



Giselle Moraes Resende Pereira (PET Matemática – SESu-MEC)

giselle_mrp@yahoo.com.br

Marcos Antônio da Câmara (Tutor do PET Matemática)

camara@ufu.br

Algumas Aplicações da Teoria dos Grafos

1. INTRODUÇÃO

Ao contrário de muitos ramos da matemática, nascidos de especulações puramente teóricas, a teoria dos grafos tem sua origem no confronto de problemas práticos. A teoria dos grafos estuda objetos combinatórios -os grafos- que são um bom modelo para muitos problemas em vários ramos da matemática, da informática, da engenharia, da química, da psicologia e da indústria. Muitos dos problemas sobre grafos tornaram-se célebres porque são um interessante desafio intelectual e porque têm importantes aplicações práticas. É inevitável esbarrar em questões de complexidade computacional, pois muitos dos problemas da teoria dos grafos têm motivação algorítmica.

2. BREVE HISTÓRICO

Enquanto outros temas de matemática têm uma longa e gloriosa história, isto não acontece com a Teoria de Grafos. O primeiro problema cuja solução envolveu conceitos do que veio a ser a teoria dos grafos (séc. XVII) foi resolvido por Euler e não passava de uma especulação matemática.

Acredita-se que um dos primeiros exemplos da utilização de grafos teria surgido devido as Pontes de Königsberg. Na cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circunda uma ilha e separa a cidade em quatro zonas que, no séc. XVII estavam ligadas por sete pontes como na figura 1:

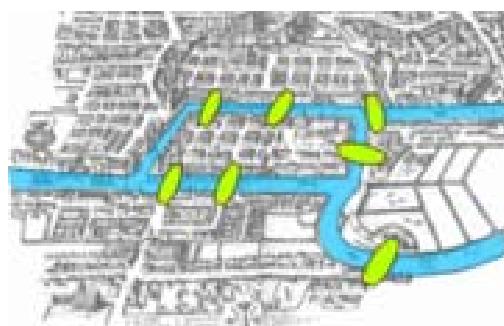


Figura 1

3. CONCEITOS PRELIMINARES

Um **Grafo** $G(V, E)$ é uma estrutura matemática constituída pelos conjuntos:

- V , finito e não vazio de n vértices, e
- E , de m arestas, que são pares não ordenados de elementos de V .

Graficamente é representado por uma figura com **Nós** ou **vértices**, unidos por um traço denominado **Aresta** configurando a relação imaginária, vejam figura 2.

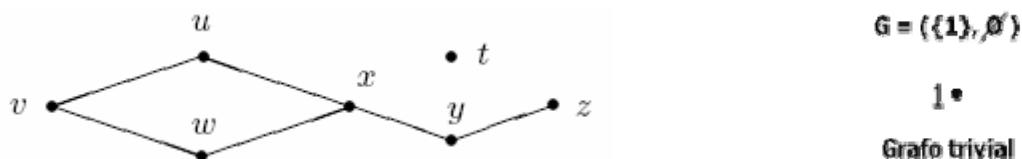
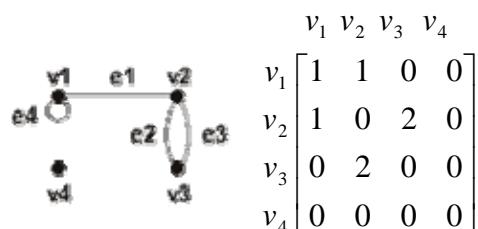


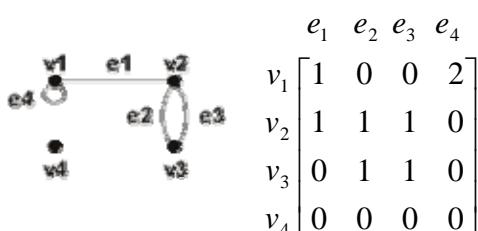
Figura 2: Esta figura é um desenho do grafo cujos vértices são $V = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ e cujas arestas são $E = \{vw, uv, xw, xu, yz, xy\}$ e o grafos trivial.

Embora seja conveniente a representação de grafos através de diagramas de pontos ligados por linhas, tal representação é inadequada se desejamos armazenar grandes grafos em um computador.

3.1 Matriz de adjacência: Se G é um grafo com vértices $\{1,2,3,\dots,n\}$, sua matriz de adjacência é a matriz $n \times n$ cujo elemento ij é o número de arestas ligando o vértice i ao vértice j .



3.2 Matriz de incidência: Se G é um grafo com vértices $\{1,2,3,\dots,n\}$ e arestas $\{1,2,3,\dots,m\}$, sua matriz de incidência é a matriz $n \times m$ cujo elemento ij é o número de vezes em que o vértice i é incidente à aresta j .



3.3 Adjacências de vértices e arestas:

3.3.1 Dois vértices x e y são ditos **adjacentes** ou vizinhos se existe uma aresta unindo-os.

3.3.2 Duas arestas são adjacentes se elas têm ao menos um vértice em comum.

3.4 Incidências: Os vértices x e y são ditos **incidentes na aresta**, se eles são extremos da aresta.

3.5 Vértices isolados: Qualquer vértice de grau zero é um vértice isolado.

3.6 Laços: Laço é uma aresta que une um par de vértices idênticos.

3.7 Arestas paralelas: Quando existe mais de uma aresta entre o mesmo par de vértices.

Exemplificando, na figura 3 está representado um grafo de $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e $E = \{(1,2), (3,2), (2,2), (1,5), (6,1), (6,5), (5,2)\}$.

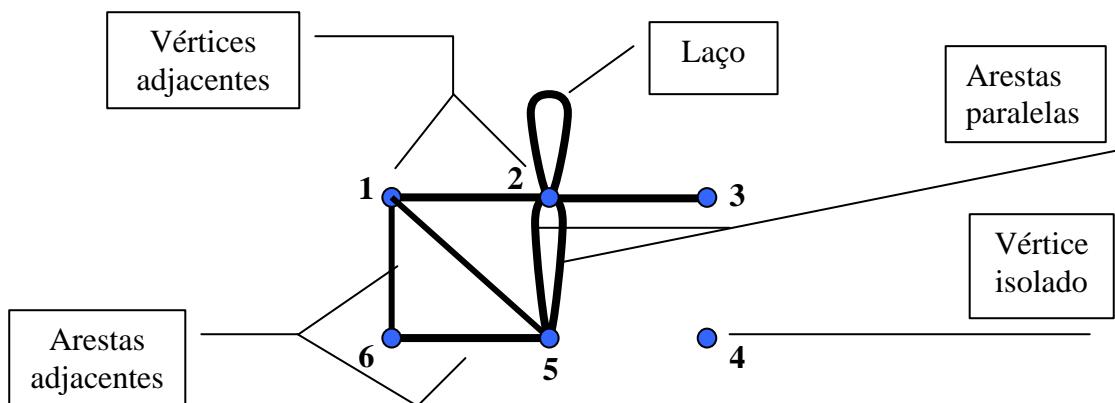


Figura 3

3.8 Passeio entre nós: É a seqüência alternante de nós e arestas.

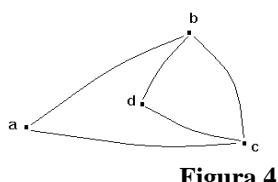
3.9 Caminho: Um caminho é qualquer grafo da forma $(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\})$. Em outras palavras, um caminho é um passeio que não contém nós repetidos.

3.10 Ciclo ou Circuito: Um ciclo é um grafo da forma $(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_i v_{i+1} : 1 \leq i < n\} \cup \{v_n v_1\})$ com $n \geq 3$. Em outras palavras, um ciclo é um caminho fechado sem vértices repetidos.

3.11 Grau de um vértice: Grau de um vértice v ($g(v)$) é o número de arestas que incidem em v .

O grau de um vértice v também pode ser definido como o número de arestas adjacentes a v .

Obs.: Um laço conta duas vezes para o grau de um vértice.



$$\begin{aligned} g(b) &= 3 \\ g(d) &= 2 \\ g(a) &= 2 \\ g(c) &= 3 \end{aligned}$$

Figura 4

3.12 Dígrafo: Um Grafo Direcionado ou Dígrafo $D(V,E)$ é uma estrutura matemática constituída pelos conjuntos:

- V , finito e não vazio de n vértices, e
- E , de m arestas, que são pares ordenados de elementos de V .

3.13 Conexidade: Um grafo é **conexo** se, para qualquer par $\{v,w\}$ de seus vértices, existe um caminho com extremos v e w . E um grafo é **não conexo** se existir ao menos um par de vértices que não é unido por nenhum caminho.

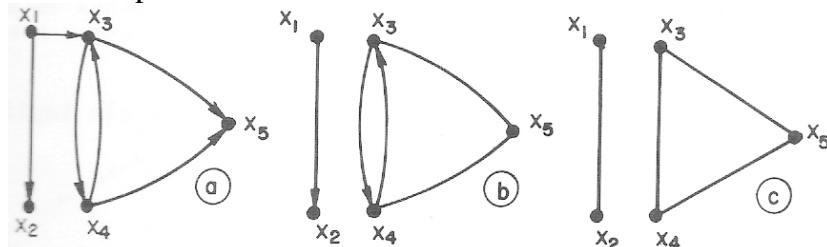


Figura 5: a) grafo conexo; b) e c) grafos não conexos

3.14 Grafo Bipartido: Um grafo é dito ser bipartido quando seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 (figura 6).

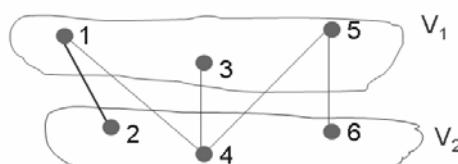


Figura 6

3.15 Grafo Rotulado: Um grafo $G(V,E)$ é dito ser rotulado em vértices (ou arestas) quando a cada vértice (ou aresta) estiver associado um rótulo (figura 7).

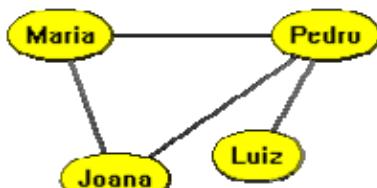


Figura 7

3.16 Grafo valorado: Um grafo $G(V, E)$ é dito ser valorado quando existe uma ou mais funções relacionando V e/ou E com um conjunto de números (figura 8).

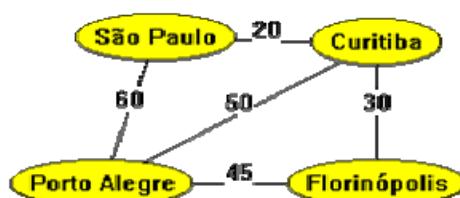


Figura 8

Teorema 1: Em todo grafo, a soma dos graus dos vértices é igual ao dobro do número de arestas. Ou seja, todo $G(V, E)$ satisfaz a identidade $\sum_{v \in V} g(v) = 2|A|$

Demonstração: Uma aresta com vértices x e y contribui uma unidade para $g(x)$ e uma unidade para $g(y)$. Portanto, cada aresta contribui exatamente duas unidades para a soma $\sum_{v \in V} g(v)$.

■

Corolário 1: O número de nós de grau ímpar de um grafo é par.

Demonstração: Como a soma dos graus é igual a $2|A|$, considere o grafo $G(N, A)$.

Denotando por d_i o grau do nó i , temos:

$$2|A| = \sum_{i \in N} d_i = \sum_{d_i \text{ par}} d_i + \sum_{d_i \text{ ímpar}} d_i$$

Como $2|A|$ é par então a soma das duas parcelas também será par.

Observe que para ter uma soma de parcelas ímpares resultando em um número par, devemos ter um número par de parcelas, o que conclui a demonstração.

■

4. OPERAÇÕES DE ARESTAS E VÉRTICES

Seja $G(V, E)$ um grafo constituído de um conjunto V , finito e não vazio de n vértices, e um conjunto E de m arestas.

4.1 Inclusão da aresta (v,w)

Exigência: os vértices v e w devem pertencer a V .

Grafo resultante: $G + (v, w)$ definido por $V \cup \{(v, w)\}$.

Caso (v, w) já pertença a G , o grafo resultante terá pelo menos um par de arestas paralelas. Se $v = w$, há o surgimento de um laço.

4.2 Exclusão da aresta (v,w)

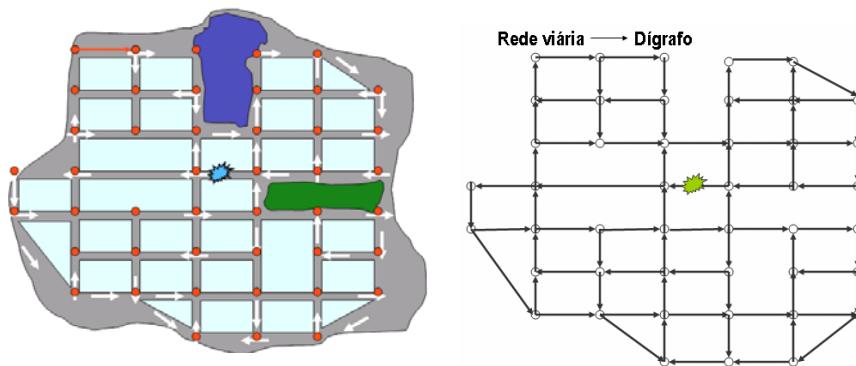
Exigência: a aresta (v,w) deve pertencer a E .

Grafo resultante: $G - (v, w)$ definido por $V \cup E - \{(v, w)\}$

4.2.1 Situação Problema I: Rede viária com mão direcional do trânsito

Fato: Houve um rompimento na rede de fornecimento de água em uma região da cidade impedindo o trânsito nessa região.

Ação: Interrupção do trânsito no trecho de rua.

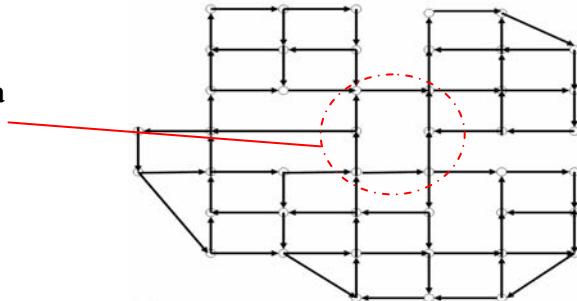


Solucionando o problema do trânsito:

- Acionar o Departamento de Trânsito para alterar o tráfego local.
- Divulgar aos interessados as ações em andamento.
- Reparar a pavimentação da rua.
- Restabelecer o trânsito da região.

A interrupção do trânsito no trecho de rua implica na exclusão da aresta associada.

Dígrafo resultante da exclusão da aresta associada



4.3 Inclusão do vértice v

Exigência: o vértice v não deve pertencer a V.

Grafo resultante: $G_1 + \{v\}$ definido por $V \cup \{v\}$ e E.

4.4 Exclusões do vértice v

Exigência: o vértice v deve pertencer a V e $n > 1$.

Grafo resultante: $G_1 - \{v\}$ definido por $V - \{v\}$ e $E - \{(v,u), \forall u \text{ adjacente a } v\}$.

A restrição $n > 1$ garante que, mesmo após a exclusão do vértice, a estrutura remanescente continue sendo um grafo.

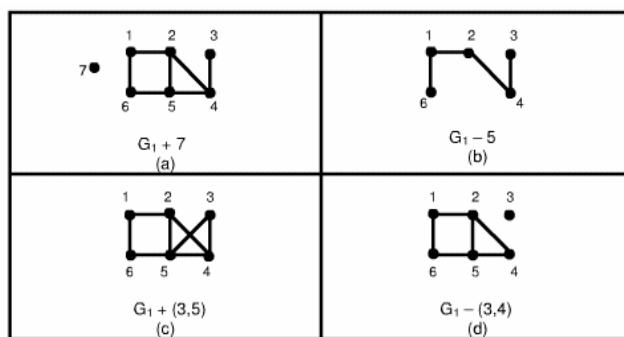


Figura 9. Exemplos de inclusão e exclusão de vértices e arestas.

4.5 Fusão dos vértices v e w

Exigência: os vértices v e w devem pertencer a V.

Grafo resultante: G^{vw} definido por $(V - \{v, w\} \cup \{vw\})$ e $((E - \{v, u\}, \forall u \text{ adjacente a } v) - \{(w, u) \mid u \text{ adjacente a } w\}) \cup \{(vw, u), \forall u \text{ adjacente a } v \text{ ou } w \text{ em } G\}$.

4.6 Explosão do vértice v

Exigência: o vértice v deve pertencer a V e $\text{grau}(v) > 0$.

Grafo resultante G^{*v} : Para obter o grafo deve-se quebrar o vértice v em $\text{grau}(v)$ pedaços de modo que as arestas que o têm como extremo também pertençam ao novo grafo, embora não sejam mais adjacentes.

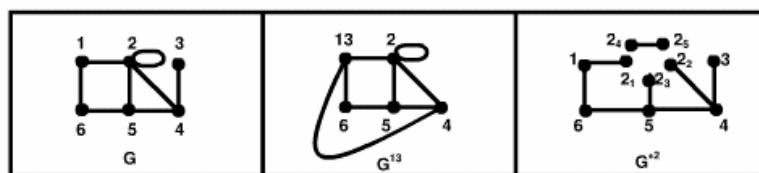
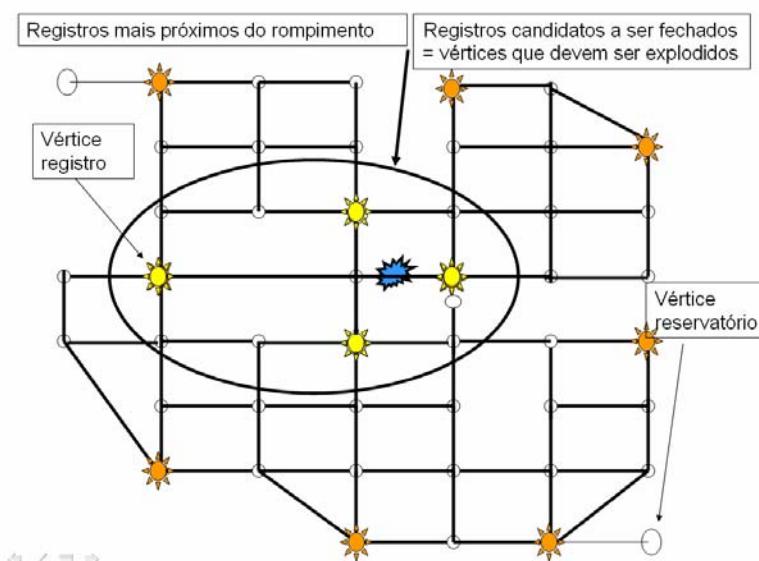


Figura 10. Exemplos de Fusão e Explosão de vértices.

4.6.1 Situação Problema II: Rede de água de uma região.

Fato: Houve um rompimento na rede de fornecimento de água em uma região da cidade.

Ação: Recompor o funcionamento da rede de água da região.



Fechar registro significa: Explodir vértices

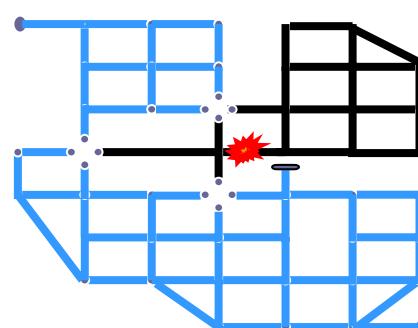


Figura 11. Área atendida x Área Atingida

5. GRAFOS EULERIANOS

Ciclo euleriano é aquele que possui todas as arestas do grafo exatamente uma vez.

Um **Grafo euleriano** é aquele que possui um ciclo euleriano, em outras palavras, um grafo é euleriano se pudermos desenhá-lo sem tirar o lápis do papel e voltar ao ponto de partida, sem passar mais de uma vez por nenhuma aresta.

5.1 As pontes de Königsberg

Na cidade de Königsberg (atual Kaliningrado), antiga capital da Prússia Oriental, o rio Pregel circunda uma ilha e separa a cidade em quatro zonas que, no séc. XVII estavam ligadas por sete pontes como na figura 12:

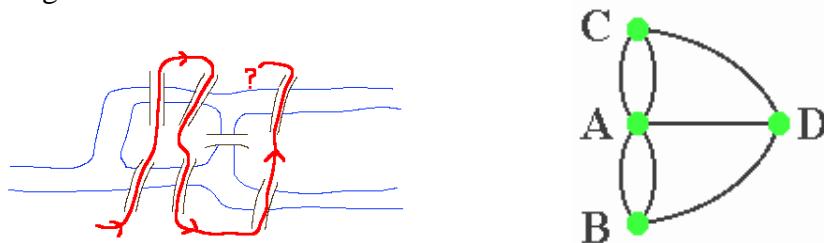


Figura 12.

Acredita-se que esse foi um dos primeiros exemplos da utilização de grafos. O problema consiste em partir de uma dessas regiões e determinar um trajeto pelas pontes segundo o qual se possa retornar à região de partida após atravessar cada ponte somente uma vez.

Este problema trata-se de um grafo euleriano, no qual não é possível fazer o percurso de iniciar em uma ponte, passar por todas as outras uma só vez e retornar ao ponto de origem, pois, um grafo só pode ser percorrido de tal maneira, se o diagrama tiver somente vértices de grau par, o que não acontece com o problema citado.

Teorema (Euler 1736): Um grafo conectado G é euleriano se e somente se o grau de cada vértice de G é par.

Demonstração: *Ida:* Seja G um grafo euleriano. Logo, ele contém um ciclo euleriano. Por cada ocorrência de vértice desse ciclo, existe uma aresta que chega nesse vértice e associada a ela, outra que sai desse vértice. Como toda aresta faz parte do ciclo, isto é, nenhuma aresta fica fora do ciclo, necessariamente o número de arestas por cada vértice é par.

Volta: Suponhamos que todos os vértices possuem grau par. Seja v_i um vértice do grafo. Tentemos, a partir de v_i , construir uma cadeia que não passa duas vezes pela mesma aresta, e até que não seja possível continuar. Como todos os vértices possuem um grau par, sempre será possível entrar e sair de um vértice. A única exceção é o vértice v_i onde a cadeia vai terminar. Se essa cadeia, que chamaremos C_1 , contém todas as arestas de G , temos um ciclo euleriano. Senão, retiramos de G todas as arestas que fazem parte de C_1 . No grafo resultante G' , todos os vértices também possuem grau par e necessariamente um deles faz parte de C_1 , senão o grafo não seria conexo.

Recomeçamos o mesmo processo com o grafo G' , partindo de um vértice comum com C_1 , obtendo assim um novo ciclo C_2 . A figura abaixo mostra que dois ciclos que têm um vértice

em comum podem formar um ciclo único: chegando ao vértice comum em um dos dois ciclos, continuamos o percurso no outro ciclo. Continuando esse processo, necessariamente obteremos um ciclo único que contém todas as arestas de G.

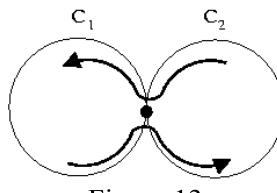


Figura 13.

6. GRAFOS HAMILTONIANOS

Um grafo G é **hamiltoniano** se existe um ciclo em G que contenha todos os seus vértices, sendo que cada vértice só aparece uma vez no ciclo. Este ciclo é chamado de **ciclo hamiltoniano**.

Sendo assim, um **grafo é hamiltoniano** se ele contiver um ciclo hamiltoniano.

A título de exemplo, considere os grafos G_1 e G_2 da figura 14. É fácil notar que G_1 contém o ciclo $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1)$ que é hamiltoniano. Logo, G_1 é um grafo hamiltoniano. O mesmo não acontece com G_2 .

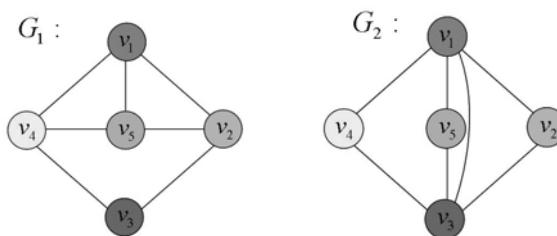


Figura 14.

O problema do cálculo do ciclo hamiltoniano, embora semelhante ao problema do cálculo do euleriano, é muito mais complexo, pois não são conhecidas as condições necessárias e suficientes para que um grafo genérico contenha um ciclo hamiltoniano nem tampouco métodos eficientes para construir tal ciclo.

Há diversos teoremas específicos para determinados tipos de grafos, fornecendo condições que são, na maior parte dos casos, suficientes – porém não necessárias.

Este problema está intimamente relacionado ao problema do caixeiro viajante, o qual consiste em encontrar um caminho que passe por todas as cidades uma única vez e retorne ao ponto de partida escolhendo para isso um caminho de custo mínimo.

6.1 Problema do Caixeiro Viajante

É um problema de grafo hamiltoniano, que consiste em passar por todos os vértices de um grafo, não repetindo nenhum, a fim de encontrar um caminho ótimo.

Suponha que a área de venda de um caixeiro viajante inclua várias cidades, as quais, aos pares, estão conectadas por rodovias. O trabalho do caixeiro requer que ele visite cada cidade

pessoalmente. Sob que condição seria possível para ele estabelecer uma viagem circular (que o leve ao ponto de partida) de forma que ele visite cada cidade exatamente uma vez?

Este problema pode ser modelado por um grafo $G(V, E)$, onde:

- $V = \{c \mid c \text{ é uma cidade}\}$
- $E = \{(c_1, c_2) \mid \text{há uma estrada que conecta as cidades } c_1 \text{ e } c_2, \text{ sendo que ela não passa por nenhuma outra cidade neste trajeto}\}.$

Modelado desta forma, a solução deste problema passa por verificar se o grafo G é hamiltoniano.

Como exemplo, considere o seguinte problema:

Um viajante deve visitar clientes instalados em sete cidades do estado de Minas Gerais - Brasil -.

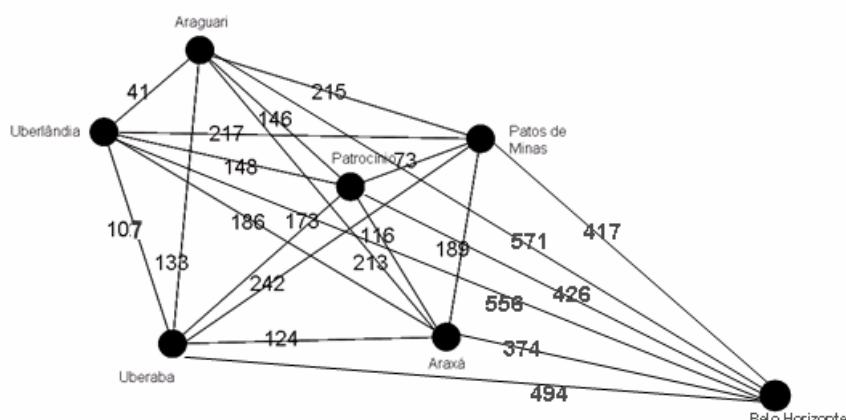
Procura-se determinar qual o percurso mais econômico tendo em atenção, exclusivamente, as distâncias quilométricas entre as cidades.

O estudo a seguir trata de um problema de grafos considerado complexo e de algoritmos que possam solucioná-lo. Neste sentido, são investigados o algoritmo dos mínimos sucessivos e o algoritmo da ordenação do peso das arestas.

Representa-se abaixo a respectiva rede de cidades e uma tabela das distâncias quilométricas.

	Araguari	Araxá	Patros de Minas	Patrocínio	Uberaba	Uberlândia	Belo Horizonte
Araguari	-----	213	215	146	133	41	571
Araxá	213	-----	189	116	124	186	374
Patros de Minas	215	189	-----	73	242	217	417
Patrocínio	146	116	73	-----	173	148	426
Uberaba	133	124	242	173	-----	107	494
Uberlândia	41	186	217	148	107	-----	556
Belo Horizonte	571	374	417	426	494	556	-----

Representação gráfica:



Estudamos dois algoritmos executáveis para resolução de problemas desta natureza.

Tarefa:

Considerar os dois algoritmos (Algoritmo dos Mínimos Sucessivos e Algoritmo por Ordenação dos Pesos das Arestas) para resolver PCVs, (PCV = Problema do Caixeiro Viajante), e aplique-os à situação do caixeiro viajante que tem de visitar as sete cidades mineiras, referidas no grafo completo e valorado (distâncias em quilômetros).

- As soluções que encontrou são boas?
- Seria fácil encontrar a solução ótima?
- Quanto tempo demoraria a encontrar a solução ótima por um método exaustivo? Compensaria?

6.2 ALGORITMO DOS MÍNIMOS SUCESSIVOS

Começa-se por escolher uma cidade para início do circuito. A partir dessa cidade, visita-se a mais próxima e assim sucessivamente, até completar o circuito; por vezes não é possível escolher a cidade mais próxima, quer por já ter sido visitada, quer por se fechar o circuito; nesse caso escolhe-se a mais próxima ainda não visitada; terminado o circuito somam-se os quilômetros percorridos. Repete-se este procedimento de forma a obter sete circuitos hamiltonianos, cada um dos quais com início numa das cidades.

O quadro obtido encontra-se representado a seguir.

Araguari	
Uberlândia	41
Uberaba	107
Araxá	124
Patrocínio	116
Patos de Minas	73
Belo Horizonte	417
Araguari	571
	1449

Patos de Minas	
Patrocínio	73
Araxá	116
Uberaba	124
Uberlândia	107
Araguari	41
Belo Horizonte	571
Patos de Minas	417
	1449

Uberaba	
Uberlândia	107
Araguari	41
Patrocínio	146
Patos de Minas	73
Araxá	189
Belo Horizonte	374
Uberaba	494
	1424

Uberlândia	
Araguari	41
Uberaba	133
Araxá	124
Patrocínio	116
Patos de Minas	73
Belo Horizonte	417
Uberlândia	556
	1460

Araxá	
Patrocínio	116
Patos de Minas	73
Araguari	215
Uberlândia	41
Uberaba	107
Belo Horizonte	494
Araxá	374
	1420

Patrocínio	
Patos de Minas	73
Araxá	189
Uberaba	124
Uberlândia	107
Araguari	41
Belo Horizonte	571
Patrocínio	426
	1531

Belo Horizonte	
Araxá	374
Patrocínio	116
Patos de Minas	73
Araguari	215
Uberlândia	41
Uberaba	107
Belo Horizonte	494
	1420

Note-se que esta solução se baseia numa escolha sucessiva da melhor etapa, o que pode não conduzir à melhor solução global. No entanto, o resultado é aceitável se tivermos em conta outros critérios, nomeadamente a economia de tempo.

De fato, o número de circuitos hamiltonianos possíveis é determinado pela fórmula

$$\frac{(n-1)!}{2}, \text{ o que, para o caso vertente, nos conduz a } \frac{(7-1)!}{2} = \frac{720}{2} = 360 \text{ hipóteses.}$$

Ora, testar 360 circuitos "à unha" não é tarefa recomendável.

A análise do quadro nos leva a concluir que existem dois melhores circuitos (mais econômicos). São os que se iniciam em:

- Araxá e segue por Patrocínio, Patos de Minas, Araguari Uberlândia, Uberaba, Belo Horizonte e Araxá, voltando à Araxá, num total de 1420 Km.
- Belo Horizonte e segue por Araxá, Patrocínio. Patos de Minas, Araguari, Uberlândia e Uberaba, voltando a Belo Horizonte, num total de **1420 Km.**

Observe que o ciclo é o mesmo nos dois casos.

6.3 ALGORITMO DA ORDENAÇÃO DO PESO DAS ARESTAS

Ordenam-se todas as arestas por ordem crescente do respectivo peso (distância).

Em seguida, tenta-se encontrar um circuito hamiltoniano que utilize as arestas de menor peso, tendo em conta o seguinte:

- (1) Nunca se toma a terceira aresta incidente num mesmo vértice e (2) nunca se fecha o ciclo enquanto houver vértices não visitados.

As 5 primeiras arestas não apresentam qualquer problema. Mas, as 11 seguintes não podem ser utilizadas por não verificarem as condições enunciadas.

Uberlândia	Araguari	41
Patrocínio	Patos de Minas	73
Uberlândia	Uberaba	107
Patrocínio	Araxá	116
Uberaba	Araxá	124
Uberaba	Araguari	133
Patrocínio	Araguari	146
Patrocínio	Uberlândia	148
Patrocínio	Uberaba	173
Uberlândia	Araxá	186
Patos de Minas	Araxá	189
Araguari	Araxá	213
Araguari	Patos de Minas	215
Uberlândia	Patos de Minas	217
Uberaba	Patos de Minas	242
Belo Horizonte	Araxá	374
Belo Horizonte	Patos de Minas	417
Belo Horizonte	Patrocínio	426
Belo Horizonte	Uberaba	494
Belo Horizonte	Uberlândia	558
Belo Horizonte	Araguari	571

Uberlândia	Araguari	41
Patrocínio	Patos de Minas	73
Uberlândia	Uberaba	107
Patrocínio	Araxá	116
Uberaba	Araxá	124
Belo Horizonte	Patos de Minas	417
Belo Horizonte	Araguari	571
		1449

Continuando o processo chega-se à solução acima indicada, que nos conduz a um circuito com um comprimento total de 1449 km. **Logo, pior que a anterior.**

Conclusões: Os algoritmos podem se mostrar eficientes para problemas complexos. Além disto, eles permitem trabalhar com problemas matematicamente complexos sem necessitar conhecimento prévio sobre o mesmo.

A melhor solução foi encontrada pelo Algoritmo dos Mínimos Sucessivos, que nos permitiu determinar o melhor percurso para o caixeiro viajante. Sendo considerada ótima, pois, para ter a certeza desta afirmação teríamos de encontrar todas as soluções pelo Método Exaustivo, o que implica na análise de 360 percursos, tarefa pouco aconselhável.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A teoria dos grafos é essencial para resolução de problemas, desde os mais simples aos elaborados. São problemas que justificam atenção devido ao fato de aparecerem diversas aplicações e serem considerados difícil solução. Grafos são uma inesgotável fonte de problemas com enunciado simples, mas que escondem, muitas vezes, uma sofisticada estrutura matemática.

8. BIBLIOGRAFIA

- [1] BARROSO, M. M. A., *Operações Elementares em Grafos e Aplicações*, VII SEMAT, Uberlândia, 2007.
- [2] BOAVENTURA NETTO, P. O., *Teoria e Modelos de Grafos*, E. Blucher, São Paulo, 1979.
- [3] LUCCHESI, C. L., *Introdução à Teoria dos Grafos*, IMPA-CNPq, Rio de Janeiro, 1979.
- [4] OYNSTEIN O., *Graphs and Their Uses*, The Mathematical Association of America, Editorial Committee, England, 1990.
- [5] www.guiaquatorodas.com.br

