Universidad de Guadalajara
Departamento de electrónica

Apuntes

Redes de circuitos eléctricos

Eduardo Vazquez Diaz
lalohao@gmail.com

Contenido

1. Metodología

1.1. Evaluacion

- 60 % examen
  - 30 % examen
  - 30 % examen
- 40 % tareas/actividades

1.2. Libro

Analisis de circuitos en ingenieria William Hayt

2. Circuitos polifásicos

2.1. Sistemas monofásicos de 3 hilos balanceado

Son aquellos sistemas en el cual la fuente tiene 3 hilos y las mediciones del voltimetro muestran la presencia de tensiones senoidales de igual amplitud entre dos terminales cualesquiera.

$$V_{an} = V_{nb}$$

por lo que:

$$V_{ab} = V_{an} + V_{nb} = 2V_{an} = 2V_{nb}$$

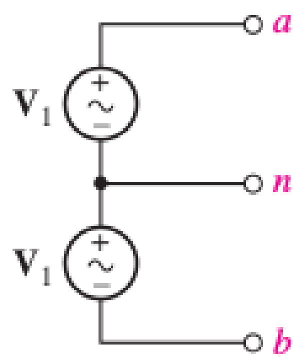


Figura 1: Diagrama de un sistema monofasico de 3 hilos

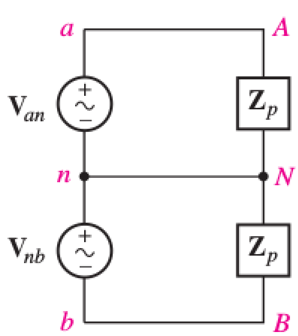


Figura 2: Sistema con cargas balanceadas

Cuando se conectan dos cargas (impedancias) idénticas las corrientes también son idénticas:

$$I_{aA} = \frac{V_{an}}{Z_p} = I_{Bb} = \frac{V_{ab}}{Z_p}$$

Aplicando L.C.K en el *neutro* (nodo nN) se obtiene una característica fundamental de los circuitos polifásicos balanceados:

$$I_{nN} = I_{Bb} + I_{Aa} = I_{Bb} - I_{aA} = 0$$

Lo que significa que no fluye corriente por el neutro.

2.2. Comparación de cargas trifásicas conectadas en Y y Δ

Cuadro 1: Comparación de voltaje y corriente

Carga	Tension de fase	Tension de linea	Corriente de fase	Corriente de linea
Y	$V_{AN} = V_p \angle \theta$	$V_{AB} = \sqrt{3} V_p \angle \theta + 30$	$I_{aA} = I_{AN} = \frac{V_{AN}}{Z_p}$	”
	$V_{BN} = V_p \angle \theta - 120$	$V_{BC} = \sqrt{3} V_p \angle \theta - 90$	$I_{bB} = I_{BN} = \frac{V_{BN}}{Z_p}$	”
	$V_{CN} = V_p \angle \theta - 240$	$V_{CA} = \sqrt{3} V_p \angle \theta - 210$	$I_{cC} = I_{CN} = \frac{V_{CN}}{Z_p}$	”
Δ	$V_{AB} = \sqrt{3} V_p \angle \theta$	”	$I_{AB} = \frac{V_{AB}}{Z_p}$	$I_{aA} = (\sqrt{3} \angle \theta) \frac{V_{AB}}{Z_p}$
	$V_{BC} = \sqrt{3} V_p \angle \theta - 120$	”	$I_{BC} = \frac{V_{BC}}{Z_p}$	$I_{bB} = (\sqrt{3} \angle \theta) \frac{V_{BC}}{Z_p}$
	$V_{CA} = \sqrt{3} V_p \angle \theta - 240$	”	$I_{CA} = \frac{V_{CA}}{Z_p}$	$I_{cC} = (\sqrt{3} \angle \theta) \frac{V_{CA}}{Z_p}$

Cuadro 2: Comparación de potencia

Carga	Potencia por fase
Y	$\sqrt{3} V_L I_L cos\theta$
Δ	$\sqrt{3} V_L I_L cos\theta$

donde $\cos\theta$ es el factor de potencia de la carga

2.3. Análisis del desplazamiento del neutro en conexión estrella balanceada

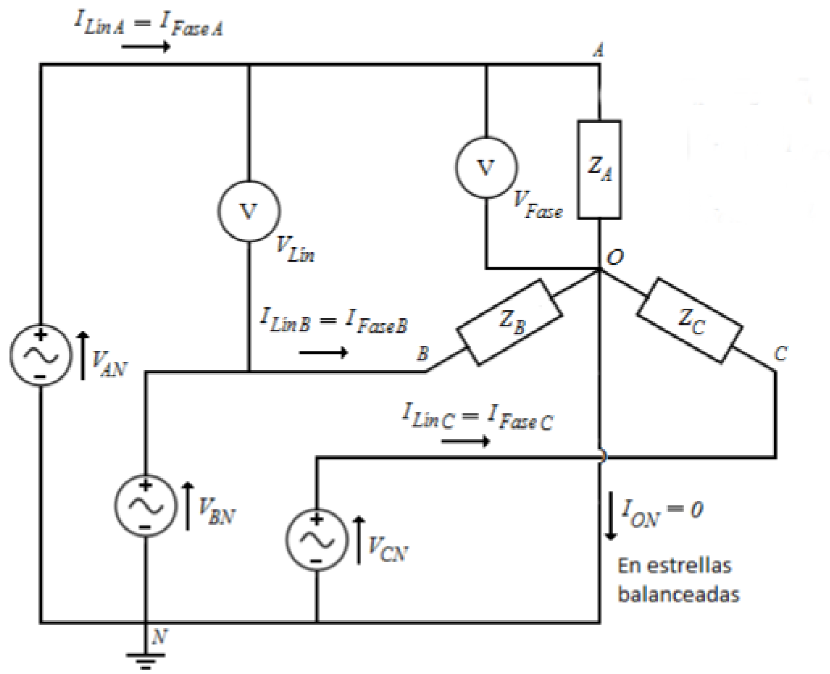


Figura 3: Diagrama de fuentes en estrella conectado a cargas en estrella. Tambien conocido como Y-Y.

$$
\begin{gathered}
V_{AN} = \frac{V_{LinA}}{\sqrt{3}}; I_{LinA} = \frac{V_{LinA}}{Z_A} \\
V_{AO} = V_{AN} + V_{NO} = V_{AN} - V_{ON} \qquad (1) \\
\therefore V_{BO} = V_{BN} - V_{ON} \\
\therefore V_{CO} = V_{CN} - V_{ON}
\end{gathered}
$$

Aplicando L.C.K. al nodo N.

$$
\begin{gathered}
I_{AO} + I_{BO} + I_{CO} = 0 \\
\frac{V_{AO}}{Z_A} + \frac{V_{BO}}{Z_B} + \frac{V_{CO}}{Z_C} = 0 \\
V_{AO}Y_A + V_{BO}Y_B + V_{CO}Y_C = 0 \qquad (2)
\end{gathered}
$$

Cuando la tierra fisica no esta conectada, y Z_A, Z_B, Z_C son cargas diferentes se crea un voltaje V_{ON}, si este voltaje es mayor a la norma entonces el circuito se desbalancea.

Sustituyendo las ecuaciones (1) en la ecuación (2):

$$(V_{AN} - V_{ON})Y_A + (V_{BN} - V_{ON})Y_B + (V_{CN} - V_{ON})Y_C = 0$$

$$V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C = V_{ON}(Y_A + Y_B + Y_C)$$

$$V_{ON} = \frac{V_{AN}Y_A + V_{BN}Y_B + V_{CN}Y_C}{Y_A + Y_B + Y_C} \tag{3}$$

La ecuación (3) describe el voltaje en el neutro a causa de un desbalance.

2.3.1. Ejemplo

Una conexion estrella desbalanceada cuyas impedancias son: $Z_A = 12\angle 0$, $Z_B = 8\angle 45$, $Z_C = 10\angle 30$ (en grados) se alimenta con un sistema trifasico de 4 hilos cuyo voltaje de linea es $220v$ secuencia ABC .

1. Calcule el valor de cada corriente de linea.
2. La corriente que circula del neutro a tierra.
3. La potencia aparente que consume cada fase y la potencia aparente total.

(1)

$$I_{LinA} = 13{,}018046815794099\angle -6{,}686239852427747$$

$$I_{LinB} = 16{,}622401736597524\angle -150{,}4259528457764$$

$$I_{LinC} = 9{,}838937778497865\angle 81{,}06982369527327$$

(2)

$$I_N = 8{,}358438485664404e - 15 < 39{,}61068824002659$$

3. Inductancia mutua

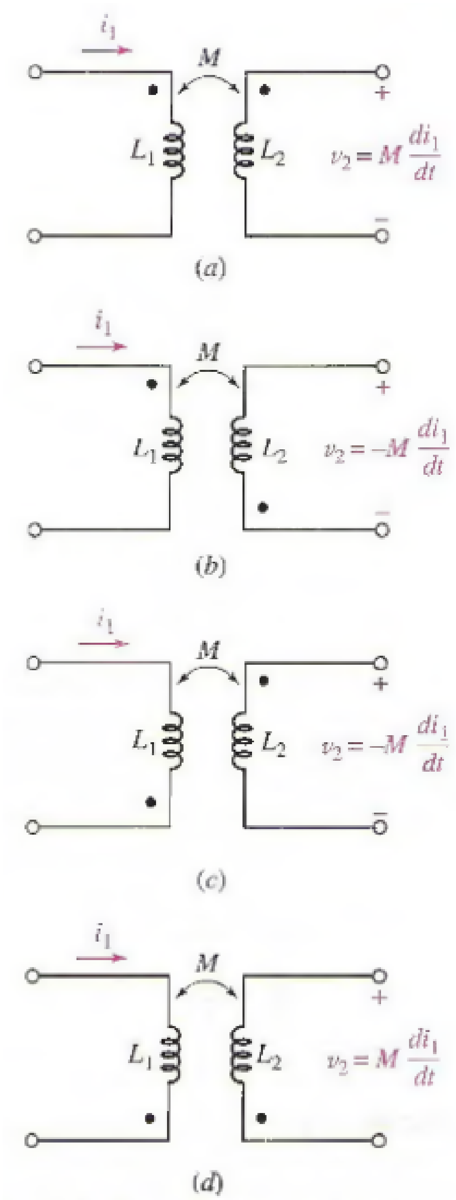


Figura 4: Convención del punto

El voltaje en un inductor esta dado por:

$$v(t) = L\frac{di}{dt}$$

Cuando el voltaje esta siendo inducido por otro inductor como en el caso de los transformadores el voltaje se vuelve:

$$v(t) = \pm M\frac{di_2}{dt}$$

Donde M es el coeficiente de inductancia, y el signo de la corriente se determina por medio de la convención del punto.

3.1. Ejemplo 1

La ecuación (4) describe el voltaje en el inductor 2 producido por el inductor 1 suponiendo que la convención del punto sea determinada por la figura (a).

$$V_2 = M_{21}\frac{di_1(t)}{dt} \tag{4}$$

Cuando se aplica un voltaje también en V_2 la ecuación se vuelve:

$$V_2 = L\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

3.2. Ejemplo 2

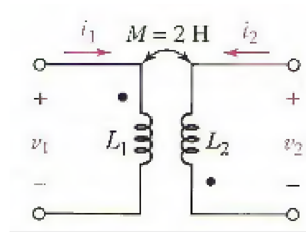
En el siguiente circuito determina (a) v_1 si $i_2 = 5\sin 45tA$ e $i_1 = 0$; (b) v_2 si $i_1 = -8e^{-t}A$ e $i_2 = 0$

$$(a)v_1 = -(2)(45)(5\cos 45t) = -450\cos 45t$$

$$(b)v_2 = -(2)(-1)(-8e^{-t}) = -16e^{-t}$$

4. Frecuencia compleja

En el dominio de s es posible analizar algunos aspectos de los circuitos de una forma mas sencilla comparado al uso de ecuaciones diferenciales.



$$s = \alpha + j\omega$$

Partiendo de una función de voltaje real $v(t) = V_m e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$, utilizando la idendidad de euler se obtiene

$$v(t) = f(t) = Ke^{st}$$

De la cual se pueden deducir los siguientes casos:

- Corriente Directa (CD)
- Exponencial
- Senoidal
- Senoidal amortiguado exponencialmente

4.1. Caso CD

4.2. Caso seno amortiguado exponencialmente

$$v(t) = Re\left\{V_m e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)}\right\}$$

$$v(t) = Re\left\{V_m e^{j\theta} e^{st}\right\}$$

$$\frac{1}{2} V_m e^{j\theta} e^{(\sigma + j\omega)t} + \frac{1}{2} V_m e^{-j\theta} e^{(\sigma - j\omega)t}$$

4.2.1. Ejemplo

```
Convertir a forma general
(a) s=7+j0
(b) s=0+j10
```

$$(1) Ke^{7t}$$

$$(2) Ke^{j10t} = K\left[cos(10t) - jsen(10t)\right]$$

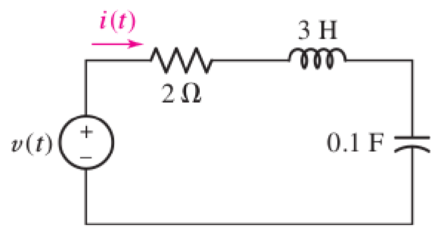
`Identifique las frecuencias complejas de la siguiente ecuacion:`

$(2e^{-100t} + e^{200t}) \sin 2000t$

$$2e^{-100t} \sin 2000t + e^{200t} \sin 2000t$$

$$\therefore s_1 = -100 \pm 2000; s_2 = 200 \pm 2000$$

Aplicar la funcion forzada $v(t) = 60e^{-2t} \cos 4t + 10$ al circuito RLC de la figura y especificar la respuesta forzada determinando I_m y ϕ en la expresion $i(t) = I_m e^{-2t} \cos 4t + \phi$



$$v(t) = 60e^{-2t} \cos 4t + 10 = Re\left\{60e^{-2t}e^{j(4t+10)}\right\} = Re\left\{60e^{j10}e^{(-2+j4)t}\right\}$$

$$V = 60\angle 10; s = -2 + j4$$

5. Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\left\{te^{-\alpha t}u(t)\right\} = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$$

5.1. Bilateral

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

5.2. Unilateral

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

5.3. Ejemplo

Obtener la transformada de Laplace unilateral para $f(t)$

$$f(t) = 2u(t-3)$$

$$F(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} 2u(t-3)dt = 2\int_{3}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{2}{s}e^{-st}\Big|_{t=3}^{t=\infty}$$

$$F(s) = -\frac{2}{s}(e^{-\infty s} - e^{-3s}) = -\frac{2}{s}(-e^{-3s}) = \frac{2e^{-3s}}{s}$$

Obtener la transformada de Laplace unilateral

$$f(t) = u(t)$$

$$F(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-st}dt = -\frac{e^{-st}}{s}\Big|_{0}^{\infty} = -\frac{1}{s}(e^{-\infty s} - e^{-0s}) = -\frac{1}{s}(-e^{0}) = \frac{1}{s}$$

Obtener la transformada de Laplace unilateral

$$f(t) = -6e^{-2t}\left[u(t+3) - u(t-2)\right]$$

5.4. Impulso unitario

5.5. Teorema de la linealidad

$$\mathcal{L}\left\{f_1(t) + f_2(t)\right\} = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}\left[f_1(t) + f_2(t)\right]dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_1(t)dt + \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} f_2(t)dt = F_1(s) + F_2(s)$$

5.6. Anti-transformada de Laplace

$$V(s) \to v(t)$$

$$V(s) = V_1(s) + V_2(s)$$

$$v(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{V(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{V_1(s) + V_2(s)\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{V_1(s)\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{V_2(s)\right\}$$

5.6.1. Ejemplo

Encontrar $G(t)$

$$G(s) = \frac{7}{s} - \frac{31}{s+17}$$

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{31}{s+17}\right\}$$

$$g(t) = 7u(t) - 31e^{-17t}u(t)$$

$$g(t) = \left(7 - 31e^{-17t}\right)u(t)$$

Dada la funcion $H(s) = \frac{7}{s^2} + \frac{31}{(s+17)^2}$ encontrar $h(t)$

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{7}{s^2} + \frac{31}{(s+17)^2}\right\} = (7 + 31e^{-17t})tu(t)$$

5.7. Transformada inversa de funciones racionales

$P(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$ donde $N(s)$ y $D(s)$ son polinomios.
Los valores de s que originan $N(s) = 0$ se conocen como **ceros**.
Los valores de s que originan $D(s) = 0$ se conocen como **polos**.

5.7.1. Ejemplo

Encontrar la transformada inversa de $F(s) = 2\frac{s+2}{s}$

$$F(s) = \frac{2s+4}{s} = 2 + \frac{4}{s}$$

$$f(t) = 2\delta(t) + 4u(t)$$

Dada $Q(s) = \frac{3s^2-4}{s^2}$ encontrar $q(t)$

$$Q(s) = \frac{3s^2-4}{s^2} = 3 - \frac{4}{s^2}$$

$$q(t) = 3\delta(t) - 4tu(t)$$

5.7.2. Polos distintos

Encontrar transformada inversa de:

$$P(s) = \frac{7s+5}{s^2+s} = \frac{7s+5}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

$$A = \left.\frac{7s+5}{s+1}\right|_{s=0} = 5$$

$$B = \left.\frac{7s+5}{s}\right|_{s=-1} = 2$$

$$\therefore P(s) = \frac{5}{s} + \frac{2}{s+1}$$

$$p(t) = 5u(t) + 2e^{-t}u(t)$$

Encontrar la transformada inversa de:

$$P(s) = \frac{11s+30}{s^2+3s} = \frac{11s+30}{s(s+3)}$$

$$A = \left.\frac{11s+30}{s+3}\right|_{s=0} = 10$$

$$B = \left.\frac{11s+30}{s}\right|_{s=-3} =$$