Banque << Agro – Véto >>
A – 0211

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui vérifiera et éventuellement remplacera son sujet.

Le problème comporte trois parties qui traitent toutes de la résolution d'équations différentielles par des méthodes différentes.

Les différentes parties sont donc totalement indépendantes.

I – Première partie

1. L'objet de cette question est de justifier dans certains cas, la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants.

Soit *a*, *b* et *c* trois réels avec *a* non nul et considérons l'équation différentielle :

$$\left(\mathcal{E}_2'\right) \ a\,y''+b\,y'+c\,y=0 \ ,$$

où *y* est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Nous savons que la résolution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle est basée sur les solutions de l'équation numérique $\left(\mathcal{C}\right)\ a\,r^2+b\,r+c=0$, dite *équation caractéristique associée à* $\left(\mathcal{E}_2'\right)$.

Nous allons nous limiter au cas où l'équation $\left(\mathcal{C}\right)$ admet deux racines réelles notées ω_1 et ω_2 non nécessairement deux à deux distinctes.

1.1. Rappeler les relations liant la somme et le produit des racines ω_1 et ω_2 aux coefficients *a, b* et *c* de l'équation $\left(\mathcal{C}\right)$.

1.2. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ solution de $\left(\mathcal{E}_2'\right)$ sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire *y* est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ a\,y''\left(x\right)+b\,y'\left(x\right)+c\,y\left(x\right)=0 \ .$$

Posons : $z=y'-\omega_1 y$. Montrer que *z* est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z'-\omega_2 z=0$, et en déduire une expression de z.

En déduire une expression de y . *Pour cela, le candidat sera amené à distinguer les cas où* $\omega_1=\omega_2$ *et* $\omega_1\neq\omega_2$.

Montrer que, suivant les cas, *y* s'écrit $x\mapsto\left(Ax+B\right)e^{\omega_1 x}$ ou $x\mapsto Ae^{\omega_1 x}+Be^{\omega_2 x}$, *A* et *B* étant deux constantes réelles.

1.3. Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 = \omega_2$.

Montrer que pour toutes constantes réelles *A* et *B*, les fonctions $x \mapsto (Ax+B)e^{\omega_1 x}$ sont solutions de $(\mathcal{E}_2')$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire l'ensemble S_2' des solutions de $(\mathcal{E}_2')$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que S_2' est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2.

1.4. Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 \neq \omega_2$.

Montrer que pour toutes constantes réelles *A* et *B*, les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ sont solutions de $(\mathcal{E}_2')$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire l'ensemble S_2' des solutions de $(\mathcal{E}_2')$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que S_2' est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 2.

1.5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - y = 0$.

2. Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_2) \quad y'' - y = xe^x \ .$$

2.1. L'objet de cette question est de déterminer une solution particulière de $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ en la reconnaissant à l'aide de son développement limité.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de $(\mathcal{E}_2)$ sur $\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.

f admet donc un développement limité de tout ordre en 0.

Dans la suite de cette question, nous noterons pour tout entier naturel *n*, α_n la dérivée *n*-ième de *f* en 0 : $\alpha_n = f^{(n)}(0)$.

2.1.1. Montrer que pour tout entier naturel *n* :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n+2)}(x) - f^{(n)}(x) = xe^x + ne^x \ .$$

Montrer que pour tout entier naturel *n* : $\alpha_{n+2} - \alpha_n = n$.

Montrer alors par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N}, \begin{cases} \alpha_{2p} = \alpha_0 + p(p-1) \\ \alpha_{2p+1} = \alpha_1 + p^2 \end{cases}$.

Écrire pour tout entier naturel *n*, le développement limité à l'ordre $2n+1$ de *f* en 0.

2.1.2. Pour tout entier naturel non nul *p*, vérifier les égalités :

$$\frac{4p(p-1)}{(2p)!} = \frac{1}{(2p-2)!} - \frac{1}{(2p-1)!} \ , \ \frac{4p^2-1}{(2p+1)!} = \frac{1}{(2p-1)!} - \frac{1}{(2p)!} \ .$$

En choisissant : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -\dfrac{1}{4}$, montrer que pour tout entier naturel non nul *n* :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2n-1} \frac{x^{k+2}}{k!} - \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^{k+1}}{k!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \ .$$

2.1.3. Reconnaître en ce développement limité, le développement limité d'une fonction qui s'exprime simplement à l'aide des fonctions usuelles.

2.1.4. Vérifier que la fonction ainsi reconnue est solution de $\left(\mathcal{E}_2\right)$ sur $\mathbb{R}$.

2.2. Résoudre l'équation différentielle $\left(\mathcal{E}_2'\right)$ sur $\mathbb{R}$.

3. Considérons l'équation différentielle :

$$\left(\Delta_2\right)\ t^2 z''(t)+t\,z'(t)-z(t)=t\ln(t)\ .$$

3.1. Soit $z:\mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une solution de $\left(\Delta_2\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$, s'il en existe.

Montrer que l'application $y:x\mapsto z\left(e^x\right)$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et calculer y' et y''.

En déduire que *y* est solution sur $\mathbb{R}$ d'une équation différentielle linéaire du second ordre à déterminer.

Déterminer alors une expression de *y*, puis une expression de *z* .

3.2. Résoudre alors l'équation différentielle $\left(\Delta_2\right)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

II – Deuxième partie.

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.

Pour une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de *y*.

Considérons l'équation différentielle :

$$\left(\mathcal{E}_3'\right)\ \ y^{(3)}-2y''-y'+2y=0\ .$$

1. Soit *y* une solution de $\left(\mathcal{E}_3'\right)$ sur $\mathbb{R}$, *x* un nombre réel.

Notons : $Y=\begin{pmatrix} y''(x)\\ y'(x)\\ y(x)\end{pmatrix}$, $Y'=\begin{pmatrix} y^{(3)}(x)\\ y''(x)\\ y'(x)\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Montrer que : $Y'=AY$.

2. Nous allons étudier les éléments propres de la matrice *A*.

2.1. Déterminer les valeurs propres de *A* et en déduire que *A* est diagonalisable.

2.2. Déterminer les sous-espaces propres de *A*.

Les vecteurs des bases des sous-espaces propres seront choisis avec une troisième composante égale à 1.

Déterminer alors une matrice *P* réelle carrée d'ordre 3 et inversible telle que :

$$D=P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

2.3. Inverser la matrice P .

3. Soit *y* une solution de $\left(\mathcal{E}_3'\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Montrer que : $P^{-1}Y'=D\,P^{-1}Y$.

4. ***Résolution de*** $\left(\mathcal{E}_3'\right)$ ***sur*** $\mathbb{R}$

4.1. Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de $\left(\mathcal{E}_3'\right)$ sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.

En notant $z=-\frac{1}{2}y''+\frac{1}{2}y'+y$, montrer que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z'=z$, et en déduire une expression de z.

En déduire une expression de y.

4.2. Déterminer alors l'ensemble S_3' des solutions de $(\mathcal{E}_3')$ sur $\mathbb{R}$.

5. Montrer que S_3' est un $\mathbb{R}-$espace vectoriel de dimension 3.

III - Troisième partie.

Dans cette partie, *n* désigne un entier naturel non nul, *k* un entier naturel inférieur ou égal à *n*.

$a_0, a_1, ..., a_n$ désignent n réels avec a_n non nul, Π désigne la fonction polynôme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} .... + a_1 x + a_0$.

λ désigne un réel qui n'est pas racine de la fonction polynôme Π.

Pour une fonction $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, pour tout entier naturel *p*, $y^{(p)}$ désigne la dérivée *p*-ième de *y*.

Considérons l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_k) \quad a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = x^k e^{\lambda x} \ .$$

L'objet de cette partie est de prouver l'existence d'une solution particulière de $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}$ et d'en donner la forme.

1. Pour tout entier naturel *i* inférieur ou égal à *n*, g_i désigne l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_i(x) = x^i e^{\lambda x}.$$

Précisons la notation g_0, pour tout réel x : $g_0(x)=e^{\lambda x}$.

Notons F_n l'ensemble des fonctions de la forme $x \mapsto Q(x)e^{\lambda x}$ où Q appartient à $\mathbb{R}_n[X]$.

Montrer que : $F_n = \mathrm{Vect}(g_i, 0 \le i \le n)$, et en déduire que F_n est un sous-espace vectoriel de $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ de dimension $n+1$.

2. Notons Φ l'application définie sur F_n par :

$$\forall f \in F_n,\ \Phi(f) = a_n f^{(n)} + ... + a_1 f' + a_0 f \ .$$

2.1. On note *D* l'application définie sur $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par : $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $D(f)=f'$,

et Id l'application définie sur $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ par : $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $Id(f)=f$.

Calculer pour tout entier *i* compris entre 0 et *n*, $(D-\lambda\, Id)(g_i)$.

En déduire que pour tous entiers *i* et *j* compris entre 0 et *n* :

$$(D-\lambda\, Id)^j(g_i) = \begin{cases} \dfrac{i!}{(i-j)!} g_{i-j} \ , \ 0 \le j \le i \\ 0 \ , \ i < j \le n \end{cases} .$$

2.2. Justifier l'égalité : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Pi(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Pi^{(j)}(\lambda)}{j!}(x-\lambda)^j$.

Nous admettrons que : $\forall f \in F_n \,, \Phi(f) = \sum_{j=0}^{n} \frac{\Pi^{(j)}(\lambda)}{j!} \left[(D - \lambda\, Id)^j (f) \right]$.

2.3. Montrer alors que pour tout entier naturel i inférieur ou égal à n :

$$\Phi(g_i) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \Pi^{(j)}(\lambda)\; g_{i-j} \; .$$

2.4. Montrer que Φ est un endomorphisme de F_n et écrire sa matrice M dans la base $\mathcal{G} = (g_0, g_1, g_2, ..., g_n)$ de F_n.

Les coefficients de M seront exprimés en fonction de $\Pi(\lambda), \Pi'(\lambda), ..., \Pi^{(n)}(\lambda)$.

2.5. Montrer alors que Φ réalise une bijection de F_n dans lui-même.

3. En déduire qu'il existe une unique fonction f_k appartenant à F_n solution de $(\mathcal{E}_k)$sur $\mathbb{R}$.

4. Application surprenante

Pour cette question, nous choisissons $\lambda = 0$ et $\Pi = \sum_{i=0}^{n} \frac{X^i}{i!}$.

4.1. Calculer pour tout entier i compris entre 0 et n , $\Pi^{(i)}(0)$, et écrire la matrice M définie précédemment.

4.2. Montrer que pour tout polynôme P appartenant à $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\forall t \in \mathbb{R} \,, \frac{P(t)}{0!} + \frac{P'(t)}{1!} + \frac{P''(t)}{2!} + ... + \frac{P^{(n)}(t)}{n!} = P(t+1) \; .$$

En déduire une solution polynômiale de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_k)$ sur $\mathbb{R}$,

puis en déduire que : $\Phi^{-1}(g_k) = t \mapsto (t-1)^k$.

Exprimer alors $\Phi^{-1}(g_k)$ en fonction de $g_0, g_1, g_2, ..., g_k$.

4.3. En déduire une expression de M^{-1}.

4.4. Montrer alors à l'aide de ce qui précède que :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2 \,, i < j \Rightarrow \sum_{k=i}^{j} (-1)^{j-k} \binom{k}{i} \binom{j}{k} = 0 \; .$$

FIN DE L'ÉPREUVE