Symulacje komputerowe w fizyce: Fraktale

Jakub Tworzydło

Instytut Fizyki Teoretycznej

29 i 30/11/2022 Pasteura, Warszawa

Plan

1. Geometria fraktali
2. Fraktale naturalne (fizyczne)
3. Proste otrzymywanie fraktali

Plan

1. Geometria fraktali
2. Fraktale naturalne (fizyczne)
3. Proste otrzymywanie fraktali

Plan

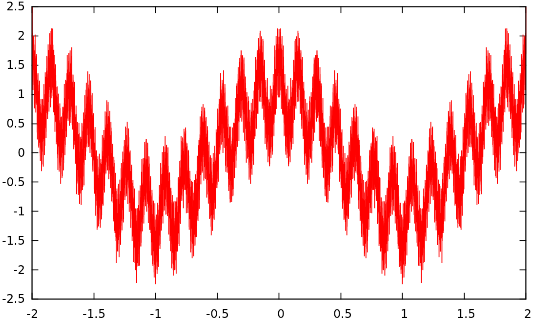
1. Geometria fraktali
2. Fraktale naturalne (fizyczne)
3. Proste otrzymywanie fraktali

Plan

1. Geometria fraktali
2. Fraktale naturalne (fizyczne)
3. Proste otrzymywanie fraktali

Pierwszy przykład

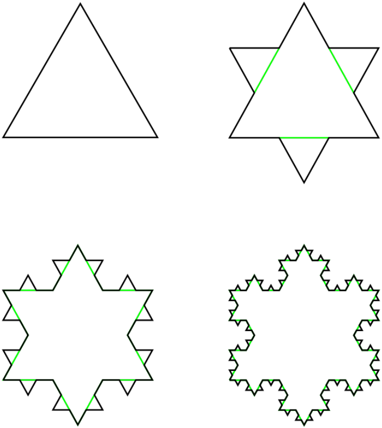
- Weierstrass podał w 1872r przykład "patologicznej" funkcji
- łac. *fractus* złamany, ułamkowy



$W(x) = \sum_n a^n \cos(b^n \pi x)$ np. dla $a = 3/5,\ b = 13$

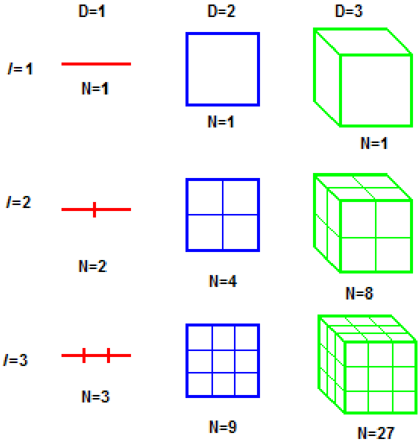
Konstrukcja: krzywa Kocha

Uproszczona recepta: obiekt geometryczny konstruowany rekurencyjnie z prostego elementu (Koch 1904).



Wymiar Euklidesowy

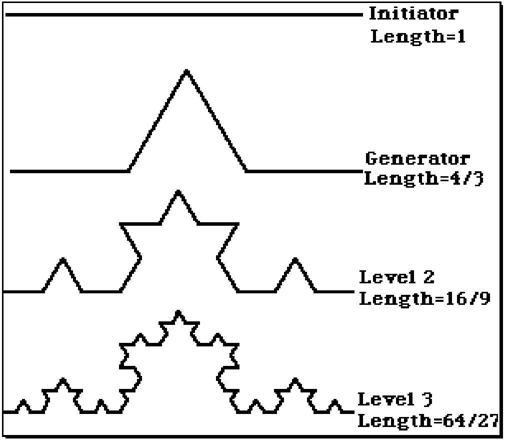
- zmniejsz jednostkowy obiekt w stosunku $1/p$
- N – liczba samo-podobnych obiektów pokrywających oryginał
- obliczamy $N = p^D$ czyli $D = \log N / \log p$



Ułamkowy (uogólniony) wymiar

samo-podobieństwo krzywej Kocha:

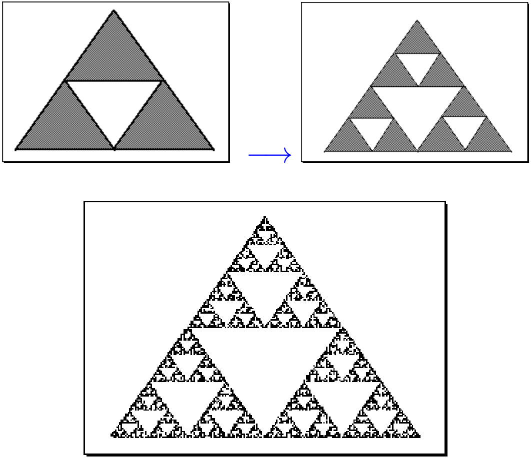
dla $N = 4$, $1/p = 1/3$ mamy $N = p^D \Rightarrow D = \log 4/\log 3 \approx 1.26$



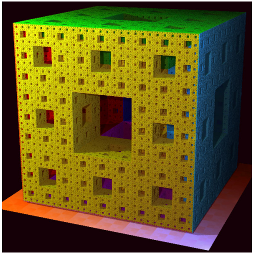
Wymiar samo-podobieństwa

Trójkąt Sierpińskiego ("kanoniczny fraktal" 1915):

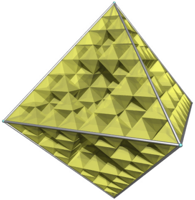
$N = p^D$ dla $N = 3$, $p = 2 \Rightarrow D = \log_2 3 \approx 1.585$



Więcej przykładów figur samo-podobnych

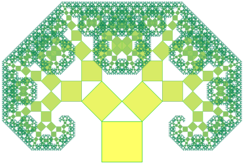


gąbka Mengera



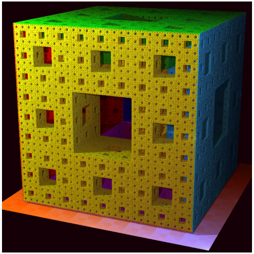
fraktal oktaedryczny

dywan Sierpińskiego (ciasteczka)

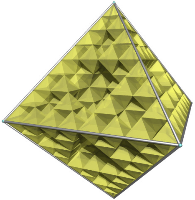


drzewo Pitagorasa

Więcej przykładów figur samo-podobnych

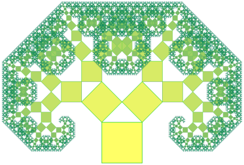


gąbka Mengera $\log 20/\log 3 \approx 2.73$



fraktal oktaedryczny $\log 6/\log 2 \approx 2.58$

dywan Sierpińskiego (ciasteczka)
$\log 8/\log 3 \approx 1.89$



drzewo Pitagorasa $\log 2/\log(2/\sqrt{2}) = 2$

Plan

1. Geometria fraktali
2. Fraktale naturalne (fizyczne)
3. Proste otrzymywanie fraktali

Naturalne samo-podobieństwo

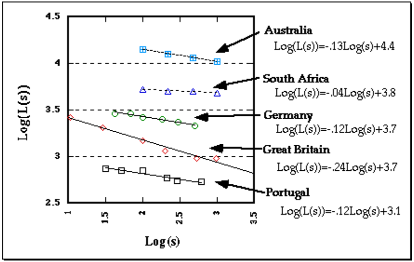
How Long Is the Coast of Britain? B. Mandelbrot Science 1967

How Long Is the Coast of Britain? B. Mandelbrot Science 1967

- użyj linijki długości s
- wykreśl długość L_{tot} w funkcji s w skali log-log
- skoro $L \propto (1/s)^{D_f - 1}$ to $\log L \propto -(D_f - 1)\log(s)$

$s = 200\,\mathrm{km}$

$s = 50\,\mathrm{km}$

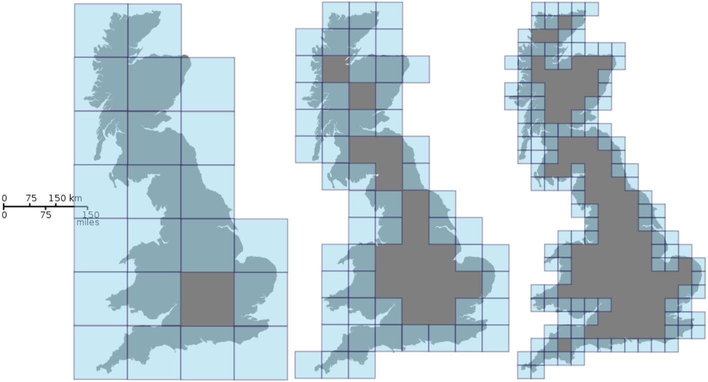


Wielka Brytania $D_f = 1.24$, Afryka Południowa $D_f = 1.04$, Norwegia $D_f = 1.52$

Wymiar pudełkowy

Algorytm

- podziel obraz rozmiaru $L \times L$ na $p \times p$ komórek $p = 2, 4, 8, \ldots$
- wykonaj pętlę po punktach należących do badanego obiektu: przypisz wartość TRUE komórkom, które zawierają punkt



Fraktal naturalny

Algorytm

- podziel obraz rozmiaru $L \times L$ na $p \times p$ komórek $p = 2, 4, 8, \ldots$
- wykonaj pętlę po punktach należących do badanego obiektu: przypisz wartość TRUE komórkom, które zawierają punkt
- oblicz:
  $N(p)$ – liczbę wypełnionych komórek
- wtedy $D_f \approx \dfrac{\log N(p)}{\log p}$ dla $p \gg 1$
- wykreśl $N(p)$ w funkcji p w skali log-log: dopasuj prostą, nachylenie wynosi D_f
- ustal zakres skalowania

Fraktal naturalny

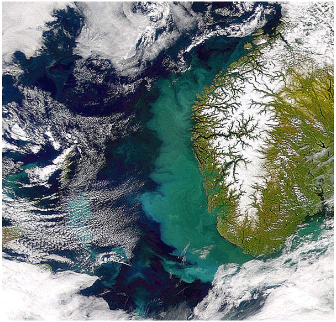
Algorytm

- podziel obraz rozmiaru $L \times L$ na $p \times p$ komórek $p = 2, 4, 8, \ldots$
- wykonaj pętlę po punktach należących do badanego obiektu: przypisz wartość TRUE komórkom, które zawierają punkt
- oblicz:
  $N(p)$ – liczbę wypełnionych komórek
- wtedy $D_f \approx \dfrac{\log N(p)}{\log p}$ dla $p \gg 1$
- wykreśl $N(p)$ w funkcji p w skali log-log: dopasuj prostą, nachylenie wynosi D_f
- ustal zakres skalowania

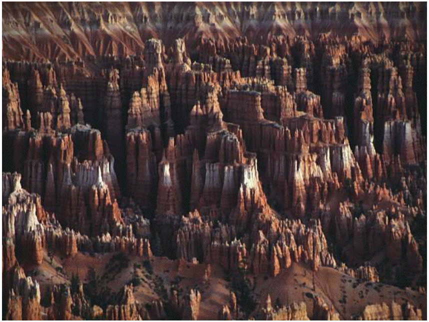
Wskazówki praktyczne: $*$ przynajmniej 2-dekady, $*$ testowanie przy pomocy syntetycznych fraktali (IFS), $*$ rozważ zakres stosowalności górny i dolny

Fraktale naturalne: przykłady

"Clouds are not spheres, mountains are not cones, coastlines are not circles, and bark is not smooth, nor does lightning travel in a straight line." B. Mandelbrot "The Fractal Geometry of Nature", 1982.

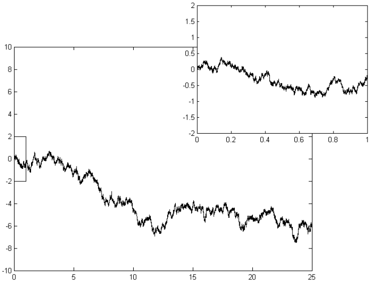


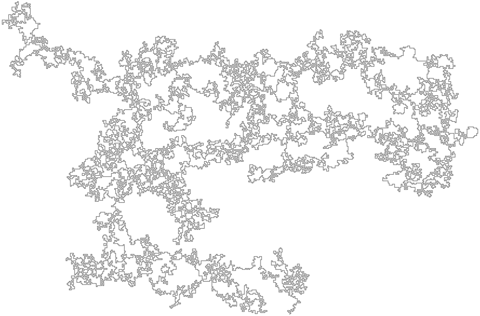
Sieci rzeczne, fiordy



Góry: linie poziomic

Fraktale fizyczne: przykłady

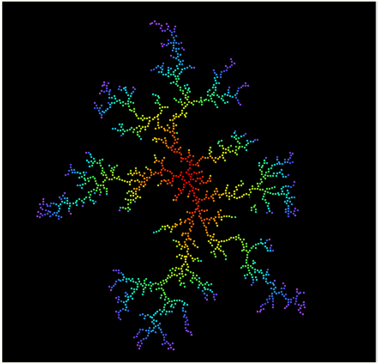




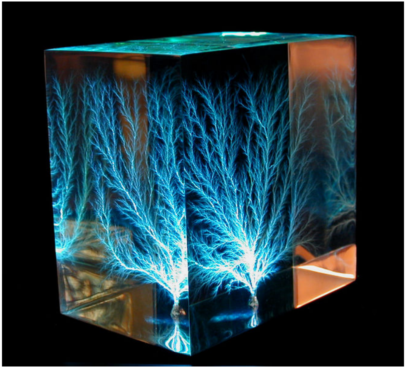
Proces błądzenia przypadkowego w funkcji czasu (ruch Brawnowski): $D_f = 2 - \frac{1}{2}$

Polimer: błądzenie przypadkowe w 2D bez samoprzecięć $D_f \approx 1.55$

Fraktale fizyczne: przykłady



Diffusion limitted aggregation (DLA)
(dyfuzyjnie ograniczona agregacja) –> ...
$D_f = 1.7$



Obrazy Lichtenberga:
rozgałęzienia elektrycznego wyładowania
$D_f = 2.5$ takie jak 3D DLA

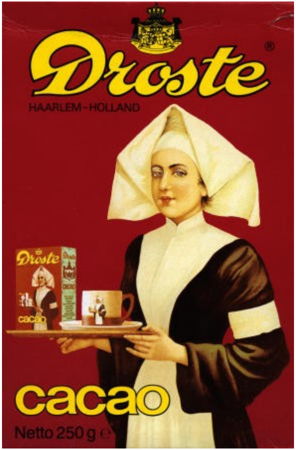
Plan

1 Geometria fraktali

2 Fraktale naturalne (fizyczne)

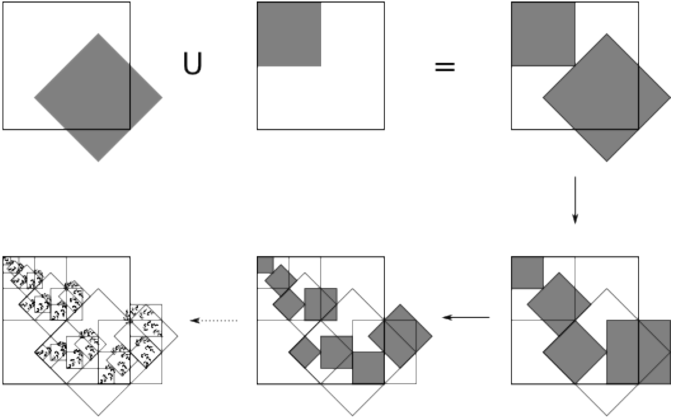
3 Proste otrzymywanie fraktali

Samopodobieństwo: efekt Droste (1904)



Ogólniejszy generator fraktali

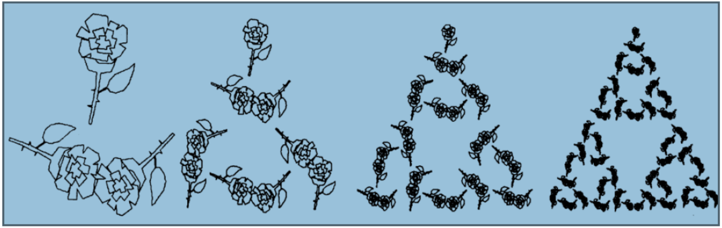
Diagram przedstawiający konstrukcję
Iterated Function System (IFS) dla dwu funkcji afinicznych



trzy iteracje i... figura graniczna.

IFS dla trójkąta Sierpińskiego

Trzy przekształcenia (wielokrotne kopiowanie):
skalowanie $\alpha = 1/2$ i przesunięcia



... trójkąt Sierpińskiego zbiorem niezmienniczym.

Ogólne sformułowanie IFS

- zbiór przekształceń zwężających $\{f_i : X \to X | i = 1, \ldots, n\}$
- obraz zbioru A dany operatorem Hutchinsona $\mathcal{H}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$
- Tw. Hutchinsona: istnieje zbiór niezmienniczy $\mathcal{S}$ taki, że $\mathcal{S} = \mathcal{H}(\mathcal{S})$
- oraz $\mathcal{S} = \lim_{m\to\infty} \mathcal{H}^m(\mathcal{A})$ dla zwartego $\mathcal{A}$
- Tw. wymiar D jest dany przez rozwiązanie r-nia: $\sum_i \alpha_i^D = 1$ (dla czynników zwężających α_i)

Ogólne sformułowanie IFS

- zbiór przekształceń zwężających $\{f_i : X \to X | i = 1, \ldots, n\}$
- obraz zbioru A dany operatorem Hutchinsona $\mathcal{H}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$
- Tw. Hutchinsona: istnieje zbiór niezmienniczy $\mathcal{S}$ taki, że $\mathcal{S} = \mathcal{H}(\mathcal{S})$
- oraz $\mathcal{S} = \lim_{m\to\infty} \mathcal{H}^m(\mathcal{A})$ dla zwartego $\mathcal{A}$
- Tw. wymiar D jest dany przez rozwiązanie r-nia: $\sum_i \alpha_i^D = 1$ (dla czynników zwężających α_i)

IFS dla trójkąta Sierpińskiego:
$\sum_i \alpha_i^D = 3(1/2)^D = 1$, co daje znane $D = \log(\frac{1}{3})/\log(\frac{1}{2}) = \log_2 3$

Ogólne sformułowanie IFS

- zbiór przekształceń zwężających $\{f_i : X \to X | i = 1, \dots, n\}$
- obraz zbioru A dany operatorem Hutchinsona $\mathcal{H}(A) = \bigcup_{i=1}^{n} f_i(A)$
- Tw. Hutchinsona: istnieje zbiór niezmienniczy $\mathcal{S}$ taki, że $\mathcal{S} = \mathcal{H}(\mathcal{S})$
- oraz $\mathcal{S} = \lim_{m\to\infty} \mathcal{H}^m(\mathcal{A})$ dla zwartego $\mathcal{A}$
- Tw. wymiar D jest dany przez rozwiązanie r-nia: $\sum_i \alpha_i^D = 1$ (dla czynników zwężających α_i)

IFS dla trójkąta Sierpińskiego:
$\sum_i \alpha_i^D = 3(1/2)^D = 1$, co daje znane $D = \log(\frac{1}{3})/\log(\frac{1}{2}) = \log_2 3$

metoda ruletki:
weź dowolny punkt startowy, wykonuj przekształcenie i-te z prawdopodobieństwem p_i, zaznacz trajektorię