Banque « Agro – Véto »
A – 0210

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Les problèmes I et II sont indépendants.

Problème I

Considérons la matrice A appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. *Diagonalisation de A*

1.1. Déterminer les valeurs propres de A.
Ce résultat suffit-il à assurer la diagonalisabilité de A ? *Justifier la réponse.*

1.2. Pour chaque valeur propre de A, déterminer une base du sous-espace propre associé.

1.3. Déterminer une matrice P appartenant à $GL_3(\mathbb{R})$ telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit de la forme $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$ avec α, β, γ réels tels que : $\alpha > \beta > \gamma$.
Les coefficients de la dernière ligne de la matrice P seront choisis égaux à 1 .

2. *Calcul des puissances successives de A*

2.1. Calculer P^{-1}. *Le détail des calculs devra figurer sur la copie.*

2.2. Démontrer que, pour tout entier naturel n : $A^n = P D^n P^{-1}$.

2.3. En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de n.

3. *Étude d'une suite matricielle*

B désigne une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Nous définissons alors la suite matricielle (X_n) de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = A X_n + B. \end{cases}$$

3.1. $(E, +, \cdot)$ désigne un espace vectoriel réel de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ désigne une base de E.

Considérons les endomorphismes a et b de E définis par : $\begin{cases} \mathrm{Mat}(a,\mathcal{B}) = A \\ \mathrm{Mat}(b,\mathcal{B}) = B \end{cases}$.

3.1.1. Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $L = AL + B$.
Montrer que : $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - a)$.

3.1.2. Réciproquement, supposons que : $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - a)$.
Soit G un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - a)$ dans E.

- Montrer que pour tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à E, il existe un unique vecteur $\vec{x}'$ appartenant à G tel que : $b(\vec{x}) = (\mathrm{id}_E - a)\ (\vec{x}')$.
- Nous pouvons alors définir une application ℓ de E dans E qui à tout vecteur $\vec{x}$ appartenant à E, associe l'unique vecteur $\vec{x}'$ appartenant à G tel que :

$$b(\vec{x}) = (\mathrm{id}_E - a)\ (\vec{x}').$$

  Montrer que ℓ est un endomorphisme de E tel que : $(\mathrm{id}_E - a) \circ \ell = b$.
- En déduire l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B.$$

3.1.3. Énoncer alors une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $L = AL + B$.

3.2. Nous supposons dans cette question l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $L = AL + B$.

3.2.1. Considérons alors la suite matricielle (Y_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $Y_n = X_n - L$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

3.2.2. Exprimer pour tout entier naturel n, X_n en fonction de A, n, L et X_0.

4. Un exemple

Dans cette question, nous choisissons : $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.1. $(E,+,\cdot)$ désigne un espace vectoriel réel de dimension 3, $\mathcal{B} = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ désigne une base de E.
Considérons l'endomorphisme a de E défini par : $\mathrm{Mat}(a,\mathcal{B}) = A$.
Montrer que pour qu'un vecteur $\vec{v}$ de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ appartienne à $\mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.

4.2. Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $L = AL + B$.

4.3. Déterminer par le calcul, une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $L' = DL' + P^{-1}BP$. *On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls.*
A partir de cette matrice L', donner une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $L = AL + B$.

4.4. n appartenant à $\mathbb{N}$, déterminer l'expression des coefficients de la matrice X_n et montrer que chacun des coefficients a une limite lorsque n end vers $+\infty$.

On posera $X_0 = \begin{pmatrix} u & u' & u'' \\ v & v' & v'' \\ w & w' & w'' \end{pmatrix}$ *et on exprimera ces limites à l'aide des coefficients de la matrice* X_0.

Problème II : Étude d'une équation fonctionnelle

Soient a un nombre réel appartenant à $[-1,1]$ et φ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

L'objet de ce problème est de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{ax} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x).$$

1. *Un premier cas particulier*

Pour cette question, nous prenons a égal à 1 et φ désigne la fonction exponentielle.

1.1. On suppose l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x\ .$$

1.1.1. Calculer $f(0)$.

1.1.2. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x.

1.1.3. En déduire la fonction f.

1.2. Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x.$$

2. *Un second cas particulier*

Pour cette question, nous prenons a égal à -1 et φ désigne encore la fonction exponentielle.

2.1. On suppose l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x.$$

2.1.1. Calculer $f(0)$.

2.1.2. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors pour tout réel x, $f(x)$ en fonction de x, F et e^x.

2.1.3. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de x, f et e^x. Calculer $f'(0)$.

2.1.4. Justifier que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout réel x, $f''(x)$ en fonction de x, f' et e^x.

2.1.5. Montrer alors que pour tout réel x : $f''(x) + f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$.

2.1.6. En déduire la fonction f.

2.2. Déterminer l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{-x} f(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^x \ .$$

3. Résolution de l'équation homogène

Pour cette question, a désigne un réel appartenant à $[-1,1]$ et φ est l'application nulle.
On suppose l'existence d'une application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{a\,x} f(t)\,\mathrm{d}t \ .$$

3.1. Calcul des dérivées successives de f

3.1.1. Justifier l'existence d'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ et écrire alors pour tout réel x, $f(x)$ en fonction de x, a et F.

3.1.2. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et exprimer pour tout réel x, $f'(x)$ en fonction de x, a et f.

3.1.3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f^{(n)}(x) = a^{\frac{n(n+1)}{2}} f\left(a^n x\right) .$$

3.1.4. En déduire pour tout entier naturel n, la valeur de $f^{(n)}(0)$.

3.2. Montrer que pour tout réel x et tout entier naturel n : $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$.

3.3. Soit A un nombre réel strictement positif.

3.3.1. Justifier l'existence d'un réel positif M tel que : $\forall x \in [-A, A]\ ,\ |f(x)| \le M$,

et en déduire que pour tout entier naturel n : $\forall x \in [-A, A]\ ,\ \left|f^{(n)}(x)\right| \le M$.

3.3.2. Soit x un réel appartenant à $[-A, A]$.

Montrer que pour tout entier naturel n : $|f(x)| \le M \times \dfrac{A^{n+1}}{(n+1)!}$.

En déduire que : $f(x) = 0$.

3.4. Que peut-on en déduire sur la fonction f ?

4. Étude de l'équation complète

Pour cette question, a désigne un réel appartenant à $[-1,1]$ et φ désigne une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

4.1. Montrer que sous réserve d'existence, il existe une unique application f continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{a\,x} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x)$.

4.2. Que peut-on en déduire sur l'ensemble des fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ f(x) = \int_0^{a\,x} f(t)\,\mathrm{d}t + \varphi(x) \ ?$$

FIN DE L'ÉPREUVE