Simulation des Géodésiques autour d'un Trou Noir de Kerr : Analyse Théorique

MANIER Lamine

7 décembre 2024

Table des matières

1 Introduction

La relativité générale, formulée par Albert Einstein, décrit la gravitation comme une courbure de l'espace-temps induite par la masse et l'énergie. Parmi les solutions exactes des équations du champ d'Einstein, la métrique de Kerr occupe une place particulière en modélisant les trous noirs en rotation. Ce document présente une analyse théorique approfondie de la métrique de Kerr, des symboles de Christoffel associés, des équations géodésiques, ainsi que des calculs détaillés concernant l'ergosphère. Ces concepts sont essentiels pour comprendre la dynamique des particules autour d'un trou noir de Kerr et constituent la base de la simulation développée en C++.

2 La Relativité Générale et les Trous Noirs

La relativité générale généralise la relativité restreinte en intégrant l'effet de la gravitation sur la structure de l'espace-temps. Les équations du champ d'Einstein, qui relient la géométrie de l'espace-temps au contenu en énergie et en matière, sont au cœur de cette théorie. Parmi les solutions de ces équations, les trous noirs représentent des régions de l'espace-temps où la gravité est si intense qu'aucune matière ou rayonnement ne peut s'en échapper.

3 La Métrique de Kerr

3.1 Formulation de la Métrique

La métrique de Kerr est une solution des équations du champ d'Einstein dans le vide ($T_{\mu\nu} = 0$) et décrit l'espace-temps autour d'un trou noir en rotation. Elle est caractérisée par deux paramètres : la masse M et le paramètre de spin a, où $a = \frac{J}{M}$ et J est le moment angulaire du trou noir.

En coordonnées de Boyer-Lindquist, la métrique de Kerr s'exprime comme suit :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4Mra\sin^2\theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta d\phi^2 \tag{1}$$

où

$$\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta, \tag{2}$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2. \tag{3}$$

3.2 Caractéristiques de la Métrique de Kerr

La métrique de Kerr présente plusieurs caractéristiques notables :

— **Singularités** : Deux singularités sont présentes, une à $r = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ (singularité en anneau) et l'autre à $\Delta = 0$, c'est-à-dire $r = r_\pm = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}$, correspondant aux horizons de l'événement.

— **Ergosphère** : Région extérieure à l'horizon de l'événement où le temps et l'espace sont liés de manière telle qu'il est impossible pour une particule de rester immobile par rapport à un observateur distant.

— **Conservation** : La présence de symétries dans la métrique de Kerr conduit à des quantités conservées, notamment l'énergie, le moment angulaire et la constante de Carter.

4 Symboles de Christoffel

Les symboles de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ sont des objets géométriques essentiels dans la relativité générale, représentant la connexion affine qui définit la manière dont les vecteurs se comparent dans des espaces-temps courbes. Ils sont définis par :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right) \tag{4}$$

4.1 Calcul des Symboles de Christoffel pour la Métrique de Kerr

Pour la métrique de Kerr, les symboles de Christoffel sont calculés en prenant les dérivées partielles des composants du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ et en les combinant selon la formule ci-dessus. En raison de la complexité de la métrique de Kerr, le calcul analytique complet des symboles de Christoffel est laborieux et implique de nombreuses étapes. Cependant, pour les besoins de la simulation, il est souvent suffisant d'utiliser des expressions déjà dérivées ou d'approximer certains termes.

5 Équations Géodésiques

Les géodésiques représentent les trajectoires des particules libres dans l'espace-temps courbe. Elles sont déterminées par l'équation géodésique :

$$\frac{d^2 x^{\lambda}}{d\tau^2} + \Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0 \tag{5}$$

où τ est le paramètre affine (temps propre pour les géodésiques temporelles).

5.1 Intégration des Équations Géodésiques

L'intégration des équations géodésiques pour la métrique de Kerr nécessite des méthodes numériques en raison de la complexité des symboles de Christoffel. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) est souvent utilisée pour sa précision et sa stabilité.

6 L'Ergosphère

6.1 Définition de l'Ergosphère

L'ergosphère est une région de l'espace-temps autour d'un trou noir de Kerr située entre l'horizon des événements et le sphéroïde de stationnarité (surface où $g_{tt} = 0$). Dans cette région, les effets de la rotation du trou noir sont tels que toute particule doit se déplacer dans la direction du spin du trou noir, rendant impossible le repos absolu par rapport à un observateur distant.

6.2 Calcul du Rayon de l'Ergosphère

Le rayon de l'ergosphère dépend de l'angle θ et est déterminé par la condition $g_{tt} = 0$. Pour la métrique de Kerr, cela donne :

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) = 0 \tag{6}$$

Résolvant cette équation :

$$1 - \frac{2Mr}{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\Sigma}{2M} \tag{7}$$

Substituant $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$:

$$r_{\text{ergo}} = \frac{r^2 + a^2 \cos^2\theta}{2M} \tag{8}$$

Pour obtenir le rayon à un angle particulier θ, résolvons cette équation quadratique en r. À l'équateur ($\theta = \frac{\pi}{2}$), le rayon de l'ergosphère devient :

$$r_{\text{ergo, équatorial}} = M + \sqrt{M^2 - a^2} \tag{9}$$

6.3 Propriétés de l'Ergosphère

- **Extraction d'Énergie** : Le processus de Penrose permet d'extraire de l'énergie de l'ergosphère, exploitant la rotation du trou noir.
- **Trajectoires Particulières** : Les géodésiques dans l'ergosphère montrent des comportements distincts, notamment des trajectoires hélicoïdales et la possibilité de particules échappant avec plus d'énergie.

7 Méthodes Numériques

7.1 Méthode de Runge-Kutta d'Ordre 4 (RK4)

La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 est une technique d'intégration numérique utilisée pour résoudre les équations différentielles ordinaires (EDO). Elle offre une précision élevée tout en restant relativement simple à implémenter.

Pour une EDO de la forme :

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \tag{10}$$

l'algorithme RK4 procède comme suit :

$$k_1 = f(t_n, y_n) \tag{11}$$
$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_1\right) \tag{12}$$
$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t}{2}k_2\right) \tag{13}$$
$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3) \tag{14}$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{15}$$

7.2 Application à l'Équation Géodésique

Pour les équations géodésiques de la métrique de Kerr, nous avons un système d'EDO couplées pour les coordonnées r, θ, ϕ et les moments conjugués p_r, p_θ. La méthode RK4 est appliquée pour intégrer ce système et obtenir la trajectoire de la particule.

8 Résultats Théoriques

8.1 Trajectoires dans l'Ergosphère

Les géodésiques dans l'ergosphère du trou noir de Kerr présentent des comportements distincts par rapport aux géodésiques en dehors de cette région. En particulier, la rotation du trou noir induit une précession des orbites et des trajectoires complexes, incluant des spirales et des trajectoires de type hélicoïdal.

8.2 Extraction d'Énergie et Processus de Penrose

Le processus de Penrose est un mécanisme théorique permettant d'extraire de l'énergie de la rotation d'un trou noir via des particules fragmentées dans l'ergosphère. Une particule entrant dans l'ergosphère peut se scinder en deux, où l'une des particules tombe dans le trou noir avec une énergie négative (du point de vue d'un observateur distant), et l'autre émerge avec une énergie supérieure à celle initiale.

9 Conclusion

Ce document a présenté une analyse théorique détaillée de la métrique de Kerr, des symboles de Christoffel, des équations géodésiques, et des propriétés de l'ergosphère. Ces concepts sont fondamentaux pour comprendre la dynamique des particules autour d'un trou noir en rotation et sont essentiels pour la simulation numérique réalisée en C++. L'intégration des équations géodésiques via la méthode RK4 permet de visualiser les trajectoires complexes dans l'ergosphère, mettant en évidence des phénomènes tels que la précession des orbites et l'extraction d'énergie via le processus de Penrose.

10 Annexes

10.1 Démonstration des Symboles de Christoffel pour la Métrique de Kerr

Pour calculer les symboles de Christoffel $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ pour la métrique de Kerr, nous suivons la définition suivante :

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_{\mu} g_{\sigma\nu} + \partial_{\nu} g_{\sigma\mu} - \partial_{\sigma} g_{\mu\nu} \right) \tag{16}$$

10.1.1 Calcul de $\Gamma^{r}_{\mu\nu}$

Prenons, par exemple, le symbole de Christoffel Γ^{r}_{tt}.

Les composantes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ sont dérivées partiellement par rapport à r, θ, etc. En appliquant la formule ci-dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \Gamma^{r}_{tt} &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(2\partial_{t} g_{rt} - \partial_{r} g_{tt} \right) && (17) \\ &= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_{r} g_{tt} && (18) \end{aligned}$$

En substituant les expressions de g_{tt} et g^{rr}, nous pouvons obtenir une expression explicite pour Γ^{r}_{tt}.

10.1.2 Calcul de Γ^{r}_{rr}

$$\begin{aligned} \Gamma^{r}_{rr} &= \frac{1}{2} g^{r\sigma} \left(\partial_{r} g_{\sigma r} + \partial_{r} g_{\sigma r} - \partial_{\sigma} g_{rr} \right) && (19) \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} \left(2\partial_{r} g_{rr} - \partial_{r} g_{rr} \right) && (20) \\ &= \frac{1}{2} g^{rr} \partial_{r} g_{rr} && (21) \end{aligned}$$

10.1.3 Autres Symboles de Christoffel

Les autres symboles de Christoffel sont calculés de manière similaire en utilisant les dérivées partielles des composants du tenseur métrique. En raison de la symétrie de la métrique de Kerr, certains symboles seront nuls ou liés entre eux.

10.2 Démonstration des Équations Géodésiques

Les équations géodésiques pour la métrique de Kerr sont obtenues en résolvant l'équation géodésique avec les symboles de Christoffel calculés précédemment. Voici les étapes principales pour dériver les équations géodésiques.

10.2.1 Formulation Générale

L'équation géodésique est donnée par :

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{22}$$

Pour chaque coordonnée x^λ (ici t, r, θ, ϕ), nous obtenons une équation différentielles couplée.

10.2.2 Équations Géodésiques en r et θ

En appliquant l'équation géodésique aux coordonnées r et θ, et en utilisant les expressions des symboles de Christoffel calculés, nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^r_{t\phi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{23}$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \Gamma^\theta_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^\theta_{t\phi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^\theta_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{24}$$

10.2.3 Simplification des Équations

En utilisant les symétries de la métrique de Kerr et les constantes de mouvement (énergie E, moment angulaire L, et constante de Carter Q), les équations géodésiques peuvent être simplifiées en un système d'équations différentielles du premier ordre.

Par exemple, l'énergie E et le moment angulaire L sont conservés et sont donnés par :

$$E = -g_{tt}\frac{dt}{d\tau} - g_{t\phi}\frac{d\phi}{d\tau} \tag{25}$$

$$L = g_{\phi t}\frac{dt}{d\tau} + g_{\phi\phi}\frac{d\phi}{d\tau} \tag{26}$$

La constante de Carter Q est liée à la symétrie supplémentaire de la métrique de Kerr et apparaît dans l'équation géodésique pour θ.

10.2.4 Formulation des Équations Géodésiques

Après simplification, les équations géodésiques pour les coordonnées r et θ prennent la forme :

$$\Sigma\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{R(r)} \tag{27}$$

$$\Sigma\frac{d\theta}{d\tau} = \sqrt{\Theta(\theta)} \tag{28}$$

où

$$R(r) = [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta[Q + (L - aE)^2 + \mu r^2] \tag{29}$$

$$\Theta(\theta) = Q - \cot^2\theta \left(a^2(1 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2\theta} \right) \tag{30}$$

Ces équations décrivent les trajectoires des particules dans l'espace-temps courbe autour du trou noir de Kerr.

10.3 Calcul de l'Ergosphère

La condition pour l'ergosphère est $g_{tt} = 0$. Pour la métrique de Kerr, cette condition mène à :

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) = 0 \tag{31}$$

En résolvant cette équation, on obtient :

$$1 - \frac{2Mr}{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\Sigma}{2M} \tag{32}$$

Substituant $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$, nous obtenons une équation quadratique en r :

$$2Mr = r^2 + a^2\cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta = 0 \tag{33}$$

Résolvant cette équation pour r :

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{34}$$

La solution positive correspond au rayon de l'ergosphère :

$$r_{\text{ergo}} = M + \sqrt{M^2 - a^2\cos^2\theta} \tag{35}$$

À l'équateur ($\theta = \frac{\pi}{2}$), cela simplifie à :

$$r_{\text{ergo, équatorial}} = M + \sqrt{M^2 - a^2} \tag{36}$$

11 Annexes

11.1 Démonstration des Symboles de Christoffel pour la Métrique de Kerr

Pour calculer les symboles de Christoffel $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ pour la métrique de Kerr, nous utilisons la définition :

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} \left(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\sigma\mu} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \right) \tag{37}$$

11.1.1 Calcul de Γ^r_{tt}

Prenons l'exemple du symbole de Christoffel Γ^r_{tt}.
Les composantes pertinentes du tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ sont :

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right), \tag{38}$$

$$g_{t\phi} = -\frac{2Mra\sin^2\theta}{\Sigma}, \tag{39}$$

$$g_{\phi\phi} = \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mra^2\sin^2\theta}{\Sigma}\right)\sin^2\theta, \tag{40}$$

$$g^{rr} = \frac{\Delta}{\Sigma}. \tag{41}$$

Calculons Γ^r_{tt} :

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr}\left(2\partial_t g_{rt} - \partial_r g_{tt}\right) \tag{42}$$

$$= -\frac{1}{2}g^{rr}\partial_r g_{tt} \quad (\text{car } g_{rt} = 0) \tag{43}$$

Calculons $\partial_r g_{tt}$:

$$\partial_r g_{tt} = -\partial_r\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) \tag{44}$$

$$= -\left(0 - \frac{2M\Sigma - 2Mr\partial_r\Sigma}{\Sigma^2}\right) \tag{45}$$

$$= \frac{2M\Sigma - 2Mr(2r)}{\Sigma^2} \tag{46}$$

$$= \frac{2M(r^2 + a^2\cos^2\theta) - 4Mr^2}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \tag{47}$$

$$= \frac{2Mr^2 + 2Ma^2\cos^2\theta - 4Mr^2}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \tag{48}$$

$$= \frac{-2Mr^2 + 2Ma^2\cos^2\theta}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \tag{49}$$

$$= \frac{2M(a^2\cos^2\theta - r^2)}{(r^2 + a^2\cos^2\theta)^2} \tag{50}$$

Ainsi,

$$\Gamma^r_{tt} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\Delta}{\Sigma}\cdot\frac{2M(a^2\cos^2\theta - r^2)}{\Sigma^2} \tag{51}$$

$$= -\frac{\Delta M(a^2\cos^2\theta - r^2)}{\Sigma^3} \tag{52}$$

11.1.2 Calcul de $\Gamma^r_{t\phi}$

Un autre exemple est $\Gamma^r_{t\phi}$.

$$\Gamma^r_{t\phi} = \frac{1}{2} g^{rr} \left(\partial_t g_{r\phi} + \partial_\phi g_{rt} - \partial_r g_{t\phi} \right) \tag{53}$$

$$= -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{t\phi} \quad (\text{car } g_{r\phi} = 0) \tag{54}$$

Calculons $\partial_r g_{t\phi}$:

$$\partial_r g_{t\phi} = \partial_r \left(-\frac{2Mra \sin^2\theta}{\Sigma} \right) \tag{55}$$

$$= -\frac{2Ma \sin^2\theta \Sigma - 2Mra \sin^2\theta \partial_r \Sigma}{\Sigma^2} \tag{56}$$

$$= -\frac{2Ma \sin^2\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta) - 2Mra \sin^2\theta \cdot 2r}{\Sigma^2} \tag{57}$$

$$= -\frac{2Ma \sin^2\theta (r^2 + a^2 \cos^2\theta - 2r^2)}{\Sigma^2} \tag{58}$$

$$= -\frac{2Ma \sin^2\theta (a^2 \cos^2\theta - r^2)}{\Sigma^2} \tag{59}$$

Ainsi,

$$\Gamma^r_{t\phi} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta}{\Sigma} \cdot \left(-\frac{2Ma \sin^2\theta (a^2 \cos^2\theta - r^2)}{\Sigma^2} \right) \tag{60}$$

$$= \frac{\Delta Ma \sin^2\theta (a^2 \cos^2\theta - r^2)}{\Sigma^3} \tag{61}$$

11.2 Démonstration des Équations Géodésiques

Les équations géodésiques pour la métrique de Kerr sont obtenues en résolvant l'équation géodésique avec les symboles de Christoffel calculés précédemment. Voici les étapes principales pour dériver les équations géodésiques.

11.2.1 Formulation Générale

L'équation géodésique est donnée par :

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \tag{62}$$

Pour chaque coordonnée x^λ (ici t, r, θ, ϕ), nous obtenons une équation différentielle couplée.

11.2.2 Équations Géodésiques en r et θ

En appliquant l'équation géodésique aux coordonnées r et θ, et en utilisant les expressions des symboles de Christoffel calculés, nous obtenons les équations différentielles suivantes :

$$\frac{d^2r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^r_{t\phi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + \Gamma^r_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^r_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{63}$$
$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + \Gamma^\theta_{tt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + 2\Gamma^\theta_{t\phi}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\phi}{d\tau} + \Gamma^\theta_{\phi\phi}\left(\frac{d\phi}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^\theta_{rr}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 = 0 \tag{64}$$

11.2.3 Simplification des Équations

En utilisant les symétries de la métrique de Kerr et les constantes de mouvement (énergie E, moment angulaire L, et constante de Carter Q), les équations géodésiques peuvent être simplifiées en un système d'équations différentielles du premier ordre.

Par exemple, l'énergie E et le moment angulaire L sont conservés et sont donnés par :

$$E = -g_{tt}\frac{dt}{d\tau} - g_{t\phi}\frac{d\phi}{d\tau} \tag{65}$$
$$L = g_{\phi t}\frac{dt}{d\tau} + g_{\phi\phi}\frac{d\phi}{d\tau} \tag{66}$$

La constante de Carter Q est liée à la symétrie supplémentaire de la métrique de Kerr et apparaît dans l'équation géodésique pour θ.

11.2.4 Formulation des Équations Géodésiques

Après simplification, les équations géodésiques pour les coordonnées r et θ prennent la forme :

$$\Sigma\frac{dr}{d\tau} = \sqrt{R(r)} \tag{67}$$
$$\Sigma\frac{d\theta}{d\tau} = \sqrt{\Theta(\theta)} \tag{68}$$

où

$$R(r) = [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta[Q + (L - aE)^2 + \mu r^2] \tag{69}$$
$$\Theta(\theta) = Q - \cot^2\theta\left(a^2(1 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2\theta}\right) \tag{70}$$

Ces équations décrivent les trajectoires des particules dans l'espace-temps courbe autour du trou noir de Kerr.

11.2.5 Équation Géodésique en ϕ

L'équation géodésique pour ϕ est obtenue en combinant les expressions pour E et L et en résolvant pour $\frac{d\phi}{d\tau}$.

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{2MarE + (\Sigma - 2Mr)L}{\Delta\Sigma\sin^2\theta} \tag{71}$$

11.3 Calcul de l'Ergosphère

La condition pour l'ergosphère est $g_{tt} = 0$. Pour la métrique de Kerr, cette condition mène à :

$$g_{tt} = -\left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) = 0 \tag{72}$$

En résolvant cette équation, on obtient :

$$1 - \frac{2Mr}{\Sigma} = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{\Sigma}{2M} \tag{73}$$

Substituant $\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2\theta$, nous obtenons une équation quadratique en r :

$$2Mr = r^2 + a^2 \cos^2\theta \quad \Rightarrow \quad r^2 - 2Mr + a^2 \cos^2\theta = 0 \tag{74}$$

Résolvant cette équation pour r :

$$r = M \pm \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta} \tag{75}$$

La solution positive correspond au rayon de l'ergosphère :

$$r_{\text{ergo}} = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2\theta} \tag{76}$$

À l'équateur ($\theta = \frac{\pi}{2}$), cela simplifie à :

$$r_{\text{ergo, équatorial}} = M + \sqrt{M^2 - a^2} \tag{77}$$

12 Références

— Misner, C. W., Thorne, K. S., & Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W.H. Freeman.

— Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press.

— Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press.

— Poisson, E., Pound, I. S., & Vega, H. J. (2014). *The Motion of Point Particles in Curved Spacetime*. Living Reviews in Relativity, 17(1), 4.

— Hawking, S. W., & Ellis, G. F. R. (1973). *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press.

— Thorne, K. S. (1994). *Black Holes and Time Warps : Einstein's Outrageous Legacy*. W. W. Norton & Company.