

Teoría planar: Poincaré-Bendixson

Eduardo Ortiz Romero

10 de junio de 2024

Índice general

1. Preliminares	3
1.1. Coordenadas polares	3
1.2. Teoría de promediación	4
2. Teoría de ciclos límite.	6
2.1. Introducción	6
2.2. Teoría de ciclos límites.	12
2.3. Oscilador de Van der Pol	15
2.4. Ecuación de Rayleigh	18
2.5. Sistemas Lienard	20
2.6. Van der Pol y Rayleigh	22

Introcucción

El teorema de Poincaré-Bendixson es un resultado fundamental en la teoría de sistemas dinámicos, que establece condiciones bajo las cuales una trayectoria en un espacio de fase no diverge ni se acerca indefinidamente a ninguna otra trayectoria, sino que se limita a un conjunto cerrado y acotado. En este texto exploraremos este importante teorema. Además, analizaremos algunos ejemplos concretos de sistemas dinámicos en los que se cumple el teorema de Poincaré-Bendixson, así como situaciones en las que no se cumple.

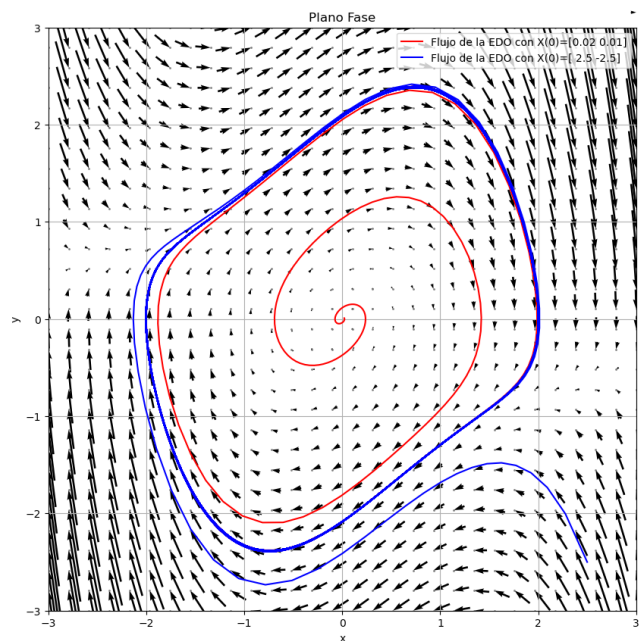


Figura 1: Plano fase.

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Coordenadas polares

En este trabajo vamos a utilizar el cambio de coordenadas cartecianas a polares, por lo que vamos a establecer las ecuaciones que vamos a requerir más adelante.

Dada la variable $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ en el plano, definimos el cambio de coordenadas cartecianas (x, y) a coordenadas polares (r, θ) por la relación:

$$x = r \cos(\theta) \quad (1.1)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (1.2)$$

Estas ecuaciones cumplen las siguientes identidades:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (1.3)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1.4)$$

Calculamos las derivadas de 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4 respecto a t .

- Derivada de 1.1 respecto de t .

$$x' = r' \cos(\theta) - \theta' r \sin(\theta) \quad (1.5)$$

- Derivada de 1.2 respecto de t .

$$y' = r' \sin(\theta) + \theta' r \cos(\theta) \quad (1.6)$$

- Derivada de 1.3 respecto de t

$$2r \frac{dr}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$$

obtenemos la ecuación equivalente:

$$rr' = xx' + yy' \quad (1.7)$$

- Derivada de 1.4 respecto de t

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2} \right) = \frac{x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt}}{x^2 + y^2}$$

obtenemos la ecuación equivalente:

$$r^2 \theta' = xy' - yx' \quad (1.8)$$

1.2. Teoría de promediación

Definición 1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $T > 0$. Definimos:

$$f_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t + \tau, x) d\tau$$

como el promedio local de f .

Proposición 1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y de periodo T en t , entonces

$$f_T(t, x) = f_0(x)$$

Proposición 2. Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de Lipschitz en \mathbb{R} , entonces

$$|\phi(x) - \phi_T(x)| \leq \frac{\lambda T}{2}$$

i.e. $\phi(t)$ es $o(T)$ con respecto a $\phi_T(x)$.

Lema 1. Consideremos la EDO

$$x' = \epsilon f(t, x)$$

con $x(0) = x_0$, donde f es de Lipschitz en $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y f continua en $t \in [0, t]$.

Sea $M = \sup_{x \in D} \sup_{0 \leq t} |f(t, x)| < +\infty$

Si $\phi(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau))d\tau$ con x solución de la EDO.

Entonces:

$$|\phi_T(t) - \int_0^t f_T(\tau, x(\tau))d\tau| \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda L)MT$$

para $o(\frac{1}{\epsilon}) = t$, donde $\lambda \equiv \text{cte de Lipschitz}$.

i.e. $\phi_T(t) = \int_0^t f_T(\tau, x(\tau))d\tau + o(T)$

Lema 2. Consideremos el problema de valor inicial

$$x' = \epsilon f(t, x)$$

$x(0) = x_0$, con f Lipschitz en $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y continua en $t \in [0, t]$.

Si y es solución de $y' = \epsilon f_T(t, y)$, $y(0) = x_0$, entonces

$$x(t) - y(t) = o(\epsilon T)$$

p.t. $t = o(\frac{1}{\epsilon})$

Capítulo 2

Teoría de ciclos límite.

2.1. Introducción

Consideremos el sistema no lineal.

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}\tag{2.1}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Para realizar un análisis cualitativo del sistema vamos a hacer un cambio de coordenadas de cartesianas a polares, con el fin de simplificar el sistema, después vamos a resolver cuantitativamente el problema y analizaremos algunas propiedades con ayuda de la solución analítica.

Con el cambio de coordenadas 1.1 y 1.2 tenemos las condiciones iniciales $r(0) = r_0$ y $\theta(0) = \theta_0$.

Sustituimos el sistema 2.1 en 1.7:

$$\begin{aligned}rr' &= xx' + yy' = x[-y + x(1 - x^2 - y^2)] + y[x + y(1 - x^2 - y^2)] \\ rr' &= x^2(1 - x^2 - y^2) + y^2(1 - x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)]\end{aligned}$$

Sustituimos 1.3

$$rr' = r^2(1 - r^2)$$

$$r' = r(1 - r^2)$$

Por otro lado sustituimos el sistema 2.1 en 1.8:

$$r^2\theta' = xx' - yy' = x[x + y(1 - x^2 - y^2)] - y[-y + x(1 - x^2 - y^2)]$$

$$r^2\theta' = x^2 + y^2 = r^2$$

$$\theta' = 1$$

Obetnemos un sistema de ecuaciones no lineal desacoplado

$$r' = r(1 - r^2) \tag{2.2}$$

$$\theta' = 1 \tag{2.3}$$

Comenzamos el análisis cualitativo de la ecuación diferencial 2.2.

Sea $f(r) = r(1 - r^2)$ con $r \geq 0$, las soluciones de equilibrio son $r = 0$ y $r = 1$.

1. Si $0 < r < 1$, entonces $r' = f(r) > 0$, por lo tanto $r = 0$ es un punto fuente o repulsivo.
2. Si $1 < r$, entonces $r' = f(r) < 0$, por lo tanto $r = 1$ es un sumidero o atractor.

Las soluciones convergen a $r = 1$.

Por otro lado para 2.3 la solución es $\theta(t) = t + \theta_0$, donde $\theta_0 = \theta(0)$.

Las soluciones del sistema 2.1 convergen a puntos sobre la circunferencia centrada en el origen de radio 1.

Resolvamos el problema de forma analítica.

La ecuación 2.2 es separable

$$\int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int dt$$

integramos por fracciones parciales

$$\int \frac{dr}{r(1 - r^2)} = \int \frac{dr}{r} - \int \frac{dr}{2(r + 1)} - \int \frac{dr}{2(r - 1)}$$

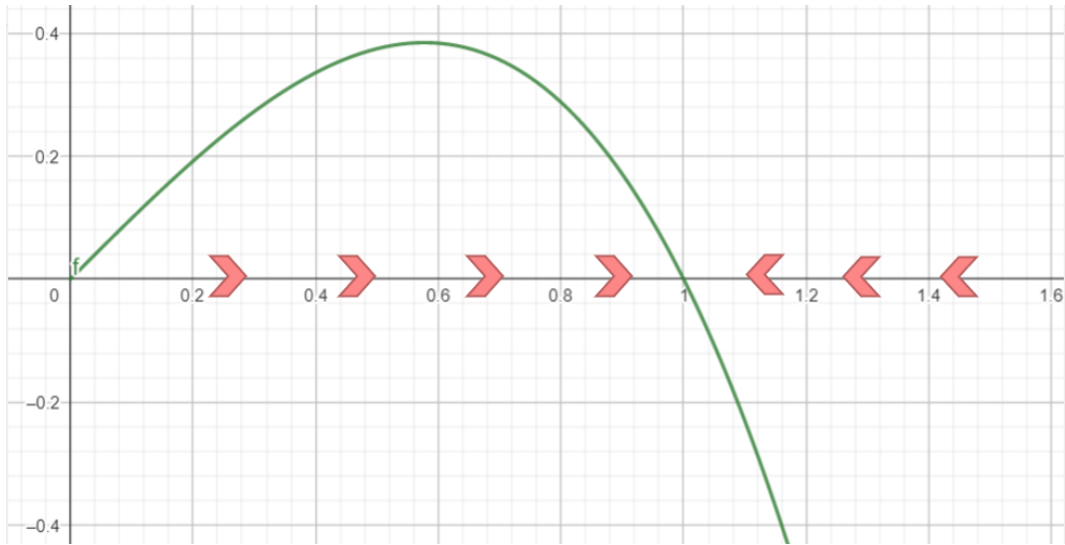


Figura 2.1: Plano fase de 2.2.

$$= \ln |r| - \frac{1}{2} \ln |r+1| - \frac{1}{2} \ln |r-1| + c_1$$

entonces

$$\ln |r| - \frac{1}{2} \ln |r+1| - \frac{1}{2} \ln |r-1| = t + c$$

desarrollamos logaritmos

$$\ln \left| \frac{r^2}{r^2 - 1} \right| = 2t + c$$

$$\frac{r^2}{r^2 - 1} = ce^{2t}$$

$$r^2 = \frac{e^{2t}}{c + e^{2t}}$$

Como $r \geq 0$

$$r = \frac{e^t}{\sqrt{c + e^{2t}}}$$

Aplicamos la condición inicial $r(0) = r_0$.

Las soluciones en coordenadas polares son:

$$r(t) = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (2.4)$$

$$\theta(t) = t + \theta_0 \quad (2.5)$$

Dejaremos nuestra solución en coordenadas polares para realizar el siguiente análisis del comportamiento asintótico.

1. Si $r_0 = 1$ tenemos las ecuaciones

$$r(t) = 1$$

$$\theta(t) = t + \theta_0$$

que es una circunferencia con centro en el origen y de radio 1.

2. Por otro lado, si $r_0 > 1$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = \infty$$

3. Para $0 < r_0 < 1$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 0$$

Las trayectorias convergen a la circunferencia con centro en el origen y de radio 1. En la siguiente imagen se observa que las trayectorias convergen asintóticamente a la circunferencia de radio 1.

¿Qué significa que las trayectorias convergen a la circunferencia de centrada en el origen y de radio 1? Para dar una respuesta vamos a definir el punto Ω límite.

Definición 2 (Punto Ω límite). *Decimos que $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ es un punto ω -límite de $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^2$ si existe sucesión creciente de tiempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(\vec{X}_0) = \vec{z}$$

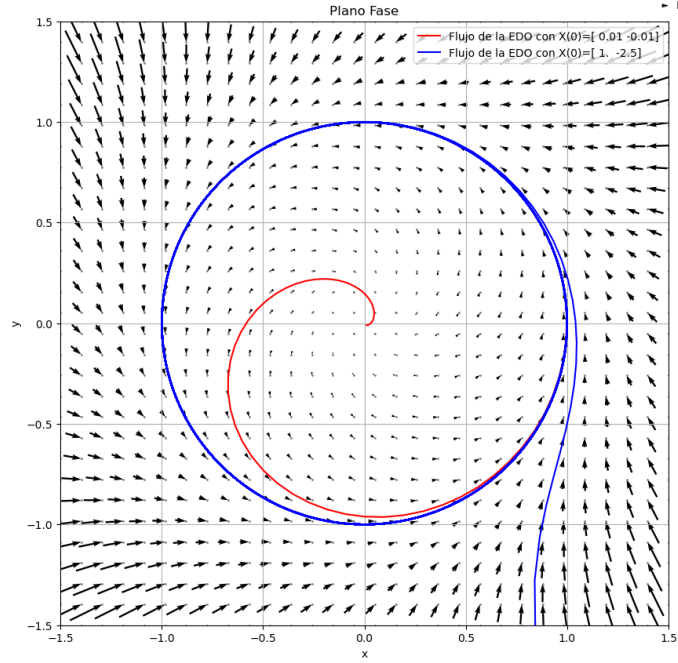


Figura 2.2: Plano fase.

Regresemos las soluciones 2.4 y 2.5 a coordenadas cartesianas, con 1.1 y 1.2.

$$x(t) = \frac{e^t \cos(t + \theta_0)}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (2.6)$$

$$y(t) = \frac{e^t \sin(t + \theta_0)}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (2.7)$$

Tomemos la trayectoria en el plano fase de 2.1 que pasa por el punto (x_0, y_0) , entonces existe $\theta_0 = \arctan(\frac{y_0}{x_0}) \in [0, 2\pi]$. La trayectoria que pasa por (x_0, y_0) está dada por las ecuaciones 2.6 2.7. donde $x_0 = x(0)$ y $y_0 = y(0)$ y algún $c \in \mathbb{R}$.

Tomemos un punto en la circunferencia centrada en el origen con radio 1, supongamos que en coordenadas polares tiene un ángulo $0 < \alpha_0 < 2\pi$, veamos que es punto Ω límite, para eso podemos definir $\{t_n = 2\pi n + \alpha_0 - \theta_0\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \cos(\alpha_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = \sin(\alpha_0)$$

en efecto el punto $(\cos(\alpha_0), \sin(\alpha_0))$ es un punto Ω límite, más aún por ser un punto arbitrario, esto demuestra que cualquier punto que se encuentra en la

circunferencia centrada en el origen y de radio 1 es un punto Ω límite, entonces diremos que esta circunferencia es un conjunto Omega límite de (x_0, y_0) .

El conjunto Ω límite se define como:

$$\omega(\vec{X}_0) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{z} \text{ es } \omega\text{-límite de } \vec{X}_0\} \equiv \text{Conjunto } \omega\text{-límite}$$

Esto quiere decir que para cada punto de la circunferencia podemos encontrar una sucesión de tiempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow \infty$ tal que la trayectoria converge a ese punto de la circunferencia. Esta curva cerrada a la que convergen las trayectorias se le llama ciclo límite.

Además, notemos que para $\{t_n = 2\pi n + \alpha_0 - \theta_0\}_{n \in \mathbb{N}}$, la sucesión $\{(x(t_n), y(t_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos convergente tal que sus puntos son colineales sobre la recta $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan(\alpha_0)x\}$. Las intersecciones de las trayectorias son los valores de la sucesión colineal.

Modifiquemos el sistema 2.2, a un sistema perturbado con $0 \leq \epsilon < 1$.

$$r' = r(1 - r^2) + \epsilon r \cos(\theta) \quad (2.8)$$

Veamos si existe r_{max} tal que $r' < 0$ y r_{min} tal que $r' > 0$.

Reescribimos 2.8 como $r' = r(1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta))$, como $r > 0$, entonces el signo de r' depende de $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta)$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta) \leq 1 - r^2 + \epsilon < 0$ entonces $\sqrt{1 + \epsilon} < r_{max}$, por lo que para $r < r_{max}$ se tiene que $r' < 0$.
2. Por otro lado, si $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta) > 1 - r^2 - \epsilon > 0$ entonces $\sqrt{1 - \epsilon} > r_{min}$, por lo que para $r > r_{min}$ se tiene que $r' > 0$.

Las trayectorias que pasan por puntos en la circunferencia centrada en el origen y con radio r_{min} divergen del exterior de dicha circunferencia. Por otro lado, las trayectorias que pasan por puntos en la circunferencia centrada en el origen con radio r_{max} convergen al interior del círculo.

Podemos intuir que debe existir una curva cerrada en el interior, donde $r_{min} < r < r_{max}$, en la cual las trayectorias convergen o alcanzan el equilibrio, de manera similar a lo observado en el ejemplo inicial, debido a su comportamiento. La idea de la existencia de una curva cerrada de este tipo es lo que conocemos como ciclo límite.

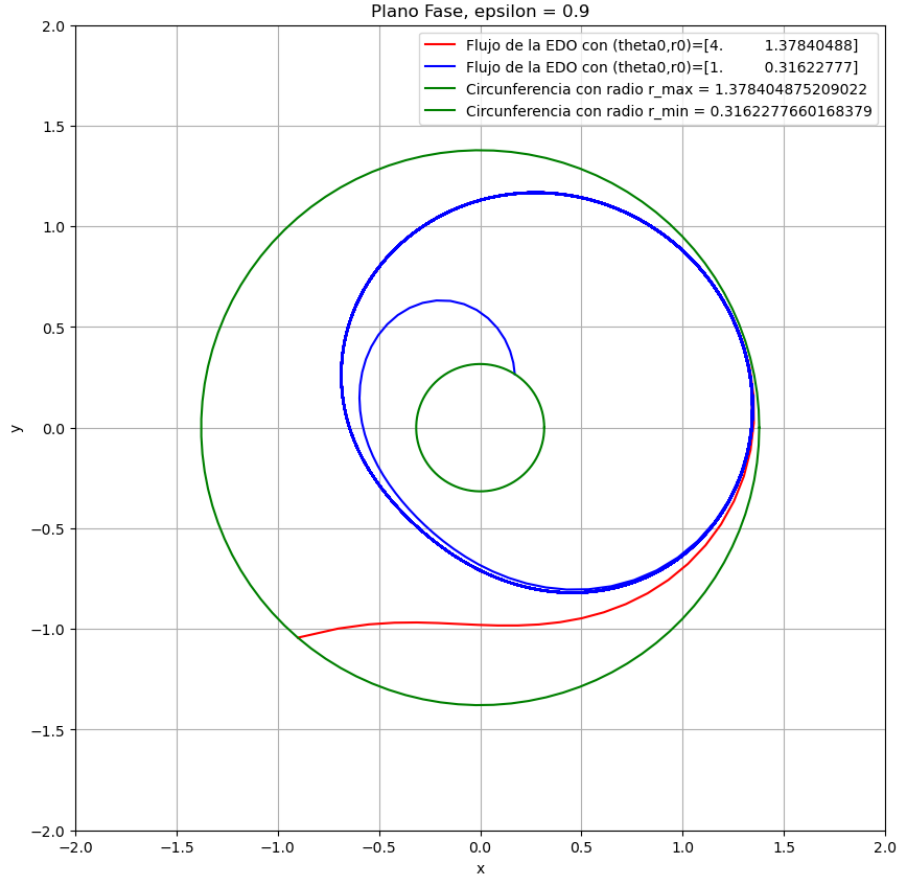


Figura 2.3: Plano fase del sistema con perturbación.

2.2. Teoría de ciclos límites.

En el sistema 2.1 vimos que para cualquier $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, cada punto en $C = \{\vec{z} \mid |\vec{z}| = 1\}$ es un ω -límite de (x_0, y_0) .

Notación

$$\omega(\vec{X}_0) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{z} \text{ es } \omega\text{-límite de } \vec{X}_0\} \equiv \text{Conjunto } \omega\text{-límite}$$

Entonces C es el conjunto ω -límite de (x_0, y_0) .

$$C = \omega((x_0, y_0))$$

Definición 3. De manera similar definimos un punto y el conjunto α -límite como

$$\alpha(\vec{x}) = \{\vec{y} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{y} \text{ es } \alpha\text{-límite de } \vec{x}\} \equiv \text{Conjunto } \alpha\text{-límite}$$

donde

$$\vec{y} = \lim_{t_i \rightarrow -\infty} \varphi(t_i, \vec{x})$$

con $\{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ sucesión decreciente a $-\infty$.

Definición 4. Definimos

$$\Gamma_{\vec{x}}^+ = \{\vec{y} = \varphi(t, \vec{x}) \mid t > 0\}$$

$$\Gamma_{\vec{x}}^- = \{\vec{y} = \varphi(t, \vec{x}) \mid t < 0\}$$

Entonces:

$$\Gamma_{\vec{x}} = \Gamma_{\vec{x}}^+ \cup \Gamma_{\vec{x}}^-$$

Luego:

$$\omega(\vec{x}) = \omega(\Gamma_{\vec{x}}^+) \text{ y } \alpha(\vec{x}) = \alpha(\Gamma_{\vec{x}}^-)$$

Si Γ_0 es una órbita periódica para un sistema $\vec{X}' = f(\vec{X})$, entonces $\omega(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_0) = \Gamma_0$. Por ejemplo, para el sistema 2.1, $\omega(C) = \alpha(C) = C$.

Si \vec{x}^* es equilibrio de $\vec{x}' = \vec{f}(\vec{x})$ entonces:

$$\omega(\vec{x}^*) = \alpha(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$$

Si $\Gamma_0 \equiv$ órbita periódica solución de la EDO, entonces::

$$\omega(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_0) = \Gamma_0$$

En el sistema

$$x' = -7x$$

$$y' = -y$$

Tenemos un nodo atractor que es el origen ($x = 0, y = 0$) que es un punto ω -límite, ya que cualquier trayectoria converge a él, además el conjunto ω -límite es $\omega(\vec{x}) = (0, 0)$

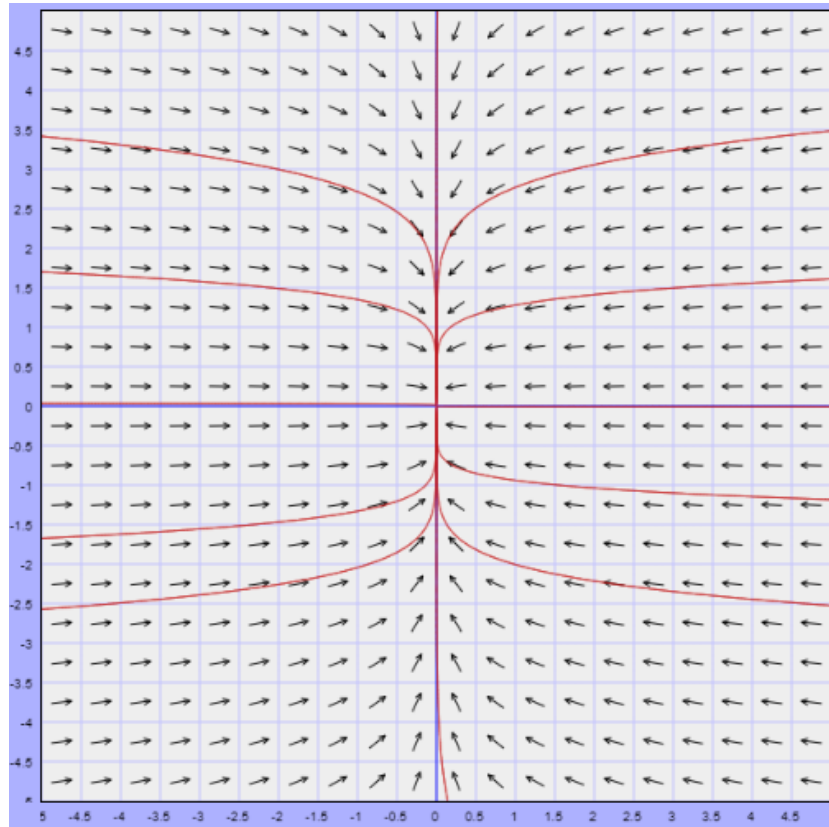


Figura 2.4: Plano fase. Dibujado en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

En el primer ejemplo obtuvimos una trayectoria periódica cerrada definida por una circunferencia centrada en el origen y de radio $r = 1$ a donde las trayectorias externas e internas convergían, esa circunferencia es un conjunto ω -límite.

Definición 5. Decimos que un conjunto U es positivamente invariante si dado $\vec{x} \in U$ entonces $\Gamma_{\vec{x}}^+ \subset U$

Definición 6. Decimos que un conjunto U es negativamente invariante si dado $\vec{x} \in U$ entonces $\Gamma_{\vec{x}}^- \subset U$

En nuestro primer ejemplo, sean $0 < a \leq 1$ y $1 \leq b$ entonces el conjunto

$$U = \{\vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a < \sqrt{x^2 + y^2} < b\}$$

define un conjunto positivamente invariante si $a = 1$ $b \neq 1$ y negativamente invariante si $b = 1$ $a \neq 1$.

La unión de estos dos conjuntos forman al conjunto en azul de la siguiente imagen. Este conjunto está acotado por dos circunferencias de radio $0 < a < 1$ y $1 < b$

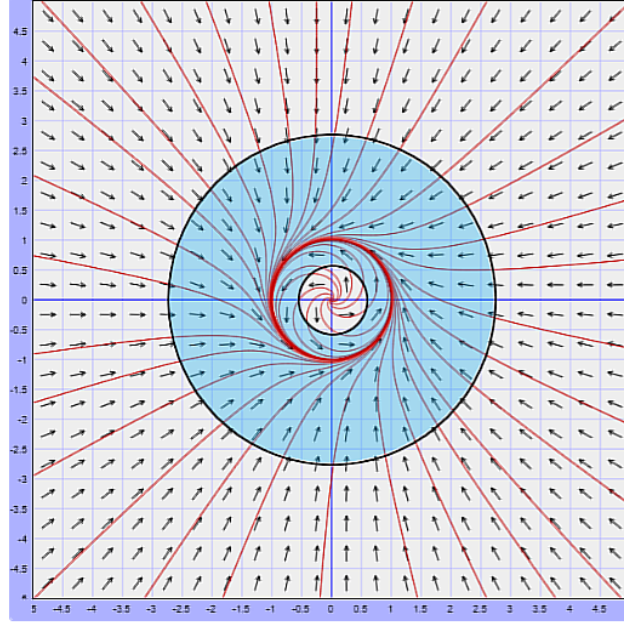


Figura 2.5: Conjunto U en azul. Dibujado en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

respectivamente, podemos intuir que si estos conjuntos positivamente y negativamente invariantes existen entonces existe al menos un ciclo límite en su interior, esto de forma intuitiva deduce el teorema de Poincaré – Bendixson en el plano.

2.3. Oscilador de Van der Pol

La ecuación del oscilador de Van der Pol describe el comportamiento de ciertos sistemas oscilantes no lineales. Su fundamento físico se basa en el concepto de amortiguamiento no lineal y autodemostración de oscilaciones.

$$x'' + x + \epsilon x'(x^2 - 1) = 0 \quad (2.9)$$

donde ϵ es un parámetro de amortiguamiento no lineal.

El término $-\epsilon(1 - x^2)x'$ representa la no linealidad del amortiguamiento en el sistema. La expresión $(1 - x^2)$ describe cómo el amortiguamiento varía en función de la posición del oscilador. Cuando x es pequeño, este término es cercano a 1 y el amortiguamiento es lineal. Sin embargo, a medida que x aumenta, el término $(1 - x^2)$ se hace más negativo, generando un efecto de amortiguamiento

no lineal que disminuye la velocidad del oscilador.

Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} y' &= -x - \epsilon y(x^2 - 1) \\ x' &= y \end{aligned} \tag{2.10}$$

Haremos el cambio de coordenadas a polares. Sustituimos en 1.5 y 1.6 en 2.10

$$r \cos(\theta)\theta' + r' \sin(\theta) = -r \cos(\theta) - \epsilon r \sin(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) - 1)$$

$$-r \sin(\theta)\theta' + r' \cos(\theta) = r \sin(\theta)$$

entonces

$$r' = -\epsilon r \sin^2(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) - 1) \tag{2.11}$$

$$\theta' = -1 - \epsilon r \sin(\theta) \cos(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) - 1) \tag{2.12}$$

Definimos para 2.11 el promedio

$$\bar{r}' = \bar{f}(\bar{r}, \epsilon) \tag{2.13}$$

donde

$$\bar{f}(\bar{r}, \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r' d\theta$$

Calculamos esta integral

$$\begin{aligned} \bar{f}(\bar{r}, \epsilon) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\epsilon r \sin^2(\theta)(r^2 \cos^2(\theta) - 1) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\epsilon r^3 \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) \cos^2(\theta) d\theta + \epsilon r \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\epsilon r^3 \left[\frac{1}{32} (4\theta - \sin(4\theta)) \right]_0^{2\pi} + \epsilon r \left[\frac{1}{2} (\theta - \sin(\theta) \cos(\theta)) \right]_0^{2\pi} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\epsilon r^3}{32} (8\pi) + \frac{\epsilon r}{2} (2\pi) \right] = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{-\epsilon r^3}{4} \pi + \epsilon r \pi \right]. \end{aligned}$$

Entonces

$$\bar{f}(\bar{r}, \epsilon) = \frac{\epsilon r}{2} - \frac{\epsilon r^3}{8}$$

Promediamos θ

$$\bar{\theta} = 2\pi t$$

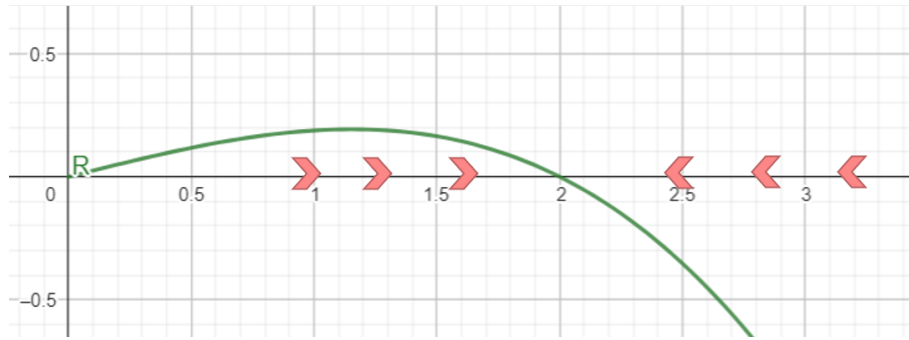


Figura 2.6: Plano fase de 2.14.

Vamos a analizar 2.13

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon}{8}r(4 - r^2) \quad (2.14)$$

Las soluciones de equilibrio son $r = 0$ y $r = 2$.

1. Si $0 < r < 2$, entonces $r' > 0$, por lo que 0 es un punto fuente o repulsivo.
2. Si $r > 2$, entonces $r' < 0$, entonces $r = 2$ es sumidero o atractor.

Esto quiere decir que entre dos circunferencias de radios $0 < r_{min} < 2$ y $2 < r_{max}$ existe al menos una curva cerrada a la cual las curvas convergen.

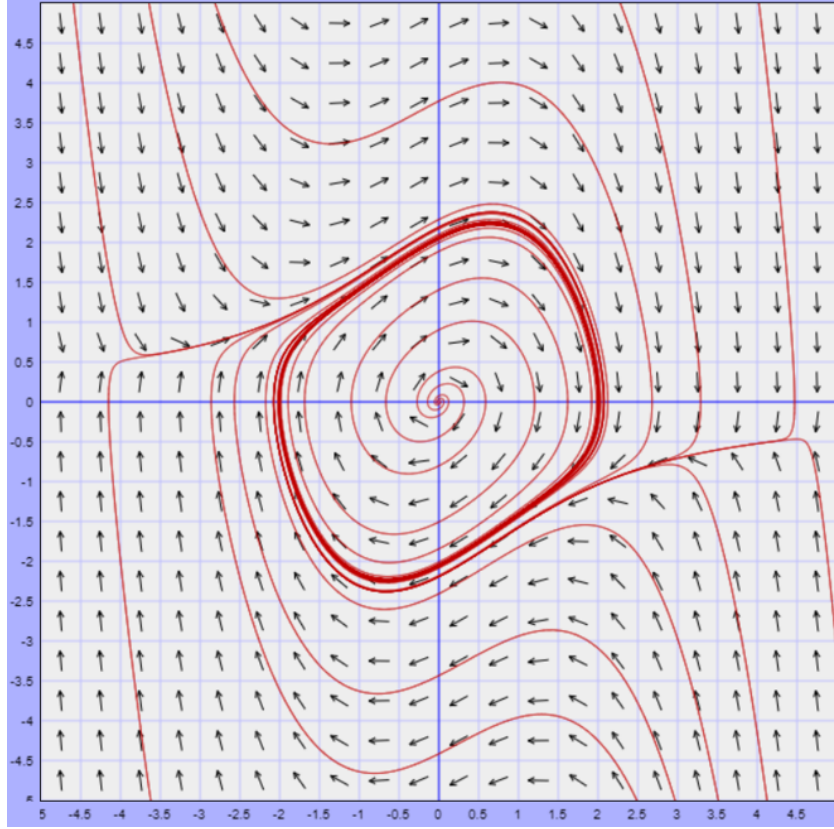


Figura 2.7: Plano fase. Dibujado en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

2.4. Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh con amortiguamiento no lineal, se utiliza para estudiar oscilaciones no lineales en sistemas mecánicos y se encuentra en diversos campos como la mecánica estructural y la dinámica de sistemas físicos.

$$x'' + \epsilon(x'^2 - 1)x' + x = 0$$

El parámetro ϵ es un coeficiente que controla la influencia del término no lineal en el amortiguamiento. El término $\epsilon(x'^2 - 1)x'$ es el término no lineal en el amortiguamiento. Mientras que en el amortiguamiento lineal la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, en este caso el amortiguamiento depende de la velocidad al cuadrado y se modifica por el término $(x'^2 - 1)$. Esto introduce un comportamiento no lineal en el sistema y puede dar lugar a fenómenos como la autoexcitación y la respuesta no armónica. Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}y' &= -\epsilon(y^2 - 1)y - x \\x' &= y\end{aligned}\tag{2.15}$$

Haremos el cambio de coordenadas a polares.

$$\begin{aligned}r \cos(\theta)\theta' + r' \sin(\theta) &= -\epsilon(r^2 \sin^2(\theta) - 1)r \sin(\theta) - \omega^2 r \cos(\theta) \\-r \sin(\theta)\theta' + r' \cos(\theta) &= r \sin(\theta)\end{aligned}$$

Obtenemos la ecuación.

$$r' = \epsilon(1 - r^2 \sin^2(\theta))r \sin^2(\theta) + r \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - \omega^2)\tag{2.16}$$

Definimos para 2.16 el promedio

$$\bar{r} = \bar{f}(\bar{r}, \epsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r' d\theta$$

Calculamos esta integral

$$\begin{aligned}\bar{f}(\bar{r}, \epsilon) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\epsilon(1 - r^2 \sin^2(\theta))r \sin^2(\theta) + r \sin(\theta) \cos(\theta)(1 - \omega^2)] d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \epsilon r \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta - \frac{1}{2\pi} \epsilon r^3 \int_0^{2\pi} \sin^4(\theta) d\theta + \frac{1}{2\pi} r(1 - \omega^2) \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) d\theta \\&= \frac{1}{2\pi} \epsilon r \left[\frac{1}{2}(\theta - \sin(\theta) \cos(\theta)) \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \epsilon r^3 \left[\frac{1}{32}(-8 \sin(2\theta) + \sin(4\theta) + 12\theta) \right]_0^{2\pi} + \\&\quad \frac{1}{2\pi} r(1 - \omega^2) [\cos^2(\theta)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \epsilon r \pi - \frac{1}{2\pi} \epsilon r^3 \frac{3}{4} \pi \\&= \frac{\epsilon r}{8} (4 - 3r^2)\end{aligned}$$

Entonces tenemos el sistema

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon r}{8} (4 - 3r^2)$$

$$\bar{\theta}' = 2\pi t$$

Las soluciones de equilibrio son $r = 0$ y $r = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

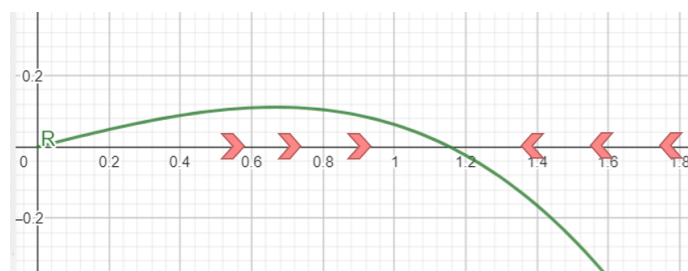


Figura 2.8: Plano fase. Dibujado en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

2.5. Sistemas Lienard

Los sistemas Lienard son ecuaciones diferenciales de la forma:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (2.17)$$

Para extender esta ecuación diferencial a un sistema de ecuaciones diferenciales. Primero definimos

$$F(x) = \int_0^x f(s) ds$$

entonces haciendo el cambio de variable $y = x' + F(x)$, obtenemos el sistema:

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x) \\ y' &= -g(x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Vamos a enunciar el siguiente importante teorema.

Teorema 1 (Lienard). *Si $F(x)$ y $g(x)$ del sistema 2.18 satisfacen las siguientes hipótesis:*

1. $F, g \in C^1$.
2. F y g son funciones impares.
3. $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.
4. $F'(0) < 0$
5. F tiene ceros sólo en $x = 0$ o en $x = \pm a$.
6. F es monótona creciente en (a, ∞) y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$

entonces el sistema 2.18 tiene un único ciclo límite y es estable.

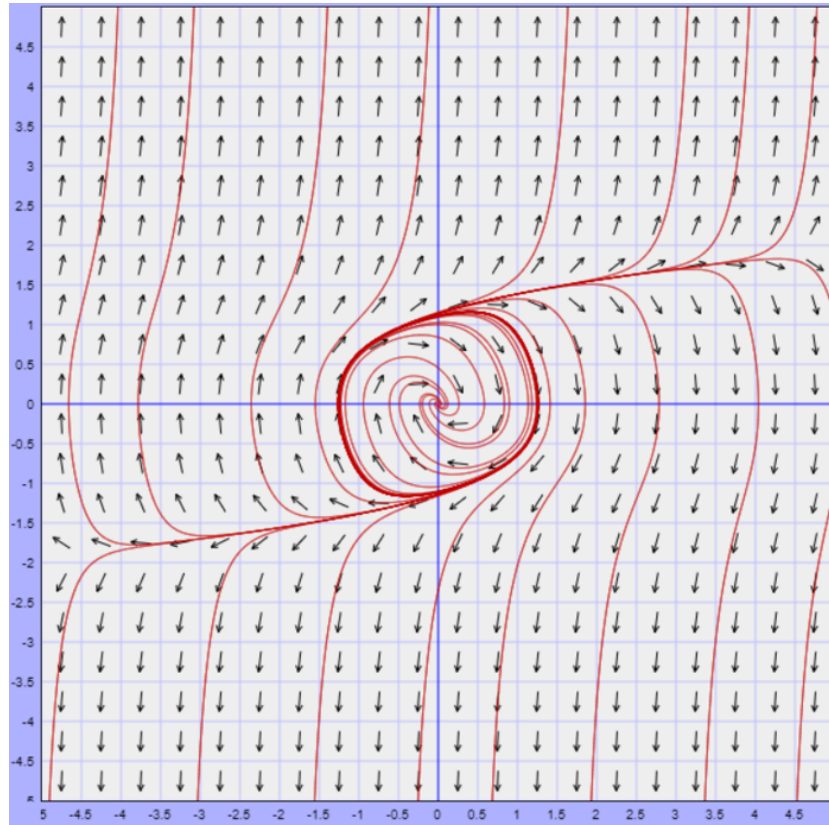


Figura 2.9: Plano fase. Dibujado en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>

Veamos que el sistema de ecuaciones asociado al Oscilador de Van der Pol es un sistema Lienard.

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0$$

Definimos

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x \epsilon(s^2 - 1)ds \\ &= \epsilon \left[\frac{1}{3}s^3 - s \right]_0^x = \epsilon \left[\frac{1}{3}x^3 - x \right] \end{aligned}$$

Tenemos $F(x) = \frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x]$ y $g(x) = x$.

Podemos extender el oscilador de Van der Pol al sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x' &= y - \frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x] \\ y' &= -x \end{aligned}$$

Veamos si F y g satisfacen las hipótesis del teorema de Lienard

1. En efecto F, g^1 .
2. Notemos que las funciones son impares

$$F(-x) = \frac{\epsilon}{3}[(-x)^3 - 3(-x)] = \frac{\epsilon}{3}[-x^3 + 3x] = -\frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x] = -F(x)$$

$$g(-x) = -x = -g(x)$$

.

3. $xg(x) = x(x) = x^2 > 0$ para todo $x \neq 0$.
4. $F'(0) = \epsilon(0^2 - 1) = -\epsilon < 0$
5. $F(x) = \frac{\epsilon}{3}[x^3 - 3x] = 0$ entonces F tiene raíces en $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$
6. Si $y > x > \sqrt{3}$, entonces $y^3 - 3y > x^3 - 3x$, por lo que F es monótona creciente. Además por ser una función polinomial se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty.$$

Por lo tanto, por el teorema de Lienard el oscilador de Van der Pol tiene un único ciclo límite y es estable. Esto ya lo comprobamos anteriormente, pero este teorema nos garantiza que es el único ciclo límite.

2.6. Van der Pol y Rayleigh

Ahora vamos a analizar la EDO

$$x'' + \epsilon(x'^2 - 1)x' + \eta(x^2 - 1)x' + x = 0 \quad (2.19)$$

Extendemos esta ecuación a un sistema de ecuaciones haciendo el cambio de variable usual $y = x'$. Obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} y' &= -\epsilon(y^2 - 1)x' - \eta(x^2 - 1)y - x \\ x' &= y \end{aligned} \quad (2.20)$$

Hamos un cambio de coordenadas a polares. Sustituimos 1.5 y 1.6 en nuestro sistema, obtenemos:

$$r' \sin(\theta) + \theta' r \cos(\theta) = -\epsilon(r^2 \sin^2(\theta) - 1)r \sin(\theta) - \eta(r^2 \cos^2(\theta) - 1)r \sin(\theta) - r \cos(\theta)$$

$$r' \cos(\theta) - \theta' r \sin(\theta) = r \sin(\theta)$$

Calculamos r' y θ'

$$r' = -[\epsilon(r^2 \sin^2(\theta) - 1) + \eta(r^2 \cos^2(\theta) - 1)]r \sin^2(\theta) \quad (2.21)$$

$$\theta' = -[\epsilon(r^2 \sin^2(\theta) - 1) + \eta(r^2 \cos^2(\theta) - 1)] \cos(\theta) \sin(\theta) - r$$

Vamos a promediar r' , calculamos \bar{r}' :

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -[\epsilon(r^2 \sin^2(\theta) - 1) + \eta(r^2 \cos^2(\theta) - 1)]r \sin^2(\theta) d\theta \\ &= -\frac{r^3}{8}(3\epsilon + \eta) + \frac{r}{2}(\epsilon + \eta) \end{aligned}$$

Calculamos las raíces no negativas de $\bar{r}' = -r^3(\frac{3\epsilon+\eta}{8}) + r(\frac{\epsilon+\eta}{2})$, estas son $r_1 = 0$ y $r_2 = 2\sqrt{\frac{\epsilon+\eta}{3\epsilon+\eta}}$.

Para los valores de $\epsilon = 0,5$ y $\eta = 0,4$ el valor de el atractor es $r_2 = 1,3764\dots$, podemos ver en la imagen que en efecto existe un ciclo límite aproximado a la circunferencia de radio r_2 .

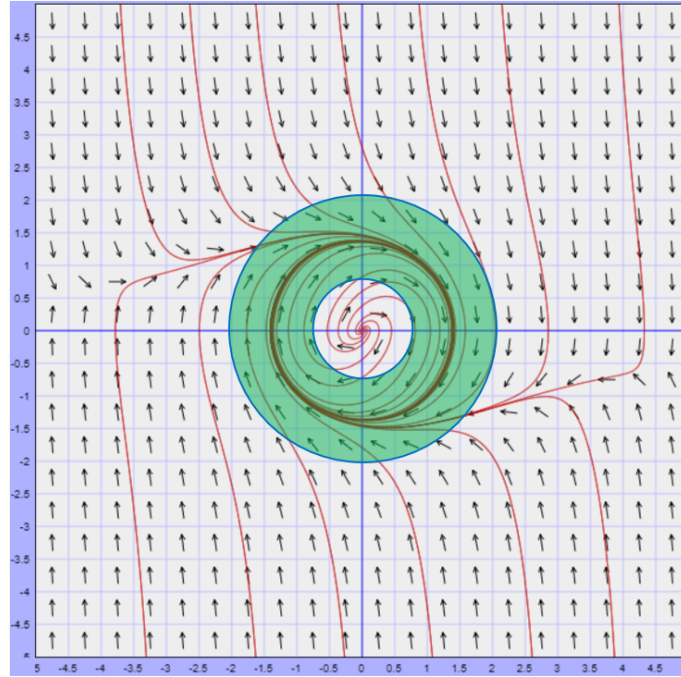


Figura 2.10: Plano fase. Dibujado en <https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>