Banque <<Agro -Véto>>
A - 0511

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE B

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Pour tout entier naturel n, I_n désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leqslant k \leqslant n$ et I_n^* l'ensemble des entiers naturels k tels que $1 \leqslant k \leqslant n$.

Pour une variable aléatoire réelle X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose, pour tout réel t pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P[X = k]t^k$$

où E désigne l'espérance. La fonction g_X est appelée *fonction génératrice* de la variable aléatoire X. Dans tout ce problème, on considèrera que $0^0 = 1$, ce qui permet par exemple d'affirmer ici que $g_X(0) = P[X = 0]$.

On admet que si U et V sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes et possédant une espérance, alors le produit UV possède une espérance et $E(UV) = E(U)E(V)$.

L'objet de ce problème est l'étude de quelques propriétés des fonctions génératrices, ainsi que des exemples d'applications.

A. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans I_n

Soient n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans I_n. Pour tout $k \in I_n$, on note $a_k = P[X = k]$ la probabilité que X prenne la valeur k.

A.1. a) Montrer que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré maximal. Quelle est la valeur de $g_X(1)$?
b) Montrer que si g_X est donnée, alors la loi de X est entièrement connue.

A.2. Soient (m_1, m_2) deux entiers naturels et (Z_1, Z_2) deux variables aléatoires réelles à valeurs respectivement dans I_{m_1} et I_{m_2}. On suppose que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.
a) En utilisant pour tout réel t l'expression $g_X(t) = E(t^X)$, montrer que

$$g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t) g_{Z_2}(t). \qquad (*)$$

b) Calculer la fonction génératrice d'une variable aléatoire X suivant la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$.
c) Soit Y une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètres n' et p avec n' un entier naturel. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer en utilisant A.1.b que $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n + n'$ et p.

A.3. Exemple (*Cette question est sans incidence sur la suite du problème*) On lance deux dés classiques à 6 faces. Le résultat affiché par le i-ième dé est une variable aléatoire X_i à valeurs dans $I_6^* = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont supposées indépendantes.

a) On suppose les dés équilibrés ; autrement dit que les variables X_1 et X_2 suivent des lois uniformes sur I_6^*. Calculer g_{X_i} pour $i = 1$, $i = 2$. En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y = X_1 + X_2$.

b) On suppose maintenant que les deux dés ne sont pas équilibrés.
On note pour tout $k \in I_6^*$, $p_k = P[X_1 = k]$ et $q_k = P[X_2 = k]$, et on suppose que $p_k > 0$ et $q_k > 0$. On cherche à prouver qu'on ne peut pas trouver des valeurs des p_k et q_k telles que $Y = X_1 + X_2$ soit une variable aléatoire uniforme sur $I' = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$. Nous raisonnons par l'absurde : on suppose donc dans la suite de cette question que Y suit la loi uniforme sur I'.

i) Donner la fonction génératrice de Y que l'on notera R.

ii) Vérifier que les racines complexes non réelles de R sont les nombres complexes $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$, pour k entier entre 1 et 10.

iii) Déduire de la relation $(*)$ du **A.2.a** qu'il existe deux polynômes P et Q de degré 5 à coefficients réels tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $t^2 P(t)Q(t) = R(t)$.

iv) Aboutir à une contradiction quant à l'existence de racines réelles de P et Q. Conclure.

B. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit maintenant X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = P[X = n].$$

B.1. Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1, 1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$.

B.2. Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$.

B.3. a) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $g_X(t)$ pour $t \in [-1, 1]$ (on pourra poser $q = 1 - p$).

b) Même question pour X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Dans la suite du problème, nous admettrons la propriété suivante, généralisant le résultat de A.1.b) : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors la connaissance de $g_X(t)$ pour tout $t \in [-1, 1]$ entraîne la connaissance de la loi de X. Ceci permet donc de reconnaître la loi d'une variable aléatoire dont on connaît la fonction génératrice.

C. Fonction génératrice de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Dans cette partie,

- $(X_n)_{n \geqslant 1}$ désigne une suite de variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi,

- N est une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des variables $(X_n)_{n \geqslant 1}$.

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

On définit alors $Y = S_N$ (il s'agit donc de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires).
On admettra que Y est bien une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$.

On notera f la fonction génératrice commune à toutes les variables $(X_n)_{n\geqslant 1}$, h la fonction génératrice de N, g la fonction génératrice de Y et ψ_n la fonction génératrice de S_n pout tout $n \geqslant 0$. On cherche maintenant à déterminer g en fonction de f et h.

On se limitera ici au cas où N prend ses valeurs dans I_s, s étant un entier naturel supérieur à 1, fixé dans toute cette partie. Soit $t \in [-1, 1]$.

C.1. Montrer que, pour tout $n \in I_s$, on a $\psi_n(t) = (f(t))^n$.

C.2. Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$P[Y = k] = \sum_{n=0}^{s} P[(Y = k) \cap (N = n)] = \sum_{n=0}^{s} P[(S_n = k) \cap (N = n)].$$

C.3. En déduire l'égalité :

$$g(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{s} P[S_n = k] P[N = n] \right) t^k.$$

C.4. En déduire que $g(t) = (h \circ f)(t)$.

On admet pour la suite du problème que le résultat obtenu dans la question C.4 est encore valable dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où la variable aléatoire N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

C.5. On suppose ici que les $(X_n)_{n\geqslant 1}$ suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et N la loi géométrique de paramètre $p' \in]0, 1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

D. Multiplication d'une bactérie

Une bactérie B est présente dans un milieu M plus ou moins propice à sa reproduction. Elle se reproduit de la façon suivante : chaque individu donne naissance à X nouvelles bactéries B (appelées dans la suite «fils») puis meurt. On peut donc classer les bactéries par génération : les bactéries d'une génération vont chacune donner naissance à un certain nombre de fils puis disparaître. Les fils de toutes les bactéries de la génération n formeront ainsi la génération $n + 1$.

Le but est de déterminer la probabilité que toutes les bactéries B disparaissent du milieu M au bout d'un certain nombre de générations.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera dans la suite Y_n le nombre d'individus formant la génération n de bactéries B présentes dans M (on a donc d'après les hypothèses $Y_0 = 1$). On notera de plus $x_n = P[Y_n = 0]$ (on a donc $x_0 = 0$).

On admet que :

1) les variables aléatoires comptant le nombre de «fils» de toutes les bactéries B présentes à une génération n donnée sont des variables indépendantes de même loi. Ces variables sont aussi indépendantes de Y_n.

2) X (nombre de «fils» d'une bactérie B fixée, quelle que soit sa génération) suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on notera f la fonction génératrice de X (on admet que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f(t) = \mathrm{e}^{\lambda(t-1)}$) ;

3) la génération $n = 0$ ne compte qu'une seule bactérie B.

D.1. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa convergence. On admettra dans la suite que la probabilité p que la bactérie B disparaisse du milieu M est $p = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

D.2. Donner la loi de Y_1 et en déduire que $x_1 = f(x_0)$.

D.3. Montrer que $Y_2 = \sum\limits_{k=1}^{Y_1} X_k$ où les variables aléatoires $(X_k)_{1\leqslant k\leqslant Y_1}$ sont indépendantes et de même loi que X. Déduire du résultat de la question C.4. la fonction génératrice de Y_2 que l'on exprimera en fonction de f.

D.4. a) Pour tout $n \geqslant 1$, donner la fonction génératrice de Y_n et en déduire que

$$x_n = f(x_{n-1}).$$

b) En déduire que $p = f(p)$.

Soit φ la fonction définie sur $[0,1]$ par $\varphi(t) = f(t) - t$.

D.5. On suppose $\lambda \leqslant 1$. Étudier les variations de φ sur $[0,1]$ et en déduire que la bactérie B disparaît du milieu M de façon presque certaine.

D.6. On suppose maintenant que $\lambda > 1$.

a) Étudier les variations de la fonction $\theta : u \mapsto 1 - \dfrac{\ln u}{u}$ sur $]1,+\infty[$.

b) En déduire qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$. Déterminer les variations de φ sur $[0,1]$.

c) Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant \alpha$ et conclure quant à la probabilité de disparition de la bactérie B du milieu M.

FIN DE L'ÉPREUVE