TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Nguyễn Minh Thiện – 520H0684

FINAL REPORT

BÁO CÁO CUỐI KỲ
GIẢI TÍCH ỨNG DỤNG
CHO CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2025

TỔNG LIÊN ĐOÀN LAO ĐỘNG VIỆT NAM
TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG
KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Nguyễn Minh Thiện – 520H0684

FINAL REPORT

BÁO CÁO CUỐI KỲ
GIẢI TÍCH ỨNG DỤNG
CHO CÔNG NGHỆ THÔNG TIN

Người hướng dẫn
GV. Phạm Quốc Duy

THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH, NĂM 2025

LỜI CẢM ƠN

Chúng em xin chân thành cảm ơn cảm ơn thầy Phạm Quốc Duy đã tận tình giảng dạy và hỗ trợ chúng em trong suốt quá trình học và làm bài cuối kì môn Giải tích ứng dụng cho Công nghệ Thông tin. Nhờ sự hướng dẫn tận tâm của thầy, em đã hiểu rõ hơn kiến thức và áp dụng hiệu quả vào bài làm của mình.

TP. Hồ Chí Minh, ngày 08 tháng 11 năm 2025

Tác giả

Thiện

Nguyễn Minh Thiện

(Ký tên và ghi rõ họ tên)

CÔNG TRÌNH ĐƯỢC HOÀN THÀNH
TẠI TRƯỜNG ĐẠI HỌC TÔN ĐỨC THẮNG

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi và được sự hướng dẫn khoa học của GV.Phạm Quốc Duy. Các nội dung nghiên cứu, kết quả trong đề tài này là trung thực và chưa công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây. Những số liệu trong các bảng biểu phục vụ cho việc phân tích, nhận xét, đánh giá được chính tác giả thu thập từ các nguồn khác nhau có ghi rõ trong phần tài liệu tham khảo.

Ngoài ra, trong Dự án còn sử dụng một số nhận xét, đánh giá cũng như số liệu của các tác giả khác, cơ quan tổ chức khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện có bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung Dự án của mình. Trường Đại học Tôn Đức Thắng không liên quan đến những vi phạm tác quyền, bản quyền do tôi gây ra trong quá trình thực hiện (nếu có).

TP. Hồ Chí Minh, ngày 08 tháng 12 năm 2025.

Tác giả

Thiện

Nguyễn Minh Thiện

(Ký tên và ghi rõ họ tên)

MỤC LỤC

CHƯƠNG 1. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI

1.1 Câu 1: Xác định tính chẵn lẻ của hàm số

a) $\boldsymbol{f(x) = x^2 + x}$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^2 + (-x) \\ &= x^2 - x \end{aligned}$$

So sánh với $f(x)$ và $-f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + x \\ -f(x) &= -(x^2 + x) = -x^2 - x \end{aligned}$$

Nhận xét:

$f(-x) = x^2 - x \neq x^2 + x = f(x) \Rightarrow$ Không phải hàm chẵn

$f(-x) = x^2 - x \neq -x^2 - x = -f(x) \Rightarrow$ Không phải hàm lẻ

Kết luận: Hàm số $f(x) = x^2 + x$ **không chẵn không lẻ**.

b) $\boldsymbol{f(x) = x^3 + x}$

Giải:

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Vì $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Kết luận: Hàm số $f(x) = x^3 + x$ là **hàm lẻ**.

c) $\boldsymbol{f(x) = \frac{4}{x^4 - 4}}$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \backslash \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Nhận xét: Nếu $x \in D$ thì $-x \in D$ (tập xác định đối xứng qua gốc tọa độ).

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{4}{(-x)^4 - 4} \\ &= \frac{4}{x^4 - 4} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Vì $f(-x) = f(x)$ với mọi $x \in D$.

Kết luận: Hàm số $f(x) = \frac{4}{x^4-4}$ là **hàm chẵn**.

d) $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^3}{x^4-4}}$

Giải:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

Nhận xét: Nếu $x \in D$ thì $-x \in D$ (tập xác định đối xứng qua gốc tọa độ).

Ta có:

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{(-x)^3}{(-x)^4 - 4} \\ &= \frac{-x^3}{x^4 - 4} \\ &= -\frac{x^3}{x^4 - 4} \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Vì $f(-x) = -f(x)$ với mọi $x \in D$.

Kết luận: Hàm số $f(x) = \frac{x^3}{x^4-4}$ là **hàm lẻ**.

1.2 Câu 2: Tính giới hạn

$$\mathbf{lim} \frac{\mathbf{555}}{\boldsymbol{x^2 - 25}}$$

Phân tích: Ta có $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$

Hàm số có hai điểm gián đoạn tại $x = 5$ và $x = -5$.

a) $\boldsymbol{\lim_{x\to 5^+} \frac{555}{x^2-25}}$

Giải:

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{555}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5^+} \frac{555}{(x-5)(x+5)}$$

Khi $x \to 5^+$:

Tử số: $555 > 0$ (hằng số dương)

$(x - 5) \to 0^+$ (dương, tiến về 0 từ bên phải)

$$(x + 5) \to 10 > 0$$

Do đó:

$$\lim_{x \to 5^+} \frac{555}{(x-5)(x+5)} = \frac{555}{0^+ \cdot 10} = \frac{555}{0^+} = +\infty$$

b) $\mathbf{lim}_{x \to 5^-} \frac{555}{x^2 - 25}$

Giải:

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{555}{x^2 - 25} = \lim_{x \to 5^-} \frac{555}{(x-5)(x+5)}$$

Khi $x \to 5^-$:

Tử số: $555 > 0$ (hằng số dương)

$(x - 5) \to 0^-$ (âm, tiến về 0 từ bên trái)

$$(x + 5) \to 10 > 0$$

Do đó:

$$\lim_{x \to 5^-} \frac{555}{(x-5)(x+5)} = \frac{555}{0^- \cdot 10} = \frac{555}{0^-} = -\infty$$

c) $\mathbf{lim}_{x \to -5^+} \frac{555}{x^2 - 25}$

Giải:

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{555}{x^2 - 25} = \lim_{x \to -5^+} \frac{555}{(x-5)(x+5)}$$

Khi $x \to -5^+$:

Tử số: $555 > 0$ (hằng số dương)

$$(x-5) \to -10 < 0$$

$(x+5) \to 0^+$ (dương, tiến về 0 từ bên phải)

Do đó:

$$\lim_{x \to -5^+} \frac{555}{(x-5)(x+5)} = \frac{555}{(-10)\cdot 0^+} = \frac{555}{0^-} = -\infty$$

d) $\mathbf{lim}_{x \to -5^-} \frac{555}{x^2-25}$

Giải:

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{555}{x^2-25} = \lim_{x \to -5^-} \frac{555}{(x-5)(x+5)}$$

Khi $x \to -5^-$:

Tử số: $555 > 0$ (hằng số dương)

$$(x-5) \to -10 < 0$$

$(x+5) \to 0^-$ (âm, tiến về 0 từ bên trái)

Do đó:

$$\lim_{x \to -5^-} \frac{555}{(x-5)(x+5)} = \frac{555}{(-10)\cdot 0^-} = \frac{555}{0^+} = +\infty$$

1.3 Câu 3: Tìm đạo hàm của các hàm số sau

a) $\boldsymbol{y} = \frac{\sqrt{x}-4}{\sqrt{x}+4}$

Giải:

Đặt $u = \sqrt{x} - 4$ và $v = \sqrt{x} + 4$

Ta có:

$$u' = (\sqrt{x}-4)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$v' = (\sqrt{x}+4)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Áp dụng công thức đạo hàm của thương: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}+4) - (\sqrt{x}-4) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+4)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \left[(\sqrt{x}+4) - (\sqrt{x}-4)\right]}{(\sqrt{x}+4)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (\sqrt{x}+4-\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot 8}{(\sqrt{x}+4)^2} \\
&= \frac{8}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+4)^2} \\
&= \frac{4}{\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+4)^2}
\end{aligned}
$$

b) $\boldsymbol{y = \left(\frac{\sqrt{x}}{10} - 1\right)^{-10}}$

Giải:

Đặt $u = \frac{\sqrt{x}}{10} - 1$, ta có $y = u^{-10}$

Bước 1: Tính u'

$$
\begin{aligned}
u &= \frac{\sqrt{x}}{10} - 1 = \frac{1}{10}\sqrt{x} - 1 \\
u' &= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{20\sqrt{x}}
\end{aligned}
$$

Bước 2: Áp dụng công thức đạo hàm hàm hợp: $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= -10 \cdot u^{-11} \cdot u' \\
&= -10 \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{10} - 1\right)^{-11} \cdot \frac{1}{20\sqrt{x}} \\
&= \frac{-10}{20\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{10} - 1\right)^{-11} \\
&= \frac{-1}{2\sqrt{x}} \cdot \left(\frac{\sqrt{x}}{10} - 1\right)^{-11}
\end{aligned}
$$

1.4 Câu 4: Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = 1 + 2e^x$ tại điểm có $x = 0$

Công thức phương trình tiếp tuyến:

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Giải:

Cho hàm số $y = 1 + 2e^x$ và $x_0 = 0$

Bước 1: Tính tọa độ tiếp điểm

Tại $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 + 2e^0 \\
&= 1 + 2 \cdot 1 \\
&= 1 + 2 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Vậy tiếp điểm là $M(0,3)$.

Bước 2: Tính đạo hàm y'

$$
\begin{aligned}
y &= 1 + 2e^x \\
y' &= (1)' + (2e^x)' \\
&= 0 + 2e^x \\
&= 2e^x
\end{aligned}
$$

Bước 3: Tính hệ số góc của tiếp tuyến

Hệ số góc của tiếp tuyến tại $x_0 = 0$:

$$
\begin{aligned}
k = y'(0) &= 2e^0 \\
&= 2 \cdot 1 \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Bước 4: Viết phương trình tiếp tuyến

Áp dụng công thức phương trình tiếp tuyến:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ y - 3 &= 2(x - 0) \\ y - 3 &= 2x \\ y &= 2x + 3 \end{aligned}$$

Kết luận: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $y = 1 + 2e^x$ tại điểm có $x = 0$ là:

$$\boxed{y = 2x + 3}$$

1.5 Câu 5. Cho đạo hàm $f'(x) = (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$, $0 \le x \le 2\pi$

Bước 0: Rút gọn $f'(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x) \\ &= \sin^2 x - \cos^2 x \\ &= -(\cos^2 x - \sin^2 x) \\ &= -\cos 2x \end{aligned}$$

Vậy $f'(x) = -\cos 2x$

a) Tìm các điểm tới hạn (critical numbers)

Giải:

Điểm tới hạn là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ -\cos 2x &= 0 \\ \cos 2x &= 0 \\ 2x &= \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Với điều kiện $0 \le x \le 2\pi$, ta tìm các giá trị của k:

$k = 0$: $x = \frac{\pi}{4}$

$k = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$

$k = 2: x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$

$k = 3: x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = \frac{7\pi}{4}$

$k = 4: x = \frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{9\pi}{4} > 2\pi$ (loại)

Kết luận: Các điểm tới hạn là: $\boxed{x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}}$

b) Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của *f*

Giải:

Ta xét dấu của $f'(x) = -\cos 2x$ trên $[0,2\pi]$:

x	$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$
$2x$	$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{2},4\pi\right)$
$\cos 2x$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$
$f'(x) = -\cos 2x$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$
$f(x)$	↘	↗	↘	↗	↘

Kết luận:

Hàm số **đồng biến** trên các khoảng: $\boxed{\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right) \text{ và } \left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)}$

Hàm số **nghịch biến** trên các khoảng: $\boxed{\left(0,\frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right) \text{ và } \left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)}$

c) Tìm các điểm cực đại và cực tiểu địa phương

Giải:

Dựa vào bảng xét dấu ở trên:

Điểm cực tiểu địa phương:

Tại các điểm mà $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+$:

Tại $x = \frac{\pi}{4}$: $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+ \Rightarrow$ **cực tiểu**

Tại $x = \frac{5\pi}{4}$: $f'(x)$ đổi dấu từ $-$ sang $+ \Rightarrow$ **cực tiểu**

Điểm cực đại địa phương:

Tại các điểm mà $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $-$:

Tại $x = \frac{3\pi}{4}$: $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $- \Rightarrow$ **cực đại**

Tại $x = \frac{7\pi}{4}$: $f'(x)$ đổi dấu từ $+$ sang $- \Rightarrow$ **cực đại**

Kết luận:

Hàm số đạt **cực tiểu địa phương** tại: $\boxed{x = \frac{\pi}{4} \text{ và } x = \frac{5\pi}{4}}$

Hàm số đạt **cực đại địa phương** tại: $\boxed{x = \frac{3\pi}{4} \text{ và } x = \frac{7\pi}{4}}$

1.6 Câu 6: Tìm tất cả các đường cong đi qua điểm có $x = 1$ với độ dài cung L cho trước.

$$\boldsymbol{L = \int_1^5 \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\, dx}$$

Công thức độ dài cung:

Độ dài cung của đường cong $y = f(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx$$

Giải:

Bước 1: Xác định $f'(x)$ từ công thức độ dài cung

So sánh công thức độ dài cung tổng quát với đề bài:

$$\sqrt{1 + [f'(x)]^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

Suy ra:

$$[f'(x)]^2 = \frac{1}{x^2}$$
$$f'(x) = \pm\frac{1}{x}$$

Bước 2: Tìm $f(x)$ bằng cách tích phân

Trường hợp 1: $f'(x) = \frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{x}\, dx \\ &= \ln|x| + C_1 \end{aligned}$$

Vì $x \in [1,5]$ nên $x > 0$, do đó $|x| = x$:

$$f(x) = \ln x + C_1$$

Trường hợp 2: $f'(x) = -\frac{1}{x}$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int -\frac{1}{x}\, dx \\ &= -\ln|x| + C_2 \end{aligned}$$

Vì $x \in [1,5]$ nên $x > 0$, do đó $|x| = x$:

$$f(x) = -\ln x + C_2$$

Kết luận

Tất cả các đường cong đi qua điểm có $x = 1$ và có độ dài cung thỏa mãn đề bài là:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = \ln x + C_1 \quad \text{với } C_1 \in \mathbb{R} \\ y = -\ln x + C_2 \quad \text{với } C_2 \in \mathbb{R} \end{array}}$$

1.7 Câu 7: Xét sự hội tụ của chuỗi

Cho: $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ là các số thực thỏa mãn:

$$a_n > 0,\ n \in \mathbb{Z}^+$$

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots$$

Chuỗi $a_2 + a_4 + a_8 + a_{16} + \cdots + a_{2^n} + \cdots$ phân kỳ

Yêu cầu: Xác định sự hội tụ hay phân kỳ của chuỗi:

$$S = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \cdots + \frac{a_n}{n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$$

Tiêu chuẩn so sánh 1

Định lý: Cho hai chuỗi số dương $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ và $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ với $u_n > 0$, $v_n > 0$ với mọi n.

Nếu tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \geq v_n$ với mọi $n \geq N$, thì:

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ phân kỳ thì $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ cũng phân kỳ.

Nếu $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ hội tụ thì $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ cũng hội tụ.

Cho: $a_n > 0$, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \cdots$, và chuỗi $a_2 + a_4 + a_8 + \cdots$ phân kỳ.

Giải

Khai triển chuỗi cần tìm:

$$S = a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} + \frac{a_5}{5} + \cdots + \frac{a_8}{8} + \cdots$$

Ta nhóm các số hạng lại thành từng nhóm (theo lũy thừa của 2) và đánh giá chặn dưới (thay thế các số hạng trong nhóm bằng số hạng nhỏ nhất của nhóm đó):

- Nhóm 1 (chỉ có $n = 2$): Giữ nguyên $\frac{a_2}{2}$.
- Nhóm 2 (từ $n = 3$ đến 4):

$$\frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4} \geq \frac{a_4}{4} + \frac{a_4}{4} = \frac{2a_4}{4} = \frac{a_4}{2}$$

(Giải thích: Vì dãy giảm nên $a_3 \geq a_4$ và mẫu số $3 < 4$, nên $\frac{a_3}{3} > \frac{a_4}{4}$)

- Nhóm 3 (từ $n = 5$ đến 8):

$$\frac{a_5}{5} + \frac{a_6}{6} + \frac{a_7}{7} + \frac{a_8}{8} \geq \frac{a_8}{8} + \frac{a_8}{8} + \frac{a_8}{8} + \frac{a_8}{8} = \frac{4a_8}{8} = \frac{a_8}{2}$$

Nhóm tổng quát (từ $2^{k-1} + 1$ đến 2^k): Có 2^{k-1} số hạng, số hạng nhỏ nhất là $\frac{a_{2^k}}{2^k}$.

$$\text{Tổng nhóm} \geq 2^{k-1} \cdot \frac{a_{2^k}}{2^k} = \frac{a_{2^k}}{2}$$

Tổng hợp lại:

$$S = a_1 + \frac{a_2}{2} + \left(\frac{a_3}{3} + \frac{a_4}{4}\right) + \left(\frac{a_5}{5} + \cdots + \frac{a_8}{8}\right) + \cdots$$

$$S \geq a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \frac{1}{2}a_4 + \frac{1}{2}a_8 + \frac{1}{2}a_{16} + \cdots$$

$$S \geq a_1 + \frac{1}{2}\underbrace{(a_2 + a_4 + a_8 + \cdots)}_{\text{Chuỗi phân kỳ theo đề bài}}$$

Kết luận:

Vì chuỗi $(a_2 + a_4 + a_8 + \cdots)$ phân kỳ (tiến tới dương vô cùng), nên tổng S lớn hơn nó cũng phải tiến tới dương vô cùng.

$$\boxed{\textbf{S Phân kì}}$$

1.8 Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của x để chuỗi sau hội tụ tuyệt đối

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$$

Định lý:

Chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ hội tụ

Tiêu chuẩn Cauchy: $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

Nếu $L < 1$: chuỗi hội tụ tuyệt đối

Nếu $L > 1$: chuỗi phân kỳ

Nếu $L = 1$: không kết luận được

Giải:

Bước 1: Xác định số hạng tổng quát

Ta có số hạng tổng quát:

$$a_n = \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^n}{(2x+1)^n} = \frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$$

Bước 2: Áp dụng tiêu chuẩn Cauchy

Tính $\sqrt[n]{|a_n|}$:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{n}{n+1} \cdot \left(\frac{x}{2x+1}\right)^n\right|}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \cdot \sqrt[n]{\left|\frac{x}{2x+1}\right|^n}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \cdot \left|\frac{x}{2x+1}\right|$$

Bước 3: Tính giới hạn

Ta cần tính $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \frac{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1}}$$

Sử dụng kết quả quen thuộc: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Chứng minh: Đặt $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$ với $\alpha_n > 0$. Khi đó:

$$n = (1 + \alpha_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 \quad \text{(theo bất đẳng thức nhị thức)}$$

Suy ra $\alpha_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \to 0$ khi $n \to \infty$, nên $\alpha_n \to 0$.

Tương tự: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$

Do đó:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} = \frac{1}{1} = 1$$

Vậy:

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \cdot \left|\frac{x}{2x+1}\right| = \left|\frac{x}{2x+1}\right|$$

Bước 4: Điều kiện hội tụ tuyệt đối

Theo tiêu chuẩn Cauchy, chuỗi hội tụ tuyệt đối khi $L < 1$:

$$\left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$$

Giải bất phương trình:

$$\left|\frac{x}{2x+1}\right| < 1$$

$$-1 < \frac{x}{2x+1} < 1 \quad \text{(với điều kiện } 2x+1 \neq 0\text{, tức } x \neq -\frac{1}{2})$$

Trường hợp 1: $\frac{x}{2x+1} < 1$

$$\frac{x}{2x+1} - 1 < 0$$
$$\frac{x-(2x+1)}{2x+1} < 0$$
$$\frac{-x-1}{2x+1} < 0$$
$$\frac{x+1}{2x+1} > 0$$

Xét dấu:

x	$(-\infty, -1)$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, +\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{x+1}{2x+1}$	$+$	$-$	$+$

Vậy $\frac{x+1}{2x+1} > 0$ khi $x \in (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Trường hợp 2: $\frac{x}{2x+1} > -1$

$$\frac{x}{2x+1} + 1 > 0$$
$$\frac{x+(2x+1)}{2x+1} > 0$$
$$\frac{3x+1}{2x+1} > 0$$

Xét dấu:

x	$(-\infty, -\frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	$(-\frac{1}{3}, +\infty)$
$3x+1$	$-$	$-$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$
$\frac{3x+1}{2x+1}$	$+$	$-$	$+$

Vậy $\frac{3x+1}{2x+1} > 0$ khi $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$

Bước 5: Giao hai điều kiện

Điều kiện hội tụ tuyệt đối là giao của hai trường hợp:

$$\left[(-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, +\infty\right)\right] \cap \left[\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)\right]$$
$$= (-\infty, -1) \cup \left(-\frac{1}{3}, +\infty\right)$$

Kết luận:

Chuỗi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^n}{(n+1)(2x+1)^n}$ hội tụ tuyệt đối khi:

$$\boxed{x < -1 \quad \text{hoặc} \quad x > -\frac{1}{3}}$$

1.9 Câu 9: Bài toán doanh thu bán tai nghe

Một nghìn tai nghe được bán với giá \$55 mỗi chiếc, tạo ra doanh thu $(1000)(\$55) = \$55{,}000$.

Với mỗi lần tăng giá \$5, số lượng tai nghe bán được giảm 20 chiếc.

Ví dụ:

Giá \$60/chiếc ⇒ bán được $1000 - 20 = 980$ chiếc

Giá \$65/chiếc ⇒ bán được $1000 - 20 - 20 = 960$ chiếc

Yêu cầu: Tìm doanh thu khi giá mỗi tai nghe là \$255.

Giải:

Bước 1: Xác định số lần tăng giá

Giá ban đầu: $P_0 = \$55$

Giá hiện tại: $P = \$255$

Mỗi lần tăng: $\Delta P = \$5$

Số lần tăng giá:

$$\begin{aligned} n &= \frac{P - P_0}{\Delta P} \\ &= \frac{255 - 55}{5} \\ &= \frac{200}{5} \\ &= 40 \text{ (lần)} \end{aligned}$$

Bước 2: Tính số lượng tai nghe bán được

Số lượng ban đầu: $Q_0 = 1000$ chiếc

Mỗi lần tăng giá, số lượng giảm: $\Delta Q = 20$ chiếc

Số lượng bán được khi giá là $255:

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 - n \cdot \Delta Q \\ &= 1000 - 40 \times 20 \\ &= 1000 - 800 \\ &= 200 \text{ (chiếc)} \end{aligned}$$

Bước 3: Tính doanh thu

Doanh thu = Giá × Số lượng

$$\begin{aligned} R &= P \times Q \\ &= 255 \times 200 \\ &= \$51{,}000 \end{aligned}$$

Kết luận: Doanh thu khi giá mỗi tai nghe là $255 là: $\boxed{\$51{,}000}$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Tiếng Việt

…

Tiếng Anh

…