Universidad de Guadalajara

Departamento de Electrónica

Apuntes de clase

Métodos Matemáticos 2
(con Maxima)

Eduardo Vázquez Díaz

lalohao@gmail.com

Índice

1. Repaso

Graficar, obtener el dominio y codominio (rango) de las siguientes funciones:

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$
2. $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$
4. $z = x^2 + y^2$
5. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
6. $z - y^2 + x^2 = 0$
7. $16z + x^2 + 4y^2 = 0$
8. $36 - x^2 - 4y^2 = 9z^2$
9. $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$
10. $9z^2 - 4y^2 - x^2 = 36$

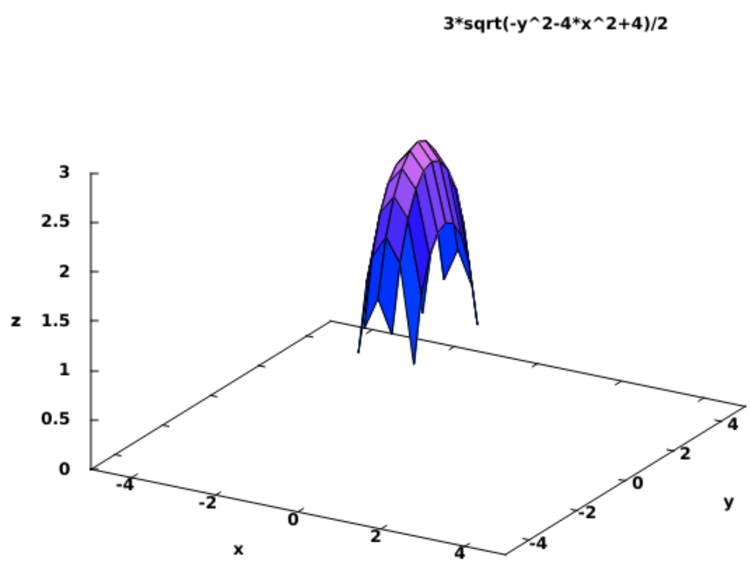
1.1. Solución

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$
   Despejamos z y graficamos con intervalos definidos, en este caso $\{x : (-5,5); y : (-5,5)$:

(%i0) `solve([(x^2)+((y^2)/4)+((z^2)/9)=1], [z]);`

(%o0) $[z = -\frac{3\sqrt{-y^2 - 4x^2 + 4}}{2}, z = \frac{3\sqrt{-y^2 - 4x^2 + 4}}{2}]$

(%i1) `wxplot3d((3*sqrt(-y^2-4*x^2+4))/2, [x,-5,5], [y,-5,5])`



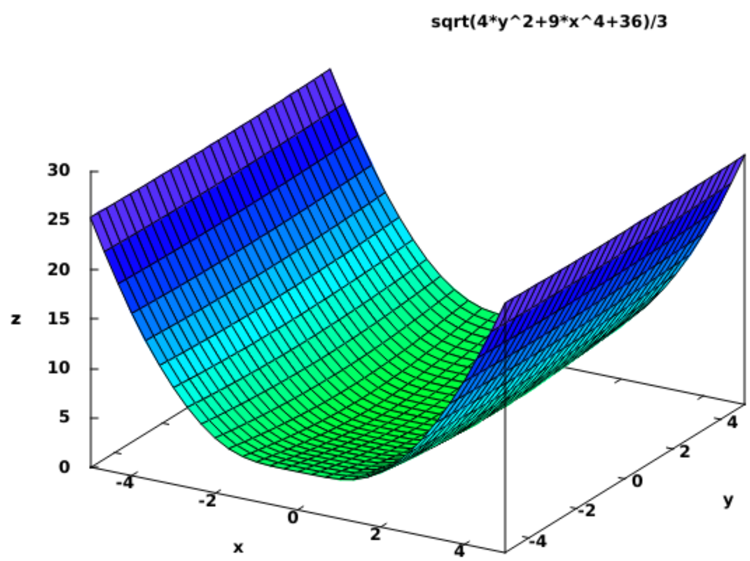
---

2. $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

```
(%i2)  solve([((z^2)/4)-((y^2)/9)-((x^4)/4)=1], [z]);
```

(%o2) $[z = -\frac{\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^4 + 36}}{3}, z = \frac{\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^4 + 36}}{3}]$

```
(%i3)  wxplot3d(sqrt(4*y^2+9*x^4+36)/3, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

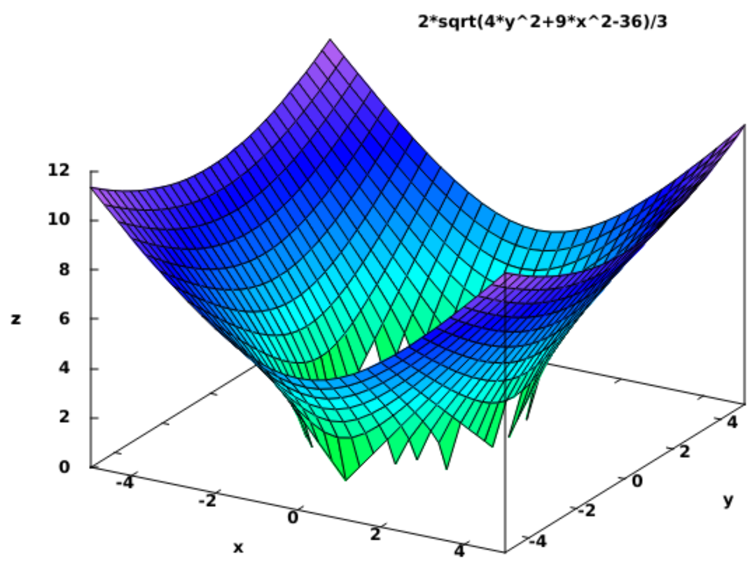


3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$

```
(%i4) solve([((x^2)/4)+((y^2)/9)-((z^2)/16)=1], [z]);
```

(%o4) $[z = -\frac{2\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^2 - 36}}{3}, z = \frac{2\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^2 - 36}}{3}]$

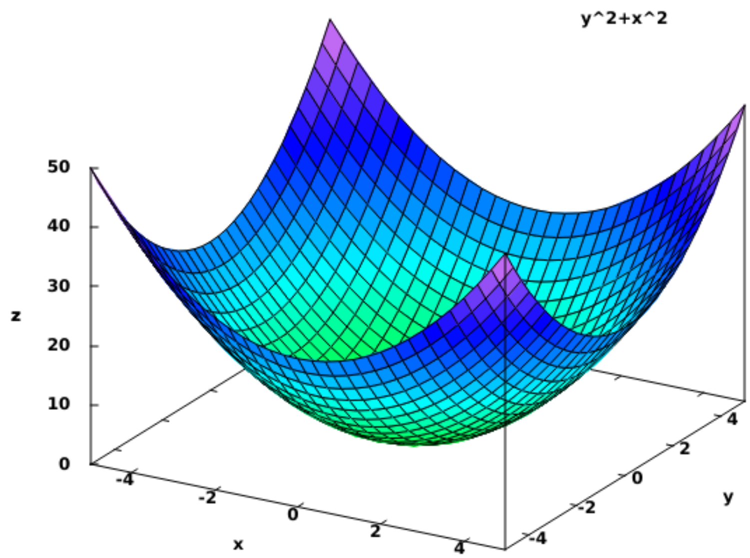
```
(%i5) wxplot3d((2*sqrt(4*y^2+9*x^2-36))/3, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```



---

4. $z = x^2 + y^2$

```
(%i6) wxplot3d((x^2)+(y^2), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

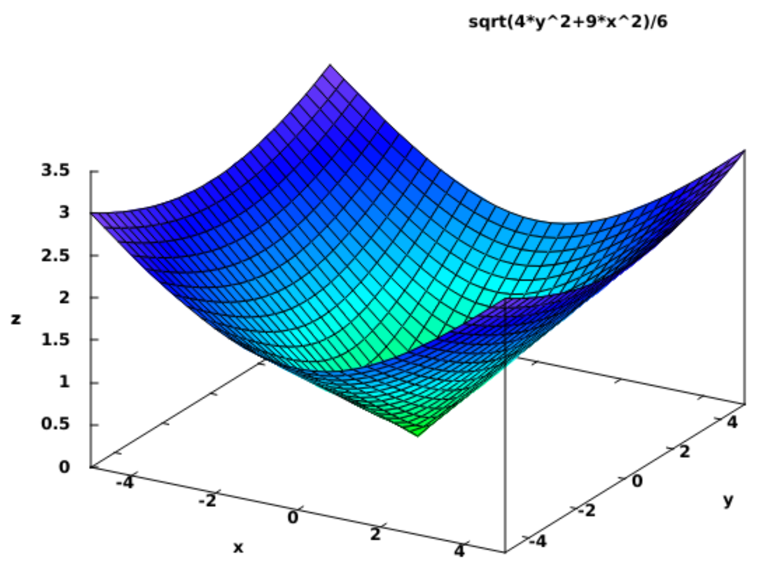


5. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

```
(%i7)  solve([z^2=((x^2)/4)+((y^2)/9)], [z]);
```

(%o7) $[z = -\frac{\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^2}}{6}, z = \frac{\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^2}}{6}]$

```
(%i8)  wxplot3d(sqrt(4*y^2+9*x^2)/6, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```



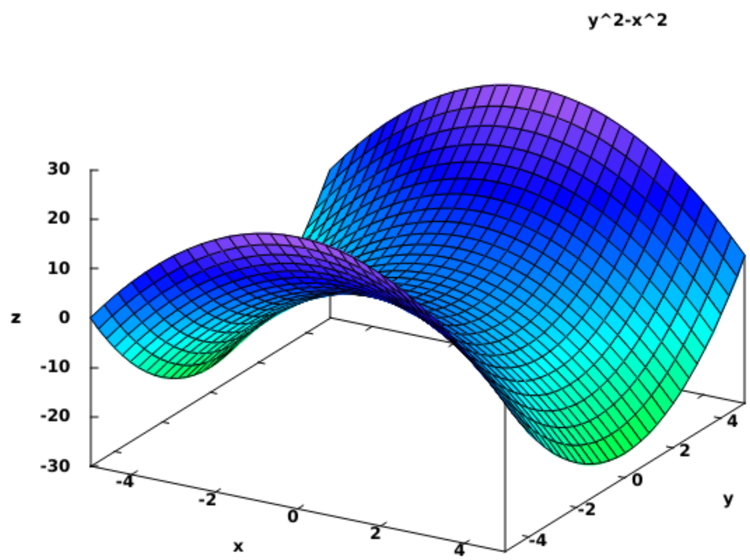
---

6. $z - y^2 + x^2 = 0$

```
(%i9)  solve([z-y^2+x^2=0], [z]);
```

(%o9) $[z = y^2 - x^2]$

```
(%i10) wxplot3d(y^2-x^2, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

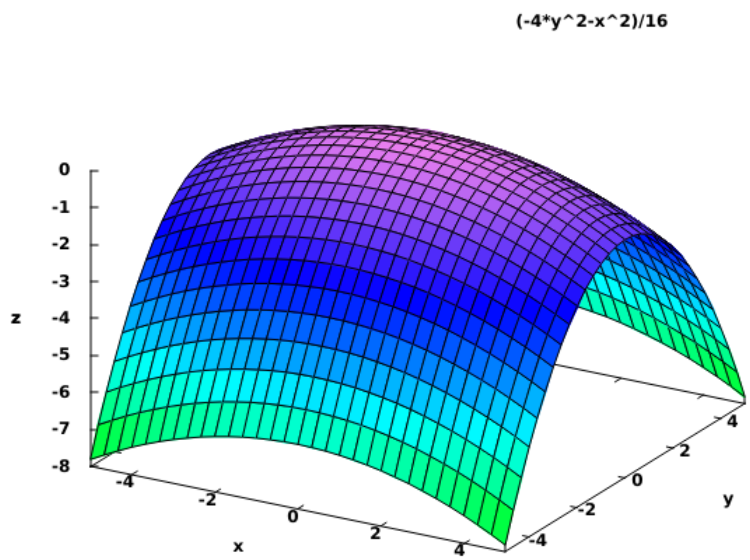


7. $16z + x^2 + 4y^2 = 0$

```
(%i11) solve([16*z+x^2+4*y^2=0], [z]);
```

(%o11) $[z = -\frac{4\,y^2 + x^2}{16}]$

```
(%i12) wxplot3d(-(4*y^2+x^2)/16, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

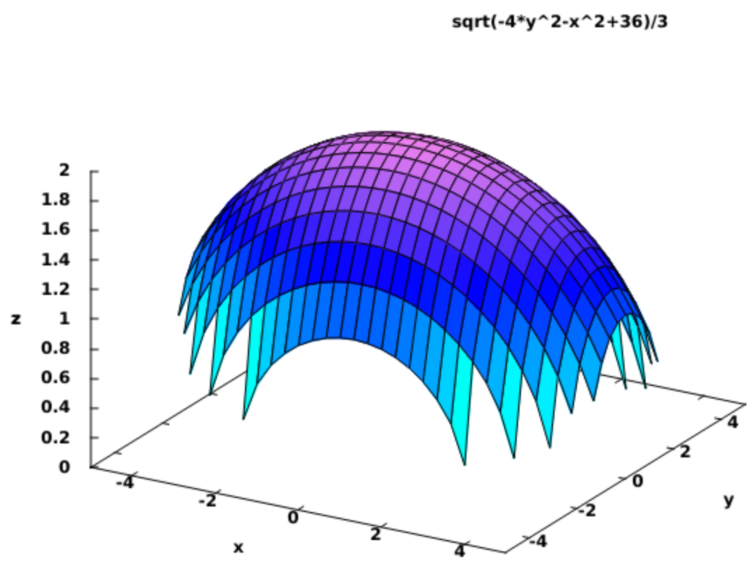


8. $36 - x^2 - 4y^2 = 9z^2$

(%i13) `solve([36-x^2-4*y^2=9*z^2], [z]);`

(%o13) $[z = -\frac{\sqrt{-4\,y^2 - x^2 + 36}}{3}, z = \frac{\sqrt{-4\,y^2 - x^2 + 36}}{3}]$

(%i14) `wxplot3d(sqrt(-4*y^2-x^2+36)/3, [x,-5,5], [y,-5,5])$`



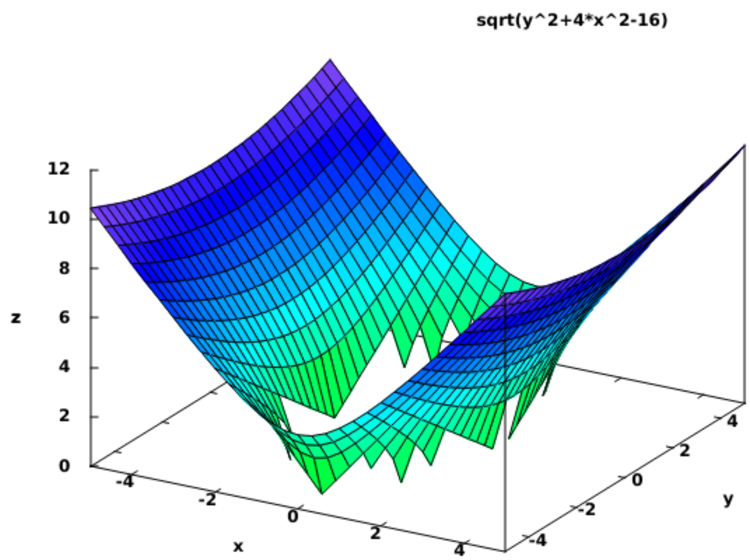
---

9. $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$

```
(%i15) solve([4*x^2+y^2-z^2=16], [z]);
```

(%o15) $[z = -\sqrt{y^2 + 4\,x^2 - 16}, z = \sqrt{y^2 + 4\,x^2 - 16}]$

```
(%i16) wxplot3d(sqrt(y^2+4*x^2-16), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```



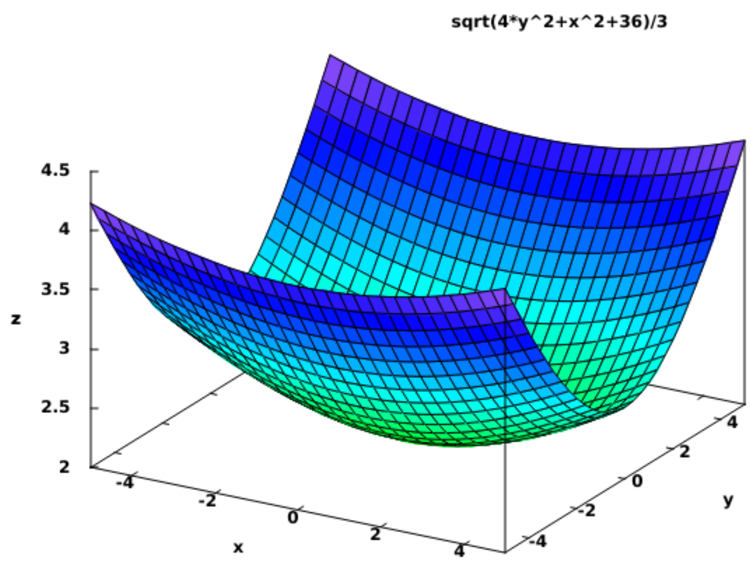
---

10. $9z^2 - 4y^2 - x^2 = 36$

(%i17) solve([9*z^2-4*y^2-x^2=36], [z]);

(%o17) $[z = -\frac{\sqrt{4\,y^2 + x^2 + 36}}{3}, z = \frac{\sqrt{4\,y^2 + x^2 + 36}}{3}]$

(%i18) wxplot3d(sqrt(y^2+4*x^2-16), [x,-5,5], [y,-5,5])$



---

2. Funciones de varias variables

Una función de 2 variables se escribe como
$z = f(x, y) = x^2 + xy$
Una función de 3 variables se escribe como
$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$

2.1. Definición de una función de varias variables

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales en $\mathbb{R}^2$. Y a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un numero real $f(x, y)$ entonces se dice que f es una función de x e y. El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el rango de f.

Si f es una función de 2 variables independientes x e y el dominio de f es una región en el plano xy.

Si f es una función de 3 variables independientes x,y e z el dominio es una región en el espacio.

Si $z = f(x, y)$ las variables independientes son x e y, y z es la variable independiente.

2.2. Ejemplos de funciones de varias variables

Algunas magnitudes físicas:
Trabajo realizado por una fuerza $v = f \cdot d$
Volumen de un cilindro circular recto $v = \pi r^2 h$
Volumen de un solido rectangular $v = lwh$

2.3. Ejemplo

2.3.1. Evaluación de funciones

Sea $f(x, y) = x^2 y + 1$ encontrar (evaluar):

1. $f(2, 1) = (2)^2 (1) + 1 = 4 + 1 = 5$

```
(%i1)  subst(1, y, subst(2, x, y*x^2+1));
(%o1)  5
```

2. $f(1,2) = (1)^2 (2) + 1 = 2 + 1 = 3$

```
(%i2)  subst(1, x, subst(2, y, y+1));
```

(%o2) 3

3. $f(0,0) = (0)^2 (0) + 1 = 1$

```
(%i3)  subst(0, y, subst(0, x, y*x^2+1));
```

(%o3) 1

4. $f(1,-3) = (1)^2 (-3) + 1 = -3 + 1 = -2$

```
(%i4)  subst(-3, y, subst(1, x, y*x^2+1));
```

(%o4) -2

5. $f(3a,a) = (3a)^2 (a) + 1 = 9a^2 \cdot a + 1 = 9a^3 + 1$

```
(%i5)  subst(a, y, subst(3*a, x, y*x^2+1));
```

(%o5) $9\,a^3 + 1$

6. $f(ab, a-b) = (ab)^2 (a-b) + 1 = a^2b^2 (a-b) + 1 = a^3b^2 - a^2b^3 + 1$

```
(%i6)  subst(a-b, y, subst(a*b, x, y*x^2+1));
```

(%o6) $a^2\,(a-b)\,b^2 + 1$

Sea $f(x,y) = x + \sqrt[3]{xy}$ encontrar:

1. $f(t,t^2) = t + \sqrt[3]{t \cdot t^2} = t + \sqrt[3]{t^3} = t + t = 2t$

```
(%i1)  subst(t^2, y, subst(t, x, x+(x*y)^(1/3)));
```

(%o1) $2\,t$

2. $f\left(2y^2, 4y\right) = 2y^2 + \sqrt[3]{2y^2 4y} = 2y^2 + \sqrt[3]{8y^3} = 2y^2 + 2y$

Sea $g\left(x\right) = xsenx$ encontrar:

1. $g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} sen\left(\frac{x}{y}\right)$

```
(%i1)  subst(x/y, x, x*sen(x));
```

(%o1) $\dfrac{x\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{y}$

2. $g\left(xy\right) = xysen\left(xy\right)$

```
(%i2)  subst(x*y, x, x*sen(x));
```

(%o2) $x\,y\,\mathrm{sen}\left(x\,y\right)$

3. $g\left(x-y\right) = \left(x-y\right) sen\left(x-y\right) = xsen\left(x-y\right) - ysen\left(x-y\right)$

```
(%i3)  subst(x-y, x, x*sen(x));
```

(%o3) $\mathrm{sen}\left(x-y\right)\,\left(x-y\right)$

Encontrar $F\left(g\left(x\right), h\left(y\right)\right)$ si $F\left(x,y\right) = xe^{xy}; g\left(x\right) = x^3; h\left(y\right) = 3y+1$

$F\left(x^3, 3y+1\right) = x^3 e^{x^3(3y+1)} = x^3 e^{3x^3y+x^3}$

```
(%i5)  subst(3*y+1, y, subst(x^3, x, x*e^(x*y)));
```

(%o5) $e^{x^3\,(3\,y+1)}\,x^3$

Encontrar $g\left(u\left(x,y\right),\tau\left(x,y\right)\right)$ si $g\left(x,y\right)=ysen\left(x^2y\right);u\left(x,y\right)=x^2y^3;\tau\left(x,y\right)=\pi xy$

(%i7) `subst(pi*x*y, y, subst((x^2)*y^3, x, y*sen(y*(x^2))));`

(%o7) $\pi\,x\,y\,\mathrm{sen}\left(\pi^7\,x^{11}\,y^7\right)$

---

3. Diferenciales

Para calculo de una variable se define como diferencial de y o $dy = f'\left(x\right)dx$.

Para funciones de dos variables $z=f\left(x,y\right)$ usamos la terminología Δx y Δy a los incrementos de x e y respectivamente, el incremento de z esta dado por $\Delta z = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y\right)$

3.1. Definición

Si $z=f\left(x,y\right)$ y Δx, Δy son incrementos de x e y entonces los diferenciales de x e y son:

$dx=\Delta x$

$dy=\Delta y$

Y la diferencial total de la variable dependiente z es:

$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=f_x\left(x,y\right)dx+f_y\left(x,y\right)dy$

Si $w=f\left(x,y,z,u\right)$ entonces

$dx=\Delta x$

$dy=\Delta y$

$dz=\Delta z$

$du=\Delta u$

y el diferencial de w es:

$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz+\frac{\partial w}{\partial u}du$

3.2. Ejemplo

Calcula el diferencial total para $z=xseny-3x^2y^2$

$\frac{\partial z}{\partial x}=2seny-6xy^2$

$\frac{\partial z}{\partial y}=2xcosy-6x^2y$

$dz = (2seny - 6xy^2)\, dx + (2xcosy - 6x^2y)\, dy$

4. Derivadas parciales

Estudiaremos derivadas relacionadas con funciones de 2 variables.

Sea $f(x, y)$, si $y = y_0$ se toma como constante al considerar a x como variable entonces $f(x, y_0)$ solo esta en función de x.

Si esta función es derivable en $x = x_0$ entonces el valor de esta derivada se denota por $f_x(x_0, y_0)$ y se le llama derivada parcial en f con respecto a x en el punto (x_0, y_0).

Para obtener $f_x(x, y)$ se deriva $f(x, y)$ con respecto a x, tratando a y como constante.

Para obtener $f_y(x, y)$ se deriva $f(x, y)$ con respecto a y, tratando a x como constante.

4.1. Notación para derivada parcial

∂ signo de la derivada parcial
$\frac{\partial f}{\partial x}$ derivada parcial de x.
$\frac{\partial f}{\partial y}$ derivada parcial de y.
$\frac{\partial f}{\partial z}$ derivada parcial de z.
Derivadas parciales en el punto (x_0, y_0)
$\frac{\partial f}{\partial x}|_{x=x_0, y=y_0}$
$\frac{\partial f}{\partial y}|_{x=x_0, y=y_0}$

4.2. Ejemplo

Hallar las derivadas parciales primeras con respecto a x e y

1. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$
   $f_x(x, y) = 2$

```
(%i1) diff(2*x-3*y+5,x,1);
```

$(\%o1)$ 2

$f_y(x,y) = -3$

```
(%i2)  diff(2*x-3*y+5,y,1);
```

(%o2) -3

---

2. $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 7$
   $f_x(x,y) = 2x$

```
(%i3)  diff(x^2-3*y^2+7,x,1);
```

(%o3) $2\,x$

$f_y(x,y) = -6y$

```
(%i4)  diff(x^2-3*y^2+7,y,1);
```

(%o4) $-6\,y$

---

3. $f(x,y) = xy$
   $f_x(x,y) = y$
   $f_y(x,y) = x$

```
(%i5)  diff(x*y,x,1);
       diff(x*y,y,1);
```

(%o5) y
(%o6) x

---

4. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
   $f_x(x,y) = \frac{1}{y}$
   $f_y(x,y) = \frac{-x}{y^2}$

```
(%i1) f(x,y):=x/y;
      diff(f(x,y),x,1);
      diff(f(x,y),y,1);
```

(%o1) $f(x,y) := \frac{x}{y}$

(%o2) $\frac{1}{y}$

(%o3) $-\frac{x}{y^2}$

5. $f(x,y) = x\sqrt{y}$
   $f_x(x,y) = \sqrt{y}$
   $f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$

```
(%i22) f(x,y):=x*sqrt(y);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o22) $f(x,y) := x\sqrt{y}$

(%o23) $\sqrt{y}$

(%o24) $\frac{x}{2\sqrt{y}}$

6. $z = y\sqrt{x}$
   $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{x}}$
   $\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x}$

```
(%i25) f(x,y):=y*sqrt(x);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o25) $f(x,y) := y\sqrt{x}$

(%o26) $\frac{y}{2\sqrt{x}}$

(%o27) $\sqrt{x}$

7. $z = x^2 - 3xy + y^2$
$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$
$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y$

```
(%i28) f(x,y):=x^2-3*x*y+y^2;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o28) $\mathrm{f}(x, y) := x^2 - 3\,x\,y + y^2$
(%o29) $2\,x - 3\,y$
(%o30) $2\,y - 3\,x$

---

8. $f(x, y) = 3x - 2y^4$
$f_x(x, y) = 3$
$f_y(x, y) = -8y^3$

```
(%i31) f(x,y):=3*x-2*y^4;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o31) $\mathrm{f}(x, y) := 3\,x - 2\,y^4$
(%o32) 3
(%o33) $-8\,y^3$

---

9. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$
$f_x(x, y) = 5x^4 + 9x^2y^2 + 3y^4$
$f_y(x, y) = 6x^3y + 12xy^3$

```
(%i34) f(x,y):=x^5+3*(x^3)*y^2+3*x*y^4;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o34) $\mathrm{f}(x, y) := x^5 + 3\,x^3\,y^2 + 3\,x\,y^4$
(%o35) $3\,y^4 + 9\,x^2\,y^2 + 5\,x^4$
(%o36) $12\,x\,y^3 + 6\,x^3\,y$

---

10. $z = xe^{3y}$
$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{3y}$
$\frac{\partial z}{\partial y} = 3xe^{3y}$

```
(%i37) f(x,y):=x*e^(3*y);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o37) $\mathrm{f}(x, y) := x\, e^{3\, y}$
(%o38) $e^{3\, y}$
(%o39) $3\, e^{3\, y} \log(e)\; x$

---

11. $z = yln(x)$
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$
$\frac{\partial z}{\partial y} = ln(x)$

```
(%i43) f(x,y):=y*log(x);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o43) $\mathrm{f}(x, y) := y \log(x)$
(%o44) $\frac{y}{x}$
(%o45) $\log(x)$

---

12. $z = x^2 e^{2y}$
$\frac{\partial z}{\partial z} = 2xe^{2y}$
$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 e^{2y}$

```
(%i46) f(x,y):=(x^2)*e^(2*y);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o46) $\mathrm{f}(x, y) := x^2\, e^{2\, y}$
(%o47) $2\, e^{2\, y}\, x$
(%o48) $2\, e^{2\, y} \log(e)\; x^2$

---

5. Regla de la cadena para funciones de varias variables

Sea $w = f\left(x, y\right)$ donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g\left(t\right)$ y $y = h\left(t\right)$ siendo g y h funciones diferenciables en t entonces w es una función diferenciable en t y se denota:
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

5.1. Ejemplo

Sea $w = x^2y - y^2$ donde $x = sen\left(t\right); y = e^t$, encontrar $\frac{dw}{dt}$ cuando $t = 0$
$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy$
$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 - 2y$
$\frac{dx}{dt} = cos\left(t\right)$
$\frac{dy}{dt} = e^t$
$\frac{dw}{dt} = \left(2xy\right)\left(cos\left(t\right)\right)+\left(x^2 - 2y\right)\left(e^t\right)|_{x=sen(t),y=e^t|_{t=0}} = 2\left(sen\left(t\right)\right)\left(e^t\right)\left(cos\left(t\right)\right)+ \left(\left(sen\left(t\right)\right)^2 - 2\left(e^t\right)\right)\left(e^t\right)|_{t=0} = -2$

Utilice la regla de la cadena para encontrar $\frac{dz}{dt}$ o $\frac{dw}{dt}$

1. $z = x^2y + xy^2; x = 2 + t^4; y = 1 - t^3$
   $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$
   $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$
   $\frac{dx}{dt} = 4t^3$
   $\frac{dy}{dt} = -3t^2$
   $\frac{dz}{dt} = \left(2xy + y^2\right)4t^3 - 3t^2\left(x^2 + 2xy\right)|_{x=2+t^4,y=1-t^3} = -24t^2+20t^3+12t^5- 42t^6 + 8t^7 + 10t^9 - 11t^{10}$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}; x = e^{2t}; y = e^{-2t}$
   $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
   $\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$
   $\frac{dy}{dt} = -2e^{-2t}$
   $\frac{dz}{dt} = 2e^{2t}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) - 2e^{-2t}\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \frac{2e^{4t}-2e^{-4t}}{\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}}}$

3. $z = sen\left(x\right)cos\left(y\right); x = \pi t; y = \sqrt{t}$
   $\frac{\partial z}{\partial x} = cosxcosy$

$\frac{\partial z}{\partial y} = -senxseny$
$\frac{dx}{dt} = \pi$
$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}}$
$\frac{dz}{dt} = \pi cosxcosy - \frac{senxseny}{2\sqrt{t}}|_{x=\pi t, y=\sqrt{t}} = \pi cos$

4. $z = xln\left(x + 2y\right); x = sen\left(t\right); y = cos\left(t\right)$
5. $w = xe^{y/z}; x = t^2; y = 1 - t; z = 1 + 2t$
6. $w = xy + yz^2; x = e^t; y = e^t sent; z = e^t cost$

6. Derivada direccional

6.1. Vectores en el espacio

Sean $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar

1. Igualdad de vectores
   $u = v \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$
2. Longitud
   $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
3. Vector unitario en dirección v
   $u = \frac{1}{\|v\|} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$
4. Suma de vectores
   $v + u = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$
5. Producto por un escalar
   $cv = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$
6. Vectores paralelos
   Dos vectores no nulos u y v son paralelos si existe algún escalar c tal que $u = cv$
7. Producto punto/escalar
   $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

8. Vectores ortogonales
   u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$

9. Angulo entre vectores
   El angulo entre u y v se define como $cos(\theta)=\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$

10. Desigualdad triangular
    $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

11. Proyección de u sobre v
    $proy_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$

6.1.1. Ejemplo

1. Halla los componentes y la longitud del vector v cuyo punto inicial es $(-2, 3, 1)$ y cuyo punto final es $(0, -4, 4)$, al igual que el vector unitario.

   a) Componentes $v = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1 \rangle = \langle 2, -7, 3 \rangle$
   b) Longitud $\|v\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$
   c) Vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{62}} \langle 2, -7, 3 \rangle$

2. Dados $u = \langle 3, -1, 2 \rangle, v = \langle -4, 0, 2 \rangle, w = \langle 1, -1, 2 \rangle, z = \langle 2, 0, -1 \rangle$ encontrar el angulo entre

   a) u y v
   $\|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{20}$
   $cos\left(\theta\right) = \frac{\langle 3,-1,2 \rangle \cdot \langle -4,0,2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-2+4}{2\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}$
   Por lo tanto $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = 118{,}56°$

   b) u y w
   $\|u\| = \sqrt{14}, \|w\| = \sqrt{6}$
   $cos\left(\theta\right) = \frac{\langle 3,-1,2 \rangle \cdot \langle 1,-1,2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3+1+4}{\sqrt{84}} = \frac{8}{\sqrt{84}}$
   $\theta = 29{,}2°$

   c) v y z
   $\|v\| = \sqrt{20}, \|z\| = \sqrt{5}$
   $cos\left(\theta\right) = \frac{\langle -4,0,2 \rangle \cdot \langle 2,0,-1 \rangle}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-8-2}{\sqrt{100}} = \frac{-10}{10} = -1$
   $\theta = 180°$

3. Encontrar la proyección de u sobre v si $u = 3i - 5j + 2k$ y $v = 7i + j - 2k$
$\|v\| = \sqrt{49 + 1 + 4} = \sqrt{54}$
$proy_v u = \frac{\langle 3,-5,2\rangle \cdot \langle 7,1,-2\rangle}{54} \langle 7, 1, -2\rangle = \frac{21-5-4}{54} \langle 7, 1, -2\rangle = \frac{12}{54} \langle 7, 1, -2\rangle = \frac{2}{9} \langle 7, 1, -2\rangle$

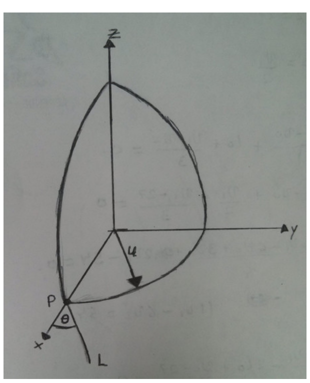
6.2. Derivadas direccionales y gradientes

Para determinar la pendiente de una superficie en un punto dado definimos un nuevo tipo de derivada llamada derivada direccional.

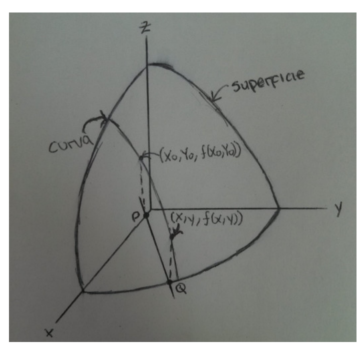
Sea $z = f(x, y)$ una superficie y $P = (x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f

Figura 1: Derivadas direccionales

(a) Especificamos una dirección mediante un vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ donde θ es el angulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada reducimos a dos dimensiones mediante la intersección de la superficie con un plano vertical por el punto P y es paralelo a u



(b) Este plano vertical corta a la superficie para formar la curva c y definimos la pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como la pendiente de la curva en ese punto. La pendiente de la curva c se escribe como un limite de calculo de una variable. El plano vertical empleado para formar c corta al plano xy en una recta L que se representa por las ecuaciones parametricas $x = x_0 + tcos\theta; y = y_0 + tsen\theta; \forall t$ en el punto $Q(x, y) \in$a la recta L.



Los puntos dados se representan como $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))\,; Q = (x, y, f(x, y))$
La distancia P y Q es

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} = \sqrt{(tcos\theta)^2 + (tsen\theta)^2}$$

Al escribir la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q

$$\frac{f(x,y) - f(x_0,y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0,y_0)}{t}$$

6.2.1. Derivada direccional de f en la dirección de u

La derivada direccional de f en dirección u se escribe:

$$D_u f(x,y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0,y_0)}{t}$$

Si f es una función diferenciable en x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ es

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\, cos\theta + f_y(x,y)\, sen\theta$$

6.2.2. Ejemplo

1. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1,2)$ en la dirección de $u = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) i + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) j$.
   $f_x = -2x,\ f_x(1,2) = -2$
   $f_y = -\frac{1}{2}y,\ f_y(1,2) = -1$

   $D_u f(1,2) = -2cos\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

2. Encontrar la derivada direccional de e^{xy} en $(-2,0)$ en la dirección del vector unitario u que forma un angulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje x positivo.
   $f_x = ye^{xy},\ f_x(-2,0) = 0$
   $f_y = xe^{xy},\ f_y(-2,0) = -2$

   $D_u f(-2,0) = -2sen\frac{\pi}{3} = -1$

3. Encontrar la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2y$ en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $a = 3i + 4j$.
   $u = \frac{1}{\sqrt{25}}\langle 3,4\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$

$f_x = 6xy,\ f_x\left(1,2\right) = 6\left(1\right)\left(2\right) = 12$
$f_y = 3x^2,\ f_y\left(1,2\right) = 3\left(1\right)^2 = 3$

$D_u f\left(1,2\right) = 12\left(\frac{3}{5}\right) + 3\frac{4}{5} = \frac{36+12}{5} = \frac{48}{5}$