Grado en Ingeniería Información

Estructura de Datos y Algoritmos

Sesión 4

Curso 2023-2024

Marta N. Gómez

UNIVERSIDAD NEBRIJA

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- Coste asintótico.
- Cálculo del tamaño del problema.
- Análisis del Mejor y Peor caso.
- Notaciones asintóticas.
- Cálculo de la eficiencia.
- Coste espacial.

UNIVERSIDAD NEBRIJA

ÍNDICE

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- **Coste asintótico.**
- Cálculo del tamaño del problema.
- Análisis del Mejor y Peor caso.
- Notaciones asintóticas.
- Cálculo de la eficiencia.
- Coste espacial.

ÍNDICE

El **coste asintótico** indica el coste del un algoritmo en **función del tamaño del problema** para valores grandes ($\boldsymbol{n} \rightarrow \infty$).

Los estudios asintóticos son **independientes** del **coste de cada operación** que se realiza en el algoritmo.

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- Coste asintótico.
- **Cálculo del tamaño del problema.**
- Análisis del Mejor y Peor caso.
- Notaciones asintóticas.
- Cálculo de la eficiencia.
- Coste espacial.

UNIVERSIDAD NEBRIJA

ÍNDICE

Se llama **paso (*step*)** al segmento de código cuyo **tiempo de proceso no depende del tamaño del problema** considerado y que **está acotado** por alguna **constante**.

Se consideran ***pasos***:

- **Operaciones aritméticas** y **lógicas**,
- **Comparaciones** entre escalares,
- **Acceso** a: **variables** escalares, elementos de **vectores** o **arrays**,
- **Lectura/escritura** de un valor escalar, etc.

Coste Computacional Temporal de un programa: número de **pasos** del programa expresado en función del tamaño del problema (*n*).

Calcular n^2

Forma 1: Producto

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int potencia, n;

    cout << "\n\n\tIndique un numero entero: ";      <--  1 paso
    cin >> n;                                        <--  1 paso
    potencia = n * n;                                <--  1 paso
    cout << "\n\n\tPotencia = " << potencia;         <--  1 paso

    cout << "\n\n\t";                                <--  1 paso
    return 0;                                        <--  1 paso
}
```

El coste (nº de pasos) es **6**.

Calcular n^2

Forma 2: Suma

```cpp
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int potencia{0}, num;
    cout << "\n\n\tIndique un numero entero: ";
    cin >> num;
    for (int i{0}; i < num; i++) {
        potencia += num;
    }
    cout << "\n\n\tPotencia = " << potencia;

    cout << "\n\n\t";
    return 0;
}
```

Calcular n^2

Forma 2: Suma

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int potencia{0}, num;                            <--  1 paso
    cout << "\n\n\tIndique un numero entero: ";      <--  1 paso
    cin >> num;                                      <--  1 paso
    for (int i{0}; i < num; i++) {                   <--  2n+2 pasos
        potencia += num;                             <--  2 pasos (n veces)
    }
    cout << "\n\n\tPotencia = " << potencia;         <--  1 paso

    cout << "\n\n\t";                                <--  1 paso
    return 0;                                        <--  1 paso
}
```

El **coste** (nº de pasos) es **4n + 8**.

Calcular n^2

Forma 3: Incrementos

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int potencia{0}, num;
    cout << "\n\n\tIndique un numero entero: ";
    cin >> num;
    for (int i{0}; i < num; i++)
    {
        for (int j{0}; j < num; j++) {
            potencia ++;
        }
    }
    cout << "\n\n\tPotencia = " << potencia;

    cout << "\n\n\t";
    return 0;
}
```

Calcular n^2

Forma 3: Incrementos

```
#include <iostream>

using namespace std;

int main()
{
    int potencia{0}, num;                              <--  1 paso
    cout << "\n\n\tIndique un numero entero: ";         <--  1 paso
    cin >> num;                                        <--  1 paso
    for (int i{0}; i < num; i++)                       <--  2n+2 pasos
    {
        for (int j{0}; j < num; j++) {                 <--  2n+2 pasos (n veces del bucle anterior)
            potencia ++;                               <--  1 paso (n * n veces)
        }
    }
    cout << "\n\n\tPotencia = " << potencia;            <--  1 paso

    cout << "\n\n\t";                                  <--  1 paso
    return 0;                                          <--  1 paso
}
```

El **coste** (nº de pasos) es $\mathbf{3n^2 + 4n + 8}$.

- El **valor concreto de cada término** de las expresiones **no importa**.
- El concepto de **paso** hace que el **valor de las constantes no sea significativo**. Luego, es igual 4n + 8 que c_2n + c_1.
- Cualquier **número de pasos que no dependa** del tamaño del problema, ***n***, se considera una **cantidad constante** de **pasos**.

Programa	forma1.cpp	forma2.cpp	forma3.cpp
Coste en tiempo	**6**	4n + 8	$3n^2 + 4n + 8$

Programa	forma1.cpp	forma2.cpp	forma3.cpp
Coste en tiempo	C_0	$C_2 n + C_1$	$C_5 n^2 + C_4 n + C_3$

- Cuando se define una **entrada concreta** de tamaño ***n***, hablamos de la **instancia de un problema**.
- **Por ejemplo**, buscar un determinado elemento en un vector. El tamaño del problema es la **longitud del vector**.
- Por tanto, el **coste temporal de un algoritmo depende**:
  - **Tamaño del problema.**
  - **Instancias del problema**.

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- Coste asintótico.
- Cálculo del tamaño del problema.
- **Análisis del Mejor y Peor caso.**
- Notaciones asintóticas.
- Cálculo de la eficiencia.
- Coste espacial.

ÍNDICE

Se trata de estudiar dos situaciones extremas del algoritmo para un valor tamaño del problema (*n*) dado:

- El ***mejor caso***
- El ***peor caso***

Ejemplo: la búsqueda de un elemento en un vector:

- **Mejor caso**: si el elemento que se busca es el **primero**.
- **Peor caso**: si el elemento que se busca **no existe**.

- **Mejor caso** para un tamaño ***n***: el elemento es el **primero**.

```
bool pertenece (vector<int> const &V, int n)  {
    for (int elem:V)  {                        <-- 1 paso
        if (elem == n) return true;            <-- 2 pasos
    }

    return false;
}
```

Su **coste es constante**: $\mathbf{c_0}$ **pasos**

- **Peor caso** para un tamaño ***n***: el elemento no existe.

```
bool pertenece (vector<int> const &V, int n)  {
    for (int elem:V)  {                        <-- n pasos
       if (elem == n) return true;             <-- n pasos
    }

    return false;                              <-- 1 paso
}
```

Su **coste es lineal**: $c_2 n + c_1$ **pasos**

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- Coste asintótico.
- Cálculo del tamaño del problema.
- Análisis del Mejor y Peor caso.
- **Notaciones asintóticas.**
- Cálculo de la eficiencia.
- Coste espacial.

UNIVERSIDAD NEBRIJA

ÍNDICE

Orden de $f(n)$

Un algoritmo tiene un **tiempo de ejecución de orden** $f(n)$, para una función dada f, si existe una constante positiva c y una implementación del algoritmo capaz de resolver cada caso del problema en un **tiempo acotado superiormente por** $c \cdot f(n)$, donde n es el **tamaño del problema** considerado.

Notación *O (cota superior)*

Se dice que una función $T(n)$ es $O(f(n))$ si existen constantes n_0 y c tales que $T(n) \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$:

$$T(n) \text{ es } O(f(n)) \Leftrightarrow$$

$$\exists c \in R,\ \exists n_0 \in N, \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \in N,\ T(n) \leq cf(n)$$

Ejemplos de Notación *O*

$T(n) = 3n + 1$

T(n) es O(n), ya que $T(n) <= 4n$ para $n>=1$.

$T(n) = (n+1)^2$

T(n) es O(n^2), ya que $T(n) <= 2n^2$ para $n>=3$

$T(n) = 12n^2 + 7n + 3$.

T(n) es O(n^2) pero **no es O(n)**.

$T(n) = 4n^3 + 3n^2$

T(n) es O(n^3) pero **no es O(n^2)**.

$T(n) = 5^n$

T(n) es O(5^n) pero **no es O(4^n)**.

Omega de $f(n)$

Un algoritmo tiene un **tiempo de ejecución de Omega de $f(n)$**, para una función dada f, si existe una constante positiva c y una implementación del algoritmo capaz de resolver cada caso del problema en un **tiempo acotado inferiormente por $c \cdot f(n)$**, donde n es el **tamaño del problema** considerado.

Notación Ω *(cota inferior)*

Se dice que una función $T(n)$ es $\Omega(f(n))$ si existen constantes n_0 y c tales que $T(n) \geq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$:

$$T(n) \text{ es } \Omega(f(n)) \Leftrightarrow$$

$$\exists c \in R,\ \exists n_0 \in N, \text{ tal que } \forall n \geq n_0 \in N,\ T(n) \geq cf(n)$$

Ejemplos de Notación Ω

$T(n) = 12n^2 + 7n + 3$

$T(n)$ es $\Omega(n^2)$, ya que $T(n) \geq 12n^2$ para $n>=0$.

$T(n) = 5n^2+3^n$

$T(n)$ es $\Omega(3^n)$

Zeta de $f(n)$

Un algoritmo tiene un **tiempo de ejecución de Zeta de** $f(n)$, para una función dada f**,** si existe una constante positiva c y una implementación del algoritmo capaz de resolver cada caso del problema en un **tiempo acotado superior e inferiormente por** $c \cdot f\ (n)$, donde n es el **tamaño del problema** considerado.

Notación Θ *(orden exacto)*

Se dice que una función $T(n)$ es $\Theta(f(n))$ si es $O(f(n))$ *y* es $\Omega(f(n))$, al mismo tiempo.

Ejemplos de Notación Θ

$T(n) = 4n + 1$ es $\Theta(n)$

$T(n) \leq 5n$ es $O(n)$ para $n \geq 1$

$T(n) \geq 3n$ es $\Omega(n)$ para $n \geq 0$.

$T(n) = n^2$ si n es par y n si n es impar

$T(n)$ no es Θ ya que es **$O(n^2)$** y **$\Omega(n)$**.

Jerarquía de Cotas en las notaciones O y Ω

$O(1) \subset O(\log n) \subset O(\sqrt{n}) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(2^n) \subset O(n!) \subset O(n^n)$

$\Omega(n^n) \subset \Omega(n!) \subset \Omega(2^n) \subset \Omega(n^3) \subset \Omega(n^2) \subset \Omega(n \log n) \subset \Omega(n) \subset \Omega(\sqrt{n}) \subset \Omega(\log n) \subset \Omega(1)$

Por ejemplo, $3n+2$ es de $O(n)$ y también es $O(n^2)$ y $O(n^n)$, pero se indica siempre la **cota que más se ajusta a la función**.

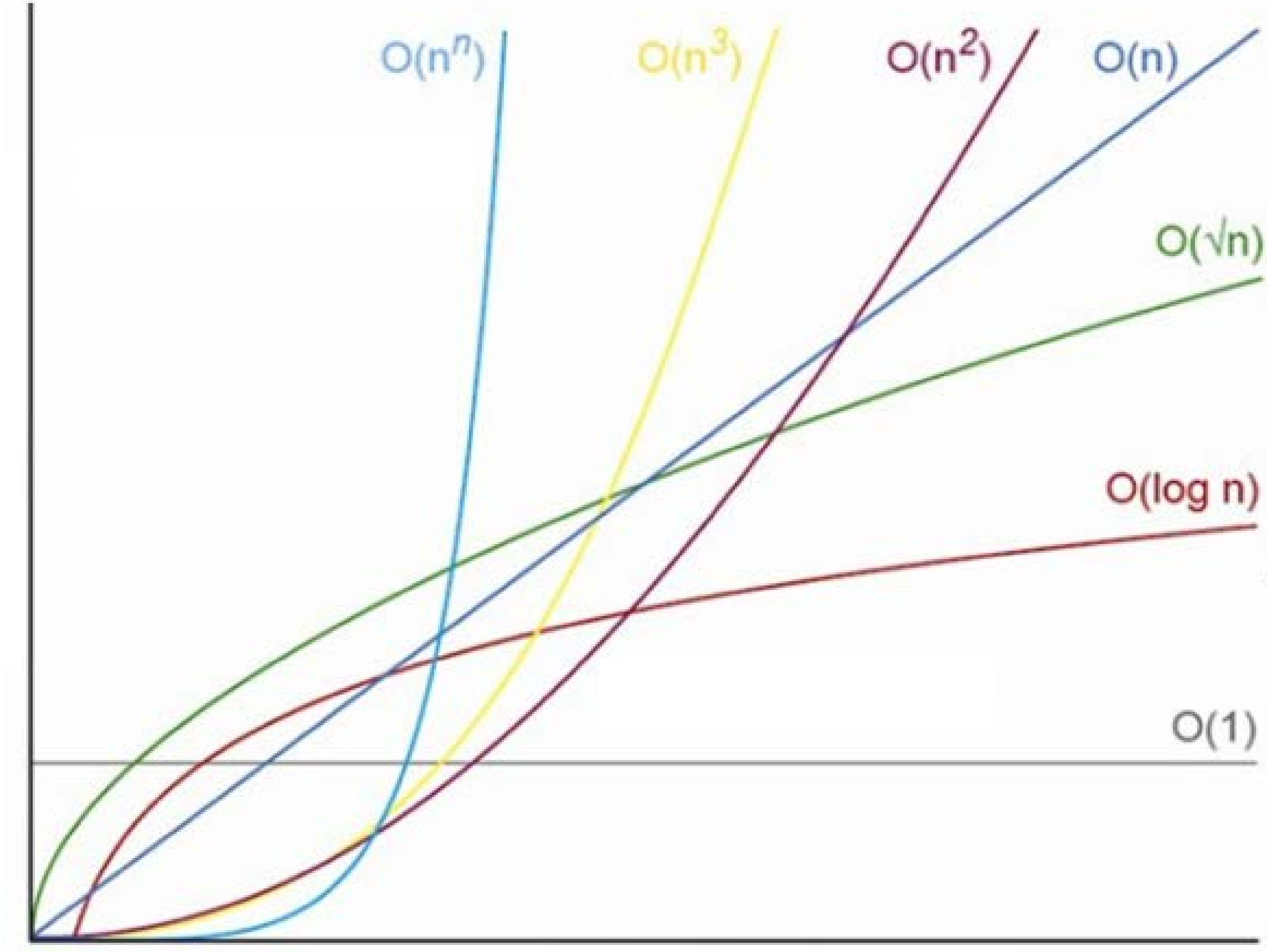
Tiempos calculados suponiendo 1μs por operación elemental

N	$O(\log_2 n)$	$O(n^2)$	$O(n \log_2 n)$	$O(n^2)$	$O(2^n)$	$O(n!)$
10	3 μs	10 μs	30 μs	0.1 ms	1 ms	4 s
25	5 μs	25 μs	0.1 ms	0.6 ms	33 s	10^{11} años
50	6 μs	50 μs	0.3 ms	2.5 ms	36 años	...
100	7 μs	100 μs	0.7 ms	10 ms	10^{17} años	...
1000	10 μs	1 ms	10 ms	1 s	...	...
10000	13 μs	10 ms	0.1 s	100 s	...	...
100000	17 μs	100 ms	1.7 s	3 horas	...	...
1000000	20 μs	1 s	20 s	12 días	...	...

Clasificación de las funciones

Sublineales	**Constantes**	$O(1)$
	Logarítmicas	$O(\log n)$
	Raíces	$O(\sqrt{n})$
Lineales	**Lineales**	$O(n)$
Superlineales	**Lineal-logarítmicas**	$O(n \log n)$
	Polinómicas	$O(n^2)$ $O(n^3)$
	Exponenciales	$O(2^n)$ $O(n!)$ $O(n^n)$

Representación de las funciones O



Orden lineal – O(n): Tiempo de ejecución proporcional al tamaño del problema (n).

Ejemplo, calcular el máximo de n números.

Orden cuadrático – O(n^2):

Ejemplo, enumerar todas las parejas posibles de elementos de un conjunto.

Ordenes O(log n) y O(n log n): Muchos algoritmos recursivos.

Ejemplo, búsqueda binaria (O(log n)) y mergesort, heapsort, etc. (O(n log n)).

Orden exponencial – O(2^n): Problemas de tipo combinatorio, con factoriales.

Ejemplo, enumerar todo los subconjuntos de un conjunto.

Simplificación de Cotas y sus propiedades

- **Producto de una función por una constante:**
  - *Si* $\mathbf{T(n)} \in \mathbf{O(f(n))}$ *entonces* $\mathbf{cT(n)} \in \mathbf{O(f(n))}$
  - *Si* $\mathbf{T(n)} \in \mathbf{\Omega(f(n))}$ *entonces* $\mathbf{cT(n)} \in \mathbf{\Omega(f(n))}$

Simplificación de Cotas y sus propiedades

- **Suma de funciones:**
  - *Si* $T_1(n) \in O(f_1(n))$, $T_2(n) \in O(f_2(n))$ *entonces*

    $$T_1(n) + T_2(n) \in O(max(f1(n), f2(n)))$$

  - *Si* $T_1(n) \in \Omega(f_1(n))$, $T_2(n) \in \Omega(f_2(n))$ *entonces*

    $$T_1(n) + T_2(n) \in \Omega(max(f_1(n), f_2(n)))$$

Simplificación de Cotas y sus propiedades

- **Producto de funciones:**
  - *Si* $T_1(n) \in O(f_1(n)), T_2(n) \in O(f_2(n))$ *entonces*

$$T_1(n)\ T_2(n) \in O(f1(n)f2(n))$$

  - *Si* $T_1(n) \in \Omega(f_1(n)), T_2(n) \in \Omega(f_2(n))$ *entonces*

$$T_1(n)\ T_2(n) \in \Omega(f_1(n)f_2(n))$$

- Una consecuencia de estas propiedades es que cualquier polinomio de grado k es $O(n^k)$ y $\Omega(n^k)$, es decir, es $\Theta(n^k)$.

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- Coste asintótico.
- Cálculo del tamaño del problema.
- Análisis del Mejor y Peor caso.
- Notaciones asintóticas.
- **Cálculo de la eficiencia.**
- Coste espacial.

UNIVERSIDAD NEBRIJA

ÍNDICE

Reglas de cálculo de la eficiencia

1. Sentencias simples.
2. Bloques de sentencias.
3. Sentencias condicionales.
4. Bucles.
5. Llamadas a funciones.
6. Funciones recursivas.

1. Sentencias simples:

Se consideran las **asignaciones, operaciones aritméticas y lógicas, acceso a los elementos de arrays, vectores o estructuras, lectura, escritura, break, continue, etc.,** excepto las llamadas a funciones o métodos, tienen un **coste temporal de ejecución constante**, es decir: ***O(1)***.

O(sentencia simple) = O(1)

2. Bloques de sentencias:

El **coste temporal de ejecución es la suma de los costes de cada sentencia**, es decir:

$$O(\text{bloque sentencias}) = \sum_i O(\text{sentencia } i)$$

Orden de eficiencia = Máximo de los órdenes de eficiencia de cada una de las sentencias del bloque.

3. Sentencias condicionales:

El **coste temporal de ejecución es el coste de la rama de mayor coste**, es decir, si la sentencia es un ***if*** con dos ramas (***if-else***), si el bloque ***if*** es ***O(f(n))*** y el bloque ***else*** es ***O(g(n))***, la sentencia condicional será ***O(max{f(n), g(n)})***:

$$O(condicional) = max(O(f(n)), O(g(n)))$$

$$\Omega(condicional) = min(\Omega(f(n)), \Omega(g(n)))$$

Si hay más ramas (***switch***) y cada rama ***i*** tiene un coste $f_i(n)$ se puede generalizar:

$$O(condicional) = max(O(f_i(n)))$$

4. Bucles:

Los componentes generales de un bucle son:

- **Inicialización** del bucle: $O(1)$
- **Comprobación de la condición** del bucle (**k veces**): $O(k)$
- **Incremento** de la variable del bucle (**k veces**): $O(k)$
- **Cuerpo** del bucle (**k veces**) y suponiendo que las sentencias que lo forman tiene un coste $O(f(n))$: $O(kf(n))$
- **Finalización** del bucle: $O(1)$

4. Bucles:

Su coste será:

$$O(bucle) = O(1) + O(n_{max}) \; [+O(n_{max})] + O(n_{max}f(n)) \; [+O(1)] = O(n_{max}f(n))$$

$$\Omega(bucle) = \Omega(1) + \Omega(n_{min}) \; [+ \Omega(n_{min})] + \Omega(n_{min}f(n)) \; [+ \Omega(1)] = \Omega(n_{min}f(n))$$

Siendo n_{max} y n_{min} el **número de iteraciones** del bucle en el **peor** y **mejor caso**, respectivamente. Los *[]* significa que es opcional, no siempre aparecerá ese elemento en el bucle.

El problema está en determinar el número de veces que se ejecuta el cuerpo del bucle.

5. Llamadas a funciones:

El **coste temporal de ejecución de una función o métodos viene determinado por el bloque de sentencias que tiene**. Si el coste de sentencias de la función es ***f(n)***:

$$O(\textit{función/método}) = O(f(n))$$

6. Funciones recursivas:

El **coste temporal de ejecución es una función recursiva también es recursiva:**

$$T(n) = T(n-1) + f(n)$$

6. Funciones recursivas:

Ejemplo:

```
long factorial (int numero)
{
    if (numero > 1) return (numero * factorial (numero -1));
    else return (1);
}
```

$O(1)$

$$T(n) = 2+T(n-1) = 2+(2+T(n-2)) = 2+2+T(n-2) =$$
$$2+2+(2+T(n-3)) = (2*3) +T(n-3) = \ldots=$$
$$(2*i)+T(n-i) = \ldots = 2*(n-1)+T(n-(n-1)) =$$
$$2*(n-1)+T(1) = 2*(n-1)+2 = 2*n$$

Por tanto, ***T(n)* es *O(n)*, de orden lineal**.

6. Funciones recursivas:

Ejemplo:

```
long Fibonacci (int num)
{   if ((num == 1)||(num == 2)) return (1);
    else return (Fibonacci(num-1) + Fibonacci(num-2));
}
```

6. Funciones recursivas:

Ejemplo:

```
long FibonacciI (int num)
{   long f1{1}, f2{1}, fn{f1};
    for (int i{3}; i<=num; i++){
        fn = f1 + f2;
        f1 = f2;
        f2 = fn;
    }
    return fn;
}
```

- Criterios de valoración.
- Coste temporal.
- Coste asintótico.
- Cálculo del tamaño del problema.
- Análisis del Mejor y Peor caso.
- Notaciones asintóticas.
- Cálculo de la eficiencia.
- **Coste espacial.**

UNIVERSIDAD NEBRIJA

ÍNDICE

- La **Complejidad Espacial** es estudiar la **eficiencia** de los algoritmos respecto a su **consumo de memoria**.
- El **estudio asintótico** debe mostrar la **cantidad de memoria** utilizada por un programa en relación al **tamaño del problema**, ***n***.
- El tamaño del problema es ***n***.
- Hay que determinar el **coste del algoritmo** en función de ***n***.
- Por tanto, se puede **representar gráficamente** el tamaño espacial de los algoritmos en función del tamaño de ***n***.

El **análisis del coste espacial** pone el foco en el concepto de **celda de memoria** que será lo que se considere **"paso"**.

- Lo importante es saber el **espacio que ocupan las variables** en función al **tamaño del problema**, ***n***.
- **No** importa el **número de variables utilizadas** en el algoritmo porque **su coste es constante**.
- La **complejidad espacial** también maneja **cotas superiores e inferiores** sobre el consumo de memoria.

El análisis del coste espacial para **algoritmos no recursivos**:

- Si sólo se utilizan variables escalares, el **coste es constante**.
- Si se manejan **estructuras** (array, vectores, etc.) cuyo tamaño es proporcional al tamaño del problema, ***n***, el **coste espacial** es $\boldsymbol{\Theta(n)}$.

El análisis del coste espacial para **algoritmos recursivos** deben considerar el espacio necesario para la **pila de ejecución durante el proceso**, así:

- Si sólo se utilizan **variables escalares**, el coste espacial puede ser $\boldsymbol{\Theta(n)}$ si el proceso efectúa del orden de $\boldsymbol{n}$ llamadas recursivas para resolver un problema de tamaño del problema, $\boldsymbol{n}$.