UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

Ecuaciones Diferenciales | 2022-1

GRUPO 18

Los Picu-2

Proyecto Final

ESTUDIANTES

Chávez López Brayan Alejandro

Hernández Reyes Fernanda

León Ruiz Eduardo

Macias Niño Carmen Violeta

PROFESOR

Daniel Peña Maciel

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., 2021

CONTENIDO DEL DOCUMENTO

Contenido

III. Problema a resolver 3

1.1 Ley de la corriente de Kirchhoff. 4

1.2 Ley de voltaje de Kirchhoff. 4

IV. Método de solución 5

V. Solución obtenida 7

VI. Conclusiones 8

VII. Referencias o citas bibliográficas. 9

Anexos: 10

III. Problema a resolver

Para comprender el tema de las transformadas de Laplace primero debemos definir qué es una ecuación diferencial:

"Una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial (ED)" (Zill, Cullen, 2009, p. 2).

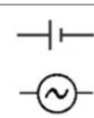
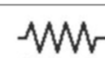
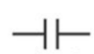
Así pues, las ecuaciones diferenciales se clasifican según su tipo, orden y linealidad; Las EDOs son aquellas que contienen derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una independiente, mientras que las EDPs contienen derivadas parciales de una o más variables dependientes de dos o más variables.

independientes. El orden, por su parte, se refiere al orden de la mayor derivada de la ecuación, mientras que la linealidad se refiere a si está formada por la suma de términos lineales. (Zill, Cullen, 2009).

Ahora bien, existen diversos métodos para la resolución de ecuaciones diferenciales; en esta ocasión nos enfocaremos en el método de resolución por transformadas de Laplace. La transformada de Laplace de Laplace es una herramienta que permite resolver problemas de valor inicial de manera sencilla; consiste en reemplazar un problema de valor inicial en el dominio t (tiempo) por una ecuación algebraica en el dominio de s (la frecuencia en análisis de circuitos).

Las aplicaciones de este método son amplias y abarcan diversos campos de la ingeniería, tales como: análisis de poblaciones, ley de enfriamiento de Newton, relación entre depredadores y presas, desplazamiento de objetos, transmisión de calor, circuitos eléctricos (RLC), entre otras.

Este proyecto está enfocado en circuitos eléctricos, tanto en circuitos RL (Una resistencia y una inducción) como RC (Una resistencia y una capacitancia). Ambos circuitos eléctricos pueden ser analizados por separado a través de ecuaciones diferenciales de primer orden, pero al ser combinados se transforman en una ecuación diferencial de 2do orden o superior, dependiendo del caso.

Fuente de Voltaje	E	Voltio (V)	
Resistencia	R	Ohm (Ω)	
Inductancia	L	Henrio (H)	
Capacitancia	C	Faradio (F)	
Carga	q	Coulomb (c)	
Corriente	I	Amperio (A)	

La tabla anterior la ocuparemos de base para poder explicar a detalle cómo se forma una ecuación diferencial con base a un circuito eléctrico

Para poder aplicarlo antes debemos tener conceptos de circuitos eléctricos tales como Las leyes de Kirchhoff y Leyes de Faraday.

1.1 Ley de la corriente de Kirchhoff.

La suma algebraica de los cambios de corriente que influyen en cualquier punto de unión debe anularse.

1.2 Ley de voltaje de Kirchhoff.

La suma algebraica de los cambios ínstatenos del potencial (caídas de voltaje) en torno a cualquier lazo cerrado, debe anularse.

$$a)\ E_R = RI$$

La caída del voltaje atreves de una resistencia es proporcional a la corriente (i)

$$b)\ E_L = L\frac{dI}{dt}$$

La caída de voltaje atreves de un inductor es proporcional a la razón de cambio instantáneo de la corriente (i).

$$c)\ E_C = \frac{1}{C}q$$

La caída de voltaje atraer de un condensador es proporcional a la carga eléctrica (q) del condensador.

Suponiendo que una fuente de voltaje o energía potencial del circuito le denotamos dt (respecto del t que es tiempo) lo que simboliza que el voltaje que se proporciona al circuito es en el instante.

Entonces si aplicamos la Lay de Kirchhoff al circuito RL, aplicando ley de voltaje obtenemos a la ecuación diferencial.

$$E(t) = E_L + E_R$$

$$E(t) = L\frac{dI}{dt} + RI$$

DONDE $\frac{dI}{dt}$ es nuestro cambio de corriente y finalmente buscamos de la función E(t) nuestra función I(t)

IV. Método de solución:

Le debemos dar solución al ejercicio escogido de tema 3, usando la TL y la TIL, resolver el sistema de EDs:

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t);$$

$$RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0;$$

$$i_1(0) = 0; \quad i_2(0) = 0;$$

Cuando: $E(t) = 60[V], L = 1[h], R = 50[\Omega], C = 10^{-4}[f]$. Donde las letras entre los corchetes corresponden a las respectivas unidades de las magnitudes físicas del problema.

El método para la resolución de este ejercicio que es un sistema de ecuaciones diferenciales es empleando el tema de la transformada de Laplace.

Entonces para poder realizar un sistema de ecuaciones, con el método de la transformada de Laplace, necesitamos saber el algoritmo de dicho método.

Pero antes, vamos a ver sus fundamentos teóricos de la Transformada de Laplace.

① Sea $f(t)$, una función definida en el intervalo $[0, \infty)$, entonces, para $t \geq 0$ se define la transformada de Laplace como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f(t)dt = F(s)$$

Transformada inversa de Laplace (TIL): Dada una función $F(s)$, si existe una función $f(t)$ en $[0, \infty)$, y que satisface que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$, entonces, $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$$

② Condiciones suficientes para su existencia:

$f(t)$ debe de ser de orden exponencial C. Esto se cumple si existen constantes $C > 0, M > 0\ y\ T > 0$, tales que:

$|f(t)| \leq Me^{Ct}$ para toda $t > T$ Entonces, existe $\mathcal{L}\{f(t)\}$ para $s > C$

③ Propiedades:

-Linealidad: La TL y TIL es un operados lineal, para una combinación lineal de funciones, se puede escribir $(\alpha, \beta, escalares)$:

$$\mathcal{L}\{\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)\} = \alpha\mathcal{L}\{f_1(t)\} + \beta\mathcal{L}\{f_2(t)\} = F(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{\alpha F_1(s) + \beta F_2(s)\} = \alpha\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + \beta\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$$

-Primer teorema de traslación (dominio "s"):

Si $f(t) = F(s)$ y a cualquier número real, entonces:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t)$$

-Transformada de la derivada: Si $f(t)$ es continua en $[0,\infty)$, y $f'(t)$ es continua por partes en el mismo intervalo, siendo ambas de orden exponencial C, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$$

-Transformada de la derivada de orden: Si $f(t)$, $f'(t)$,..., $f^{n-1}(t)$ son continuas en $[0,\infty)$, y, $f^{n}(t)$ es continua por partes, en el mismo intervalo, siendo todas de orden exponencial C, entonces, para $s > C$:

$$\mathcal{L}\{f^{n}(t)\} = s^{n}F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots f^{(n-1)}(0)$$

Si $n = 2,3$, entonces:

$$\mathcal{L}\left\{f''(t)\right\} = s^{2}F(s) - sf(0) - sf'(0)$$

$$\mathcal{L}\left\{f'''(t)\right\} = s^{3}F(s) - s^{2}f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Algunas transformadas de Laplace básicas:

$(a)\quad \mathcal{L}\{1\} = \dfrac{1}{s}$

$(b)\quad \mathcal{L}\{t^{n}\} = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$

$(c)\quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \dfrac{1}{s-a}$

$(d)\quad \mathcal{L}\{sin\ kt\} = \dfrac{k}{s^{2}+k^{2}}$

$(e)\quad \mathcal{L}\{cos\ kt\} = \dfrac{s}{s^{2}+k^{2}}$

$(f)\quad \mathcal{L}\{sinh\ kt\} = \dfrac{k}{s^{2}-k^{2}}$

$(g)\quad \mathcal{L}\{cosh\ kt\} = \dfrac{s}{s^{2}-k^{2}}$

Algoritmo para la resolución de una ecuación diferencial por la Transformada de Laplace:

1.Tener la(s) ecuación(es) diferencial(es) a resolver, con sus condiciones iniciales, con dominio t.

2. Aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación(es)

3. Aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la(s) ecuación(es), con ayuda de las transformadas básicas y con sus propiedades, haciéndola así, ahora con dominio s.

4.Hacer las operaciones algebraicas correspondientes, en la mayoría de los casos se debe de usar el método de Fracciones Parciales.

5. Aplicar la transformada inversa de Laplace.

6. Solución.

V. Solución obtenida

$$L\frac{di_{(1)}}{dt} + Ri_{(2)} = E(t)$$

$E(t) = 60\ V$

$L = 1\ h$

$R = 50\ \Omega$

$C = 10^{-4}\ f$

$$RC\frac{di_{(2)}}{dt} + i_{(2)} - i_{(1)} = 0$$

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

$$i_1' = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60te^{-100t}$$

$$i_1' = 0 - \left[\frac{6}{5}e^{-100t}\right] - 60te^{-100t}$$

$$-\left[\frac{1}{5}(6e^{-100t})\right] - 60te^{-100t}$$

$$-\frac{6}{5}\left[e^{-100t}\right] ; -\frac{6}{5}\left[e^{g}\frac{d}{dg}\right]\left[-100x\frac{d}{dx}\right] \qquad g = -100t$$

$$-\frac{6}{5}e^{g}\left[-100x\frac{d}{dx}\right] ; -\frac{6}{5}e^{g}(-100)$$

$$-\frac{6}{5}e^{-100t} \cdot 100 ; \left[120e^{-100t}\right]$$

$$120e^{-100t} - 60\left[te^{-100t}\right] ; 60\left[e^{-100t}(1) - 100te^{-100t}\right]$$

$$120e^{-100t} - 60e^{100t} + 6000te^{-100t} = i_1'$$

$$60e^{-100t} + 6000te^{-100t} = i_1'$$

$$60e^{-100t} + 6000te^{-100t} + Ri_{(2)} = E(t)$$

$$R = 50 ; \quad i = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

$$60e^{-100t} + 6000te^{-100t} + 50\left[\frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t})\right]$$

$$\cancel{60e^{-100t}} + \cancel{6000te^{-100t}} + 60 - \cancel{60e^{100t}} - \cancel{6000te^{-100t}} = E(t)$$

$E(t) = 60\ V$ ✓ Es solución.

$$RC\frac{di_{(2)}}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \qquad R = 50, \quad C = 10^{-4}$$

$$RC = 50\left[\frac{1}{10000}\right] = \frac{1}{200}$$

$$i_2 = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t}$$

$$i_2' = 0 + 120e^{-100t} - 120\left[te^{-100t}\right]$$

$$i_2' = 120e^{-100t} - 120\left[e^{-100t} - 100te^{-100t}\right]$$

$$i_2' = \cancel{120e^{-100t}} - \cancel{120e^{-100t}} + 12000te^{-100t}$$

$$\frac{1}{200}\left[12000te^{-100t}\right] + \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t} - \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-100t} + 60te^{-100t} = 0$$

$$60te^{-100t} + \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120te^{-100t} - \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-100t} + 60te^{-100t}$$

$$\cancel{120te^{-100t}} + \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - \cancel{120te^{-100}} - \frac{6}{5} + \frac{6}{5}e^{-100t} = 0$$

es solución ✓

tanto $i_1(t)$ como $i_2(t)$ son soluciones d1c edo

VI. Conclusiones

El uso de la transformada de la Laplace nos es de gran utilidad al resolver ecuaciones diferenciales, en especial en el ámbito de ingeniería para resolver problemas procedentes de campos tan distintos como pueden ser la Teoría de Circuitos, la Elasticidad Lineal, la Transmisión de Calor o la Propagación de Ondas, ya que este tipo de operaciones son muy frecuentes.

Así mismo, esta transformada nos permite reemplazar operaciones de derivación a polinomios y ecuaciones diferenciales ordinarias en ecuaciones algebraicas, así como visualizar a través de graficas el comportamiento de un sistema.

Dentro del proyecto pudimos observar cómo, si bien el análisis de circuitos RL y RC se puede plasmar en ecuaciones de primer orden, al ser combinados obtenemos una ecuación diferencial de 2do orden (o superior) dando una ecuación diferencial con la cual podemos trabajar en circuitos eléctricos cómodamente.

Por último, las transformadas de Laplace nos pueden ayudar a reducir el tiempo usado en la resolución de problemas ya que, en caso de contar con las condiciones iniciales, no será necesario sustituir estas al final de la operación.

VII. Referencias o citas bibliográficas.

- G. Zill, D., & R.Cullen, M. (2009). ECUACIONES DIFERENCIALES con problemas con valores en la frontera (Septima ed.). CENCAGE learning. https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxvbWFyZGlhemhlcm5hbmRlejIyfGd4OjJhYWViYjUzZjUyZWVjOTQ
- MateFacil. (2021, 11 mayo). Circuito RLC usando leyes de Kirchhoff [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=ZEm8aty8_tU
- S.A (2013). Resolución de circuitos aplicando transformada de Laplace. En Teoría de circuitos I (1-3). Recuperado 30 de noviembre de 2021, de https://www.fceia.unr.edu.ar/tci/utiles/Apuntes/CAP%2012-2013%20LAPLACE.pdf
- S.A. (S.A). Transformada de Laplace. diciembre 05,2021, de Departamento de Matem´atica Aplicada II E.E. Telecomunicaci´on Sitio web: http://www.dma.uvigo.es/~aurea/Transformada_Laplace.pdf
- S.A. (S.A). La transformada de Laplace. diciembre 05, 2021, de S.A Sitio web: http://canek.uam.mx/Ecuaciones/Teoria/6.Laplace/ImpConvolucion.pdf
- S.A. (S.A). Transformada de Laplace. diciembre 05, 2021, de S.A Sitio web: http://mat-avanzadas.fcaglp.unlp.edu.ar/public_html/Mat-Esp-II/pdfs/apuntes-teoricos/Transformada_Laplace.pdf

Anexos:

Solución detallada, paso a paso de la ecuación escogida del tema 3.

Usando la TL y la TIL, resolver el sistema de EDs:

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_2 = E(t) \ldots \quad ⓐ$$

$$RC\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_1 = 0 \ldots \quad ⓑ$$

$$i_1(0) = 0 \; ; \quad i_2(0) = 0$$

Cuando: $E(t) = 60[V]$, $L = 1[H]$, $R = 50[\Omega]$, $C = 10^{-4}[f]$

Donde las letras entre corchetes, corresponden a las respectivas unidades de las magnitudes físicas del problema.

Solución:

Primero, sustituimos $E(t)$, L, R y C en las ecuaciones ⓐ y ⓑ

Así, nos queda como:

$$\frac{di_1}{dt} + 50i_2 = 60 \ldots \quad ①$$

$$50(10^{-4})\frac{di_2}{dt} + i_2 - i_2 = 0 \ldots \quad ②$$

Ahora, aplicaremos TL a ① y ② Donde

De ①:

$I_1(s) = \mathcal{L}\{i_1(t)\}$

$I_2(s) = \mathcal{L}\{i_2(t)\}$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{di_1}{dt}\right\} + 50\,\mathcal{L}\{i_2\} = \mathcal{L}\{60\}$$

Como nos damos cuenta, la primera transformada es una derivada, así que utilizamos la transformada de la derivada, la cual es:

$$sF(s) - f(0) \rightarrow s\,I_1(s) - i_1(0)$$

Tambien tenemos funciones constantes, así que nuestra transformada de ① queda como:

$$sI_1(s) - i_1(0) + 50\,I_2(s) = \frac{60}{s}$$

Como nos dierón el valor inicial de $i_1(0) = 0$, nos queda como:

$SI_1(s) - \cancel{i_1(0)}_{0} + 50 I_2(s) = \frac{60}{s}$

$SI_1(s) + 50 I_2(s) = \frac{60}{s}$

Ahora, hacemos la transformada de ②:

$50(10^{-4}) \mathcal{L}\left\{\frac{di_2}{dt}\right\} + \mathcal{L}\{i_2\} - \mathcal{L}\{i_1\} = \mathcal{L}\{0\}$

Igual tenemos una transformada de derivada, así que nos queda como: $sI_2(s) - i_2(0)$

Entonces nuestra transformada de ② es:

$50(10^{-4}) SI_2(s) - i_2(0) + I_2(s) - I_1(s) = 0$

con el valor inicial de $i_2(0)=0$, nos queda como:

$50(10^{-4}) SI_2(s) - \cancel{i_2(0)}_{0} + I_2(s) - I_1(s) = 0$

$50(10^{-4}) SI_2(s) + I_2(s) - I_1(s) = 0$

Hacemos operaciones:

$\frac{1}{200} SI_2(s) + I_2(s) - I_1(s) = 0$

$\left(\frac{1}{200} SI_2(s) + I_2(s) - I_1(s) = 0\right) \frac{200}{1}$

$SI_2(s) + 200 I_2(s) - 200 I_1(s) = 0$

factorizamos:

$-200 I_1(s) + (s+200) I_2(s) = 0$

Al aplicar la TL a ① y ② nos quedo como:

$sI_1(s) + 50 I_2(s) = \frac{60}{s} \quad \cdots ③$

$-200 I_1(s) + (s+200) I_2(s) = 0 \quad \cdots ④$

De ④ despejamos a $I_1(s)$, por lo que nos queda como

$I_1(s) = \frac{-(s+200) I_2(s)}{-200}$

$I_1(s) = \frac{(s+200) I_2(s)}{200}$

A $I_1(s)$, la sustituimos en ③

$$s\left(\frac{(s+200)\,I_2(s)}{200}\right)+50\,I_2(s)=\frac{60}{s}$$

$$\frac{(s)(s+200)\,I_2(s)}{200}+50\,I_2(s)=\frac{60}{s}$$

$$\left[\frac{(s)(s+200)\,I_2(s)}{200}+50\,I_2(s)=\frac{60}{s}\right]\frac{200}{1}$$

$$(s)(s+200)\,I_2(s)+(200)(50)\,I_2(s)=\frac{(60)(200)}{s}$$

$$(s)(s+200)\,I_2(s)+10000\,I_2(s)=\frac{12000}{s}$$

factorizamos a $I_2(s)$:

$$[(s)(s+200)+10000]\,I_2(s)=\frac{12000}{s}$$

Despejamos a $I_2(s)$:

$$I_2(s)=\frac{\frac{12000}{s}}{\frac{(s)(s+200)+10000}{1}}=\frac{12000}{(s)[(s)(s+200)+10000]}$$

$$I_2(s)=\frac{12000}{s(s^2+200s+10000)}=\frac{12000}{s(s+100)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{12000}{s(s+100)^2}$$

Como ya tenemos a $I_2(s)$, ahora, lo sustituimos en $I_1(s)$, nos queda como:

$$I_1(s)=\frac{(s+200)\left(\frac{12000}{s(s+100)^2}\right)}{200}$$

$$I_1(s)=\frac{\frac{(s+200)(12000)}{s(s+100)^2}}{\frac{200}{1}}=\frac{(s+200)(12000)}{[s(s+100)^2](200)}$$

$$I_1(s)=\frac{(s+200)(60)(2\cancel{0}0)}{[s(s+100)^2](2\cancel{0}0)}$$

$$I_1(s)=\frac{(s+200)(60)}{s(s+100)^2}=\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}$$

$$I_1(s)=\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}$$

Entonces, $I_1(s)$ y $I_2(s)$ nos queda como:

$$I_1(s)=\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}$$

$$I_2(s)=\frac{12000}{s(s+100)^2}$$

Para poder aplicar TIL, debemos utilizar el MFP en $I_1(s)$ y $I_2(s)$, así que:

Aplicando MFP a $I_1(s)$, queda como:

$$I_1(s)=\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}$$

$$\frac{60s+12000}{s(s+100)^2}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+100}+\frac{C}{(s+100)^2}$$

Multiplicamos la ecuación por el denominador

$$\frac{(60s+12000)(s)(s+100)^2}{s(s+100)^2}=\frac{A(s)(s+100)^2}{s}+\frac{B(s)(s+100)^2}{s+100}+\frac{C(s)(s+100}{(s+100)}$$

se simplifica

$$60s+12000=A(s+100)^2+B(s)(s+100)+C(s)$$

$$60s+12000=A(s^2+200s+10000)+B(s)(s+100)+C(s)$$

$$\underbrace{60s}+\underbrace{12000}=\underbrace{As^2}+\underbrace{A200s}+\underbrace{A10000}+\underbrace{Bs^2}+\underbrace{B100s}+\underbrace{Cs}$$

con esto, sacamos las ecuaciones, entonces:

$A200+B100+C=60$

$A+B=0$

$A10000=12000$

Resolvemos nuestro sistema de ecuaciones:

De $A10000 = 12000$

$$A = \frac{12000}{10000} = \frac{6}{5}$$

$$A = \frac{6}{5}$$

De $A + B = 0$

$$\frac{6}{5} + B = 0 \rightarrow B = -\frac{6}{5}$$

De $A200 + B100 + C = 60$

$$\left(\frac{6}{5}\right)(200) + \left(-\frac{6}{5}\right)(100) + C = 60$$

$$240 - 120 + C = 60$$

$$C = 60 - 240 + 120$$

$$C = -60$$

Ahora lo sustituimos en las fracciones parciales:

$$= \frac{\frac{6}{5}}{\frac{s}{1}} + \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{s+100}{1}} + \frac{-60}{\frac{(s+100)^2}{1}} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

$$I_1(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

Ahora, aplicando MFP a $I_2(s)$, queda como:

$$I_2(s) = \frac{12000}{s(s+100)^2}$$

$$\frac{12000}{s(s+100)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+100} + \frac{C}{(s+100)^2}$$

$$\frac{(12000)(s)(s+100)^2}{s(s+100)^2} = \frac{A(s)(s+100)^2}{s} + \frac{B(s)(s+100)^2}{s+100} + \frac{C(s)(s+100)^2}{(s+100)^2}$$

Se simplifica

$$12000 = A(s+100)^2 + B(s)(s+100) + C(s)$$

$$12000 = A(s^2 + 200s + 10000) + B(s)(s+100) + C(s)$$

$$12000 = As^2 + A200As + A10000 + Bs^2 + B100s + Cs$$

$$12000 = As^2 + 200As + A10000 + Bs^2 + Bs100 + Cs$$

con esto sacamos las ecuaciones, entonces.

$$A10000 = 12000$$
$$A + B = 0$$
$$200A + 100B + C = 0$$

Resolvemos nuestro sistema de ecuaciones.

De $A10000 = 12000$

$$A = \frac{12000}{10000} = \frac{6}{5}$$
$$A = \frac{6}{5}$$

De $A + B = 0$

$$\frac{6}{5} + B = 0 \rightarrow B = -\frac{6}{5}$$

De $200A + 100B + C = 0$

$$200\left(\frac{6}{5}\right) + 100\left(-\frac{6}{5}\right) + C = 0$$
$$240 - 120 + C = 0$$
$$C = -240 + 120$$
$$C = -120$$

Ahora lo sustituimos en las fracciones parciales.

$$= \frac{\frac{6}{5}}{\frac{s}{1}} + \frac{-\frac{6}{5}}{\frac{s+100}{1}} + \frac{\frac{-120}{1}}{\frac{(s+100)^2}{1}} = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

$$I_2(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

Entonces, al expandir por el MFP a $I_1(s)$ e $I_2(s)$ queda como:

$$I_1(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$
$$I_2(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

Ahora si le podemos aplicar la TIL a $I_1(s)$ e $I_2(s)$.

Aplicando la TIL a $I_1(s)$:

$$I_1(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{60}{(s+100)^2}$$

Sacamos sus coeficientes

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 120\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)}\right.$$

Hacemos cada TIL:

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_1(s)\} = i_1(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} = e^{-100t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\} =$$ Para realizar esta transformada inversa de Laplace, utilizaremos el primer teorema de traslación:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\} = e^{-100t}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t\,e^{-100t}$$

$$s \to s+100$$

Ya que tenemos todas las transformadas inversas de Laplace; nos queda como:

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60\,t\,e^{-100t}$$

Ahora, aplicando la TIL a $I_2(s)$:

$$I_2(s) = \frac{6}{5s} - \frac{6}{5(s+100)} - \frac{120}{(s+100)^2}$$

Sacamos sus coeficientes

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} - \frac{6}{5}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} - 120\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\}$$

Hacemos cada TIL

$$\mathcal{L}^{-1}\{I_2(s)\} = i_2(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+100}\right\} = e^{-100t}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\} = \begin{cases} \text{Para realizar esta TIL, utilizaremos} \\ \text{el primer teorema de traslación} \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+100)^2}\right\} = e^{-100t}\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = e^{-100t}\,t \\ s \to s+100 \end{cases}$$

Ya que tenemos todas las TIL, nos queda como:

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120\,te^{-100t}$$

Encontramos que las corrientes electricas son:

$$i_1(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 60\,te^{-100t}$$

$$i_2(t) = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-100t} - 120\,te^{-100t}$$