Banque <<Agro-Véto>>

A - 0205

MATHÉMATIQUES A

Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

Les deux problèmes sont indépendants.

PROBLÈME I

Dans ce problème on note $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et O l'application nulle. Pour tout couple de réels (a,b), on note $J(a,b)$ la matrice :

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Enfin on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que pour tout n entier naturel non nul on a :

$$[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

2.a. Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3Id = O$.

2.b. On note $\Pi(X)$ le polynôme $\Pi(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $\Pi(X)$ possède une racine double qu'on explicitera.

2.c. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur non nul tels que $\Phi(u) = \lambda u$. Montrer que $\Pi(\lambda) = 0$.

3.a. Donner une base du sous-espace vectoriel $\ker(\Phi + 3Id)$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base ε égale à 1.

3.b. Donner une base du sous-espace vectoriel $\ker(\Phi - Id)$ formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base ε égale à 1.

T.S.V.P.

3.c. Φ est-elle diagonalisable ?

4.a. Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base ε égale à 1, vérifiant :

$$\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{i=3} \varepsilon_i.$$

4.b. Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \ker([\Phi - Id]^2)$ formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base ε égale à 1.

4.c. Montrer que $\Phi(E) \subset E$ et que $\mathbb{R}^3 = E \oplus \ker(\Phi + 3Id)$.

5.a. Donner une base de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base ε égale à 1, dans laquelle la matrice de Φ vaut : $M' = J(1, -3)$.

5.b. Exprimer, pour tout n entier naturel, la matrice M^n à l'aide de n, P, P^{-1} et M' puis calculer la première colonne de M^n.

6.a. Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique à valeurs réelles définie par

$$u_0 = 0;\ u_1 = 0;\ u_2 = 1;\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}$$

Élaborer un programme dans le langage de votre choix afin de calculer u_{15}; indiquer le langage choisi.

6.b. Déduire du 6.a. une valeur exacte de u_{15}

6.c. Dans les trois dernières questions, on note $(U_n)_{n \geq 0}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n) dans la base ε. Montrer que pour tout n entier naturel, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.

6.d. En déduire que pour tout n entier naturel, $U_n = \Phi^n(U_0)$ puis, à l'aide de 5.b., une expression de u_n.

6.e. Vérifier pour n = 15 le résultat obtenu au 6.b. grâce à la méthode du 6.d.

PROBLÈME II

Soit φ une application dérivable sur $\mathbb{R}^+$. On considère l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \qquad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = \varphi(x).$$

PARTIE I.

On note G et F les applications de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ G(x) = \int_0^x e^t \varphi(t)dt\ et\ \ F(x) = \frac{1}{e^x - 1} G(x).$$

I.1. Montrer que G et F sont des applications de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

I.2.a. Déterminer le développement limité de G au voisinage de 0 à l'ordre 2. En déduire le développement de F au voisinage de 0 à l'ordre 1 : $F(x) = \varphi(0) + \frac{x}{2}\varphi'(0) + o(x)$.

I.2.b. En déduire que F est prolongeable par continuité en 0. On notera encore F la fonction prolongée ; préciser $F(0)$. Montrer que F est dérivable en 0 et préciser $F'(0)$.

I.3. Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1 - e^{-x})y'(x) + y(x) = 0.$$

Indication : on pourra remarquer que $(\mathcal{E}_0)$ équivaut à $y'(x) + \frac{e^x}{e^x - 1}y(x) = 0$.

I.4. Montrer que F vérifie $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

I.5.a. Exprimer la solution générale de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

I.5.b. Vérifier que F est l'unique solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ possédant une limite finie quand x tend vers 0.

I.6. La fonction F est-elle une solution de $(\mathcal{E})$ sur $\mathbb{R}^+$?

I.7. On suppose dans cette question que l'application φ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

I.7.a. Montrer que pour tout x réel strictement positif on a : $\varphi(x) \leq F(x)$. Ce résultat demeure-t-il pour $x = 0$?

I.7.b. Déduire du I.7.a. que F est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

PARTIE II.

On suppose dans la suite du problème que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ \varphi(x) = e^{-x}$.

II.1. a. Déterminer explicitement F(x).

II.1. b. Donner un développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de 0.

II.1. c. Dresser le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}^+$.

II.2. a. On note Φ la primitive de F définie sur $\mathbb{R}^+$ et s'annulant en 0.
Montrer que $\forall x \geq 4,\ x \leq e^{\frac{x}{2}} - 1$ puis que $\forall x \geq 4, F(x) \leq \frac{1}{e^{\frac{x}{2}}+1} \leq e^{\frac{-x}{2}}$.
En déduire que la fonction Φ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

II.2.b. Etudier les variations de Φ sur $\mathbb{R}^+$. En déduire que $\Phi(x)$ admet une limite finie quand x tend vers $+\infty$.

T.S.V.P.

PARTIE III.

Point admis :

Dans cette partie, A désigne la limite de $\Phi(x)$ quand x tend vers $+\infty$. On admettra le résultat suivant :

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

III.1. Montrer que pour tout t réel et pour tout n entier naturel non nul on a :

$$2\sin(\frac{t}{2})(\cos(t) + \ldots \cos(nt)) = \sin(\frac{2n+1}{2}t) - \sin(\frac{t}{2}).$$

III.2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que pour tout entier naturel k on a :

$$\int_0^\pi (at + bt^2)cos(kt)dt = \frac{1}{k^2}.$$

III.3.a. On pose pour tout t réel, $t \in]0,\pi]$, $g(t) = \dfrac{at + bt^2}{sin(\frac{t}{2})}$ et $g(0) = 2a$. Montrer que la fonction g ainsi définie est continue sur $[0,\pi]$.

III.3.b. Montrer que g est dérivable sur $]0,\pi]$ et donner $g'(t)$ pour t $\in]0,\pi]$.

III.3.c. Vérifier que $g'(t)$ admet une limite finie quand t tend vers 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $[0,\pi]$.

III.4. Montrer que pour toute fonction h de classe C^1 sur $[0,\pi]$, la suite $\displaystyle\int_0^\pi h(t)\sin((n+\frac{1}{2})t)dt$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

III.5. Déduire de II et III : $A = \dfrac{\pi^2}{6}$

FIN.