

Teoría de perturbaciones para existencia de ciclos límites

Eduardo Ortiz Romero

6 de mayo de 2025

Índice general

1. Introducción	4
1.1. Problema 16 de Hilbert	4
1.2. Resultados relevantes sobre la existencia de ciclos límite	5
1.3. Problemas clásicos de ciclos límite	7
1.4. Aplicaciones modernas de los ciclos límite	11
2. Conceptos Fundamentales	13
2.1. Puntos de Equilibrio	13
2.1.1. Puntos de Equilibrio Robustos a Perturbaciones	13
2.1.2. Puntos de Equilibrio Frágiles	17
2.1.3. Equilibrios No Hiperbólicos	19
2.2. Teoría de la Linealización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales	21
2.2.1. De Lo Lineal a Lo No Lineal: Una Transición Natural	22
2.2.2. El Proceso de Linealización: ¿Cómo Funciona?	22
2.2.3. Eigenvalores y Estabilidad	23
2.2.4. Profundizando en la Interpretación Geométrica	23
2.2.5. Ejemplo. Modelo de Depredador-Presa	24
2.3. El Teorema de Liapunov y su Aplicación en la Determinación de Regiones de Estabilidad	26
2.3.1. Relación con el Teorema de Poincaré-Bendixson	29
3. Teoría de ciclos límite	30
3.1. Sistemas dinámicos	30
3.2. Conjuntos límite	32
3.3. Teorema de Poincaré-Bendixson	40
3.4. Ejemplo 1. Oscilador de Van der Pol	41
3.5. Ejemplo 2. Ecuación de Rayleigh	44
4. Sistemas Liénard	47
4.1. Definición y Formulación General	47
4.2. Teorema de Liénard	48

4.2.1. Interpretación del Teorema de Liénard	48
4.3. Aplicación: Oscilador de Van der Pol	48
4.4. Resultados Relevantes y Extensiones	49
4.5. Ejemplo Adicional: Oscilador de Rayleigh	50
4.6. Conclusión	50
5. Teoría de Promediación	51
5.1. Teoría de perturbaciones	51
5.2. Teoría de promediación	54
5.3. Teoría del Promedio aplicado al 16 Problema de Hilbert	57
5.4. Ecuación de Van der Pol	60
5.5. Ecuación de Rayleigh	62
5.6. Generalidades	64
6. Formulas	68
6.1. Integral de coseno y seno	68
6.2. Coordenadas polares	71

Índice de figuras

1.1. Plano fase del Oscilador de Van der Pol	8
1.2. Plano fase de la ecuación de Rayleigh	9
1.3. Plano fase del Modelo de Fitz Hugh-Nagumo	10
2.1. Nodo estable	14
2.2. Punto silla	15
2.3. Espiral estable	16
2.4. Nodo estrella estable	17
2.5. Nodo degenerado inestable	18
2.6. Centro	20
2.7. Equilibrio no aislado	21
2.8. Modelo de depredador-presa	25
2.9. Trayectorias del sistema y curvas de nivel de la función de Liapunov. Las trayectorias convergen hacia el ciclo límite en $r = 1$, mientras que las curvas de nivel muestran regiones de estabilidad.	28
3.1. Plano fase de (3.7).	33
3.2. Plano fase del sistema (3.6).	36
3.3. Plano fase del sistema (3.6).	37
3.4. Plano fase del sistema con perturbación.	39
5.1. Función vs función promediada.	56
5.2. Diferencia de la Función con la función promediada.	57
5.3. Grafico del polinomio promedio de (5.15).	61
5.4. Plano fase de (5.15).	62
5.5. Grafico del polinomio promedio de (5.15).	63
5.6. Plano fase de (5.15).	64
5.7. Grafico del polinomio promedio de (5.28).	66
5.8. Plano fase de (5.28).	67

Capítulo 1

Introducción

1.1. Problema 16 de Hilbert

En 1900, el matemático alemán David Hilbert presentó una lista de 23 problemas abiertos en el Congreso Internacional de Matemáticos en París. Estos problemas de diversas áreas de las matemáticas, se convirtieron en una guía fundamental para la investigación matemática del siglo XX y, en muchos casos, aún siguen desafiando a la comunidad científica. [1]

El **problema 16 de Hilbert** forma parte de esta lista y está dividido en dos partes principales. Ambas se centran en el análisis geométrico y topológico de curvas algebraicas y sistemas dinámicos polinomiales en el plano:

1. **Primera parte:** Clasificar las disposiciones topológicas posibles de las curvas algebraicas planas reales de grado n . Este problema está relacionado con la geometría algebraica real y la topología.
2. **Segunda parte:** Estudiar los sistemas dinámicos definidos por campos vectoriales polinomiales en el plano, y en particular, determinar el número máximo y la disposición de los ciclos límite que estos sistemas pueden tener.

La segunda parte del problema 16 de Hilbert aborda una cuestión fundamental en la teoría de sistemas dinámicos: la existencia, finitud y disposición de ciclos límite en sistemas de ecuaciones diferenciales polinomiales. Un ciclo límite es una órbita cerrada aislada en el espacio de fases, alrededor de la cual las trayectorias vecinas convergen o divergen en espiral hacia adentro o hacia afuera.

Los ciclos límite son fundamentales en la teoría de sistemas dinámicos porque representan comportamientos oscilatorios estables o inestables, aunque formulado hace más de un siglo, el problema 16 de Hilbert sigue siendo relevante hoy en día debido a sus aplicaciones en biología, ingeniería y física, donde los ciclos límite modelan fenómenos oscilatorios fundamentales [2].

Consideremos el sistema de ecuaciones en el plano polinomial de grado n :

$$x' = P(x, y), \quad y' = Q(x, y) \quad (1.1)$$

donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios de grado a lo más n , por lo que son funciones suaves. El problema consiste en responder las siguientes preguntas:

1. ¿Cuántos ciclos límite puede tener un sistema polinómico de grado n ?
2. ¿Cómo están distribuidos estos ciclos límite en el plano?

¿Sencillo? pues no, la respuesta sigue siendo desconocida para $n > 1$, a mayor grado, mayor complejidad del sistema y la estructura de sus soluciones. La dificultad radica en la naturaleza no lineal de los sistemas dinámicos y en la interacción entre las singularidades y las órbitas cerradas.

1.2. Resultados relevantes sobre la existencia de ciclos límite

Tenemos algunos resultados significativos como la conjetura de Dulac, que establece que para cualquier n , el número de ciclos límite de un sistema polinómico de grado n es finito, sin embargo esto es una conjetura y aún no se ha probado. Analicemos los resultados más relevantes conocidos hasta la fecha acerca de la existencia de ciclos límite en el contexto del problema 16 de Hilbert.

1. **Teorema de Poincaré-Bendixson** Establece las condiciones suficientes para la existencia de ciclos límite en sistemas planares. En el siguiente capítulo vamos a desarrollar este teorema y su demostración [3].
2. **Conjetura de Finitud de Dulac**

Este resultado es crucial porque establece un marco teórico para acotar el número de ciclos límite en sistemas polinomiales, aunque el valor exacto sigue siendo desconocido.

- En 1923, Henri Dulac planteó la conjetura de que el número de ciclos límite de un sistema polinómico de grado n en el plano es finito [4].
- Jean Écalle y Yulij Il'yashenko, de forma independiente en 1991, probaron la conjetura de finitud de Dulac. Demostraron que para sistemas polinómicos planos, el número de ciclos límite es finito. Este resultado es significativo porque confirma que, aunque no se conoce el número máximo exacto de ciclos límite para cada grado n , al menos se sabe que este número es finito [5, 6].

3. Sistemas Polinomiales de Bajo Grado

- Los sistemas lineales en el plano ($n = 1$) no poseen ciclos límite. Toda órbita es o bien una trayectoria hacia o desde un punto de equilibrio, o una familia de órbitas paralelas.
- Hasta ahora, el máximo número de ciclos límite conocidos en sistemas cuadráticos es 4, pero no se ha probado que este sea el número máximo posible. Nikolai Bautin en 1939 analizó las bifurcaciones en sistemas cuadráticos y encontró condiciones para la aparición de ciclos límite pequeños alrededor de puntos singulares.

4. Teoría de Bifurcaciones y Ciclos Límite

La teoría de bifurcaciones ha sido una herramienta clave en el estudio de los ciclos límite.

- **Bifurcación de Hopf:** Describe cómo un ciclo límite puede emerger o desaparecer al variar un parámetro en el sistema.
- **Ciclos Límite Múltiples:** Investigaciones han mostrado que es posible tener múltiples ciclos límite que rodean puntos singulares o áreas sin puntos singulares.

5. Métodos Analíticos y Geométricos

- **Función de Dulac** Dulac introdujo una función auxiliar (ahora conocida como función de Dulac) para estudiar la no existencia de ciclos límite en ciertas regiones. Este resultado es crucial porque establece un marco teórico para acotar el número de ciclos límite en sistemas polinomiales, aunque el valor exacto sigue siendo desconocido.
- **Teoría de Hilbert-Poincaré** Variedades Algebraicas: Se utilizan herramientas de geometría algebraica para entender las propiedades globales de los sistemas polinómicos.
- **Análisis de Singularidades:** El estudio de puntos críticos y sus tipos es esencial para comprender la dinámica local y global.

6. Métodos de Perturbación

Se han utilizado métodos de perturbación y teoría de promediación para estudiar la aparición de ciclos límite en sistemas cercanos a sistemas integrables.

7. Teoría de Foliaciones

El estudio de foliaciones en el plano ha proporcionado nuevas perspectivas sobre la estructura de las órbitas y la posible existencia de ciclos límite.

1.3. Problemas clásicos de ciclos límite

Los sistemas dinámicos ofrecen la posibilidad de explorar comportamientos oscilatorios que son inherentes a muchos procesos biológicos, químicos y físicos. A continuación, se presentan varios ejemplos donde los ciclos límite desempeñan un papel central.

■ Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol es un ejemplo clásico de un sistema no lineal que exhibe ciclos límite. Originalmente desarrollado para modelar circuitos eléctricos con tubos de vacío, este sistema también describe fenómenos auto-oscilatorios en ingeniería y biología [7].

$$x'' - \mu(1 - x^2)x' + x = 0 \quad (1.2)$$

donde μ es el coeficiente de amortiguamiento. A medida que μ aumenta, el sistema muestra un ciclo límite estable que corresponde a una oscilación sostenida. Este comportamiento es crucial para entender dispositivos electrónicos oscilatorios y ciertos ritmos biológicos.

El oscilador de Van der Pol es un caso particular de un sistema polinomial de grado 2 (del Problema 16° de Hilbert), y su estudio proporciona intuiciones sobre la existencia y distribución de ciclos límite en sistemas más generales.

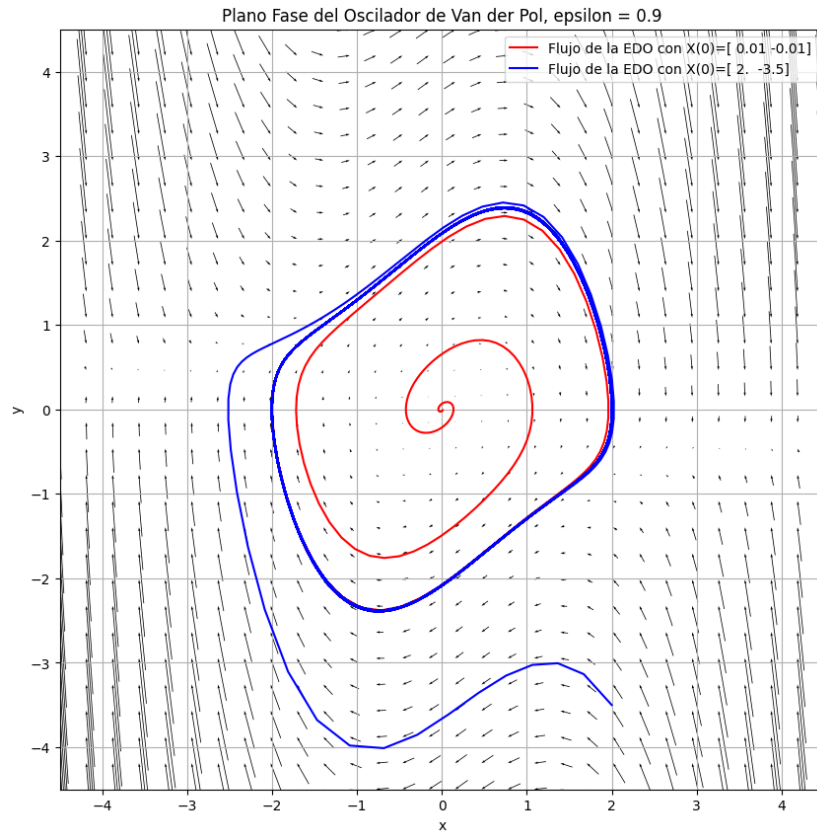


Figura 1.1: Plano fase del Oscilador de Van der Pol

■ Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh modela el comportamiento de ciertos sistemas mecánicos y fluidos sometidos a fuerzas periódicas. Es similar al oscilador de Van der Pol [8].

$$x'' + x = \epsilon (1 - x'^2) x' \quad (1.3)$$

donde ϵ controla la intensidad de la fuerza. Los ciclos límite en este modelo describen el fenómeno de resonancia mecánica y son fundamentales para el diseño de sistemas que requieren estabilidad en las oscilaciones, como los amortiguadores en vehículos.

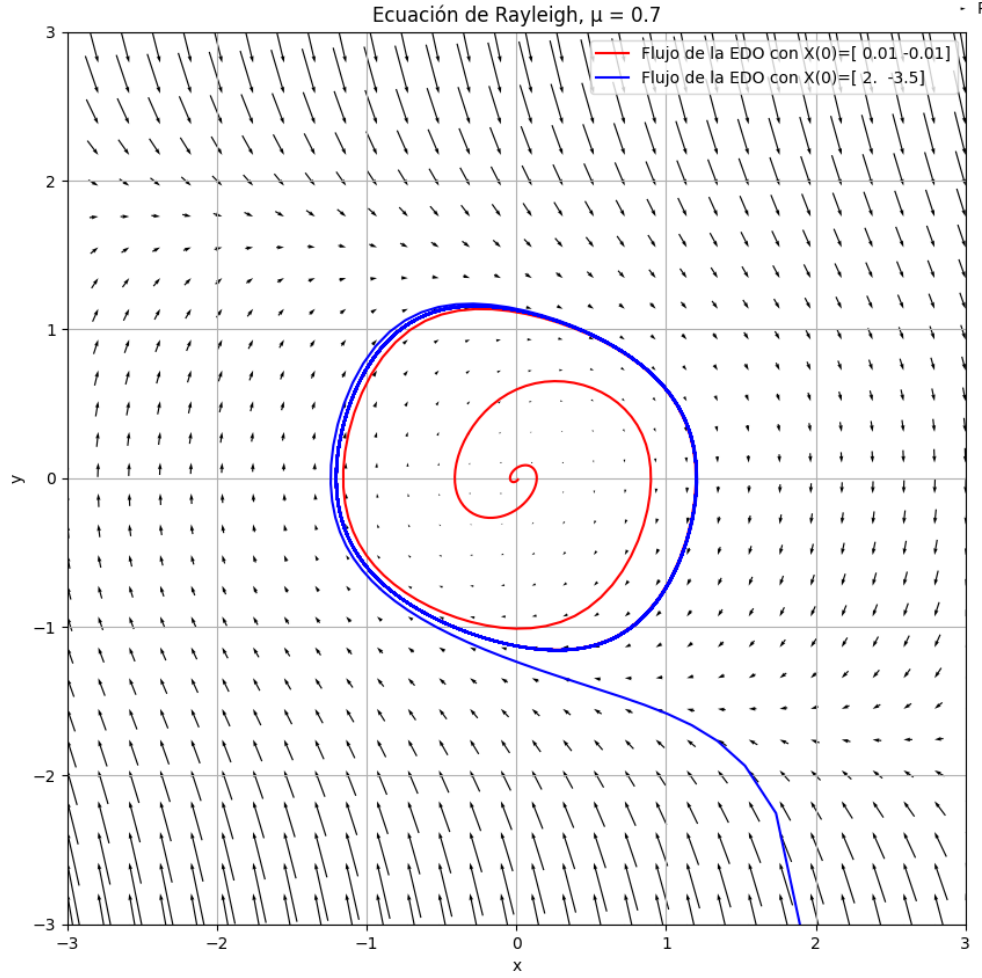


Figura 1.2: Plano fase de la ecuación de Rayleigh

■ Modelo de Fitz Hugh-Nagumo

Este modelo es una simplificación del modelo de Hodgkin-Huxley y se utiliza para describir la activación y desactivación de las neuronas [9, 10].

$$\begin{aligned} v' &= v - \frac{v^3}{3} - w + I \\ w' &= \epsilon(v + a - bw) \end{aligned} \tag{1.4}$$

donde v representa el potencial de membrana, w es una variable de recuperación, e I es un término de corriente externa. Los ciclos límite en este sistema modelan los potenciales de acción neuronal, esenciales para entender el procesamiento de la información en el cerebro.

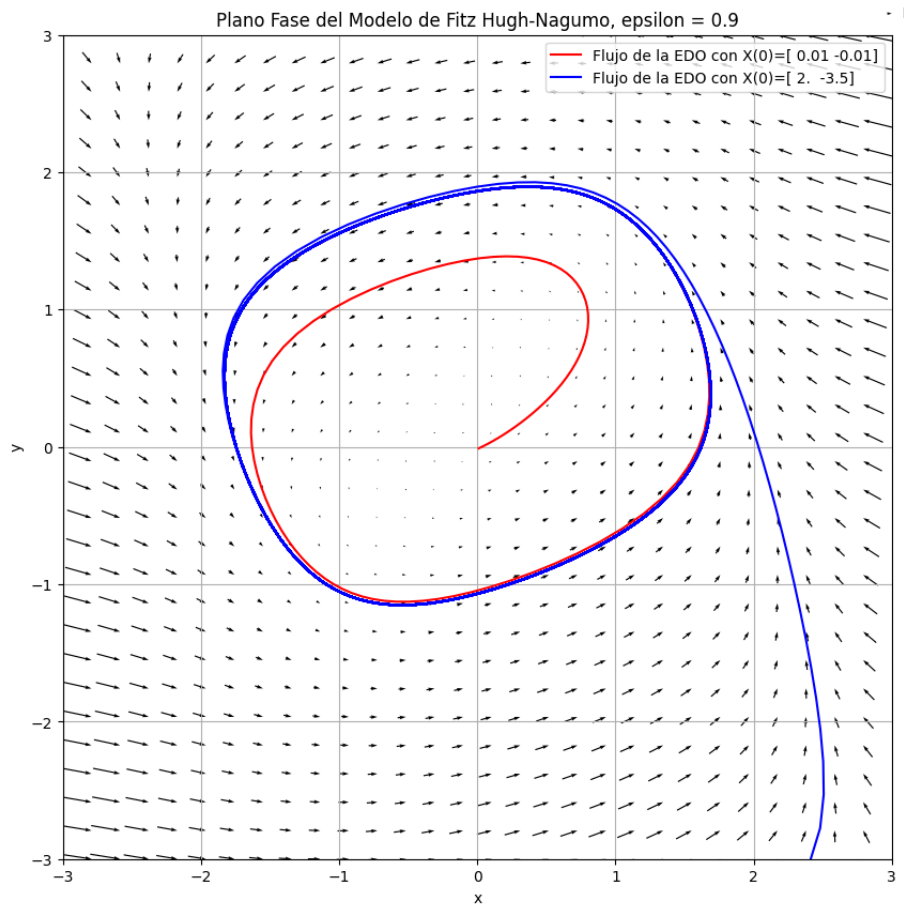


Figura 1.3: Plano fase del Modelo de Fitz Hugh-Nagumo

■ Reacciones Químicas Oscilatorias

Un ejemplo destacado es la reacción de Belousov-Zhabotinsky, que es un tipo de reacción química que muestra oscilaciones temporales en la concentración de sus reactivos. Aunque su modelado exacto requiere ecuaciones más complejas, sistemas simplificados que muestran ciclos límite pueden ayudar a comprender la dinámica subyacente de estas reacciones oscilatorias [11].

Más adelante vamos a desarrollar estos modelos a profundidad.

1.4. Aplicaciones modernas de los ciclos límite

El estudio de los ciclos límite tiene una amplia gama de aplicaciones en diversas disciplinas científicas e ingenieriles, destacando su relevancia tanto en contextos teóricos como prácticos. Estas son algunas de las áreas más significativas donde los ciclos límite han demostrado ser herramientas fundamentales para modelar y comprender fenómenos oscilatorios y dinámicos.

1. Biología y Medicina

En biología, los ciclos límite son esenciales para describir sistemas dinámicos que exhiben comportamientos periódicos o cuasiperiódicos. En fisiología, los ciclos límite permiten modelar ritmos circadianos, regulando procesos biológicos como el ciclo sueño-vigilia y el metabolismo. En neurociencia, estos conceptos explican patrones oscilatorios en redes neuronales, incluyendo potenciales de acción y trastornos como la epilepsia o el Parkinson. Además, en cardiología, los ciclos límite ayudan a analizar arritmias cardíacas y otros fenómenos oscilatorios en el sistema cardiovascular [12].

2. Ingeniería

En ingeniería, los ciclos límite encuentran aplicaciones en sistemas no lineales que requieren control preciso y estabilidad. Por ejemplo, en electrónica, los osciladores de Van der Pol son fundamentales para generar señales periódicas utilizadas en telecomunicaciones y relojes digitales. En robótica, los ciclos límite modelan comportamientos cíclicos, como caminar, nadar o volar, permitiendo el diseño de robots autónomos con movimientos eficientes. En el ámbito aeroespacial, estos conceptos son útiles para analizar vibraciones autoinducidas en turbinas o alas de aviones, así como para diseñar mecanismos de control de vuelo. También en energías renovables, los ciclos límite contribuyen a la estabilidad de redes eléctricas con fuentes intermitentes, como la sincronización de inversores solares [13].

3. Física, Química y Clima

En física, los ciclos límite describen fenómenos oscilatorios en sistemas mecánicos no lineales, como péndulos forzados o sistemas con fricción. En óptica no lineal, estos conceptos modelan oscilaciones en la intensidad de luz emitida por láseres, mientras que en dinámica de fluidos, representan estados oscilatorios estables en flujos turbulentos o caóticos. En ciencias del clima, los ciclos límite son útiles para estudiar sistemas como El Niño y La Niña,

que exhiben oscilaciones cuasiperiódicas. Además, en plasmas y fusión nuclear, modelos basados en ciclos límite describen el transporte de partículas y energía en reactores como los Tokamak [14].

4. Economía y Ciencias Sociales

En economía, los ciclos límite proporcionan una base para modelar fluctuaciones cíclicas en variables macroeconómicas, como el ciclo económico de expansión y recesión. En ciencias sociales, estos conceptos se aplican al análisis de dinámicas colectivas, como la propagación de enfermedades o la evolución de opiniones públicas en redes sociales. Los ciclos límite también son relevantes en el estudio de sistemas complejos, donde patrones recurrentes de comportamiento emergen de interacciones locales [15].

Vamos a desarrollar algunos de estas aplicaciones en capítulos posteriores, pero antes, vamos a desarrollar la teoría de los ciclos límite en un contexto más general. En los siguientes capítulos, utilizaremos herramientas como el teorema de Poincaré-Bendixson y métodos de promediación para analizar la existencia y distribución de ciclos límite en sistemas polinomiales de grado n , contribuyendo así a resolver aspectos abiertos del problema 16 de Hilbert.

Capítulo 2

Conceptos Fundamentales

2.1. Puntos de Equilibrio

En el estudio de sistemas dinámicos, los **puntos de equilibrio** desempeñan un papel fundamental como estados en los que las variables del sistema permanecen constantes. Formalmente, para un sistema lineal en el plano de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = A\mathbf{x}, \quad \text{donde } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ y } A \text{ es una matriz } 2 \times 2,$$

un punto \mathbf{x}_0 es un punto de equilibrio si satisface $A\mathbf{x}_0 = 0$. Estos puntos representan estados estacionarios del sistema, y su clasificación nos permite entender el comportamiento global del sistema dinámico.

En esta sección, exploraremos los diferentes tipos de puntos de equilibrio que pueden surgir en sistemas lineales, enfocándonos en su clasificación según los valores propios (eigenvalores) de la matriz A . Además, analizaremos sus implicaciones geométricas y dinámicas, proporcionando ejemplos concretos para ilustrar cada caso.

2.1.1. Puntos de Equilibrio Robustos a Perturbaciones

Los puntos de equilibrio robustos son aquellos cuyo comportamiento cualitativo permanece inalterado bajo pequeñas perturbaciones en el sistema. Esta robustez los hace particularmente interesantes desde el punto de vista de la estabilidad y la predictibilidad.

Nodos

Definición 2.1.1. Un **nodo** ocurre cuando los eigenvalores λ_1 y λ_2 de la matriz A son reales y tienen el mismo signo. Si ambos son negativos, el nodo es estable;

si ambos son positivos, es inestable.

En un nodo, las trayectorias convergen o divergen hacia el origen dependiendo del signo de los eigenvalores. Las soluciones tienden a alinearse con la dirección asociada al eigenvalor de mayor magnitud, conocida como la "dirección más rápida". Esta propiedad refleja cómo el sistema prioriza ciertas direcciones en su evolución temporal.

Ejemplo 2.1.2. Consideremos el sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores son $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -1$, ambos negativos. Este es un **nodo estable**. Geométricamente, todas las trayectorias convergen hacia el origen, siendo la dirección del eje x la más rápida debido al mayor valor absoluto de λ_1 .

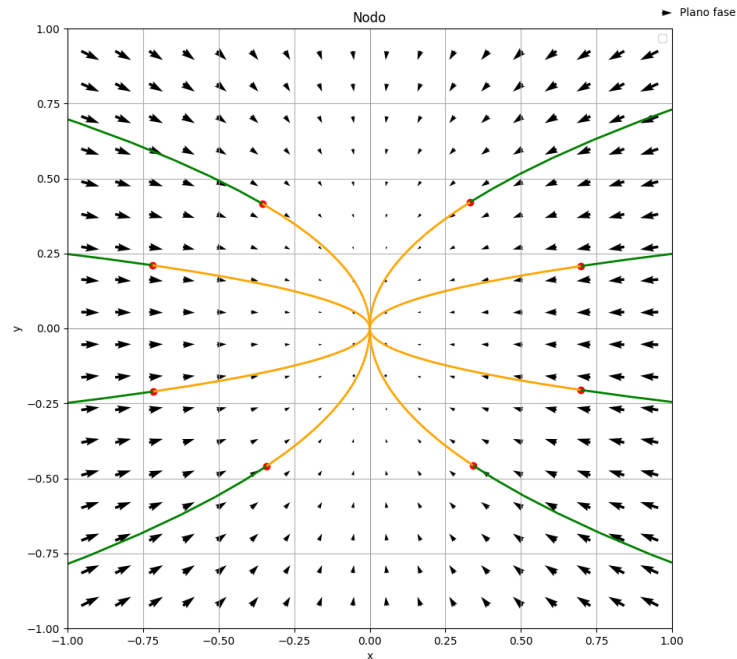


Figura 2.1: Nodo estable

El término "nodo" sugiere un punto central al que todas las trayectorias convergen o desde el cual divergen, similar a cómo los nodos en una red conectan múltiples caminos. Esta analogía resulta útil para visualizar el comportamiento de estos sistemas.

Punto Silla

Definición 2.1.3. Un **punto silla** ocurre cuando los eigenvalores λ_1 y λ_2 son reales y tienen signos opuestos ($\lambda_1 > 0$ y $\lambda_2 < 0$).

El nombre "punto silla" proviene de la analogía con una silla de montar, donde hay direcciones estables (las patas de la silla) y direcciones inestables (el respaldo). Las trayectorias se acercan inicialmente siguiendo la dirección del eigenvalor negativo y luego divergen siguiendo la dirección del eigenvalor positivo.

Ejemplo 2.1.4. Considere el sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$. Este es un **punto silla**. Las trayectorias se comportan como líneas hiperbólicas que convergen hacia el origen en una dirección y divergen en otra.

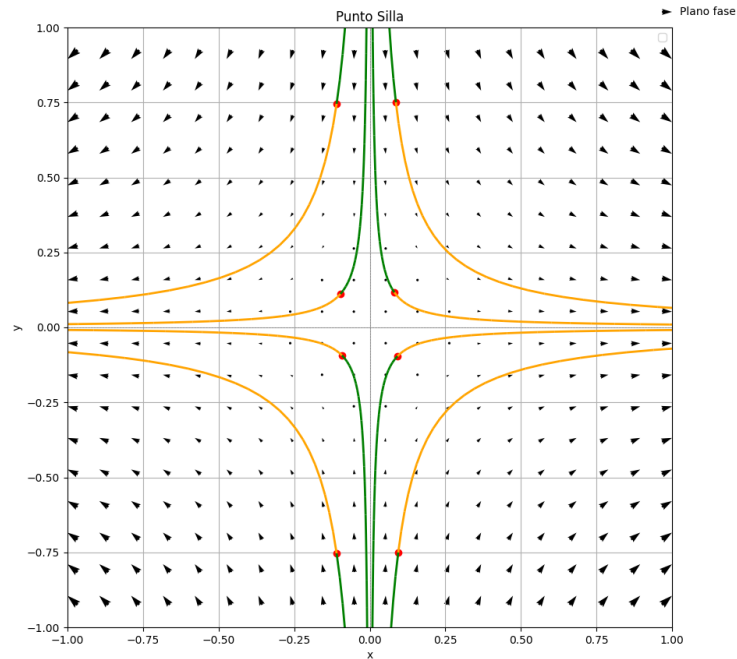


Figura 2.2: Punto silla

El punto silla es único entre los puntos de equilibrio robustos porque no es ni completamente estable ni completamente inestable. Este comportamiento dual lo convierte en un objeto de estudio fascinante en sistemas dinámicos.

Espirales

Definición 2.1.5. *Un **espiral** ocurre cuando los eigenvalores λ_1 y λ_2 son complejos conjugados con parte real distinta de cero. Si la parte real es negativa, el espiral es estable; si es positiva, es inestable.*

En un espiral, las trayectorias giran alrededor del origen mientras convergen o divergen. La frecuencia de rotación está determinada por la parte imaginaria de los eigenvalores, mientras que la parte real dicta la estabilidad o inestabilidad del sistema.

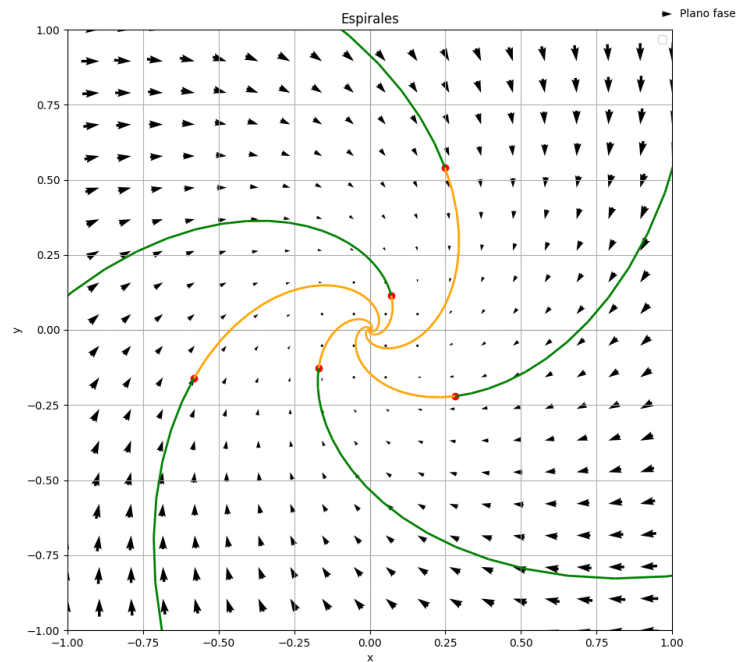


Figura 2.3: Espiral estable

Ejemplo 2.1.6. *Considere el sistema:*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Los eigenvalores son $\lambda_{1,2} = -1 \pm i$. Este es un **espiral estable**. Las trayectorias forman espirales que convergen hacia el origen.

La belleza de los espirales radica en su naturaleza dual: combinan rotación y convergencia/divergencia en un solo movimiento. Esto los hace especialmente útiles para modelar fenómenos oscilatorios amortiguados, como un péndulo con fricción.

2.1.2. Puntos de Equilibrio Frágiles

Los puntos de equilibrio frágiles son aquellos cuyo comportamiento puede cambiar drásticamente bajo pequeñas perturbaciones. Estos casos son menos comunes pero igualmente importantes para comprender la estructura de los sistemas dinámicos.

Nodo Estrella

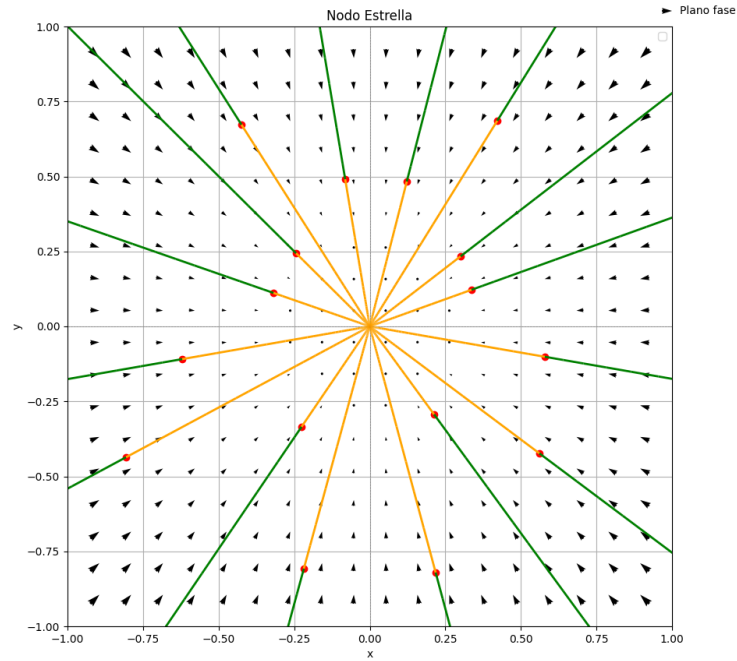


Figura 2.4: Nodo estrella estable

Definición 2.1.7. Un **nodo estrella** ocurre cuando los eigenvalores λ_1 y λ_2 son iguales y distintos de cero. En este caso, todo \mathbb{R}^2 es espacio propio.

En un nodo estrella, las trayectorias convergen o divergen radialmente desde el origen. Es estable si $\lambda < 0$ e inestable si $\lambda > 0$.

Ejemplo 2.1.8. Considere el sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Este es un **nodo estrella estable**. Todas las trayectorias convergen radialmente hacia el origen.

Nodo Degenerado

Definición 2.1.9. Un **nodo degenerado** ocurre cuando solo existe un vector propio asociado a un único eigenvalor.

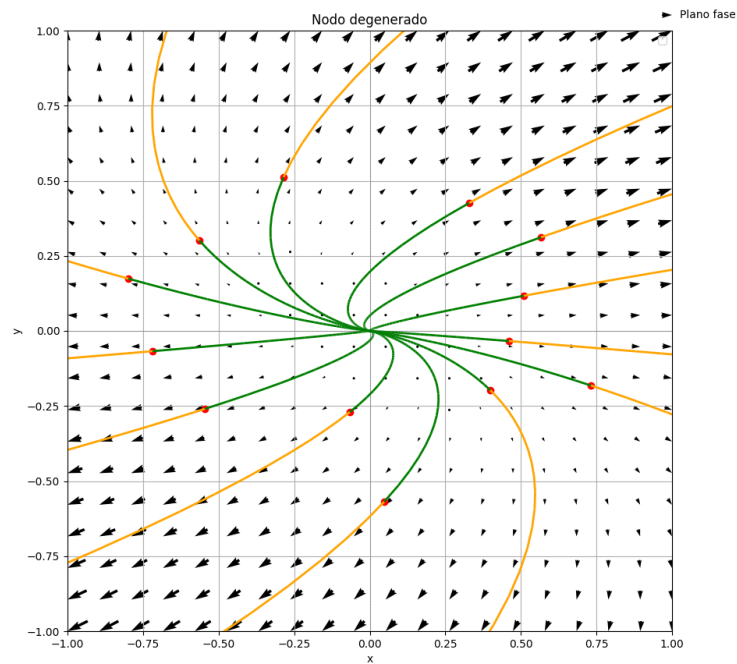


Figura 2.5: Nodo degenerado inestable

En un nodo degenerado, las trayectorias convergen o divergen tangencialmente al único vector propio. Es estable si el eigenvalor es negativo e inestable si es positivo.

Ejemplo 2.1.10. *Considere el sistema:*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*Este es un **nodo degenerado inestable**.*

El nodo degenerado es un ejemplo de cómo la falta de vectores propios suficientes puede complicar el análisis del sistema. Este caso requiere técnicas adicionales, como la forma canónica de Jordan, para una descripción completa.

2.1.3. Equilibrios No Hiperbólicos

Los equilibrios no hiperbólicos son aquellos en los que al menos un eigenvalor tiene parte real igual a cero. Estos puntos son críticos porque su comportamiento puede ser altamente sensible a perturbaciones.

Centros

Definición 2.1.11. *Un **centro** ocurre cuando los eigenvalores son puramente imaginarios ($\lambda_{1,2} = \pm i\beta$).*

En un centro, las trayectorias forman órbitas cerradas alrededor del origen, sin converger ni divergir. Este comportamiento es típico de sistemas conservativos, como un péndulo ideal sin fricción.

Ejemplo 2.1.12. *Considere el sistema:*

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

*Este es un **centro**. Las trayectorias forman círculos concéntricos alrededor del origen.*

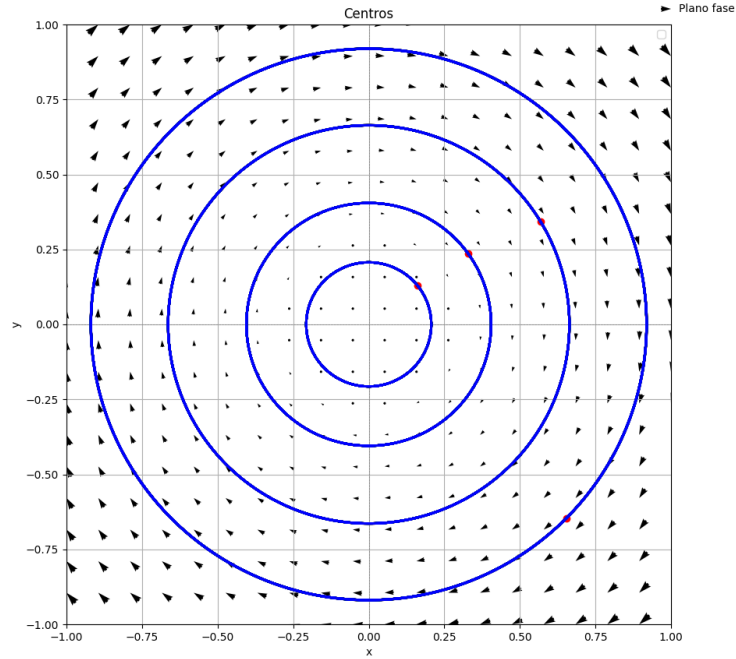


Figura 2.6: Centro

No Aislados

Definición 2.1.13. Un **equilibrio no aislado** ocurre cuando un eigenvalor es cero y el otro es distinto de cero.

En este caso, las trayectorias pueden colapsar en una línea de equilibrios, lo que refleja la presencia de un subespacio invariante.

Ejemplo 2.1.14. Considere el sistema:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Este es un **equilibrio no aislado**. Las trayectorias convergen hacia el eje x , que actúa como una línea de equilibrios.

La clasificación de puntos de equilibrio no solo nos permite entender el comportamiento local de un sistema dinámico, sino también predecir su evolución global. Cada tipo de equilibrio tiene su propia "personalidad", y su estudio revela la riqueza y complejidad de los sistemas dinámicos lineales.

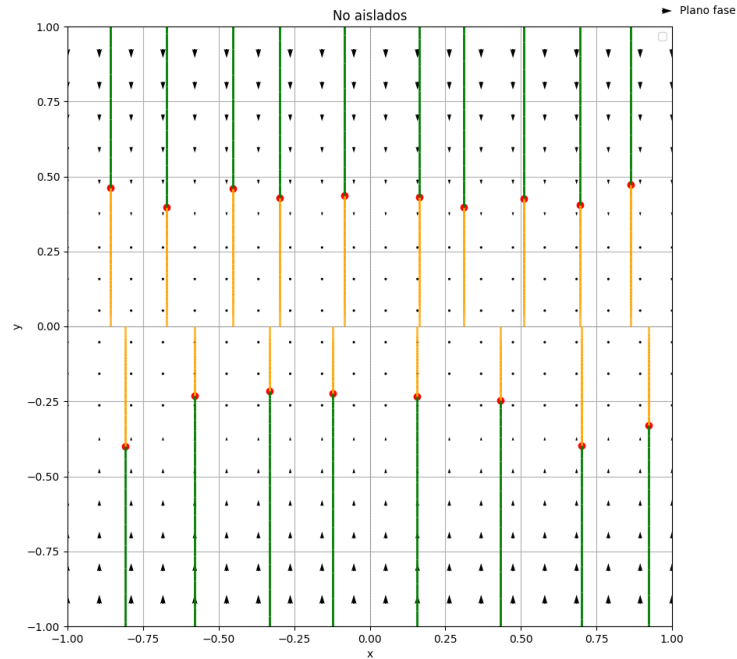


Figura 2.7: Equilibrio no aislado

2.2. Teoría de la Linealización de Sistemas de Ecuaciones Diferenciales

En la sección anterior, exploramos los diferentes tipos de puntos de equilibrio en sistemas lineales y su clasificación según los eigenvalores de la matriz asociada. Aprendimos cómo los nodos, puntos silla, espirales y centros describen comportamientos locales únicos, cada uno con su propia "personalidad". Sin embargo, muchos fenómenos del mundo real están modelados por sistemas no lineales, cuya complejidad puede dificultar un análisis directo. En esta sección, profundizaremos en un método clave para estudiar estos sistemas: la **linealización**.

La idea central detrás de la linealización es aprovechar las herramientas desarrolladas para sistemas lineales y aplicarlas a sistemas no lineales cerca de puntos de equilibrio. Como vimos anteriormente, los puntos de equilibrio son estados donde el sistema "se detiene", y su estabilidad determina si el sistema regresa al equilibrio o se aleja tras pequeñas perturbaciones. La linealización nos permite aproximar el comportamiento local de un sistema no lineal mediante un sistema lineal asociado,

simplificando significativamente el análisis.

2.2.1. De Lo Lineal a Lo No Lineal: Una Transición Natural

Recordemos que, en sistemas lineales, el comportamiento global está completamente determinado por los eigenvalores de la matriz del sistema. Por ejemplo:

- Un **nodo estable** indica que todas las trayectorias convergen al origen.
- Un **punto silla** revela direcciones estables e inestables.
- Un **centro** describe órbitas cerradas sin convergencia ni divergencia.

Sin embargo, en sistemas no lineales, estas propiedades pueden variar dependiendo de la región del espacio fase que estemos analizando. Aquí es donde entra la linealización: al enfocarnos en un entorno pequeño alrededor de un punto de equilibrio, podemos aproximar el sistema no lineal por uno lineal que capture su comportamiento local.

2.2.2. El Proceso de Linealización: ¿Cómo Funciona?

Consideremos un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) en \mathbb{R}^n :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.1)$$

donde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ representa el vector de estado, y $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función vectorial continua y diferenciable al menos una vez en un entorno del punto de equilibrio. Recordemos, como se discutió en la sección anterior, que un **punto de equilibrio** \mathbf{x}_0 satisface:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}. \quad (2.2)$$

Para analizar el comportamiento del sistema cerca de \mathbf{x}_0 , utilizamos la **expansión en serie de Taylor** de $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ alrededor de \mathbf{x}_0 . Esta aproximación descompone $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ en términos lineales y residuales:

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0) + D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \mathbf{R}(\mathbf{x}), \quad (2.3)$$

donde: - $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ es la **matriz Jacobiana** evaluada en \mathbf{x}_0 , cuyos elementos son $[D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)]_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right|_{\mathbf{x}_0}$, - $\mathbf{R}(\mathbf{x})$ es el término de residuo que contiene las partes de orden superior.

Como $\mathbf{f}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, la aproximación lineal del sistema cerca de \mathbf{x}_0 es:

$$\dot{\mathbf{x}} = D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0). \quad (2.4)$$

Esta ecuación describe cómo el sistema evoluciona cerca del punto de equilibrio. Es como si estuviéramos mirando el sistema a través de una lupa centrada en \mathbf{x}_0 , ignorando los términos de orden superior que son despreciables en un entorno suficientemente pequeño.

2.2.3. Eigenvalores y Estabilidad

Al igual que en sistemas lineales, la matriz Jacobiana $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ juega un papel crucial en la linealización. Sus eigenvalores determinan la estabilidad local del punto de equilibrio \mathbf{x}_0 : - Si todos los eigenvalores tienen parte real negativa ($\text{Re}(\lambda_i) < 0$), el punto de equilibrio es **asintóticamente estable**. Las trayectorias cercanas convergen al equilibrio, similar a un nodo estable. - Si alguno de los eigenvalores tiene parte real positiva ($\text{Re}(\lambda_i) > 0$), el punto de equilibrio es **inestable**. Las trayectorias cercanas se alejan del equilibrio, como en un punto silla o un nodo inestable. - Si todos los eigenvalores tienen parte real no positiva y al menos uno con parte real cero, el análisis lineal no es concluyente, y debemos recurrir a métodos más avanzados.

Estos resultados refuerzan lo que aprendimos en la sección anterior sobre la importancia de los eigenvalores en la clasificación de puntos de equilibrio. La diferencia clave aquí es que estamos aplicando estas ideas a sistemas no lineales, donde la linealización solo proporciona información local.

2.2.4. Profundizando en la Interpretación Geométrica

La matriz Jacobiana $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ actúa como una "brújula" que nos indica la dirección y magnitud del cambio en cada variable del sistema cerca del punto de equilibrio. Por ejemplo:

- Si los eigenvalores tienen parte real negativa, el sistema tiende a regresar al equilibrio, como un resorte que se comprime y luego vuelve a su posición original.
- Si los eigenvalores tienen parte real positiva, el sistema se aleja del equilibrio, como una bola rodando cuesta abajo.

Este comportamiento es análogo a lo que observamos en sistemas lineales, pero ahora lo estamos aplicando a sistemas no lineales en un entorno local.

2.2.5. Ejemplo. Modelo de Depredador-Presa

Para ilustrar el proceso de linealización, consideremos nuevamente el modelo de depredador-presa discutido en la sección anterior:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1-x) - xy, \\ \dot{y} = y(-\alpha + x), \end{cases} \quad (2.5)$$

donde x representa la población de presas, y la población de depredadores, y $\alpha > 0$ es un parámetro que controla la tasa de crecimiento de los depredadores.

Puntos de Equilibrio

Recordemos que los puntos de equilibrio son:

- $E_1 = (0, 0)$: Extinción de ambas especies.
- $E_2 = (1, 0)$: Las presas alcanzan su capacidad máxima sin depredadores.
- $E_3 = (\alpha, 0)$ si $0 < \alpha < 1$: Coexistencia de presas y depredadores.

Linealización en $E_2 = (1, 0)$

Calculamos la matriz Jacobiana:

$$\mathbf{A} = D\mathbf{f}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - 2x - y & -x \\ y & -\alpha + x \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Evaluamos en $E_2 = (1, 0)$:

$$\mathbf{A}|_{(1,0)} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 - \alpha \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Los eigenvalores son las soluciones de:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \quad (2.8)$$

Resolviendo, obtenemos:

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 - \alpha. \quad (2.9)$$

La estabilidad del punto de equilibrio E_2 depende del valor de α :

- Si $\alpha < 1$, entonces $\lambda_2 > 0$, y el punto es un **punto silla** (inestable). Las perturbaciones pueden llevar al sistema hacia otros estados.

- Si $\alpha > 1$, entonces $\lambda_2 < 0$, y el punto es un **nodo estable**. El sistema tiende a regresar al equilibrio.

Este análisis refuerza lo que aprendimos en la sección anterior sobre la importancia de los puntos silla y nodos en la dinámica de sistemas.

La linealización es una herramienta poderosa que conecta los conceptos de puntos de equilibrio y estabilidad de sistemas lineales con el análisis de sistemas no lineales. Al aproximar el comportamiento local de un sistema no lineal mediante su linealización, podemos aplicar las mismas herramientas y técnicas que usamos en la sección anterior, como la clasificación de puntos de equilibrio basada en eigenvalores.

Este enfoque no solo simplifica el análisis, sino que también brinda intuiciones valiosas sobre cómo interactúan las variables en sistemas complejos. Desde modelos ecológicos hasta sistemas mecánicos, la linealización sigue siendo una piedra angular en el estudio de sistemas dinámicos, permitiéndonos comprender tanto el comportamiento local como sus implicaciones globales.

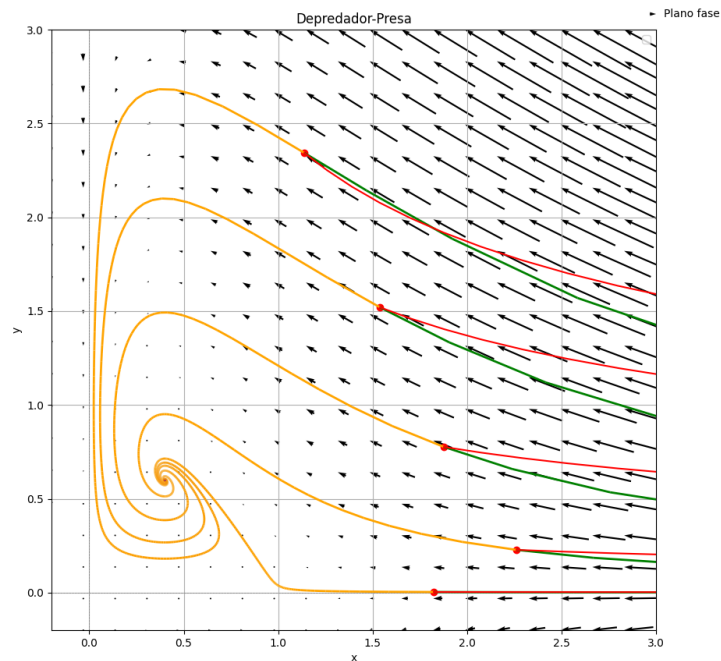


Figura 2.8: Modelo de depredador-presa

2.3. El Teorema de Liapunov y su Aplicación en la Determinación de Regiones de Estabilidad

El estudio de la estabilidad en sistemas dinámicos es fundamental para comprender el comportamiento a largo plazo de las soluciones de ecuaciones diferenciales. En este contexto, el **teorema de Liapunov** proporciona un marco teórico poderoso para analizar la estabilidad sin necesidad de resolver explícitamente las ecuaciones. Este método se basa en la construcción de funciones auxiliares, conocidas como **funciones de Liapunov**, que actúan como "medidores de energía" del sistema.

La idea intuitiva detrás de este teorema es simple: si podemos encontrar una función que decrezca a lo largo de las trayectorias del sistema (como la energía en un sistema físico disipativo), entonces podemos inferir que las trayectorias convergen hacia un punto de equilibrio o hacia una región estable.

Antes de enunciar el teorema, definimos algunos conceptos clave:

Definición 2.3.1 (Función Definida Positiva). Sea $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Decimos que V es **definida positiva** en un entorno del origen si:

1. $V(\mathbf{0}) = 0$,
2. $V(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ en dicho entorno.

Definición 2.3.2 (Derivada Temporal de V). Dado un sistema dinámico $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, la derivada temporal de V a lo largo de las trayectorias del sistema está dada por:

$$\dot{V}(\mathbf{x}) = \nabla V(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

donde ∇V denota el gradiente de V .

El siguiente teorema es uno de los resultados centrales en la teoría de estabilidad:

Teorema 2.3.3 (Teorema de Liapunov). Sea $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Supongamos que existe una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

1. V es definida positiva en un entorno del origen,
2. $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ en dicho entorno.

Entonces, el origen es estable. Si además $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ para todo $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces el origen es asintóticamente estable.

Para entender mejor el teorema, pensemos en $V(\mathbf{x})$ como una **superficie** en el espacio de estados:

- Si $V(\mathbf{x})$ es definida positiva, entonces esta superficie tiene un mínimo en el origen, similar a una "cuenca" que atrae las trayectorias.
- La condición $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ implica que las trayectorias no pueden escapar esta superficie; más bien, descienden hacia el origen.

Podemos imaginar $V(\mathbf{x})$ como la energía potencial de un sistema físico. Si la energía siempre disminuye ($\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$), el sistema eventualmente alcanza un estado de mínima energía (el equilibrio).

Construcción de una Función de Liapunov

Consideremos el sistema no lineal en coordenadas polares dado por:

$$\dot{r} = r(1 - r^2 + \varepsilon \cos(\theta)), \quad \dot{\theta} = 1,$$

donde $\varepsilon > 0$ es un parámetro pequeño.

Proponemos la función candidata:

$$V(r) = \frac{1}{2}(r^2 - 1)^2.$$

Esta función es definida positiva para $r \neq 1$ y tiene un mínimo en $r = 1$. Calculamos su derivada temporal:

$$\dot{V}(r) = \frac{\partial V}{\partial r} \dot{r} = 2(r^2 - 1)r \cdot r(1 - r^2 + \varepsilon \cos(\theta)).$$

Simplificando:

$$\dot{V}(r) = 2r^2(r^2 - 1)(1 - r^2 + \varepsilon \cos(\theta)).$$

Análisis de Estabilidad

El signo de $\dot{V}(r)$ depende del término $(1 - r^2 + \varepsilon \cos(\theta))$. Analizamos los casos principales:

- Para $r < 1$, tenemos $r^2 - 1 < 0$, y si ε es suficientemente pequeño, $\dot{V}(r) < 0$. Esto implica que las trayectorias dentro del ciclo límite ($r < 1$) son atraídas hacia él.
- Para $r > 1$, tenemos $r^2 - 1 > 0$, y nuevamente $\dot{V}(r) < 0$. Esto sugiere que las trayectorias fuera del ciclo límite ($r > 1$) también convergen hacia él.

Por lo tanto, $V(r)$ decrece en ambos casos, lo que indica que las trayectorias son confinadas hacia la región donde $r \approx 1$.

La Figura 2.9 muestra las trayectorias del sistema junto con las curvas de nivel de la función de Liapunov. Las curvas de nivel representan regiones de estabilidad asociadas a diferentes valores de $V(r)$. Observamos que:

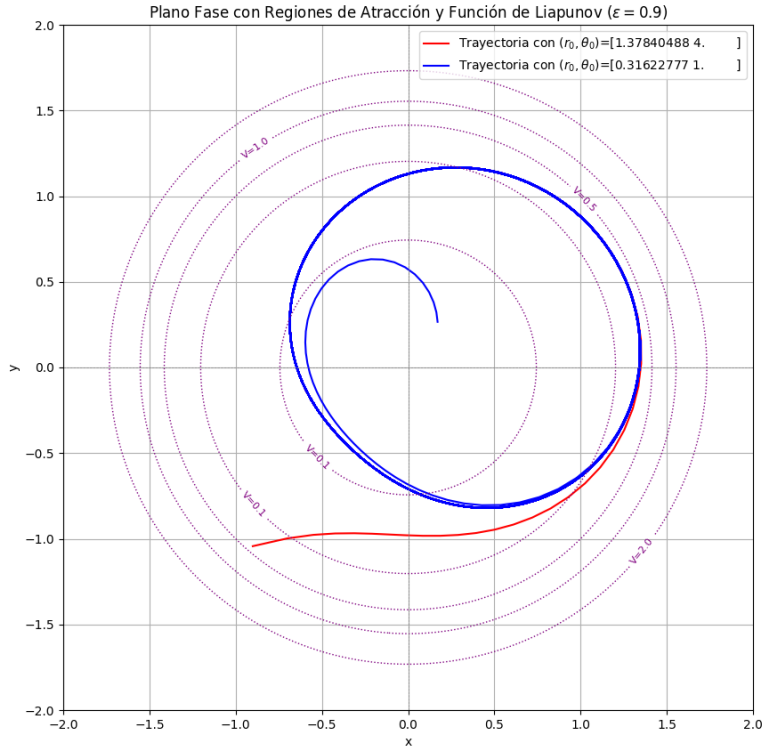


Figura 2.9: Trayectorias del sistema y curvas de nivel de la función de Liapunov. Las trayectorias convergen hacia el ciclo límite en $r = 1$, mientras que las curvas de nivel muestran regiones de estabilidad.

- Las trayectorias iniciadas dentro del ciclo límite ($r < 1$) convergen hacia él, atravesando las curvas de nivel de $V(r)$ en dirección decreciente.
- Las trayectorias iniciadas fuera del ciclo límite ($r > 1$) también convergen hacia él, siguiendo el mismo comportamiento.
- El ciclo límite ($r = 1$) actúa como un "atractor", confinando todas las trayectorias en su vecindad.

Este análisis ilustra cómo la función de Liapunov permite identificar cuantitativamente la región de atracción del ciclo límite.

2.3.1. Relación con el Teorema de Poincaré-Bendixson

El teorema de Liapunov complementa al teorema de Poincaré-Bendixson al proporcionar herramientas cuantitativas para analizar la estabilidad de ciclos límites. Mientras que Poincaré-Bendixson garantiza la existencia de ciclos límites bajo ciertas condiciones topológicas, el teorema de Liapunov ayuda a caracterizar explícitamente las regiones de atracción asociadas a dichos ciclos.

Ejercicio Propuesto

Demuestra que la función $V(x, y) = x^2 + y^2$ es una función de Liapunov para el sistema lineal:

$$\dot{x} = -x + y, \quad \dot{y} = -x - y.$$

Interpreta geoméricamente el resultado y grafica las trayectorias en el plano fase.

Capítulo 3

Teoría de ciclos límite

En el estudio cualitativo de sistemas dinámicos no lineales, los *ciclos límite* juegan un papel fundamental al describir comportamientos periódicos estables o inestables que no dependen de las condiciones iniciales específicas del sistema. Estos ciclos representan soluciones cerradas aisladas en el plano fase, lo que los convierte en objetos clave para entender fenómenos oscilatorios en diversas áreas de aplicación.

El análisis de la existencia y estabilidad de ciclos límite está íntimamente ligado al famoso *Teorema de Poincaré-Bendixson*, uno de los resultados más importantes en la teoría de sistemas dinámicos planos. Este teorema proporciona las condiciones bajo las cuales las trayectorias de un sistema bidimensional acotado convergen hacia un conjunto límite, ya sea un punto de equilibrio o una órbita periódica. Su relevancia radica en que permite descartar comportamientos caóticos en sistemas planos y ofrece herramientas rigurosas para identificar ciclos límite.

En este capítulo, nos enfocamos en el desarrollo teórico de los ciclos límite y presentamos el Teorema de Poincaré-Bendixson como una herramienta central para su estudio.

3.1. Sistemas dinámicos

Dado un sistema autónomo de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}x(t)' &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0\end{aligned}\tag{3.1}$$

con $F \in C^1(D)$ y $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, sabemos que este tiene una única solución $\varphi^t(x_0) = x(t)$ para cada condición inicial $x_0 \in D$, para todo $t \in I(x_0)$, máximo intervalo de existencia de la solución. La solución $\varphi^t(x_0)$ se llama flujo del

sistema y satisface que $\varphi^0(x_0) = x_0$ y $\varphi^t(\varphi^s(x_0)) = \varphi^{t+s}(x_0)$ para todo $x_0 \in D$ y $t, s \in I(x_0)$. [3].

Vamos a definir los sistemas dinámicos, así mismo vamos a abordar un teorema que nos permite extender en máximo intervalo de existencia de la solución.

Definición 3.1.1 (Sistema dinámico). *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto, un sistema dinámico en D es una familia de aplicaciones continuas C^1*

$$\varphi : D \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

tal que si $\varphi^t(x) = \varphi(t, x)$, entonces φ^t satisface:

1. $\varphi^0(x) = x$ para todo $x \in D$
2. $\varphi^t(\varphi^s(x)) = \varphi^{t+s}(x)$ para todo $x \in D$ y $t, s \in \mathbb{R}$

Si $\varphi(t, x)$ es un sistema dinámico en $D \subset \mathbb{R}^n$ y sea

$$F(x) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(t, x)|_{t=0}$$

entonces f es un campo vectorial en D y se llama campo vectorial asociado al sistema dinámico $\varphi(t, x)$. Además $\varphi(t, x_0)$ es solución del problema de valor inicial

$$\begin{aligned} x(t)' &= F(x(t)) \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Definición 3.1.2 (Sistemas topológicamente equivalentes). *Sean dos sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$x' = f(x) \tag{3.3}$$

$$x' = g(x) \tag{3.4}$$

con $f \in C^1(D)$ y $g \in C^1(E)$, $D, E \subset \mathbb{R}^n$ conjuntos abiertos. Decimos que los sistemas (3.3) y (3.4) son topológicamente equivalentes si existe un homeomorfismo $h : D \rightarrow E$ tal que mapea trayectorias de (3.3) en trayectorias de (3.4) y viceversa, además preserva el sentido de las trayectorias.

Definición 3.1.3 (Teorema de existencia global). *El problema de valor inicial*

$$\begin{aligned} x(t)' &= \frac{F(x(t))}{1+|F(x(t))|} \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

tiene solución única para todo $x_0 \in D$ y $t \in I(x_0) = (-\infty, \infty)$ máximo intervalo de existencia de la solución. [3] Además es topológicamente equivalente al sistema (3.5) en \mathbb{R}^n .

Definición 3.1.4 (Conjunto invariante). *Un conjunto $U \subset \mathbb{R}^n$ es invariante bajo el flujo φ^t si para todo $x \in U$ se tiene que $\varphi^t(x) \in U$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

3.2. Conjuntos límite

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}x' &= -y + x(1 - x^2 - y^2) \\y' &= x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}\tag{3.6}$$

con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$.

Para realizar un análisis cualitativo del sistema vamos a hacer un cambio de coordenadas de cartesianas a polares, con el fin de simplificar el sistema [3], después vamos a resolver cuantitativamente el problema y analizaremos algunas propiedades con ayuda de la solución analítica.

Con el cambio de coordenadas (6.13) y (6.14) tenemos las condiciones iniciales $r(0) = r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ y $\theta(0) = \theta_0 = \arctan(\frac{y_0}{x_0})$.

Sustituimos el sistema (3.6) en (6.17):

$$\begin{aligned}rr' &= xx' + yy' = x[-y + x(1 - x^2 - y^2)] + y[x + y(1 - x^2 - y^2)] \\rr' &= x^2(1 - x^2 - y^2) + y^2(1 - x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)[1 - (x^2 + y^2)]\end{aligned}$$

luego sustituimos (6.15) y obtenemos la ecuación diferencial

$$\begin{aligned}rr' &= r^2(1 - r^2) \\r' &= r(1 - r^2)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Por otro lado sustituimos el sistema (3.6) en (6.18):

$$\begin{aligned}r^2\theta' &= xx' - yy' = x[x + y(1 - x^2 - y^2)] - y[-y + x(1 - x^2 - y^2)] \\r^2\theta' &= x^2 + y^2 = r^2\end{aligned}$$

y obtenemos la ecuación diferencial

$$\theta' = 1\tag{3.8}$$

Las ecuaciones (3.7) y (3.8) forman un sistema de ecuaciones no lineal desacoplado [16].

Comenzamos el análisis cualitativo de la ecuación diferencial (3.7).

Sea $f(r) = r(1 - r^2)$ con $r \geq 0$, las soluciones de equilibrio son $r = 0$ y $r = 1$.

1. Si $0 < r < 1$, entonces $r' = f(r) > 0$, por lo tanto $r = 0$ es un punto fuente o repulsivo.
2. Si $1 < r$, entonces $r' = f(r) < 0$, por lo tanto $r = 1$ es un sumidero o atractor.

Las soluciones convergen a $r = 1$.

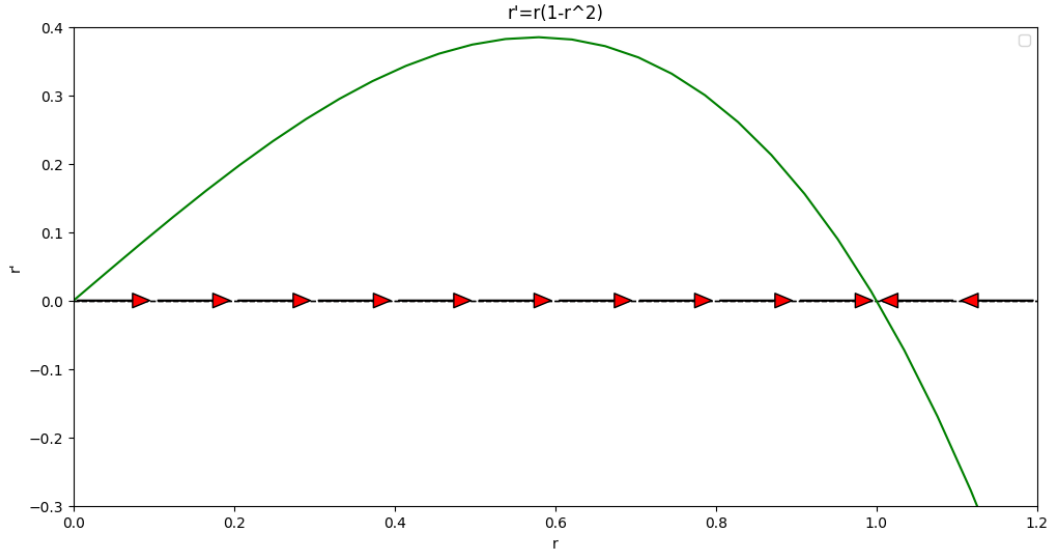


Figura 3.1: Plano fase de (3.7).

Por otro lado para (3.8) la solución es $\theta(t) = t + \theta_0$, donde $\theta_0 = \theta(0)$.

Las soluciones del sistema (3.6) convergen a puntos sobre la circunferencia centrada en el origen de radio 1 [15].

Resolvamos el problema de forma analítica.

La ecuación (3.7) es separable

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int dt$$

integremos por fracciones parciales

$$\int \frac{dr}{r(1-r^2)} = \int \frac{dr}{r} - \int \frac{dr}{2(r+1)} - \int \frac{dr}{2(r-1)}$$

$$= \ln |r| - \frac{1}{2} \ln |r+1| - \frac{1}{2} \ln |r-1| + c_1$$

entonces

$$\ln |r| - \frac{1}{2} \ln |r+1| - \frac{1}{2} \ln |r-1| = t + c$$

desarrollamos logaritmos

$$\ln \left| \frac{r^2}{r^2-1} \right| = 2t + c$$

$$\frac{r^2}{r^2-1} = ce^{2t}$$

$$r^2 = \frac{e^{2t}}{c + e^{2t}}$$

Como $r \geq 0$

$$r = \frac{e^t}{\sqrt{c + e^{2t}}}$$

Aplicamos la condición inicial $r(0) = r_0$.

Las soluciones en coordenadas polares son:

$$r(t) = \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (3.9)$$

$$\theta(t) = t + \theta_0 \quad (3.10)$$

Dejaremos nuestra solución en coordenadas polares para realizar el siguiente análisis del comportamiento asintótico.

1. Si $r_0 = 1$ tenemos las ecuaciones

$$r(t) = 1$$

$$\theta(t) = t + \theta_0$$

2. Por otro lado, si $r_0 > 1$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = \infty$$

3. Para $0 < r_0 < 1$.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{e^t}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} = 0$$

Las trayectorias convergen a la circunferencia con centro en el origen y de radio 1.

¿Qué significa que las trayectorias convergen a la circunferencia de centrada en el origen y de radio 1?

Definición 3.2.1 (Punto ω límite). *Decimos que $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ es un punto ω -límite de $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$ si existe sucesión creciente de tiempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow \infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(\vec{x}_0) = \vec{z}$$

Pasemos las soluciones (3.9) y (3.10) a coordenadas cartesianas, con (6.13) y (6.14) [14].

$$x(t) = \frac{e^t \cos(t + \theta_0)}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (3.11)$$

$$y(t) = \frac{e^t \sin(t + \theta_0)}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2} - 1 + e^{2t}}} \quad (3.12)$$

con $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ y $\theta_0 = \arctan(\frac{y_0}{x_0})$. Definen el flujo φ^t en \mathbb{R}^2 como

$$\varphi^t(x_0, y_0) = (x(t), y(t))$$

en el plano fase de (3.6) que pasa por el punto (x_0, y_0) .

Tomemos un punto en la circunferencia centrada en el origen con radio 1, supongamos que en coordenadas polares tiene un ángulo $0 < \alpha_0 < 2\pi$, veamos que este punto es ω límite, para eso podemos definir $\{t_n = 2\pi n + \alpha_0 - \theta_0\}_{n \in \mathbb{N}}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x(t_n) = \cos(\alpha_0)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y(t_n) = \sin(\alpha_0)$$

en efecto el punto $(\cos(\alpha_0), \sin(\alpha_0))$ es un punto ω límite, esto quiere decir que para cada punto de la circunferencia podemos encontrar una sucesión de tiempos

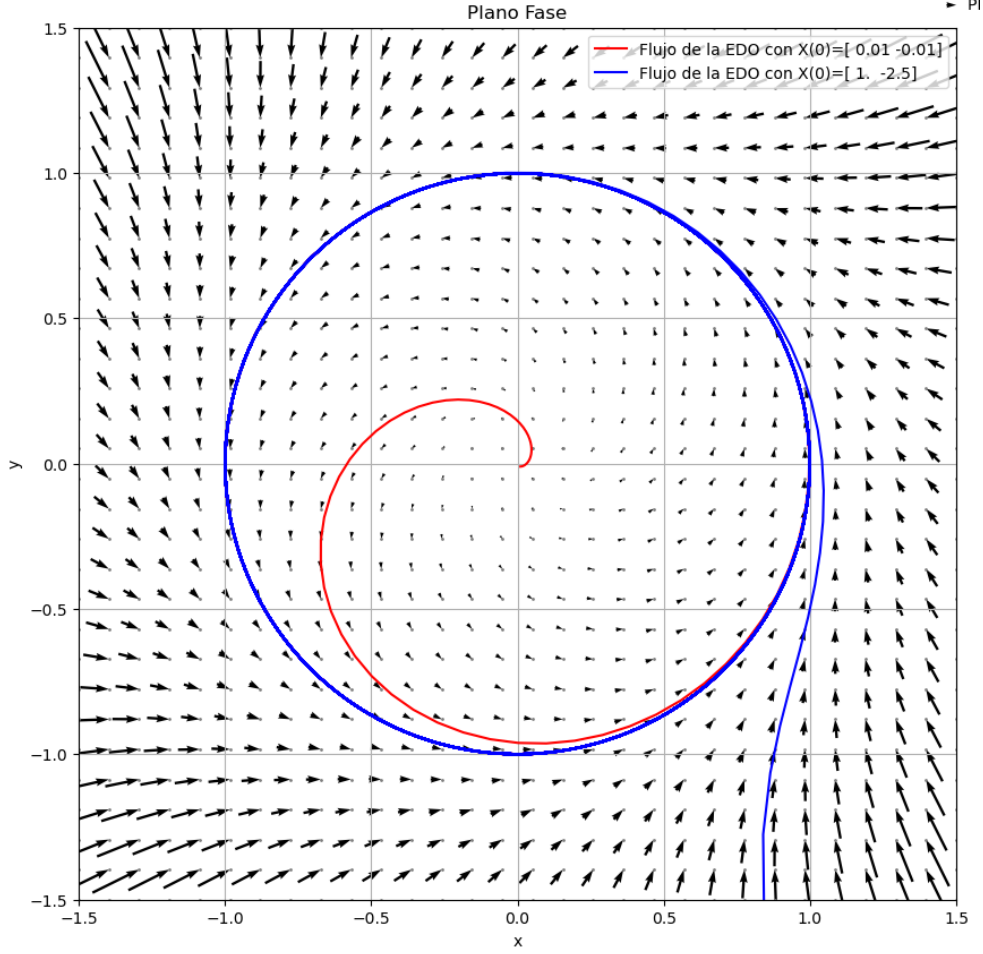


Figura 3.2: Plano fase del sistema (3.6).

$\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow \infty$ tal que la trayectoria converge a ese punto de la circunferencia, es decir cualquier punto que se encuentra en la circunferencia centrada en el origen y de radio 1 es un punto ω límite de (x_0, y_0) , entonces diremos que esta circunferencia es un conjunto ω límite de (x_0, y_0) , donde el conjunto ω límite se define como

$$\omega(\vec{X}_0) = \{\vec{z} \in \mathbb{R}^2 \mid \vec{z} \text{ es } \omega\text{-límite de } \vec{X}_0\}.$$

Definición 3.2.2 (Punto α límite). *Decimos que $\vec{z} \in \mathbb{R}^2$ es un punto α -límite de $\vec{X}_0 \in \mathbb{R}^2$ si existe sucesión decreciente de tiempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow -\infty$ cuando $n \rightarrow \infty$ tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^{t_n}(\vec{X}_0) = \vec{z}$$

Por otro lado si tomamos un punto (x_0, y_0) que no está en la circunferencia, entonces si $r_0 < 1$ entonces $x(t) \rightarrow 0$ y $y(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow -\infty$, por lo tanto el punto (x_0, y_0) es un punto α límite, es decir que existe una sucesión de tiempos $\{t_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con $t_n \rightarrow -\infty$ tal que la trayectoria converge a ese punto.

Notemos que analizamos los flujos cuando $t \rightarrow \infty$ y $t \rightarrow -\infty$, es decir que analizamos el comportamiento asintótico de las soluciones. Se define la trayectoria media positiva como

$$\Gamma_{x_0}^+ = \{x = \varphi(t, x_0) \mid t \geq 0\}$$

y la trayectoria media negativa como

$$\Gamma_{x_0}^- = \{x = \varphi(t, x_0) \mid t \leq 0\}$$

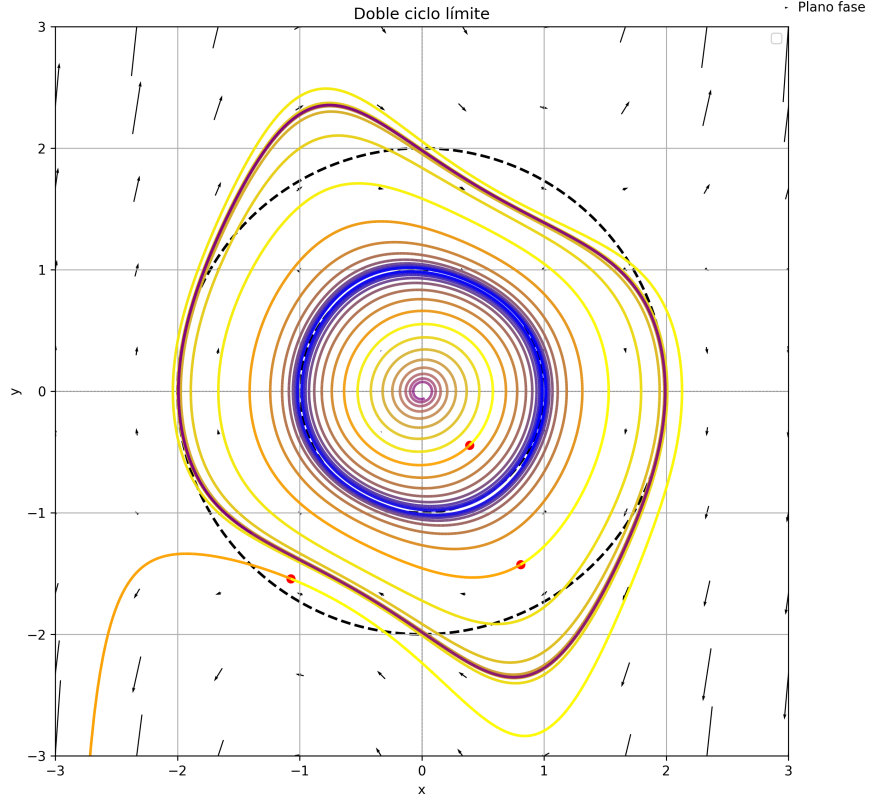


Figura 3.3: Plano fase del sistema (3.6).

En la figura 3.2 podemos observar que la trayectoria del flujo φ^t que pasa por x_0 es la unión de la trayectoria media positiva (naranja) y la trayectoria media negativa (verde), es decir

$$\Gamma_{x_0} = \Gamma_{x_0}^+ \cup \Gamma_{x_0}^-$$

Definición 3.2.3. Decimos que un conjunto U es positivamente invariante si dado $x_0 \in U$ entonces $\Gamma_{x_0}^+ \subset U$

Definición 3.2.4. Decimos que un conjunto U es negativamente invariante si dado $x_0 \in U$ entonces $\Gamma_{x_0}^- \subset U$

Además, notemos que para $\{t_n = 2\pi n + \alpha_0 - \theta_0\}_{n \in \mathbb{N}}$, la sucesión $\{(x(t_n), y(t_n))\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de puntos convergente tal que sus puntos son colineales sobre la recta $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \tan(\alpha_0)x\}$. Las intersecciones de las trayectorias son los valores de la sucesión colineal.

Modifiquemos el sistema (3.7), a un sistema perturbado con $0 \leq \epsilon < 1$.

$$r' = r(1 - r^2) + \epsilon r \cos(\theta) \quad (3.13)$$

Veamos si existe r_{max} tal que $r' < 0$ y r_{min} tal que $r' > 0$ [17].

Reescribimos (3.13) como $r' = r(1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta))$, como $r > 0$, entonces el signo de r' depende de $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta)$. Tenemos los siguientes casos:

1. Si $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta) \leq 1 - r^2 + \epsilon < 0$ entonces $\sqrt{1 + \epsilon} < r_{max}$, por lo que para $r < r_{max}$ se tiene que $r' < 0$.
2. Por otro lado, si $1 - r^2 + \epsilon \cos(\theta) > 1 - r^2 - \epsilon > 0$ entonces $\sqrt{1 - \epsilon} > r_{min}$, por lo que para $r > r_{min}$ se tiene que $r' > 0$.

Las trayectorias que pasan por puntos en la circunferencia centrada en el origen y con radio r_{min} divergen del exterior de dicha circunferencia. Por otro lado, las trayectorias que pasan por puntos en la circunferencia centrada en el origen con radio r_{max} convergen al interior del círculo. A este segmento del plano lo llamamos región de atrapamiento [18].

Podemos intuir que debe existir una curva cerrada en el interior, donde $r_{min} < r < r_{max}$, en la cual las trayectorias convergen o alcanzan el equilibrio, de manera similar a lo observado en el ejemplo inicial, debido a su comportamiento. La idea de la existencia de una curva cerrada de este tipo es lo que conocemos como ciclo límite.

Notemos que esta sección del plano donde $r_{min} < r < r_{max}$ es positivamente invariante [19].

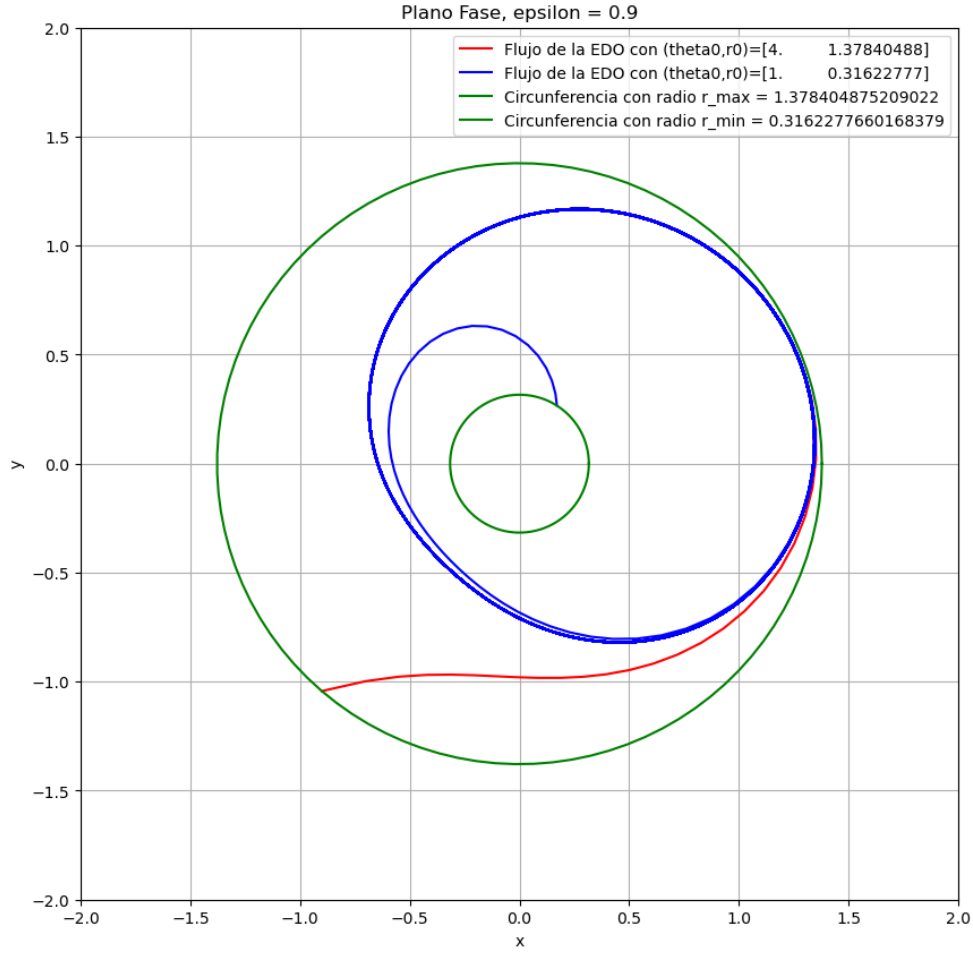


Figura 3.4: Plano fase del sistema con perturbación.

Veamos más propiedades de los puntos y el conjunto ω límite.

- $\omega(x_0) = \omega(\Gamma_{x_0}^+)$ y $\alpha(x_0) = \alpha(\Gamma_{x_0}^-)$.

- Si x_0 es equilibrio de $x' = f(x)$ entonces:

$$\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \{x_0\}$$

- Si Γ_0 es una órbita periódica para un sistema $x' = f(x)$, entonces

$$\omega(\Gamma_0) = \alpha(\Gamma_0) = \Gamma_0$$

Lema 3.2.5. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ tal que $\Gamma_{x_0}^+$ está acotada. Entonces:

1. $\omega(x) \neq \emptyset$
2. $\omega(x)$ es acotado.
3. $\omega(x)$ es cerrado.
4. $\omega(x)$ es conexo.

Lema 3.2.6. Sea $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ con $\Gamma_{x_0}^+$ acotada. Entonces

$$\rho(\phi(t, x), \omega(\vec{x})) \rightarrow 0$$

cuando $t \rightarrow \infty$ [19].

Lema 3.2.7 (Invarianza). Sea $\Gamma_{x_0}^+$ acotada. Entonces $\omega(x)$ es invariante bajo el flujo φ^t , es decir, para cada $\vec{y} \in \omega(x)$ entonces $\varphi^t(y) \in \omega(x)$ [20].

Lema 3.2.8. Si $\omega(x) \neq \emptyset$ y no contiene puntos de equilibrio. Entonces contiene una órbita periódica Γ_0 [16].

Lema 3.2.9. Si $\omega(x)$ contiene una órbita periódica Γ_0 . Entonces $\omega(x) = \Gamma_0$ [14].

3.3. Teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema 3.3.1 (Poincaré-Bendixson). Sea $x \in \mathbb{R}^2$ tal que $\Gamma_x^2 \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^2$ con $D \equiv$ Cerrado y acotado, y conteniendo un número finito de equilibrios de la EDO:

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y) \\ y' &= g(x, y) \end{aligned} \tag{3.14}$$

entonces se cumple alguna de las siguientes:

1. $\omega(x) = \omega(\Gamma_x^+)$ está formado por un equilibrio.
2. $\omega(x)$ es una órbita periódica.
3. $\omega(x)$ está formada por equilibrios y órbitas que tienen a dichos equilibrios como puntos α u ω límite.

El teorema de Poincaré-Bendixson es fundamental en la teoría de sistemas dinámicos planares [21, 22].

Definición 3.3.2 (Ciclo límite.). *Decimos que la órbita periódica $\Gamma_0 = \omega(\vec{x})$ del caso 2 del teorema 3.3.1 se llama **ciclo límite** si hay un anillo abierto que lo contiene y no hay otra órbita periódica en él, es decir un ciclo límite es una órbita periódica aislada.*

Definición 3.3.3. *La órbita que conecta a un punto silla consigo mismo (la intersección de la variedad estable con la inestable), se le llama curva homoclínica [23].*

Definición 3.3.4. *La órbita que conecta dos diferentes puntos de equilibrio se le llama curva heteroclínica [23].*

3.4. Ejemplo 1. Oscilador de Van der Pol

La ecuación del oscilador de Van der Pol describe el comportamiento de ciertos sistemas oscilantes no lineales. Su fundamento físico se basa en el concepto de amortiguamiento no lineal y autodemostración de oscilaciones [7].

$$x'' + x + \epsilon x'(x^2 - 1) = 0 \quad (3.15)$$

donde ϵ es un parámetro de amortiguamiento no lineal.

El término $-\epsilon(1 - x^2)x'$ representa la no linealidad del amortiguamiento en el sistema. La expresión $(1 - x^2)$ describe cómo el amortiguamiento varía en función de la posición del oscilador. Cuando x es pequeño, este término es cercano a 1 y el amortiguamiento es lineal. Sin embargo, a medida que x aumenta, el término $(1 - x^2)$ se hace más negativo, generando un efecto de amortiguamiento no lineal que disminuye la velocidad del oscilador [16].

Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} y' &= -x - \epsilon y(x^2 - 1) \\ x' &= y \end{aligned} \quad (3.16)$$

Los puntos de equilibrio del sistema se obtienen resolviendo $x' = 0$ y $y' = 0$:

$$\begin{cases} y = 0, \\ \epsilon(1 - x^2)y - x = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

Sustituyendo $y = 0$ en la segunda ecuación, obtenemos:

$$-x = 0 \implies x = 0. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, el único punto de equilibrio es el origen $(0, 0)$.

Matriz Jacobiana y Valores Propios

Calculamos la matriz Jacobiana J del sistema (??):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\epsilon xy & \epsilon(1 - x^2) \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Evaluable en el punto de equilibrio $(0, 0)$:

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Obtenemos los valores propios λ resolviendo el determinante característico:

$$\det(J - \lambda I) = 0, \quad (3.21)$$

es decir,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \epsilon - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.22)$$

Calculamos el determinante:

$$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) - (-1)(1) = \lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0. \quad (3.23)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}. \quad (3.24)$$

Para $\epsilon > 0$, si $\epsilon^2 - 4 > 0$ (es decir, $\epsilon > 2$), los valores propios son reales y positivos, lo que indica que el punto de equilibrio es un **nodo inestable**. Si $0 < \epsilon < 2$, los valores propios son complejos con parte real positiva, lo que implica que el origen es un **foco inestable** [14].

Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson

Para demostrar la existencia de un ciclo límite, utilizamos el **teorema de Poincaré-Bendixson**, que establece que si un conjunto compacto, invariante y sin puntos de equilibrio en su interior existe para un sistema planar, entonces el sistema tiene una órbita periódica dentro de ese conjunto [15].

Construcción de una Región Acotada Invariante

Definimos una función de Lyapunov candidata:

$$V(x, y) = \frac{1}{2} (x^2 + y^2). \quad (3.25)$$

Calculamos la derivada total de V respecto al tiempo:

$$\dot{V} = x\dot{x} + y\dot{y} = xy + y(\mu(1 - x^2)y - x) = y^2(\mu(1 - x^2)). \quad (3.26)$$

Analizamos el signo de \dot{V} :

- Para $|x| > 1$, se tiene $x^2 > 1$, por lo que $1 - x^2 < 0$ y entonces:

$$\dot{V} = y^2\mu(1 - x^2) < 0. \quad (3.27)$$

Esto indica que en la región donde $|x| > 1$, la energía total V decrece, y las trayectorias se dirigen hacia el interior de esta región.

- Para $|x| < 1$, se tiene $1 - x^2 > 0$, y por lo tanto $\dot{V} > 0$, indicando que en esta región la energía total V aumenta, y las trayectorias se alejan del origen.

Concluimos que las trayectorias que empiezan fuera del círculo $x^2 + y^2 = R^2$ con $R > 1$ eventualmente entran en esta región y permanecen en un conjunto compacto y acotado [24].

Dado que:

1. El sistema es plano y continuo.
2. Existe una región compacta e invariante (por la función de Lyapunov) sin puntos de equilibrio distintos del origen.
3. El origen es un punto de equilibrio inestable.

Aplicando el teorema de Poincaré-Bendixson, concluimos que existe al menos una órbita periódica (ciclo límite) en la región acotada definida [25].

3.5. Ejemplo 2. Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh con amortiguamiento no lineal, se utiliza para estudiar oscilaciones no lineales en sistemas mecánicos y se encuentra en diversos campos como la mecánica estructural y la dinámica de sistemas físicos [8].

$$x'' + \epsilon(x'^2 - 1)x' + x = 0$$

El parámetro ϵ es un coeficiente que controla la influencia del término no lineal en el amortiguamiento. El término $\epsilon(x'^2 - 1)x'$ es el término no lineal en el amortiguamiento. Mientras que en el amortiguamiento lineal la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, en este caso el amortiguamiento depende de la velocidad al cuadrado y se modifica por el término $(x'^2 - 1)$. Esto introduce un comportamiento no lineal en el sistema y puede dar lugar a fenómenos como la autoexcitación y la respuesta no armónica [16]. Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} y' &= -\epsilon(y^2 - 1)y - x \\ x' &= y \end{aligned} \tag{3.28}$$

Los puntos de equilibrio se encuentran resolviendo $\dot{x} = 0$ y $\dot{y} = 0$:

$$\begin{cases} y = 0, \\ \epsilon(1 - y^2)y - x = 0. \end{cases} \tag{3.29}$$

Sustituyendo $y = 0$ en la segunda ecuación, obtenemos:

$$-x = 0 \implies x = 0. \tag{3.30}$$

Por lo tanto, el único punto de equilibrio es el origen $(0, 0)$.

Matriz Jacobiana y Valores Propios

Calculamos la matriz Jacobiana J del sistema (5.16):

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} \\ \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} & \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon(1 - 3y^2) \end{pmatrix}. \tag{3.31}$$

Evalúamos en el punto de equilibrio $(0, 0)$:

$$J|_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \epsilon \end{pmatrix}. \tag{3.32}$$

Los valores propios λ se obtienen resolviendo:

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \epsilon - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (3.33)$$

Calculamos el determinante:

$$(-\lambda)(\epsilon - \lambda) - (-1)(1) = \lambda^2 - \epsilon\lambda + 1 = 0. \quad (3.34)$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\lambda = \frac{\epsilon \pm \sqrt{\epsilon^2 - 4}}{2}. \quad (3.35)$$

- Si $\epsilon^2 - 4 > 0$ (es decir, $\epsilon > 2$), los valores propios son reales y de signos opuestos si $\epsilon > 0$, lo que indica un **silla de montar** en el origen.
- Si $\epsilon^2 - 4 < 0$ (es decir, $0 < \epsilon < 2$), los valores propios son complejos conjugados con parte real positiva, ya que $\epsilon > 0$. Esto implica que el origen es un **foco inestable**.

Aplicación del Teorema de Poincaré-Bendixson

Para demostrar la existencia de un ciclo límite, aplicaremos el teorema de Poincaré-Bendixson, mostrando que las trayectorias están confinadas en una región acotada y que no hay otros puntos de equilibrio en esa región aparte del origen [15].

Construcción de una Región Acotada Invariante

Consideramos la siguiente función de Lyapunov candidata:

$$V(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2. \quad (3.36)$$

Calculamos su derivada temporal:

$$\dot{V} = y\dot{y} + x\dot{x} \quad (3.37)$$

$$= y [\epsilon (1 - y^2) y - x] + xy \quad (3.38)$$

$$= y [\epsilon (1 - y^2) y - x] + xy \quad (3.39)$$

$$= \epsilon y^2 (1 - y^2) - yx + xy \quad (3.40)$$

$$= \epsilon y^2 (1 - y^2). \quad (3.41)$$

Analizamos el signo de \dot{V} :

- Para $|y| > 1$, se tiene $y^2 > 1$, entonces $1 - y^2 < 0$ y por lo tanto:

$$\dot{V} = \epsilon y^2(1 - y^2) < 0. \quad (3.42)$$

Esto indica que las trayectorias se dirigen hacia la región donde $|y| \leq 1$ [24].

- Para $|y| < 1$, se tiene $1 - y^2 > 0$, y por lo tanto:

$$\dot{V} = \epsilon y^2(1 - y^2) \geq 0. \quad (3.43)$$

En esta región, la energía V no decrece, pero debido a la inestabilidad en el origen, las trayectorias tienden a alejarse del punto de equilibrio [25].

Observamos que:

1. Las trayectorias que empiezan fuera de la región $|y| \leq 1$ eventualmente entran en esta región y quedan confinadas en un conjunto compacto debido a la disminución de V .
2. No hay otros puntos de equilibrio distintos del origen en esta región.
3. El origen es inestable (foco inestable o silla de montar dependiendo del valor de ϵ).

Por el **teorema de Poincaré-Bendixson**, existe al menos un ciclo límite en esta región acotada [14].

Capítulo 4

Sistemas Liénard

Los sistemas Liénard representan una clase importante de ecuaciones diferenciales no lineales que han sido fundamentales en el estudio de oscilaciones no lineales y ciclos límite. Estos sistemas fueron introducidos por Alfred-Marie Liénard en 1928 como un modelo para describir fenómenos oscilatorios en sistemas físicos, particularmente en circuitos eléctricos.

4.1. Definición y Formulación General

Un sistema Liénard es una ecuación diferencial de segundo orden de la forma:

$$x'' + f(x)x' + g(x) = 0 \quad (4.1)$$

donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones continuas definidas en \mathbb{R} . Para analizar esta ecuación como un sistema dinámico, se realiza una transformación a un sistema de primer orden. Definimos:

$$F(x) = \int_0^x f(s)ds$$

y realizamos el cambio de variable $y = x' + F(x)$. Con este cambio, obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{aligned} x' &= y - F(x), \\ y' &= -g(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Este sistema tiene una estructura interesante que permite estudiar sus propiedades cualitativas, particularmente en relación con la existencia y unicidad de ciclos límite.

4.2. Teorema de Liénard

El teorema de Liénard proporciona condiciones suficientes para garantizar la existencia de un único ciclo límite estable en el sistema (4.2). Este resultado es fundamental en la teoría de ciclos límite y ha sido ampliamente utilizado en aplicaciones prácticas.

Teorema 4.2.1 (Liénard). *Si las funciones $F(x)$ y $g(x)$ del sistema (4.2) satisfacen las siguientes hipótesis:*

1. $F, g \in C^1(\mathbb{R})$, es decir, son continuamente diferenciables.
2. F y g son funciones impares, es decir, $F(-x) = -F(x)$ y $g(-x) = -g(x)$.
3. $xg(x) > 0$ para todo $x \neq 0$. Esto implica que $g(x)$ tiene el mismo signo que x , asegurando que la fuerza restauradora sea dirigida hacia el origen.
4. $F'(0) < 0$, lo que indica que cerca del origen la fricción es positiva (disipativa).
5. $F(x)$ tiene ceros solo en $x = 0$ o en $x = \pm a$, donde $a > 0$. Esto asegura que la función $F(x)$ tenga un comportamiento específico que permita la formación de ciclos límite.
6. $F(x)$ es monótona creciente para $x > a$ y satisface $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$. Esta condición garantiza que el sistema tenga un comportamiento asintótico controlado.

entonces el sistema (4.2) tiene un único ciclo límite estable.

4.2.1. Interpretación del Teorema de Liénard

El teorema de Liénard combina condiciones sobre la fricción no lineal $F(x)$ y la fuerza restauradora $g(x)$ para garantizar la existencia de un ciclo límite estable. La condición de que $F(x)$ sea impar y tenga ceros específicos refleja un balance entre disipación de energía y acumulación de energía en el sistema. Además, la monotonía de $F(x)$ para valores grandes de x asegura que las trayectorias no diverjan indefinidamente.

4.3. Aplicación: Oscilador de Van der Pol

El oscilador de Van der Pol es uno de los ejemplos más conocidos de un sistema Liénard. Su ecuación diferencial está dada por:

$$x'' + \epsilon(x^2 - 1)x' + x = 0,$$

donde $\epsilon > 0$ es un parámetro que controla la no linealidad del sistema. Este modelo fue originalmente desarrollado para describir oscilaciones en circuitos eléctricos con válvulas triodo.

Transformación al Sistema Liénard

Definimos:

$$F(x) = \int_0^x \epsilon(s^2 - 1) ds = \frac{\epsilon}{3}(x^3 - 3x),$$

y $g(x) = x$. El sistema equivalente es:

$$\begin{aligned}x' &= y - \frac{\epsilon}{3}(x^3 - 3x), \\y' &= -x.\end{aligned}$$

Verificación de las Hipótesis del Teorema de Liénard

Verifiquemos que $F(x)$ y $g(x)$ satisfacen las hipótesis del teorema de Liénard:

1. ****Continuidad y Diferenciabilidad****: Ambas funciones $F(x)$ y $g(x)$ son continuamente diferenciables (C^1). 2. ****Imparidad****:

$$F(-x) = \frac{\epsilon}{3}[(-x)^3 - 3(-x)] = -\frac{\epsilon}{3}(x^3 - 3x) = -F(x),$$

y

$$g(-x) = -x = -g(x).$$

3. ****Signo de $xg(x)$ ****: Para $x \neq 0$, $xg(x) = x^2 > 0$. 4. ****Condición en el origen****: $F'(x) = \epsilon(x^2 - 1)$, por lo que $F'(0) = -\epsilon < 0$. 5. ****Ceros de $F(x)$ ****: Resolviendo $F(x) = 0$, obtenemos $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$. 6. ****Monotonía y límite****: Para $x > \sqrt{3}$, $F'(x) > 0$, y $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$.

Por lo tanto, todas las hipótesis del teorema de Liénard se cumplen, y concluimos que el oscilador de Van der Pol tiene un único ciclo límite estable.

4.4. Resultados Relevantes y Extensiones

El teorema de Liénard ha inspirado numerosos resultados y extensiones en la teoría de ciclos límite. Algunos de ellos incluyen:

1. ****Generalización a Sistemas Perturbados****: Se han estudiado versiones perturbadas de sistemas Liénard para analizar cómo pequeñas perturbaciones afectan la existencia y estabilidad de ciclos límite. 2. ****Relación con el Teorema de Poincaré-Bendixson****: El teorema de Liénard puede verse como una aplicación específica del teorema de Poincaré-Bendixson en dos dimensiones, que garantiza la existencia de conjuntos límite compactos. 3. ****Estabilidad Global****: Bajo ciertas condiciones adicionales, se puede demostrar que el ciclo límite en un sistema Liénard es globalmente atractivo.

4.5. Ejemplo Adicional: Oscilador de Rayleigh

Otro ejemplo clásico de un sistema Liénard es el oscilador de Rayleigh, dado por:

$$x'' + \epsilon \left(\frac{1}{3}(x')^3 - x' \right) + x = 0.$$

Este sistema también puede transformarse en un sistema Liénard y verificar las hipótesis del teorema correspondiente.

4.6. Conclusión

Los sistemas Liénard constituyen una herramienta poderosa para el análisis de oscilaciones no lineales y ciclos límite. Su estudio no solo proporciona resultados teóricos rigurosos, sino que también tiene aplicaciones prácticas en diversos campos, como la ingeniería eléctrica, la biología y la física. El teorema de Liénard es un resultado central que garantiza la existencia y unicidad de ciclos límite bajo condiciones específicas, y su aplicación a modelos como el oscilador de Van der Pol ilustra su relevancia en problemas reales.

Capítulo 5

Teoría de Promediación

El análisis de sistemas no lineales con comportamientos oscilatorios puede ser extremadamente desafiante debido a la interacción entre términos no lineales y oscilaciones rápidas. En muchos casos, los métodos analíticos tradicionales fallan o resultan inmanejables, mientras que los métodos numéricos pueden ser costosos computacionalmente o poco precisos. La teoría de promediación aborda estos problemas al transformar las ecuaciones originales en un sistema equivalente más simple que describe el comportamiento medio del sistema [18].

Esta aproximación es particularmente útil cuando los parámetros del sistema están sujetos a pequeñas perturbaciones, lo que permite capturar la dinámica esencial sin perder información crítica sobre los ciclos límite o comportamientos oscilatorios [17].

5.1. Teoría de perturbaciones

Definimos un **problema perturbado** como una ecuación

$$P^\epsilon(x) = 0 \tag{5.1}$$

que incluye un parámetro pequeño ϵ con $0 < \epsilon < 1$, el cual que representa la perturbación.

El objetivo es encontrar soluciones aproximadas $x = x(\epsilon)$ en función de este parámetro y estudiar su comportamiento cuando $\epsilon \rightarrow 0$ [18].

Para estudiar el comportamiento asintótico de las soluciones vamos a introducir el concepto de función de orden.

Definición 5.1.1 (Función de orden). *Se dice que una función $\delta = \delta(\epsilon)$ es de orden si cumple las siguientes condiciones:*

1. Es continua en una vecindad de $\epsilon = 0$.
2. Tiene signo definido en esa vecindad (es decir, $\delta(\epsilon) > 0$ o $\delta(\epsilon) < 0$ para $0 < \epsilon < \epsilon_0$ con $\epsilon_0 > 0$).
3. Existe el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta(\epsilon)$$

Definición 5.1.2. Sean $\delta_1(\epsilon)$ y $\delta_2(\epsilon)$ funciones de orden. Decimos que:

1. $\delta_1(\epsilon) = O(\delta_2(\epsilon))$ si existe $k \in \mathbb{R}^+$ y un $\epsilon_0 > 0$ tales que:

$$|\delta_1(\epsilon)| \leq k|\delta_2(\epsilon)| \quad (5.2)$$

para todo $0 < \epsilon < \epsilon_0$.

Esta definición describe una cota superior en el crecimiento de la función $\delta_1(\epsilon)$ en términos de $\delta_2(\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Es decir, $\delta_2(\epsilon)$ actúa como una cota superior para $\delta_1(\epsilon)$ [17].

2. $\delta_1(\epsilon) = o(\delta_2(\epsilon))$ si:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = 0 \quad (5.3)$$

Esta definición indica que $\delta_1(\epsilon)$ es asintóticamente insignificante en comparación con $\delta_2(\epsilon)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$; es decir, $\delta_2(\epsilon)$ crece (o decrece) más rápido que $\delta_1(\epsilon)$ [17].

Consideremos las funciones $\delta_1(\epsilon) = \ln(1 + \epsilon)$ y $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$.

La serie de Taylor de $\ln(1 + \epsilon)$ alrededor de $\epsilon = 0$ es:

$$\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \dots$$

evaluamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta_1(\epsilon)}{\delta_2(\epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \dots}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{3} - \dots \right) = 1.$$

El límite es distinto de cero, por lo que $\ln(1 + \epsilon)$ no es $o(\epsilon)$. Sin embargo, dado que el límite es finito y positivo, concluimos que $\ln(1 + \epsilon) = O(\epsilon)$ [17].

Veamos algunos ejemplos más para comprender mejor estas definiciones.

Ejemplo 5.1.3. Sea $\delta_1(\epsilon) = \sin(\epsilon)$ y $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$.

Sabemos que para $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\sin(\epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^3}{6} + \frac{\epsilon^5}{120} - \dots$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 - \frac{\epsilon^2}{6} + \frac{\epsilon^4}{120} - \dots \right) = 1.$$

El límite es finito y positivo, por lo que $\sin(\epsilon) = O(\epsilon)$.

Ejemplo 5.1.4. Sea $\delta_1(\epsilon) = e^\epsilon - 1$ y $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$.

La serie de Taylor de e^ϵ es:

$$e^\epsilon = 1 + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{6} + \dots$$

Entonces:

$$e^\epsilon - 1 = \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{6} + \dots$$

Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{e^\epsilon - 1}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon^2}{6} + \dots \right) = 1.$$

Por lo tanto, $e^\epsilon - 1 = O(\epsilon)$.

Ejemplo 5.1.5. Sea $\delta_1(\epsilon) = \epsilon^2$ y $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon^2}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon = 0.$$

Entonces, $\epsilon^2 = o(\epsilon)$, lo que significa que ϵ^2 es insignificante en comparación con ϵ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ [17].

Ejemplo 5.1.6. Sea $\delta_1(\epsilon) = \epsilon \ln(\epsilon)$ y $\delta_2(\epsilon) = \epsilon$.

Para $\epsilon \rightarrow 0^+$, $\ln(\epsilon) \rightarrow -\infty$, por lo que $\epsilon \ln(\epsilon) \rightarrow 0^-$.

Calculamos el límite:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon \ln(\epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \ln(\epsilon) = -\infty.$$

Aunque el límite es infinito negativo, observamos que $\epsilon \ln(\epsilon)$ tiende a cero más lentamente que ϵ . Por lo tanto, $\epsilon \ln(\epsilon) = o(1)$, pero no es $o(\epsilon)$ ni $O(\epsilon)$ [17].

Ejemplo 5.1.7. Sea $\delta_1(\epsilon) = e^{-1/\epsilon}$ y $\delta_2(\epsilon) = \epsilon^n$ para cualquier $n > 0$. Cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$:

$$e^{-1/\epsilon} \rightarrow e^{-\infty} = 0,$$

y

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/\epsilon}}{\epsilon^n} = 0,$$

ya que $e^{-1/\epsilon}$ decrece más rápidamente que cualquier potencia de ϵ . Por lo tanto, $e^{-1/\epsilon} = o(\epsilon^n)$ [17].

Ejemplo 5.1.8. Sea $\delta_1(\epsilon) = \epsilon^n$ y $\delta_2(\epsilon) = e^{-1/\epsilon}$ para cualquier $n > 0$. Calculamos:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{\epsilon^n}{e^{-1/\epsilon}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \epsilon^n e^{1/\epsilon} = \infty,$$

ya que $e^{1/\epsilon}$ crece más rápido que cualquier potencia negativa de ϵ . Por lo tanto, $\delta_2(\epsilon) = o(\delta_1(\epsilon))$ [17].

5.2. Teoría de promediación

Como vimos determinar la existencia y propiedades cualitativas y cuantitativas de los ciclos límite en sistemas no lineales no es tarea fácil. En muchos casos los métodos analíticos fallan o se vuelve sumamente complejo y los métodos numéricos pueden ser ineficientes o inexactos.

El Método de Promediación es una herramienta poderosa y efectiva, parte de la teoría de perturbaciones y nos ayuda a simplificar el análisis de sistemas no lineales transformando las ecuaciones originales en un sistema más manejable. La premisa fundamental es que, bajo ciertas condiciones, el comportamiento promedio del sistema a lo largo del tiempo puede revelar la existencia y la estructura de los ciclos límite.

La aplicación del Método de Promediación para verificar la existencia de ciclos límite en sistemas no lineales no solo proporciona una técnica analítica robusta sino que también ofrece una perspectiva más profunda del comportamiento oscilatorio inherente en dichos sistemas. Este enfoque no solo permite simplificar las ecuaciones diferenciales originales, sino también captar la esencia del comportamiento dinámico del sistema, facilitando así la identificación y caracterización de

ciclos límite.

Definiendo el promedio local de una función y algunas de sus propiedades.

Definición 5.2.1. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y $T > 0$. Definimos:

$$f_T(t, x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t + \tau, x) d\tau$$

como el promedio local de f .

La función $f_T(t, x)$ calcula el valor promedio de la función $f(t, x)$ respecto a la variable t en el intervalo $[t, t + T]$, visto de otro modo, calcula el comportamiento promedio futuro del tiempo t a tiempo $t + T$.

Proposición 5.2.2. Sea $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua y de periodo T en t , entonces

$$f_T(t, x) = f_0(x)$$

Si la función a promediar es de Lipschitz entonces la diferencia entre ambas funciones está acotada, esto quiere decir que el mapeo del promedio local de la función no se aleja demasiado de la función original, solo lo simplifica y guarda el comportamiento promedio de la función.

Proposición 5.2.3. Si $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de Lipschitz en \mathbb{R} con constante de Lipschitz λ entonces

$$|\phi(x) - \phi_T(x)| \leq \frac{\lambda T}{2}$$

i.e. $\phi(t)$ es $o(T)$ con respecto a $\phi_T(x)$.

Ejemplo 5.2.4. Consideremos la función $\phi(t) = \sqrt{t^2 + 1}$, esta función es de Lipschitz con constante $\lambda = 1$, calculamos su promedio local con $T = 0,5$

$$\phi_T(t) = \frac{1}{2T} (((T + t)\sqrt{1 + (T + t)^2} + \sinh^{-1}(T + t)) - (t\sqrt{1 + t^2} + \sinh^{-1}(t)))$$

graficamos ambas funciones.

la diferencia está acotada por $M = \frac{\lambda T}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25$. En este caso en la gráfica se puede observar que la diferencia converge a la cota M .

este comportamiento asintótico no necesariamente ocurre siempre, un ejemplo es la función $\sin(x)$.

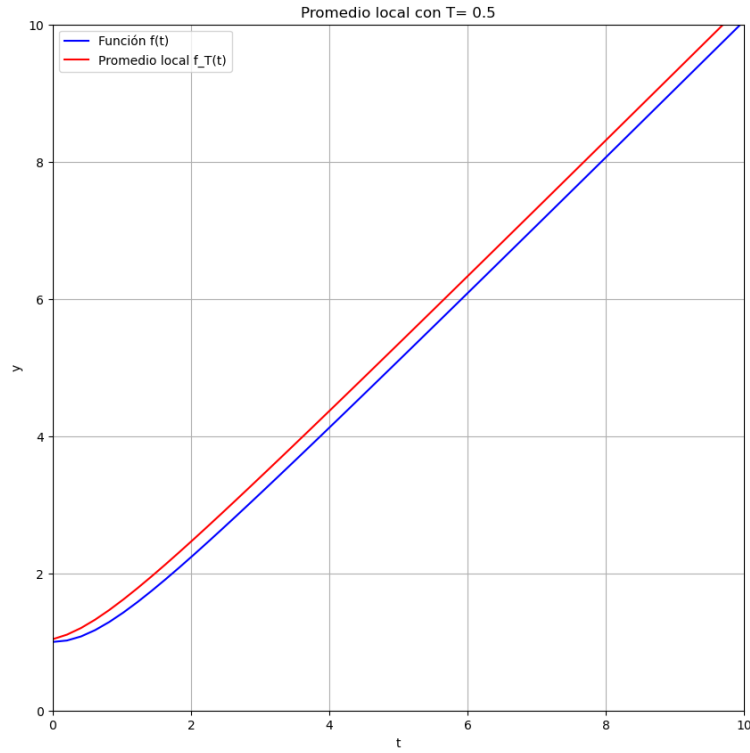


Figura 5.1: Función vs función promediada.

Lema 5.2.5. *Consideremos la EDO*

$$x' = \epsilon f(t, x)$$

con $x(0) = x_0$, donde f es de Lipschitz en $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y f continua en $t \in [0, t]$.

Sea $M = \sup_{x \in D} \sup_{0 \leq t \leq L} |f(t, x)| < +\infty$

Si $\phi(t) = \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau$ con x solución de la EDO.

Entonces:

$$|\phi_T(t) - \int_0^t f_T(\tau, x(\tau)) d\tau| \leq \frac{1}{2}(1 + \lambda L)MT$$

para $o(\frac{1}{\epsilon}) = t$, donde $\lambda \equiv \text{cte de Lipschitz}$.

i.e. $\phi_T(t) = \int_0^t f_T(\tau, x(\tau)) d\tau + o(T)$

Lema 5.2.6. *Consideremos el problema de valor inicial*

$$x' = \epsilon f(t, x)$$

$x(0) = x_0$, con f Lipschitz en $x \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y continua en $t \in [0, t]$.

Si y es solución de

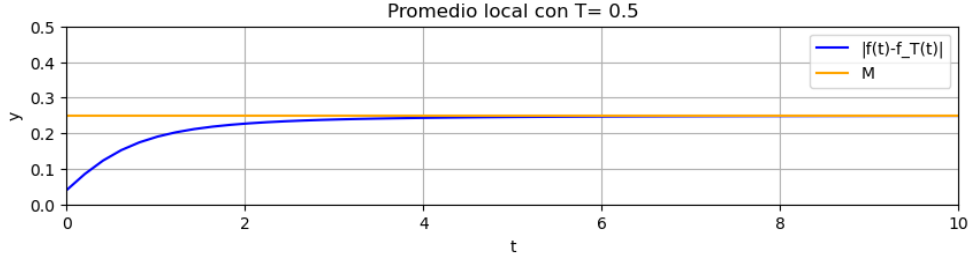


Figura 5.2: Diferencia de la Función con la función promediada.

$$y' = \epsilon f_T(t, y) \quad (5.4)$$

, $y(0) = x_0$, entonces

$$x(t) - y(t) = o(\epsilon T)$$

p.t. $t = o(\frac{1}{\epsilon})$

Teorema 5.2.7. Consideremos $x' = \epsilon f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ y $y' = f^0(y)$, $y(t_0) = x_0$, donde $x_0, x, y \in D \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$.

Satisfaciendo:

1. $\bar{f}(t, x)$ es T periódica con promedio $f^0(x)$.
2. f es continua en t y Lipschitz en $x \in D$.
3. $y(t)$ permanece en el interior de D para todo $t = O(\frac{1}{\epsilon})$.

Entonces

$$x(t) - y(t) = O(\delta(\epsilon))$$

para todo $t = o(\frac{1}{\epsilon})$ con $\delta = \delta(\epsilon)$ función de orden.

5.3. Teoría del Promedio aplicado al 16 Problema de Hilbert

Consideremos el sistema de ecuaciones en el plano polinomial de grado n (1.1). Podemos reescribir el sistema como:

$$\begin{aligned} x' &= y + \epsilon Q(x, y) \\ y' &= -x + \epsilon P(x, y) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Donde $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son polinomios de grado $2n$ de la forma:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} x^i y^j \\ Q(x, y) &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j} x^i y^j \end{aligned} \quad (5.6)$$

Para poder aplicar el teorema 5.2.7 debemos convertir el sistema (5.5) a coordenadas polares.

Sustituimos (5.5), (6.13) y (6.14) en (??) y (6.18), obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} rr' &= \epsilon r \cos(\theta) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m b_{i,j} r^{i+j} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^j + \epsilon r \sin(\theta) \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m a_{i,j} r^{i+j} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^j \\ r' &= \epsilon \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r^{i+j} (b_{i,j} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j + a_{i,j} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1}) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Para θ tenemos:

$$r\theta' = \epsilon \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r^{i+j} (a_{i,j} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j - b_{i,j} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1}) + r \quad (5.8)$$

Promediamos (5.7):

$$\begin{aligned} \bar{r}' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r' d\theta \\ \bar{r}' &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r^{i+j} (b_{i,j} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j + a_{i,j} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1}) d\theta \\ \bar{r}' &= \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r^{i+j} \left(b_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j d\theta + a_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1} d\theta \right) \end{aligned}$$

por la ecuación (6.12) tenemos:

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i \text{ impar}}^n \sum_{j \text{ par}}^m r^{i+j} b_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j d\theta + \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i \text{ par}}^n \sum_{j \text{ impar}}^m r^{i+j} a_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1} d\theta$$

Por la ecuación (6.11) tenemos:

$$\bar{r}' = \epsilon \sum_{i \text{ par}}^n \sum_{j \text{ par}}^m r^{i+j} \frac{b_{i,j}}{2^{i+j+1}} \frac{(i+1)!(j)!}{\left(\frac{i+1}{2}\right)!\left(\frac{j}{2}\right)!\left(\frac{i+j+1}{2}\right)!} + \epsilon \sum_{i \text{ impar}}^n \sum_{j \text{ impar}}^m r^{i+j} \frac{a_{i,j}}{2^{i+j+1}} \frac{(i)!(j+1)!}{\left(\frac{i}{2}\right)!\left(\frac{j+1}{2}\right)!\left(\frac{i+j+1}{2}\right)!} \quad (5.9)$$

Notemos que al promediar solo se consideran del sistema (5.6):

- Para x' los coeficientes $b_{i,j}$ con i impar y j par.
- Para y' los coeficientes $a_{i,j}$ con i par y j impar.

Vamos a promediar ahora para (5.8), nos interesa que $\bar{\theta}' = \mathbf{constante}$ para tener una dinámica angular constante:

$$\bar{\theta}' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \theta' d\theta$$

$$\bar{\theta}' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r^{i+j} (a_{i,j} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j - b_{i,j} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1}) + r$$

$$\bar{\theta}' = \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m r^{i+j} \left(a_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j d\theta - b_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1} d\theta \right)$$

Por la ecuación (6.12) tenemos:

$$\bar{\theta}' = \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i \text{ impar}}^n \sum_{j \text{ par}}^m r^{i+j} a_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^{i+1} \sin(\theta)^j d\theta - \frac{\epsilon}{2\pi} \sum_{i \text{ par}}^n \sum_{j \text{ impar}}^m r^{i+j} b_{i,j} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^i \sin(\theta)^{j+1} d\theta$$

Justo si en el sistema (5.5) las funciones $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son de la forma:

$$\begin{aligned} P(x, y) &= \sum_{i \text{ par}}^n \sum_{j \text{ impar}}^m a_{i,j} x^i y^j \\ Q(x, y) &= \sum_{i \text{ impar}}^n \sum_{j \text{ par}}^m b_{i,j} x^i y^j \end{aligned} \quad (5.10)$$

Entonces tenemos la dinámica angular constante con $\bar{\theta}' = 2\pi$.

Analicemos el caso simplificado correspondiente al sistema (5.5) cuando $Q(x, y) = 0$, el sistema luce de la forma:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x + \epsilon P(x, y) \end{aligned} \quad (5.11)$$

con

$$P(x, y) = \sum_{i \text{ par}}^n \sum_{j \text{ impar}}^m a_{i,j} x^i y^j$$

Por simplicidad podemos suponer que n par y m impar, entonces el sistema polar promedio simplificado es:

$$\begin{aligned}\bar{r}' &= \epsilon \sum_{i \text{ par}}^n \sum_{j \text{ impar}}^m r^{i+j} \frac{a_{i,j}}{2^{i+j+1}} \frac{(i!)(j+1)!}{\left(\frac{i}{2}\right)! \left(\frac{j+1}{2}\right)! \left(\frac{i+j+1}{2}\right)!} \\ \bar{\theta}' &= 2\pi\end{aligned}\quad (5.12)$$

Podemos intuir que el número de ciclos límite del sistema (5.11) depende del número de ciclos límite del sistema promedio (5.12). Más aún, podemos afirmar que si el sistema promedio tiene k ciclos límite, entonces el sistema (5.11) tiene exactamente k ciclos límite.

La parte derecha de (5.12) es un polinomio de grado $n+m$ que es impar, entonces el sistema tiene como punto de equilibrio a $r = 0$ y a lo más $\frac{n+m-1}{2}$ puntos de equilibrio reales positivos, lo que implica que tiene a lo más $\frac{n+m-1}{2}$ ciclos límite. Algunos ejemplos relevantes de la forma (5.11) son:

- El oscilador de Van der Pol:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x + \epsilon y(1 - x^2)\end{aligned}$$

- El oscilador de Rayleigh:

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= -x + \epsilon(1 - y^2)y\end{aligned}$$

5.4. Ecuación de Van der Pol

La ecuación del oscilador de Van der Pol describe el comportamiento de ciertos sistemas oscilantes no lineales.

$$x'' + x + \epsilon x'(x^2 - 1) = 0 \quad (5.13)$$

donde ϵ es un parámetro de amortiguamiento no lineal.

El término $-\epsilon(1 - x^2)x'$ representa la no linealidad del amortiguamiento en el sistema. La expresión $(1 - x^2)$ describe cómo el amortiguamiento varía en función de la posición del oscilador. Cuando x es pequeño, este término es cercano a 1 y el amortiguamiento es lineal. Sin embargo, a medida que x aumenta, el término $(1 - x^2)$ se hace más negativo, generando un efecto de amortiguamiento no lineal que disminuye la velocidad del oscilador.

Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}y' &= -x + \epsilon y(1 - x^2) \\ x' &= y\end{aligned}\quad (5.14)$$

Es de la forma (5.11) con $P(x, y) = y(1 - x^2)$, es decir cuando $n = 2$ y $m = 1$. Por (5.12) obtenemos el sistema promedio:

$$\begin{aligned}\bar{r}' &= \frac{\epsilon}{8}r(4 - r^2) \\ \bar{\theta}' &= 2\pi\end{aligned}\tag{5.15}$$

Las soluciones de equilibrio son $r = 0$ y $r = 2$.

1. Si $0 < r < 2$, entonces $r' > 0$, por lo que 0 es un punto fuente o repulsivo.
2. Si $r > 2$, entonces $r' < 0$, entonces $r = 2$ es sumidero o atractor.

Esto quiere decir que entre dos circunferencias de radios $0 < r_{\min} < 2$ y $2 < r_{\max}$ existe al menos una curva cerrada a la cual las curvas convergen.

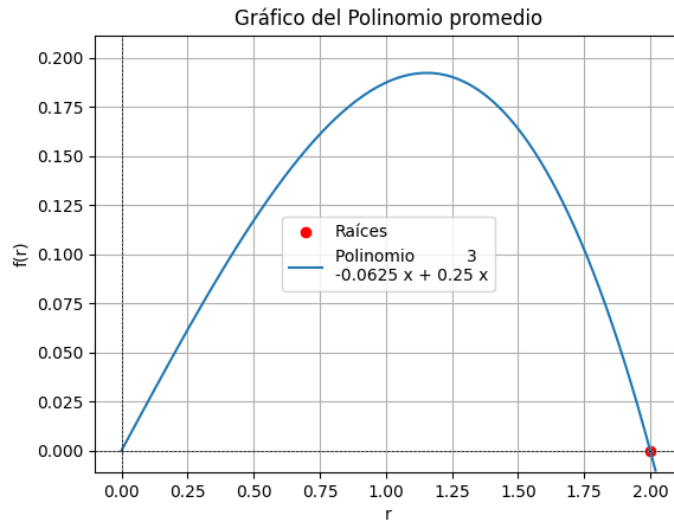


Figura 5.3: Grafico del polinomio promedio de (5.15).

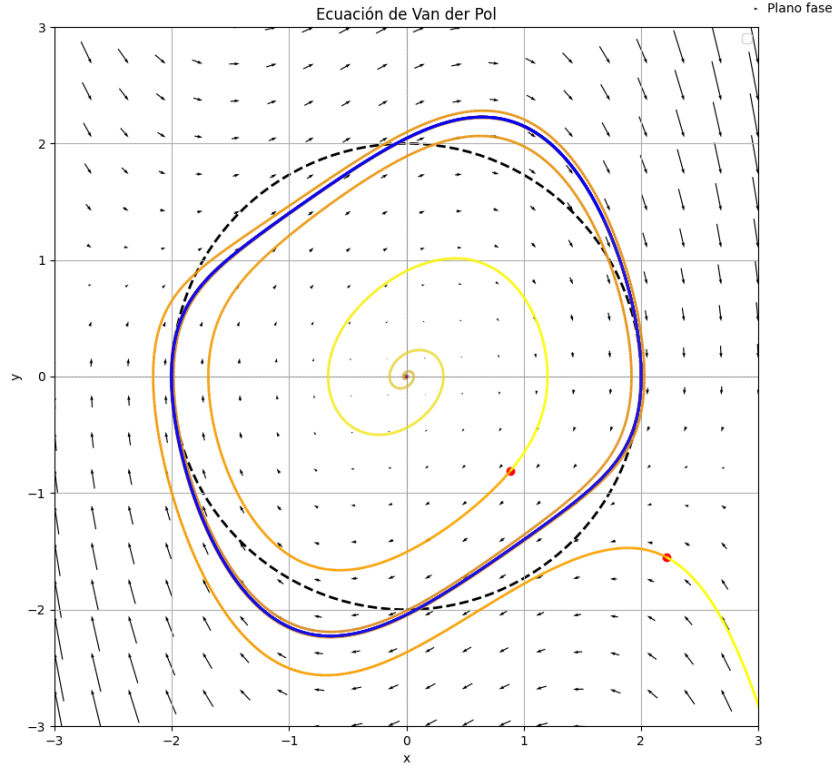


Figura 5.4: Plano fase de (5.15).

5.5. Ecuación de Rayleigh

La ecuación de Rayleigh con amortiguamiento no lineal, se utiliza para estudiar oscilaciones no lineales en sistemas mecánicos y se encuentra en diversos campos como la mecánica estructural y la dinámica de sistemas físicos.

$$x'' + \epsilon(x'^2 - 1)x' + x = 0$$

El parámetro ϵ es un coeficiente que controla la influencia del término no lineal en el amortiguamiento. El término $\epsilon(x'^2 - 1)x'$ es el término no lineal en el amortiguamiento. Mientras que en el amortiguamiento lineal la fuerza de amortiguamiento es proporcional a la velocidad, en este caso el amortiguamiento depende de la velocidad al cuadrado y se modifica por el término $(x'^2 - 1)$. Esto introduce un comportamiento no lineal en el sistema y puede dar lugar a fenómenos como la autoexcitación y la respuesta no armónica. Extendemos a un sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x + \epsilon(1 - y^2)y \end{aligned} \quad (5.16)$$

Es de la forma (5.11) con $P(x, y) = \epsilon(1 - y^2)y$, es decir cuando $n = 0$ y $m = 3$. Entonces tenemos el sistema

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon r}{8}(4 - 3r^2)$$

$$\bar{\theta}' = 2\pi t$$

Las soluciones de equilibrio son $r = 0$ y $r = \frac{2}{3}\sqrt{3} \approx 1,1547$

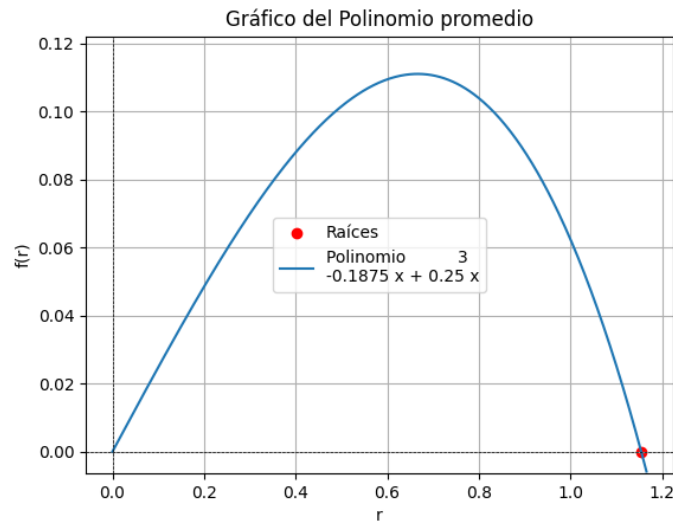


Figura 5.5: Grafico del polinomio promedio de (5.15).

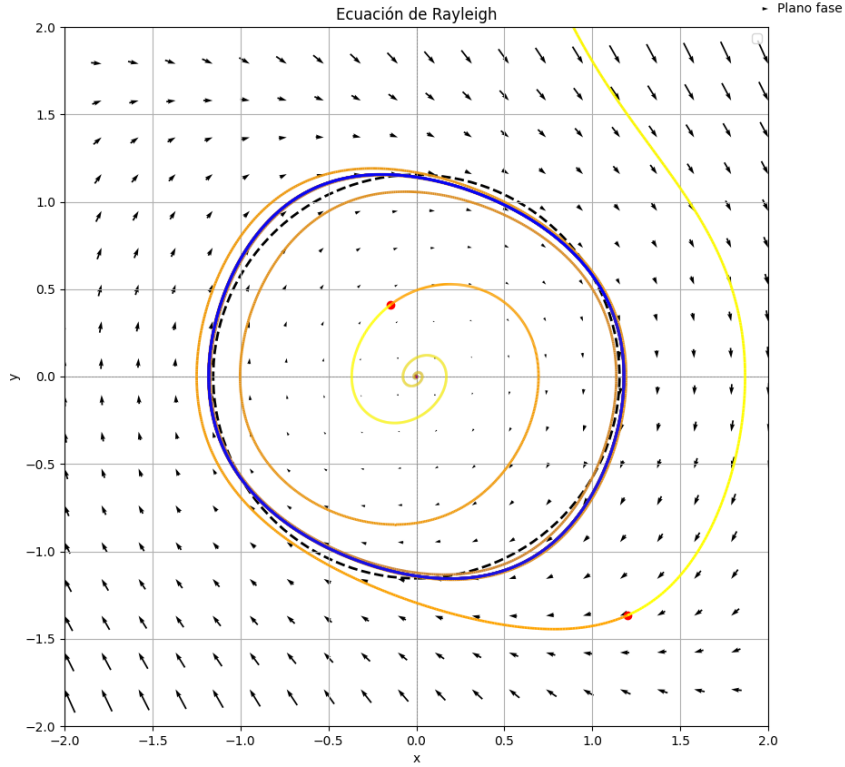


Figura 5.6: Plano fase de (5.15).

5.6. Generalidades

La Ecuación de Van der Pol corresponde al sistema (5.11) cuando $n = 2$ y $m = 1$. Entonces su sistema promedio (5.12) toma la forma:

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon}{8} r (a_{2,1} r^2 + 4a_{0,1}) \quad (5.17)$$

Como ya mencionamos antes, $r = 0$ es un punto de equilibrio. Al ser un polinomio de grado 3 con variables de grado impar, entonces tiene puede tener un punto de equilibrio real positivo.

$$r = 2 \sqrt{-\frac{a_{0,1}}{a_{2,1}}} \quad (5.18)$$

La condición para que esto ocurra es que:

$$a_{2,1}a_{0,1} < 0 \quad (5.19)$$

Es decir, $a_{2,1}$ y $a_{0,1}$ deben tener signos opuestos. En la ecuación de Van der Pol, $a_{2,1} = -1$ y $a_{0,1} = 1$, por lo que cumple la condición (5.19).

Por otro lado, la ecuación de Rayleigh corresponde al sistema (5.11) cuando $n = 0$ y $m = 3$. Entonces su sistema promedio (5.12) toma la forma:

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon r}{8} (3a_{0,3}r^2 + 4a_{2,3}) \quad (5.20)$$

De igual manera, $r = 0$ es un punto de equilibrio. Al ser un polinomio de grado 3 con variables de grado impar, entonces tiene puede tener un punto de equilibrio real positivo.

$$r = 2\sqrt{-\frac{a_{2,3}}{3a_{0,3}}} \quad (5.21)$$

La condición para que esto ocurra es que:

$$a_{2,3}a_{0,3} < 0 \quad (5.22)$$

Es decir, $a_{2,3}$ y $a_{0,3}$ deben tener signos opuestos. En la ecuación de Rayleigh, $a_{2,3} = 1$ y $a_{0,3} = -1$, por lo que cumple la condición (5.22).

Vamos ahora a analizar cuando $n = 2$ y $m = 3$. Al sustituir en (5.12) obtenemos:

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon r}{16} (a_{2,3}r^4 + 2(3a_{0,3} + a_{2,1})r^2 + 8a_{0,1}) \quad (5.23)$$

Si $a_{2,3} = 0$, entonces el sistema (5.23) se reduce a:

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon r}{16} (2(3a_{0,3} + a_{2,1})r^2 + 8a_{0,1}) \quad (5.24)$$

EL cual tiene puntos de equilibrio reales positivos o un solo ciclo límite si:

$$(3a_{0,3} + a_{2,1})a_{0,1} < 0 \quad (5.25)$$

Por otro lado, si $a_{2,3} \neq 0$, haciendo $z = r^2$ las raíces del polinomio (5.23) son:

$$z_{1,2} = \frac{-3a_{0,3} - a_{2,1} \pm \sqrt{(3a_{0,3} + a_{2,1})^2 - 8a_{0,1}a_{2,3}}}{2a_{2,3}} \quad (5.26)$$

entonces el sistema (5.23) puede tener dos puntos de equilibrio reales positivos o dos ciclos límite si:

- Si $(3a_{0,3} + a_{2,1})^2 > 8a_{0,1}a_{2,3}$.
- Si $\sqrt{(3a_{0,3} + a_{2,1})^2 - 8a_{0,1}a_{2,3}} > (3a_{0,3} + a_{2,1})$, garantiza un ciclo límite.
- Si $-\sqrt{(3a_{0,3} + a_{2,1})^2 - 8a_{0,1}a_{2,3}} > (3a_{0,3} + a_{2,1})$, garantiza un segundo punto de equilibrio real positivo o un segundo ciclo límite.

El siguiente sistema satisface las condiciones para tener dos puntos de equilibrio reales positivos:

$$\begin{aligned} x' &= y \\ y' &= -x + \epsilon(y - 2y^3 + x^2y + 2x^2y^3)y \end{aligned} \quad (5.27)$$

Su sistema promedio es:

$$\bar{r}' = \frac{\epsilon r}{16} (2r^4 - 10r^2 + 8) \quad (5.28)$$

Tiene dos puntos de equilibrio reales positivos $r = 2$ y $r = 1$.

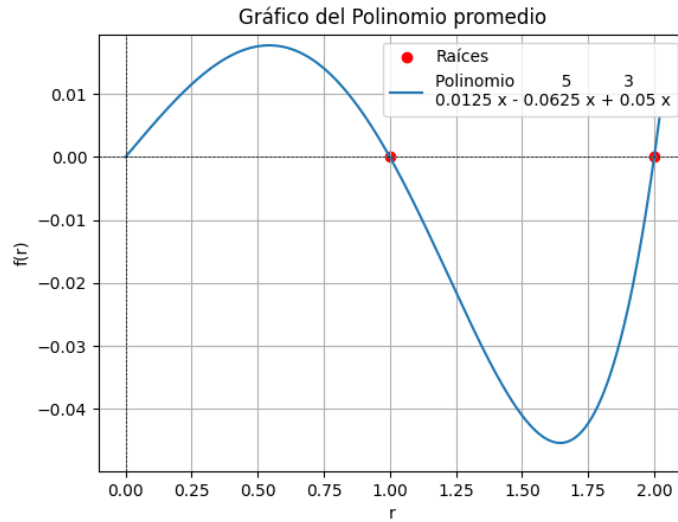


Figura 5.7: Grafico del polinomio promedio de (5.28).

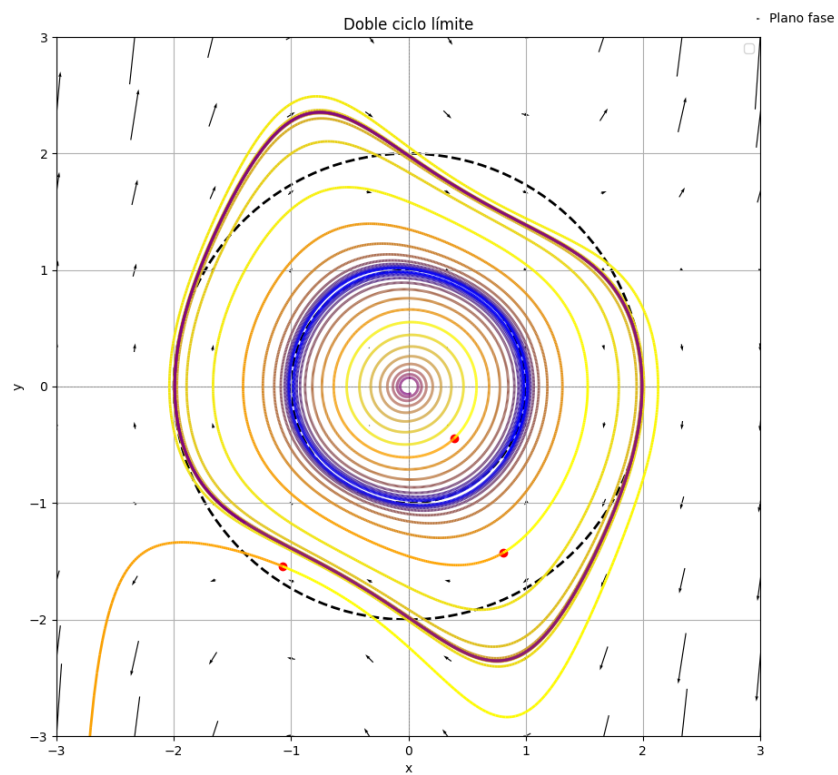


Figura 5.8: Plano fase de (5.28).

Capítulo 6

Formulas

6.1. Integral de coseno y seno

Vamos a resolver la siguiente integral, que nos va a ser muy útil para el desarrollo de este trabajo:

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta \quad (6.1)$$

Vamos a comenzar analizando la integral (6.1) para $m, n \in \mathbb{Z}^+$, números pares.

Sean $n = 2p$ y $m = 2q$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$ enteros positivos.

$$= \int_0^{2\pi} \cos^{2q} \theta \sin^{2p} \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^q \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^p d\theta \quad (6.2)$$

Hagamos un cambio de variable $\tau = \cos(2\theta)$, entonces $d\tau = -2 \sin(2\theta) d\theta$ y $d\theta = -\frac{d\tau}{2 \sin(2\theta)}$. Notemos que $\tau^2 = \cos^2 2\theta = 1 - \sin^2 2\theta$, entonces en $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\sin(2\theta) = \begin{cases} \sqrt{1 - \tau^2} & \text{si } \theta \in [0, \pi/2] \text{ o } \theta \in [\pi, 3\pi/2] \\ -\sqrt{1 - \tau^2} & \text{si } \theta \in [\pi/2, \pi] \text{ o } \theta \in [3\pi/2, 2\pi] \end{cases} \quad (6.3)$$

Entonces la integral (6.2) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^q \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^p d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^q \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^p d\theta \\ &+ \int_{\pi}^{3\pi/2} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^q \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^p d\theta + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \right)^q \left(\frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \right)^p d\theta \end{aligned}$$

Hacemos el cambio de variable y considerando (6.3)

$$\begin{aligned}
&= \int_1^{-1} \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^q \left(\frac{1-\tau}{2} \right)^p \frac{-d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^q \left(\frac{1-\tau}{2} \right)^p \frac{d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} \\
&+ \int_1^{-1} \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^q \left(\frac{1-\tau}{2} \right)^p \frac{-d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} + \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^q \left(\frac{1-\tau}{2} \right)^p \frac{d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} \\
&= 4 \int_{-1}^1 \left(\frac{1+\tau}{2} \right)^q \left(\frac{1-\tau}{2} \right)^p \frac{d\tau}{2\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{2^{q+p-1}} \int_{-1}^1 (1+\tau)^q (1-\tau)^p \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}
\end{aligned}$$

Hacemos de nuevo un cambio de variable $\tau = \cos \phi$, entonces $d\tau = -\sin \phi d\phi$. Como $-1 \leq \tau \leq 1$, entonces $\phi \in [0, \pi]$. En este dominio se tiene:

$$\sqrt{1-\tau^2} = \sqrt{1-\cos^2 \phi} = \sqrt{\sin^2 \phi} = |\sin \phi| = \sin \phi$$

Entonces se puede reescribir la integral como:

$$= \frac{1}{2^{q+p-1}} \int_{\pi}^0 \frac{(1+\cos \phi)^q (1-\cos \phi)^p}{\sin \phi} (-\sin \phi) d\phi = \frac{1}{2^{q+p-1}} \int_0^{\pi} (1+\cos \phi)^q (1-\cos \phi)^p d\phi$$

Recordemos que

$$1 + \cos \phi = 2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (6.4)$$

$$1 - \cos \phi = 2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \quad (6.5)$$

Sustituimos las identidades (6.4) y (6.5) en la integral:

$$= \frac{1}{2^{q+p-1}} \int_0^{\pi} \left(2 \cos^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right)^q \left(2 \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \right)^p d\phi$$

Desarrollando las potencias y simplificando, se tiene:

$$= 2 \int_0^{\pi} \cos^{2q} \left(\frac{\phi}{2} \right) \sin^{2p} \left(\frac{\phi}{2} \right) d\phi$$

Hacemos un cambio de variable $u = \frac{\phi}{2}$, entonces $du = \frac{d\phi}{2}$ y $d\phi = 2du$. Sustituimos en la integral:

$$= 2 \int_0^\pi \cos^{2q}(u) \sin^{2p}(u) 2du = 4 \int_0^\pi \cos^{2q}(u) \sin^{2p}(u) du$$

Sea $2a = 2q + 1$ y $2b = 2p + 1$, con $a, b \in \mathbb{Z}^+$ enteros positivos. Entonces la integral se puede reescribir como:

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^{2a-1}(u) \sin^{2b-1}(u) du = 4 \left(\frac{1}{2} B(a, b) \right)$$

Donde $B(a, b)$ es la función beta.

$$= 2B\left(q + \frac{1}{2}, p + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\Gamma\left(q + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(q + p + 1)}$$

Donde $\Gamma(x)$ es la función gamma. Aplicando propiedades de la función gamma, se tiene:

$$= \frac{2 \frac{(2q)!}{2^{2q} q!} \sqrt{\pi} \frac{(2p)!}{2^{2p} p!} \sqrt{\pi}}{(q + p)!} = \frac{2\pi}{2^{2q+2p}} \frac{(2q)!(2p)!}{q!p!(q + p)!}$$

Por lo tanto si m, n son números enteros positivos pares, entonces:

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \frac{2\pi}{2^{m+n}} \frac{(m!)(n!)}{\left(\frac{m}{2}\right)!\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{m+n}{2}\right)!} \quad (6.6)$$

Ahora vamos a analizar la integral (6.1) cuando al menos uno de los enteros m o n es impar.

Sea $n = 2p + 1$ y $m = 2q$ con $p, q \in \mathbb{Z}^+$ enteros positivos.

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^{2q} \theta \sin^{2p+1} \theta d\theta \quad (6.7)$$

Hagamos el cambio de variable $\theta = 2\pi - \varphi$, sustituimos en (6.7) y aplicamos la propiedad de linealidad de la integral:

$$\begin{aligned} &= \int_{2\pi}^0 \cos^{2q}(2\pi - \varphi) \sin^{2p+1}(2\pi - \varphi) (-d\varphi) = \int_0^{2\pi} \cos^{2q}(-\varphi) \sin^{2p+1}(-\varphi) d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^{2q} \varphi (-\sin \varphi)^{2p+1} d\varphi = - \int_0^{2\pi} \cos^{2q} \varphi \sin^{2p+1} \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Entonces

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = - \int_0^{2\pi} \cos^m \varphi \sin^n \varphi d\varphi$$

Por lo tanto, para m par y n impar:

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = 0 \quad (6.8)$$

Análogamente podemos demostrar que, para m impar y n par:

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = 0 \quad (6.9)$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{2\pi} \cos^m \theta \sin^n \theta d\theta = \quad (6.10)$$

- Si m y n son pares:

$$= \frac{2\pi}{2^{m+n}} \frac{(m!)(n!)}{(\frac{m}{2})!(\frac{n}{2})!(\frac{m+n}{2})!} \quad (6.11)$$

- En caso contrario:

$$= 0 \quad (6.12)$$

6.2. Coordenadas polares

Consideremos las variables $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, las cuales están parametrizadas en términos del tiempo t , es decir, $x = x(t)$ y $y = y(t)$ con parámetro $t \geq 0$. Definimos el cambio de coordenadas cartesianas (x, y) a coordenadas polares (r, θ) mediante las relaciones:

$$x = r \cos(\theta) \quad (6.13)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (6.14)$$

donde $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$ también están parametrizadas en términos de t .

Estas ecuaciones nos llevan a las siguientes identidades:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (6.15)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (6.16)$$

en este caso restringimos $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ya que en ese intervalo la función $\tan(\theta)$ es invertible y continua.

Derivamos las ecuaciones (6.15) y (6.16) respecto a t , obtenemos las relaciones dinámicas en coordenadas polares:

$$rr' = xx' + yy' \tag{6.17}$$

$$r^2\theta' = xy' - yx' \tag{6.18}$$

Estas relaciones nos van a permitir simplificar sistemas de ecuaciones diferenciales en coordenadas cartesianas a coordenadas polares, además nos permiten estudiar la evolución radial y angular de las trayectorias en el plano de fases, lo cual es clave para analizar ciclos límite [3].

Bibliografía

- [1] David Hilbert. *Mathematical problems*. Traducción al inglés de la conferencia original de 1900. Bulletin of the American Mathematical Society, 1902.
- [2] Yulij Ilyashenko. «Centennial history of Hilbert's 16th problem». En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 39.3 (2002), págs. 301-354.
- [3] Lawrence Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 2001.
- [4] Henri Dulac. «Sur les cycles limites». En: *Bulletin de la Société Mathématique de France* 51 (1923), págs. 45-188.
- [5] Jean Écalle. «Correction to: "Finiteness theorems for limit cycles"». En: *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 76 (1992), págs. 1-12.
- [6] Yulij Ilyashenko. «Finiteness theorems for limit cycles». En: *Russian Mathematical Surveys* 45.2 (1991), págs. 143-200.
- [7] Balthasar Van der Pol. «On relaxation-oscillations». En: *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science* 2.11 (1926), págs. 978-992.
- [8] John William Strutt Rayleigh. «The theory of sound». En: *Macmillan* (1883).
- [9] Richard FitzHugh. «Impulses and physiological states in theoretical models of nerve membrane». En: *Biophysical Journal* 1.6 (1961), págs. 445-466.
- [10] Jinichi Nagumo, Suguru Arimoto y Shuji Yoshizawa. «An active pulse transmission line simulating nerve axon». En: *Proceedings of the IRE* 50.10 (1962), págs. 2061-2070.
- [11] Anatol M. Zhabotinsky. «Periodic processes in a liquid phase oxidation reaction». En: *Doklady Akademii Nauk SSSR* 157 (1964), págs. 392-395.
- [12] James D. Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, 2002.
- [13] Hassan K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 2002.
- [14] John Guckenheimer y Philip Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.

- [15] Stephen Wiggins. *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*. Springer, 2003.
- [16] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos: With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. CRC Press, 2018.
- [17] Carl M. Bender y Steven A. Orszag. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I: Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. Springer, 2013.
- [18] E. J. Hinch. *Perturbation Methods*. Cambridge University Press, 1991.
- [19] Morris W. Hirsch, Stephen Smale y Robert L. Devaney. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2012.
- [20] Vladimir I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer, 1992.
- [21] Henri Poincaré. «Mémoire sur les courbes définies par une équation différentielle». En: *Journal de mathématiques pures et appliquées* 7 (1881), págs. 375-422.
- [22] Ivar Bendixson. *Sur les courbes définies par des équations différentielles*. Vol. 24. 1901, págs. 1-88.
- [23] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2013.
- [24] Wolfgang Hahn. *Stability of Motion*. Springer, 1967.
- [25] Joseph LaSalle y Solomon Lefschetz. *Stability by Liapunov's Direct Method with Applications*. Academic Press, 1961.