第一讲 实二次型及其标准形

- 二次型及其矩阵表示
- 矩阵的合同
- 用配方法化二次型为标准形
- 用正交变换化二次型为标准形
- 小结

四、用正交变换化二次型为标准形

若线性变换$X=CY$中 C 为正交矩阵，则称之为正交变换.

由实对称矩阵一定可相似对角化的性质知：

定理3 任一 n 元实二次型 $f(X)=X^{\mathrm{T}}AX$ 都可用正交变换 $X=CY$ 化为标准形

$$\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\dots+\lambda_n y_n^2$$

其中 λ_1，λ_2，…，λ_n是A 的特征值.

证 因A为n阶实对称矩阵，所以存在正交矩阵C，

使 $C^{T}AC = C^{-1}AC = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

令 $X = CY$, 则

$f(X) = Y^{T}C^{T}ACY = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$

用正交变换化二次型为标准形的方法:

（1）写出二次型$f(X)$的矩阵A;

（2）求A的特征值与特征向量;

（3）将同一特征值的特征向量正交、单位化;

（4）以(3)中的标准正交向量组为列做正交矩阵C;

(5) 做正交变换$X = CY$, 则 $f(X)=\lambda_1 y_1^2+\ldots+\lambda_n y_n^2$.

例 用正交变换化二次型为标准形

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

解 $f(x_1, x_2, x_3)$的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 & -2 \\ 2 & \lambda + 2 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda + 7)$$

特征值：$\lambda_1 = 2$（二重特征值），$\lambda_2 = -7$.

求$\lambda_1 = 2$的特征向量：

$$\lambda_1 I - A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组　$x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$

特征向量：$\alpha_1 = (-2, 1, 0)^T$，　$\alpha_2 = (2, 0, 1)^T$

将α_1, α_2正交化：

$$\beta_1 = \alpha_1 = (-2, 1, 0)^T,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 = \cdots = \frac{1}{5}(2,\ 4,\ 5)^T$$

求λ_2= -7 的特征向量：

$$\lambda_2 I - A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

同解方程组$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$， 特征向量：$\alpha_3 = (1, 2, -2)^{T}$，

将 β_1, β_2 , α_3 单位化：

$$\gamma_1 = \frac{1}{\|\beta_1\|}\beta_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\ 1,\ 0)^T,\ \gamma_2 = \frac{1}{\|\beta_2\|}\beta_2 = \frac{1}{\sqrt{45}}(2,\ 4,\ 5)^T$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\|\alpha_3\|}\alpha_3 = \frac{1}{3}(1,\ 2,\ -2)^T.$$

令 $C=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$X=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$, $Y=(y_1,y_2,y_3)^{\mathrm{T}}$

则 $X=CY$ 为正交变换，且

$$f=2y_1^2+2y_2^2-7y_3^2$$

练习 用正交变换，将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=5x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2+6x_1x_3-6x_2x_3$$

化为标准形.

解 二次型的矩阵为 $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$,

可求得 $|\lambda I-A|=\lambda(\lambda-4)(\lambda-9)$,

于是A的特征值为 $\lambda_1=0, \lambda_2=4, \lambda_3=9$,

对应特征向量为 $p_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, p_2=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_3=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

将其单位化得

$$q_1=\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\quad q_2=\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\quad q_3=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

故正交变换为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},$$

化二次型为 $f=4y_2^2+9y_3^2.$