

1. Lambda Cálculo Cuántico a Control Clásico (Selinger & Valiron)

Basado en el enfoque "Quantum Data, Classical Control". Aquí no existen superposiciones de términos, solo de datos (registros cuánticos). El control de flujo es clásico.

Término y Tipo

El algoritmo se define como una función que toma dos bits clásicos y un par de qubits entrelazados (tipo $\text{qbit} \times \text{qbit}$), y retorna dos bits clásicos tras la medición.

Tipo:

$$\text{SDC} : \text{bit} \rightarrow \text{bit} \rightarrow (\text{qbit} \times \text{qbit}) \rightarrow (\text{bit} \times \text{bit})$$

Término:

$$\begin{aligned} \text{SDC} = & \lambda b_1. \lambda b_2. \lambda p. \text{let } (q_A, q_B) = p \text{ in} \\ & \text{let } q'_A = (\text{if } b_2 \text{ then } X \text{ else } I) q_A \text{ in} \\ & \text{let } q''_A = (\text{if } b_1 \text{ then } Z \text{ else } I) q'_A \text{ in} \\ & \text{let } (z_1, z_2) = \text{CNOT} (q''_A, q_B) \text{ in} \\ & \text{let } z'_1 = H z_1 \text{ in} \\ & (\text{meas } z'_1, \text{meas } z_2) \end{aligned}$$

Traza de Reducción (Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$)

Suponemos el estado inicial $|\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$.

$$\begin{aligned} & \text{SDC 0 1 } (q_A, q_B) \\ \xrightarrow{\beta} & \text{let } q'_A = X q_A \text{ in } \dots \quad (\text{Estado: } (X \otimes I) |\beta_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)) \\ \xrightarrow{\beta} & \text{let } q''_A = I q'_A \text{ in } \dots \quad (\text{Estado: } (I \otimes X) |\beta_{00}\rangle - \text{sin cambios de fase}) \\ \xrightarrow{\text{CNOT}} & \text{CNOT aplicado al par } \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ & (\text{Estado resultante: } \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |0\rangle) \otimes |1\rangle = |+\rangle|1\rangle) \\ \xrightarrow{H} & H \text{ aplicado al primer qubit } (|+\rangle \rightarrow |0\rangle) \\ & (\text{Estado resultante: } |0\rangle|1\rangle) \\ \xrightarrow{\text{meas}} & (\text{meas } |0\rangle, \text{meas } |1\rangle) \implies (0, 1) \end{aligned}$$

2. Lambda-S (Díaz-Caro & Malherbe)

Basado en "Quantum Control". El cálculo distingue tipos base \mathbb{B} (duplicables) de superposiciones $S(\Psi)$ (no duplicables). Las funciones $\lambda x : \mathbb{B}$ distribuyen linealmente (call-by-base).

Término y Tipo

Asumimos las definiciones de las compuertas X, Z, H como términos del cálculo (ej. H definida en).

Tipo:

$$\text{SDC} : \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} \Rightarrow S(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \Rightarrow (\mathbb{B} \times \mathbb{B})$$

Nota: La medición está implícita en la reducción a base o mediante el operador de proyección si se requiere explícitamente, aquí mostramos la reducción al estado base final.

Término:

$$\text{SDC} = \lambda b_1 : \mathbb{B}. \lambda b_2 : \mathbb{B}. \lambda \psi : S(\mathbb{B} \times \mathbb{B}). (H \otimes I) (\text{CNOT } ((Z^{b_1} \circ X^{b_2}) \otimes I) \psi)$$

Donde X^b es azúcar sintáctica para $(b ? X \cdot I)$ y \otimes representa la operación sobre la estructura de pares del cálculo.

Traza de Reducción (Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$)

Estado inicial $\psi = \beta_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$. Las reducciones usan las reglas β_b (call-by-base) y la linealidad algebraica.

$$\begin{aligned}
 & \text{SDC } |0\rangle \langle 1| \beta_{00} \\
 & \xrightarrow{\beta_b \times 2} (H \otimes I) (\text{CNOT } ((Z^{|0\rangle} \circ X^{|1\rangle}) \otimes I) \beta_{00}) \\
 & \xrightarrow{\text{sugar}} (H \otimes I) (\text{CNOT } ((I \circ X) \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)) \\
 & \xrightarrow{\text{lin}} (H \otimes I) (\text{CNOT } \frac{1}{\sqrt{2}}((X|0\rangle) \otimes |0\rangle + (X|1\rangle) \otimes |1\rangle)) \\
 & \xrightarrow{\text{eval } X} (H \otimes I) (\text{CNOT } \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)) \\
 & \xrightarrow{\text{CNOT}} (H \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}}(\text{CNOT}|10\rangle + \text{CNOT}|01\rangle) \\
 & = (H \otimes I) \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) \quad (\text{por def. CNOT: } |10\rangle \rightarrow |11\rangle, |01\rangle \rightarrow |01\rangle) \\
 & \xrightarrow{\text{factor}} (H \otimes I) (|+\rangle \times |1\rangle) \quad (\text{Factorización explícita permitida en la semántica}) \\
 & \xrightarrow{H \otimes I} (H|+)\rangle \times (I|1\rangle) \\
 & \xrightarrow{\text{eval } H} |0\rangle \times |1\rangle \equiv |01\rangle
 \end{aligned}$$

3. $L^{\mathbb{C}}$ / Vectorial (Arrighi, Díaz-Caro, Dowek)

Basado en Lógica Lineal y el "Linear-Algebraic Lambda Calculus". Aquí los escalares $\alpha \in \mathbb{C}$ son ciudadanos de primera clase y parte del sistema de tipos (Vectorial).

Término y Tipo

Usamos la notación del sistema *Vectorial*. Los tipos pueden llevar escalares $\alpha.A$.

Tipo:

$$\text{SDC} : \forall X. \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B} \rightarrow S(\mathbb{B} \times \mathbb{B}) \rightarrow S(\mathbb{B} \times \mathbb{B})$$

Nota: S aquí denota el tipo de vectores normalizados o el span generador.

Término:

$$\text{SDC} = \lambda b_1. \lambda b_2. \lambda \psi. (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z (X \psi b_2) b_1)$$

Asumiendo que las compuertas X y Z toman el bit de control como argumento para aplicar la identidad o la compuerta (codificación de control).

Traza de Reducción (Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$)

En $L^{\mathbb{C}}$, la reducción es puramente algebraica (reescritura). Estado: $\psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle$. Inputs: $b_1 = |0\rangle, b_2 = |1\rangle$.

$$\begin{aligned} & \text{SDC } |0\rangle \langle 1| \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle \right) \\ & \xrightarrow{\beta} (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z (X \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle \right) \langle 1|) \langle 0|) \\ & \xrightarrow{\text{dist}} (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X |00\rangle \langle 1| + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot X |11\rangle \langle 1| \right) \langle 0|) \\ & \xrightarrow{\text{eval } X} (H \otimes I) \text{ CNOT } (Z \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle \right) \langle 0|) \\ & \xrightarrow{\text{eval } Z} (H \otimes I) \text{ CNOT } \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle \right) \quad (\text{Control } |0\rangle \implies I) \\ & \xrightarrow{\text{lin CNOT}} (H \otimes I) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{CNOT} |10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \text{CNOT} |01\rangle \right) \\ & = (H \otimes I) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |11\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot |01\rangle \right) \\ & \xrightarrow{\text{factor}} (H \otimes I) (|+\rangle \otimes |1\rangle) \quad (\text{Propiedad: } \alpha.u + \alpha.v \rightarrow \alpha(u + v)) \\ & \xrightarrow{H} |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \end{aligned}$$