

# 1. Lambda Cálculo Cuántico a Control Clásico (Selinger & Valiron)

Basado en el enfoque "Quantum Data, Classical Control". Aquí no existen superposiciones de términos, solo de datos (registros cuánticos). El control de flujo es clásico.

## Término y Tipo

El algoritmo se define como una función que toma dos bits clásicos y un par de qubits entrelazados (tipo  $\text{qbit} \times \text{qbit}$ ), y retorna dos bits clásicos tras la medición.

**Tipo:**

$$\text{SDC} : \text{bit} \rightarrow \text{bit} \rightarrow (\text{qbit} \times \text{qbit}) \rightarrow (\text{bit} \times \text{bit})$$

**Término:**

$$\begin{aligned} \text{SDC} = \lambda b_1. \lambda b_2. \lambda p. & \text{ let } (q_A, q_B) = p \text{ in} \\ & \text{ let } q'_A = (\text{if } b_2 \text{ then } X \text{ else } I) q_A \text{ in} \\ & \text{ let } q''_A = (\text{if } b_1 \text{ then } Z \text{ else } I) q'_A \text{ in} \\ & \text{ let } (z_1, z_2) = \text{CNOT } (q''_A, q_B) \text{ in} \\ & \text{ let } z'_1 = H z_1 \text{ in} \\ & (\text{meas } z'_1, \text{meas } z_2) \end{aligned}$$

## Traza de Reducción (Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$ )

Suponemos el estado inicial  $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ .

$$\begin{aligned} & \text{SDC } 0 \ 1 \ (q_A, q_B) \\ & \xrightarrow{\beta} \text{ let } q'_A = X q_A \text{ in } \dots \quad (\text{Estado: } (X \otimes I) |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)) \\ & \xrightarrow{\beta} \text{ let } q''_A = I q'_A \text{ in } \dots \quad (\text{Estado: } (I \otimes X) |\beta_{00}\rangle - \text{sin cambios de fase}) \\ & \xrightarrow{\text{CNOT}} \text{CNOT aplicado al par } \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ & \quad (\text{Estado resultante: } \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) \otimes |1\rangle = |+\rangle |1\rangle) \\ & \xrightarrow{H} H \text{ aplicado al primer qubit } (|+\rangle \rightarrow |0\rangle) \\ & \quad (\text{Estado resultante: } |0\rangle |1\rangle) \\ & \xrightarrow{\text{meas}} (\text{meas } |0\rangle, \text{meas } |1\rangle) \implies (0, 1) \end{aligned}$$


---

## 2. Lambda-S (Díaz-Caro & Malherbe)

Basado en "Quantum Control". El cálculo distingue tipos base  $\mathbb{B}$  (duplicables) de superposiciones  $S(\Psi)$  (no duplicables). Las funciones  $\lambda x : \mathbb{B}$  distribuyen linealmente (call-by-base).

### Término y Tipo

Asumimos las definiciones de las compuertas  $X, Z, H$  como términos del cálculo (ej.  $H$  definida en ).

**Tipo:**

$$\text{SDC} : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \Rightarrow S(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \times \mathbb{B})$$

*Nota: La medición está implícita en la reducción a base o mediante el operador de proyección si se requiere explícitamente, aquí mostramos la reducción al estado base final.*

**Término:**

$$\text{SDC} = \lambda b_1 : \mathbb{B}. \lambda b_2 : \mathbb{B}. \lambda \psi : S(\mathbb{B} \times \mathbb{B}). (H \otimes I) (\text{CNOT} ((Z^{b_1} \circ X^{b_2}) \otimes I) \psi)$$

Donde  $X^b$  es azúcar sintáctica para  $(b ? X \cdot I)$  y  $\otimes$  representa la operación sobre la estructura de pares del cálculo.

### Traza de Reducción (Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$ )

Estado inicial  $\psi = \beta_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ . Las reducciones usan las reglas  $\beta_b$  (call-by-base) y la linealidad algebraica.

$$\begin{aligned} & \text{SDC } |0\rangle |1\rangle \beta_{00} \\ & \xrightarrow{\beta_b \times 2} (H \otimes I) (\text{CNOT} ((Z^{|0\rangle} \circ X^{|1\rangle}) \otimes I) \beta_{00}) \\ & \xrightarrow{\text{sugar}} (H \otimes I) (\text{CNOT} ((I \circ X) \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)) \\ & \xrightarrow{\text{lin}} (H \otimes I) (\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}((X|0\rangle) \otimes |0\rangle + (X|1\rangle) \otimes |1\rangle)) \\ & \xrightarrow{\text{eval } X} (H \otimes I) (\text{CNOT} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)) \\ & \xrightarrow{\text{CNOT}} (H \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|10\rangle + \text{CNOT}|01\rangle) \\ & = (H \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) \quad (\text{por def. CNOT: } |10\rangle \rightarrow |11\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle) \\ & \xrightarrow{\text{factor}} (H \otimes I) (|+\rangle \times |1\rangle) \quad (\text{Factorización explícita permitida en la semántica}) \\ & \xrightarrow{H \otimes I} (H|+\rangle) \times (I|1\rangle) \\ & \xrightarrow{\text{eval } H} |0\rangle \times |1\rangle \equiv |01\rangle \end{aligned}$$


---

### 3. $L^{\mathbb{C}}$ / Vectorial (Arrighi, Díaz-Caro, Dowek)

Basado en Lógica Lineal y el "Linear-Algebraic Lambda Calculus". Aquí los escalares  $\alpha \in \mathbb{C}$  son ciudadanos de primera clase y parte del sistema de tipos (Vectorial).

#### Término y Tipo

Usamos la notación del sistema *Vectorial*. Los tipos pueden llevar escalares  $\alpha.A$ .

**Tipo:**

$$\text{SDC} : \forall \mathcal{X}. \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} \rightarrow S(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \rightarrow S(\mathbb{B} \times \mathbb{B})$$

*Nota:*  $S$  aquí denota el tipo de vectores normalizados o el span generador.

**Término:**

$$\text{SDC} = \lambda b_1. \lambda b_2. \lambda \psi. (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z (X \psi b_2) b_1)$$

Asumiendo que las compuertas  $X$  y  $Z$  toman el bit de control como argumento para aplicar la identidad o la compuerta (codificación de control).

#### Traza de Reducción (Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$ )

En  $L^{\mathbb{C}}$ , la reducción es puramente algebraica (reescritura). Estado:  $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle$ . Inputs:  $b_1 = |0\rangle, b_2 = |1\rangle$ .

$$\begin{aligned} & \text{SDC } |0\rangle |1\rangle \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle \right) \\ & \xrightarrow{\beta} (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z (X \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle \right) |1\rangle) |0\rangle) \\ & \xrightarrow{\text{dist}} (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X |00\rangle |1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X |11\rangle |1\rangle \right) |0\rangle) \\ & \xrightarrow{\text{eval } X} (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle \right) |0\rangle) \\ & \xrightarrow{\text{eval } Z} (H \otimes I) \text{ CNOT } \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle \right) \text{ (Control } |0\rangle \implies I) \\ & \xrightarrow{\text{lin CNOT}} (H \otimes I) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{CNOT } |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{CNOT } |01\rangle \right) \\ & = (H \otimes I) \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle \right) \\ & \xrightarrow{\text{factor}} (H \otimes I) (|+\rangle \otimes |1\rangle) \text{ (Propiedad: } \alpha.u + \alpha.v \rightarrow \alpha(u+v)) \\ & \xrightarrow{H} |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \end{aligned}$$