

Symulacje komputerowe w fizyce: Chaos – wprowadzenie.

Jakub Tworzydło,
Stanisław Żukowski

Instytut Fizyki Teoretycznej

1 Chaos

2 Układy dynamiczne

3 Atraktory

Plan

1 Chaos

2 Układy dynamiczne

3 Atraktory

Plan

1 Chaos

2 Układy dynamiczne

3 Atraktory

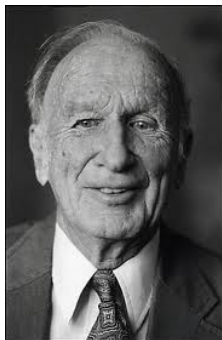
Plan

1 Chaos

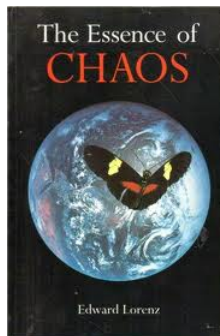
2 Układy dynamiczne

3 Atraktory

Edward Norton Lorenz 1917–2008



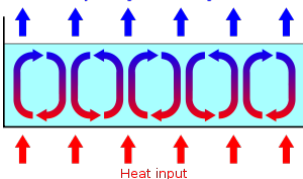
- "ojciec" dynamiki chaotycznej
- badał uproszczony model atmosferyczny
- zaproponował termin "efekt motyla"



Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil set off a Tornado in Texas? (referat wygłoszony w 1972)

“Deterministyczny przepływ nie-periodyczny” (1963)

Fluid cools by losing heat through the surface

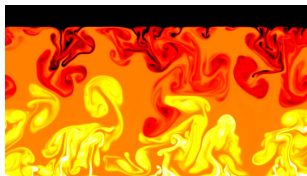


- model konwekcji Rayleigha-Benarda
- fizyczne parametry:
różnica temperatur, ciśnienie, rozszerzalność cieplna,
przewodnictwo cieplne, lepkość



- Lorenz zidentyfikował czułość na warunki początkowe
"... he entered the decimal .506 instead of entering the full .506127"

“Deterministyczny przepływ nie-periodyczny” (1963)



- model konwekcji Rayleigha-Benarda
- fizyczne parametry:
różnica temperatur, ciśnienie, rozszerzalność cieplna,
przewodnictwo cieplne, lepkość



- Lorenz zidentyfikował czułość na warunki początkowe
"... he entered the decimal .506 instead of entering the full .506127"

- układ równań nieliniowych, autonomicznych

$$\dot{X} = \sigma(Y - X)$$

$$\dot{Y} = X(\rho - Z) - Y$$

$$\dot{Z} = XY - \beta Z$$

$\sigma = 10$ (liczba Prandtla)

$\beta = 8/3$

ρ — zmieniane (liczba Rayleigha)

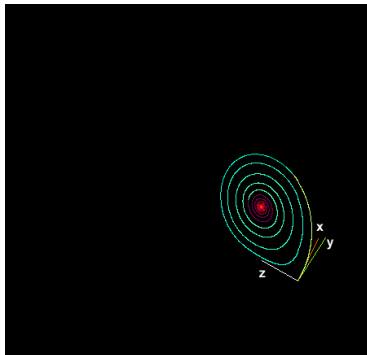
X — proporcjonalne do prędkości obrotowej płynu

Y — różnica temperatury wznoszącego się i opadającego płynu

Z — odstępstwo od pionowego, liniowego rozkładu temp.

Atraktor Lorenza

- układ równań nieliniowych, autonomicznych
- ani cykl graniczny, ani stan stacjonarny
- określony jako dziwny atraktor (dowód w 2001 r.)



$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= X(\rho - Z) - Y \\ \dot{Z} &= XY - \beta Z\end{aligned}$$

$\sigma = 10$ (liczba Prandtla),

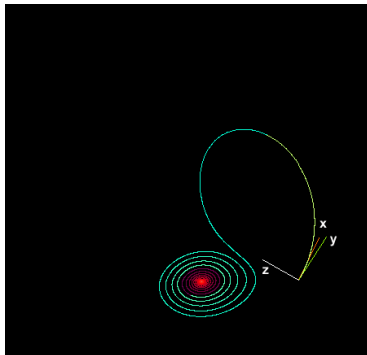
$\beta = 8/3$,

punkty stabilne C, C' dla $\rho < 13$

$$C, C' = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

Atraktor Lorenza

- układ równań nieliniowych, autonomicznych
- ani cykl graniczny, ani stan stacjonarny
- określony jako dziwny atraktor (dowód w 2001 r.)



$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= X(\rho - Z) - Y \\ \dot{Z} &= XY - \beta Z\end{aligned}$$

$\sigma = 10$ (liczba Prandtla),

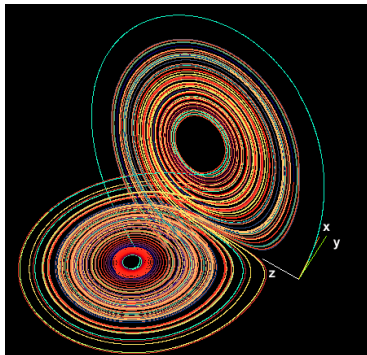
$\beta = 8/3$,

punkty stabilne C, C' dla $\rho < 13$

$$C, C' = (\pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1)$$

Atraktor Lorenza

- układ równań nieliniowych, autonomicznych
- ani cykl graniczny, ani stan stacjonarny
- określony jako dziwny atraktor (dowód w 2001 r.)



$$\begin{aligned}\dot{X} &= \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} &= X(\rho - Z) - Y \\ \dot{Z} &= XY - \beta Z\end{aligned}$$

$\sigma = 10$ (liczba Prandtla),

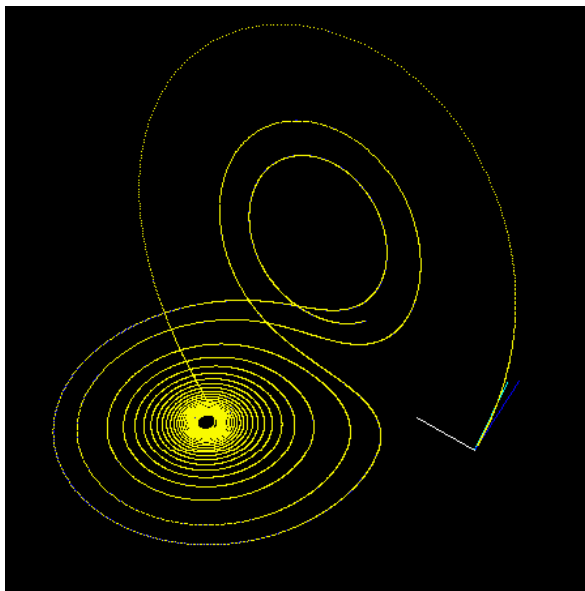
$\beta = 8/3$,

Lorenz znalazł chaos dla $\rho = 28$

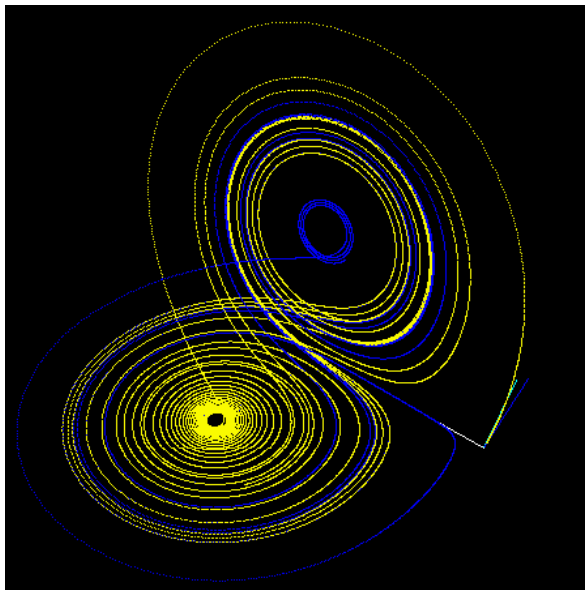
“przeskoki” między C i C'

$$C, C' = (\pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \pm\sqrt{\beta(\rho - 1)}, \rho - 1)$$

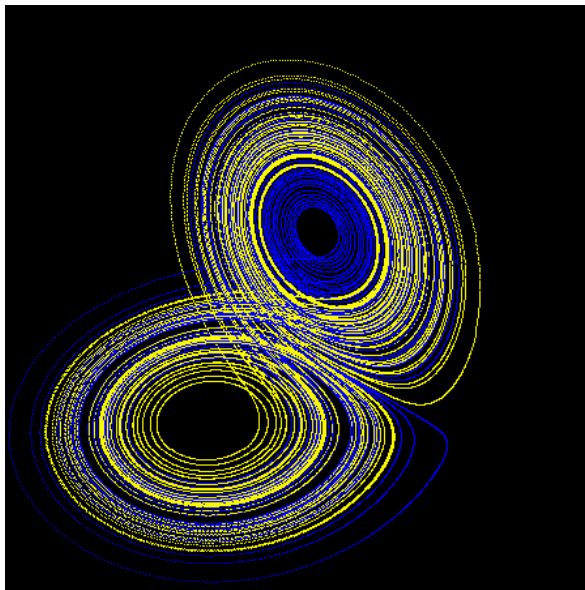
Ilustracja czułości na warunki początkowe $\propto 10^{-5}$



Ilustracja czułości na warunki początkowe $\propto 10^{-5}$



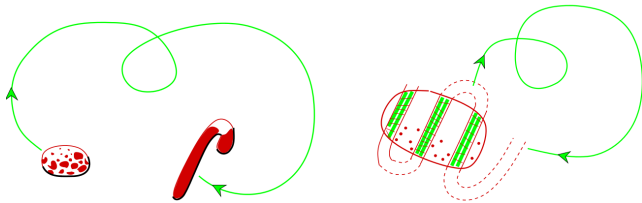
Ilustracja czułości na warunki początkowe $\propto 10^{-5}$



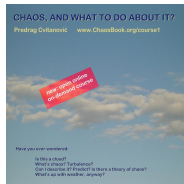
Teoria układów chaotycznych

Podstawowe wymagania do powstania CHAOSU:

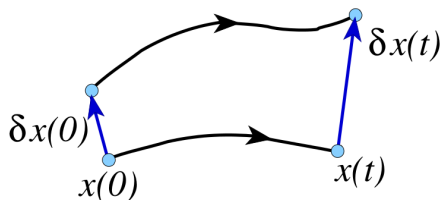
- wykładnicza czułość na warunki początkowe
- ograniczona przestrzeń fazowa, własność “mieszania”



→ podręcznik Cvitanovica



Wykładnik i czas Lyapunowa



Ilościowy opis czułości na zaburzenie warunków początkowych:

$$\delta \vec{x}(t) \approx e^{\lambda t} |\delta \vec{x}(0)|$$

λ – wykładnik Lyapunowa

Dynamika przewidywalna do czasu Lyapunowa:

$$T \approx -\frac{1}{\lambda} \ln |\delta x / L|$$

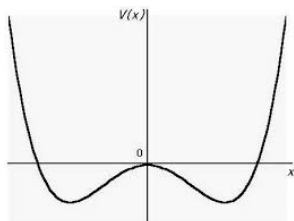
ciekawostka wykł. Lyapunowa układu słonecznego: $\lambda^{-1} \approx 50My$

Równanie Duffinga

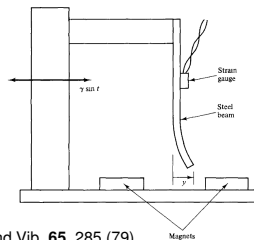
Ilustruje w najprostszy sposób “drogę do chaosu”

$$\ddot{x} = -\gamma\dot{x} + bx - ax^3 + f_0 \cos(\omega t)$$

- pojedyncza cząstka w potencjale podwójnej studni
- z periodyczną siłą pobudzającą
- z tłumieniem

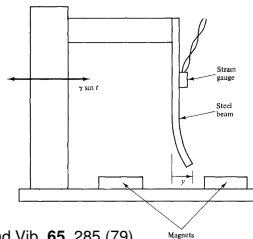


Eksperyment Holmesa i Moona

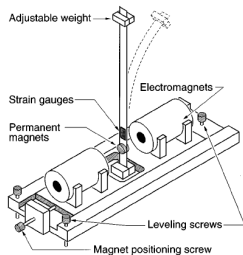


J. Sound Vib. **65**, 285 (79)

Eksperyment Holmesa i Moona

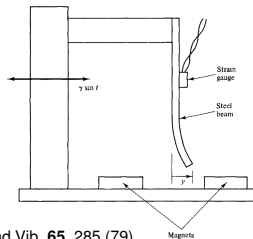


J. Sound Vib. **65**, 285 (79)

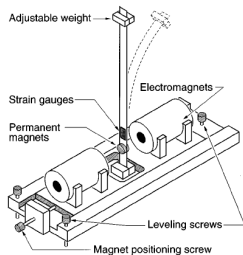
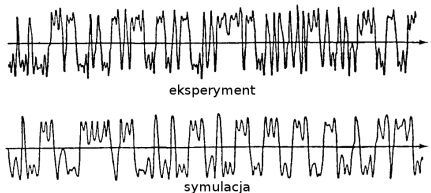


Am. J. Phys. **65**, 841 (97)

Eksperyment Holmesa i Moona

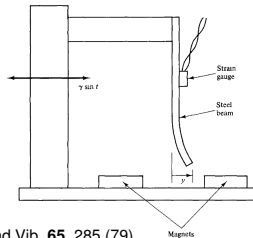


J. Sound Vib. **65**, 285 (79)

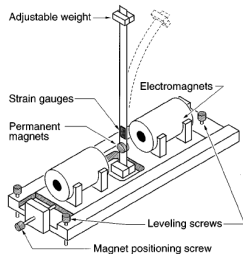


Am. J. Phys. **65**, 841 (97)

Eksperyment Holmesa i Moona

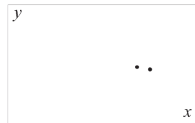
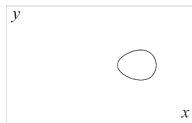


J. Sound Vib. **65**, 285 (79)

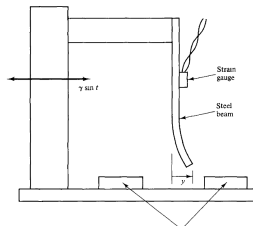


Am. J. Phys. **65**, 841 (97)

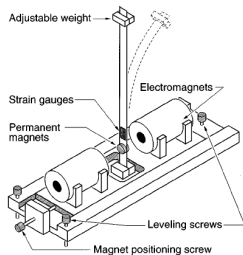
Obraz w przestrzeni fazowej ($x, y = \dot{x}$)



Eksperyment Holmesa i Moona

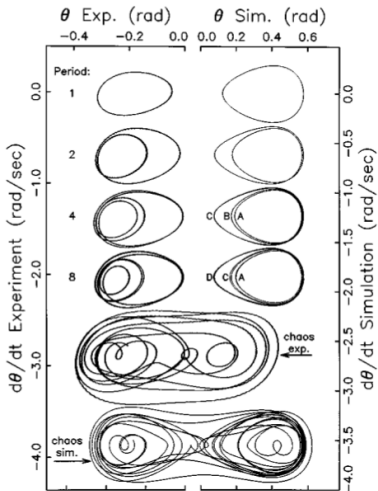


J. Sound Vib. **65**, 285 (79)



Am. J. Phys. **65**, 841 (97)

Porównanie z doświadczeniem



Plan

1 Chaos

2 Układy dynamiczne

3 Atraktory

Układ AUTONOMICZNY:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \quad \text{gdzie } \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N$$

N – wymiar **przestrzeni fazowej**.

JEDNOZNACZNOŚĆ:

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t = 0)$ wyznacza pojedynczą trajektorię w p. fazowej

Układ AUTONOMICZNY:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{G}(\mathbf{x}(t)), \quad \text{gdzie } \mathbf{x} \in \mathcal{R}^N$$

N – wymiar **przestrzeni fazowej**.

JEDNOZNACZNOŚĆ:

$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t = 0)$ wyznacza pojedynczą trajektorię w p. fazowej

FAKT: $N \geq 3$ wystarcza, aby możliwy był chaos !!!

R-nie Duffinga w postaci autonomicznej

Oscylator nieliniowy z tłumieniem i wymuszeniem:

$$\ddot{x} = -c\dot{x} + bx - ax^3 + f \cos(\omega t)$$

można przepisać dla $\mathbf{X} = (x_1, x_2, x_3) = (x, \dot{x}, \omega t)$ w postaci

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -cx_2 + bx_1 - ax_1^3 + f \cos(x_3) \\ \dot{x}_3 = \omega \end{cases}$$

pobudzenie periodyczne

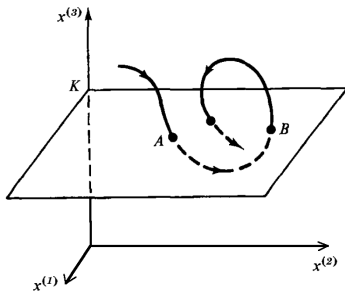
→ 1 wymiarowy ukł. mechaniczny
wystarcza do chaosu (nadal $N = 3$)

Przekrój Poincare

pozwała redukować N -wym układ dynamiczny z czasem ciągłym do $N - 1$ -wym dyskretnej mapy

Przekrój Poincare

pozwała redukować N -wym układ dynamiczny z czasem ciągłym do $N - 1$ -wym dyskretnej mapy



MAPA

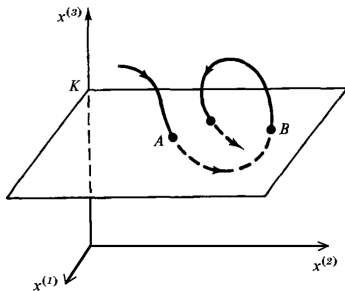
$$\mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n)$$

JEDNOZNACZNOŚĆ

$$A \rightarrow B \text{ oraz } B \rightarrow A$$

Przekrój Poincare

pozwala redukować N -wym układ dynamiczny z czasem ciągłym do $N - 1$ -wym dyskretnej mapy



MAPA

$$\mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n)$$

JEDNOZNACZNOŚĆ

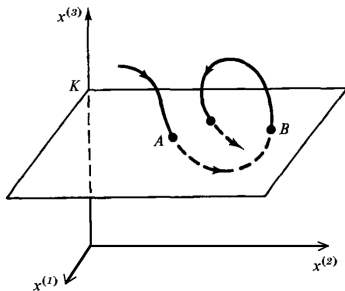
$$A \rightarrow B \text{ oraz } B \rightarrow A$$

FAKT: chaos może powstać dla odwracalnej 2-wymiarowej mapy M

Cięcie Poincare

Przekrój Poincare

pozwala redukować N -wym układ dynamiczny z czasem ciągłym do $N - 1$ -wym dyskretnej mapy



MAPA

$$\mathbf{x}_{n+1} = M(\mathbf{x}_n)$$

JEDNOZNACZNOŚĆ

$$A \rightarrow B \text{ oraz } B \rightarrow A$$

FAKT: chaos może powstać dla odwracalnej 2-wymiarowej mapy M
czasowy przekrój Poincare: $x^{(3)} = 0 \pmod{2\pi} \rightarrow x_n^{(3)} = \omega(t_0 + nT)$

Plan

1 Chaos

2 Układy dynamiczne

3 Atraktory

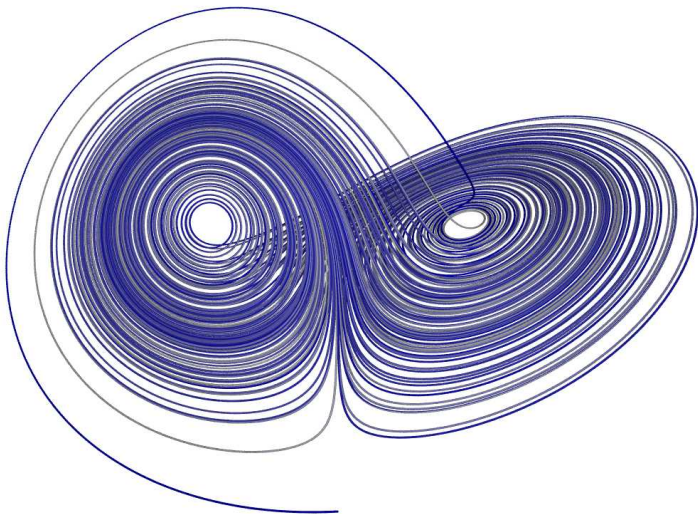
Atraktor Duffinga

Cięcie Poincare:

punkty $(x(t_n), \dot{x}(t_n))$ w chwilach $T_n = n\frac{2\pi}{\omega}$



Atraktor Lorenza



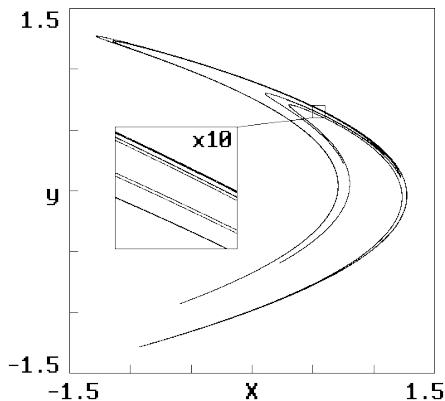
Atraktor mapy Henona

Układ dynamiczny:

2 wymiarowa mapa odwracalna, minimalna nieliniowość

$$x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2$$

$$y_{n+1} = bx_n$$



Inne przykłady (eksperymentalnych) układów chaotycznych

- układy elektroniczne (Chua's circuit)
- lasery (rezonansowy jedno-modowy)
- złącza nadprzewodzące (złącza Josephsona)
- reakcje chemiczne (reakcja Bielousowa–Żabotyńskiego)
- kapiący kran; różne przepływy np. płynu, plazmy
- cykle pracy serca