



## DEPARTAMENTO DE COMPUTACION

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

# Exámen final

09 de Diciembre del 2025

Fundamentos de Lenguajes para Computación Cuántica

Integrante	LU	Correo electrónico
Bagnasco Mugillo, Lautaro	1173/21	<a href="mailto:lbagnasco@dc.uba.ar">lbagnasco@dc.uba.ar</a>
Laks, Joaquín	??	??
Vekselman, Natan	338/21	<a href="mailto:natanvek11@gmail.com">natanvek11@gmail.com</a>
Romani, Rafael	775/21	<a href="mailto:rafaromani243@gmail.com">rafaromani243@gmail.com</a>



**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales**  
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón 0/Planta Alta)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (++54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

## Parte I: Lógica, cálculo lambda, y el isomorfismo de Curry-Howard

### Ejercicio 8: demostrar el siguiente lema

#### Lema 2.7

1. Si  $\rightarrow_R$  satisface la propiedad del diamante, entonces es Church-Rosser.
2. Si  $\rightarrow_R$  es Church-Rosser, entonces tiene formas normales únicas.

#### Lema 2.7.1

Sea  $\rightarrow_R$  que satisface la propiedad del diamante, es decir que, si  $t \rightarrow_R r_1$  y  $t \rightarrow_R r_2$  entonces existe un  $s$  tal que  $r_1 \rightarrow_R s$  y  $r_2 \rightarrow_R s$ . Queremos ver que si  $t \xrightarrow{R}^* r_1$  y  $t \xrightarrow{R}^* r_2$  entonces existe un  $s$  tal que  $r_1 \xrightarrow{R}^* s$  y  $r_2 \xrightarrow{R}^* s$ .

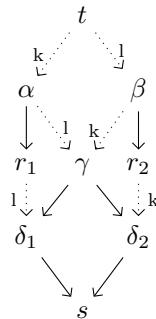
Sean  $t, r_1, r_2$  tales que  $t \xrightarrow{R}^* r_1, t \xrightarrow{R}^* r_2$ . Si  $t \xrightarrow{R}^* r_1$  existe una secuencia  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$  tal que  $t \rightarrow_R \alpha_1 \rightarrow_R \alpha_2 \rightarrow_R \dots \rightarrow_R \alpha_{k-1} \rightarrow_R r_1$ , simétricamente para  $r_2$  existe una secuencia  $\beta_1, \dots, \beta_{l-1}$ . Notamos esto  $t \xrightarrow{R}^k r_1, t \xrightarrow{R}^l r_2$ . Veamos por inducción en  $k$  y  $l$  que es Church-Rosser.

Para  $k, l \leq 1$  se sostiene que es CR pues es la propiedad del diamante.

Veamos inductivamente que se sostiene para  $k+1, l+1 \leq n+1$ . **Hipótesis inductiva:** Si  $t \xrightarrow{R}^k r_1, t \xrightarrow{R}^l r_2$  entonces existe un  $s$  tal que  $r_1 \xrightarrow{R}^l s, r_2 \xrightarrow{R}^k s$ .

Sean  $t, r_1, r_2$  tales que  $t \xrightarrow{R}^{k+1} r_1, t \xrightarrow{R}^{l+1} r_2$ . Por definición de  $\xrightarrow{R}^{n+1}$  existen  $\alpha$  y  $\beta$  tales que  $t \xrightarrow{R}^k \alpha \rightarrow_R r_1$  y  $t \xrightarrow{R}^l \beta \rightarrow_R r_2$ . Luego, por hipótesis inductiva tenemos que existe un  $\gamma$  tal que  $\alpha \xrightarrow{R}^l \gamma$  y  $\beta \xrightarrow{R}^k \gamma$ . Ahora también por HI sabemos que existen  $\delta_1, \delta_2$  tal que  $r_1 \xrightarrow{R}^l \delta_1, r_2 \xrightarrow{R}^k \delta_2, \gamma \rightarrow_R \delta_1, \gamma \rightarrow_R \delta_2$ . Finalmente, por propiedad de diamante con  $\gamma, \delta_1, \delta_2$  vemos que existe  $s$  tal que  $\delta_1 \rightarrow_R s, \delta_2 \rightarrow_R s$ .

Uniendo todo esto tenemos que  $r_1 \xrightarrow{R}^l \delta_1 \rightarrow_R s$  y  $r_2 \xrightarrow{R}^k \delta_2 \rightarrow_R s$  por lo tanto  $r_1 \xrightarrow{R}^{l+1} s$  y  $r_2 \xrightarrow{R}^{k+1} s$  que era lo que buscábamos. Abajo hay un esquema de la demostración.



#### Lema 2.7.2

Sea  $\rightarrow_R$  Church-Rosser,  $r_1, r_2$  en forma normal, y  $t$  tal que  $t \xrightarrow{R}^* r_1, t \xrightarrow{R}^* r_2$  queremos probar que  $r_1 = r_2$ .

Como  $\rightarrow_R$  es Church-Rosser y  $t \xrightarrow{R}^* r_1, t \xrightarrow{R}^* r_2$ , sabemos que existe un  $s$  tal que  $r_1 \xrightarrow{R}^* s$  y  $r_2 \xrightarrow{R}^* s$ .

Dado que  $r_1$  está en forma normal, no existe ningún  $e$  tal que  $r_1 \rightarrow_R e$ , por lo que el único elemento tal que  $r_1 \xrightarrow{R}^* s$  es  $r_1$ . Por lo tanto  $s = r_1$ . Análogamente ocurre con  $r_2$ , por lo tanto  $r_2 = s$  y por ende  $r_1 = r_2$ .

## Parte II: Semántica denotacional y teoría de categorías

### Ejercicio 5: demostrar el siguiente teorema

#### Teorema 4.12

En Set, los epimorfismos son exactamente las funciones sobreyectivas (las funciones  $f : A \rightarrow B$  para las cuales para cada  $b \in B$  existe un  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ ).

$\Rightarrow$ ) Sea  $A \xrightarrow{f} B$  una función sobreyectiva. Supongamos que no es un epimorfismo, por lo tanto existen  $B \xrightarrow{g} C$  y  $B \xrightarrow{h} C$  tales que  $g \circ f = h \circ f$  pero  $g \neq h$ . Sea  $y \in B$  tal que  $g(y) \neq h(y)$  el cual existe por ser  $g$  y  $h$  distintas. Como  $f$  es sobreyectiva, existe  $x \in A$  que cumple  $f(x) = y$ , luego  $g(y) = g(f(x))$  y  $h(y) = h(f(x))$  y por ende  $g \circ f \neq h \circ f$ , lo cual contradice las hipótesis de  $g$  y  $h$ .

$\Leftarrow$ ) Sea  $A \xrightarrow{f} B$  un epimorfismo. Supongamos que no es sobreectiva, luego existe  $b \in B$  tal que para todo  $a \in A$ ,  $f(a) \neq b$ . Sean  $g$  y  $h$  flechas de  $B$  en  $C$  tales que

$$g(x) = x \quad h(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = b \\ x & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Luego, ver que  $g(f(x)) = f(x)$  y  $h(f(x)) = f(x)$  pues  $f(x) \neq b$  para todo  $x \in A$ , por lo tanto  $g \circ f = h \circ f$  y dado que  $f$  es un epimorfismo se tiene que  $g = h$  lo cual contradice las hipótesis.

### Ejercicio 10: demostrar que List es un functor

#### Comportamiento functorial de List

Sea  $f : S \rightarrow S'$  una función entre conjuntos, probar que

1.  $\text{List}(\text{Id}_S) = \text{Id}_{\text{List}(S)}$
2.  $\text{List}(g \circ f) = \text{List}(g) \circ \text{List}(f)$  para toda función  $g : S' \rightarrow S''$ .

1. *Identidad.* Sea  $L = [s_1, \dots, s_n] \in \text{List}(S)$  una lista cualquiera, luego se tiene:

$$\text{List}(\text{Id}_S)(L) = [\text{Id}_S(s_1), \dots, \text{Id}_S(s_n)] = [s_1, \dots, s_n] = \text{Id}_{\text{List}(S)}(L)$$

por lo tanto  $\text{List}(\text{Id}_S) = \text{Id}_{\text{List}(S)}$ .

2. *Composición.* Sean  $f : S \rightarrow S'$ ,  $g : S' \rightarrow S''$  y  $L = [s_1, \dots, s_n]$  una lista en  $\text{List}(S)$ . Entonces:

$$\text{List}(g \circ f)(L) = [(g \circ f)(s_1), \dots, (g \circ f)(s_n)] = [g(f(s_1)), \dots, g(f(s_n))]$$

Luego, desde el otro lado

$$[g(f(s_1)), \dots, g(f(s_n))] = \text{List}(g)([f(s_1), \dots, f(s_n)]) = (\text{List}(g) \circ \text{List}(f))(L)$$

Dado que esto vale para toda lista se tiene que

$$\text{List}(g \circ f) = \text{List}(g) \circ \text{List}(f)$$

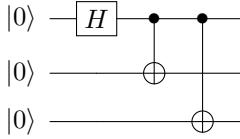
lo cual demuestra la propiedad de composición.

Por ende List cumple con las dos condiciones por lo que queda probado que es un functor.

## Parte III: Computación cuántica

### Ejercicio 15: dar un circuito que genere el estado $\frac{1}{\sqrt{2}}|000\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|111\rangle$ a partir de la entrada $|000\rangle$

Se propone el siguiente circuito,



Al analizar la traza se ve que, comenzando con la entrada  $|000\rangle$  se obtiene el estado deseado.

$$\begin{aligned} |000\rangle &\xrightarrow{H \otimes I \otimes I} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle\right)|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |100\rangle) \\ &\xrightarrow{CNOT(1,2)} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |110\rangle) \xrightarrow{CNOT(1,3)} \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle) \end{aligned}$$

### Ejercicio 26: probar el siguiente teorema

#### Teorema 8.22

Para todo operador densidad  $\rho$  se tiene  $tr(\rho^2) \leq 1$ . Además, la igualdad se cumple si y solo si  $\rho$  está en un estado puro.

Recordemos que para un conjunto de estados puros  $\{(p_i, |\psi_i\rangle)\}$ , el operador de densidad es  $\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$ . Por el Teorema 8.25 del apunte se tiene que puede ser escrito como  $\rho = \sum_j \lambda_j |j\rangle\langle j|$  donde los  $|j\rangle$  son ortonormales y  $\lambda_j \in \mathbb{R}_0^+$ . Vemos entonces que:

$$tr(\rho^2) = tr\left(\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|\right)^2\right) = tr\left(\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j |i\rangle\langle i| |j\rangle\langle j|\right) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j tr(|i\rangle\langle i| |j\rangle\langle j|)$$

Como los vectores son ortonormales, tenemos que  $\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$ , entonces:

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j tr(|i\rangle\langle i| |j\rangle\langle j|) = \sum_i \sum_j \delta_{ij} \lambda_i \lambda_j tr(|i\rangle\langle j|) = \sum_i \lambda_i^2 tr(|i\rangle\langle i|)$$

Luego, por el Teorema 8.12 del apunte,  $tr(|i\rangle\langle i|) = \langle i|i\rangle = 1$ , por lo que  $tr(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2$ . Además es sabido que:

$$tr(\rho) = tr\left(\sum_i \lambda_i |i\rangle\langle i|\right) = \sum_i \lambda_i = 1$$

Como los  $\lambda_i$  son positivos, se tiene que  $0 \leq \lambda_i \leq 1$  para todo  $i$ , por lo tanto  $\lambda_i^2 \leq \lambda_i$ . Luego:

$$tr(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2 \leq \sum_i \lambda_i = tr(\rho) = 1$$

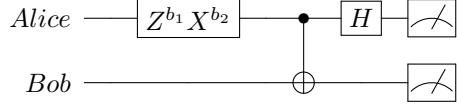
En el caso en el que  $\rho$  está en estado puro, se puede escribir como  $|\psi\rangle\langle\psi|$ , y es fácil ver que  $tr(\rho^2) = tr(|\psi\rangle\langle\psi|\psi\rangle\langle\psi|) = tr(|\psi\rangle\langle\psi|) = \langle\psi|\psi\rangle = 1$ .

Cuando  $\rho$  es un estado mixto, no puede ser escrito de esa forma, por lo que por lo menos dos  $\lambda_i$  son no nulos, esto junto con que  $\sum_i \lambda_i = 1$  y  $0 \leq \lambda_i \leq 1$ , fuerza a que  $\lambda_i < 1$  para todo  $i$ . Por lo tanto  $\lambda_i^2 < \lambda_i$  y entonces

$$tr(\rho^2) = \sum_i \lambda_i^2 < \sum_i \lambda_i = 1$$

## Algoritmo

El algoritmo de codificación superdensa empieza en un estado  $\beta_{00}$ , donde Alice tiene el primer qubit y Bob el segundo. Luego de aplicar la primer compuerta, Alice envía su qubit a Bob. Alice quiere enviar los bits  $b_1 b_2$  clásicos a Bob, el circuito es de la forma:



**Caso**  $b_1 = 0, b_2 = 0$ .

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{X^0 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{Z^0 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |10\rangle) \\ &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle = |+\rangle \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{H \otimes I} |0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle\end{aligned}$$

**Caso**  $b_1 = 0, b_2 = 1$ .

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{X^1 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ &\xrightarrow{Z^0 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle + |01\rangle) \\ &= \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |1\rangle = |+\rangle \otimes |1\rangle \\ &\xrightarrow{H \otimes I} |0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle\end{aligned}$$

**Caso**  $b_1 = 1, b_2 = 0$ .

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{X^0 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{Z^1 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |10\rangle) \\ &= \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |0\rangle = |-\rangle \otimes |0\rangle \\ &\xrightarrow{H \otimes I} |1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle\end{aligned}$$

**Caso**  $b_1 = 1, b_2 = 1$ .

$$\begin{aligned}\beta_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ &\xrightarrow{X^1 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |01\rangle) \\ &\xrightarrow{Z^1 \otimes I} \frac{1}{\sqrt{2}}(-|10\rangle + |01\rangle) \\ &\xrightarrow{\text{CNOT}} \frac{1}{\sqrt{2}}(-|11\rangle + |01\rangle) \\ &= \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right) \otimes |1\rangle = |-\rangle \otimes |1\rangle \\ &\xrightarrow{H \otimes I} |1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle\end{aligned}$$

## Lambda cálculo cuántico a control clásico

El término que implementa el algoritmo en el lambda cuántico a control clásico es el siguiente:  
 $EPR = \lambda x.CNOT\langle H(\text{new } 0), \text{new } 0 \rangle$

```
(\lambda b_1.\lambda b_2.
  let ⟨q1, q2⟩ = EPR*
    in let ⟨a, b⟩ = CNOT(
      let ⟨x1, x2⟩ = if b2 then ⟨Xq1, q2⟩ else ⟨q1, q2⟩
        in if b1 then ⟨Zx1, x2⟩ else ⟨x1, x2⟩)
      in ⟨meas (Ha), meas b⟩)
```

[|ψ⟩, t]: !bit → !bit → qubit ⊗ qubit

## Lambda- $\mathcal{S}$

```
X = λx : B.x? |0⟩ · |1⟩
Z = λx : B.x? − |1⟩ · |0⟩
Xb2 = λb2 : B.λq : B.b2?Xq · q
Zb1 = λb1 : B.λq : B.b1?Zq · q
CNOT = λq : B2.(head q)?(head q × Xtail q) · q
HI = λq : (H head q) × tail q
```

$$(\lambda q : \mathcal{S}\mathbb{B}^2.\lambda b_1 : \mathbb{B}.\lambda b_2 : \mathbb{B}.
 \pi_2 \text{ HI CNOT } ((X^{b_2}b_2(Z^{b_1}b_1 \text{ head } q)) \times (\text{tail } q))
 ) \frac{1}{\sqrt{2}}.(|00\rangle + |11\rangle)$$

Derivación para  $b_1 = |1\rangle$ ,  $b_2 = |1\rangle$ .

$$(\lambda q : \mathcal{S}\mathbb{B}^2.\lambda b_1 : \mathbb{B}.\lambda b_2 : \mathbb{B}.\pi_2 \text{ HI CNOT } ((X^{b_2}b_2(Z^{b_1}b_1 \text{ head } q)) \times (\text{tail } q))) \frac{1}{\sqrt{2}}.(|00\rangle + |11\rangle) \xrightarrow{\beta_n}$$