Banque <<Agro>>
A - 0504

MATHÉMATIQUES B
Durée : 3 heures 30 minutes

L'usage d'une calculatrice est autorisé pour cette épreuve.

La deuxième partie du problème utilise certains résultats énoncés dans la première partie, mais on peut traiter ces deux parties de manière indépendante.

Notations et objectifs.
$\mathcal{V}$ est l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{V}_0$ est l'espace vectoriel des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
$\mathcal{V}_1$ est l'espace vectoriel des fonctions de classe C^1 (continuement dérivables) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Pour tout n, entier naturel non nul, on note T_n l'application de $\mathcal{V}_0$ dans $\mathcal{V}$ définie par :

$$\forall F \in \mathcal{V}_0,\ F_n = T_n(F) \text{ vérifie : } \begin{cases} \forall\, x \neq 0, F_n(x) = \dfrac{n}{x^n} \displaystyle\int_0^x t^{n-1}F(t)dt \\ \text{et} \\ F_n(0) = F(0). \end{cases}$$

On désignera aussi par T_n la restriction de T_n à $\mathcal{V}_1$.
Dans la partie I on étudie les propriétés de T_n, pour n fixé, et dans la partie II on étudie l'effet de T_n sur la fonction de répartition d'une variable à densité.

Partie I.

Dans cette partie, F désigne un élément de $\mathcal{V}_0$ et n un entier naturel non nul.

I.1. Propriétés élémentaires de $\mathbf{T}_n$.

I.1.a. Montrer que T_n est linéaire.
I.1.b. Montrer que si F est paire, (respectivement impaire, respectivement positive), $T_n(F)$ est paire, (respectivement impaire, respectivement positive).
I.1.c. Déterminer $T_n(F)$ dans les cas suivants :
1) F est constante ;
2) $F(0) = 0$ et pour tout t réel non nul $F(t) = |t|^\alpha$ avec $\alpha > 0$;
3) F est un polynôme non nul, de degré p.

I.2. Etude de $F_n = T_n(F)$ au voisinage de 0.
I.2.a. On suppose que η est un réel strictement positif et que sur l'intervalle $[-\eta, \eta]$, la fonction $|F|$ est majorée par un réel K. Montrer qu'il en est de même pour $|F_n|$.

T.S.V.P.

I.2.b. En déduire que F_n est continue en 0, que F_n appartient à $\mathcal{V}_0$, puis que T_n définit un endomorphisme de $\mathcal{V}_0$.
I.2.c. Montrer que pour tout x réel non nul, $F_n'(x)$ existe et vaut :

$$(F_n)'(x) = \frac{n}{x}[F(x) - F_n(x)]. \qquad (*)$$

On en déduit que F_n est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
I.2.d. Montrer que T_n est injective.
I.2.e. La fonction $x \longmapsto |x-1|$ admet-elle un antécédent par T_n ? L'application T_n de $\mathcal{V}_0$ dans lui-même est-elle surjective ?
I.2.f. On suppose dans cette question que F appartient à $\mathcal{V}_1$.

Montrer que F_n est dérivable en 0 et que $(F_n)'(0) = \dfrac{n}{n+1}F'(0)$, puis en utilisant (*) que $F_n \in \mathcal{V}_1$.
I.2.g. L'endomorphisme de $\mathcal{V}_1$ défini par T_n est il surjectif ?
Indication : on pourra utiliser la fonction $x \longmapsto (x-1)|x-1|$.

I.3. Etude de $F_n = T_n(F)$ à l'infini.

On admettra que si F tend vers 0 en $+\infty$, alors F_n tend vers 0 en $+\infty$.
I.3.a. On suppose que F tend vers une limite finie, a, en $+\infty$; montrer que F_n y admet la même limite.
I.3.b. Énoncer et démontrer un résultat similaire au cas où F tend vers une limite finie en $-\infty$.
I.3.c. Énoncer un résultat similaire si F tend vers $+\infty$ en $+\infty$.

Partie II.

Dans cette partie, on suppose que F appartient à $\mathcal{V}_1$ et qu'elle est la fonction de répartition d'une variable aléatoire, X, à densité. On notera f la densité de X vérifiant $f = F'$ et comme dans la première partie $F_n = T_n(F)$.

II.1.

II.1.a. Montrer que $F_n \geqslant 0$ et que F_n est croissante.

Indication : on montrera, en utilisant la relation (*), que $(F_n)' \geqslant 0$; pour cela, on remarquera que

$$\forall x \neq 0, F(x) = \frac{n}{x^n}\int_0^x t^{n-1}F(x)dt.$$

II.1.b. En déduire, en utilisant la question I.3., que F_n est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X_n à densité. On notera $f_n = (F_n)'$.

II. 2. Un exemple.

Dans cette question F est définie par $\begin{cases} F(t) = 0 \ si \ t \in]-\infty, 0[\\ F(t) = 3t^2 - 2t^3 \ si \ t \in [0,1] \\ F(t) = 1 \ si \ t \in]1, +\infty[. \end{cases}$

II. 2.a. Vérifier que F est bien élément de $\mathcal{V}_1$ et déterminer les fonctions f, F_n et f_n correspondantes.

II. 2.b. Déterminer les moments sucessifs, $M_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$, de la variable aléatoire X pour k entier naturel non nul, puis montrer que pour tout r entier naturel, $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, la variable aléatoire X_n admet un moment d'ordre r : $M_r(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f_n(x)dx$.

II.2.c. Montrer que pour x fixé, la suite de terme général $F_n(x)$ converge vers $F(x)$.

II.2.d. L'entier naturel r étant fixé, montrer que la suite de terme général $M_r(X_n)$, définie pour $n > r$, converge vers $M_r(X)$.

II.3. Retour au cas général :

II.3.a. Soit m un réel non nul, montrer que pour tout r entier naturel, $r \in \{1, \ldots, n-1\}$, on a la double égalité (**) :

$$\int_0^m x^r f_n(x)dx = \frac{nm^r}{n-r}[F_n(m) - F_r(m)] = \frac{n}{n-r}(\int_0^m x^r f(x)dx - \frac{1}{m^{n-r}} \int_0^m x^n f(x)dx).$$

Indication : on utilisera (*) et des intégrations par parties.

II.3.b. On suppose dans la fin du problème que X admet des moments de tous ordres, et pour tout k entier naturel non nul, on note $M_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$.
Déduire de (**) l'existence et la valeur de $M_r(X_n)$, moment d'ordre r de X_n, pour r entier naturel compris entre 1 et $n-1$.

II.3.c. L'entier naturel r étant fixé, montrer que la suite de terme général $M_r(X_n)$, définie pour $n > r$, converge vers $M_r(X)$.

II.3.d. Montrer de même que, pour x réel fixé, la suite de terme général $F_n(x)$ converge vers $F(x)$.

FIN.