

# Teoría de perturbaciones para existencia de ciclos límites

Eduardo Ortiz Romero

21 de abril de 2025

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Problema 16 de Hilbert . . . . .	3
1.2. Resultados relevantes sobre la existencia de ciclos límite . . . . .	4
1.3. Problemas clásicos de ciclos límite . . . . .	6
1.4. Aplicaciones modernas de los ciclos límite . . . . .	10
<b>2. Preliminares</b>	<b>12</b>
2.1. Coordenadas polares . . . . .	12
2.2. Teoría de perturbaciones . . . . .	14
2.3. Teoría de la Linealización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales . . . . .	17
2.3.1. Conceptos Fundamentales . . . . .	17
2.3.2. Linealización del Sistema . . . . .	17
2.3.3. Análisis de Estabilidad mediante Linealización . . . . .	18
2.3.4. Teoremas que Justifican el Método . . . . .	19
2.3.5. Ejemplo de Aplicación . . . . .	19
2.3.6. Conclusión . . . . .	21
<b>3. Teoría de ciclos límite</b>	<b>22</b>
3.1. Sistemas dinámicos . . . . .	22
3.2. Conjuntos límite . . . . .	24
3.3. Teorema de Poincaré-Bendixson . . . . .	32
3.4. Oscilador de Van der Pol . . . . .	34
3.5. Ecuación de Rayleigh . . . . .	36
3.6. Sistemas Liénard . . . . .	39

# Índice de figuras

1.1. Plano fase del Oscilador de Van der Pol . . . . .	7
1.2. Plano fase de la ecuación de Rayleigh . . . . .	8
1.3. Plano fase del Modelo de Fitz Hugh-Nagumo . . . . .	9
3.1. Plano fase de (3.7). . . . .	25
3.2. Plano fase del sistema (3.6). . . . .	28
3.3. Plano fase del sistema (3.6). . . . .	29
3.4. Plano fase del sistema con perturbación. . . . .	31

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. Problema 16 de Hilbert

En 1900, el matemático alemán David Hilbert presentó una lista de 23 problemas abiertos en el Congreso Internacional de Matemáticos en París. Estos problemas de diversas áreas de las matemáticas, se convirtieron en una guía fundamental para la investigación matemática del siglo XX y, en muchos casos, aún siguen desafiando a la comunidad científica. [1]

El **problema 16 de Hilbert** forma parte de esta lista y está dividido en dos partes principales. Ambas se centran en el análisis geométrico y topológico de curvas algebraicas y sistemas dinámicos polinomiales en el plano:

1. **Primera parte:** Clasificar las disposiciones topológicas posibles de las curvas algebraicas planas reales de grado  $n$ . Este problema está relacionado con la geometría algebraica real y la topología.
2. **Segunda parte:** Estudiar los sistemas dinámicos definidos por campos vectoriales polinomiales en el plano, y en particular, determinar el número máximo y la disposición de los ciclos límite que estos sistemas pueden tener.

La segunda parte del problema 16 de Hilbert aborda una cuestión fundamental en la teoría de sistemas dinámicos: la existencia, finitud y disposición de ciclos límite en sistemas de ecuaciones diferenciales polinomiales. Un ciclo límite es una órbita cerrada aislada en el espacio de fases, alrededor de la cual las trayectorias vecinas convergen o divergen en espiral hacia adentro o hacia afuera.

Los ciclos límite son fundamentales en la teoría de sistemas dinámicos porque representan comportamientos oscilatorios estables o inestables, aunque formulado hace más de un siglo, el problema 16 de Hilbert sigue siendo relevante hoy en día debido a sus aplicaciones en biología, ingeniería y física, donde los ciclos límite modelan fenómenos oscilatorios fundamentales [2].

Consideremos el sistema de ecuaciones en el plano polinomial de grado  $n$ :

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y) \quad (1.1)$$

donde  $P(x, y)$  y  $Q(x, y)$  son polinomios de grado a lo más  $n$ , por lo que son funciones suaves. El problema consiste en responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos ciclos límite puede tener un sistema polinómico de grado  $n$ ?
2. ¿Cómo están distribuidos estos ciclos límite en el plano?

¿Sencillo? pues no, la respuesta sigue siendo desconocida para  $n > 1$ , a mayor grado, mayor complejidad del sistema y la estructura de sus soluciones. La dificultad radica en la naturaleza no lineal de los sistemas dinámicos y en la interacción entre las singularidades y las órbitas cerradas.

## 1.2. Resultados relevantes sobre la existencia de ciclos límite

Tenemos algunos resultados significativos como la conjetura de Dulac, que establece que para cualquier  $n$ , el número de ciclos límite de un sistema polinómico de grado  $n$  es finito, sin embargo esto es una conjetura y aún no se ha probado. Analicemos los resultados más relevantes conocidos hasta la fecha acerca de la existencia de ciclos límite en el contexto del problema 16 de Hilbert.

1. **Teorema de Poincaré-Bendixson** Establece las condiciones suficientes para la existencia de ciclos límite en sistemas planares. En el siguiente capítulo vamos a desarrollar este teorema y su demostración [3].
2. **Conjetura de Finitud de Dulac**

Este resultado es crucial porque establece un marco teórico para acotar el número de ciclos límite en sistemas polinomiales, aunque el valor exacto sigue siendo desconocido.

- En 1923, Henri Dulac planteó la conjetura de que el número de ciclos límite de un sistema polinómico de grado  $n$  en el plano es finito [4].
- Jean Écalle y Yulij Il'yashenko, de forma independiente en 1991, probaron la conjetura de finitud de Dulac. Demostraron que para sistemas polinómicos planos, el número de ciclos límite es finito. Este resultado es significativo porque confirma que, aunque no se conoce el número máximo exacto de ciclos límite para cada grado  $n$ , al menos se sabe que este número es finito [5, 6].

### 3. Sistemas Polinomiales de Bajo Grado

- Los sistemas lineales en el plano ( $n = 1$ ) no poseen ciclos límite. Toda órbita es o bien una trayectoria hacia o desde un punto de equilibrio, o una familia de órbitas paralelas.
- Hasta ahora, el máximo número de ciclos límite conocidos en sistemas cuadráticos es 4, pero no se ha probado que este sea el número máximo posible. Nikolai Bautin en 1939 analizó las bifurcaciones en sistemas cuadráticos y encontró condiciones para la aparición de ciclos límite pequeños alrededor de puntos singulares.

### 4. Teoría de Bifurcaciones y Ciclos Límite

La teoría de bifurcaciones ha sido una herramienta clave en el estudio de los ciclos límite.

- **Bifurcación de Hopf:** Describe cómo un ciclo límite puede emerger o desaparecer al variar un parámetro en el sistema.
- **Ciclos Límite Múltiples:** Investigaciones han mostrado que es posible tener múltiples ciclos límite que rodean puntos singulares o áreas sin puntos singulares.

### 5. Métodos Analíticos y Geométricos

- **Función de Dulac** Dulac introdujo una función auxiliar (ahora conocida como función de Dulac) para estudiar la no existencia de ciclos límite en ciertas regiones. Este resultado es crucial porque establece un marco teórico para acotar el número de ciclos límite en sistemas polinomiales, aunque el valor exacto sigue siendo desconocido.
- **Teoría de Hilbert-Poincaré** Variedades Algebraicas: Se utilizan herramientas de geometría algebraica para entender las propiedades globales de los sistemas polinómicos.
- **Análisis de Singularidades:** El estudio de puntos críticos y sus tipos es esencial para comprender la dinámica local y global.

### 6. Métodos de Perturbación

Se han utilizado métodos de perturbación y teoría de promediación para estudiar la aparición de ciclos límite en sistemas cercanos a sistemas integrables.

### 7. Teoría de Foliaciones

El estudio de foliaciones en el plano ha proporcionado nuevas perspectivas sobre la estructura de las órbitas y la posible existencia de ciclos límite.

### 1.3. Problemas clásicos de ciclos límite

Los sistemas dinámicos ofrecen la posibilidad de explorar comportamientos oscilatorios que son inherentes a muchos procesos biológicos, químicos y físicos. A continuación, se presentan varios ejemplos donde los ciclos límite desempeñan un papel central.

#### ■ Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol es un ejemplo clásico de un sistema no lineal que exhibe ciclos límite. Originalmente desarrollado para modelar circuitos eléctricos con tubos de vacío, este sistema también describe fenómenos auto-oscilatorios en ingeniería y biología [7].

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (1.2)$$

donde  $\mu$  es el coeficiente de amortiguamiento. A medida que  $\mu$  aumenta, el sistema muestra un ciclo límite estable que corresponde a una oscilación sostenida. Este comportamiento es crucial para entender dispositivos electrónicos oscilatorios y ciertos ritmos biológicos.

El oscilador de Van der Pol es un caso particular de un sistema polinomial de grado 2 (del Problema 16° de Hilbert), y su estudio proporciona intuiciones sobre la existencia y distribución de ciclos límite en sistemas más generales.

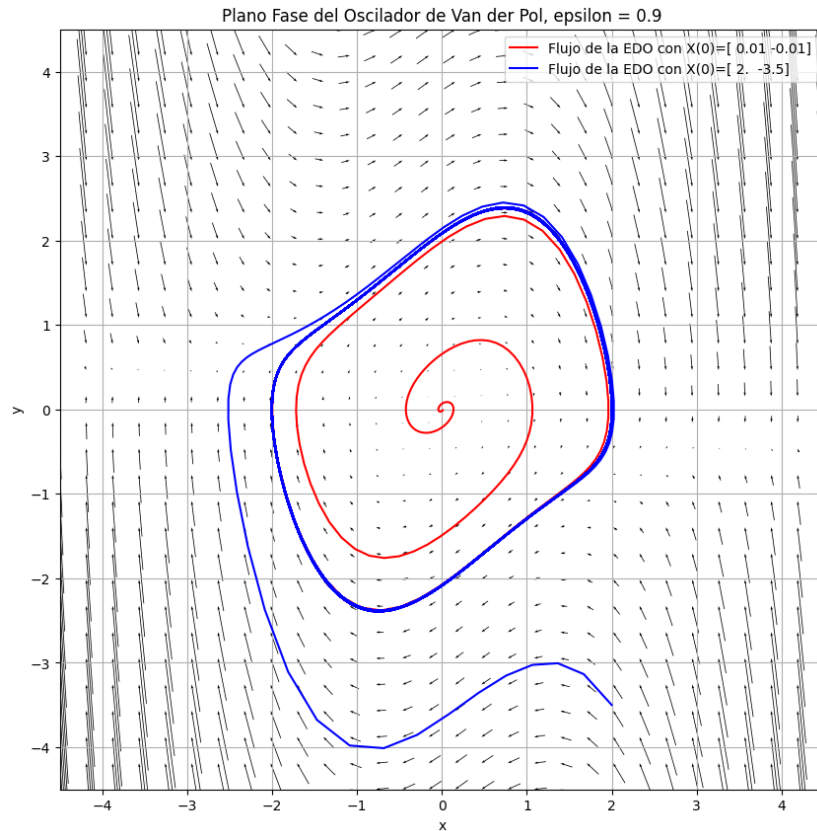


Figura 1.1: Plano fase del Oscilador de Van der Pol

### ■ Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh modela el comportamiento de ciertos sistemas mecánicos y fluidos sometidos a fuerzas periódicas. Es similar al oscilador de Van der Pol [8].

$$x'' + x = \epsilon (1 - x'^2) x' \quad (1.3)$$

donde  $\epsilon$  controla la intensidad de la fuerza. Los ciclos límite en este modelo describen el fenómeno de resonancia mecánica y son fundamentales para el diseño de sistemas que requieren estabilidad en las oscilaciones, como los amortiguadores en vehículos.



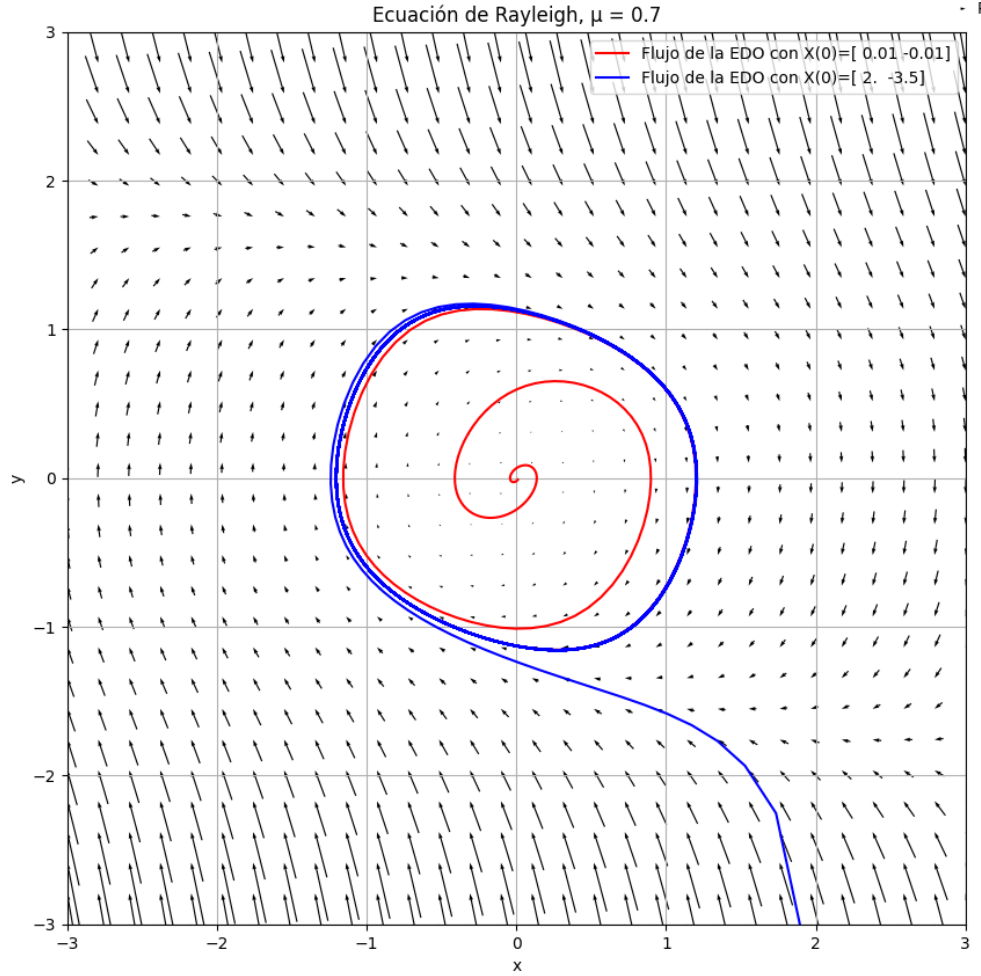


Figura 1.2: Plano fase de la ecuación de Rayleigh

### ■ Modelo de Fitz Hugh-Nagumo

Este modelo es una simplificación del modelo de Hodgkin-Huxley y se utiliza para describir la activación y desactivación de las neuronas [9, 10].

$$\begin{aligned} v' &= v - \frac{v^3}{3} - w + I \\ w' &= \epsilon(v + a - bw) \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde  $v$  representa el potencial de membrana,  $w$  es una variable de recuperación, e  $I$  es un término de corriente externa. Los ciclos límite en este sistema modelan los potenciales de acción neuronal, esenciales para entender el procesamiento de la información en el cerebro.

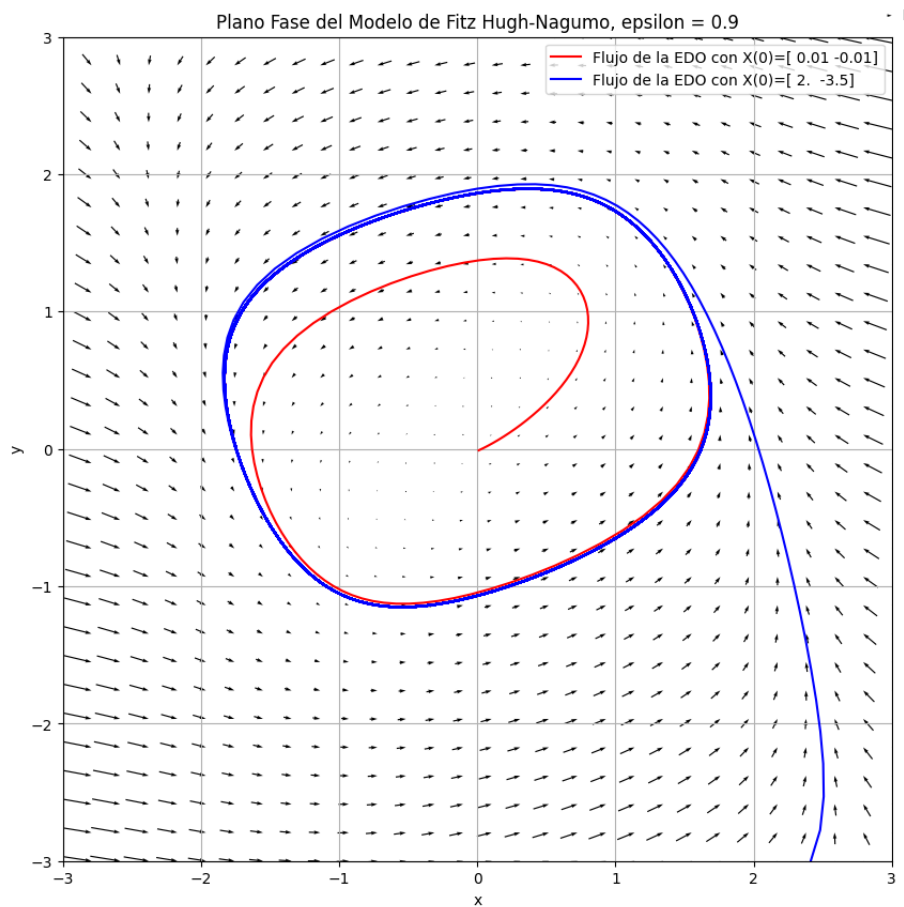


Figura 1.3: Plano fase del Modelo de Fitz Hugh-Nagumo

### ■ Reacciones Químicas Oscilatorias

Un ejemplo destacado es la reacción de Belousov-Zhabotinsky, que es un tipo de reacción química que muestra oscilaciones temporales en la concentración de sus reactivos. Aunque su modelado exacto requiere ecuaciones más complejas, sistemas simplificados que muestran ciclos límite pueden ayudar a comprender la dinámica subyacente de estas reacciones oscilatorias [11].

Más adelante vamos a desarrollar estos modelos a profundidad.

## 1.4. Aplicaciones modernas de los ciclos límite

El estudio de los ciclos límite tiene una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas científicas e ingenieriles, destacando su relevancia tanto en contextos teóricos como prácticos. Estas son algunas de las áreas más significativas donde los ciclos límite han demostrado ser herramientas fundamentales para modelar y comprender fenómenos oscilatorios y dinámicos.

### 1. Biología y Medicina

En biología, los ciclos límite son esenciales para describir sistemas dinámicos que exhiben comportamientos periódicos o cuasiperiódicos. En fisiología, los ciclos límite permiten modelar ritmos circadianos, regulando procesos biológicos como el ciclo sueño-vigilia y el metabolismo. En neurociencia, estos conceptos explican patrones oscilatorios en redes neuronales, incluyendo potenciales de acción y trastornos como la epilepsia o el Parkinson. Además, en cardiología, los ciclos límite ayudan a analizar arritmias cardíacas y otros fenómenos oscilatorios en el sistema cardiovascular [12].

### 2. Ingeniería

En ingeniería, los ciclos límite encuentran aplicaciones en sistemas no lineales que requieren control preciso y estabilidad. Por ejemplo, en electrónica, los osciladores de Van der Pol son fundamentales para generar señales periódicas utilizadas en telecomunicaciones y relojes digitales. En robótica, los ciclos límite modelan comportamientos cíclicos, como caminar, nadar o volar, permitiendo el diseño de robots autónomos con movimientos eficientes. En el ámbito aeroespacial, estos conceptos son útiles para analizar vibraciones autoinducidas en turbinas o alas de aviones, así como para diseñar mecanismos de control de vuelo. También en energías renovables, los ciclos límite contribuyen a la estabilidad de redes eléctricas con fuentes intermitentes, como la sincronización de inversores solares [13].

### 3. Física, Química y Clima

En física, los ciclos límite describen fenómenos oscilatorios en sistemas mecánicos no lineales, como péndulos forzados o sistemas con fricción. En óptica no lineal, estos conceptos modelan oscilaciones en la intensidad de luz emitida por láseres, mientras que en dinámica de fluidos, representan estados oscilatorios estables en flujos turbulentos o caóticos. En ciencias del clima, los ciclos límite son útiles para estudiar sistemas como El Niño y La Niña,

que exhiben oscilaciones cuasiperiódicas. Además, en plasmas y fusión nuclear, modelos basados en ciclos límite describen el transporte de partículas y energía en reactores como los Tokamak [14].

#### 4. Economía y Ciencias Sociales

En economía, los ciclos límite proporcionan una base para modelar fluctuaciones cíclicas en variables macroeconómicas, como el ciclo económico de expansión y recesión. En ciencias sociales, estos conceptos se aplican al análisis de dinámicas colectivas, como la propagación de enfermedades o la evolución de opiniones públicas en redes sociales. Los ciclos límite también son relevantes en el estudio de sistemas complejos, donde patrones recurrentes de comportamiento emergen de interacciones locales [15].

Vamos a desarrollar algunos de estas aplicaciones en capítulos posteriores, pero antes, vamos a desarrollar la teoría de los ciclos límite en un contexto más general. En los siguientes capítulos, utilizaremos herramientas como el teorema de Poincaré-Bendixson y métodos de promediación para analizar la existencia y distribución de ciclos límite en sistemas polinomiales de grado  $n$ , contribuyendo así a resolver aspectos abiertos del problema 16 de Hilbert.

# Capítulo 2

## Preliminares

### 2.1. Coordenadas polares

Consideremos las variables  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , las cuales están parametrizadas en términos del tiempo  $t$ , es decir,  $x = x(t)$  y  $y = y(t)$  con parámetro  $t \geq 0$ . Definimos el cambio de coordenadas cartesianas  $(x, y)$  a coordenadas polares  $(r, \theta)$  mediante las relaciones:

$$x = r \cos(\theta) \quad (2.1)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (2.2)$$

donde  $r = r(t)$  y  $\theta = \theta(t)$  también están parametrizadas en términos de  $t$ .

Estas ecuaciones nos llevan a las siguientes identidades:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.3)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (2.4)$$

en este caso restringimos  $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  ya que en ese intervalo la función  $\tan(\theta)$  es invertible y continua.

Derivamos las ecuaciones (2.3) y (2.4) respecto a  $t$ , obtenemos las relaciones dinámicas en coordenadas polares:

$$rr' = xx' + yy' \quad (2.5)$$

$$r^2\theta' = xy' - yx' \quad (2.6)$$

Estas relaciones nos van a permitir simplificar sistemas de ecuaciones diferenciales en coordenadas cartesianas a coordenadas polares, además nos permiten estudiar la evolución radial y angular de las trayectorias en el plano de fases, lo cual es clave para analizar ciclos límite [3].

## 2.2. Teoría de perturbaciones

Definimos un **problema perturbado** como una ecuación

$$P^\epsilon(x) = 0 \quad (2.7)$$

que incluye un parámetro pequeño  $\epsilon$  con  $0 < \epsilon < 1$ , el cual que representa la perturbación.

El objetivo es encontrar soluciones aproximadas  $x = x(\epsilon)$  en función de este parámetro y estudiar su comportamiento cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  [16].

Para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones vamos a introducir el concepto de función de orden.

**Definición 2.2.1** (Función de orden). *Se dice que una función  $\delta = \delta(\epsilon)$  es de orden si cumple las siguientes condiciones:*

1. *Es continua en una vecindad de  $\epsilon = 0$ .*
2. *Tiene signo definido en esa vecindad (es decir,  $\delta(\epsilon) > 0$  o  $\delta(\epsilon) < 0$  para  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  con  $\epsilon_0 > 0$ ).*
3. *Existe el límite:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$$

**Definición 2.2.2.** *Sean  $\delta_1(\epsilon)$  y  $\delta_2(\epsilon)$  funciones de orden. Decimos que:*

1.  *$\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$  si existe  $k \in \mathbb{R}^+$  y un  $\epsilon_0 > 0$  tales que:*

$$|\delta_1(\epsilon)| \leq k|\delta_2(\epsilon)| \quad (2.8)$$

*para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_0$ .*

*Esta definición describe una cota superior en el crecimiento de la función  $\delta_1(\epsilon)$  en términos de  $\delta_2(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ . Es decir,  $\delta_2(\epsilon)$  actúa como una cota superior para  $\delta_1(\epsilon)$  [17].*

2.  *$\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$  si:*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0 \quad (2.9)$$

*Esta definición indica que  $\delta_1(\epsilon)$  es asintóticamente insignificante en comparación con  $\delta_2(\epsilon)$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$ ; es decir,  $\delta_2(\epsilon)$  crece (o decrece) más rápido*

que  $\delta_1(\epsilon)$  [17].

Consideremos las funciones  $\delta_1(\epsilon) = \ln(1 + \epsilon)$  y  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$ .

La serie de Taylor de  $\ln(1 + \epsilon)$  alrededor de  $\epsilon = 0$  es:

$$\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \dots$$

evaluamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \dots}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{3} - \dots\right) = 1.$$

El límite es distinto de cero, por lo que  $\ln(1 + \epsilon)$  no es  $o(\epsilon)$ . Sin embargo, dado que el límite es finito y positivo, concluimos que  $\ln(1 + \epsilon) = O(\epsilon)$  [17].

Veamos algunos ejemplos más para comprender mejor estas definiciones.

**Ejemplo 2.2.3.** Sea  $\delta_1(\epsilon) = \sin(\epsilon)$  y  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$ .

Sabemos que para  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\sin(\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + \frac{\epsilon^5}{120} - \dots$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{6} + \frac{\epsilon^4}{120} - \dots\right) = 1.$$

El límite es finito y positivo, por lo que  $\sin(\epsilon) = O(\epsilon)$ .

**Ejemplo 2.2.4.** Sea  $\delta_1(\epsilon) = e^\epsilon - 1$  y  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$ .

La serie de Taylor de  $e^\epsilon$  es:

$$e^\epsilon = 1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{6} + \dots$$

Entonces:

$$e^\epsilon - 1 = \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{6} + \dots$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{6} + \dots\right) = 1.$$

Por lo tanto,  $e^\epsilon - 1 = O(\epsilon)$ .



**Ejemplo 2.2.5.** Sea  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon^2$  y  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$ .  
Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0.$$

Entonces,  $\epsilon^2 = o(\epsilon)$ , lo que significa que  $\epsilon^2$  es insignificante en comparación con  $\epsilon$  cuando  $\epsilon \rightarrow 0$  [17].

**Ejemplo 2.2.6.** Sea  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon \ln(\epsilon)$  y  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$ .  
Para  $\epsilon \rightarrow 0^+$ ,  $\ln(\epsilon) \rightarrow -\infty$ , por lo que  $\epsilon \ln(\epsilon) \rightarrow 0^-$ .  
Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon \ln(\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(\epsilon) = -\infty.$$

Aunque el límite es infinito negativo, observamos que  $\epsilon \ln(\epsilon)$  tiende a cero más lentamente que  $\epsilon$ . Por lo tanto,  $\epsilon \ln(\epsilon) = o(1)$ , pero no es  $o(\epsilon)$  ni  $O(\epsilon)$  [17].

**Ejemplo 2.2.7.** Sea  $\delta_1(\epsilon) = e^{-1/\epsilon}$  y  $\delta_2(\epsilon) = \epsilon^n$  para cualquier  $n > 0$ .  
Cuando  $\epsilon \rightarrow 0^+$ :

$$e^{-1/\epsilon} \rightarrow e^{-\infty} = 0,$$

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/\epsilon}}{\epsilon^n} = 0,$$

ya que  $e^{-1/\epsilon}$  decrece más rápidamente que cualquier potencia de  $\epsilon$ . Por lo tanto,  $e^{-1/\epsilon} = o(\epsilon^n)$  [17].

**Ejemplo 2.2.8.** Sea  $\delta_1(\epsilon) = \epsilon^n$  y  $\delta_2(\epsilon) = e^{-1/\epsilon}$  para cualquier  $n > 0$ .  
Calculamos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon^n}{e^{-1/\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^n e^{1/\epsilon} = \infty,$$

ya que  $e^{1/\epsilon}$  crece más rápido que cualquier potencia negativa de  $\epsilon$ . Por lo tanto,  $\delta_2(\epsilon) = o(\delta_1(\epsilon))$  [17].

## 2.3. Teoría de la Linealización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

El análisis de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales puede ser complejo debido a su naturaleza intrínseca. Sin embargo, bajo ciertas condiciones, es posible aproximar el comportamiento del sistema cerca de puntos de equilibrio mediante su linealización. Este método simplifica el estudio de la estabilidad local y la dinámica del sistema [3].

### 2.3.1. Conceptos Fundamentales

#### Sistemas de Ecuaciones Diferenciales No Lineales

Consideremos un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en  $\mathbb{R}^n$ :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.10)$$

donde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  es el vector de estado y  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función vectorial continua y al menos diferenciable una vez en un entorno del punto de equilibrio.

#### Puntos de Equilibrio

Un punto  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  es un **punto de equilibrio** del sistema (2.10) si satisface:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.11)$$

En otras palabras, si el sistema se encuentra en  $\mathbf{x}_0$ , permanecerá allí para todo tiempo  $t$ .

### 2.3.2. Linealización del Sistema

La idea principal de la linealización es aproximar el sistema no lineal (2.10) cerca de un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  mediante su sistema lineal asociado. Esto se logra utilizando la **expansión en serie de Taylor** de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  alrededor de  $\mathbf{x}_0$ .

#### Expansión en Serie de Taylor

La expansión de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  en torno a  $\mathbf{x}_0$  es:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}), \quad (2.12)$$

donde:

- $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  es la **matriz Jacobiana** evaluada en  $\mathbf{x}_0$ , cuyos elementos son  $[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0}$ .
- $\mathbf{R}(\mathbf{x})$  es el término de residuo que contiene las partes de orden superior.

Dado que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , la aproximación lineal del sistema cerca de  $\mathbf{x}_0$  es:

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.13)$$

### 2.3.3. Análisis de Estabilidad mediante Linealización

La linealización permite estudiar la estabilidad local del punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  analizando el sistema linealizado (2.13). La solución general de este sistema lineal se puede expresar en términos de exponentes y vectores propios de la matriz Jacobiana  $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ .

#### Solución del Sistema Linealizado

Sea  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ . El sistema linealizado es:

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z}, \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ .

La solución general es:

$$\mathbf{z}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{z}_0, \quad (2.15)$$

donde  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(0)$  es la condición inicial.

#### Análisis de los Autovalores

La estabilidad del punto de equilibrio está determinada por los autovalores  $\lambda_i$  de la matriz  $\mathbf{A}$ :

- Si todos los autovalores tienen parte real negativa ( $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ ), el punto de equilibrio es **asintóticamente estable**.
- Si alguno de los autovalores tiene parte real positiva ( $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ ), el punto de equilibrio es **inestable**.
- Si todos los autovalores tienen parte real no positiva y al menos uno con parte real cero, se requiere un análisis más detallado (no se puede concluir estabilidad sólo con la linealización).

### 2.3.4. Teoremas que Justifican el Método

#### Teorema de Hartman-Grobman

El **teorema de Hartman-Grobman** establece que, cerca de un punto de equilibrio hiperbólico, el sistema no lineal es topológicamente equivalente a su sistema linealizado.

**Teorema 2.3.1** (Hartman-Grobman). *Sea  $\mathbf{x}_0$  un punto de equilibrio hiperbólico del sistema (2.10), es decir, la matriz Jacobiana  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  no tiene autovalores con parte real cero. Entonces, existe un entorno  $U$  de  $\mathbf{x}_0$  tal que el flujo del sistema no lineal en  $U$  es topológicamente equivalente al flujo del sistema linealizado en  $U$  [18].*

Este teorema justifica el uso de la linealización para analizar la estabilidad local alrededor de puntos de equilibrio hiperbólicos.

#### Puntos de Equilibrio Hiperbólicos

Un punto de equilibrio  $\mathbf{x}_0$  es **hiperbólico** si ninguno de los autovalores de  $\mathbf{A} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$  tiene parte real cero.

#### Limitaciones del Método

La linealización no es concluyente en los siguientes casos:

- Si la matriz Jacobiana tiene autovalores con parte real cero (punto de equilibrio no hiperbólico).
- Si se desea conocer el comportamiento global del sistema (la linealización sólo proporciona información local).

En tales casos, es necesario utilizar métodos más avanzados, como la teoría de sistemas dinámicos no lineales, funciones de Lyapunov o métodos numéricos.

### 2.3.5. Ejemplo de Aplicación

Consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - xy, \\ \dot{y} = y(-\alpha + x), \end{cases} \quad (2.16)$$

donde  $\alpha > 0$  es un parámetro.

## Puntos de Equilibrio

Encontramos los puntos de equilibrio resolviendo:

$$\begin{cases} x(1-x) - xy = 0, \\ y(-\alpha + x) = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Las soluciones son:

- $E_1 = (0, 0)$ .
- $E_2 = (1, 0)$ .
- $E_3 = (\alpha, 0)$  si  $0 < \alpha < 1$ .

## Linealización en $E_2 = (1, 0)$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$\mathbf{A} = D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ y & -\alpha + x \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Evalúamos en  $E_2 = (1, 0)$ :

$$\mathbf{A}|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

Los autovalores son las soluciones de:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.20)$$

Calculamos:

$$\begin{vmatrix} -1 - \lambda & -1 \\ 0 & 1 - \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (-1 - \lambda)(1 - \alpha - \lambda) - (0)(-1) = 0. \quad (2.21)$$

Resolviendo para  $\lambda$ :

$$(-1 - \lambda)(1 - \alpha - \lambda) = 0. \quad (2.22)$$

Obtenemos los autovalores:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 - \alpha. \quad (2.23)$$

La estabilidad del punto de equilibrio  $E_2$  depende del valor de  $\alpha$ :

- Si  $\alpha < 1$ , entonces  $\lambda_2 > 0$  y el punto es un **silla de montar** (inestable).
- Si  $\alpha > 1$ , entonces  $\lambda_2 < 0$  y el punto es un **nodo estable**.

### 2.3.6. Conclusión

La linealización es una herramienta poderosa para analizar la estabilidad local de sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales cerca de puntos de equilibrio hiperbólicos. El teorema de Hartman-Grobman proporciona el fundamento teórico para este método, asegurando que, bajo las condiciones adecuadas, el comportamiento cualitativo del sistema no lineal es capturado por su linealización.

# Capítulo 3

## Teoría de ciclos límite

En el estudio cualitativo de sistemas dinámicos no lineales, los *ciclos límite* juegan un papel fundamental al describir comportamientos periódicos estables o inestables que no dependen de las condiciones iniciales específicas del sistema. Estos ciclos representan soluciones cerradas aisladas en el plano fase, lo que los convierte en objetos clave para entender fenómenos oscilatorios en diversas áreas de aplicación.

El análisis de la existencia y estabilidad de ciclos límite está íntimamente ligado al famoso *Teorema de Poincaré-Bendixson*, uno de los resultados más importantes en la teoría de sistemas dinámicos planos. Este teorema proporciona las condiciones bajo las cuales las trayectorias de un sistema bidimensional acotado convergen hacia un conjunto límite, ya sea un punto de equilibrio o una órbita periódica. Su relevancia radica en que permite descartar comportamientos caóticos en sistemas planos y ofrece herramientas rigurosas para identificar ciclos límite.

En este capítulo, nos enfocamos en el desarrollo teórico de los ciclos límite y presentamos el Teorema de Poincaré-Bendixson como una herramienta central para su estudio.

### 3.1. Sistemas dinámicos

Dado un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}x(t)' &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

con  $F \in C^1(D)$  y  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, sabemos que este tiene una única solución  $\varphi^t(x_0) = x(t)$  para cada condición inicial  $x_0 \in D$ , para todo  $t \in I(x_0)$ , máximo intervalo de existencia de la solución. La solución  $\varphi^t(x_0)$  se llama flujo del

sistema y satisface que  $\varphi^0(x_0) = x_0$  y  $\varphi^t(\varphi^s(x_0)) = \varphi^{t+s}(x_0)$  para todo  $x_0 \in D$  y  $t, s \in I(x_0)$ . [3].

Vamos a definir los sistemas dinámicos, así mismo vamos a abordar un teorema que nos permite extender en máximo intervalo de existencia de la solución.

**Definición 3.1.1** (Sistema dinámico). *Sea  $D \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto, un sistema dinámico en  $D$  es una familia de aplicaciones continuas  $C^1$*

$$\varphi : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que si  $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$ , entonces  $\varphi^t$  satisface:

1.  $\varphi^0(x) = x$  para todo  $x \in D$
2.  $\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x)$  para todo  $x \in D$  y  $t, s \in \mathbb{R}$

Si  $\varphi(t, x)$  es un sistema dinámico en  $D \subset \mathbb{R}^n$  y sea

$$F(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)|_{t=0}$$

entonces  $f$  es un campo vectorial en  $D$  y se llama campo vectorial asociado al sistema dinámico  $\varphi(t, x)$ . Además  $\varphi(t, x_0)$  es solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x(t)' &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

**Definición 3.1.2** (Sistemas topológicamente equivalentes). *Sean dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$x' = f(x) \tag{3.3}$$

$$x' = g(x) \tag{3.4}$$

con  $f \in C^1(D)$  y  $g \in C^1(E)$ ,  $D, E \subset \mathbb{R}^n$  conjuntos abiertos. Decimos que los sistemas (3.3) y (3.4) son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo  $h : D \rightarrow E$  tal que mapea trayectorias de (3.3) en trayectorias de (3.4) y viceversa, además preserva el sentido de las trayectorias.

**Definición 3.1.3** (Teorema de existencia global). *El problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} x(t)' &= \frac{F(x(t))}{1+|F(x(t))|} \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

tiene solución única para todo  $x_0 \in D$  y  $t \in I(x_0) = (-\infty, \infty)$  máximo intervalo de existencia de la solución. [3] Además es topológicamente equivalente al sistema (3.5) en  $\mathbb{R}^n$ .

**Definición 3.1.4** (Conjunto invariante). *Un conjunto  $U \subset \mathbb{R}^n$  es invariante bajo el flujo  $\varphi^t$  si para todo  $x \in U$  se tiene que  $\varphi^t(x) \in U$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*



## 3.2. Conjuntos límite

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}\tag{3.6}$$

con las condiciones iniciales  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$ .

Para realizar un análisis cualitativo del sistema vamos a hacer un cambio de coordenadas de cartesianas a polares, con el fin de simplificar el sistema [3], después vamos a resolver cuantitativamente el problema y analizaremos algunas propiedades con ayuda de la solución analítica.

Con el cambio de coordenadas (2.1) y (2.2) tenemos las condiciones iniciales  $r(0) = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  y  $\theta(0) = \theta_0 = \arctan(\frac{y_0}{x_0})$ .

Sustituimos el sistema (3.6) en (2.5):

$$\begin{aligned}rr' &= xx' + yy' = x[-y + x(1 - x^2 - y^2)] + y[x + y(1 - x^2 - y^2)] \\ rr' &= x^2(1 - x^2 - y^2) + y^2(1 - x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)]\end{aligned}$$

luego sustituimos (2.3) y obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}rr' &= r^2(1 - r^2) \\ r' &= r(1 - r^2)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Por otro lado sustituimos el sistema (3.6) en (2.6):

$$\begin{aligned}r^2\theta' &= xx' - yy' = x[x + y(1 - x^2 - y^2)] - y[-y + x(1 - x^2 - y^2)] \\ r^2\theta' &= x^2 + y^2 = r^2\end{aligned}$$

y obtenemos la ecuación diferencial

$$\theta' = 1\tag{3.8}$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) forman un sistema de ecuaciones no lineal desacoplado [19].

Comenzamos el análisis cualitativo de la ecuación diferencial (3.7).

Sea  $f(r) = r(1 - r^2)$  con  $r \geq 0$ , las soluciones de equilibrio son  $r = 0$  y  $r = 1$ .

1. Si  $0 < r < 1$ , entonces  $r' = f(r) > 0$ , por lo tanto  $r = 0$  es un punto fuente o repulsivo.
2. Si  $1 < r$ , entonces  $r' = f(r) < 0$ , por lo tanto  $r = 1$  es un sumidero o atractor.

Las soluciones convergen a  $r = 1$ .

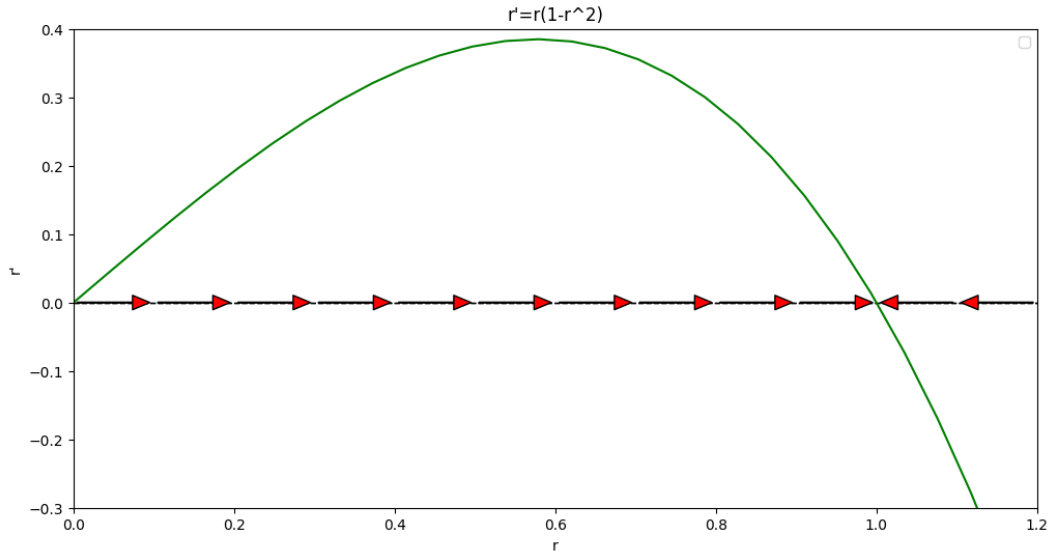


Figura 3.1: Plano fase de (3.7).

Por otro lado para (3.8) la solución es  $\theta(t) = t + \theta_0$ , donde  $\theta_0 = \theta(0)$ .

Las soluciones del sistema (3.6) convergen a puntos sobre la circunferencia centrada en el origen de radio 1 [15].

Resolvamos el problema de forma analítica.

La ecuación (3.7) es separable

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int dt$$

integremos por fracciones parciales

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int \frac{dr}{r} - \int \frac{dr}{2(r+1)} - \int \frac{dr}{2(r-1)}$$

$$= \ln |r| - \frac{1}{2} \ln |r+1| - \frac{1}{2} \ln |r-1| + c_1$$

entonces

$$\ln |r| - \frac{1}{2} \ln |r+1| - \frac{1}{2} \ln |r-1| = t + c$$

desarrollamos logaritmos

$$\ln \left| \frac{r^2}{r^2-1} \right| = 2t + c$$

$$\frac{r^2}{r^2-1} = ce^{2t}$$

$$r^2 = \frac{e^{2t}}{c + e^{2t}}$$

Como  $r \geq 0$

$$r = \frac{e^t}{\sqrt{c + e^{2t}}}$$

Aplicamos la condición inicial  $r(0) = r_0$ .

Las soluciones en coordenadas polares son:

$$r(t) = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (3.9)$$

$$\theta(t) = t + \theta_0 \quad (3.10)$$

Dejaremos nuestra solución en coordenadas polares para realizar el siguiente análisis del comportamiento asintótico.

1. Si  $r_0 = 1$  tenemos las ecuaciones

$$r(t) = 1$$

$$\theta(t) = t + \theta_0$$

2. Por otro lado, si  $r_0 > 1$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = \infty$$

3. Para  $0 < r_0 < 1$ .

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 0$$

Las trayectorias convergen a la circunferencia con centro en el origen y de radio 1.

¿Qué significa que las trayectorias convergen a la circunferencia de centrada en el origen y de radio 1?

**Definición 3.2.1** (Punto  $\omega$  límite). *Decimos que  $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$  es un punto  $\omega$ -límite de  $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$  si existe sucesión creciente de tiempos  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $t_n \rightarrow \infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(\vec{x}_0) = \vec{z}$$

Pasemos las soluciones (3.9) y (3.10) a coordenadas cartesianas, con (2.1) y (2.2) [14].

$$x(t) = \frac{e^t \cos(t + \theta_0)}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (3.11)$$

$$y(t) = \frac{e^t \sin(t + \theta_0)}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (3.12)$$

con  $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$  y  $\theta_0 = \arctan(\frac{y_0}{x_0})$ . Definen el flujo  $\varphi^t$  en  $\mathbb{R}^2$  como

$$\varphi^t(x_0, y_0) = (x(t), y(t))$$

en el plano fase de (3.6) que pasa por el punto  $(x_0, y_0)$ .

Tomemos un punto en la circunferencia centrada en el origen con radio 1, supongamos que en coordenadas polares tiene un ángulo  $0 < \alpha_0 < 2\pi$ , veamos que este punto es  $\omega$  límite, para eso podemos definir  $\{t_n = 2\pi n + \alpha_0 - \theta_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \cos(\alpha_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = \sin(\alpha_0)$$

en efecto el punto  $(\cos(\alpha_0), \sin(\alpha_0))$  es un punto  $\omega$  límite, esto quiere decir que para cada punto de la circunferencia podemos encontrar una sucesión de tiempos

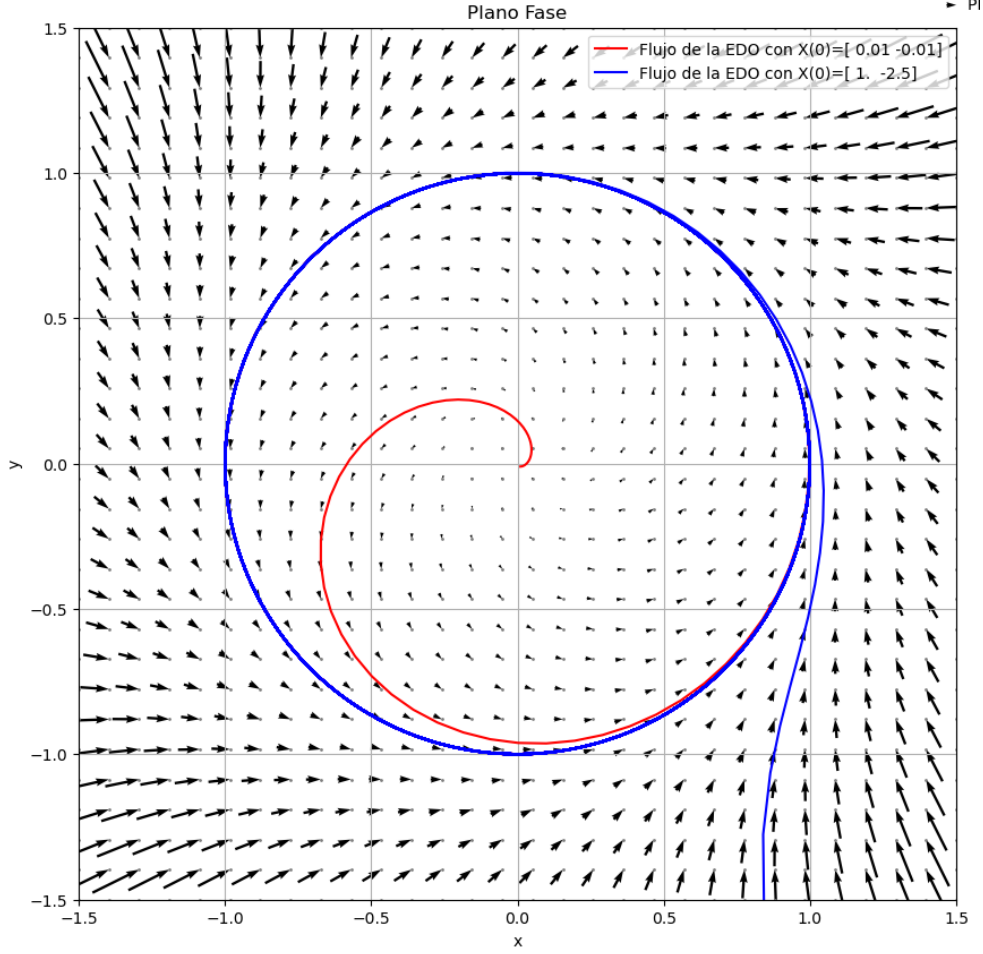


Figura 3.2: Plano fase del sistema (3.6).

$\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $t_n \rightarrow \infty$  tal que la trayectoria converge a ese punto de la circunferencia, es decir cualquier punto que se encuentra en la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 es un punto  $\omega$  límite de  $(x_0, y_0)$ , entonces diremos que esta circunferencia es un conjunto  $\omega$  límite de  $(x_0, y_0)$ , donde el conjunto  $\omega$  límite se define como

$$\omega(\vec{X}_0) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{z} \text{ es } \omega\text{-límite de } \vec{X}_0\}.$$

**Definición 3.2.2** (Punto  $\alpha$  límite). *Decimos que  $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$  es un punto  $\alpha$ -límite de  $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^2$  si existe sucesión decreciente de tiempos  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $t_n \rightarrow -\infty$  cuando  $n \rightarrow \infty$  tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(\vec{X}_0) = \vec{z}$$

Por otro lado si tomamos un punto  $(x_0, y_0)$  que no está en la circunferencia, entonces si  $r_0 < 1$  entonces  $x(t) \rightarrow 0$  y  $y(t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow -\infty$ , por lo tanto el punto  $(x_0, y_0)$  es un punto  $\alpha$  límite, es decir que existe una sucesión de tiempos  $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  con  $t_n \rightarrow -\infty$  tal que la trayectoria converge a ese punto.

Notemos que analizamos los flujos cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $t \rightarrow -\infty$ , es decir que analizamos el comportamiento asintótico de las soluciones. Se define la trayectoria media positiva como

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x = \varphi(t, x_0) \mid t \geq 0\}$$

y la trayectoria media negativa como

$$\Gamma_{x_0}^- = \{x = \varphi(t, x_0) \mid t \leq 0\}$$

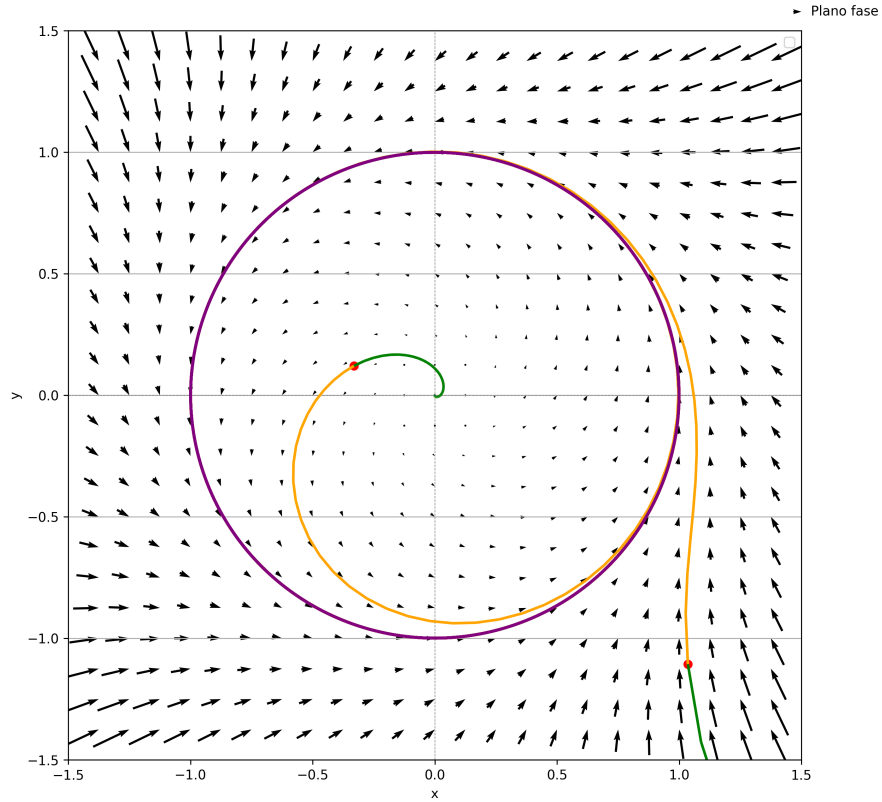


Figura 3.3: Plano fase del sistema (3.6).

En la figura 3.2 podemos observar que la trayectoria del flujo  $\varphi^t$  que pasa por  $x_0$  es la unión de la trayectoria media positiva (naranja) y la trayectoria media negativa (verde), es decir

$$\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-$$

**Definición 3.2.3.** Decimos que un conjunto  $U$  es positivamente invariante si dado  $x_0 \in U$  entonces  $\Gamma_{x_0}^+ \subset U$

**Definición 3.2.4.** Decimos que un conjunto  $U$  es negativamente invariante si dado  $x_0 \in U$  entonces  $\Gamma_{x_0}^- \subset U$

Además, notemos que para  $\{t_n = 2\pi n + \alpha_0 - \theta_0\}_{n \in \mathbb{N}}$ , la sucesión  $\{(x(t_n), y(t_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de puntos convergente tal que sus puntos son colineales sobre la recta  $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan(\alpha_0)x\}$ . Las intersecciones de las trayectorias son los valores de la sucesión colineal.

Modifiquemos el sistema (3.7), a un sistema perturbado con  $0 \leq \epsilon < 1$ .

$$r' = r(1 - r^2) + \epsilon r \cos(\theta) \quad (3.13)$$

Veamos si existe  $r_{max}$  tal que  $r' < 0$  y  $r_{min}$  tal que  $r' > 0$  [17].

Reescribimos (3.13) como  $r' = r(1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta))$ , como  $r > 0$ , entonces el signo de  $r'$  depende de  $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta)$ . Tenemos los siguientes casos:

1. Si  $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta) \leq 1 - r^2 + \epsilon < 0$  entonces  $\sqrt{1 + \epsilon} < r_{max}$ , por lo que para  $r < r_{max}$  se tiene que  $r' < 0$ .
2. Por otro lado, si  $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta) > 1 - r^2 - \epsilon > 0$  entonces  $\sqrt{1 - \epsilon} > r_{min}$ , por lo que para  $r > r_{min}$  se tiene que  $r' > 0$ .

Las trayectorias que pasan por puntos en la circunferencia centrada en el origen y con radio  $r_{min}$  divergen del exterior de dicha circunferencia. Por otro lado, las trayectorias que pasan por puntos en la circunferencia centrada en el origen con radio  $r_{max}$  convergen al interior del círculo. A este segmento del plano lo llamamos región de atrapamiento [16].

Podemos intuir que debe existir una curva cerrada en el interior, donde  $r_{min} < r < r_{max}$ , en la cual las trayectorias convergen o alcanzan el equilibrio, de manera similar a lo observado en el ejemplo inicial, debido a su comportamiento. La idea de la existencia de una curva cerrada de este tipo es lo que conocemos como ciclo límite.

Notemos que esta sección del plano donde  $r_{min} < r < r_{max}$  es positivamente invariante [20].

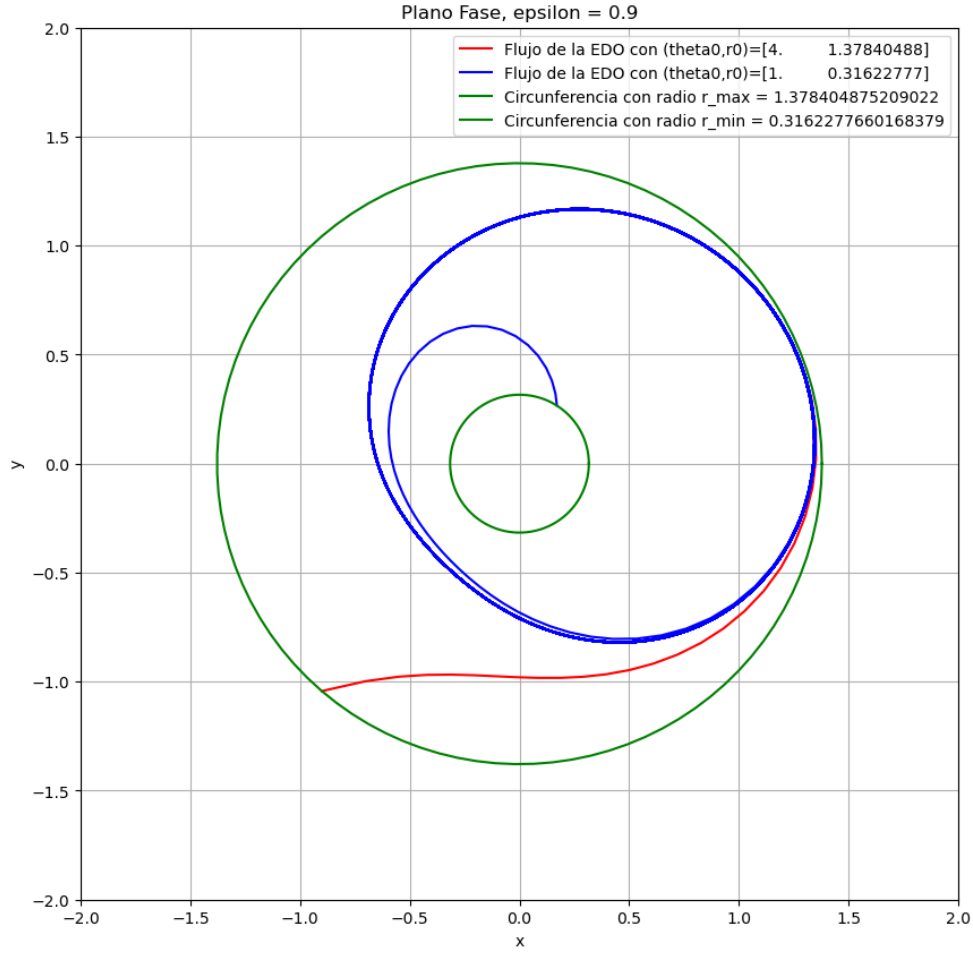


Figura 3.4: Plano fase del sistema con perturbación.

Veamos más propiedades de los puntos y el conjunto  $\omega$  límite.

- $\omega(x_0) = \omega(\Gamma_{x_0}^+)$  y  $\alpha(x_0) = \alpha(\Gamma_{x_0}^-)$ .

- Si  $x_0$  es equilibrio de  $x' = f(x)$  entonces:

$$\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \{x_0\}$$

- Si  $\Gamma_0$  es una órbita periódica para un sistema  $x' = f(x)$ , entonces

$$\omega(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_0) = \Gamma_0$$



**Lema 3.2.5.** Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\Gamma_{x_0}^+$  está acotada. Entonces:

1.  $\omega(x) \neq \emptyset$
2.  $\omega(x)$  es acotado.
3.  $\omega(x)$  es cerrado.
4.  $\omega(x)$  es conexo.

**Lema 3.2.6.** Sea  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$  con  $\Gamma_{x_0}^+$  acotada. Entonces

$$\rho(\phi(t, x), \omega(\vec{x})) \rightarrow 0$$

cuando  $t \rightarrow \infty$  [20].

**Lema 3.2.7** (Invarianza). Sea  $\Gamma_{x_0}^+$  acotada. Entonces  $\omega(x)$  es invariante bajo el flujo  $\varphi^t$ , es decir, para cada  $\vec{y} \in \omega(x)$  entonces  $\varphi^t(y) \in \omega(x)$  [21].

**Lema 3.2.8.** Si  $\omega(x) \neq \emptyset$  y no contiene puntos de equilibrio. Entonces contiene una órbita periódica  $\Gamma_0$  [19].

**Lema 3.2.9.** Si  $\omega(x)$  contiene una órbita periódica  $\Gamma_0$ . Entonces  $\omega(x) = \Gamma_0$  [14].

### 3.3. Teorema de Poincaré-Bendixson

**Teorema 3.3.1** (Poincaré-Bendixson). Sea  $x \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\Gamma_x^2 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$  con  $D \equiv$  Cerrado y acotado, y conteniendo un número finito de equilibrios de la EDO:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \tag{3.14}$$

entonces se cumple alguna de las siguientes:

1.  $\omega(x) = \omega(\Gamma_x^+)$  está formado por un equilibrio.
2.  $\omega(x)$  es una órbita periódica.
3.  $\omega(x)$  está formada por equilibrios y órbitas que tienen a dichos equilibrios como puntos  $\alpha$  u  $\omega$  límite.

El teorema de Poincaré-Bendixson es fundamental en la teoría de sistemas dinámicos planares [22, 23].

**Definición 3.3.2** (Ciclo límite.). *Decimos que la órbita periódica  $\Gamma_0 = \omega(\vec{x})$  del caso 2 del teorema 3.3.1 se llama **ciclo límite** si hay un anillo abierto que lo contiene y no hay otra órbita periódica en él, es decir un ciclo límite es una órbita periódica aislada.*

**Definición 3.3.3.** *La órbita que conecta a un punto silla consigo mismo (la intersección de la variedad estable con la inestable), se le llama curva homoclínica [24].*

**Definición 3.3.4.** *La órbita que conecta dos diferentes puntos de equilibrio se le llama curva heteroclínica [24].*

### 3.4. Oscilador de Van der Pol

La ecuación del oscilador de Van der Pol describe el comportamiento de ciertos sistemas oscilantes no lineales. Su fundamento físico se basa en el concepto de amortiguamiento no lineal y autodemostación de oscilaciones [7].

$$x'' + x + \epsilon x'(x^2 - 1) = 0 \quad (3.15)$$

donde  $\epsilon$  es un parámetro de amortiguamiento no lineal.

El término  $-\epsilon(1 - x^2)x'$  representa la no linealidad del amortiguamiento en el sistema. La expresión  $(1 - x^2)$  describe cómo el amortiguamiento varía en función de la posición del oscilador. Cuando  $x$  es pequeño, este término es cercano a 1 y el amortiguamiento es lineal. Sin embargo, a medida que  $x$  aumenta, el término  $(1 - x^2)$  se hace más negativo, generando un efecto de amortiguamiento no lineal que disminuye la velocidad del oscilador [19].

Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} y' &= -x - \epsilon y(x^2 - 1) \\ x' &= y \end{aligned} \quad (3.16)$$

Los puntos de equilibrio del sistema se obtienen resolviendo  $x' = 0$  y  $y' = 0$ :

$$\begin{cases} y = 0, \\ \epsilon(1 - x^2)y - x = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Sustituyendo  $y = 0$  en la segunda ecuación, obtenemos:

$$-x = 0 \implies x = 0. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, el único punto de equilibrio es el origen  $(0, 0)$ .

#### Matriz Jacobiana y Valores Propios

Calculamos la matriz Jacobiana  $J$  del sistema (??):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\epsilon xy & \epsilon(1 - x^2) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Evaluando en el punto de equilibrio  $(0, 0)$ :

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Obtenemos los valores propios  $\lambda$  resolviendo el determinante característico:

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (3.21)$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \epsilon - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Calculamos el determinante:

$$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) - (-1)(1) = \lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0. \quad (3.23)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}. \quad (3.24)$$

Para  $\epsilon > 0$ , si  $\epsilon^2 - 4 > 0$  (es decir,  $\epsilon > 2$ ), los valores propios son reales y positivos, lo que indica que el punto de equilibrio es un **nodo inestable**. Si  $0 < \epsilon < 2$ , los valores propios son complejos con parte real positiva, lo que implica que el origen es un **foco inestable** [14].

## Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson

Para demostrar la existencia de un ciclo límite, utilizamos el **teorema de Poincaré-Bendixson**, que establece que si un conjunto compacto, invariante y sin puntos de equilibrio en su interior existe para un sistema planar, entonces el sistema tiene una órbita periódica dentro de ese conjunto [15].

### Construcción de una Región Acotada Invariante

Definimos una función de Lyapunov candidata:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2). \quad (3.25)$$

Calculamos la derivada total de  $V$  respecto al tiempo:

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy + y(\mu(1 - x^2)y - x) = y^2(\mu(1 - x^2)). \quad (3.26)$$

Analizamos el signo de  $\dot{V}$ :

- Para  $|x| > 1$ , se tiene  $x^2 > 1$ , por lo que  $1 - x^2 < 0$  y entonces:

$$\dot{V} = y^2 \mu (1 - x^2) < 0. \quad (3.27)$$

Esto indica que en la región donde  $|x| > 1$ , la energía total  $V$  decrece, y las trayectorias se dirigen hacia el interior de esta región.

- Para  $|x| < 1$ , se tiene  $1 - x^2 > 0$ , y por lo tanto  $\dot{V} > 0$ , indicando que en esta región la energía total  $V$  aumenta, y las trayectorias se alejan del origen.

Concluimos que las trayectorias que empiezan fuera del círculo  $x^2 + y^2 = R^2$  con  $R > 1$  eventualmente entran en esta región y permanecen en un conjunto compacto y acotado [25].

Dado que:

1. El sistema es plano y continuo.
2. Existe una región compacta e invariante (por la función de Lyapunov) sin puntos de equilibrio distintos del origen.
3. El origen es un punto de equilibrio inestable.

Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson, concluimos que existe al menos una órbita periódica (ciclo límite) en la región acotada definida [26].

### 3.5. Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh con amortiguamiento no lineal, se utiliza para estudiar oscilaciones no lineales en sistemas mecánicos y se encuentra en diversos campos como la mecánica estructural y la dinámica de sistemas físicos [8].

$$x'' + \epsilon(x'^2 - 1)x' + x = 0$$

El parámetro  $\epsilon$  es un coeficiente que controla la influencia del término no lineal en el amortiguamiento. El término  $\epsilon(x'^2 - 1)x'$  es el término no lineal en el amortiguamiento. Mientras que en el amortiguamiento lineal la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, en este caso el amortiguamiento depende de la velocidad al cuadrado y se modifica por el término  $(x'^2 - 1)$ . Esto introduce un comportamiento no lineal en el sistema y puede dar lugar a fenómenos como la autoexcitación y la respuesta no armónica [19]. Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} y' &= -\epsilon(y^2 - 1)y - x \\ x' &= y \end{aligned} \quad (3.28)$$

Los puntos de equilibrio se encuentran resolviendo  $\dot{x} = 0$  y  $\dot{y} = 0$ :

$$\begin{cases} y = 0, \\ \epsilon(1 - y^2)y - x = 0. \end{cases} \quad (3.29)$$

Sustituyendo  $y = 0$  en la segunda ecuación, obtenemos:

$$-x = 0 \implies x = 0. \quad (3.30)$$

Por lo tanto, el único punto de equilibrio es el origen  $(0, 0)$ .

### Matriz Jacobiana y Valores Propios

Calculamos la matriz Jacobiana  $J$  del sistema (3.28):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon(1 - 3y^2) \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Evalúamos en el punto de equilibrio  $(0, 0)$ :

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.32)$$

Los valores propios  $\lambda$  se obtienen resolviendo:

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \epsilon - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.33)$$

Calculamos el determinante:

$$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) - (-1)(1) = \lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0. \quad (3.34)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}. \quad (3.35)$$

- Si  $\epsilon^2 - 4 > 0$  (es decir,  $\epsilon > 2$ ), los valores propios son reales y de signos opuestos si  $\epsilon > 0$ , lo que indica un **silla de montar** en el origen.
- Si  $\epsilon^2 - 4 < 0$  (es decir,  $0 < \epsilon < 2$ ), los valores propios son complejos conjugados con parte real positiva, ya que  $\epsilon > 0$ . Esto implica que el origen es un **foco inestable**.

## Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson

Para demostrar la existencia de un ciclo límite, aplicaremos el teorema de Poincaré-Bendixson, mostrando que las trayectorias están confinadas en una región acotada y que no hay otros puntos de equilibrio en esa región aparte del origen [15].

### Construcción de una Región Acotada Invariante

Consideramos la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2. \quad (3.36)$$

Calculamos su derivada temporal:

$$\dot{V} = y\dot{y} + x\dot{x} \quad (3.37)$$

$$= y [\epsilon (1 - y^2) y - x] + xy \quad (3.38)$$

$$= y [\epsilon (1 - y^2) y - x] + xy \quad (3.39)$$

$$= \epsilon y^2 (1 - y^2) - yx + xy \quad (3.40)$$

$$= \epsilon y^2 (1 - y^2). \quad (3.41)$$

Analizamos el signo de  $\dot{V}$ :

- Para  $|y| > 1$ , se tiene  $y^2 > 1$ , entonces  $1 - y^2 < 0$  y por lo tanto:

$$\dot{V} = \epsilon y^2 (1 - y^2) < 0. \quad (3.42)$$

Esto indica que las trayectorias se dirigen hacia la región donde  $|y| \leq 1$  [25].

- Para  $|y| < 1$ , se tiene  $1 - y^2 > 0$ , y por lo tanto:

$$\dot{V} = \epsilon y^2 (1 - y^2) \geq 0. \quad (3.43)$$

En esta región, la energía  $V$  no decrece, pero debido a la inestabilidad en el origen, las trayectorias tienden a alejarse del punto de equilibrio [26].

Observamos que:

1. Las trayectorias que empiezan fuera de la región  $|y| \leq 1$  eventualmente entran en esta región y quedan confinadas en un conjunto compacto debido a la disminución de  $V$ .

2. No hay otros puntos de equilibrio distintos del origen en esta región.
3. El origen es inestable (foco inestable o silla de montar dependiendo del valor de  $\epsilon$ ).

Por el **teorema de Poincaré-Bendixson**, existe al menos un ciclo límite en esta región acotada [14].

## 3.6. Sistemas Liénard

Los sistemas Liénard son ecuaciones diferenciales de la forma:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (3.44)$$

Para extender esta ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones diferenciales, primero definimos

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds$$

entonces haciendo el cambio de variable  $y = x' + F(x)$ , obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

Vamos a enunciar el siguiente importante teorema [27].

**Teorema 3.6.1** (Liénard). *Si  $F(x)$  y  $g(x)$  del sistema (3.45) satisfacen las siguientes hipótesis:*

1.  $F, g \in C^1$ .
2.  $F$  y  $g$  son funciones impares.
3.  $xg(x) > 0$  para todo  $x \neq 0$ .
4.  $F'(0) < 0$
5.  $F$  tiene ceros sólo en  $x = 0$  o en  $x = \pm a$ .
6.  $F$  es monótona creciente en  $(a, \infty)$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$

*entonces el sistema (3.45) tiene un único ciclo límite y es estable [3].*



Veamos que el sistema de ecuaciones asociado al Oscilador de Van der Pol es un sistema Liénard.

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

Definimos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \epsilon(s^2 - 1)ds \\ &= \epsilon \left[ \frac{1}{3}s^3 - s \right]_0^x = \epsilon \left[ \frac{1}{3}x^3 - x \right] \end{aligned}$$

Tenemos  $F(x) = \frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x]$  y  $g(x) = x$ .

Podemos extender el oscilador de Van der Pol al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= y - \frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x] \\ y' &= -x \end{aligned}$$

Veamos si  $F$  y  $g$  satisfacen las hipótesis del teorema de Liénard [14].

1. En efecto  $F, g \in C^1$ .
2. Notemos que las funciones son impares

$$F(-x) = \frac{\epsilon}{3}[(-x)^3 - 3(-x)] = \frac{\epsilon}{3}[-x^3 + 3x] = -\frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x] = -F(x)$$

$$g(-x) = -x = -g(x)$$

.

3.  $xg(x) = x(x) = x^2 > 0$  para todo  $x \neq 0$ .
4.  $F'(0) = \epsilon(0^2 - 1) = -\epsilon < 0$
5.  $F(x) = \frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x] = 0$  entonces  $F$  tiene raíces en  $x = 0$  y  $x = \pm\sqrt{3}$
6. Si  $y > x > \sqrt{3}$ , entonces  $y^3 - 3y > x^3 - 3x$ , por lo que  $F$  es monótona creciente. Además por ser una función polinomial se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty.$$

Por lo tanto, por el teorema de Liénard el oscilador de Van der Pol tiene un único ciclo límite y es estable [28]. Esto ya lo comprobamos anteriormente, pero este teorema nos garantiza que es el único ciclo límite [13].

# Bibliografía

- [1] David Hilbert. *Mathematical problems*. Traducción al inglés de la conferencia original de 1900. Bulletin of the American Mathematical Society, 1902.
- [2] Yulij Ilyashenko. «Centennial history of Hilbert's 16th problem». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 39.3 (2002), págs. 301-354.
- [3] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2001.
- [4] Henri Dulac. «Sur les cycles limites». En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 51 (1923), págs. 45-188.
- [5] Jean Écalle. «Correction to: "Finiteness theorems for limit cycles"». En: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 76 (1992), págs. 1-12.
- [6] Yulij Ilyashenko. «Finiteness theorems for limit cycles». En: *Russian Mathematical Surveys* 45.2 (1991), págs. 143-200.
- [7] Balthasar Van der Pol. «On relaxation-oscillations». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2.11 (1926), págs. 978-992.
- [8] John William Strutt Rayleigh. «The theory of sound». En: *Macmillan* (1883).
- [9] Richard FitzHugh. «Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane». En: *Biophysical Journal* 1.6 (1961), págs. 445-466.
- [10] Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto y Shuji Yoshizawa. «An active pulse transmission line simulating nerve axon». En: *Proceedings of the IRE* 50.10 (1962), págs. 2061-2070.
- [11] Anatol M. Zhabotinsky. «Periodic processes in a liquid phase oxidation reaction». En: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 157 (1964), págs. 392-395.
- [12] James D. Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, 2002.
- [13] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [14] John Guckenheimer y Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.

- [15] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.
- [16] E. J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [17] Carl M. Bender y Steven A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, 2013.
- [18] Philip Hartman. «A lemma in the theory of structural stability of differential equations». En: *Proceedings of the American Mathematical Society* 11.4 (1960), págs. 610-620.
- [19] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2018.
- [20] Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2012.
- [21] Vladimir I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer, 1992.
- [22] Henri Poincaré. «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle». En: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7 (1881), págs. 375-422.
- [23] Ivar Bendixson. *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Vol. 24. 1901, págs. 1-88.
- [24] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2013.
- [25] Wolfgang Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [26] Joseph LaSalle y Solomon Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press, 1961.
- [27] Alfred Liénard. «Étude des oscillations entretenues». En: *Revue générale de l'électricité* 23 (1928), págs. 901-912.
- [28] Jack K. Hale. *Ordinary Differential Equations*. Krieger Publishing Company, 1980.