DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

Exámen final

09 de Diciembre del 2025 — Fundamentos de Lenguajes para Computación Cuántica

Integrante	LU	Correo electrónico
Bagnasco Muguillo, Lautaro	1173/21	lbagnasco@dc.uba.ar
Laks, Joaquín	??	??
Vekselman, Natan	338/21	natanvek11@gmail.com
Romani, Rafael	775/21	rafaromani243@gmail.com

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón 0/Planta Alta)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

http://www.exactas.uba.ar

Parte I: Lógica, cálculo lambda, y el isomorfismo de Curry-Howard

Ejercicio 8: demostrar el siguiente lema

Lema 2.7

1. Si $\longrightarrow_R$ satisface la propiedad del diamante, entonces es Church-Rosser.
2. Si $\longrightarrow_R$ es Church-Rosser, entonces tiene formas normales únicas.

Lema 2.7.1

Sea $\longrightarrow_R$ que satisface la propiedad del diamante, es decir que, si $t \longrightarrow_R r_1$ y $t \longrightarrow_R r_2$ entonces existe un s tal que $r_1 \longrightarrow_R s$ y $r_2 \longrightarrow_R s$. Queremos ver que si $t \longrightarrow_R^\star r_1$ y $t \longrightarrow_R^\star r_2$ entonces existe un s tal que $r_1 \longrightarrow_R^\star s$ y $r_2 \longrightarrow_R^\star s$.
Sean t, r_1, r_2 tales que $t \longrightarrow_R^\star r_1, t \longrightarrow_R^\star r_2$. Si $t \longrightarrow_R^\star r_1$ existe una secuencia $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ tal que $t \longrightarrow_R \alpha_1 \longrightarrow_R \alpha_2 \longrightarrow_R \dots \longrightarrow_R \alpha_{k-1} \longrightarrow_R r_1$, simétricamente para r_2 existe una secuencia $\beta_1, \dots, \beta_{l-1}$. Notamos esto $t \longrightarrow_R^k r_1, t \longrightarrow_R^l r_2$. Veamos por inducción en k y l que es Church-Rosser.
Para $l, r \leq 1$ se sostiene que es CR pues es la propiedad del diamante.
Veamos inductivamente que se sostiene para $l+1, r+1 \leq n+1$. **Hipótesis inductiva:** Si $t \longrightarrow_R^k r_1, t \longrightarrow_R^l r_2$ entonces existe un s tal que $r_1 \longrightarrow_R^l s, r_2 \longrightarrow_R^k s$.
Sean t, r_1, r_2 tales que $t \longrightarrow_R^{k+1} r_1, t \longrightarrow_R^{l+1} r_2$. Por definición de $\longrightarrow_R^{-+1}$ existen α y β tales que $t \longrightarrow_R^k \alpha \longrightarrow_R r_1$ y $t \longrightarrow_R^l \beta \longrightarrow_R r_2$. Luego, por hipótesis inductiva tenemos que existe un γ tal que $\alpha \longrightarrow_R^l \gamma$ y $\beta \longrightarrow_R^k \gamma$. Ahora también por HI sabemos que existen δ_1, δ_2 tal que $r_1 \longrightarrow_R^l \delta_1, r_2 \longrightarrow_R^k \delta_2, \gamma \longrightarrow_R \delta_1, \gamma \longrightarrow_R \delta_2$. Finalmente, por propiedad de diamante con $\gamma, \delta_1, \delta_2$ vemos que existe s tal que $\delta_1 \longrightarrow_R s, \delta_2 \longrightarrow_R s$.
Uniendo todo esto tenemos que $r_1 \longrightarrow_R^l \delta_1 \longrightarrow_R s$ y $r_2 \longrightarrow_R^k \delta_2 \longrightarrow_R s$ por lo tanto $r_1 \longrightarrow_R^{l+1} s$ y $r_2 \longrightarrow_R^{k+1} s$ que era lo que buscábamos. Abajo hay un esquema de la demostración.

$$
\begin{tikzcd}
 & t \arrow[dl, dotted, "k"'] \arrow[dr, dotted, "l"] & \\
\alpha \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "l"] & & \beta \arrow[d] \arrow[dl, dotted, "k"'] \\
r_1 \arrow[d, dotted, "l"'] & \gamma \arrow[dl] \arrow[dr] & r_2 \arrow[d, dotted, "k"] \\
\delta_1 \arrow[dr] & & \delta_2 \arrow[dl] \\
 & s &
\end{tikzcd}
$$

Lema 2.7.2

Sea $\longrightarrow_R$ Church-Rosser, r_1, r_2 en forma normal, y t tal que $t \longrightarrow_R^\star r_1, t \longrightarrow_R^\star r_2$ queremos probar que $r_1 = r_2$.
Como $\longrightarrow_R$ es Church-Rosser y $t \longrightarrow_R^\star r_1, t \longrightarrow_R^\star r_2$, sabemos que existe un s tal que $r_1 \longrightarrow_R^\star s$ y $r_2 \longrightarrow_R^\star s$.
Dado que r_1 está en forma normal, no existe ningún e tal que $r_1 \longrightarrow_R e$, por lo que el único elemento tal que $r_1 \longrightarrow_R^\star s$ es r_1. Por lo tanto $s = r_1$. Análogamente ocurre con r_2, por lo tanto $r_2 = s$ y por ende $r_1 = r_2$.

Parte II: Semántica denotacional y teoría de categorías

Ejercicio 5: demostrar el siguiente teorema

Teorema 4.12

En Set, los epimorfismos son exactamente las funciones sobreyectivas (las funciones $f : A \to B$ para las cuales para cada $b \in B$ existe un $a \in A$ tal que $f(a) = b$).

$\Longrightarrow$) Sea $A \xrightarrow{f} B$ una función sobreyectiva. Supongamos que no es un epimorfismo, por lo tanto existen $B \xrightarrow{g} C$ y $B \xrightarrow{h} C$ tales que $g \circ f = h \circ f$ pero $g \neq h$. Sea $y \in B$ tal que $g(y) \neq h(y)$ el cual existe por ser g y h distintas. Como f es sobreyectiva, existe $x \in A$ que cumple $f(x) = y$, luego $g(y) = g(f(y))$ y $h(y) = h(f(y))$ y por ende $g \circ f \neq h \circ f$, lo cual contradice las hipótesis de g y h.

$\Longleftarrow$) Sea $A \xrightarrow{f} B$ un epimorfismo. Supongamos que no es sobreyectiva, luego existe $b \in B$ tal que para todo $a \in A$, $f(a) \neq b$. Sean g y h flechas de B en C tales que

$$g(x) = x \qquad\qquad h(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = b \\ x & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Luego, ver que $g(f(x)) = f(x)$ y $h(f(x)) = f(x)$ pues $f(x) \neq b$ para todo $x \in A$, por lo tanto $g \circ f = h \circ f$ y dado que f es un epimorfismo se tiene que $g = h$ lo cual contradice las hipótesis.

Ejercicio 10: demostrar que List es un functor

Comportamiento functorial de List

Sea $f : S \to S'$ una función entre conjuntos, probar que
1. $\text{List}(\text{Id}_S) = \text{Id}_{\text{List}(S)}$
2. $\text{List}(g \circ f) = \text{List}(g) \circ \text{List}(f)$ para toda función $g : S' \to S''$.

1. *Identidad.* Sea $L = [s_1, \ldots, s_n] \in \text{List}(S)$ una lista cualquiera, luego se tiene:

$$\text{List}(\text{Id}_S)(L) = [\text{Id}_S(s_1), \ldots, \text{Id}_S(s_n)] = [s_1, \ldots, s_n] = \text{Id}_{\text{List}(S)}(L)$$

por lo tanto $\text{List}(\text{Id}_S) = \text{Id}_{\text{List}(S)}$.

2. *Composición.* Sean $f : S \to S'$, $g : S' \to S''$ y $L = [s_1, \ldots, s_n]$ una lista en $\text{List}(S)$. Entonces:

$$\text{List}(g \circ f)(L) = [(g \circ f)(s_1), \ldots, (g \circ f)(s_n)] = [g(f(s_1)), \ldots, g(f(s_n))]$$

Luego, desde el otro lado

$$[g(f(s_1)), \ldots, g(f(s_n))] = \text{List}(g)([f(s_1), \ldots, f(s_n)]) = (\text{List}(g) \circ \text{List}(f))(L)$$

Dado que esto vale para toda lista se tiene que

$$\text{List}(g \circ f) = \text{List}(g) \circ \text{List}(f)$$

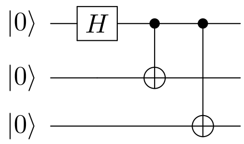
lo cual demuestra la propiedad de composición.

Por ende List cumple con las dos condiciones por lo que queda probado que es un functor.

Parte III: Computación cuántica

Ejercicio 15: dar un circuito que genere el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$ a partir de la entrada $|000\rangle$

Se propone el siguiente circuito,



Al analizar la traza se ve que, comenzando con la entrada $|000\rangle$ se obtiene el estado deseado.

$$|000\rangle \xrightarrow{H \otimes I \otimes I} (\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle)$$
$$\xrightarrow{CNOT(1,2)} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |110\rangle) \xrightarrow{CNOT(1,3)} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$$

Ejercicio 26: probar el siguiente teorema

Teorema 8.22

Para todo operador densidad ρ se tiene $tr(\rho^2) \leq 1$. Además, la igualdad se cumple si y solo si ρ está en un estado puro.

Recordemos que para un conjunto de estados puros $\{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$, el operador de densidad es $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Por el Teorema 8.25 del apunte se tiene que puede ser escrito como $\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|$ donde los $|j\rangle$ son ortonormales y $\lambda_j \in \mathbb{R}_0^+$. Vemos entonces que:

$$tr(\rho^2) = tr\left(\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|\right)^2\right) = tr\left(\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j |i\rangle\langle i|j\rangle\langle j|\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j tr(|i\rangle\langle i|j\rangle\langle j|)$$

Como los vectores son ortonormales, tenemos que $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$, entonces:

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j tr(|i\rangle\langle i|j\rangle\langle j|) = \sum_i \sum_j \delta_{ij} \lambda_i \lambda_j tr(|i\rangle\langle j|) = \sum_i \lambda_i^2 tr(|i\rangle\langle i|)$$

Luego, por el Teorema 8.12 del apunte, $tr(|i\rangle\langle i|) = \langle i|i\rangle = 1$, por lo que $tr(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2$.
Además es sabido que:

$$tr(\rho) = tr\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|\right) = \sum_i \lambda_i = 1$$

Como los λ_i son positivos, se tiene que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ para todo i, por lo tanto $\lambda_i^2 \leq \lambda_i$. Luego:

$$tr(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2 \leq \sum_i \lambda_i = tr(\rho) = 1$$

En el caso en el que ρ está en estado puro, se puede escribir como $|\psi\rangle\langle\psi|$, y es fácil ver que $tr(\rho^2) = tr(|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|) = tr(|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|\psi\rangle = 1$.
Cuando ρ es un estado mixto, no puede ser escrito de esa forma, por lo que por lo menos dos λ_i son no nulos, esto junto con que $\sum_i \lambda_i = 1$ y $0 \leq \lambda_i \leq 1$, fuerza a que $\lambda_i < 1$ para todo i. Por lo tanto $\lambda_i^2 < \lambda_i$ y entonces

$$tr(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2 < \sum_i \lambda_i = 1$$

Algoritmo2

Caso $b_1 = 0, b_2 = 0$.

$$\beta_{00} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{X^0 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{Z^0 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{\text{CNOT}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle)$$
$$= \left(\tfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle = |+\rangle \otimes |0\rangle$$
$$\xrightarrow{H \otimes I} |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle$$

Caso $b_1 = 0, b_2 = 1$.

$$\beta_{00} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{X^1 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$$
$$\xrightarrow{Z^0 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$$
$$\xrightarrow{\text{CNOT}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle)$$
$$= \left(\tfrac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |1\rangle = |+\rangle \otimes |1\rangle$$
$$\xrightarrow{H \otimes I} |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle$$

Caso $b_1 = 1, b_2 = 0$.

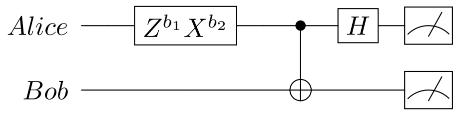
$$\beta_{00} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{X^0 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{Z^1 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{\text{CNOT}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle)$$
$$= \left(\tfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle = |-\rangle \otimes |0\rangle$$
$$\xrightarrow{H \otimes I} |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle$$

Caso $b_1 = 1, b_2 = 1$.

$$\beta_{00} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$
$$\xrightarrow{X^1 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle)$$
$$\xrightarrow{Z^1 \otimes I} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle)$$
$$\xrightarrow{\text{CNOT}} \tfrac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle + |01\rangle)$$
$$= \left(\tfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |1\rangle = |-\rangle \otimes |1\rangle$$
$$\xrightarrow{H \otimes I} |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle$$

Algoritmo

El algoritmo de codificación superdensa empieza en un estado β_{00}, donde Alice tiene el primer qubit y Bob el segundo. Luego de aplicar la primer compuerta, Alice envía su qubit a Bob. Alice quiere enviar los bits $b_1 b_2$ clásicos a Bob, el circuito es de la forma:



Para analizar el algoritmo primero vemos el efecto de aplicar Z^{b_1} y X^{b_2}.

$$Z^1 |0\rangle = |0\rangle$$
$$Z^1 |1\rangle = - |1\rangle$$
$$Z^0 |0\rangle = |0\rangle$$
$$Z^0 |1\rangle = |1\rangle$$

Entonces podemos pensar que $Z^{b_1}(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \alpha |0\rangle + (-1)^{b_1}\beta |1\rangle$
Un análisis similar se puede hacer con X.

$$X^1 |0\rangle = |1\rangle$$
$$X^1 |1\rangle = |0\rangle$$
$$X^0 |0\rangle = |0\rangle$$
$$X^0 |1\rangle = |1\rangle$$

Entonces podemos escribir $X^{b_2}(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = (\alpha^{1-b_2} + \beta^{b_2}) |0\rangle + (\beta^{1-b_2} + \alpha^{b_2}) |1\rangle$
Finalmente, llegamos a que:

$$Z^{b_1}X^{b_2}(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = (\alpha^{1-b_2} + (-1)^{b_1 b_2}\beta^{b_2}) |0\rangle + ((-1)^{b_1(1-b_2)}\beta^{1-b_2} + \alpha^{b_2}) |1\rangle$$

Esta fórmula la usamos en el primer paso de la traza del algoritmo.
Con entrada $\beta_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$ el algoritmo primero aplica $Z^{b_1}X^{b_2}$ al primer qubit, resultando en:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{Z^{b_1}X^{b_2}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle + (-1)^{b_1 b_2} |01\rangle + (-1)^{b_1(1-b_2)} |11\rangle)$$

Luego de aplicar un CNOT, el estado queda:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle + (-1)^{b_1 b_2} |01\rangle + (-1)^{b_1(1-b_2)} |10\rangle)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle (|0\rangle + (-1)^{b_1 b_2} |1\rangle) + |1\rangle (|1\rangle + (-1)^{b_1(1-b_2)} |0\rangle))$$

Luego de aplicar H, queda: