所得交线（截痕）的形状，通过截痕形状研究曲面的形状.

几类二次曲面的的标准方程：

1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$(a>0, b>0, c>0)$$



(1) 范围：$|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$.

图形在 $x=\pm a$, $y=\pm b$, $z=\pm c$ 所围成的长方体内.

(2) 对称性：图形关于三个坐标面、三个坐标轴及原点对称.

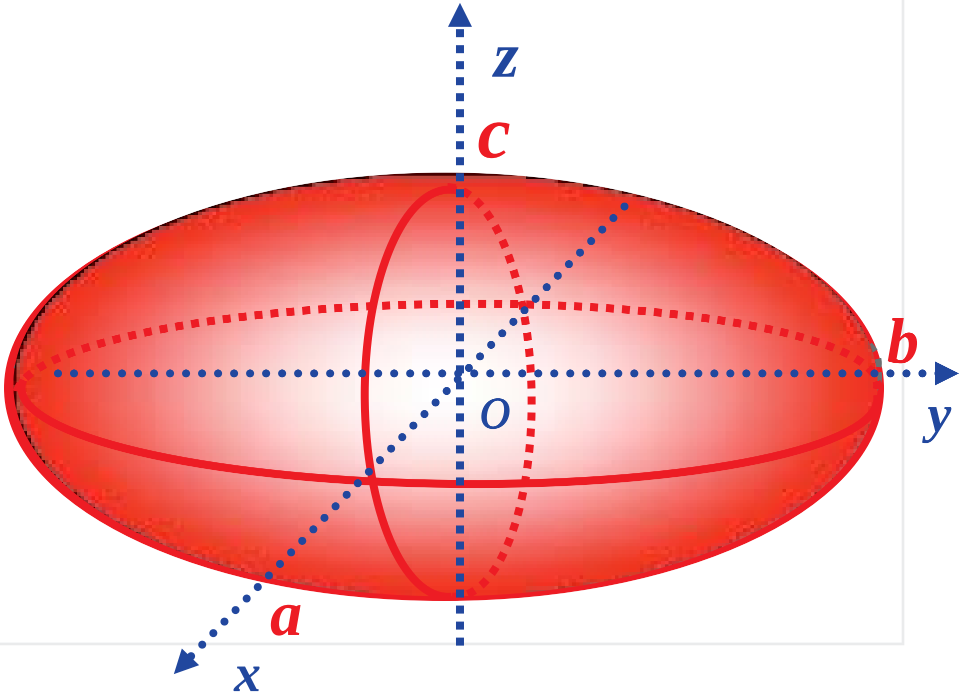
(3) 截 痕

用平面 $z = z_1$ 截椭球面，其交线为椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} + \dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2 - z_1^2)} = 1 \\ z = z_1 \qquad |z_1| < c \end{cases}$$

椭圆截面的大小随平面位置的变化而变化.

同理与平面 $x = x_1$ 和 $y = y_1$ 的交线也是椭圆.



椭球面与三个坐标面的交线为椭圆：

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.\\ x=0\end{cases}$$

（4）椭球面的几种特殊情况：

1^0 $a=b$, $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 是旋转椭球面

由椭圆 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{cases}$ 绕 z 轴旋转而成.

2^0 $a=b=c$, $x^2+y^2+z^2=a^2$. 是球面

主要
内容

1. 研究二次曲面几何特征的方法

2. 椭球面的标准方程与图形

第四讲 二次曲面

二次曲面的标准方程及图形

1.椭球面

2.抛物面

3.双曲面

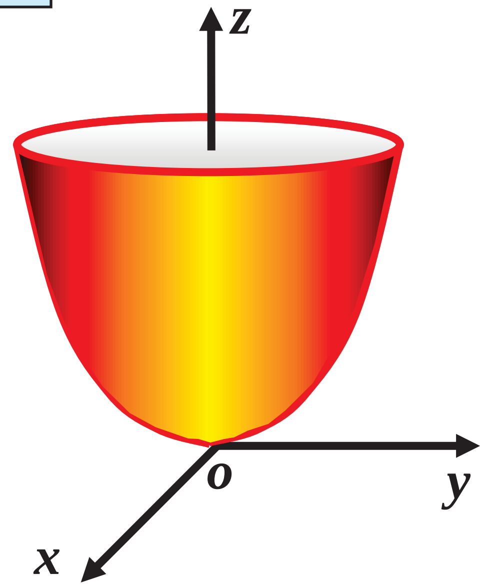
化二次曲面为标准方程

内容小结

一、二次曲面的标准方程及图形

2. 抛物面

（1）椭圆抛物面



$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$ （p 与 q 同号）

1) 范围：若 $p > 0$ 且 $q > 0$, 则

图形在 xy 平面上方，否则在 xy 平面下方.

2) 对称性：图形关于 z 轴、yz 平面、xz 平面对称.

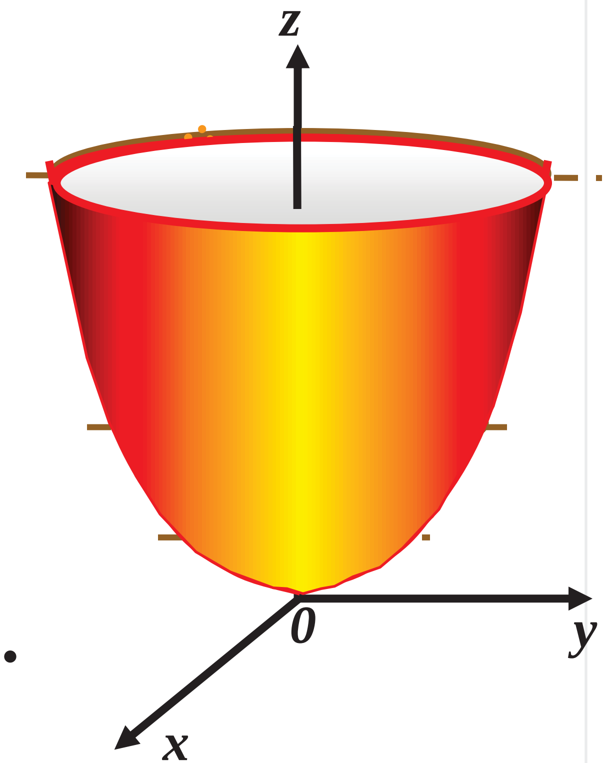
3) 截 痕：

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q}$$ 设 $p > 0,\ q > 0$

1^0 与平面 $z = z_1$ $(z_1 > 0)$的交线为椭圆.

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{2pz_1} + \dfrac{y^2}{2qz_1} = 1 \\ z = z_1 \end{cases}$$

当 z_1变动时椭圆的大小不同，中心都在 z 轴上.



2^0 与平面 $y = y_1$的交线为抛物线.

$$\begin{cases} x^2 = 2p\left(z - \dfrac{y_1^2}{2q}\right) \\ y = y_1 \end{cases}$$

它的轴平行于 z 轴

3^0 与平面 $x = x_1$ 的交线也为抛物线.

原点是该椭圆抛物面的**顶点**.

$p<0,\ q<0$ 时，椭圆抛物面开口向下.

特殊地：当 $p=q$ 时，方程变为

$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$$ 是旋转抛物面

（由 xoz 面上的抛物线 $x^2=2pz$ 绕它的轴旋转而成的）

与平面 $z=z_1\ (z_1>0)$ 的交线为圆.

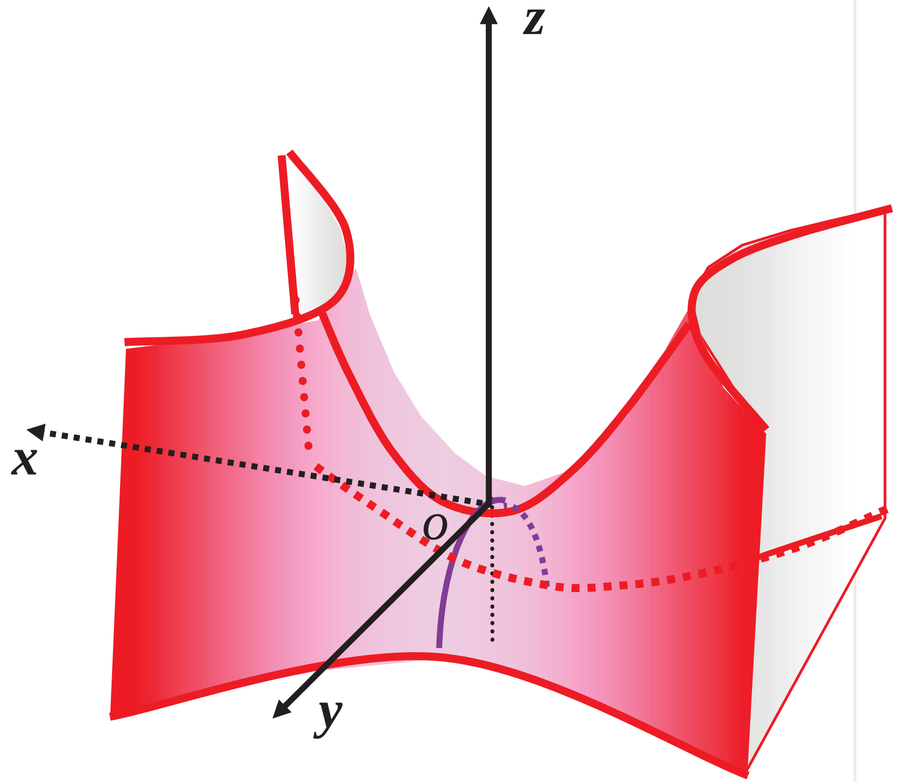
（2）双曲抛物面（马鞍面）

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$

1）范围：$x, y, z \in \mathrm{R}$,

曲面可向各方向无限延伸.

2）对称性：图形关于 z 轴、yz 平面、xz 平面对称.



3) 截 痕 （设$p>0$, $q>0$）

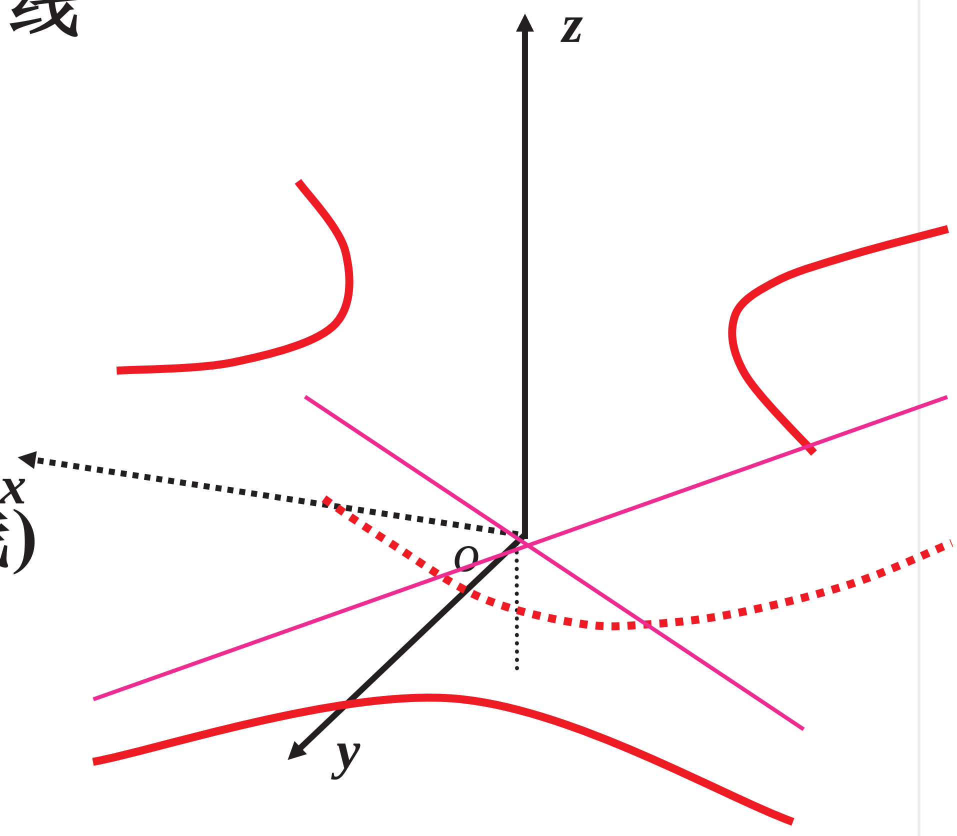
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$

用平面$z=z_0$ $(z_0\neq 0)$

截曲面所得截痕为双曲线

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{2pz_0}-\dfrac{y^2}{2qz_0}=1\\ z=z_0\end{cases}$$

(z_0=0 时为一对相交直线)



用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

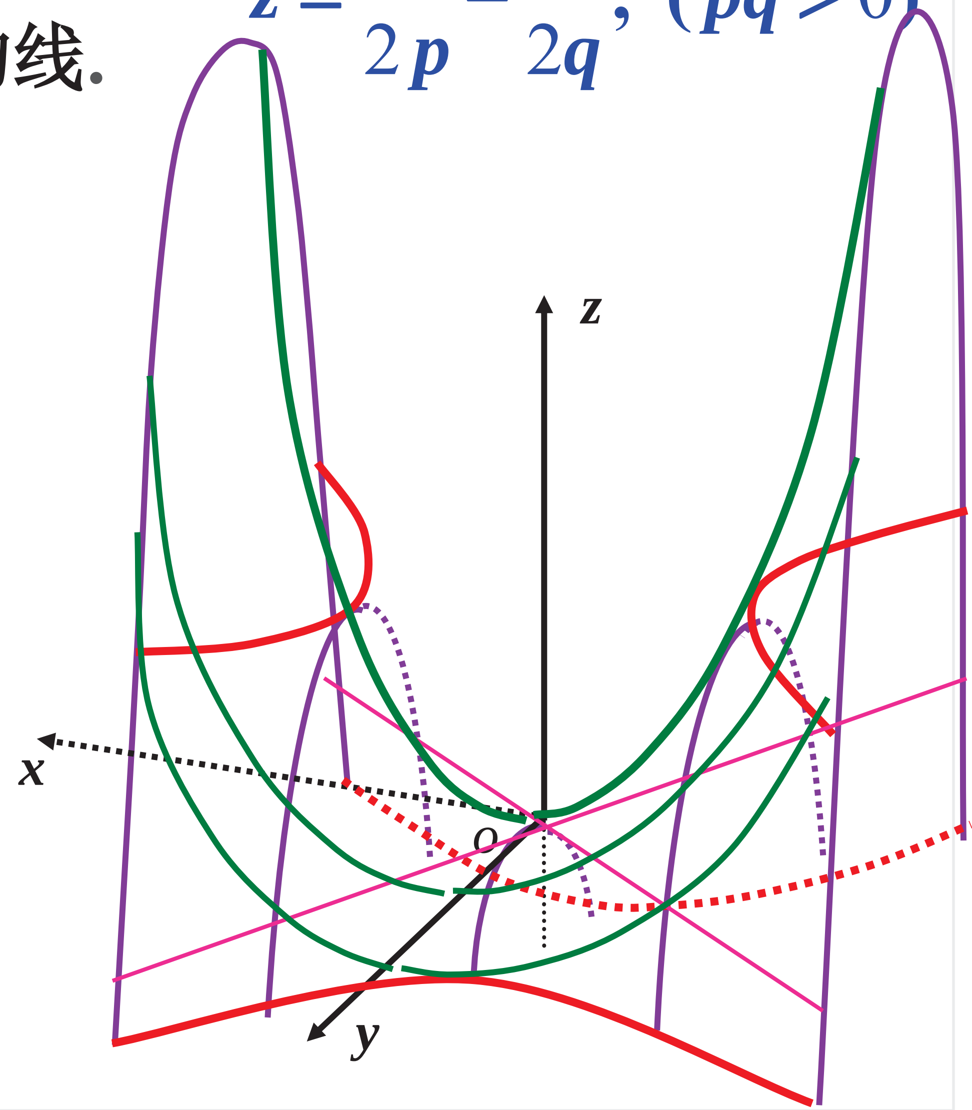
$$\begin{cases} z=\dfrac{x_0^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q} \\ x=x_0 \end{cases}$$

（开口向下）

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^2}{2q} \\ y=y_0 \end{cases}$$

（开口向上）

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$



用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

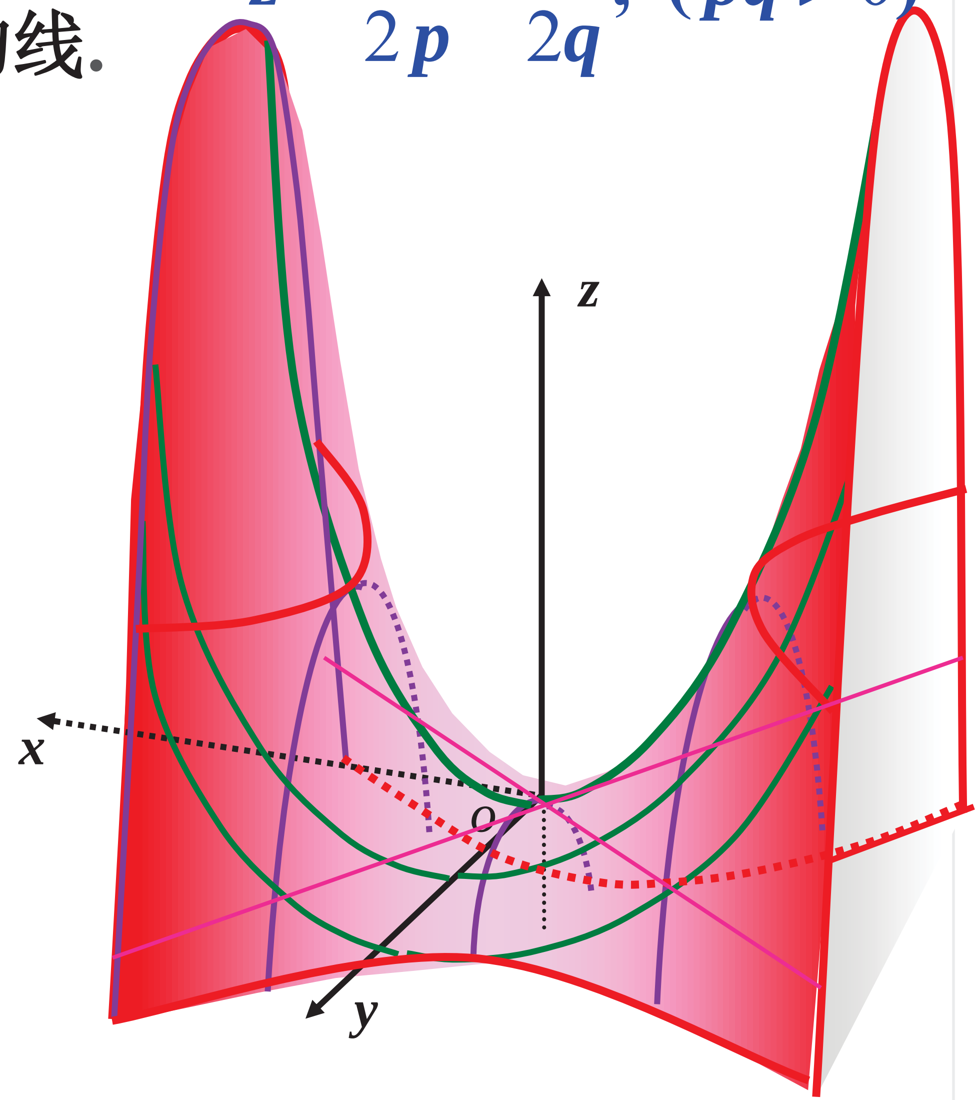
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$

$$\begin{cases} z=\dfrac{x_0^{\ 2}}{2p}-\dfrac{y^{\ 2}}{2q} \\ x=x_0 \end{cases}$$

（开口向下）

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^{\ 2}}{2q} \\ y=y_0 \end{cases}$$

（开口向上）



用平面$x=x_0$与$y=y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

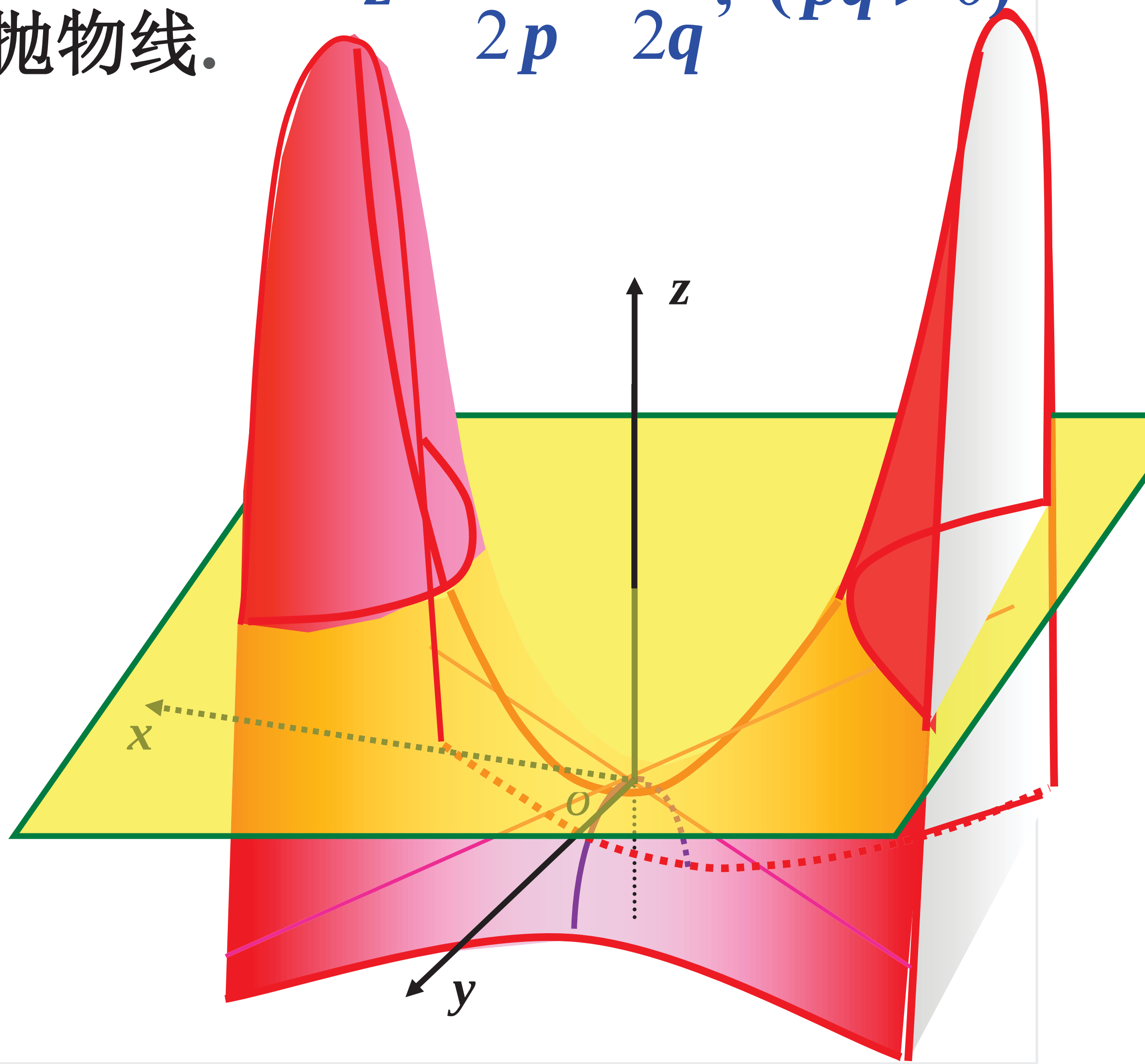
$$\begin{cases} z=\dfrac{x_0^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q} \\ x=x_0 \end{cases}$$

（开口向下）

$$\begin{cases} z=\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y_0^2}{2q} \\ y=y_0 \end{cases}$$

（开口向上）

$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (pq>0)$$



用平面$x = x_0$与$y = y_0$截曲面所得截痕为均抛物线.

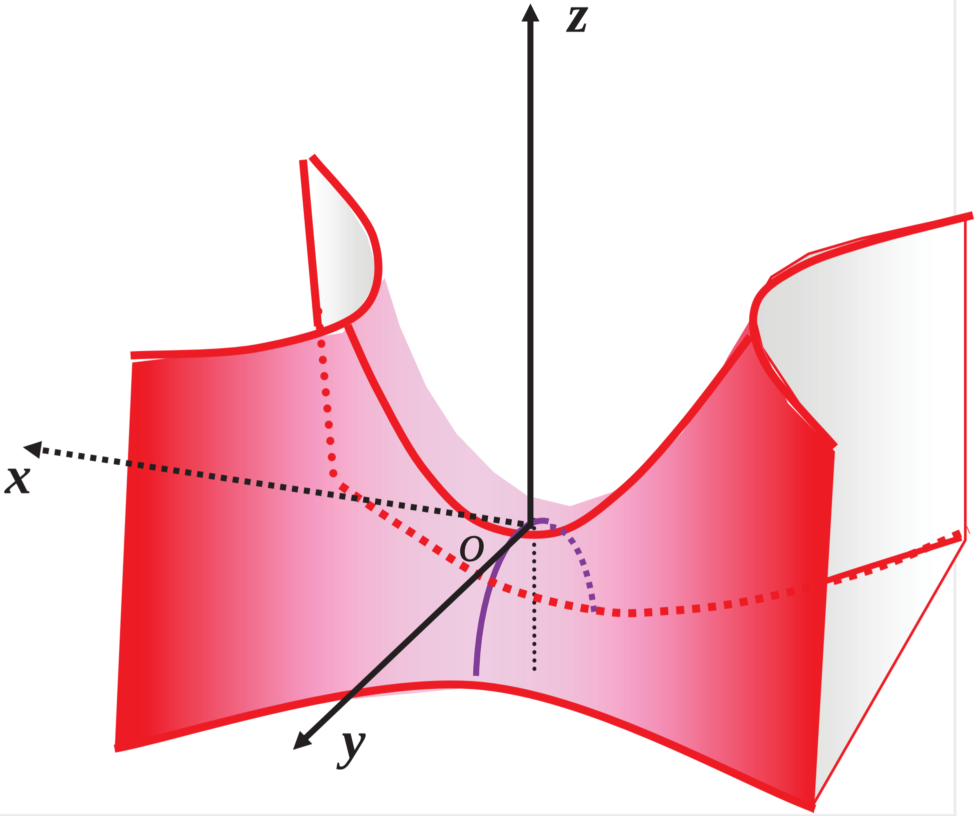
$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q},\ (pq > 0)$$

$$\begin{cases} z = \dfrac{x_0^{\ 2}}{2p} - \dfrac{y^{\ 2}}{2q} \\ x = x_0 \end{cases}$$

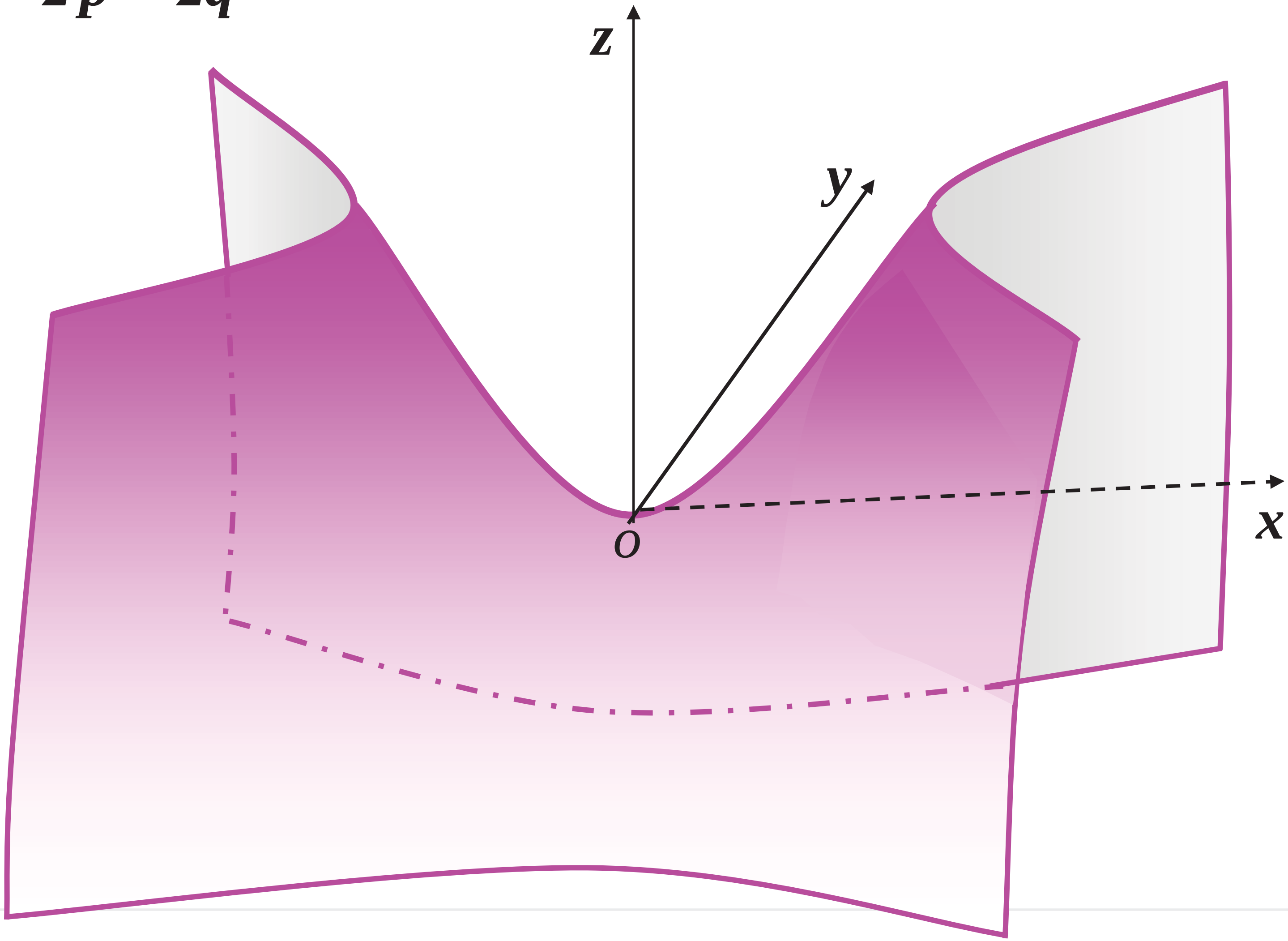
（开口向下）

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^{2}}{2p} - \dfrac{y_0^{\ 2}}{2q} \\ y = y_0 \end{cases}$$

（开口向上）



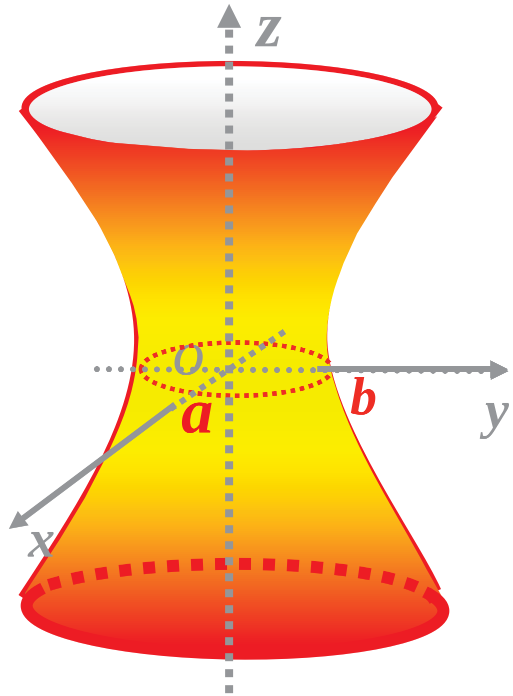
$$z=\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q},\ (p>0,\ q>0)$$ 图形的画法



3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



1) 范围: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\geq 1$

故曲面在椭圆柱面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的外部;

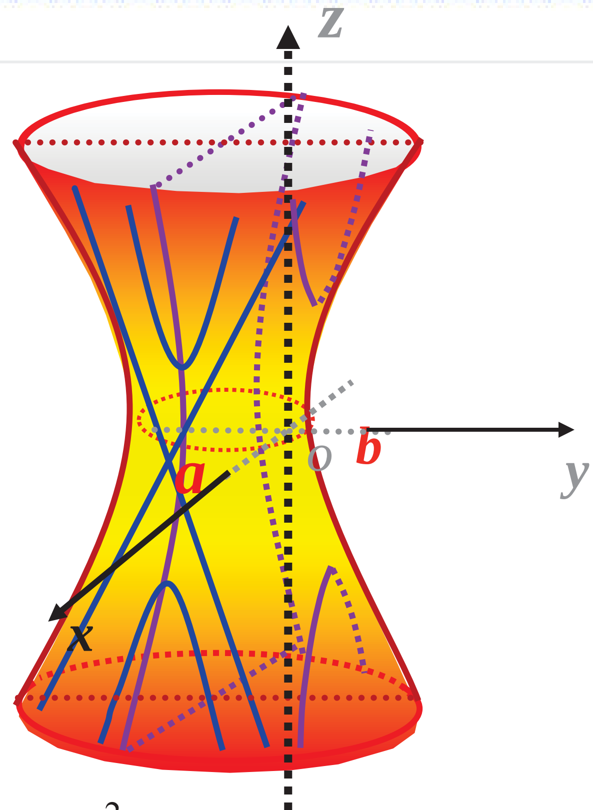
2) 对称性: 图形关于三个坐标轴、三个坐标面以及原点都对称.

3）截 痕

用平面$z = z_0$截曲面

所得截痕为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1+\dfrac{z^2}{c^2} \\ z=z_0 \end{cases}$$



用平面$x = x_0$与$y = y_0$截曲面

所得截痕为双曲线.：

$$\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{x_0^2}{a^2} \\ x=x_0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{y_0^2}{b^2} \\ y=y_0 \end{cases}$$

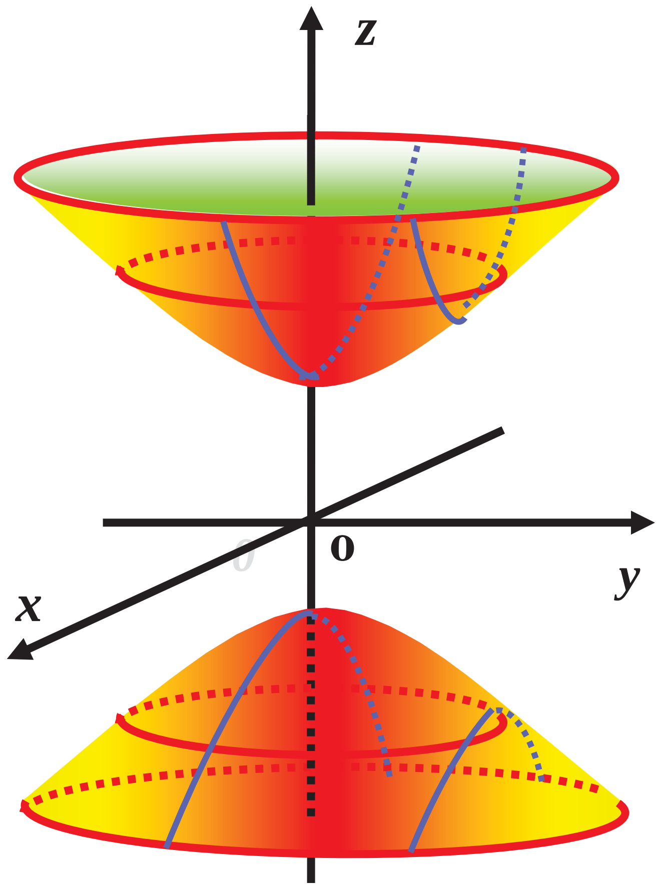
($y_0 = b$是一对相交直线)

($x_0 = a$是一对相交直线)

思考: $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的形状如何？

(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



思考:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

的图形怎样?

主要内容

二次曲面的标准方程与图形

（1）椭球面

（2）抛物面 $\begin{cases} \text{椭圆抛物面} \\ \text{双曲抛物面} \end{cases}$

（3）双曲面 $\begin{cases} \text{单叶双曲面} \\ \text{双叶双曲面} \end{cases}$

第四讲 二次曲面

二次曲面的标准方程及图形

1.椭球面

2.抛物面

3.双曲面

- 化二次曲面为标准方程

内容小结

二、化二次曲面为标准方程

复习：

用正交变换化二次型为标准形的方法：

（1）写出二次型 $f(X)$的矩阵A；

（2）求A的特征值与特征向量；

（3）将同一特征值的特征向量正交、单位化；

（4）以(3)中的标准正交向量组为列做正交矩阵C；

(5) 做正交变换$X = CY$，则 $f(X)=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$.

例1 设 $f(x_1,x_2,x_3)=3x_1^2+2x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$

用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并说明 $f(x_1,x_2,x_3)=5$ 表示什么曲面。

解 f 对应的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-5)(\lambda-2)(\lambda-1)$$

将$\lambda_1=5$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=1$分别代入齐次线性方程

$(\lambda I-A)X=0$，解得所对应的特征向量分别为

$$\alpha_1=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix},\quad \alpha_2=\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\quad \alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

标准化：

$$\beta_1=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\-\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix},\quad \beta_2=\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\\frac{1}{3}\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix},\quad \beta_3=\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\\frac{2}{3}\\\frac{2}{3}\end{pmatrix}$$

取正交矩阵

$$C=(\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)=\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

作正交变换 $X=CY$，即

$$\begin{cases} x_1=\frac{2}{3}y_1+\frac{2}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3 \\ x_2=-\frac{2}{3}y_1+\frac{1}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3 \\ x_3=\frac{1}{3}y_1-\frac{2}{3}y_2+\frac{2}{3}y_3 \end{cases}$$

得 $f(x_1, x_2, x_3) = 5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2$

由 $f(x_1, x_2, x_3) = 5$ 可得

$$5y_1^2 + 2y_2^2 - y_3^2 = 5$$

$$y_1^2 + \frac{y_2^2}{\frac{5}{2}} - \frac{y_3^2}{5} = 1 \longrightarrow \boxed{\text{单叶双曲面}}$$

一般地，二次曲面

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ b_1 x + b_2 y + b_3 z + c = 0$$

记 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\quad a_{ij} = a_{ji}$

$$X = (x, y, z)^T, \quad b = (b_1, b_2, b_3)^T$$

则S的方程可写为： $X^T AX + b^T X + c = 0$

作正交变换 $X = QY$ 将A化为标准形

$$Q^T AQ = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$$

曲面方程为

$$S: \quad Y^T Q^T A Q Y + b^T Q Y + c = 0$$

即 $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + b_1' x' + b_2' y' + b_3' z' + c = 0$

再配方作平移，可将S化为标准方程.

二次曲面 $\xrightarrow{\text{正交变换}}$ 化二次项为标准形 $\xrightarrow{\text{配方}}$ 标准方程

思考：曲面S的类型由什么确定？

例2 $z=f(x,y)=xy$ 表示什么曲面?

解 $f(x,y)=xy$ 的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I-A|=(\lambda-\frac{1}{2})(\lambda+\frac{1}{2}), \qquad \lambda_1=\frac{1}{2}, \lambda_2=-\frac{1}{2},$$

存在正交变换 $X=CY$ 使

$$z=f=\frac{1}{2}x'^2-\frac{1}{2}y'^2$$

$z=xy$ 为双曲抛物面.

例3 设 $f(x_1, x_2, x_3) = X^{\mathrm{T}}AX$ 为实二次型，则

$f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 为椭球面 $\Leftrightarrow A$ 为正定矩阵.

证 将 $f(X) = X^{\mathrm{T}}AX$ 用正交变换$X = CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2$$

则 $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \lambda_3 y_3^2 = 1$ 为椭球面

$\Leftrightarrow$ $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 全为正数

$\Leftrightarrow$ A 为正定矩阵.

主要内容

化二次曲面方程为标准方程

二次曲面一般方程 $\xrightarrow{\text{正交变换}}$ 化二次项为标准形 $\xrightarrow{\text{配方}}$ 标准方程

练习 设 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_3+x_2^2$，用正交变换化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并说明 $f(x_1,x_2,x_3)=1$ 表示什么曲面.

提示： f 对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

其特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1, \lambda_3=-1.$

作正交变换 $X=CY$，其中

$$C=\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$f(Y)=y_1^2+y_2^2-y_3^2$$

曲面 $y_1^2+y_2^2-y_3^2=1$ 是单叶双曲面.

第四讲 二次曲面

二次曲面的标准方程及图形

1.椭球面

2.抛物面

3.双曲面

化二次曲面为标准方程

- 内容小结

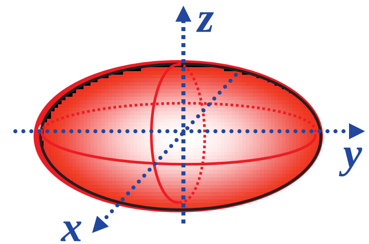
内容小结

1. 二次曲面标准方程

椭球面

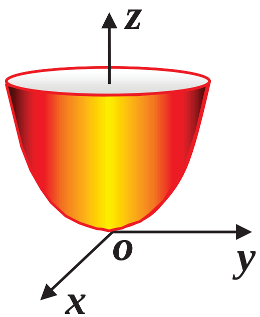
球面 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$

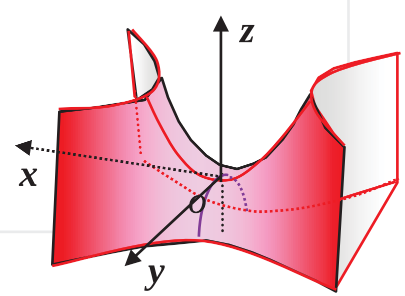


抛物面

椭圆抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$ 与 q 同号）

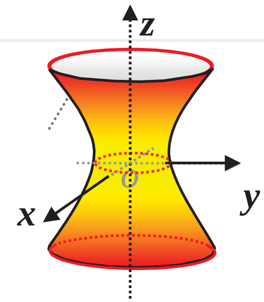


双曲抛物面 $\dfrac{x^2}{2p}-\dfrac{y^2}{2q}=z$（$p$与 q 同号）

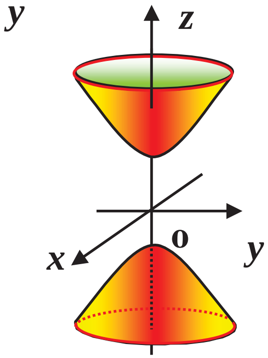


双曲面

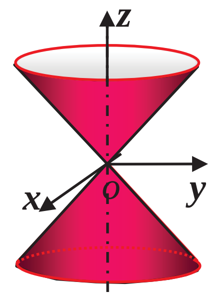
单叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



双叶双曲面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



椭圆锥面 $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$



2. 化二次曲面为标准方程

二次曲面 —正交变换→ 化二次项为标准形 —配方→ 标准方程