15/06/15.

Teoría Planar: Poincaré – Bendixson.

Ciclos límites.

Sea $\vec{x}\,' = \vec{f}(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{f} \in C^1$

Por existencia/unicidad existe

$$\vec{x}(t) = \varphi(t, \vec{x}) = \varphi^t(\vec{x}) \equiv \text{flujo de la EDO o sistema dinámico definido por la EDO.}$$

con $\varphi = \varphi(t, \vec{x}) \equiv$ continua en t y $\vec{x}$, satisfaciendo:

i) $\varphi^0(\vec{x}) = \vec{x}$ = identidad , $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

ii) $\varphi^{t+s}(\vec{x}) = \varphi^t(\varphi^s(\vec{x})) = \varphi^s(\varphi^t(\vec{x})) = \varphi^{s+t}(\vec{x})$.
para todo $s, t \in \mathbb{R}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$.

iii) Identidad $= \vec{x} = \varphi^{t-t}(\vec{x}) = \varphi^t(\varphi^{-t}(\vec{x}))$.

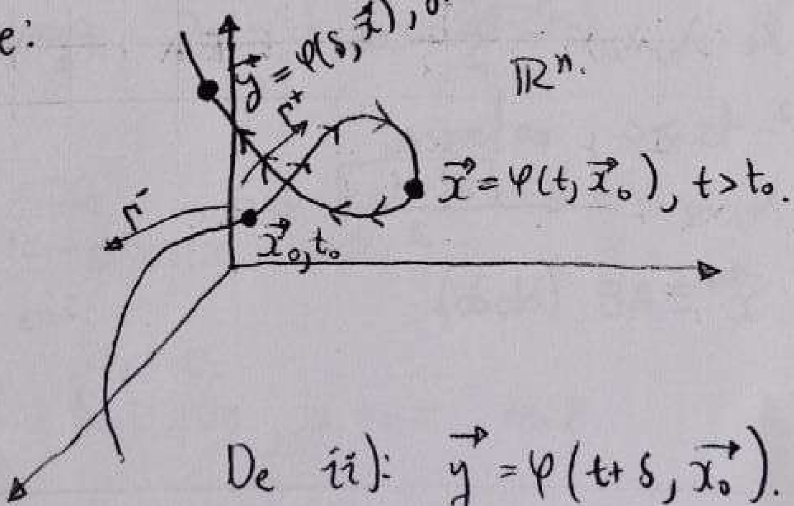
En particular, si $\vec{f}(\vec{x}) = A\vec{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\varphi(t, \vec{x}) = e^{A(t-t_0)}\vec{x}_0$$

donde

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \equiv \text{cte.}$$

Graficamente:



De ii): $\vec{y} = \varphi(t+s, \vec{x}_0)$.

Definición:

Decimos que $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ es un punto ω-límite de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ si existe sucesión creciente de tiempos $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ con $t_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$ tal que:

$$\lim_{i \to \infty} \varphi(t_i, \vec{x}) = \vec{y}$$

Notación:

$$\omega(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{y} \text{ es } \omega\text{-límite de } \vec{x}\}.$$

$\equiv$ Conjunto ω-límite.

NOTA:

1) De manera similar definimos $\alpha(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \mid \vec{y} \text{ es } \alpha\text{-límite de } \vec{x}$
$\equiv$ Conjunto α-límite.
donde

$$\vec{y} = \lim_{t_i \to -\infty} \varphi(t_i, \vec{x})$$

con $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión decreciente a $-\infty$.

2) Si definimos,

$$\Gamma_{\vec{x}}^{+} = \{\vec{y} = \varphi(t, \vec{x}) \mid t > 0\}.$$

y $$\Gamma_{\vec{x}}^{-} = \{\vec{y} = \varphi(t, \vec{x}) \mid t < 0\}.$$

Entonces:

$$\Gamma_{\vec{x}} = \Gamma_{\vec{x}}^{-} \cup \Gamma_{\vec{x}}^{+}$$

Luego:

$$\omega(\vec{x}) = \omega(\Gamma_{\vec{x}}^{+}) \quad \text{y} \quad \alpha(\vec{x}) = \alpha(\Gamma_{\vec{x}}^{-}).$$

3) Si $\vec{x}^*$ es equilibrio de $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ entonces:

$$\omega(\vec{x}^*) = \alpha(\vec{x}^*) = \{\vec{x}^*\}.$$

Si $\Gamma_0 \equiv$ órbita periódica solución de la EDO entonces:

$$\omega(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_0) = \Gamma_0.$$

Ejemplo centros.

Lema (Propiedades del conjunto ω-límite).
Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma^+_{\vec{x}}$ esta acotada. Entonces:

i) $\omega(\vec{x}) \neq \emptyset$

ii) $\omega(\vec{x})$ es acotado.

iii) $\omega(\vec{x})$ es cerrado.

iv) $\omega(\vec{x})$ es conexo.

Falta anexar dem al archivo .tex

Demostración:
De i): sean $\vec{y} \in \Gamma^+_{\vec{x}} \equiv$ Acotada y $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ creciente, luego.

$\{\vec{x}_i = \varphi(t_i, \vec{y})\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Gamma^+_{\vec{x}} \equiv$ define una sucesión infinita y acotada.

luego, existe $\{\vec{x}_{i_k} = \varphi(t_{i_k}, \vec{y})\}_{k=1}^{\infty}$

Subsucesión convergente, es decir:

$$\lim_{k \to \infty} \varphi(t_{i_k}, \vec{y}) = \vec{z}$$

Por lo tanto:

$$\vec{z} \in \omega(\Gamma^+_{\vec{x}}), \text{ es decir, } \omega(\Gamma^+_{\vec{x}}) \neq \phi$$

De ii): Suponer que $\omega(\Gamma^+_{\vec{x}})$ no acotado por existencia/unicidad la función $\varphi(t, \vec{x}) \equiv$ continua es no acotado, es decir,

$$\Gamma^+_{\vec{x}} \equiv \text{No acotada.} \quad (\text{Contradicción}).$$

De iii): Sea $\vec{y}$ punto límite de $\omega(\vec{x})$, es decir:

$$\vec{y} = \lim_{i \to \infty} \vec{x_i} \in \mathbb{R}^n \quad \text{con} \quad \{\vec{x_i}\}_{i=1}^{\infty} \overset{c}{\in} \omega(\vec{x}).$$

Por demostrar $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$. En efecto:

Como

$$\vec{x_i} \in \omega(\Gamma^+_{\vec{x}}) \quad i = 1, 2, \ldots$$

entonces:

$$\varphi(t_i^j, \vec{x}) \xrightarrow[j \to \infty]{} \vec{x_i}$$

es decir $\quad J >> 1$

$$\|\varphi(t_i^j, \vec{x}) - \vec{x_i}\| < \frac{1}{J}, \quad j > J.$$

Estimamos:

$$\|\varphi(t_i^j, \vec{x}) - \vec{y}\| \leq \|\varphi(t_i^j, \vec{x}) - \vec{x_i}\| + \|\vec{y} - \vec{x_i}\|.$$

Si $i, j \longrightarrow \infty$ entonces:

$$\lim_{i,j \to \infty} \varphi(t_i^j, \vec{x}) = \vec{y}$$

Por lo tanto:

$$\vec{y} \in \omega(\Gamma^{+}_{\vec{x}}).$$

Es decir:

$$\omega(\vec{x}) \equiv \text{Cerrado.}$$

De iv): supongamos que $\omega(\vec{x})$ es disconexo, es decir.

$$\omega(\vec{x}) = A \cup B \quad \text{con} \quad A \cap B = \emptyset$$

Entonces $A, B \equiv$ cerrados y conjuntos ω-limites.

Definimos la función distancia:

$$\rho(A,B) = \inf_{\vec{x} \in A, \vec{y} \in B} \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Se tiene que $\rho(A,B) = \delta > 0$. Luego, existen sucesiones de tiempos $\{t_i^A\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{t_i^B\}_{i=1}^{\infty}$ tales que

$$\rho(A, \varphi(t_i^A, \vec{x})) < \frac{\delta}{2} \quad y \quad \rho(B, \varphi(t_i^B, \vec{x})) < \frac{\delta}{2}.$$

para $i = 1, 2, \ldots$

Entonces:

$$\rho(A, \varphi(t_i^B, \vec{x})) > \frac{\delta}{2}.$$

Como ρ y φ son continuas, existe $\{\tau_j\}_{j=1}^{\infty}$ sucesión de tiempos tales que

$$\rho(A, \varphi(\tau_j, \vec{x})) = \frac{\delta}{2}$$

Y

$$\{\varphi(\tau_j, \vec{x})\}_{j=1}^{\infty} \equiv \text{Sucesión infinita acotada.}$$

$\therefore$ Existe $\{\varphi(\tau_{j_k}, \vec{x})\}_{k=1}^{\infty}$ subsucesión convergente.

Digamos: $\lim\limits_{k \to \infty}$

16/06/15.

Lema (Convergencia).
Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\Gamma^+_{\vec{x}}$ acotada. Entonces $\rho(\varphi(t,\vec{x}), \omega(\vec{x})) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

Demostración:

Distancia del flujo φ a omega lím

Supongamos lo contrario. Esto es que existe sucesión creciente de tiempo

$$t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$$

tal que:

$$\rho(\varphi(t_i,\vec{x}), \omega(\vec{x})) \geq \varepsilon > 0$$

para todo $\varepsilon > 0$. Como $\Gamma^+_{\vec{x}}$ esta acotada. Entonces la sucesión infinita $\{\vec{x}_i = \varphi(t_i,\vec{x})\}_{i=1}^{\infty} \subseteq \Gamma^+_{\vec{x}}$ tiene subsucesión convergente $\vec{x}_{i_k} = \varphi(t_{i_k},\vec{x})$.

Luego:

$$\rho(\varphi(t_{i_k},\vec{x}), \omega(\vec{x})) \xrightarrow[k\to\infty]{} \rho(\vec{y}, \omega(\vec{x})) = 0.$$

pues

$$\vec{y} = \lim_{k\to\infty} \varphi(t_{i_k},\vec{x}) \in \omega(\vec{x}).$$

Contradicción pues se supuso que $\rho(\varphi(t_i,\vec{x}), \omega(\vec{x})) \geq \varepsilon > 0$.

Lema (Invarianza).
Sea $\Gamma^+_{\vec{x}}$ acotada. Entonces $\omega(\vec{x})$ es invariante bajo el flujo φ^t, es decir, para cada $\vec{y} \in \omega(\vec{y})$ entonces $\vec{z} = \varphi^t(\vec{x}) \in \omega$
$(\varphi^t(\omega(\vec{x})) \subseteq \omega(\vec{x}))$.

Demostración:
Sea $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ entonces:

$$\lim_{i\to\infty} \varphi(t_i,\vec{x}) = \vec{y}$$

$\omega(\vec{x}) = \omega(\Gamma_x^+)$

para $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión creciente de tiempos positivos.
Así, para cada t_i construimos

$$b_i = t + t_i \xrightarrow[i \to \infty]{} \infty$$

Definimos:

$$\vec{z_i} = \varphi(b_i, \vec{x}) = \varphi(t+t_i, \vec{x}) = \varphi^t(\varphi^{t_i}(\vec{x})) \xrightarrow[i \to \infty]{} \varphi^t(\vec{y}) = \vec{z}$$

$$\therefore \vec{z} = \varphi^t(\vec{y}) \in \omega(\vec{x})$$

Es decir:

$$\varphi^t(\omega(\vec{x})) \subseteq \omega(\vec{x}).$$

Lema (Transitividad).
Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$. Si $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ y $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$.
Entonces: $\vec{z} \in \omega(\vec{x})$.

Demostración:
Como $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ y $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ existen sucesiones crecientes de tiempos $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$\vec{y_i} = \varphi(t_i, \vec{y}) \xrightarrow[i \to \infty]{} z$$

y

$$\vec{x_j} = \varphi(b_j, \vec{x}) \xrightarrow[j \to \infty]{} \vec{y}$$

Así, como $\varphi \equiv$ continuo.

$$\varphi^{t_i}(x_j) = \varphi(t_i, \vec{x_j}) = \varphi^{t_i}(\varphi(b_j, \vec{x}))$$

$$\xrightarrow[j \to \infty]{} \varphi^{t_i}(\vec{y}) = \varphi(t_i, \vec{y}) \xrightarrow[i \to \infty]{} \vec{z}$$

$$\therefore \vec{z} \in \omega(\vec{x}).$$

La notación puede ser también:

$$\omega(\vec{x}) = \omega(\Gamma_{\vec{x}}^{+})$$

para $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión creciente de tiempos positivos.
Así, para cada t_i construimos

$$b_i = t + t_i \xrightarrow[i\to\infty]{} \infty$$

Definimos:

$$\vec{z_i} = \varphi(b_i, \vec{x}) = \varphi(t+t_i, \vec{x}) = \varphi^{t}(\varphi^{t_i}(\vec{x})) \xrightarrow[i\to\infty]{} \varphi^{t}(\vec{y}) = \vec{z}$$

$$\therefore \vec{z} = \varphi^{t}(\vec{y}) \in \omega(\vec{x})$$

Es decir:

$$\varphi^{t}(\omega(\vec{x})) \subseteq \omega(\vec{x}).$$

Lema (Transitividad).
Sean $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$. Si $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ y $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$.
Entonces: $\vec{z} \in \omega(\vec{x})$.

Demostración:
Como $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$ y $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ existen sucesiones crecientes de tiempos $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que:

$$\vec{y_i} = \varphi(t_i, \vec{y}) \xrightarrow[i\to\infty]{} z$$

y

$$\vec{x_j} = \varphi(b_j, \vec{x}) \xrightarrow[j\to\infty]{} \vec{y}$$

Así, como $\varphi \equiv$ continuo.

$$\varphi^{t_i}(x_j) = \varphi(t_i, \vec{x_j}) = \varphi^{t_i}(\varphi(b_j, \vec{x}))$$

$$\xrightarrow[j\to\infty]{} \varphi^{t_i}(\vec{y}) = \varphi(t_i, \vec{y}) \xrightarrow[i\to\infty]{} \vec{z}$$

$$\therefore \vec{z} \in \omega(\vec{x}).$$

Ahora consideremos sólo sistemas planares:

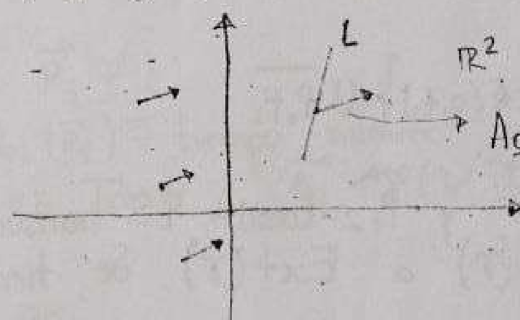
$$\left.\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y = g(x,y) \end{array}\right\} \ldots \quad (*).$$

Esperamos que los conjuntos ω y α - límites sean equilibrios de la EDO o ciclos (órbitas periódicas).

Definición:
Decimos que el segmento cerrado $L \subseteq \mathbb{R}^2$ es TRANSVERSO al campo

$$\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$$

definido por $(*)$, si $\vec{F}$ ni se anula ni es tangente en L



Aquí el segmento L es transverso pues $\vec{F}$ no se anula ni es tangente a L.

Definición:
La imagen continua de un círculo define a una curva de Jordan (es decir, una curva simple cerrada y rectificable).

Perímetro finito, o la integral de línea finita.

Teorema (Curva de Jordan).
Sea $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ curva de Jordan. Entonces $\Gamma^c = Ext(\Gamma) \cup Int(\Gamma)$ con $Ext(\Gamma) \cap Int(\Gamma) = \emptyset$.
$Ext(\Gamma)$, $Int(\Gamma) \equiv$ Conexos, abiertos. y $Ext(\Gamma) \equiv$ No acotado y $Int(\Gamma) \equiv$ Acotado.

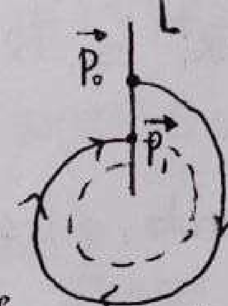
Lema (monotonicidad).

Si Γ órbita solución de $(*)$ intersecta a un segmento transverso L para $t_i \longrightarrow \infty$.

Entonces, la sucesión de intersecciones $\{\vec{P_i}\}_{i=1}^{\infty}$ o es constante o es monótona.

Demostración:

Sean $\vec{P_0} = \varphi(0, \vec{x_0})$, $\vec{P_1} = \varphi(t_1, \vec{x_0})$ en L.



Curva de Jordan:

Sea $\gamma \equiv \{\varphi(t, \vec{x_0}) \mid t \in (0, t_1)\} \cup \overline{P_0 P_1}$

Para cada $\vec{P}$ entre $\vec{P_0}$ y $\vec{P_1}$. Como $L \equiv$ Transverso el flujo ahí apunta hacia $Int(\gamma)$ o $Ext(\gamma)$. Se tiene que van hacia $Int(\gamma) \equiv$ Acotado.

Luego existe $\vec{P_2} = \varphi(t_2, \vec{x_0})$, esto puede seguirse inductivamente, y se construye.

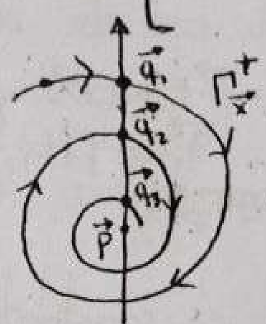
$$\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$$

monótona.

19/06/15.

Lema:

Sean $\vec{p} \in \omega(\vec{x})$ y L transverso por $\vec{p}$. Entonces existe $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión creciente, $t_i \longrightarrow \infty$ tal que $\vec{q_i} = \varphi(t_i, \vec{x}) \to \vec{p}$ con $\vec{q_i} \in L$.



Demostración:

Si $\vec{p} \in \omega(\vec{x})$ entonces por definición existe $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ creciente con $t_i \longrightarrow \infty$ y $\vec{p_i} = \varphi(t_i, \vec{x}) \xrightarrow[i \to \infty]{} \vec{p}$ con $\vec{p_i} \in \Gamma_{\vec{x}}^+$.

En general, $\vec{p_i} \notin L$.

Sea $\tau_i = \tau_i(\vec{p_i}) \equiv$ tiempo mínimo para viajar de $\vec{p_i}$ al segmento L, es decir, $\vec{q_i} = \varphi(\tau(\vec{p_i}) + t_i, \vec{x})$

Se tiene que:

$$\lim_{i \to \infty} \tau(\vec{p_i}) = 0.$$

Así,

$$\vec{q_i} = \varphi(t_i + \tau(\vec{p_i}), \vec{x}) \longrightarrow \vec{p}$$

y

$$\vec{q_i} \in L.$$

duda ¿τ?

Nota:

Resta probar que $\tau_i = \tau_i(\vec{p_i})$ existe.

Idea: Proyectar $\vec{p_i}$ sobre $\vec{q_i}$.

Lema:
El conjunto $\omega(\vec{x})$ puede intersectar al segmento transverso L en a lo más un punto.

Demostración:
Sea un $\vec{p} \in \omega(\vec{x}) \cap L$, es decir, $\vec{p} \in \omega(\vec{x})$ y $\vec{p} \in L$.
Por el lema anterior existe una $\vec{q_i} = \varphi(t_i, \vec{x}) \longrightarrow \vec{p}$ para $t_i \longrightarrow \infty$ con $\vec{q_i} \in L$. y $\vec{q_i} \in \Gamma^+_{\vec{x}}$.

Por el lema de monoticidad $\{\vec{q_i}\}_{i=1}^{\infty}$ es constante o es monotona.

Entonces sobre L la sucesión $\{\vec{q_i}\}_{i=1}^{\infty}$ tiene un único PUNTO LIMITE $\vec{p}$, es decir, $\vec{p}$ único.

Lema:
Si $\omega(x) \neq \emptyset$ y no contiene puntos de equilibrio. Entonces contiene a una órbita periódica Γ_0.

Demostración:
Sea $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$ y consideramos $\vec{z} \in \omega(\vec{y})$. Por transividad $\vec{z} \in \omega(\vec{x})$. con $\vec{z} \neq$ punto de equilibrio (Por hipótesis).

Sea $L \equiv$ segmento transverso por $\vec{z}$. Por un lema anterior existe $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, $t_i \longrightarrow \infty$ con $y_i = \varphi(t_i, \vec{y}) \xrightarrow[i \to \infty]{} \vec{z}$ y $y_i \in L$, es decir, $\{\vec{y_i}\}_{i=1}^{\infty} \subseteq L \cap \Gamma^+_{\vec{y}}$.

Como $\vec{y} \in \omega(\vec{x})$, por el Lema de Invarianza $\vec{y_i} = \varphi(t_i, \vec{y}) \in \omega(\vec{x}) \cap L$
Por un lema previo $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ es constante o monótona.

→ Si $\{\vec{y}_i\}_{i=1}^{\infty}$ es sucesión constante (es decir, $\vec{y}_i \equiv \vec{z}$ $\forall i=1,2,\dots$
Luego $\Gamma_0 = \Gamma^+_{\vec{z}} = \Gamma^+_{\vec{y}} \equiv$ órbita periódica con $\Gamma_0 \subseteq \omega(\vec{x})$.

→ Si $\{\vec{y}_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monotona, por el lema anterior $\omega(\vec{x})$ tiene más de una única intersección con L. Contradicción

Lema:
Si $\omega(\vec{x})$ contiene una órbita periódica Γ_0. Entonces $\omega(\vec{x}) = \Gamma_0$.

Demostración:
Existe segmento transverso M que pasa por cualquier $\vec{y} \in \Gamma_0$.

Por el lema anterior

$$\omega(x) \cap M = \{\vec{y}\}.$$

Por lo tanto, existe anillo abierto en el cual Γ_0 es el único subconjunto de $\omega(\vec{x})$.

Como $\omega(\vec{x}) \equiv$ conexo y $\omega(\vec{x}) \setminus \Gamma_0 = \emptyset$

$$\therefore \ \omega(\vec{x}) = \Gamma_0.$$

22/06/15.

TEOREMA (Poincaré - Bendixson).

Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma^+_{\vec{x}} \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ con $D \equiv$ Cerrado y acotado, y conteniendo un número finito de equilibrios de la EDO:

$$x' = f(x,y)$$
$$y' = g(x,y).$$

Entonces se cumple algunas de las siguientes:

$\underline{i)}$ $\omega(\vec{x}) = \omega(\Gamma^+_{\vec{x}})$ esta formado por UN equilibrio.

$\underline{ii)}$ $\omega(\vec{x})$ es UNA órbita periódica

$\underline{iii)}$ $\omega(\vec{x})$ está formada por equilibrios y órbitas que tienen a dichos equilibrios como puntos α o ω-límite

Demostración:

De $\underline{i)}$: Supongamos $\omega(\vec{x}) \equiv$ Equilibrios (Por hipótesis un número finito) entonces los podemos separar con abiertos, es decir, $\omega(\vec{x}) \equiv$ disconexo. Falso.

$$\therefore \omega(\vec{x}) \equiv \text{UN equilibrio.}$$

De $\underline{ii)}$: Si existe órbita periódica $\Gamma_0 \subseteq \omega(\vec{x})$ y $\omega(\vec{x}) \equiv$ No contiene equilibrios. Entonces $\omega(\vec{x}) = \Gamma_0$.

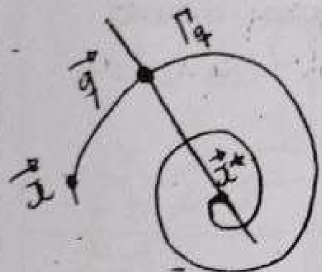
De $\underline{iii)}$: Supongamos que $\omega(\vec{x})$ contiene puntos de equilibrio y no equilibrio.

Si $\vec{q} \in \omega(\vec{x})$ de No equilibrio entonces por transitividad $\omega(\vec{q}), \alpha(\vec{q}) \leq \omega(\vec{x}), \alpha(\vec{x})$.

Si $\omega(\vec{q})$ no contiene equilibrios entonces $\omega(\vec{q})$ y por tanto $\omega(\vec{x})$ por $\underline{\underline{ii)}}$ $\omega(x) \equiv$ contiene órbita periódica. Contradicción, pues $\omega(\vec{x}) \equiv$ contiene equilibrios.

$$\therefore \omega(\vec{q}) \equiv \text{Contiene UN equilibrio.}$$

Ahora tomar $L \equiv$ segmento transverso por $\vec{q}$.



Luego la órbita $\Gamma_{\vec{q}}$ tiene como α y ω-límite al equilibrio $\vec{x}^*$.

Equilibrio $\equiv \vec{x}^* \in \omega(\vec{q})$

NOTA:

$\underline{\underline{a)}}$ Si $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ es analítico en (x,y) donde $x' = f(x,y)$, $y' = g(x,y)$.
Entonces $\vec{F}$ tiene un número finito de equilibrios en todo compacto de $\mathbb{R}^2$.
Por ejemplo, $f, g \equiv$ polinomiales en x y y.

$\underline{\underline{b)}}$ Por el lema de convergencia

$$\rho(\varphi(t,\vec{x}), \omega(\vec{x})) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

y $\underline{\underline{iii)}}$ se implica que $\omega(\vec{x}) \equiv$ Consiste de un contorno formado por equilibrios y sus órbitas conectoras llamadas heteroclínicas/homoclínicas.

23/06/15.

a) Definición:

Decimos que la órbita periódica Γ_0 del caso ii) se llama CICLO LIMITE si hay un anillo abierto que lo contenga y no hay otra órbita periódica en el, es decir, ciclo límite $\equiv$ órbita periódica aislada.

Definición:

La orbita que conecta a un punto silla consigo mismo (es decir, la intersección de la variedad estable con la inestable) se le llama curva homoclínica.

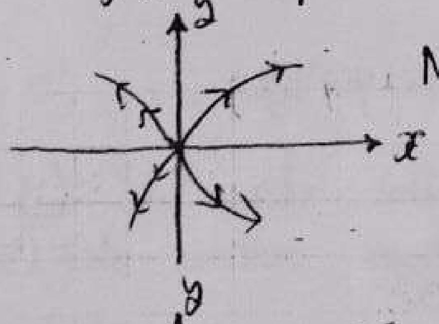
Definición:

La orbita que conecta dos diferentes puntos de equilibrio se le llama curva heteroclinica.

Caso del teorema de Poincaré-Bendixson.

i) $\omega(\vec{x}) = \{\vec{x}^*\}$, $\alpha(\vec{x}) = \{\vec{y}^*\}$.

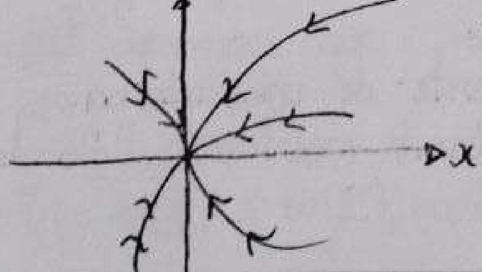
$\vec{x}^*, \vec{y}^* \equiv$ Equilibrio.



NODO INESTABLE

$\omega(\vec{x}) = \emptyset$

$\alpha(\vec{x}) = \vec{0}$.

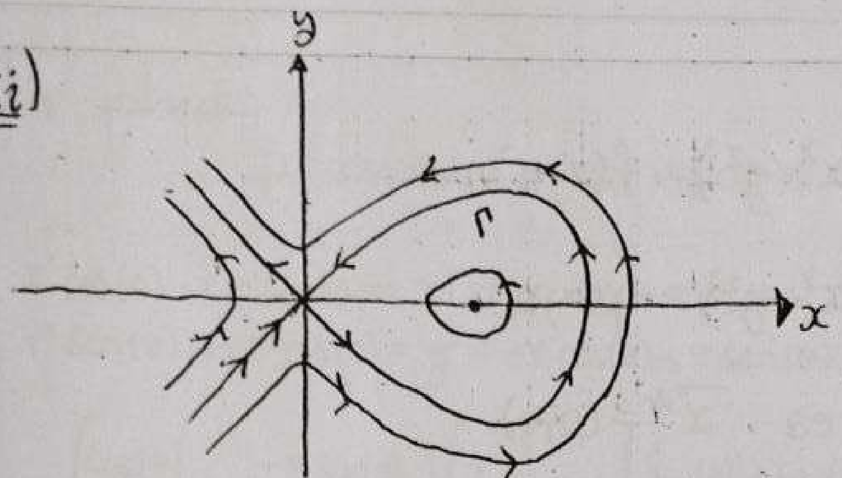


NODO ESTABLE.

$\alpha(\vec{x}) = \emptyset$

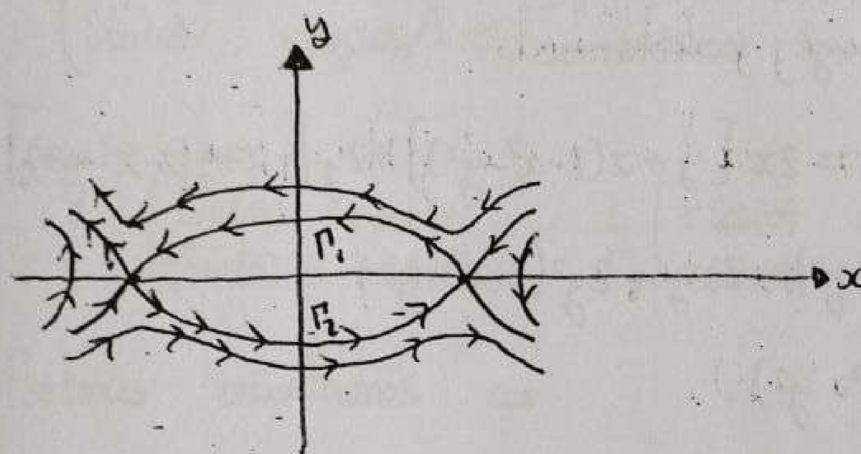
$\omega(\vec{x}) = \vec{0}$.

iii)



$\omega(\Gamma) = \Gamma = \alpha(\Gamma)$

$\Gamma \equiv$ Homoclínica.



$\omega(\Gamma_1) = \Gamma_1 = \alpha(\Gamma_1)$

$\omega(\Gamma_2) = \Gamma_2 = \alpha(\Gamma_2)$

$\Gamma_1, \Gamma_2 \equiv$ Heteroclinica.

Caso ii):

TEOREMA:

Sean $C_1, C_2 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ compacto y $C_1, C_2 \equiv$ Curvas simples cerradas tales que $\vec{F}(x,y) = (f(x,y), g(x,y))|_{C_1, C_2}$.

Entra/sale de C_1/C_2. Entonces existe ciclo límite entre C_1 y C_2.

NOTA:

C_1, C_2. No necesariamente son órbitas solución.

Ejemplo:

$$x' = y + x(2-x^2-y^2) = f(x,y).$$
$$y' = -x + y(2-x^2-y^2) = g(x,y).$$

El único equilibrio es $\vec{x}^* = (0,0)$.

Sea $V = V(x,y) = x^2+y^2$, calculamos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}x' + \frac{\partial V}{\partial y}y' = 2x\left[y+x(2-x^2-y^2)\right] + 2y\left[-x+y(2-x^2-y^2)\right].$$
$$= 2xy + 2x^2(2-x^2-y^2) - 2xy + 2y^2(2-x^2-y^2)$$
$$= 2(x^2+y^2)(2-x^2-y^2).$$

Luego:

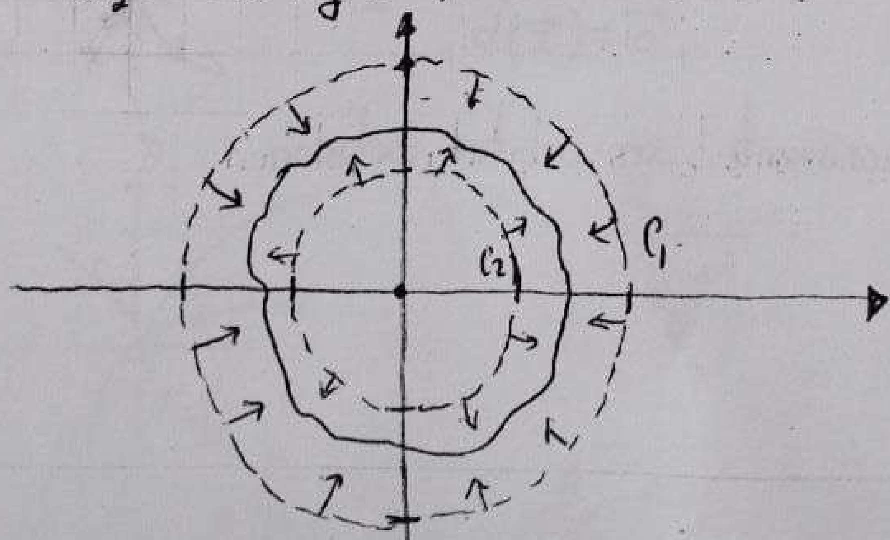
$V' < 0$: $C_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2,\ r > \sqrt{2}\}$.

$V' > 0$: $C_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = r^2,\ r < \sqrt{2}\}$.

Sean:

C_1: $x^2+y^2 = 4$.

C_2: $x^2+y^2 = 1$



En polares:

$$x = r\cos(\theta) \quad y \quad y = r\,\mathrm{sen}(\theta).$$

$$r'\cos(\theta) - r\theta'\,\mathrm{sen}(\theta) = x' = r\,\mathrm{sen}(\theta) + r\cos(\theta)(2-r^2).$$
$$r'\,\mathrm{sen}(\theta) + r\theta'\cos(\theta) = y' = -r\cos(\theta) + r\,\mathrm{sen}(\theta)(2-r^2).$$

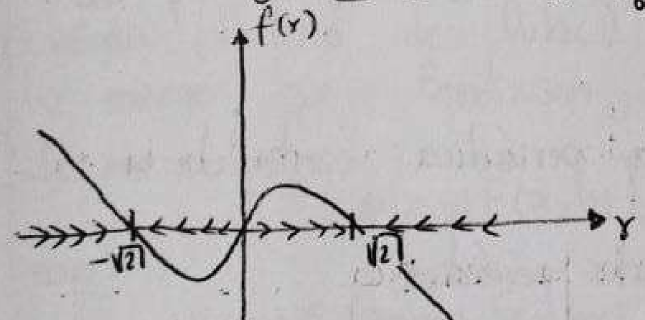
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r' \\ \theta' \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \mathrm{sen}(\theta) + \cos(\theta)(2-r^2) \\ -\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)(2-r^2) \end{pmatrix}$$

Luego:

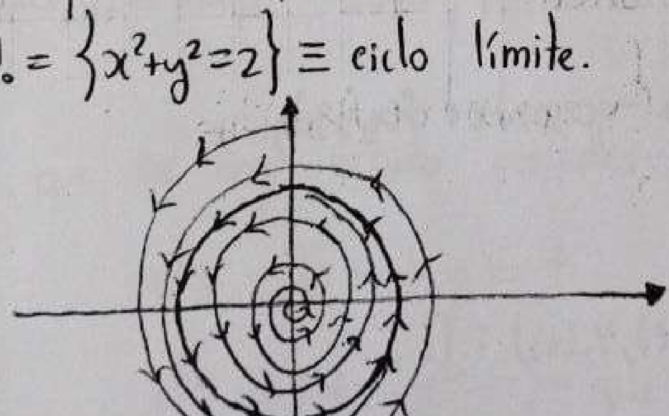
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos(\theta) & r\,\mathrm{sen}(\theta) \\ -\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Entonces encontramos que:

$$r' = r(2-r^2) = f(r).$$
$$\theta' = 1 \longrightarrow \theta = \theta_0 + t, \quad \theta_0 \equiv \text{cte}.$$



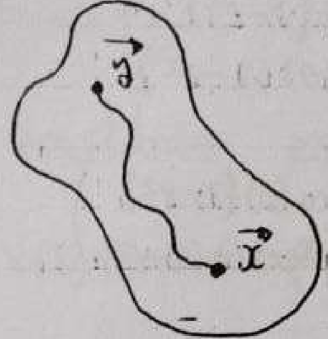
Así, $\Gamma_0 = \{x^2+y^2=2\} \equiv$ ciclo límite.



$\Gamma_0 = \omega(\Gamma)$ para toda $\Gamma \equiv$ órbita en la vecindad de Γ_0.

Definición:

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ es simple conectado si para todo $\vec{x}, \vec{y} \in \Omega$ existe una función continua enteramente en Ω que los une.



TEOREMA (Criterio de Bendixson).-

Sea $\vec{x}' = f(x,y)$, $y' = g(x,y)$ con $\vec{F} = (f,g) : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F} \in C^1(\Omega)$, $\Omega \equiv$ simple conectado tales que

$$\operatorname{div} \vec{F} = \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}.$$

No es identicamente cero en cada abierto de Ω y no cambia de signo.

Entonces NO EXISTE órbita periódica contenida en Ω.

Demostración: Supongamos $\Gamma_0 \equiv$ órbita periódica.

Por el teorema de Green:

$$(0 \neq) \iint_{\text{Interior}(\Gamma_0)} \operatorname{div} \vec{F}\, dA = \oint_{\Gamma_0} -g(x,y)\,dx + f(x,y)\,dy.$$

Luego:

$$(x(t), y(t)) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t)) : \Gamma_0.$$
$$\shortparallel$$
$$(\varphi_1(t+T), \varphi_2(t+T)), \quad T \equiv \text{periodo}.$$

Por lo tanto:

$$\oint_{\Gamma_0} -g(x,y)\,dx + f(x,y)\,dy = \int_0^T \left[-g(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_1'(t) + f(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\,\varphi_2'(t)\right] dt.$$

Pero:

$$\varphi_1'(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t))$$
$$\varphi_2'(t) = g(\varphi_1(t), \varphi_2(t)).$$

Entonces, lo anterior es:

$$= \int_0^T \left[-gf + f\cdot g\right] dt = \int_0^T 0\, dt = 0.$$

Contradicción ∇

$\therefore$ No existe órbita periódica Γ_0.

TEOREMA (Criterio de Dulac).
lo mismo que Bendixson, pero

$$\vec{F} \equiv \left(\mu(x,y)\vec{F}(x,y)\right)$$

con:

$\mu(x,y) \equiv$ Campo Escalar positivo.

Ejemplo:
Mostrar que no hay órbita periódica en:

$$x' = x(2-x-y) = f$$

$$y' = y(4x - x^2 - 1) = g.$$

26/06/15.

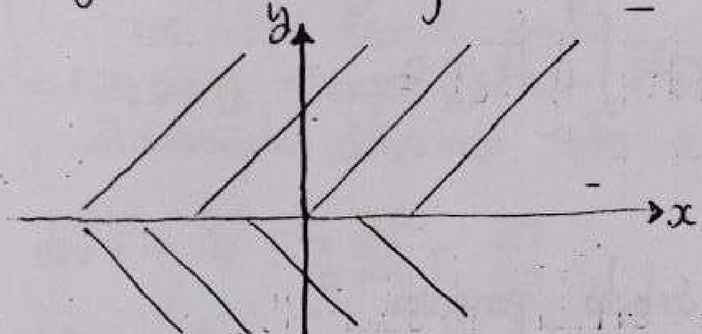
En Dulac con $\mu(x,y)=\frac{1}{xy}$.

$$f \longrightarrow \frac{1}{y}(2-x-y)$$

$$g \longrightarrow \frac{1}{x}(4x-x^2-1).$$

Luego:
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{y}(2-x-y)\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}(4x-x^2-1)\right)$$

$$=-\frac{1}{y} \equiv \text{Preserva signo en } y>0 \text{ o } y<0.$$



TEOREMA:

El sistema gradiente:
$$\vec{x}\,'=-\nabla V(\vec{x})$$
No tiene órbitas periódicas.

Demostración:

Supongamos que $\vec{x}(t+T)=\vec{x}(t)$ órbita periódica de período T. Se tiene:

$$0=V(\vec{x}(t+T))-V(\vec{x}(t))=\int_0^T \frac{d}{dt}V(\vec{x}(t))dt$$

$$=\int_0^T \nabla V\cdot\vec{x}\,'dt \overset{EDO}{=} \int_0^T(-\vec{x}\,')(\vec{x}\,')dt=-\int_0^T\|\vec{x}\,'(t)\|^2dt<0.$$

Contradicción $0<0$, lo cual:

$\therefore$ No hay órbita periódica.

Aplicaciones: Modelos Lotka-Volterra:

1) Competición de Especies.

Sea $v \equiv$ densidad de presas.
$p \equiv$ densidad de depredadores.

En ausencia de depredador $v \equiv$ crece exponencialmente, es decir:

$$v' = av \quad , \quad a \equiv \text{Tasa de crecimiento.}$$

En ausencia de presas $p \equiv$ decrece exponencialmente, es decir:

$$p' = -cp, \quad c \equiv \text{Tasa de decrecimiento.}$$

En la interacción, por la ley de acción de masas (es decir, variación es proporcional al número de contactos). $\approx bvp$, $b \equiv$ constante de proporcionalidad para presas y $d \equiv$ constante de proporcionalidad para depredadores, por lo tanto el sistema es:

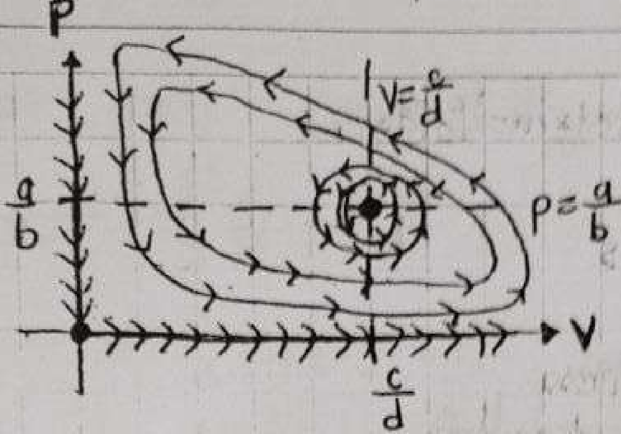
$$\begin{aligned} v' &= av - bvp = f(v,p) \\ p' &= -cp + dvp = g(v,p). \end{aligned} \quad : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad (v,p) \longrightarrow (f(v,p), g(v,p)).$$

Nullclinas:

$$v' = 0 \qquad\qquad v(a - bp) = 0$$
$$p' = 0 \text{ , es decir, } p(-c + dv) = 0.$$

Entonces:

$$v = 0 \quad \text{o} \quad p = \frac{a}{b}.$$
$$\text{y } p = 0 \quad \text{o} \quad v = \frac{c}{d}.$$



Linearización:

En $\vec{x}^* = (0,0)$, para $v \ll 1$, $p \ll 1$

$$\begin{aligned} v' &\approx av \\ p' &\approx -cp \end{aligned} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v' \\ p' \end{pmatrix}$$

Así, $\lambda_1 = a > 0$ y $\lambda_2 = -c < 0$

$$\therefore \vec{x}^* = (0,0): \text{Silla.}$$

Luego: $(v,p) \longrightarrow (f(v,p), g(v,p))$.

$(v,0) \longrightarrow (av, 0)$

$(0,p) \longrightarrow (0, -cp)$.

En $\vec{x}^* = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} & 0 \end{pmatrix}; \quad P(\lambda) = \lambda^2 + ac = 0. \quad \lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{ac}.$$

por lo tanto $\vec{x}^*$ centro.

Por otro lado, notemos que:

$$\frac{dv}{dp} = \frac{v(a-bp)}{p(-c+dv)}$$

Es decir:

$$\int \frac{-c+dv}{v}\,dv = \int \frac{a-bp}{p}\,dp$$

Luego:

$$-c\ln(v) + dv = a\ln(p) - bp + cte.$$

Es decir:

$$L = L(v,p) = -c\ln(v) - a\ln(p) + dv + bp = cte.$$

Luego:

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad ; \quad L \text{ cantidad conservada.}$$

Se puede ver que si $v = \frac{c}{d} + \tilde{v}$, $\tilde{v} << 1$ y $p = \frac{a}{b} + \tilde{p}$, $\tilde{p} << 1$

Taylor:

$$\ln(v) = \ln\left(\frac{c}{d} + \tilde{v}\right) = \ln\left(\frac{c}{d}\right) + \tilde{v}\frac{d}{c} + \cancel{O(\tilde{v})} - \frac{\tilde{v}^2}{2}\cdot\frac{d^2}{c^2} + O(\tilde{v}^2)$$

$$\ln(p) = \ln\left(\frac{a}{b} + \tilde{p}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \tilde{p}\frac{b}{a} - \frac{\tilde{p}^2}{2}\frac{b^2}{a^2} + O(\tilde{p}^2).$$

Así, en la vecindad de $\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$.

$$cte = L(v,p) = -c\ln\left(\frac{c}{d}\right) - \cancel{d\tilde{v}} + \frac{d^2}{2c}\tilde{v}^2$$
$$- a\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \cancel{b\tilde{p}} + \frac{b^2}{2a}\tilde{p}^2 + \cancel{dv} + \cancel{bp}.$$

Por lo tanto:

$$\frac{d^2}{2c}\tilde{v}^2 + \frac{b^2}{2a}\tilde{p}^2 = cte' > 0.$$

2) Modelo de la Glucólisis.

$$u' = -u + av + u^2 v = f(u,v)$$
$$v' = b - av - u^2 v = g(u,v). \quad ; \; a, b > 0.$$

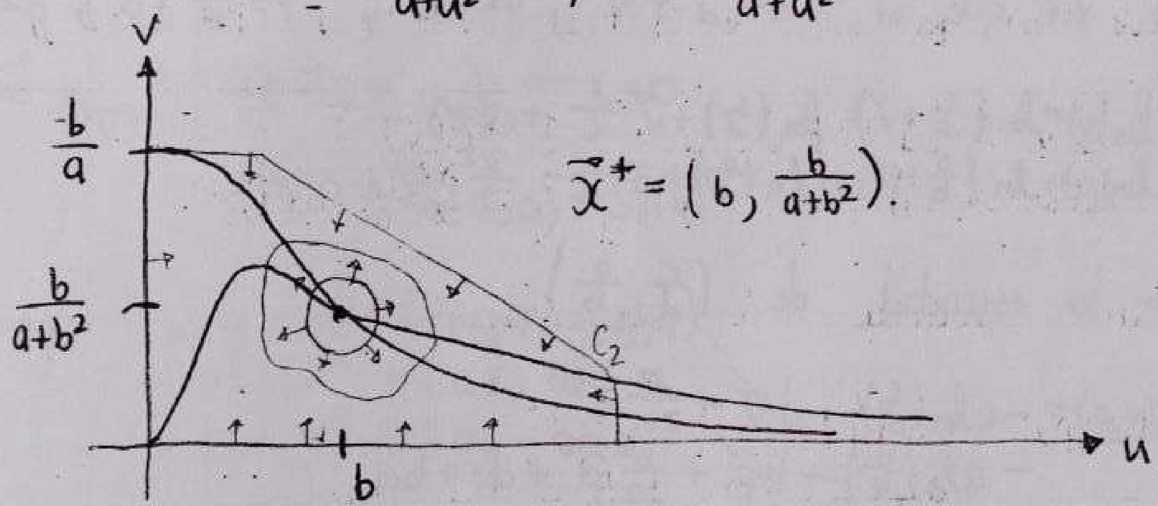
$u \equiv ADP$ y $v \equiv ATP$.

Nullclinas:

$$0 = f(u,v) = -u + v(a+u^2)$$
$$0 = g(u,v) = b - av - u^2 v.$$

Es decir:

$$v = \frac{u}{a+u^2} \quad y \quad v = \frac{b}{a+u^2}$$



Único equilibrio:

$$\frac{u}{a+u^2} = \frac{b}{a+u^2}$$

es decir, $u = b$ y entonces:

$$v = \frac{b}{a+b^2}$$

Linearización en el equilibrio:

$$J = \begin{pmatrix} -1+2uv & a+u^2 \\ -2uv & -a-u^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{\vec{x}^*} = \begin{pmatrix} -1+\frac{2b^2}{a+b^2} & a+b^2 \\ -\frac{2b^2}{a+b^2} & -a-b^2 \end{pmatrix} = A.$$

Por lo tanto:

$$0 = p(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + |A|$$

con:

$$tr(A) = \frac{-a+b^2}{a+b^2} - a - b^2$$

y

$$|A| = a - b^2 + 2b^2 = a + b^2 > 0.$$

$$\therefore \lambda_{1,2} = \frac{tr(A) \pm \sqrt{(tr(A))^2 - 4|A|}}{2}.$$

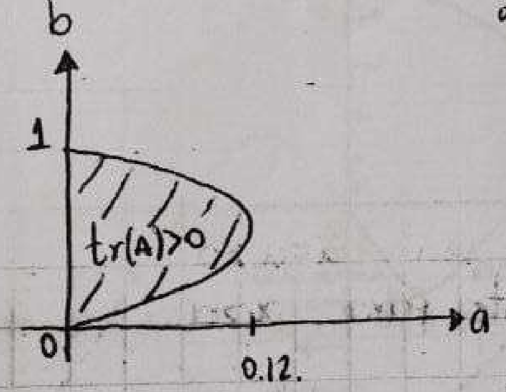
Tenemos equilibrio Inestable $\begin{cases} -\text{Espiral} \\ -\text{Nodo} \end{cases}$ si $tr(A) > 0$.

En $tr(A) = 0$, entonces:

$$-a + b^2 = (a+b^2)^2$$

$$-a + b^2 = a^2 + b^4 + 2ab^2$$

$$\therefore b^2 = \frac{1 - 2a \pm \sqrt{(2a-1)^2 - 4(a^2+a)}}{2}.$$



Encontrar curva C_2 donde el campo entre:

Para $u, v >> 1$,

$$u' \approx u^2 v \qquad \therefore \frac{du}{dv} \approx -1$$

$$v' \approx -u^2 v$$