Universidad de Guadalajara

Departamento de Electrónica

Apuntes de clase

Métodos Matemáticos 2

Eduardo Vázquez Díaz

lalohao@gmail.com

Índice

1. Repaso

Graficar dominio, codominio (rango) de las siguientes funciones

1. $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$
2. $\frac{z\check{s}}{4} - \frac{y^2}{9} - \frac{x\check{s}}{4} = 1$
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$
4. $z = x^2 + y^2$
5. $z^2 = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
6. $z - y^2 + x^2 = 0$
7. $16z + x^2 + 4y^2 = 0$
8. $36 - x^2 - 4y^2 = 9z^2$
9. $4x^2 + y^2 - z^2 = 16$
10. $9z^2 - 4y^2 - x^2 = 36$

2. Funciones de varias variables

Una función de 2 variables se escribe como
$z = f(x, y) = x^2 + xy$
Una función de 3 variables se escribe como
$f(x, y, z) = x + 2y - 3z$

2.1. Definición de una función de varias variables

Sea D un conjunto de pares ordenados de números reales. Y a cada par ordenado (x, y) de D le corresponde un numero real $f(x, y)$ entonces se dice que f es una función de x e y. El conjunto D es el dominio de f y el correspondiente conjunto de valores de $f(x, y)$ es el rango de f.

Si f es una función de 2 variables independientes x e y el dominio de f es una región en el plano xy.

Si f es una función de 3 variables independientes x,y e z el dominio es una región en el espacio.

Si $z = f\left(x, y\right)$ las variables independientes son x e y, y z es la variable independiente.

2.2. Ejemplos de funciones de varias variables

Algunas magnitudes físicas:
Trabajo realizado por una fuerza $v = f \cdot d$
Volumen de un cilindro circular recto $v = \pi r^2 h$
Volumen de un solido rectangular $v = lwh$

2.3. Ejercicios

Sea $f\left(x, y\right) = x^2 y + 1$ encontrar:

1. $f\left(2, 1\right) = \left(2\right)^2 \left(1\right) + 1 = 4 + 1 = 5$
2. $f\left(1, 2\right) = \left(1\right)^2 \left(2\right) + 1 = 2 + 1 = 3$
3. $f\left(0, 0\right) = \left(0\right)^2 \left(0\right) + 1 = 1$
4. $f\left(1, -3\right) = \left(1\right)^2 \left(-3\right) + 1 = -3 + 1 = -2$
5. $f\left(3a, a\right) = \left(3a\right)^2 \left(a\right) + 1 = 9a^2 \cdot a + 1 = 9a^3 + 1$
6. $f\left(ab, a - b\right) = \left(ab\right)^2 \left(a - b\right) + 1 = a^2 b^2 \left(a - b\right) + 1 = a^3 b^2 - a^2 b^3 + 1$

Sea $f\left(x, y\right) = x + \sqrt[3]{xy}$ encontrar:

1. $f\left(t, t^2\right) = t + \sqrt[3]{t \cdot t^2} = t + \sqrt[3]{t^3} = t + t = 2t$
2. $f\left(2y^2, 4y\right) = 2y^2 + \sqrt[3]{2y^2 4y} = 2y^2 + \sqrt[3]{8y^3} = 2y^2 + 2y$

Sea $g\left(x\right) = xsenx$ encontrar:

1. $g\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y} sen\left(\frac{x}{y}\right)$
2. $g\left(xy\right) = xysen\left(xy\right)$
3. $g\left(x - y\right) = \left(x - y\right) sen\left(x - y\right) = xsen\left(x - y\right) - ysen\left(x - y\right)$

Encontrar $F\left(g\left(x\right),h\left(y\right)\right)$ si $F\left(x,y\right)=xe^{xy};g\left(x\right)=x^{3};h\left(y\right)=3y+1$

$F\left(x^{3},3y+1\right)=x^{3}e^{x^{3}(3y+1)}=x^{3}e^{3x^{3}y+x^{3}}$

Encontrar $g\left(u\left(x,y\right),\tau\left(x,y\right)\right)$ si $g\left(x,y\right)=ysen\left(x^{2}y\right);u\left(x,y\right)=x^{2}y^{3};\tau\left(x,y\right)=\pi xy$

$F\left(x^{2}y^{3},\pi xy\right)=\left(\pi xy\right)sen\left(\left(x^{2}y^{3}\right)^{2}\left(\pi xy\right)\right)=\pi xysen\left(\left(x^{4}y^{6}\right)\left(\pi xy\right)\right)=\pi xysen\left(\pi x^{5}y^{7}\right)$

3. Derivadas parciales

Estudiaremos derivadas relacionadas con funciones de 2 variables.

Sea $f\left(x,y\right)$, si $y=y_0$ se toma como constante al considerar a x como variable entonces $f\left(x,y_0\right)$ solo esta en función de x.

Si esta función es derivable en $x=x_0$ entonces el valor de esta derivada se denota por $f_x\left(x_0,y_0\right)$ y se le llama derivada parcial en f con respecto a x en el punto $\left(x_0,y_0\right)$.

Para obtener $f_x\left(x,y\right)$ se deriva $f\left(x,y\right)$ con respecto a x, tratando a y como constante.

Para obtener $f_y\left(x,y\right)$ se deriva $f\left(x,y\right)$ con respecto a y, tratando a x como constante.

4. Derivada direccional

4.1. Vectores en el espacio

Sean $u=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ y $v=\langle v_1,v_2,v_3\rangle$ vectores en el espacio y sea c un escalar

1. Igualdad de vectores
   $u=v\Leftrightarrow u_1=v_1,u_2=v_2,u_3=v_3$

2. Longitud
   $\|\mathrm{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

3. Vector unitario en dirección v
   $u=\frac{1}{\|v\|}\langle v_1,v_2,v_3\rangle$

4. Suma de vectores
   $v+u=\langle v_1+u_1,v_2+u_2,v_3+u_3\rangle$

5. Producto por un escalar
   $cv = \langle cv_1, cv_2, cv_3 \rangle$

6. Vectores paralelos
   Dos vectores no nulos u y v son paralelos si existe algún escalar c tal que $u = cv$

7. Producto punto/escalar
   $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

8. Vectores ortogonales
   u y v son ortogonales si $u \cdot v = 0$

9. Angulo entre vectores
   El angulo entre u y v se define como $cos(\theta)=\frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}$

10. Desigualdad triangular
    $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

11. Proyección de u sobre v
    $proy_v u = \frac{u \cdot v}{\|v\|^2} v$

4.1.1. Ejemplo

1. Halla los componentes y la longitud del vector v cuyo punto inicial es $(-2, 3, 1)$ y cuyo punto final es $(0, -4, 4)$, al igual que el vector unitario.

   a) Componentes $v = \langle 0 - (-2), -4 - 3, 4 - 1 \rangle = \langle 2, -7, 3 \rangle$
   b) Longitud $\|v\| = \sqrt{2^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 49 + 9} = \sqrt{62}$
   c) Vector unitario $u = \frac{1}{\sqrt{62}} \langle 2, -7, 3 \rangle$

2. Dados $u = \langle 3, -1, 2 \rangle, v = \langle -4, 0, 2 \rangle, w = \langle 1, -1, 2 \rangle, z = \langle 2, 0, -1 \rangle$ encontrar el angulo entre

   a) u y v
   $\|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{20}$
   $cos(\theta) = \frac{\langle 3,-1,2 \rangle \cdot \langle -4,0,2 \rangle}{\sqrt{14}\sqrt{20}} = \frac{-2+4}{2\sqrt{5}\sqrt{14}} = \frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}$
   Por lo tanto $\theta = cos^{-1}\left(\frac{-8}{2\sqrt{5}\sqrt{14}}\right) = 118{,}56$ř

b) u y w
$\|u\| = \sqrt{14}, \|w\| = \sqrt{6}$
$cos\left(\theta\right) = \frac{\langle 3,-1,2\rangle \cdot \langle 1,-1,2\rangle}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3+1+4}{\sqrt{84}} = \frac{8}{\sqrt{84}}$
$\theta = 29{,}2$ř

c) v y z
$\|v\| = \sqrt{20}, \|z\| = \sqrt{5}$
$cos\left(\theta\right) = \frac{\langle -4,0,2\rangle \cdot \langle 2,0,-1\rangle}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = \frac{-8-2}{\sqrt{100}} = \frac{-10}{10} = -1$
$\theta = 180$ř

3. Encontrar la proyección de u sobre v si $u = 3i - 5j + 2k$ y $v = 7i + j - 2k$
$\|v\| = \sqrt{49+1+4} = \sqrt{54}$
$proy_v u = \frac{\langle 3,-5,2\rangle \cdot \langle 7,1,-2\rangle}{54}\left\langle 7,1,-2\right\rangle = \frac{21-5-4}{54}\left\langle 7,1,-2\right\rangle = \frac{12}{54}\left\langle 7,1,-2\right\rangle = \frac{2}{9}\left\langle 7,1,-2\right\rangle$

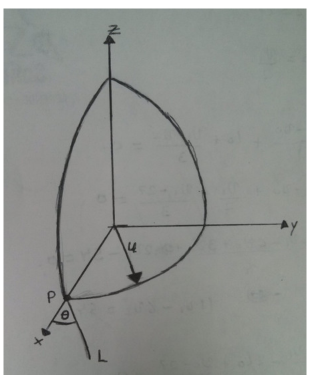
4.2. Derivadas direccionales y gradientes

Para determinar la pendiente de una superficie en un punto dado definimos un nuevo tipo de derivada llamada derivada direccional.

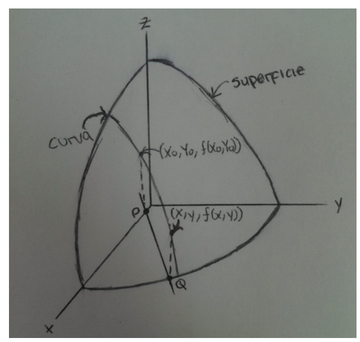
Sea $z = f\left(x,y\right)$ una superficie y $P = \left(x_0, y_0\right)$ un punto en el dominio de f

Figura 1: Derivadas direccionales

(a) Especificamos una dirección mediante un vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ donde θ es el angulo que forma el vector con el eje x positivo. Para hallar la pendiente deseada reducimos a dos dimensiones mediante la intersección de la superficie con un plano vertical por el punto P y es paralelo a u



(b) Este plano vertical corta a la superficie para formar la curva c y definimos la pendiente de la superficie en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ como la pendiente de la curva en ese punto. La pendiente de la curva c se escribe como un limite de calculo de una variable. El plano vertical empleado para formar c corta al plano xy en una recta L que se representa por las ecuaciones parametricas $x = x_0 + tcos\theta; y = y_0 + tsen\theta; \forall t$ en el punto $Q(x, y) \in$a la recta L.



Los puntos dados se representan como $P = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))\,; Q = (x, y, f(x, y))$
La distancia P y Q es

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \sqrt{(tcos\theta)^2 + (tsen\theta)^2}$$

Al escribir la pendiente de la recta secante que pasa por P y Q

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{t} = \frac{f(x_0 + tcos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

4.2.1. Derivada direccional de f en la dirección de u

La derivada direccional de f en dirección u se escribe:

$$D_u f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + t cos\theta, y_0 + sen\theta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

Si f es una función diferenciable en x e y, entonces la derivada direccional de f en la dirección del vector unitario $u = cos\theta i + sen\theta j$ es

$$D_u f(x,y) = f_x(x,y)\, cos\theta + f_y(x,y)\, sen\theta$$

4.2.2. Ejemplo

1. Calcule la derivada direccional de $f(x,y) = 4 - x^2 - \frac{1}{4}y^2$ en el punto $(1,2)$ en la dirección de $u = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) i + sen\left(\frac{\pi}{3}\right) j$.
   $f_x = -2x,\ f_x(1,2) = -2$
   $f_y = -\frac{1}{2}y,\ f_y(1,2) = -1$

   $D_u f(1,2) = -2cos\frac{\pi}{3} - sen\frac{\pi}{3} = \frac{-2+\sqrt{3}}{2}$

2. Encontrar la derivada direccional de e^{xy} en $(-2,0)$ en la dirección del vector unitario u que forma un angulo de $\frac{\pi}{3}$ con el eje x positivo.
   $f_x = ye^{xy},\ f_x(-2,0) = 0$
   $f_y = xe^{xy},\ f_y(-2,0) = -2$

   $D_u f(-2,0) = -2sen\frac{\pi}{3} = -1$

3. Encontrar la derivada direccional de $f(x,y) = 3x^2y$ en el punto $(1,2)$ en la dirección del vector $a = 3i + 4j$.
   $u = \frac{1}{\sqrt{25}}\langle 3,4\rangle = \left\langle \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\rangle$
   $f_x = 6xy,\ f_x(1,2) = 6(1)(2) = 12$
   $f_y = 3x^2,\ f_y(1,2) = 3(1)^2 = 3$

   $D_u f(1,2) = 12\left(\frac{3}{5}\right) + 3\frac{4}{5} = \frac{36+12}{5} = \frac{48}{5}$