Universidad de Guadalajara

Departamento de Electrónica

Apuntes de clase

Métodos Matemáticos 2
con Maxima.

Eduardo Vázquez Díaz

lalohao@gmail.com

Índice

1. Repaso

Graficar, obtener el dominio y codominio (rango) de las siguientes funciones:

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$
2. $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$
4. $z = x^2 + y^2$
5. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
6. $z - y^2 + x^2 = 0$
7. $16z + x^2 + 4y^2 = 0$
8. $36 - x^2 - 4y^2 = 9z^2$
9. $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$
10. $9z^2 - 4y^2 - x^2 = 36$

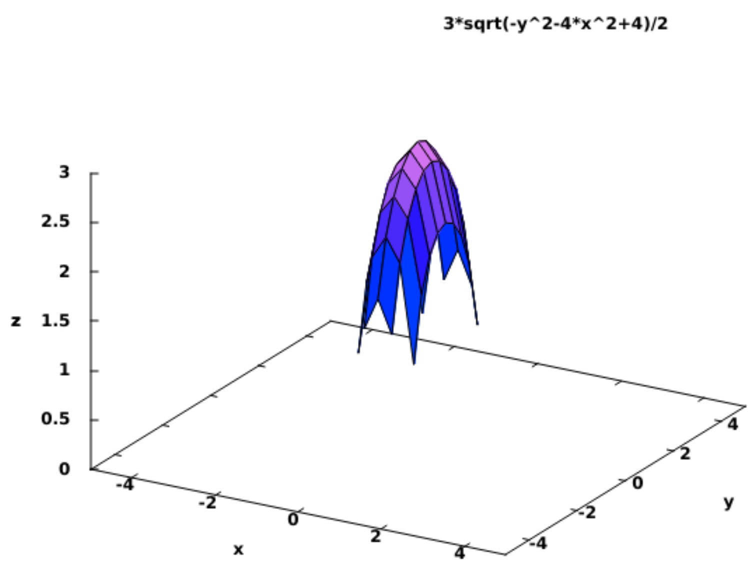
1.1. Solución

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$
   Despejamos z y graficamos con intervalos definidos, en este caso $\{x : (-5,5); y : (-5,5)$:

```
(%i0)  solve([(x^2)+((y^2)/4)+((z^2)/9)=1], [z]);
```

(%o0) $[z = -\frac{3\sqrt{-y^2 - 4x^2 + 4}}{2}, z = \frac{3\sqrt{-y^2 - 4x^2 + 4}}{2}]$

```
(%i1)  wxplot3d((3*sqrt(-y^2-4*x^2+4))/2, [x,-5,5], [y,-5,5])
```



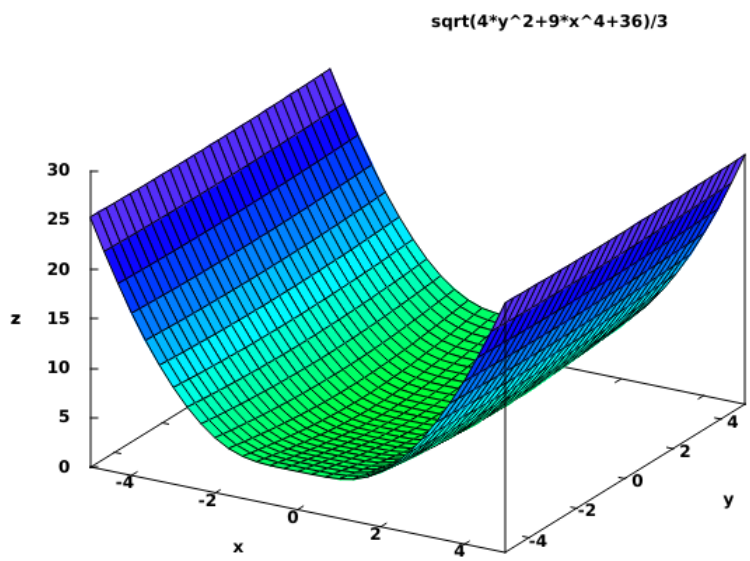
---

2. $\frac{z^2}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

```
(%i2) solve([((z^2)/4)-((y^2)/9)-((x^4)/4)=1], [z]);
```

(%o2) $[z = -\frac{\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^4 + 36}}{3}, z = \frac{\sqrt{4\,y^2 + 9\,x^4 + 36}}{3}]$

```
(%i3) wxplot3d(sqrt(4*y^2+9*x^4+36)/3, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

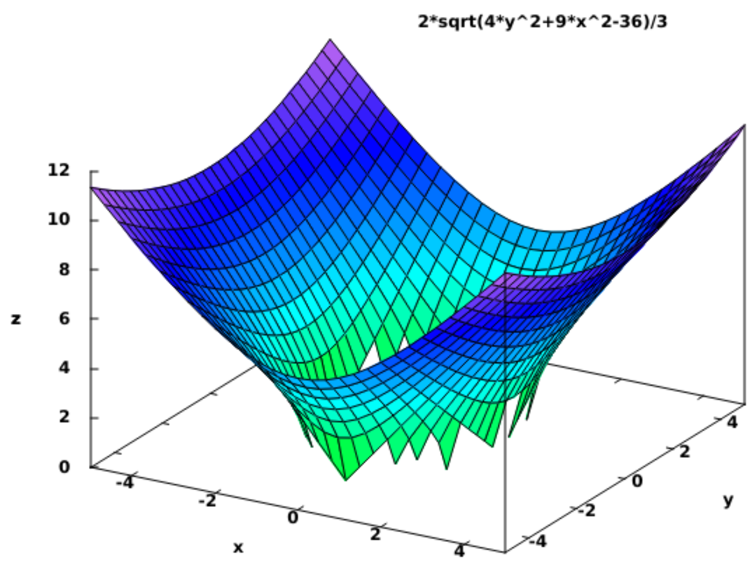


3. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-\frac{z^2}{16}=1$

```
(%i4) solve([((x^2)/4)+((y^2)/9)-((z^2)/16)=1], [z]);
```

(%o4) $[z=-\frac{2\sqrt{4\,y^2+9\,x^2-36}}{3}, z=\frac{2\sqrt{4\,y^2+9\,x^2-36}}{3}]$

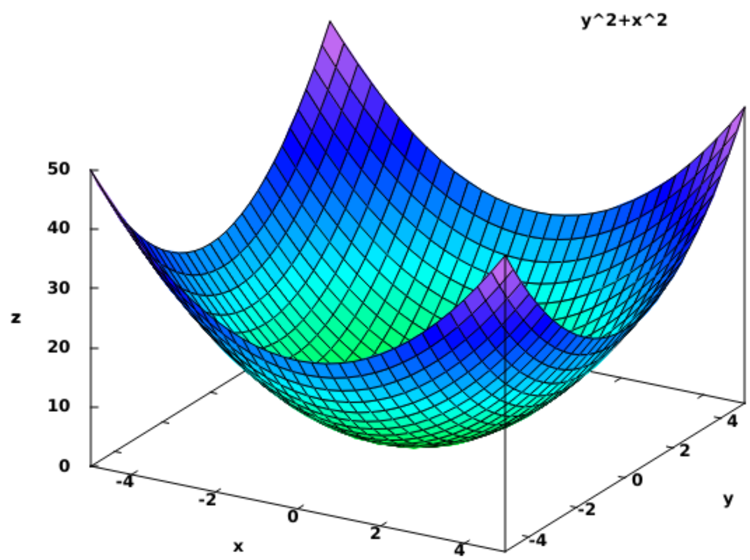
```
(%i5) wxplot3d((2*sqrt(4*y^2+9*x^2-36))/3, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```



---

4. $z = x^2 + y^2$

```
(%i6) wxplot3d((x^2)+(y^2), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

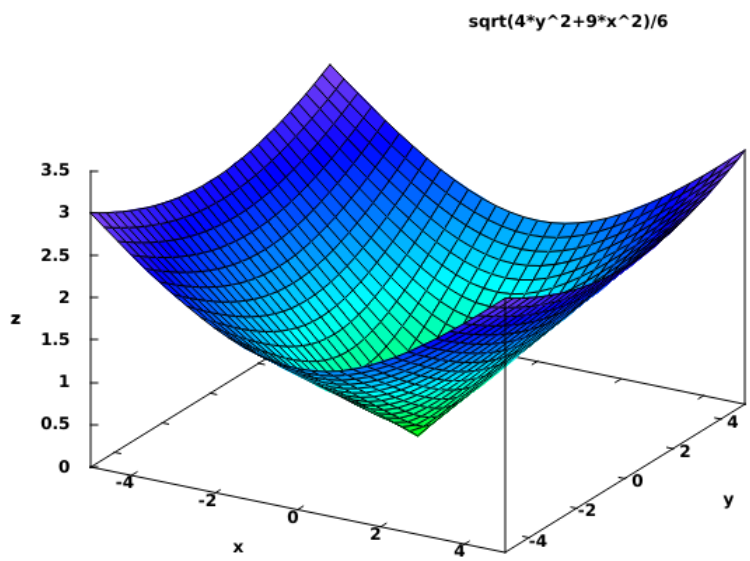


5. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

(%i7) solve([z^2=((x^2)/4)+((y^2)/9)], [z]);

(%o7) $[z = -\frac{\sqrt{4\,y^2+9\,x^2}}{6}, z = \frac{\sqrt{4\,y^2+9\,x^2}}{6}]$

(%i8) wxplot3d(sqrt(4*y^2+9*x^2)/6, [x,-5,5], [y,-5,5])$

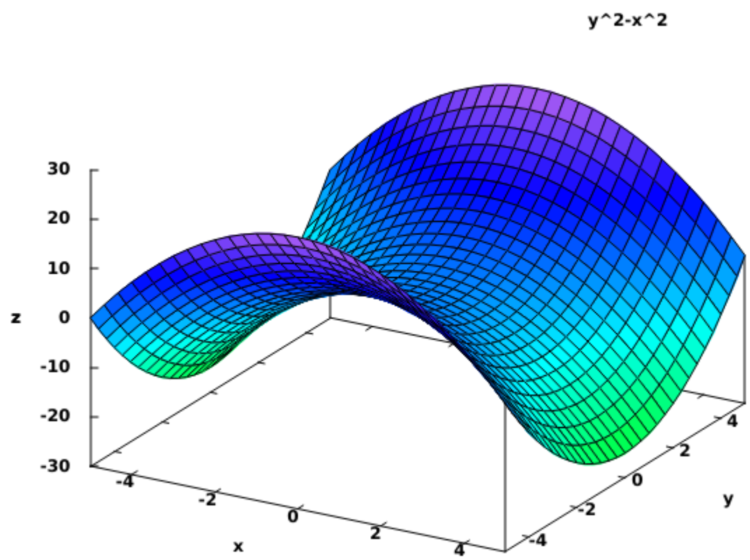


6. $z - y^2 + x^2 = 0$

```
(%i9)  solve([z-y^2+x^2=0], [z]);
```

(%o9) $[z = y^2 - x^2]$

```
(%i10) wxplot3d(y^2-x^2, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

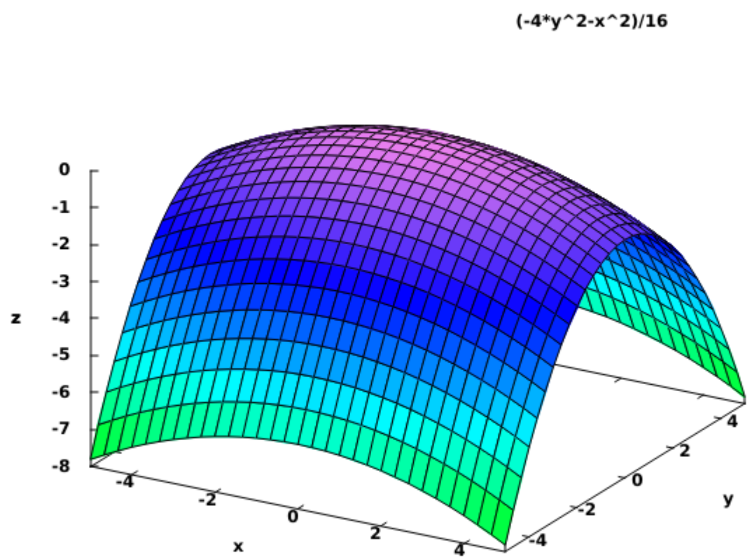


7. $16z + x^2 + 4y^2 = 0$

(%i11) `solve([16*z+x^2+4*y^2=0], [z]);`

(%o11) $[z = -\frac{4\,y^2 + x^2}{16}]$

(%i12) `wxplot3d(-(4*y^2+x^2)/16, [x,-5,5], [y,-5,5])$`



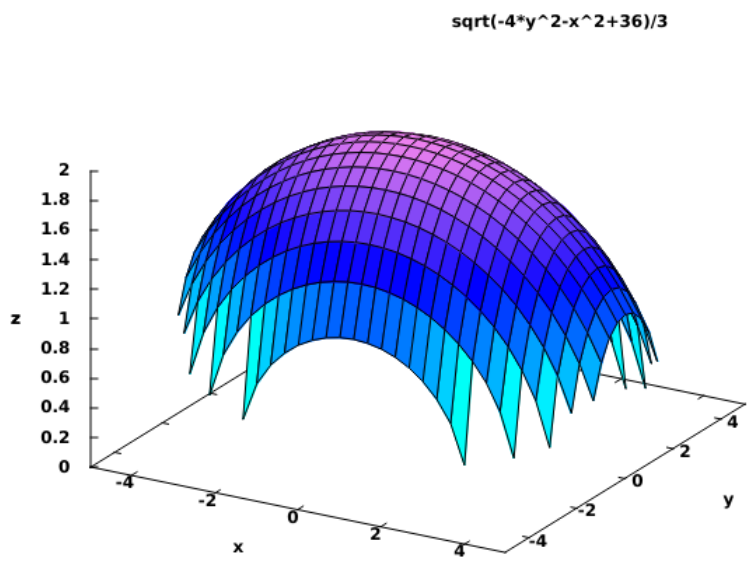
---

8. $36 - x^2 - 4y^2 = 9z^2$

```
(%i13) solve([36-x^2-4*y^2=9*z^2], [z]);
```

(%o13) $[z = -\frac{\sqrt{-4\,y^2 - x^2 + 36}}{3}, z = \frac{\sqrt{-4\,y^2 - x^2 + 36}}{3}]$

```
(%i14) wxplot3d(sqrt(-4*y^2-x^2+36)/3, [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

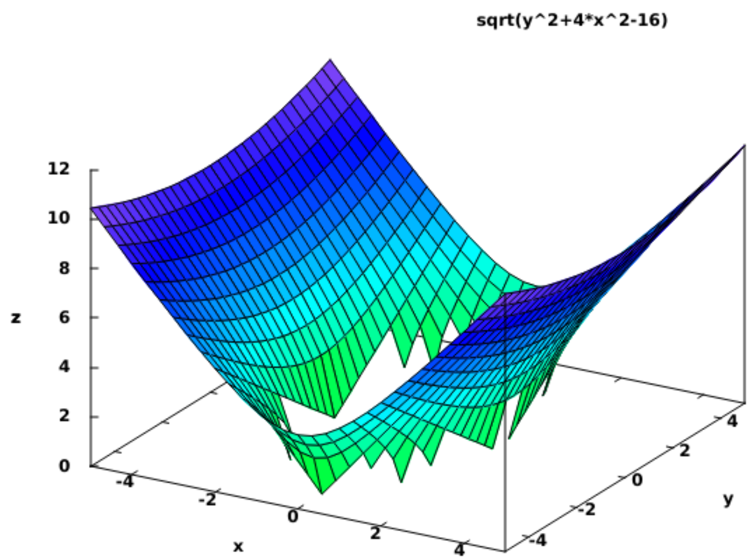


9. $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$

(%i15) solve([4*x^2+y^2-z^2=16], [z]);

(%o15) $[z = -\sqrt{y^2 + 4\,x^2 - 16}, z = \sqrt{y^2 + 4\,x^2 - 16}]$

(%i16) wxplot3d(sqrt(y^2+4*x^2-16), [x,-5,5], [y,-5,5])$



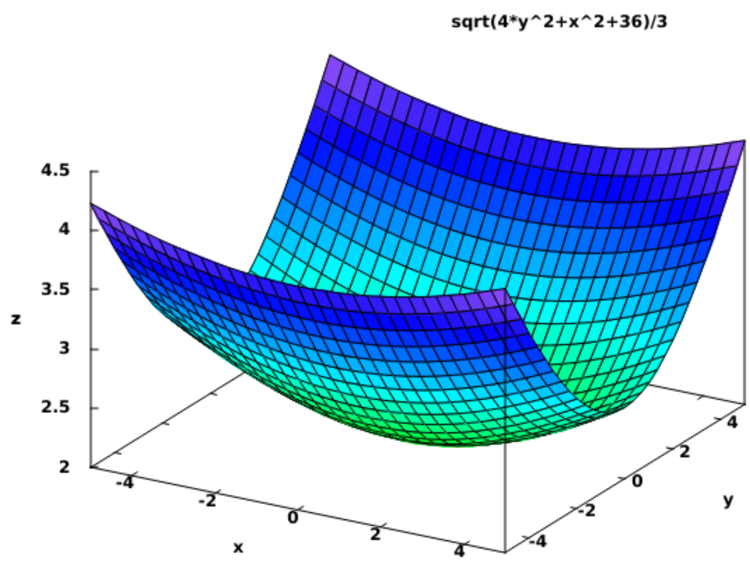
---

10. $9z^2 - 4y^2 - x^2 = 36$

(%i17) `solve([9*z^2-4*y^2-x^2=36], [z]);`

(%o17) $[z = -\frac{\sqrt{4\,y^2 + x^2 + 36}}{3}, z = \frac{\sqrt{4\,y^2 + x^2 + 36}}{3}]$

(%i18) `wxplot3d(sqrt(y^2+4*x^2-16), [x,-5,5], [y,-5,5])$`



---

2. Funciones de varias variables

Una función de 2 variables se escribe como
$z = f(x, y) = x^2 + xy$
Una función de 3 variables se escribe como
$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$

2.1. Definición de una función de varias variables

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales en $\mathbb{R}^2$. Y a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un numero real $f(x, y)$ entonces se dice que f es una función de x e y. El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el rango de f.

Si f es una función de 2 variables independientes x e y el dominio de f es una región en el plano xy.

Si f es una función de 3 variables independientes x,y e z el dominio es una región en el espacio.

Si $z = f(x, y)$ las variables independientes son x e y, y z es la variable independiente.

Algunas magnitudes físicas:
Trabajo realizado por una fuerza $v = f \cdot d$
Volumen de un cilindro circular recto $v = \pi r^2 h$
Volumen de un solido rectangular $v = lwh$

2.2. Ejemplo

Sea $f(x, y) = x^2 y + 1$ encontrar (evaluar):

1. $f(2, 1)$
2. $f(1, 2)$
3. $f(0, 0)$
4. $f(1, -3)$
5. $f(3a, a)$
6. $f(ab, a - b)$

Sea $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$ encontrar:

1. $f\left(t, t^2\right)$

2. $f\left(2y^2, 4y\right)$

Sea $g\left(x\right) = xsenx$ encontrar:

1. $g\left(\frac{x}{y}\right)$

2. $g\left(xy\right)$

3. $g\left(x - y\right)$

Encontrar $F\left(g\left(x\right), h\left(y\right)\right)$ si $F\left(x, y\right) = xe^{xy}; g\left(x\right) = x^3; h\left(y\right) = 3y + 1$
Encontrar $g\left(u\left(x, y\right), \tau\left(x, y\right)\right)$ si $g\left(x, y\right) = ysen\left(x^2 y\right); u\left(x, y\right) = x^2 y^3; \tau\left(x, y\right) = \pi xy$

2.2.1. Solución

Sea $f\left(x, y\right) = x^2 y + 1$ encontrar (evaluar):

1. $f\left(2, 1\right) = \left(2\right)^2\left(1\right) + 1 = 4 + 1 = 5$

```
(%i1) subst(1, y, subst(2, x, y*x^2+1));
```

(%o1) 5

---

2. $f\left(1, 2\right) = \left(1\right)^2\left(2\right) + 1 = 2 + 1 = 3$

```
(%i2) subst(1, x, subst(2, y, y+1));
```

(%o2) 3

---

3. $f\left(0, 0\right) = \left(0\right)^2\left(0\right) + 1 = 1$

```
(%i3) subst(0, y, subst(0, x, y*x^2+1));
```

(%o3) 1

---

4. $f(1,-3) = (1)^2(-3) + 1 = -3 + 1 = -2$

```
(%i4)  subst(-3, y, subst(1, x, y*x^2+1));
```

(%o4) -2

5. $f(3a, a) = (3a)^2(a) + 1 = 9a^2 \cdot a + 1 = 9a^3 + 1$

```
(%i5)  subst(a, y, subst(3*a, x, y*x^2+1));
```

(%o5) $9\,a^3 + 1$

6. $f(ab, a-b) = (ab)^2(a-b) + 1 = a^2b^2(a-b) + 1 = a^3b^2 - a^2b^3 + 1$

```
(%i6)  subst(a-b, y, subst(a*b, x, y*x^2+1));
```

(%o6) $a^2\,(a-b)\,b^2 + 1$

Sea $f(x,y) = x + \sqrt[3]{xy}$ encontrar:

1. $f(t, t^2) = t + \sqrt[3]{t \cdot t^2} = t + \sqrt[3]{t^3} = t + t = 2t$

```
(%i1)  subst(t^2, y, subst(t, x, x+(x*y)^(1/3)));
```

(%o1) $2\,t$

2. $f(2y^2, 4y) = 2y^2 + \sqrt[3]{2y^2 4y} = 2y^2 + \sqrt[3]{8y^3} = 2y^2 + 2y$

Sea $g(x) = xsenx$ encontrar:

1. $g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} sen\left(\frac{x}{y}\right)$

```
(%i1)  subst(x/y, x, x*sen(x));
```

(%o1) $\dfrac{x\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{y}\right)}{y}$

2. $g(xy) = xysen(xy)$

```
(%i2) subst(x*y, x, x*sen(x));
```

(%o2) $x\,y\,\mathrm{sen}\,(x\,y)$

3. $g(x-y) = (x-y)\,sen(x-y) = xsen(x-y) - ysen(x-y)$

```
(%i3) subst(x-y, x, x*sen(x));
```

(%o3) $\mathrm{sen}\,(x-y)\;(x-y)$

Encontrar $F(g(x), h(y))$ si $F(x,y) = xe^{xy}; g(x) = x^3; h(y) = 3y+1$

$F(x^3, 3y+1) = x^3 e^{x^3(3y+1)} = x^3 e^{3x^3y+x^3}$

```
(%i5) subst(3*y+1, y, subst(x^3, x, x*e^(x*y)));
```

(%o5) $e^{x^3\,(3\,y+1)}\,x^3$

Encontrar $g(u(x,y), \tau(x,y))$ si $g(x,y) = ysen(x^2y); u(x,y) = x^2y^3; \tau(x,y) = \pi xy$

```
(%i7) subst(pi*x*y, y, subst((x^2)*y^3, x, y*sen(y*(x^2))));
```

(%o7) $\pi\,x\,y\,\mathrm{sen}\left(\pi^7\,x^{11}\,y^7\right)$

3. Diferenciales

Para calculo de una variable se define como diferencial de y o $dy = f'(x)\,dx$.

Para funciones de dos variables $z = f(x,y)$ usamos la terminología Δx y Δy a los incrementos de x e y respectivamente, el incremento de z esta dado por $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y)$

3.1. Definición

Si $z = f(x, y)$ y Δx, Δy son incrementos de x e y entonces los diferenciales de x e y son:

$dx = \Delta x$

$dy = \Delta y$

Y la diferencial total de la variable dependiente z es:

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = f_x(x, y)\, dx + f_y(x, y)\, dy$

Si $w = f(x, y, z, u)$ entonces

$dx = \Delta x$

$dy = \Delta y$

$dz = \Delta z$

$du = \Delta u$

y el diferencial de w es:

$dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz + \frac{\partial w}{\partial u} du$

3.2. Ejemplo

Calcula el diferencial total para $z = xseny - 3x^2y^2$

3.2.1. Solución

```
(%i1)  z(x,y):=x*sin(y)-3*(x^2)*y^2$
       zx:diff(z(x,y),x,1)$
       zy:diff(z(x,y),y,1)$
       print("z(x,y):",z(x,y))$
       print("zx(x,y)=",zx)$
       print("zy(x,y)=",zy)$
       print("dz=(",zx,")dx+(",zy,")dy")$
```

$z(x, y) : x \sin(y) - 3\, x^2\, y^2$

$z_x(x, y) = \sin(y) - 6\, x\, y^2$

$z_y(x, y) = x \cos(y) - 6\, x^2\, y$

$dz = (\sin(y) - 6\, x\, y^2) dx + (x \cos(y) - 6\, x^2\, y) dy$

---

4. Derivadas parciales

Estudiaremos derivadas relacionadas con funciones de 2 variables.

Sea $f(x,y)$, si $y = y_0$ se toma como constante al considerar a x como variable entonces $f(x,y_0)$ solo esta en función de x.

Si esta función es derivable en $x = x_0$ entonces el valor de esta derivada se denota por $f_x(x_0,y_0)$ y se le llama derivada parcial en f con respecto a x en el punto (x_0,y_0).

Para obtener $f_x(x,y)$ se deriva $f(x,y)$ con respecto a x, tratando a y como constante.

Para obtener $f_y(x,y)$ se deriva $f(x,y)$ con respecto a y, tratando a x como constante.

4.1. Notación para derivada parcial

∂ signo de la derivada parcial
$\frac{\partial f}{\partial x}$ derivada parcial de x.
$\frac{\partial f}{\partial y}$ derivada parcial de y.
$\frac{\partial f}{\partial z}$ derivada parcial de z.
Derivadas parciales en el punto (x_0,y_0)
$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=x_0,y=y_0}$
$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{x=x_0,y=y_0}$

4.2. Ejemplo

Hallar las derivadas parciales primeras con respecto a x e y

1. $f(x,y) = 2x - 3y + 5$
2. $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 7$
3. $f(x,y) = xy$
4. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
5. $f(x,y) = x\sqrt{y}$
6. $z = y\sqrt{x}$

7. $z = x^2 - 3xy + y^2$
8. $f(x, y) = 3x - 2y^4$
9. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$
10. $z = xe^{3y}$
11. $z = yln(x)$
12. $z = x^2e^{2y}$

4.2.1. Solución

1. $f(x, y) = 2x - 3y + 5$
   $f_x(x, y) = 2$
   $f_y(x, y) = -3$

   (%i1) `diff(2*x-3*y+5,x,1);`

   (%o1) 2

   (%i2) `diff(2*x-3*y+5,y,1);`

   (%o2) -3

   ---

2. $f(x, y) = x^2 - 3y^2 + 7$
   $f_x(x, y) = 2x$
   $f_y(x, y) = -6y$

   (%i3) `diff(x^2-3*y^2+7,x,1);`

   (%o3) $2x$

   (%i4) `diff(x^2-3*y^2+7,y,1);`

   (%o4) $-6y$

   ---

3. $f(x,y) = xy$
$f_x(x,y) = y$
$f_y(x,y) = x$

```
(%i5)  diff(x*y,x,1);
       diff(x*y,y,1);
```

(%o5) y
(%o6) x

---

4. $f(x,y) = \frac{x}{y}$
$f_x(x,y) = \frac{1}{y}$
$f_y(x,y) = \frac{-x}{y^2}$

```
(%i1)  f(x,y):=x/y;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o1) $\mathrm{f}(x,y) := \frac{x}{y}$
(%o2) $\frac{1}{y}$
(%o3) $-\frac{x}{y^2}$

---

5. $f(x,y) = x\sqrt{y}$
$f_x(x,y) = \sqrt{y}$
$f_y(x,y) = \frac{x}{2\sqrt{y}}$

```
(%i22) f(x,y):=x*sqrt(y);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o22) $\mathrm{f}(x,y) := x\,\sqrt{y}$
(%o23) $\sqrt{y}$
(%o24) $\frac{x}{2\,\sqrt{y}}$

---

6. $z = y\sqrt{x}$
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{x}}$
$\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x}$

```
(%i25) f(x,y):=y*sqrt(x);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o25) $\mathrm{f}\left(x, y\right) := y\,\sqrt{x}$
(%o26) $\frac{y}{2\,\sqrt{x}}$
(%o27) $\sqrt{x}$

---

7. $z = x^2 - 3xy + y^2$
$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y$
$\frac{\partial z}{\partial y} = -3x + 2y$

```
(%i28) f(x,y):=x^2-3*x*y+y^2;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o28) $\mathrm{f}\left(x, y\right) := x^2 - 3\,x\,y + y^2$
(%o29) $2\,x - 3\,y$
(%o30) $2\,y - 3\,x$

---

8. $f\left(x, y\right) = 3x - 2y^4$
$f_x\left(x, y\right) = 3$
$f_y\left(x, y\right) = -8y^3$

```
(%i31) f(x,y):=3*x-2*y^4;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o31) $\mathrm{f}(x,y) := 3\,x - 2\,y^4$
(%o32) 3
(%o33) $-8\,y^3$

---

9. $f(x,y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$
   $f_x(x,y) = 5x^4 + 9x^2y^2 + 3y^4$
   $f_y(x,y) = 6x^3y + 12xy^3$

```
(%i34) f(x,y):=x^5+3*(x^3)*y^2+3*x*y^4;
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o34) $\mathrm{f}(x,y) := x^5 + 3\,x^3\,y^2 + 3\,x\,y^4$
(%o35) $3\,y^4 + 9\,x^2\,y^2 + 5\,x^4$
(%o36) $12\,x\,y^3 + 6\,x^3\,y$

---

10. $z = xe^{3y}$
    $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{3y}$
    $\frac{\partial z}{\partial y} = 3xe^{3y}$

```
(%i37) f(x,y):=x*e^(3*y);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o37) $\mathrm{f}(x,y) := x\,e^{3\,y}$
(%o38) $e^{3\,y}$
(%o39) $3\,e^{3\,y}\log(e)\;x$

---

11. $z = yln(x)$
    $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y}{x}$

$\frac{\partial z}{\partial y} = ln\,(x)$

```
(%i43) f(x,y):=y*log(x);
       diff(f(x,y),x,1);
       diff(f(x,y),y,1);
```

(%o43) $\mathrm{f}\,(x,y) := y\log(x)$
(%o44) $\frac{y}{x}$
(%o45) $\log(x)$

---

12. $z = x^2 e^{2y}$
$\frac{\partial z}{\partial z} = 2xe^{2y}$
$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 e^{2y}$

```
(%i207)f(x,y):=(x^2)*e^(2*y)$
       fx:diff(f(x,y),x,1)$
       fy:diff(f(x,y),y,1)$
       print("f(x,y):",f(x,y))$
       print("fx(x,y)=",fx)$
       print("fy(x,y)=",fy)$
```

$f(x,y) : e^{2\,y}\,x^2$
$fx(x,y) = 2\,e^{2\,y}\,x$
$fy(x,y) = 2\,e^{2\,y}\,x^2$

---

5. Regla de la cadena para funciones de varias variables

Sea $w = f\,(x,y)$ donde f es una función diferenciable de x e y. Si $x = g\,(t)$ y $y = h\,(t)$ siendo g y h funciones diferenciables en t entonces w es una función diferenciable en t y se denota:
$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}$

5.1. Ejemplo

Sea $w = x^2y - y^2$ donde $x = sen\,(t)\,; y = e^t$, encontrar $\frac{dw}{dt}$ cuando $t = 0$
Utilice la regla de la cadena para encontrar $\frac{dz}{dt}$ o $\frac{dw}{dt}$

1. $z = x^2y + xy^2; x = 2 + t^4; y = 1 - t^3$
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}; x = e^{2t}; y = e^{-2t}$
3. $z = sen\,(x)\,cos\,(y)\,; x = \pi t; y = \sqrt{t}$
4. $z = xln\,(x + 2y)\,; x = sen\,(t)\,; y = cos\,(t)$
5. $w = xe^{y/z}; x = t^2; y = 1 - t; z = 1 + 2t$
6. $w = xy + yz^2; x = e^t; y = e^t sent; z = e^t cost$

5.1.1. Solución

Sea $w = x^2y - y^2$ donde $x = sen\,(t)\,; y = e^t$, encontrar $\frac{dw}{dt}$ cuando $t = 0$
$\frac{\partial w}{\partial x} = 2xy$
$\frac{\partial w}{\partial y} = x^2 - 2y$
$\frac{dx}{dt} = cos\,(t)$
$\frac{dy}{dt} = e^t$
$\frac{dw}{dt} = (2xy)\,(cos\,(t)) + (x^2 - 2y)\,(e^t)\,|_{x=sen(t),y=e^t|_{t=0}} = 2\,(sen\,(t))\,(e^t)\,(cos\,(t)) +$
$\left((sen\,(t))^2 - 2\,(e^t)\right)(e^t)\,|_{t=0} = -2$

```
(%i65) z(x,y):=y*x^2-y^2$
       xx(t):=sin(t)$
       yy(t):=e^t$
       zx:diff(z(x,y),x,1)$
       zy:diff(z(x,y),y,1)$
       dx:diff(xx(t),t,1)$
       dy:diff(yy(t),t,1)$
       dz:ratsimp(subst(0,t,subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,zx*dx+zy*dy))))$
       print("w=",z(x,y))$
       print("x=",xx(t))$
       print("y=",yy(t))$
       print("w_x=",zx)$
       print("w_y=",zy)$
       print("dx/dt=",dx)$
       print("dy/dt=",dy)$
       print("dw/dt=",dz)$
```

$w = x^2\, y - y^2$
$x = \sin(t)$
$y = e^t$
$w_x = 2\, x\, y$
$w_y = x^2 - 2\, y$
$dx/dt = \cos(t)$
$dy/dt = e^t$
$dw/dt = -2$

Utilice la regla de la cadena para encontrar $\frac{dz}{dt}$ o $\frac{dw}{dt}$

1. $z = x^2y + xy^2; x = 2 + t^4; y = 1 - t^3$
   $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2$
   $\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy$
   $\frac{dx}{dt} = 4t^3$
   $\frac{dy}{dt} = -3t^2$
   $\frac{dz}{dt} = \left(2xy + y^2\right) 4t^3 - 3t^2 \left(x^2 + 2xy\right)\Big|_{x=2+t^4, y=1-t^3} = -24t^2 + 20t^3 + 12t^5 - 42t^6 + 8t^7 + 10t^9 - 11t^{10}$

```
(%i1)  z(x,y):=(x^2)*y+x*(y^2)$
       xx(t):=2+t^4$
       yy(t):=1-t^3$
       zx:diff(z(x,y),x,1)$
       zy:diff(z(x,y),y,1)$
       dx:diff(xx(t),t,1)$
       dy:diff(yy(t),t,1)$
       dz:ratsimp(subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,zx*dx+zy*dy)))$
       print("z=",z(x,y))$
       print("x=",xx(t))$
       print("y=",yy(t))$
       print("z_x=",zx)$
       print("z_y=",zy)$
       print("dx/dt=",dx)$
       print("dy/dt=",dy)$
       print("dz/dt=",dz)$
```

$z = x\,y^2 + x^2\,y$
$x = t^4 + 2$
$y = 1 - t^3$
$z_x = y^2 + 2\,x\,y$
$z_y = 2\,x\,y + x^2$
$dx/dt = 4\,t^3$
$dy/dt = -3\,t^2$
$dz/dt = -11\,t^{10} + 10\,t^9 + 8\,t^7 - 42\,t^6 + 12\,t^5 + 20\,t^3 - 24\,t^2$

2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}; x = e^{2t}; y = e^{-2t}$
$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\frac{dx}{dt} = 2e^{2t}$
$\frac{dy}{dt} = -2e^{-2t}$

```
(%i49) z(x,y):=sqrt(x^2+y^2)$
       xx(t):=e^(2*t)$
       yy(t):=e^(-2*t)$
       zx:diff(z(x,y),x,1)$
       zy:diff(z(x,y),y,1)$
       dx:diff(xx(t),t,1)$
       dy:diff(yy(t),t,1)$
       dz:ratsimp(subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,zx*dx+zy*dy)))$
       print("z=",z(x,y))$
       print("x=",xx(t))$
       print("y=",yy(t))$
       print("z_x=",zx)$
       print("z_y=",zy)$
       print("dx/dt=",dx)$
       print("dy/dt=",dy)$
       print("dz/dt=",dz)$
```

$z = \sqrt{y^2 + x^2}$

$x = e^{2\,t}$

$y = \dfrac{1}{e^{2\,t}}$

$z_x = \dfrac{x}{\sqrt{y^2 + x^2}}$

$z_y = \dfrac{y}{\sqrt{y^2 + x^2}}$

$dx/dt = 2\,e^{2\,t}$

$dy/dt = -\dfrac{2}{e^{2\,t}}$

$dz/dt = \dfrac{2\,e^{8\,t} - 2}{e^{4\,t}\sqrt{\frac{e^{8\,t}+1}{e^{4\,t}}}}$

3. $z = sen\,(x)\,cos\,(y)\,; x = \pi t; y = \sqrt{t}$

```
(%i81) z(x,y):=sin(x)*cos(y)$
       xx(t):=pi*t$
       yy(t):=sqrt(t)$
       zx:diff(z(x,y),x,1)$
       zy:diff(z(x,y),y,1)$
       dx:diff(xx(t),t,1)$
       dy:diff(yy(t),t,1)$
       dz:ratsimp(subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,zx*dx+zy*dy)))$
       print("z=",z(x,y))$
       print("x=",xx(t))$
       print("y=",yy(t))$
       print("z_x=",zx)$
       print("z_y=",zy)$
       print("dx/dt=",dx)$
       print("dy/dt=",dy)$
       print("dz/dt=",dz)$
```

$z = \sin(x)\ \cos(y)$
$x = \pi\, t$
$y = \sqrt{t}$
$z_x = \cos(x)\ \cos(y)$
$z_y = -\sin(x)\ \sin(y)$
$dx/dt = \pi$
$dy/dt = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}$
$dz/dt = \dfrac{2\,\pi\cos\left(\sqrt{t}\right)\ \sqrt{t}\cos(\pi\, t) - \sin\left(\sqrt{t}\right)\ \sin(\pi\, t)}{2\sqrt{t}}$

4. $z = xln\,(x + 2y)\,; x = sen\,(t)\,; y = cos\,(t)$

```
(%i97) z(x,y):=x*log(x+2*y)$
       xx(t):=sin(t)$
       yy(t):=cos(t)$
       zx:diff(z(x,y),x,1)$
       zy:diff(z(x,y),y,1)$
       dx:diff(xx(t),t,1)$
       dy:diff(yy(t),t,1)$
       dz:ratsimp(subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,zx*dx+zy*dy)))$
       print("z=",z(x,y))$
       print("x=",xx(t))$
       print("y=",yy(t))$
       print("z_x=",zx)$
       print("z_y=",zy)$
       print("dx/dt=",dx)$
       print("dy/dt=",dy)$
       print("dz/dt=",dz)$
```

$z = x\log\left(2\,y + x\right)$
$x = \sin\left(t\right)$
$y = \cos\left(t\right)$
$z_x = \log\left(2\,y + x\right) + \frac{x}{2\,y + x}$
$z_y = \frac{2\,x}{2\,y + x}$
$dx/dt = \cos\left(t\right)$
$dy/dt = -\sin\left(t\right)$
$dz/dt = \frac{\left(\cos\left(t\right)\,\sin\left(t\right) + 2\cos\left(t\right)^2\right)\,\log\left(\sin\left(t\right) + 2\cos\left(t\right)\right) - 2\sin\left(t\right)^2 + \cos\left(t\right)\,\sin\left(t\right)}{\sin\left(t\right) + 2\cos\left(t\right)}$

5. $w = xe^{y/z}; x = t^2; y = 1 - t; z = 1 + 2t$

```
(%i479) w(x,y,z):=x*e^(y/z)$
        xx(t):=t^2$
        yy(t):=1-t$
        zz(t):=1+2*t$
        W:jacobian([w(x,y,z)], [x,y,z])$
        T:jacobian([xx(t),yy(t),zz(t)], [t])$
        dw:ratsimp(subst(zz(t),z,subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,W.T))))$
        print("dw/dt=",dw)$
```

$$dw/dt = \frac{8\,e^{\frac{1}{2\,t+1}}\,t^3 + 5\,e^{\frac{1}{2\,t+1}}\,t^2 + 2\,e^{\frac{1}{2\,t+1}}\,t}{4\,e^{\frac{t}{2\,t+1}}\,t^2 + 4\,e^{\frac{t}{2\,t+1}}\,t + e^{\frac{t}{2\,t+1}}}$$

6. $w = xy + yz^2; x = e^t; y = e^t sent; z = e^t cost$

```
(%i503) w(x,y,z):=x+y+yz^2$
        xx(t):=e^t$
        yy(t):=e^t$
        zz(t):=cos(t)*e^t$
        W:jacobian([w(x,y,z)], [x,y,z])$
        T:jacobian([xx(t),yy(t),zz(t)], [t])$
        dw:ratsimp(subst(zz(t),z,subst(yy(t),y,subst(xx(t),x,W.T))))$
        print("dw/dt=",dw)$
```

$$dw/dt = 2\,e^t$$

6. Derivadas parciales de orden superior

Las derivadas parciales de segundo orden son derivadas parciales de f_x y f_y. La derivada respecto a x de f_x se denota como f_{xx} y la derivada parcial de f_y con respecto a y es f_{yy}.

Las derivadas parciales de segundo orden cruzadas o mixtas son:

$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

La notación de Leibniz para las derivadas parciales de orden superior son:

$f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$
$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$
$f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

6.1. Ejemplo

Calcule las derivadas parciales de segundo orden y las derivadas mixtas de las siguientes funciones:

1. $f(x, y) = x^3 + y^2 e^x$
2. $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$
3. $f(x, y) = x + y + xy$
4. $g(x, y) = sen\,(xy)$
5. $h(x, y) = x^2 y + cos\,(y) + ysen\,(x)$
6. $z = xe^y + y + 1$
7. $z = ln\,(x + y)$
8. $w = xsin(x^2 y)$

Calcule las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

1. $z = x^2 + y^2$
2. $z = x^4 y^3$
3. $z = x^4 y + \frac{x}{y^2}$
4. $v = \pi r^2 h$
5. $z = \frac{x}{y}$
6. $z = \frac{x}{x-y}$
7. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

8. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$

9. $z = (senx)(cosy)$

10. $z = sen(u^2v)$

11. $z = tan\left(\frac{x}{y}\right)$

12. $s = arctan(wz)$

13. $z = ln(x^2 + y^2)$

14. $A = sen(4\theta - 9\beta)$

15. $w = e^{\gamma+s}$

16. $Q = \gamma e^{\theta}$

17. $z = e^{xy}$

18. $z = e^{-\frac{v^2}{k}}$

19. $z = e^{-x^2-y^2}$

20. $z = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$

21. $f(x,y) = x^y$

22. $f(x,y) = y^x$

23. $f(x,y) = senh(x^2y)$

24. $f(x,y) = cosh(y - cosx)$

25. $w = xy^2z^3$

26. $w = \frac{x}{y+z}$

27. $Q = \frac{L}{M}e^{-\frac{L}{M}}$

7. Derivada direccional

7.1. Vectores en el espacio

Sean $u = \langle u_1, u_2, u_3 \rangle$ y $v = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar

1. Igualdad de vectores
   $u = v \Leftrightarrow u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$

2. Longitud
   $\|\mathrm{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$

3. Vector unitario en dirección v
   $u = \frac{1}{\|v\|} \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

4. Suma de vectores
   $v + u = \langle v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3 \rangle$

5. Producto por un escalar
   $cv = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$

6. Vectores paralelos
   Dos vectores no nulos u y v son paralelos si existe algún escalar c tal que $u = cv$

7. Producto punto/escalar
   $u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

8. Vectores ortogonales
   u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$

9. Angulo entre vectores
   El angulo entre u y v se define como $cos(\theta) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$

10. Desigualdad triangular
    $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

11. Proyección de u sobre v
    $proy_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$

7.1.1. Ejemplo

1. Halla los componentes y la longitud del vector v cuyo punto inicial es $(-2, 3, 1)$ y cuyo punto final es $(0, -4, 4)$, al igual que el vector unitario.

    a) Componentes $v = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1\rangle = \langle 2, -7, 3\rangle$

    b) Longitud $\|v\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$

    c) Vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{62}} \langle 2, -7, 3\rangle$

2. Dados $u = \langle 3, -1, 2\rangle, v = \langle -4, 0, 2\rangle, w = \langle 1, -1, 2\rangle, z = \langle 2, 0, -1\rangle$ encontrar el angulo entre

    a) u y v
    $\|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{20}$
    $cos\,(\theta) = \frac{\langle 3,-1,2\rangle\cdot\langle -4,0,2\rangle}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-2+4}{2\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}$
    Por lo tanto $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = 118{,}56°$

    b) u y w
    $\|u\| = \sqrt{14}, \|w\| = \sqrt{6}$
    $cos\,(\theta) = \frac{\langle 3,-1,2\rangle\cdot\langle 1,-1,2\rangle}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3+1+4}{\sqrt{84}} = \frac{8}{\sqrt{84}}$
    $\theta = 29{,}2°$

    c) v y z
    $\|v\| = \sqrt{20}, \|z\| = \sqrt{5}$
    $cos\,(\theta) = \frac{\langle -4,0,2\rangle\cdot\langle 2,0,-1\rangle}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-8-2}{\sqrt{100}} = \frac{-10}{10} = -1$
    $\theta = 180°$

3. Encontrar la proyección de u sobre v si $u = 3i - 5j + 2k$ y $v = 7i + j - 2k$
    $\|v\| = \sqrt{49 + 1 + 4} = \sqrt{54}$
    $proy_v u = \frac{\langle 3,-5,2\rangle\cdot\langle 7,1,-2\rangle}{54}\langle 7, 1, -2\rangle = \frac{21-5-4}{54}\langle 7, 1, -2\rangle = \frac{12}{54}\langle 7, 1, -2\rangle = \frac{2}{9}\langle 7, 1, -2\rangle$

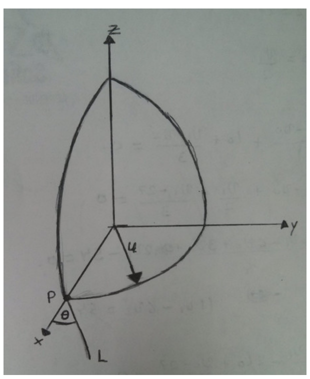
7.2. Derivadas direccionales y gradientes

Para determinar la pendiente de una superficie en un punto dado definimos un nuevo tipo de derivada llamada derivada direccional.

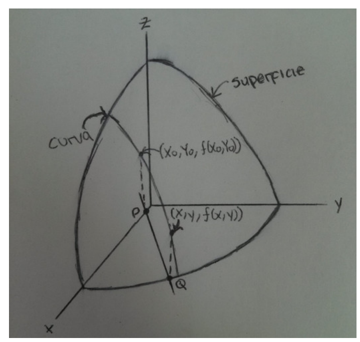
Sea $z = f(x, y)$ una superficie y $P = (x_0, y_0)$ un punto en el dominio de f

Figura 1: Derivadas direccionales

(a) Especificamos una dirección mediante un vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ donde θ es el angulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada reducimos a dos dimensiones mediante la intersección de la superficie con un plano vertical por el punto P y es paralelo a u



(b) Este plano vertical corta a la superficie para formar la curva c y definimos la pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como la pendiente de la curva en ese punto. La pendiente de la curva c se escribe como un limite de calculo de una variable. El plano vertical empleado para formar c corta al plano xy en una recta L que se representa por las ecuaciones parametricas $x = x_0 + tcos\theta; y = y_0 + tsen\theta; \forall t$ en el punto $Q(x, y) \in$a la recta L.



Los puntos dados se representan como $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))\,; Q = (x, y, f(x, y))$
La distancia P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(tcos\theta)^2 + (tsen\theta)^2}$$

Al escribir la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

7.2.1. Derivada direccional de f en la dirección de u

La derivada direccional de f en dirección u se escribe:

$$D_u f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Si f es una función diferenciable en x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ es

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\, cos\theta + f_y(x,y)\, sen\theta$$

7.2.2. Ejemplo

1. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1,2)$ en la dirección de $u = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) i + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) j$.
   $f_x = -2x,\ f_x(1,2) = -2$
   $f_y = -\frac{1}{2}y,\ f_y(1,2) = -1$

   $D_u f(1,2) = -2cos\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

2. Encontrar la derivada direccional de e^{xy} en $(-2,0)$ en la dirección del vector unitario u que forma un angulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje x positivo.
   $f_x = ye^{xy},\ f_x(-2,0) = 0$
   $f_y = xe^{xy},\ f_y(-2,0) = -2$

   $D_u f(-2,0) = -2sen\frac{\pi}{3} = -1$

3. Encontrar la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2y$ en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $a = 3i + 4j$.
   $u = \frac{1}{\sqrt{25}}\langle 3,4\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$
   $f_x = 6xy,\ f_x(1,2) = 6(1)(2) = 12$
   $f_y = 3x^2,\ f_y(1,2) = 3(1)^2 = 3$

   $D_u f(1,2) = 12\left(\frac{3}{5}\right) + 3\frac{4}{5} = \frac{36+12}{5} = \frac{48}{5}$