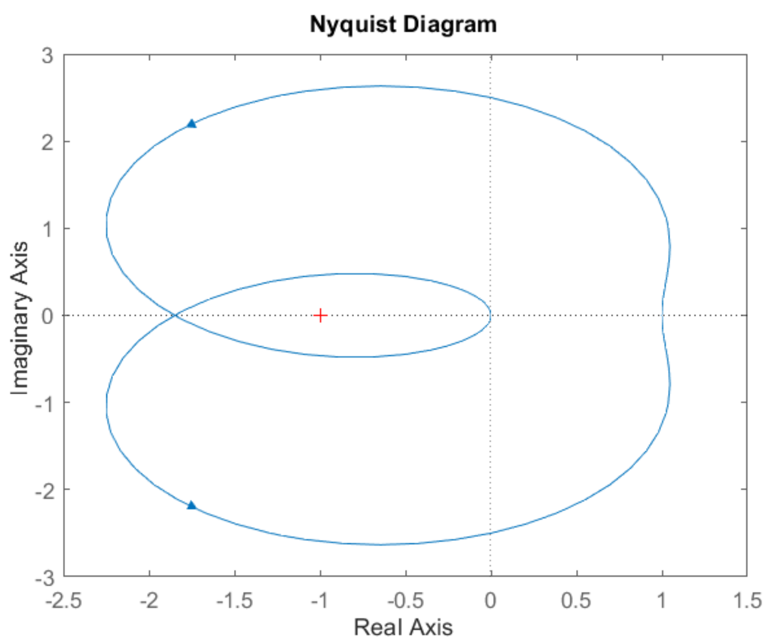
# Tarea 1

**Control Moderno**

**Cano García Eduardo**

**6° 6**

1. Para el sistema descrito por la función de transferencia en lazo abierto $G_p(s) = \frac{s^2+2s+1}{s^3+0.2s^2+s+1}$, en MATLAB, genere su diagrama de Nyquist. ¿De acuerdo con el diagrama de Nyquist es el sistema estable en lazo cerrado? ¿Por qué? Verifique la predicción basada en el criterio de estabilidad de Nyquist con la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria.




El sistema es estable debido a que existen dos en envolvimientos del punto $-1 + j0$, en sentido contrario al reloj y también hay dos polos de $G_p(s)$en el lado derecho del plano.

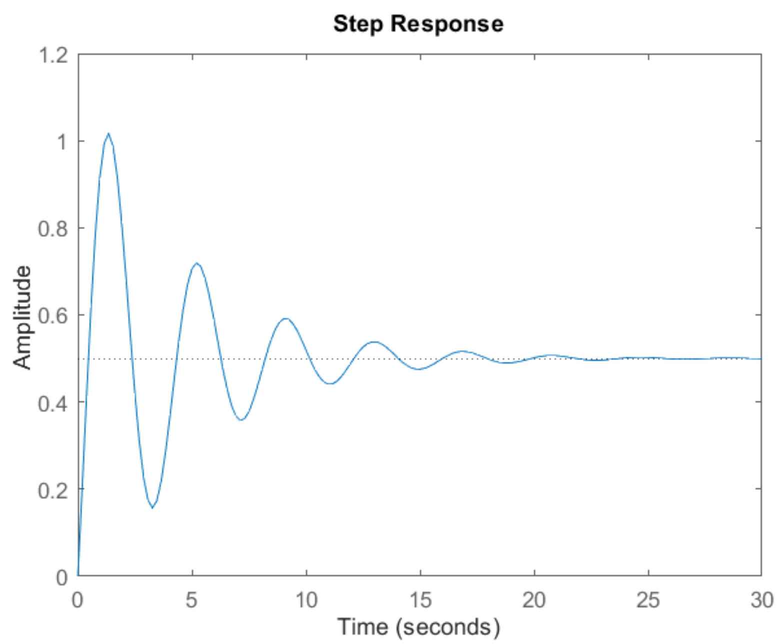
Polos:

0.2623 + 1.1451i

0.2623 - 1.1451i

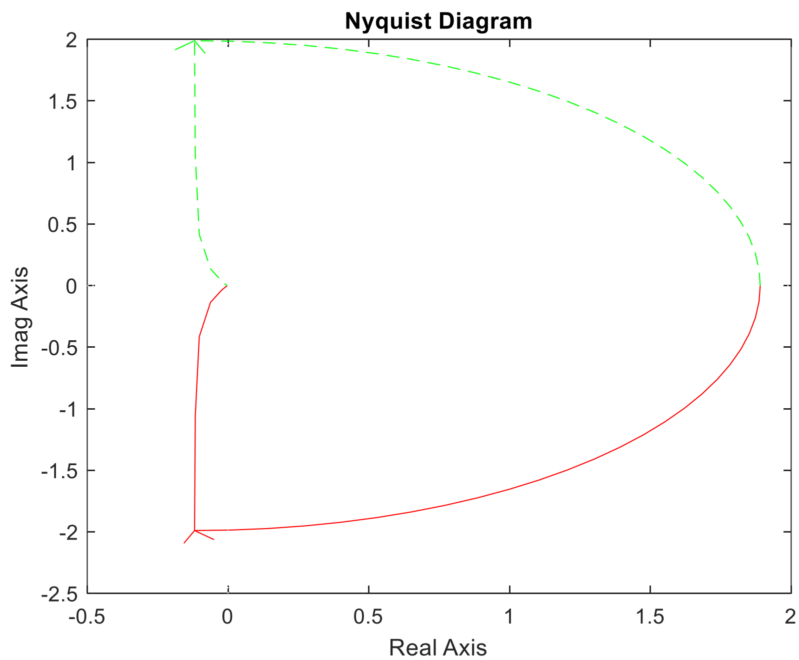
-0.7246 + 0.0000i

Respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria:



2. Para el sistema descrito por la función de transferencia en lazo abierto $G_p(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$, en MATLAB, genere los diagramas de Nyquist para los valores de ganancia K = 1, K = 10 y K = 100. ¿Como es el comportamiento del sistema en lazo cerrado bajo las tres condiciones de acuerdo con el criterio de estabilidad de Nyquist? Verificar la predicción basada en el criterio de estabilidad de Nyquist con la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria.

a. $G_p(s) = \frac{1(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$




El sistema es estable porque no hay envolvimientos del punto $-1+0j$ y no hay polos en el lado derecho.

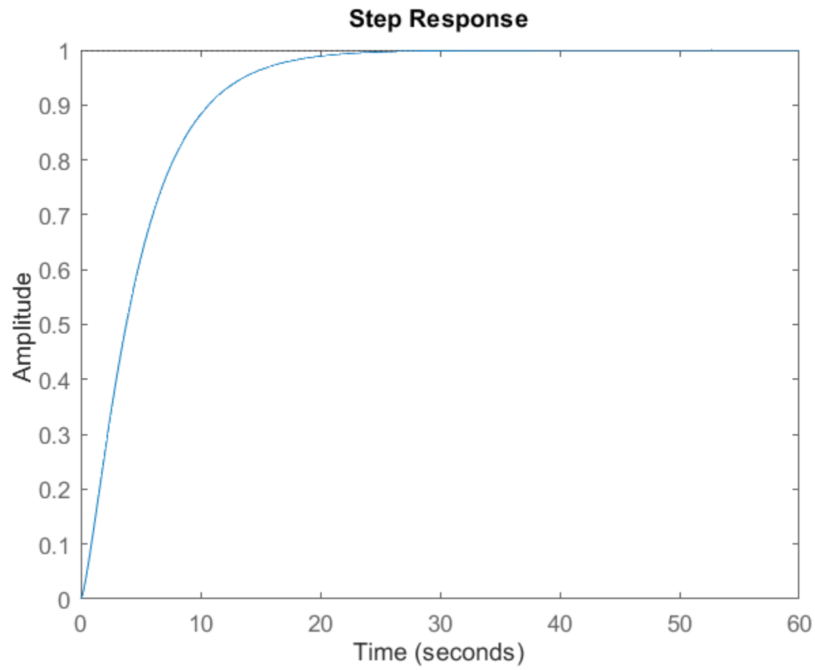
Polos:

0

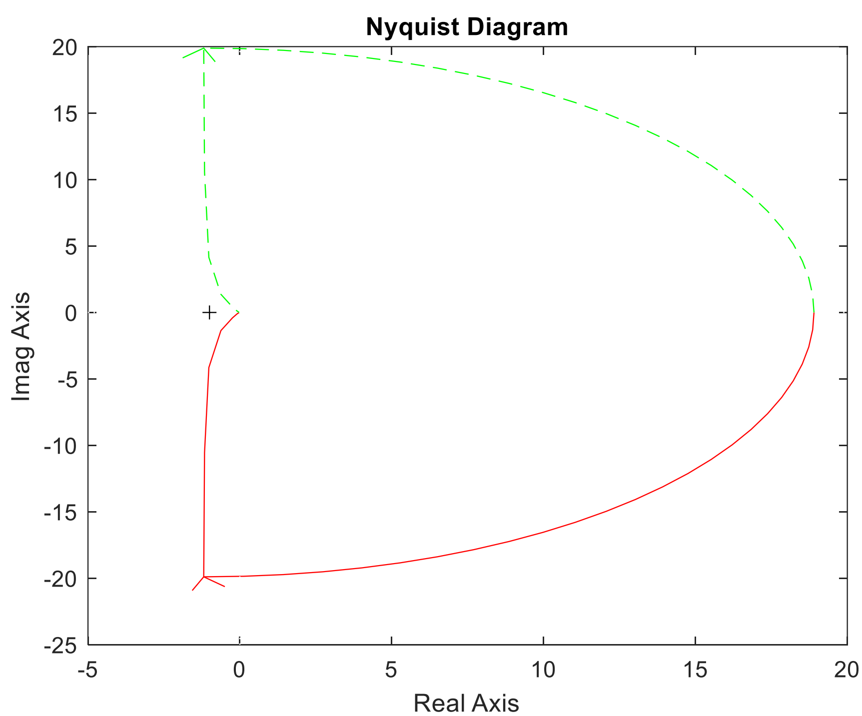
-10

-1

Respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria:




b. $G_p(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$




El sistema es estable porque no hay envolvimientos del punto $-1+0j$ y no hay polos en el lado derecho.

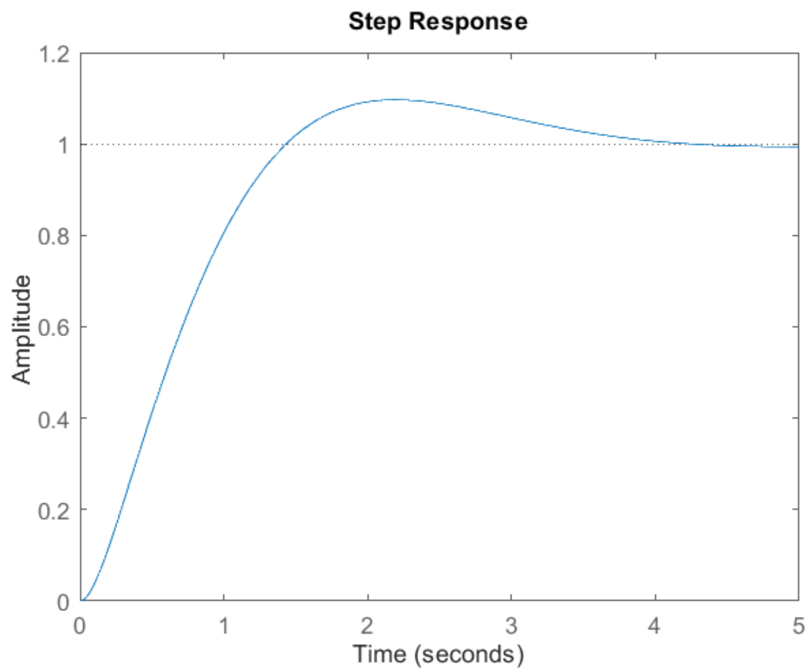
Polos:

0

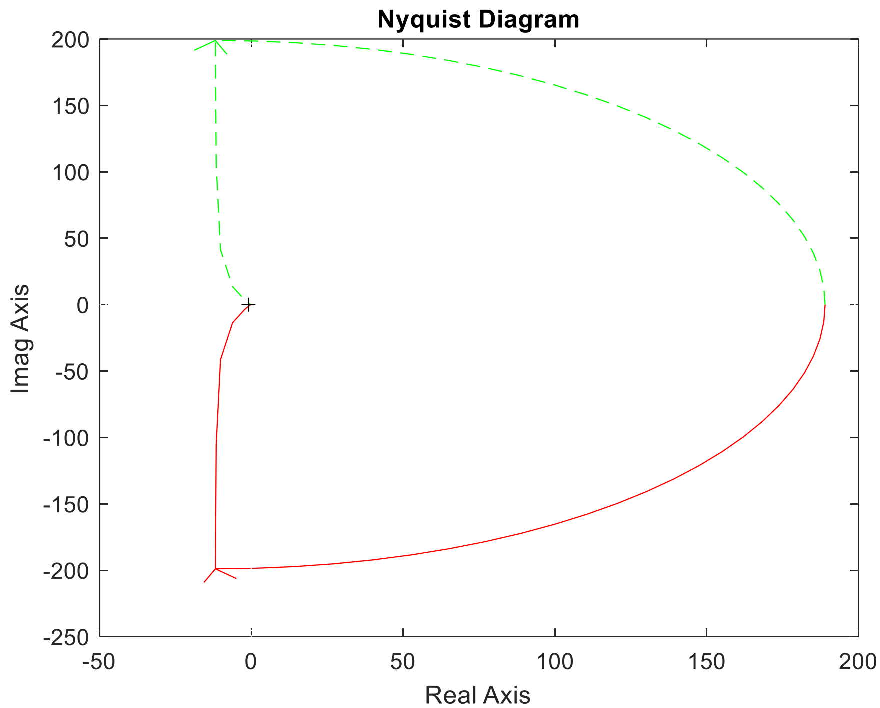
-10

-1

Respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria:

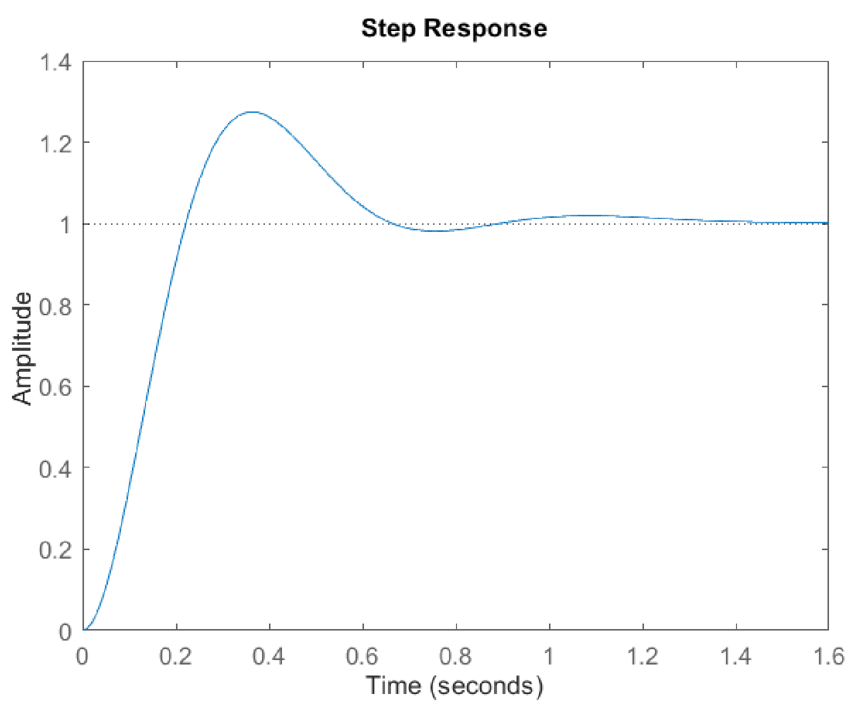


c. $G_p(s) = \frac{100(s+2)}{s(s+1)(s+10)}$

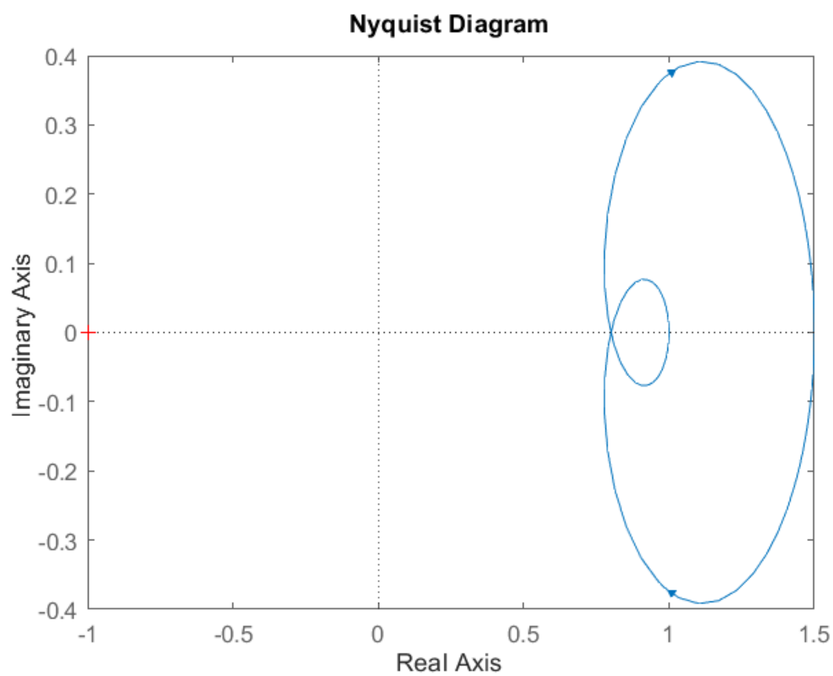



El grafico de Nyquist de la función de transferencia de lazo abierto toca el punto $-1 + 0j$ y no lo encierra, el sistema es marginalmente estable.

Respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria:

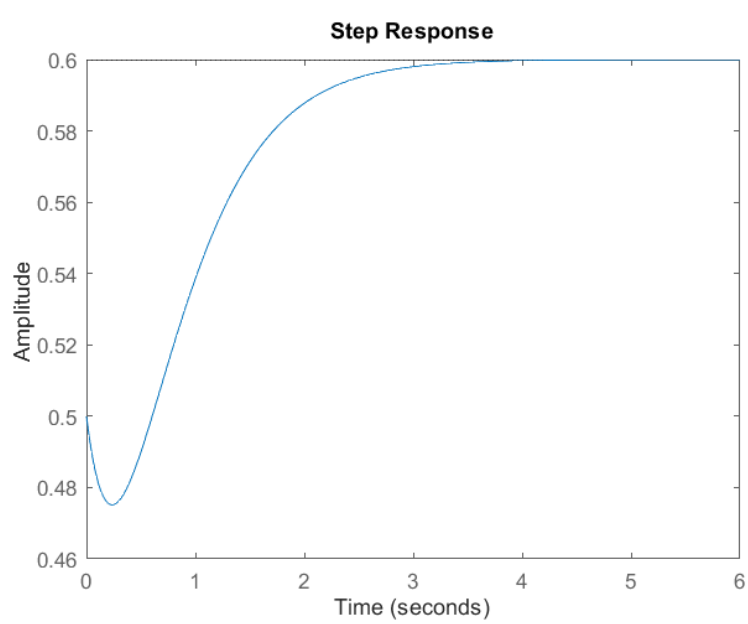


3. Genere el diagrama de Nyquist para el sistema dado por la función de transferencia $G_p(s) = \frac{s^2+4s+6}{s^2+5s+4}$ e infiera la estabilidad en lazo cerrado. Verifique su predicción basada en Nyquist con la respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria.



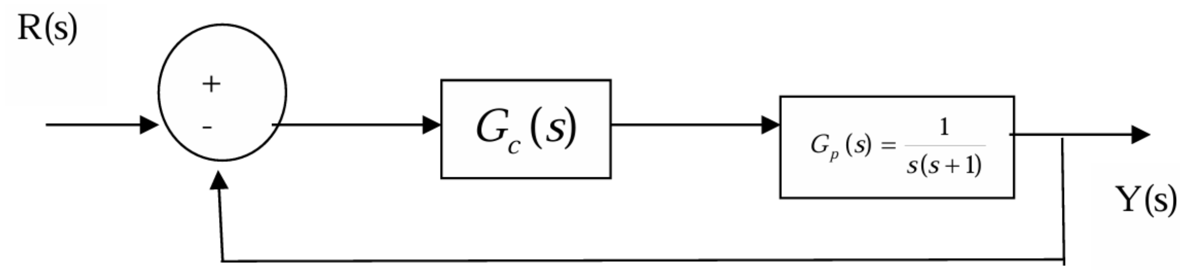

El sistema es estable debido a que no existen envolvimientos del punto $-1 + j0$ y también no hay dos polos de $G_p(s)$en el lado derecho del plano.

Respuesta del sistema en lazo cerrado a una entrada escalón unitaria:



4. 4

5. Considere el sistema de control mostrado en el diagrama siguiente. Con el método de respuesta en frecuencia diseñe un compensador de adelanto $G_c(s)$ para el sistema con función de transferencia en lazo abierto $G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)}$ tal que el constante error velocidad estática del sistema compensado sea $K_v = 50s^{-1}$, el margen de fase sea 50° y el margen de ganancia sea no menor a 8 dB.




   a. Usar solamente las funciones del Control System Toolbox de MATLAB (bode, margin, step, etc.)

**Paso 1.**

$$G_c(s)G_p(s) = K\frac{\tau s + 1}{\alpha\tau s + 1}G_p(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha\tau s + 1}KG_p(s) = \frac{\tau s + 1}{\alpha\tau s + 1}G_1(s)$$

$$G_1(s) = KG_p(s) = \frac{K}{s(s+1)} \qquad K = K_c\alpha$$

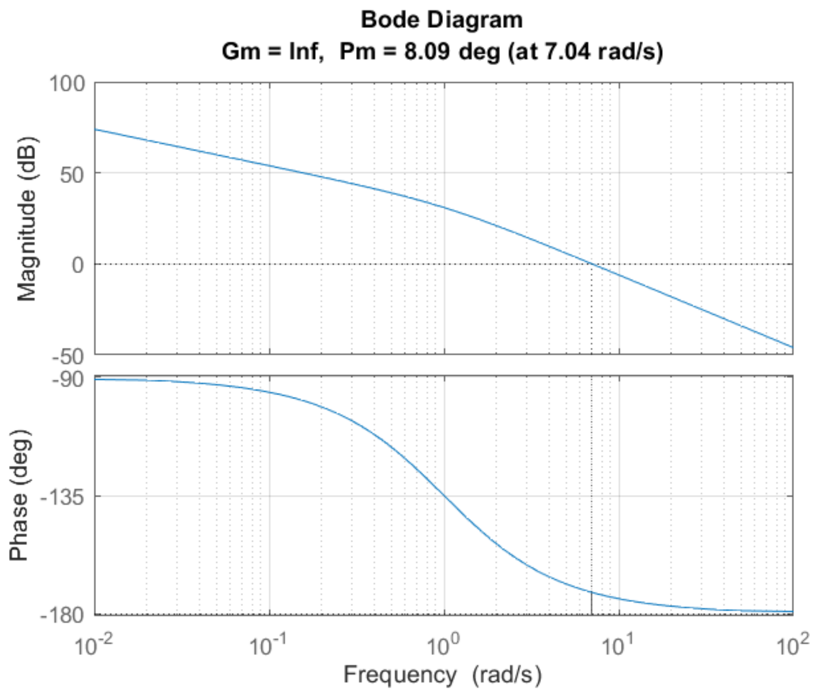
$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)G_p(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\tau s + 1}{\alpha\tau s + 1}G_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(s+1)} = K = 50$$

$$K = 50$$

**Paso 2. Diagrama de Bode**

$$G_1(s) = KG_p(s) = \frac{K}{s(s+1)} = \frac{50}{s(s+1)}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{50}{j\omega(j\omega + 1)}$$




**Paso 3.** Como se requiere un margen de fase de al menos 50°, Entonces se necesita un ángulo adicional de $50° - 8° = 42°$. Agregando $12°$ mas el ángulo necesario es de $54°$.

**Paso 4.**

**Determinar el factor de atenuación usando:**

$$\sin(\varphi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 54°$$

$$\sin(\varphi_m) = \sin(54° \times \frac{\pi}{180°}) = 0.8090$$

$$0.8090 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$0.8090 + 0.8090\alpha = 1 - \alpha$$

$$0.8090\alpha + \alpha = 1 - 0.8090$$

$$1.8090\alpha = 0.1909$$

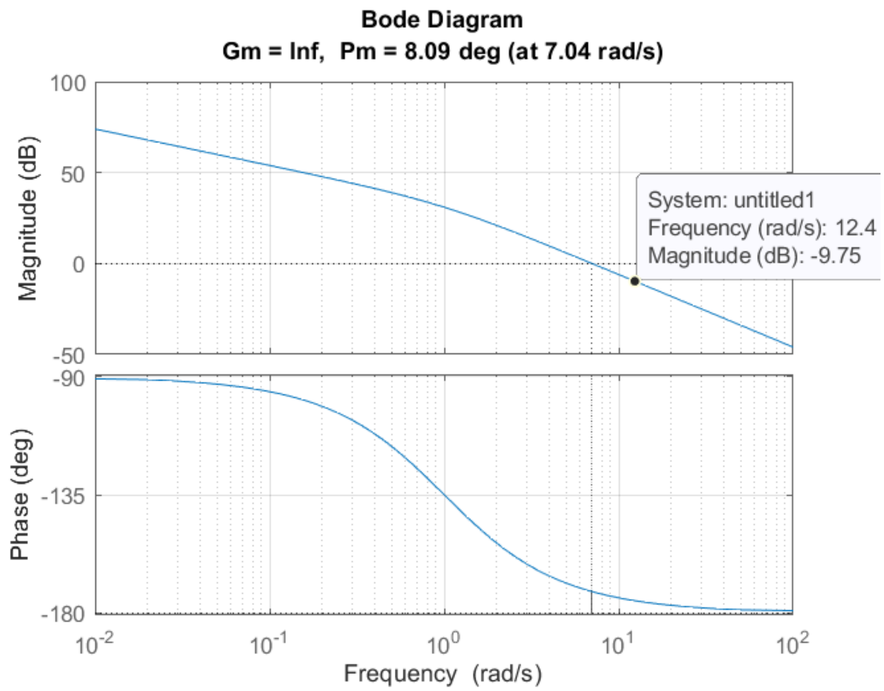
$$\alpha = \frac{0.1909}{1.8090} = 0.1055$$

Determinar la frecuencia donde la magnitud del sistema sin compensación $G_1(j\omega)$ es igual a:

$$-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.1055}} = \frac{1}{0.3249} = 3.0776$$

$$-20\log(3.0776) = -9.7642\ dB$$




Se corresponde con $\omega = 12.4\ ras/seg$

Seleccionar esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de la ganancia. Esta frecuencia se corresponde a:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}$$

**Paso 5.** Determinar las frecuencias esquina del compensador con adelanto

Cero del compensador con adelanto: $\omega = \frac{1}{\tau}$

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\alpha}\omega_c$$

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{0.1055} \times 12.4$$

$$\frac{1}{\tau} = 4.0276$$

$$\tau = \frac{1}{4.0276} = 0.2482$$

$$\omega = \frac{1}{0.1428} = 4.0276$$

Polo del compensador con adelanto: $\omega = \frac{1}{\alpha\tau}$

$$\omega = \frac{1}{\alpha\tau} = \frac{1}{(0.1055)(0.2482)} = 38.1896$$

**Paso 6.** Calcular $K_c$

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

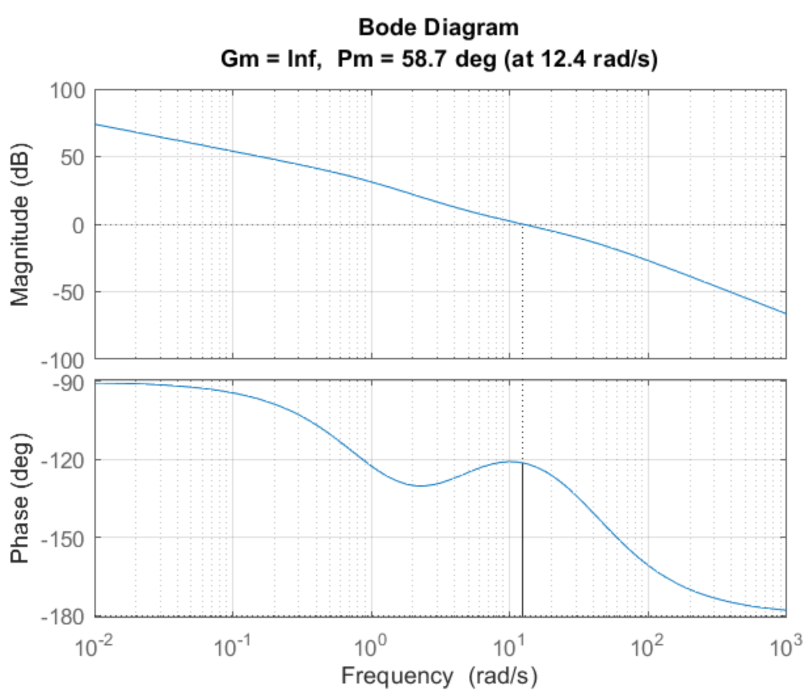
$$K_c = \frac{50}{0.1055} = 473.9336$$

$$G_C(s) = K_c \frac{s + 4.0276}{s + 38.1896}$$

$$G_C(s) = 473.9336 \frac{s + 4.0276}{s + 38.1896} = 50 \frac{0.2482s + 1}{0.0261s + 1}$$

**Paso 7**. La FT en lazo abierto del sistema compensado es:

$$G_C(s)\ G_p(s) = 51.4827 \frac{s + 7}{s + 7.21} \frac{1}{s(s + 1)}$$

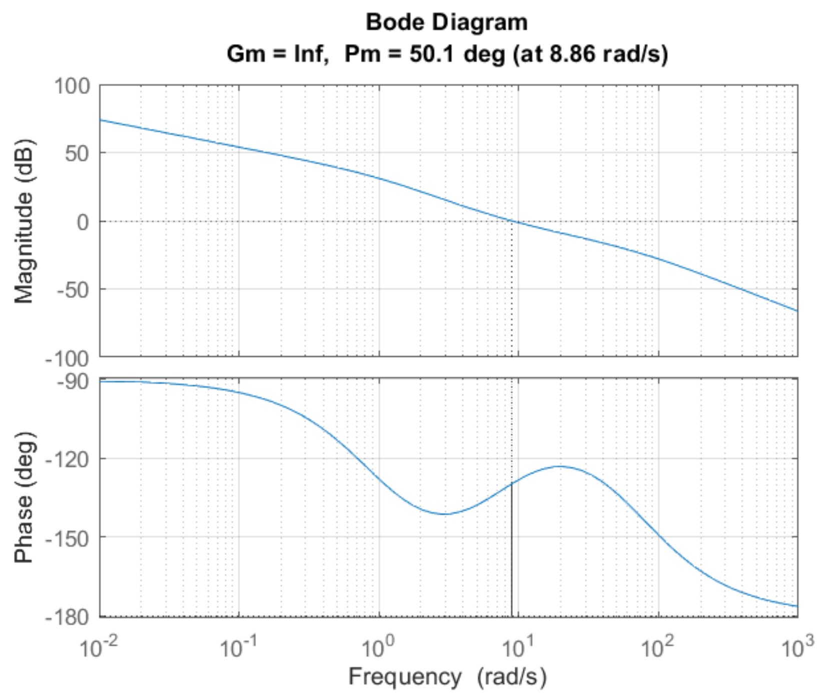


**Paso 5.1**. Suponiendo que:

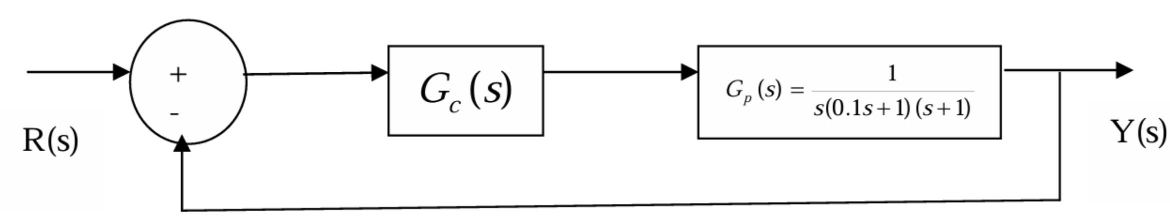
$$\tau = 0.14$$

$$G_C(s) = 4\frac{0.14s+1}{0.0147s+1}$$

$$G_C(s)\,G_p(s) = 4\frac{0.14s+1}{0.0147s+1}\,\frac{1}{s(s+1)}$$




6. Considere el sistema de control mostrado en el diagrama siguiente. Con el método de respuesta en frecuencia diseñe un compensador $G_c(s)$ de adelanto tal que el constante error velocidad estática del sistema compensado sea $K_v = 4s^{-1}$ el margen de fase sea 45° y el margen de ganancia sea no menor a 8 dB.




   a. Usar las funciones del Control System Toolbox de MATLAB.

**Paso 1.**

$$G_c(s)G_p(s) = K\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}G_p(s) = \frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}KG_p(s) = \frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}G_1(s)$$

$$G_1(s) = KG_p(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(s+1)} \qquad K = K_c\alpha$$

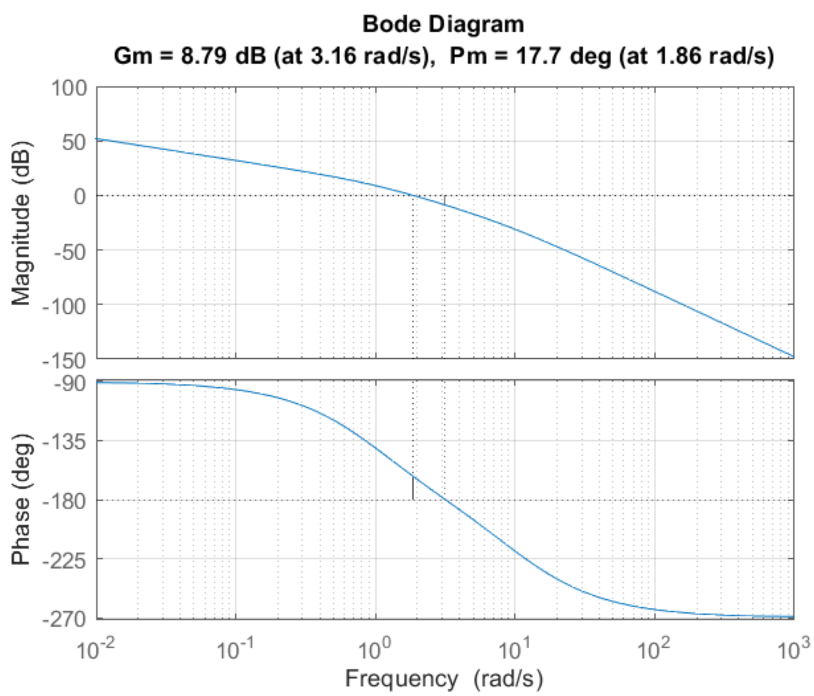
$$K_v = \lim_{s\to 0} s\,G_c(s)G_p(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{\tau s+1}{\alpha\tau s+1}G_1(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{K}{s(0.1s+1)(s+1)} = \frac{K}{(1)(1)}$$
$$= K = 4$$

$$K = 4$$

**Paso 2. Diagrama de Bode**

$$G_1(s) = KG_p(s) = \frac{K}{s(0.1s+1)(s+1)} = \frac{4}{s(0.1s+1)(s+1)}$$

$$G_1(j\omega) = \frac{4}{j\omega(0.1j\omega+1)(j\omega+1)}$$




**Paso 3.** Como se requiere un margen de fase de al menos 50°, Entonces se necesita un ángulo adicional de $45° - 17.7° = 27.3°$. Agregando 12° mas el ángulo necesario es de 39.3°.

**Paso 4. Determinar el factor de atenuación usando:**

$$\sin(\varphi_m) = \frac{1-\alpha}{1+\alpha} = 39.3°$$

$$\sin(\varphi_m) = \sin(39.3° \times \frac{\pi}{180°}) = 0.6414$$

$$0.6414 = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$$

$$0.6414 + 0.6414\alpha = 1 - \alpha$$

$$0.6414\alpha + \alpha = 1 - 0.6414$$

$$1.6414\alpha = 0.3585$$

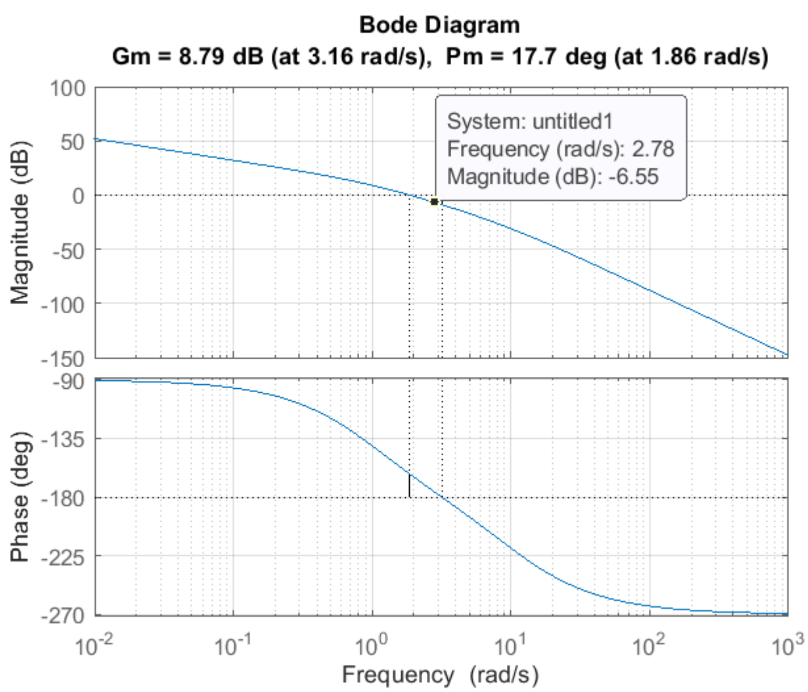
$$\alpha = \frac{0.3585}{1.6414} = 0.2184$$

Determinar la frecuencia donde la magnitud del sistema sin compensación $G_1(j\omega)$ es igual a:

$$-20\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.2184}} = \frac{1}{0.4673} = 2.1398$$

$$-20\log(2.1398) = -6.6074\ dB$$




Se corresponde con $\omega = 2.8\ rad/seg$

Seleccionar esta frecuencia como la nueva frecuencia de cruce de la ganancia. Esta frecuencia se corresponde a:

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}\tau}$$

**Paso 5.** Determinar las frecuencias esquina del compensador con adelanto

Cero del compensador con adelanto: $\omega = \frac{1}{\tau}$

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{\alpha}\omega_c$$

$$\frac{1}{\tau} = \sqrt{0.2184} \times 2.8$$

$$\frac{1}{\tau} = 1.3085$$

$$\tau = \frac{1}{1.3085} = 0.7642$$

$$\omega = \frac{1}{0.7642} = 1.3085$$

Polo del compensador con adelanto: $\omega = \frac{1}{\alpha\tau}$

$$\omega = \frac{1}{\alpha\tau} = \frac{1}{(0.2184)(0.7642)} = 6$$

**Paso 6.** Calcular $K_c$

$$K_c = \frac{K}{\alpha}$$

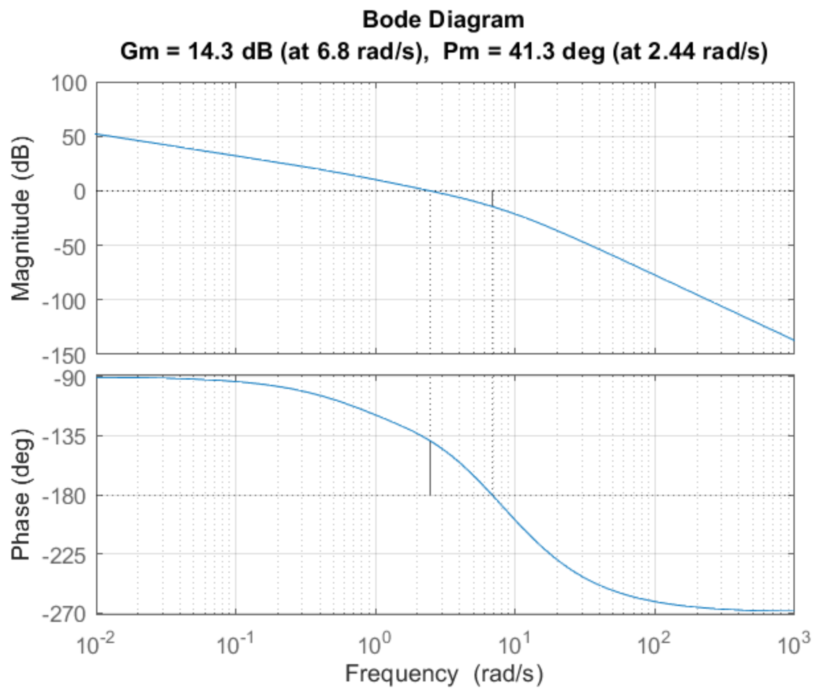
$$K_c = \frac{4}{0.2184} = 18.3150$$

$$G_C(s) = K_c \frac{s + 1.3085}{s + 6}$$

$$G_C(s) = 18.3150 \frac{s + 1.3085}{s + 6} = 4 \frac{0.7642s + 1}{0.1669s + 1}$$

**Paso 7**. La FT en lazo abierto del sistema compensado es:

$$G_C(s)\ G_p(s) = 4 \frac{0.7642s + 1}{0.1669s + 1} \frac{1}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$$

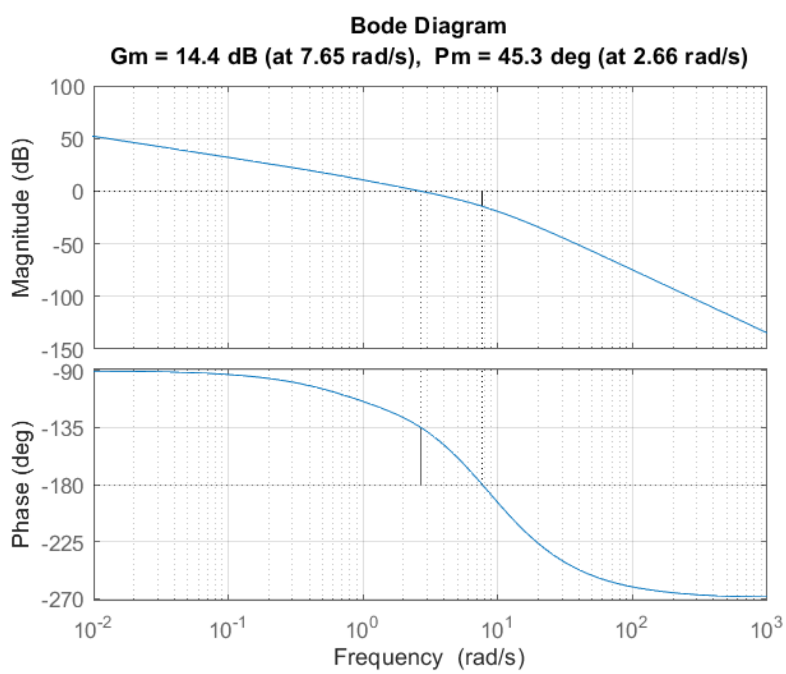



**Paso 5.1**. Suponiendo que:

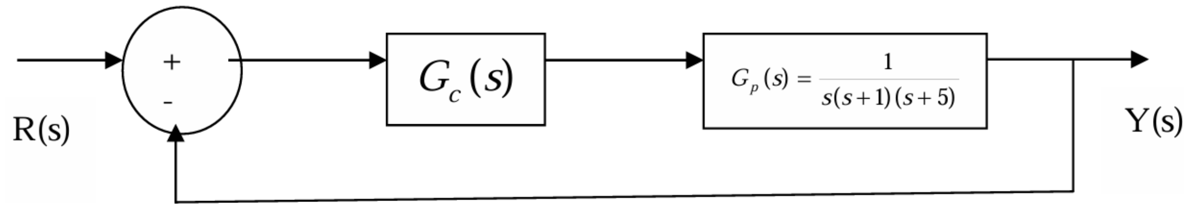
$$\tau = 0.7$$

$$G_C(s) = 4\frac{0.7s + 1}{0.1528s + 1}$$

$$G_C(s)\, G_p(s) = 4\frac{0.7s + 1}{0.1528s + 1}\,\frac{1}{s(0.1s + 1)(s + 1)}$$



7. Considere el sistema de control mostrado en el diagrama siguiente. Con el método de respuesta en frecuencia diseñe un compensador $G_c(s)$ atraso-adelanto tal que la constante error velocidad estática del sistema compensado sea $K_v = 20s^{-1}$ , el margen de fase sea 60° y el margen de ganancia sea no menor a 8 dB.




a. Usar las funciones del Control System Toolbox de MATLAB.

$$G_c(s)G_P(s) = K_c\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_1}}{s+\frac{\beta}{\tau_1}}\right)\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_2}}{s+\frac{1}{\beta\tau_2}}\right)\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

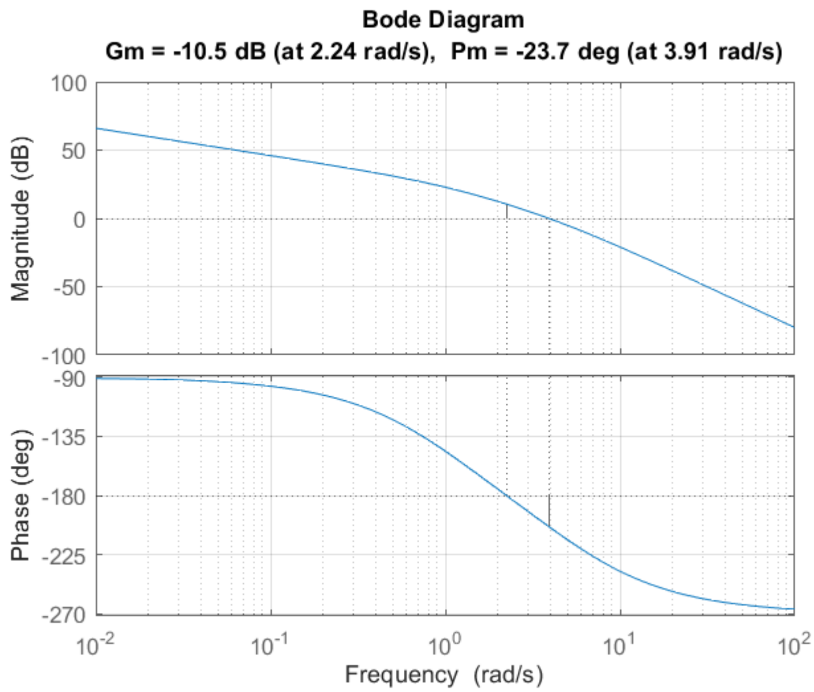
$$= K_c\frac{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}{\left(\frac{\tau_1}{\beta}s+1\right)(\beta\tau_2 s+1)}\frac{1}{s(s+1)(s+5)}$$

$$K_v = 20 = \lim_{s\to 0} s\, G_c(s)G_p(s) = \lim_{s\to 0} s\, G_c(s)\frac{K_c}{s(s+1)(s+5)} = \frac{K_c}{(1)(5)}$$

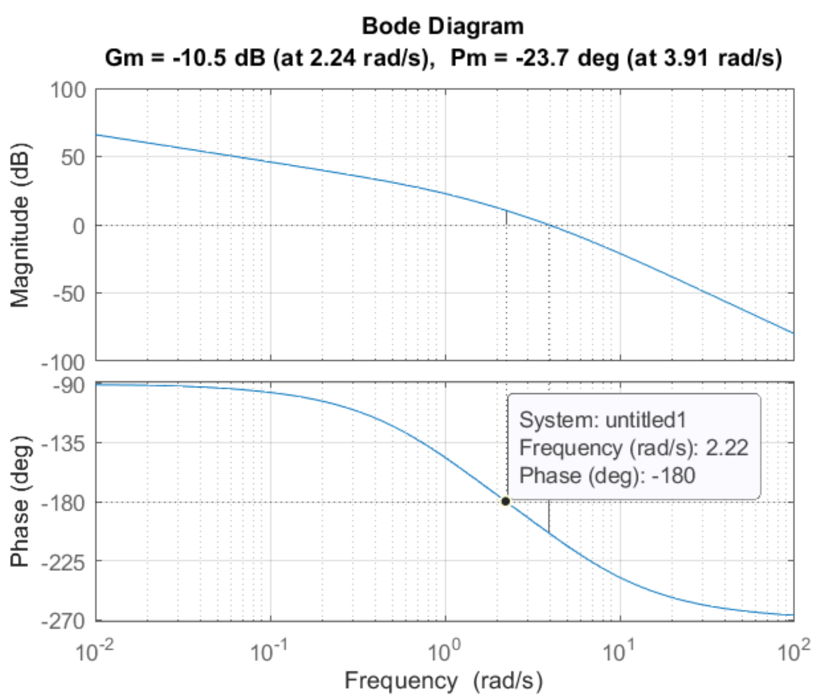
$$K_c = 20 * 5 = 100$$

$$G_1(s) = \frac{100}{s(s+1)(s+5)}$$

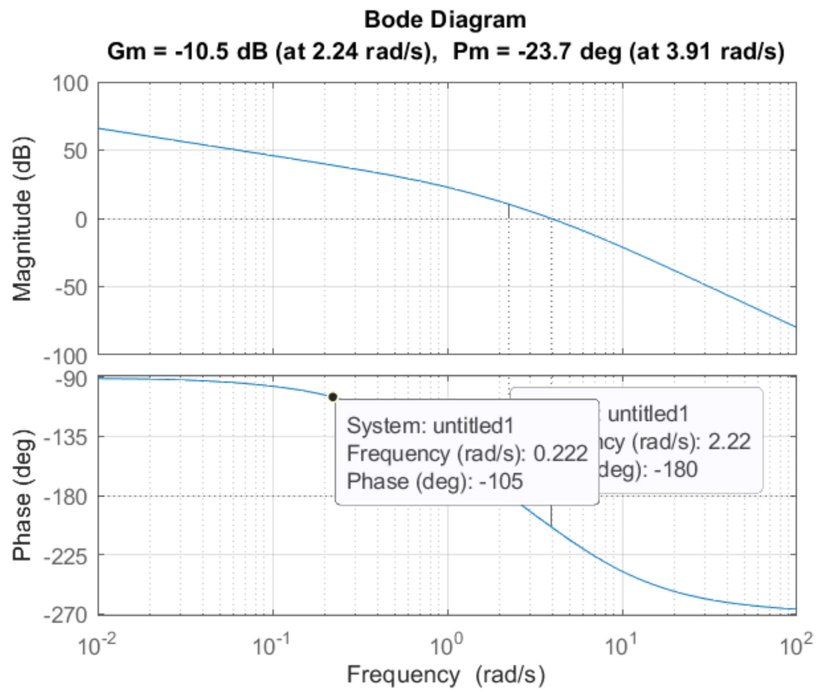
$$G_1(j\omega) = \frac{100}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+5)}$$




**Elección de una nueva frecuencia de cruce de la ganancia**




**Determinar las frecuencias esquina de la porción retraso del compensador.** Eligiendo la frecuencia asociada con el cero 1 década por debajo de la nueva frecuencia de cruce de la ganancia.




**Elección del cero del compensador con retraso:**

$$\omega_z = 0.222\, rad/seg$$

$$\omega_z = \frac{1}{\tau_2} = 0.222$$

$$\tau_2 = 4.5045$$

Dado que el margen de fase deseado es 50°, se **calcula el valor de $\boldsymbol{\beta}$** como:

$$\sin \phi_m = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

$$\sin(60° \times \frac{\pi}{180°}) = 0.0182$$

$$0.0182 = \frac{\beta - 1}{\beta + 1}$$

$$0.0182\beta + 0.0182 = \beta - 1$$

$$0.0182\beta - \beta = -1 - 0.0182$$

$$-0.9818\beta = -1.0182$$

$$\beta = \frac{-1.0182}{-0.9818} = 1.0370$$

**Elección polo del compensador con retraso:**

$$\omega_p = \frac{1}{\beta\tau_2} = \frac{1}{(1.0370)(4.5045)} = 0.2140$$

La FT de la parte retraso del compensador retraso-adelanto es:

$$K_c\left(\frac{s+\frac{1}{\tau_2}}{s+\frac{1}{\beta\tau_2}}\right) = K_c\beta\,\frac{\tau_2 s+1}{\beta\tau_2 s+1}$$

$$100\left(\frac{s+\frac{1}{4.5045}}{s+\frac{1}{1.0370\times 4.5045}}\right) = 100\times 1.0370\,\frac{4.5045s+1}{1.0370\times 4.5045s+1}$$

$$100\left(\frac{s+0.222}{s+0.2140}\right) = 103.70\,\frac{4.5045s+1}{4.6711s+1}$$