Samo–organizująca się krytyczność

Jakub Tworzydło

Instytut Fizyki Teoretycznej (FUW)

20 i 21/12/2022 Pasteura, Warszawa

Plan

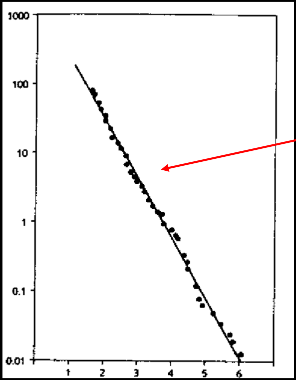
Plan

Plan

Trzęsienia ziemi: prawo Gutenberga-Richtera

$$N \sim E^{-a}$$

Liczba trzęsień rocznie



Siła trzęsienia (proporcjonalna do log. energii)

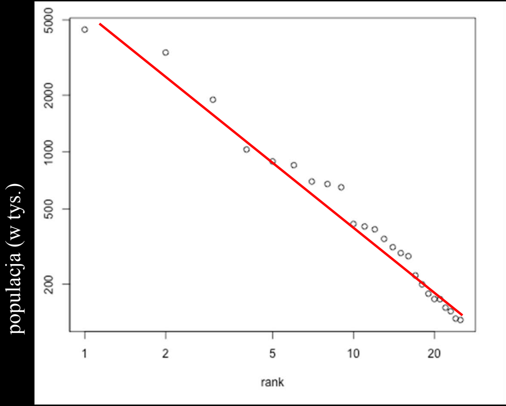
Korzystając z danych o dużych trzęsieniach ziemi na całym świecie, można przedłużyć tę prostą do obszaru trzęsień o sile 7, 8 i 9 w skali Richtera. To skala logarytmiczna: trzęsienie o sile 7 wyzwala miliard razy większą energię niż to o skali 1 (które odpowiada wstrząsowi wywołanemu przez przejeżdżającego nieopodal TIRa) a jednak leżą one na jednej linii !

trzęsienia w obszarze New Madrid (USA)

podobne zależności dla powodzi, wybuchów wulkanów, etc.

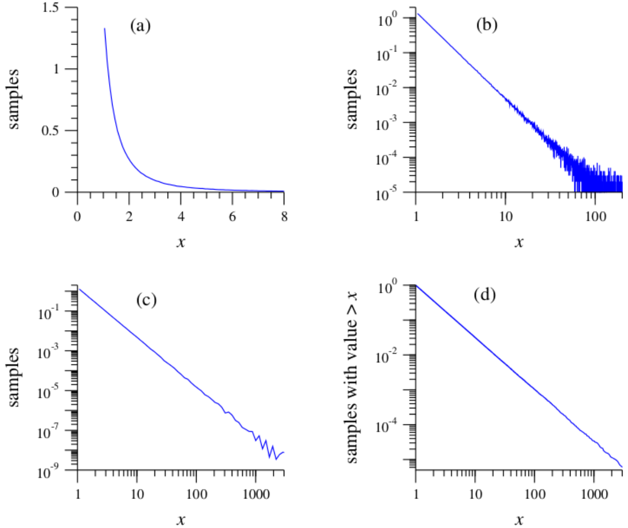
Miasta – prawo Zipfa

Miasta kanadyjskie



$$N \sim r^{-a}$$

Wykreślanie prawa potęgowego



(b) histogram w skali log-log; (c) histogram z podziałką logarytmiczną; (d) rozkład skumulowany

Własności rozkładów potęgowych

Unormowane $p(x)$ (dla $x > x_{\min}$ oraz $\alpha > 1$) w postaci:

$$p(x) = \frac{\alpha - 1}{x_{\min}} \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\alpha}.$$

Ciekawe: $\langle x \rangle \to \infty$ dla $\alpha \leq 2$; nie ma dobrze określonej średniej.

Dystrybuanta: $P(x) = \int_x^\infty p(x')dx'$ ma rozkład:

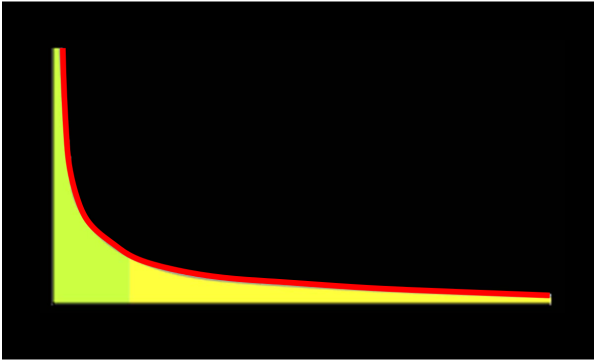
$$P(x) = \left(\frac{x}{x_{\min}} \right)^{-\alpha+1}$$

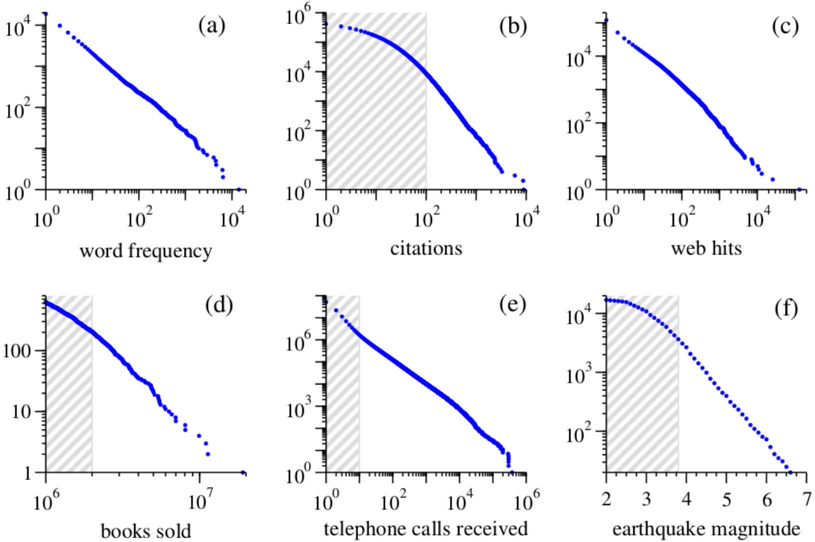
...czyli też potęgowy.

M.E.J. Newman (2006) *"Power laws, Pareto distribution, Zipf's law."*

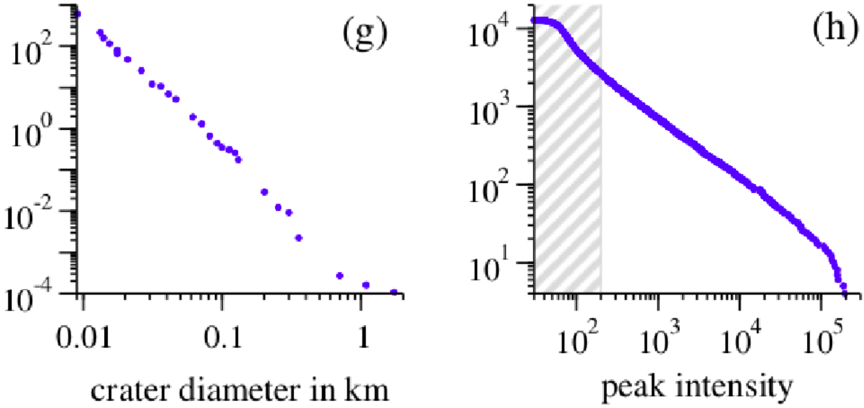
Prawa potęgowe są bezskalowe.

Warunek: zmiana skali nie zmienia rozkładu (oprócz normalizacji) zapisujemy $p(bx) = g(b)p(x)$.
Jedynym rozwiązaniem... $p(x) \propto x^{-\alpha}$.



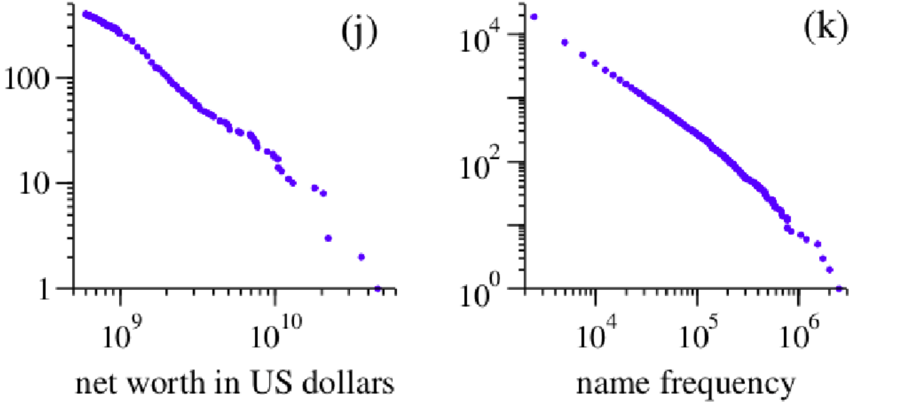

(a)
word frequency
(b)
citations
(c)
web hits
(d)
books sold
(e)
telephone calls received
(f)
earthquake magnitude

Inne, liczne przykłady.



(g) średnica kraterów na Księżycu; (h) intensywność erupcji słonecznych

Inne, liczne przykłady.



(j) bogactwo (całkowita wartość wszystkich posiagłości); (k) częstość występowania nazwisk

Plan

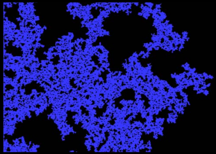
1. Rozkłady potęgowe

2. Per Bak i koncepcja S.O.C.

Punkt krytyczny

W fizyce prawa potęgowe zwykle związane są z zachowaniem układu w punkcie krytycznym (np. na progu perkolacji, w punkcie końcowym krzywej ciecz-para, w temperaturze przejścia dla modelu Isinga).

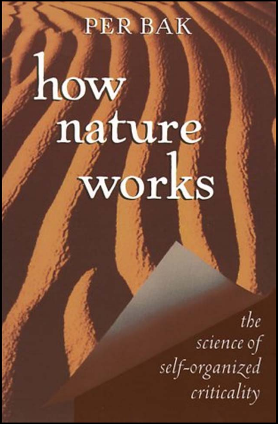
$$\xi \sim (p_c - p)^{-\nu}$$



We wszystkich tych układach (równowagowych!) punkt krytyczny może być osiągnięty jedynie poprzez precyzyjne dostrojenie parametru kontrolnego (temperatura, prawdopodobienstwo...)

Jednakże w niektórych układach nierównowagowych punkt krytyczny staje się atraktorem dynamiki, stabilnym względem małych zmian parametrów układu – zjawisko takie nazywamy samo-organizującą się krytycznością

Samo-organizująca się krytyczność



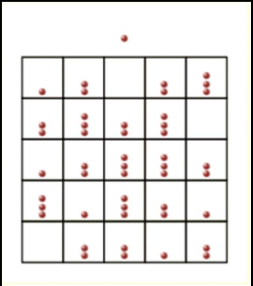
„Złożone zachowanie układów w przyrodzie odzwierciedla skłonność struktur o dużej liczbie stopni swobody do ewolucji w kierunku pewnego stanu „krytycznego", dalekiego od równowagi, w którym drobne zaburzenia mogą prowadzić do zdarzeń zwanych „lawinami” o różnorakiej wielkości.

Osiąganie przez układ owego stanu nasepuje bez żadnej ingerencji z zewnątrz, jedynie na skutek dynamicznych oddziaływań pomiędzy elementami układu: stan krytyczny jest tworzony w sposób spontaniczny, przez samoorganizację. Samo-organizująca się krytyczność to jak dotąd jedyny znany mechanizm tworzenia złożoności”

Per Bak, 1948-2002

Model pryzmy piasku Baka

Każdemu węzłowi siatki przypisana jest pewna liczba, która odpowiada nachyleniu pryzmy. To nachylenie wzrasta, w miarę jak ziarnka piasku są kładzione na pryzmie, aż wreszcie – gdy nachylenie w punkcie X przekracza pewien ustalony próg – następuje lawina, która przesypuje piasek z punktu X do punktów sąsiednich



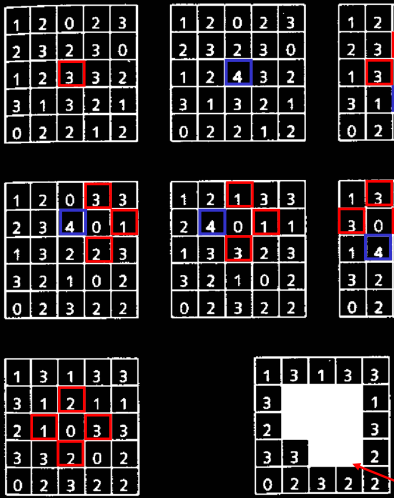
Dodajemy jedno ziarnko w przypadkowym miejscu: $z_{i,j} = z_{i,j} + 1$

Redystrybucja piasku po przekroczeniu progu:

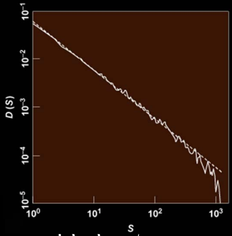
$$\text{if} \quad z > z_c \quad \text{then} \quad \begin{aligned} z_{i,j} &= z_{i,j} - 4 \\ z_{i\pm1,j} &= z_{i\pm1,j} + 1 \\ z_{i,j\pm1} &= z_{i,j\pm1} + 1 \end{aligned}$$

+ absorbujące warunki brzegowe (z=0) na bokach siatki

Lawiny



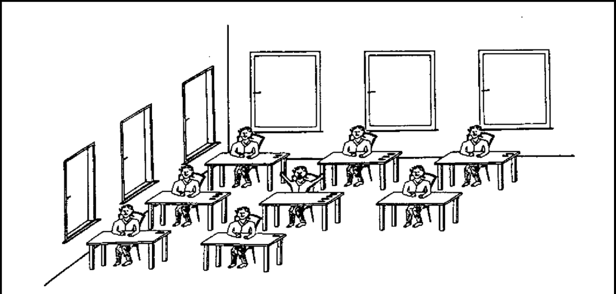
rozmiar lawiny



rozkład potęgowy

Model neurotycznych urzędników Grassbergera

Wyobraźmy sobie wielki pokój, wypełniony urzędnikami siedzącymi przy ustawionych rzędami biurkach. Okna w pokoju są otwarte i usytuowane w jednej linii z biurkami. Co jakiś czas na losowo wybrane biurko jest dostarczany dokument (sprawa do rozpatrzenia). Kiedy urzędnik spostrzega, że na jego biurku są aż 4 dokumenty, przekazuje po jednym swoim kolegom – z prawej, lewej, z przodu i tyłu. To może spowodować, że jeden z jego sąsiadów będzie miał cztery dokumenty do rozpatrzenia, więc przekaże je dalej. Urzędnicy z krańcowych rzędów będą zaś odpowiednie kartki wyrzucać przez okno.



Model pożaru lasu – inny przykład SOC

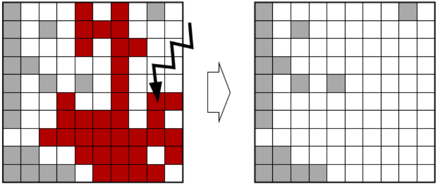


FIG. 15 Lightning strikes at random positions in the forest fire model, starting fires that wipe out the entire cluster to which a struck tree belongs.

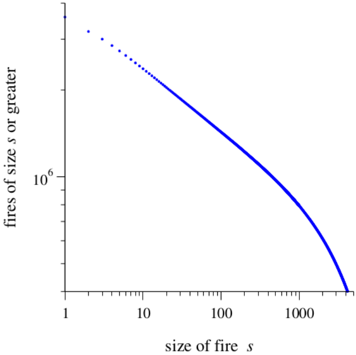


FIG. 16 Cumulative distribution of the sizes of "fires" in a simulation of the forest fire model of Drossel and Schwabl [58] for a square lattice of size 5000×5000.