0.1. Vectores en el espacio

Sean $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar

1. Igualdad de vectores
   $u = v \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$
2. Longitud
   $\|\text{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
3. Vector unitario en direccion v
   $u = \frac{1}{\|v\|} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$
4. Suma de vectores
   $v + u = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$
5. Producto por un escalar
   $cv = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$
6. Vectores paralelos
   Dos vectores no nulos u y v son paralelos si existe algun escalar c tal que $u = cv$
7. Producto punto/escalar
   $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$
8. Vectores ortogonales
   u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$
9. Angulo entre vectores
   El angulo entre u y v se define como $cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|}$
10. Desigualdad triangular
    $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$
11. Proyeccion de u sobre v
    $proy_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$

0.1.1. Ejemplo

1. Halla los componentes y la longitud del vector v cuyo punto inicial es $(-2, 3, 1)$ y cuyo punto final es $(0, -4, 4)$, al igual que el vector unitario.

   a) <u>Componentes</u> $v = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1 \rangle = \langle 2, -7, 3 \rangle$

   b) <u>Longitud</u> $\|v\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$

   c) <u>Vector unitario</u> $u = \frac{1}{\sqrt{62}} \langle 2, -7, 3 \rangle$

2. Dados $u = \langle 3, -1, 2 \rangle, v = \langle -4, 0, 2 \rangle, w = \langle 1, -1, 2 \rangle, z = \langle 2, 0, -1 \rangle$ encontrar el angulo entre

   a) u y v
   $\|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{20}$
   $cos\,(\theta) = \frac{\langle 3,-1,2 \rangle \cdot \langle -4,0,2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-2+4}{2\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}$
   Por lo tanto $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = 118{,}56°$

   b) u y w
   $\|u\| = \sqrt{14}, \|w\| = \sqrt{6}$
   $cos\,(\theta) = \frac{\langle 3,-1,2 \rangle \cdot \langle 1,-1,2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3+1+4}{\sqrt{84}} = \frac{8}{\sqrt{84}}$
   $\theta = 29{,}2°$

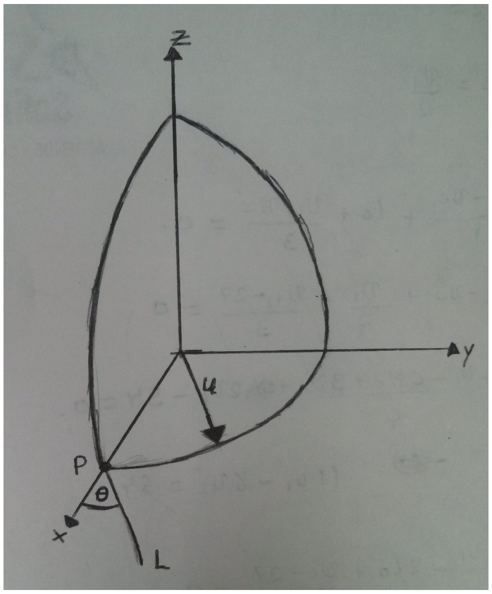
   c) v y z
   $\|v\| = \sqrt{20}, \|z\| = \sqrt{5}$
   $cos\,(\theta) = \frac{\langle -4,0,2 \rangle \cdot \langle 2,0,-1 \rangle}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-8-2}{\sqrt{100}} = \frac{-10}{10} = -1$
   $\theta = 180°$

3. Encontrar la proyeccion de u sobre v si $u = 3i - 5j + 2k$ y $v = 7i + j - 2k$
   $\|v\| = \sqrt{49 + 1 + 4} = \sqrt{54}$
   $proy_v u = \frac{\langle 3,-5,2 \rangle \cdot \langle 7,1,-2 \rangle}{54} \langle 7, 1, -2 \rangle = \frac{21-5-4}{54} \langle 7, 1, -2 \rangle = \frac{12}{54} \langle 7, 1, -2 \rangle = \frac{2}{9} \langle 7, 1, -2 \rangle$

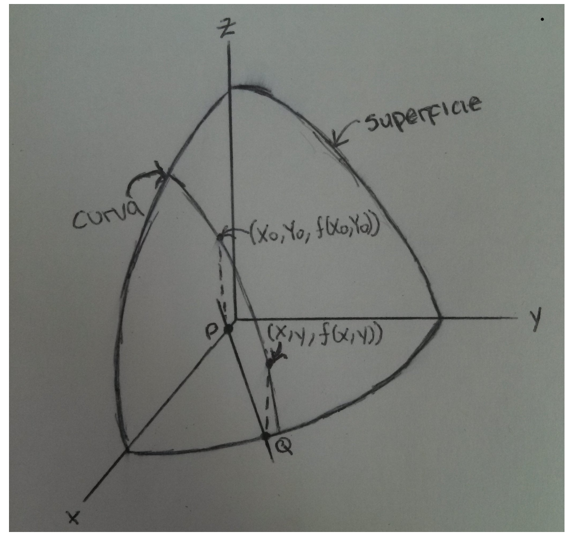
0.2. Derivadas direccionales y gradientes

Para determinar la pendiente de una superficie en un punto dado definimos un nuevo tipo de derivada llamada derivada direccional.

Sea $z = f(x, y)$ una superficie y $P = (x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f.



(a) Especificamos una direccion mediante un vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ donde θ es el angulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada reducimos a dos dimensiones mediante la intersecion de la superficie con un plano vertical por el punto P y es paralelo a u



(b) Este plano vertical corta a la superficie para formar la curva c y definimos la pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como la pendiente de la curva en ese punto. La pendiente de la curva c se escribe como un limite de calculo de una variable. El plano vertical empleado para formar c corta al plano xy en una recta L que se representa por las ecuaciones parametricas $x = x_0 + tcos\theta; y = y_0 + tsen\theta; \forall t$ en el punto $Q(x, y) \in$a la recta L.

Los puntos dados se representan como $\begin{matrix} P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \\ Q = (x, y, f(x, y)) \end{matrix}$

La distancia P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(tcos\theta)^2 + (tsen\theta)^2}$$

Al escribir la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

0.2.1. Derivada direccional de f en la direccion de u

La derivada direccional de f en direccion u se escribe:

$$D_u f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Si f es una funcion diferenciable en x e y, entonces la derivada direccional de f en la direccion del vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ es

$$D_u f(x, y) = f_x(x, y)\, cos\theta + f_y(x, y)\, sen\theta$$

0.2.2. Ejemplo

1. Calcule la derivada direccional de $f(x, y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1, 2)$ en la direccion de $u = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) i + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) j$.
   $f_x = -2x,\ f_x(1, 2) = -2$
   $f_y = -\frac{1}{2}y,\ f_y(1, 2) = -1$

   $D_u f(1, 2) = -2cos\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

2. Encontrar la derivada direccional de e^{xy} en $(-2, 0)$ en la direccion del vector unitario u que forma un angulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje x positivo.
   $f_x = ye^{xy},\ f_x(-2, 0) = 0$
   $f_y = xe^{xy},\ f_y(-2, 0) = -2$

   $D_u f(-2, 0) = -2sen\frac{\pi}{3} = -1$

3. Encontrar la derivada direccional de $f(x, y) = 3x^2y$ en el punto $(1, 2)$ en la direccion del vector $a = 3i + 4j$.
   $u = \frac{1}{\sqrt{25}}\langle 3, 4\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right\rangle$
   $f_x = 6xy,\ f_x(1, 2) = 6(1)(2) = 12$
   $f_y = 3x^2,\ f_y(1, 2) = 3(1)^2 = 3$

   $D_u f(1, 2) = 12\left(\frac{3}{5}\right) + 3\frac{4}{5} = \frac{36+12}{5} = \frac{48}{5}$