Teoría de perturbaciones para existencia de ciclos límites

Eduardo Ortiz Romero

Escuela Superior de Física y Matemáticas,
Instituto Politécnico Nacional.

Posgrado, Maestría en Ciencias Físico Matemáticas

Al conjunto de todos los puntos ω-límite los llamaremos **Conjunto ω-límite**.
Al conjunto de todos los puntos α-límite los llamaremos **Conjunto α-límite**.

Se utiliza en sistemas de ecuaciones 2×2 de la forma

$$X' = \epsilon f(t, X)$$

El problema se transforma en el sistema

$$Y' = \epsilon f_T(t, Y)$$

donde f_t es el promedio local definido asÃ:

Definition

Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ continua y $T > 0$. Definimos:

$$f_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t + \tau, x) d\tau$$

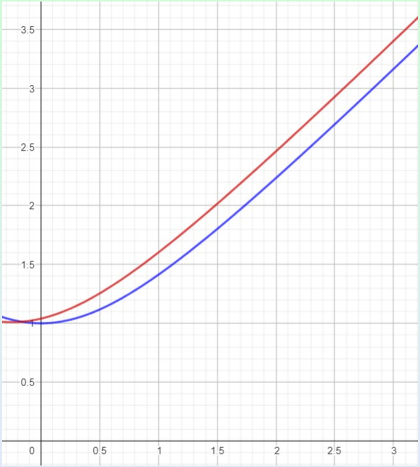
como el promedio local de f.

Si $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de Lipschitz en $\mathbb{R}$, entonces

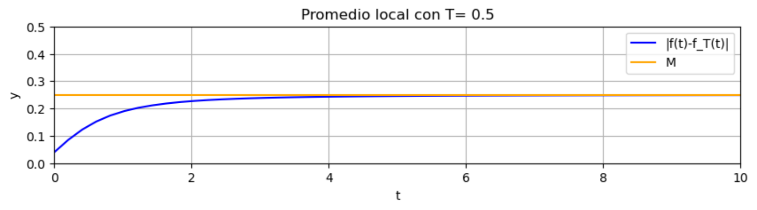
$$\phi(x) - \phi_T(x) \leq \frac{\lambda T}{2}$$

i.e. $\phi(t)$ es $o(T)$ con respecto a $\phi_T(x)$.

Consideremos la función $\phi(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, esta función es de Lipschitz con constante $\lambda = 1$, calculamos su promedio local con $T = 0.5$



La diferencia esta acotada por $M = \frac{\lambda T}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25$. En este caso en la gráfica se puede observar que la diferencia converge a la cota M.



Es lo mismo pero más barato.

Lemma

Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = \epsilon f(t,x)$$

$x(0) = x_0$, *con* f *Lipschitz en* $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ *y continua en* $t \in [0,t]$.
Si y *es solución de* $y' = \epsilon f_T(t,y)$, $y(0) = x_0$, *entonces*

$$x(t) - y(t) = o(\epsilon T)$$

p.t. $t = o(\frac{1}{\epsilon})$

Oscilador de Van der Pol

La ecuación del oscilador de Van der Pol describe el comportamiento de ciertos sistemas oscilantes no lineales. Su fundamento físico se basa en el concepto de amortiguamiento no lineal.

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0.$$

Lo transformamos en un sistema de ecuaciones en coordenadas polares

$$r' = -\epsilon r \sin^2(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) - 1)$$
$$\theta' = 1 - \epsilon r \sin(\theta)\cos(\theta)(r^2 \cos(\theta) - 1)$$

Promediación del Oscilador de Van der Pol

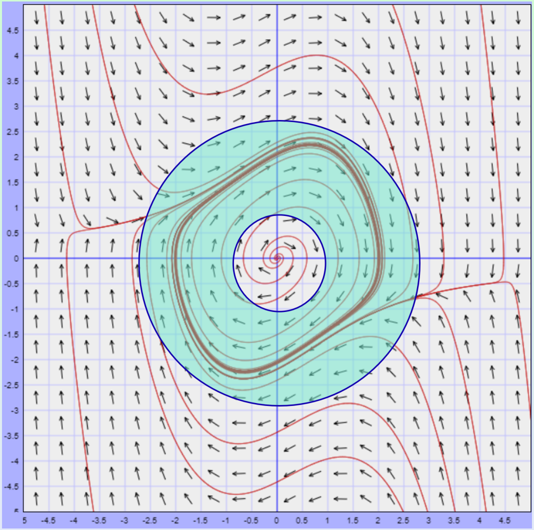
Definimos

$$\bar{r}' = \bar{f}(\bar{r}, \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r' d\theta$$

Promediamos y el resultado es un sistema más simple.

$$\bar{\theta} = 2\pi$$

$$\bar{r} = \tfrac{\epsilon}{8} r(4 - r^2)$$


4.5
4
3.5
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
-3.5
-4
-4.5
5
-4.5
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5

En azul la solución real, en amarillo el promedio.