# 六. 非齐次方程组

给定非齐次方程组: $A_{m\times n}X_{n\times 1}=b_{m\times 1}\quad (b\neq 0)$

**定理3:** 设$\overline{A}=(A,b)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n,b)$, 则:

(1) $AX=b$无解 $\quad\Leftrightarrow R(A)\neq R(\overline{A})$;

(2) $AX=b$有唯一解 $\quad\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})=n$;

(3) $AX=b$有无穷多解 $\quad\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<n$;

(4) $AX=b$有解 $\quad\Leftrightarrow b$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$线性表出

# 非齐次方程组求解过程

对增广矩阵初等行变换, 化为阶梯型:

$$(1)\ R(A) \neq R(\overline{A}) \Rightarrow$$ 无解!

$$(2)\ R(A) = R(\overline{A}) \Rightarrow$$ 有解!

有解时继续化为行简化阶梯型,回写方程组;

[1] 所有自由变元取0,得特解 $\eta_0$;

[2] 去掉常数列, 依次令某自由变元取1, 其它取0, 得导出组基础解系: $\xi_1, \cdots, \xi_r \quad (r = n - R(A))$

通解: $\eta_0 + k_1\xi_1 + \cdots + k_r\xi_r,\ k_1, \cdots, k_r \in \mathbf{R}$

# 对方程组题设条件的理解

给定方程组$AX=\beta$, $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$

(1) $\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_4=0 \Rightarrow$ $(1,1,0,2)^T$是$AX=0$的解

(2) $\beta=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3 \Rightarrow$ $(1,-1,2,0)^T$是特解

(3) $AX=\beta$有两个不同的解$\Rightarrow$ $\gamma-\delta$是$AX=0$的解

(4) 非零矩阵$B$使得$AB=O \Rightarrow$

$B$的非零列是$AX=0$的非零解

**例1.** 设$A$为$4\times 3$非零矩阵，$\eta_1,\eta_2,\eta_3$是非齐次方程组$AX=\beta$的3个线性无关的解，则$AX=\beta$的通解为(　　)

(A) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k(\eta_2-\eta_1)$；　(B) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k(\eta_2-\eta_1)$；

(C) $\dfrac{\eta_2+\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$；

(D) $\dfrac{\eta_2-\eta_3}{2}+k_1(\eta_2-\eta_1)+k_2(\eta_3-\eta_1)$；

**分析：** $AX=\beta$有3个线性无关的解$\eta_1,\eta_2,\eta_3\Rightarrow$

$\eta_2-\eta_1,\eta_3-\eta_1$是$AX=0$线性无关的解

$$A\left(\frac{\eta_2+\eta_3}{2}\right)=\frac{1}{2}A\eta_2+\frac{1}{2}A\eta_3=b,\ A\left(\frac{\eta_2-\eta_1}{2}\right)=\frac{1}{2}A\eta_2-\frac{1}{2}A\eta_1=0$$

**方程数=变元数:** 首先考虑利用**行列式**.

**例2.** 已知方程组 $\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\ 2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\ -2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$ 有无穷多解, 求$\lambda$的值.

**分析:**

方程组有无穷多解 $\Leftrightarrow R(A)=R(\overline{A})<3$

用初等行变换求秩? 可能出现分数, 先求行列式!

$$|A|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ -2 & -4 & 5-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2-\lambda & 2 & -2\\ 2 & 5-\lambda & -4\\ 0 & 1-\lambda & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=\cdots=(1-\lambda)^2(\lambda-10)\ \Rightarrow \lambda=1\ or\ 10$$

$$\begin{cases}(2-\lambda)x_1+2x_2-2x_3=1,\\2x_1+(5-\lambda)x_2-4x_3=2,\\-2x_1-4x_2+(5-\lambda)x_3=-\lambda-1\end{cases}$$

有无穷多解，求$\lambda$的值.

$$R(A)=R(\overline{A})<3\Rightarrow\lambda=1\ \ or\ 10$$

$$\lambda=1:\ \overline{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\2&4&-4&2\\-2&-4&4&-2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&2&-2&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$\lambda=10:\overline{A}=\begin{pmatrix}-8&2&-2&1\\2&-5&-4&2\\-2&-4&-5&-11\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}2&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

此时原方程组无解!

$$\boxed{\Rightarrow\lambda=1}$$

**例3.** 已知4阶方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$, $AX=\beta$ 的通解为

$$(2,1,0,3)^T+k(1,-1,2,0)^T, k\in \mathrm{R}.$$

试问: (1) $\alpha_1$能否由$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$线性表出? 为什么?

(2) $\alpha_4$能否由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表出? 为什么?

---

**分析:**

$$\left.\begin{array}{l}\beta=2\alpha_1+\alpha_2+3\alpha_4\\ \alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$$

$$\boxed{\Rightarrow \alpha_1=1\alpha_2-2\alpha_3+0\alpha_4}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{设}\alpha_4\text{可由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\\ \alpha_1\text{可由}\alpha_2,\alpha_3\text{线性表出}\end{array}\right\}\Rightarrow \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\alpha_4\text{可由}\alpha_2,\alpha_3\text{表出}$$

$\Rightarrow R(A)\le 2$ 矛盾于导出组基础解系中解数为1!

$$\boxed{\Rightarrow \alpha_4\text{不可由}\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\text{表出}}$$