Simulation de la Trajectoire d'une Particule autour d'un Trou Noir de Kerr

MANIER Lamine, MUCCIONI Matteo

13 décembre 2024

Plan de la présentation

Contexte Général

Les Trous Noirs

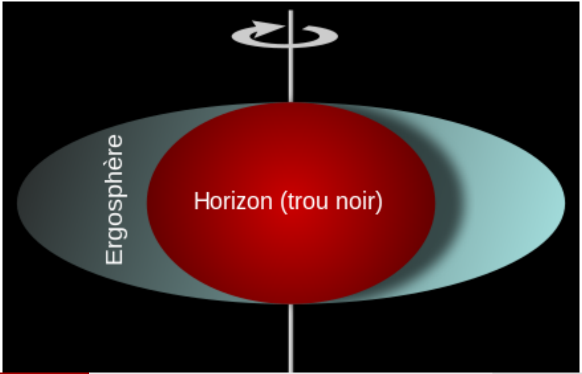
- Objets astrophysiques avec une gravité si intense que rien ne peut s'en échapper.
- Prédits par la théorie de la relativité générale d'Einstein.

Trou Noir de Kerr

- Solution des équations d'Einstein pour un trou noir en rotation.
- Caractérisé par sa masse M et son moment angulaire a.
- Influence les trajectoires des particules et de la lumière.

Objectifs du Projet

- **Simulation Numérique** : Modéliser les trajectoires des particules autour d'un trou noir de Kerr.
- **Visualisation 3D** : Représentation graphique des géodésiques en temps réel.
- **Analyse Physique** : Étudier l'effet des paramètres physiques sur les trajectoires.



Métrique de Kerr

Expression de la métrique

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mar\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2\theta}{\Sigma}\right) \sin^2\theta d\phi^2$$

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$$

- Décrit l'espace-temps autour d'un trou noir en rotation.
- Introduit des effets notables comme l'**ergosphère**.

Géodésiques et Constantes du Mouvement

- **Équations du Mouvement** :

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu_{\nu\lambda}\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\lambda}{d\tau} = 0$$

  où $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ sont les symboles de Christoffel.
- **Constantes du Mouvement** :
  - Énergie spécifique E
  - Moment angulaire spécifique L_z
  - Constante de Carter Q
- Ces constantes permettent de réduire les équations du mouvement à des formes intégrables.

Fonctions Radiale et Angulaire

$$R(r) = \left[E(r^2 + a^2) - aL_z\right]^2 - \Delta\left[\mu^2 r^2 + (L_z - aE)^2 + Q\right]$$

$$\Theta(\theta) = Q - \left[a^2(\mu^2 - E^2) + \frac{L_z^2}{\sin^2\theta}\right]\cos^2\theta$$

- μ : masse propre de la particule (souvent normalisée à 1).
- $R(r)$ et $\Theta(\theta)$ déterminent la dynamique radiale et angulaire.

Intégration Numérique avec Runge-Kutta

Méthode de Runge-Kutta d'Ordre 4 (RK4)

- Approche standard pour résoudre les EDO.
- Offre un bon compromis entre précision et complexité.

Étapes de l'Algorithme

1. Calcul des pentes k_1, k_2, k_3, k_4.
2. Combinaison pondérée des pentes pour estimer la nouvelle valeur.

Implémentation en C++

```
EtatGeodesique etat_k4;
etat_k4.r = etat.r + dt * k3.r;
etat_k4.theta = etat.theta + dt * k3.theta;
etat_k4.phi = etat.phi + dt * k3.phi;
etat_k4.tau = etat.tau + dt * k3.tau;
etat_k4.p_r = etat.p_r + dt * k3.p_r;
etat_k4.p_theta = etat.p_theta + dt * k3.p_theta;
EtatGeodesique k4 = derivatives(etat_k4);

// Combiner pour obtenir le nouvel  tat
EtatGeodesique nouvelEtat;
nouvelEtat.r = etat.r + (dt / 6.0) * (k1.r + 2.0 * k2.r + 2.0 * k3.r +
    k4.r);
nouvelEtat.theta = etat.theta + (dt / 6.0) * (k1.theta + 2.0 * k2.theta
    + 2.0 * k3.theta + k4.theta);
nouvelEtat.phi = etat.phi + (dt / 6.0) * (k1.phi + 2.0 * k2.phi + 2.0 *
    k3.phi + k4.phi);
nouvelEtat.tau = etat.tau + (dt / 6.0) * (k1.tau + 2.0 * k2.tau + 2.0 *
    k3.tau + k4.tau);
```

Architecture du Programme

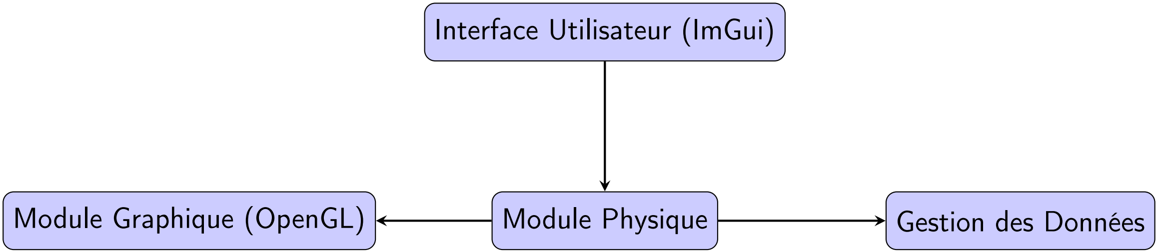


Figure – Schéma de l'architecture logicielle

Principales Composantes

Module Physique

- Gestion des équations du mouvement.
- Calcul des trajectoires avec les paramètres fournis.

Module Graphique

- Affichage des trajectoires en 3D.
- Visualisation des éléments physiques (ergosphère, horizon des événements).

Interface Utilisateur

- Contrôle interactif des paramètres de simulation.
- Options pour démarrer, arrêter et réinitialiser la simulation.

Trajectoire Simulée

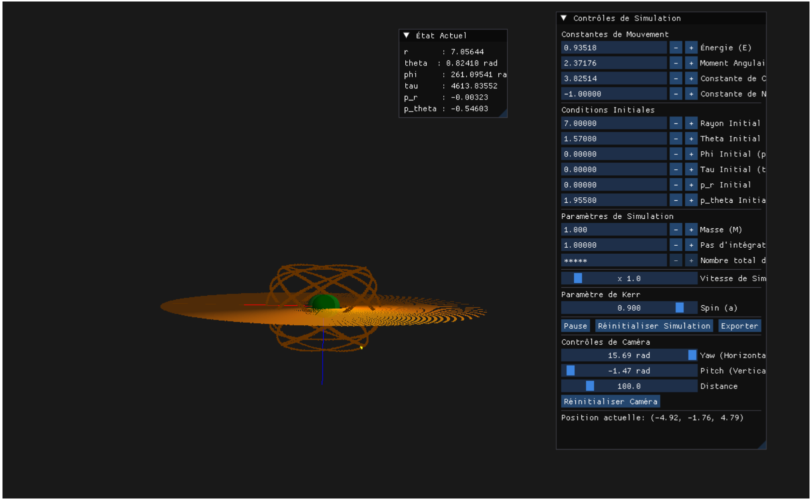


Figure – Exemple de trajectoire autour d'un trou noir de Kerr

Influence des Paramètres

Variation du Moment Angulaire a

- Pour $a = 0$, on retrouve le trou noir de Schwarzschild.
- Augmentation de a entraîne des effets de frame-dragging.
- Impact significatif sur la forme des trajectoires.

Effet de l'Énergie E et du Moment Cinétique L_z

- Modification de l'énergie influence la vitesse de la particule.
- Le moment cinétique détermine la nature orbitale de la trajectoire.

Conclusion

- Réalisation d'une simulation complète des trajectoires autour d'un trou noir de Kerr.
- Intégration réussie de concepts physiques complexes dans une application interactive.
- Outil pouvant servir à l'enseignement ou à la vulgarisation scientifique.

Perspectives

Améliorations Futures

- Mise en œuvre de méthodes numériques plus avancées (par ex. Runge-Kutta adaptatif).
- Optimisation des performances pour gérer des simulations plus complexes.

Extensions Possibles

- Intégrer les effets électromagnétiques (trou noir de Kerr-Newman).
- Simuler les trajectoires de la lumière pour étudier les lentilles gravitationnelles.