

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Departamento de Electrónica



Apuntes de clase

Métodos Matemáticos 2

Eduardo Vázquez Díaz

lalohao@gmail.com

Índice

1. Repaso	3
2. Funciones de varias variables	3
2.1. Definición de una función de varias variables	3
2.2. Ejemplos de funciones de varias variables	4
2.3. Ejercicios	4
3. Derivadas parciales	5
4. Derivada direccional	5
4.1. Vectores en el espacio	5
4.1.1. Ejemplo	6
4.2. Derivadas direccionales y gradientes	7
4.2.1. Derivada direccional de f en la dirección de u	8
4.2.2. Ejemplo	9

1. Repaso

Graficar dominio, codominio (rango) de las siguientes funciones

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$

2. $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$

4. $z = x^2 + y^2$

5. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

6. $z - y^2 + x^2 = 0$

7. $16z + x^2 + 4y^2 = 0$

8. $36 - x^2 - 4y^2 = 9z^2$

9. $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$

10. $9z^2 - 4y^2 - x^2 = 36$

2. Funciones de varias variables

Una función de 2 variables se escribe como

$$z = f(x, y) = x^2 + xy$$

Una función de 3 variables se escribe como

$$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$$

2.1. Definición de una función de varias variables

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Y a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un número real $f(x, y)$ entonces se dice que f es una función de x e y . El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el rango de f .

Si f es una función de 2 variables independientes x e y el dominio de f es una región en el plano xy .

Si f es una función de 3 variables independientes x, y e z el dominio es una región en el espacio.

Si $z = f(x, y)$ las variables independientes son x e y , y z es la variable independiente.

2.2. Ejemplos de funciones de varias variables

Algunas magnitudes físicas:

Trabajo realizado por una fuerza $v = f \cdot d$

Volumen de un cilindro circular recto $v = \pi r^2 h$

Volumen de un solido rectangular $v = lwh$

2.3. Ejercicios

Sea $f(x, y) = x^2 y + 1$ encontrar:

1. $f(2, 1) = (2)^2 (1) + 1 = 4 + 1 = 5$
2. $f(1, 2) = (1)^2 (2) + 1 = 2 + 1 = 3$
3. $f(0, 0) = (0)^2 (0) + 1 = 1$
4. $f(1, -3) = (1)^2 (-3) + 1 = -3 + 1 = -2$
5. $f(3a, a) = (3a)^2 (a) + 1 = 9a^2 \cdot a + 1 = 9a^3 + 1$
6. $f(ab, a - b) = (ab)^2 (a - b) + 1 = a^2 b^2 (a - b) + 1 = a^3 b^2 - a^2 b^3 + 1$

Sea $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$ encontrar:

1. $f(t, t^2) = t + \sqrt[3]{t \cdot t^2} = t + \sqrt[3]{t^3} = t + t = 2t$
2. $f(2y^2, 4y) = 2y^2 + \sqrt[3]{2y^2 \cdot 4y} = 2y^2 + \sqrt[3]{8y^3} = 2y^2 + 2y$

Sea $g(x) = x \operatorname{sen} x$ encontrar:

1. $g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)$
2. $g(xy) = xy \operatorname{sen}(xy)$
3. $g(x - y) = (x - y) \operatorname{sen}(x - y) = x \operatorname{sen}(x - y) - y \operatorname{sen}(x - y)$

Encontrar $F(g(x), h(y))$ si $F(x, y) = xe^{xy}$; $g(x) = x^3$; $h(y) = 3y + 1$

$$F(x^3, 3y + 1) = x^3 e^{x^3(3y+1)} = x^3 e^{3x^3y+x^3}$$

Encontrar $g(u(x, y), \tau(x, y))$ si $g(x, y) = y \operatorname{sen}(x^2 y)$; $u(x, y) = x^2 y^3$; $\tau(x, y) = \pi xy$

$$F(x^2 y^3, \pi xy) = (\pi xy) \operatorname{sen}((x^2 y^3)^2 (\pi xy)) = \pi xy \operatorname{sen}((x^4 y^6)(\pi xy)) = \pi xy \operatorname{sen}(\pi x^5 y^7)$$

3. Derivadas parciales

Estudiaremos derivadas relacionadas con funciones de 2 variables.

Sea $f(x, y)$, si $y = y_0$ se toma como constante al considerar a x como variable entonces $f(x, y_0)$ solo esta en función de x .

Si esta función es derivable en $x = x_0$ entonces el valor de esta derivada se denota por $f_x(x_0, y_0)$ y se le llama derivada parcial en f con respecto a x en el punto (x_0, y_0) .

Para obtener $f_x(x, y)$ se deriva $f(x, y)$ con respecto a x , tratando a y como constante.

Para obtener $f_y(x, y)$ se deriva $f(x, y)$ con respecto a y , tratando a x como constante.

4. Derivada direccional

4.1. Vectores en el espacio

Sean $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar

1. Igualdad de vectores

$$u = v \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$$

2. Longitud

$$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

3. Vector unitario en dirección v

$$u = \frac{1}{\|v\|} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$$

4. Suma de vectores

$$v + u = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$$

5. Producto por un escalar

$$cv = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$$

6. Vectores paralelos

Dos vectores no nulos u y v son paralelos si existe algún escalar c tal que $u = cv$

7. Producto punto/escalar

$$u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

8. Vectores ortogonales

u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$

9. Angulo entre vectores

El angulo entre u y v se define como $\cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$

10. Desigualdad triangular

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

11. Proyección de u sobre v

$$\text{proy}_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$$

4.1.1. Ejemplo

1. Halla los componentes y la longitud del vector v cuyo punto inicial es $(-2, 3, 1)$ y cuyo punto final es $(0, -4, 4)$, al igual que el vector unitario.

a) Componentes $v = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1 \rangle = \langle 2, -7, 3 \rangle$

b) Longitud $\|v\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$

c) Vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{62}} \langle 2, -7, 3 \rangle$

2. Dados $u = \langle 3, -1, 2 \rangle$, $v = \langle -4, 0, 2 \rangle$, $w = \langle 1, -1, 2 \rangle$, $z = \langle 2, 0, -1 \rangle$ encontrar el angulo entre

a) u y v

$$\|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{20}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle 3, -1, 2 \rangle \cdot \langle -4, 0, 2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-2+4}{2\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}$$

$$\text{Por lo tanto } \theta = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = 118,56^\circ$$

b) u y w

$$\|u\| = \sqrt{14}, \|w\| = \sqrt{6}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle 3, -1, 2 \rangle \cdot \langle 1, -1, 2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3+1+4}{\sqrt{84}} = \frac{8}{\sqrt{84}}$$

$$\theta = 29,2^\circ$$

c) v y z

$$\|v\| = \sqrt{20}, \|z\| = \sqrt{5}$$

$$\cos(\theta) = \frac{\langle -4, 0, 2 \rangle \cdot \langle 2, 0, -1 \rangle}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-8-2}{\sqrt{100}} = \frac{-10}{10} = -1$$

$$\theta = 180^\circ$$

3. Encontrar la proyección de u sobre v si $u = 3i - 5j + 2k$ y $v = 7i + j - 2k$

$$\|v\| = \sqrt{49 + 1 + 4} = \sqrt{54}$$

$$\text{proy}_v u = \frac{\langle 3, -5, 2 \rangle \cdot \langle 7, 1, -2 \rangle}{54} \langle 7, 1, -2 \rangle = \frac{21-5-4}{54} \langle 7, 1, -2 \rangle = \frac{12}{54} \langle 7, 1, -2 \rangle = \frac{2}{9} \langle 7, 1, -2 \rangle$$

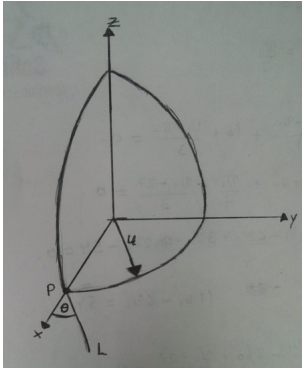
4.2. Derivadas direccionales y gradientes

Para determinar la pendiente de una superficie en un punto dado definimos un nuevo tipo de derivada llamada derivada direccional.

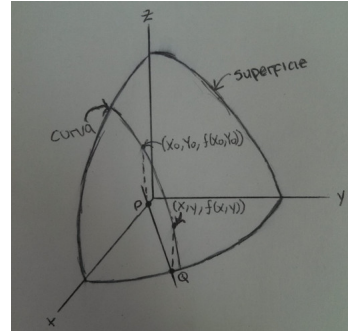
Sea $z = f(x, y)$ una superficie y $P = (x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f

Figura 1: Derivadas direccionales

(a) Especificamos una dirección mediante un vector unitario $u = \cos\theta i + \sin\theta j$ donde θ es el ángulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada reducimos a dos dimensiones mediante la intersección de la superficie con un plano vertical por el punto P y es paralelo a u



(b) Este plano vertical corta a la superficie para formar la curva c y definimos la pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como la pendiente de la curva en ese punto. La pendiente de la curva c se escribe como un límite de cálculo de una variable. El plano vertical empleado para formar c corta al plano xy en una recta L que se representa por las ecuaciones paramétricas $x = x_0 + t\cos\theta; y = y_0 + t\sin\theta; \forall t$ en el punto $Q(x, y) \in$ a la recta L .



Los puntos dados se representan como $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)); Q = (x, y, f(x, y))$

La distancia P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(t\cos\theta)^2 + (t\sin\theta)^2}$$

Al escribir la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + t\cos\theta, y_0 + t\sin\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

4.2.1. Derivada direccional de f en la dirección de u

La derivada direccional de f en dirección u se escribe:

$$D_u f(x, y) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t \cos \theta, y_0 + t \sin \theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Si f es una función diferenciable en x e y , entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $u = \cos \theta i + \sin \theta j$ es

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y) \cos \theta + f_y(x, y) \sin \theta$$

4.2.2. Ejemplo

1. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1, 2)$ en la dirección de $u = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)i + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)j$.

$$f_x = -2x, f_x(1, 2) = -2$$

$$f_y = -\frac{1}{2}y, f_y(1, 2) = -1$$

$$D_u f(1, 2) = -2 \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{\pi}{3} = \frac{-2 - \sqrt{3}}{2}$$

2. Encontrar la derivada direccional de e^{xy} en $(-2, 0)$ en la dirección del vector unitario u que forma un ángulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje x positivo.

$$f_x = ye^{xy}, f_x(-2, 0) = 0$$

$$f_y = xe^{xy}, f_y(-2, 0) = -2$$

$$D_u f(-2, 0) = -2 \sin \frac{\pi}{3} = -1$$

3. Encontrar la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2y$ en el punto $(1, 2)$ en la dirección del vector $a = 3i + 4j$.

$$u = \frac{1}{\sqrt{25}} \langle 3, 4 \rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$$

$$f_x = 6xy, f_x(1, 2) = 6(1)(2) = 12$$

$$f_y = 3x^2, f_y(1, 2) = 3(1)^2 = 3$$

$$D_u f(1, 2) = 12 \left(\frac{3}{5} \right) + 3 \left(\frac{4}{5} \right) = \frac{36 + 12}{5} = \frac{48}{5}$$