Ćwiczenia IV
Droga do chaosu w równaniu Duffinga

Jakub Tworzydło,
Stanisław Żukowski

Instytut Fizyki Teoretycznej

Plan

1. Rozwiązywanie równań ODE

2. Przejście do chaosu w "odwróconym wahadle"

Plan

1. Rozwiązywanie równań ODE

2. Przejście do chaosu w “odwróconym wahadle”

Zadanie 0

Zapoznać się z metodą całkowania `sc.integrate.solve_ivp` z modułu SciPy. Warto skopiować i uruchomić program, wykreślający oryginalny atraktor Lorentza, opisany na blogu:

https://www.johndcook.com/blog/2020/01/26/lorenz-system/

W razie wątpliwości warto też sprawdzić dokumentację:

https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.integrate.solve_ivp.html

Zadanie 1

Rozwiązać układ równań różniczkowych (ang. ODE) opisujących ewolucję cząstki w potencjale z podwójnym minimum, siłą wymuszającą i tłumieniem (tzw. równanie Duffinga)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = bx - ax^3 - cv + f\cos(\omega t) \end{cases}$$

przy ustalonych następujących parametrach:
$a = 1$, $b = 1$, $c = 0.2$, $\omega/2\pi = 0.213$.

Przy pomocy bibliotek `matplotlib` wykreślić
a) zależność $x(t)$ oraz $v(t)$
b) ewolucję układu w przestrzeni fazowej z warunkiem początkowym $x(t=0) = 0, v(t=0) = 0.15$ i przy amplitudzie pobudzania $f = 0.2$.

Na wykresach proszę opisać osie, w tytule umieścić parametr f, dodać legendę linii w razie potrzeby. Zaznaczyć położenie równowagi.

Zadanie 2

W tym zadaniu wykreślamy portrety fazowe trajektorii $(x(t), v(t))$ otrzymywane w zagadnieniu Duffinga, ale tylko dla odpowiednio długich czasów ewolucji (np. $t > 200$). Wybrać warunki początkowe w pobliżu położenia równowagi.

Należy poeskperymentować z wartością f tak, aby znaleźć charakterystyczne rozwiązania oscylacyjne wokół **jednego** położenia równowagi:

- z pojedynczym okresem
- z podwójnym okresem
- a nawet z poczwórnym okresem

Poszukać rozwiązań z "przełączaniem" między punktami równowagi:

- zaproponować "graniczną" najmniejszą wartość f, dla której pojawia się już chaos.

Wyniki zadania ilustrować wykresami w przestrzeni fazowej zachowania układu w długim czasie (atraktor).

Zadanie 3

Wykonać wykres (pikselowy) przecięcia Poincare dla możliwie długiej ewolucji układu Duffinga w obszarze chaotycznym.

Zaznaczać punkty (x_n, v_n) otrzymane w dyskretnych chwilach czasu, odpowiadających pełnemu okresowi siły pobudzającej $t_n = \frac{2\pi}{\omega} n$ (dla naturalnego n). Powstaje w ten sposób portret dziwnego atraktora.

Przykładowe parametry: `c=0.07, f=0.3`.

Wskazówki

Wykres pikselowy. Najprostsza metoda zaznaczania “pikseli”

```
plt.scatter(xsol, vsol,
            s=3, c='b', lw=0,
            marker='o', label='punkty')
```

gdzie `xsol, vsol` są tablicami rozwiązań.
Parametry: `s=3` to `size`, `c='b'` to `color`, `lw=0` to `linewidth`.

Tworzenie **sekwencji obrazków**

```
for f in ftablica:
   # ... obliczenia z parametrem f
   s = '%.3f' % f
   plt.savefig('symulacja_'+s.zfill(7)+'.png')
   plt.clf()
```

Animacja z linii poleceń (systemy Linux)

```
convert -delay 20 symulacja_*.png film.gif
```